CÔNG TY TNHH GIÁO DỤC THIÊN AN

HỌC VIỆN PARIS - 134 THỐNG NHẤT, PHÚ THỌ HÒA, TP HỒ CHÍ MINH

THẠC SĨ TOÁN GIẢI TÍCH

MATHEMATICAL ANALYSIS

giaoducthienan.vn

NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

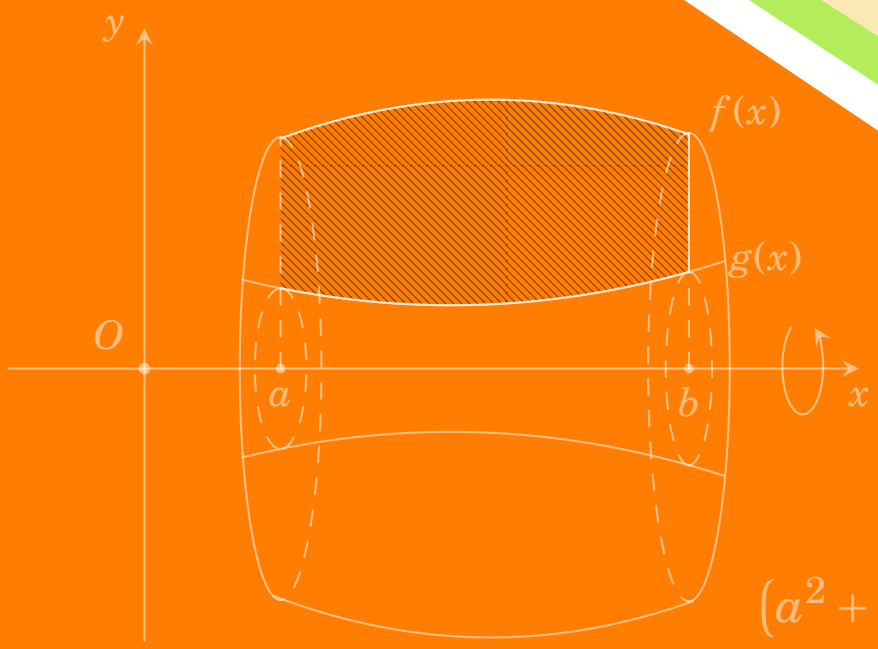
TÀI LIỆU HỌC TẬP CHUẨN CẤU TRÚC MỚI

TOÁN 12

HỌC KÌ 2 – NĂM HỌC 2025 – 2026

- **Tóm tắt chi tiết lí thuyết theo bài**
- **Phân chia dạng toán theo bài**
- **Bài tập từng bài chuẩn cấu trúc mới của BGD**

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}$$



$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$$(a^2+b^2) \cdot (c^2+d^2) \geq (a \cdot c + b \cdot d)^2$$

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI ĐỊA

Mục lục

PHẦN I MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương 4. NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN 7

Bài 1. Nguyên hàm 7

A Tóm tắt lý thuyết ... 7

Dạng 1. Nguyên hàm của hàm đa thức ... 8

Dạng 2. Nguyên hàm của hàm số mũ ... 23

Dạng 3. Nguyên hàm của hàm số lượng giác ... 30

Dạng 4. Nguyên hàm kết hợp nhiều hàm số ... 39

Dạng 5. Nguyên hàm hàm ẩn ... 45

Dạng 6. Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm ... 50

Bài 2. Tích Phân 61

A Tóm tắt lý thuyết ... 61

B Các dạng toán thường gặp ... 63

Dạng 1. Tích phân hàm đa thức, căn, giá trị tuyệt đối ... 63

Dạng 2. Tích phân của hàm số lượng giác, mũ ... 86

Dạng 3. Tích phân hàm phân nhánh ... 99

Dạng 4. Tích phân hàm ẩn ... 106

Dạng 5. Bài toán thực tế – liên môn ... 119

Bài 3. Ứng dụng hình học của tích phân 131

A Tóm tắt lý thuyết ... 131

B Các dạng toán thường gặp ... 132

Dạng 1. Diện tích hình phẳng, thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay ... 132

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến hình vẽ ... 153

Dạng 3. Bài toán thực tế ... 177

Dạng 4. Ứng dụng vật lí của tích phân ... 188

Bài 4. Bài tập cuối chương IV 193

A Bài tập tự luận ... 193

B Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn ... 195

C Tích phân tronng đề thi THPT QG ... 223

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Thọ Nguyễn Hữu Chung Kiên

D Bài tập trắc nghiệm đúng sai 228

E Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn 233

PHẦN II HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương 5. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU 241

Bài 1. Phương trình mặt phẳng 241

A Tóm tắt lý thuyết 241

B Các dạng toán thường gặp 243

Dạng 1. Tích có hướng và ứng dụng 243

Dạng 2. Xác định vectơ pháp tuyến, cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng 248

Dạng 3. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng 255

Dạng 4. Vị trí tương đối, góc, khoảng cách 266

Dạng 5. Các bài toán thực tiễn - Cực trị 281

Bài 2. Phương trình đường thẳng trong không gian 292

A Tóm tắt lý thuyết 292

B Các dạng toán thường gặp 294

Dạng 1. Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng 294

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng 299

Dạng 3. Vị trí tương đối. Góc. Khoảng cách 326

Dạng 4. Tọa độ hóa. Bài toán thực tiễn. Cực trị 354

Bài 3. Phương trình mặt cầu 372

A Tóm tắt lý thuyết 372

B Các dạng toán thường gặp 372

Dạng 1. Phương trình mặt cầu 372

Dạng 2. Vị trí tương đối 387

Dạng 3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất 412

Dạng 4. Các bài toàn thực tiễn 440

Bài 4. Bài tập cuối chương V 452

A Ôn tập tổng hợp 452

B Bài tập ôn theo dạng 459

PHẦN III THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Chương 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN 493

Bài 1. Xác suất có điều kiện 493

A Tóm tắt lý thuyết ... 493

B Các dạng toán thường gặp ... 493

Dạng 1. Tính xác suất có điều kiện theo định nghĩa ... 493

Dạng 2. Xác suất có điều kiện, sơ đồ hình cây ... 497

Dạng 3. Công thức nhân xác suất ... 507

Bài 2. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes 518

A Tóm tắt lý thuyết ... 518

B Các dạng toán thường gặp ... 518

Dạng 1. Tính xác suất theo công thức xác suất toàn phần ... 518

Dạng 2. Công thức Bayes ... 528

Bài 3. Bài tập cuối chương VI 541

A Bài tập tự luận ... 541

B Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn ... 544

C Bài tập trắc nghiệm đúng sai ... 545

D Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn ... 552

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

PHẦN I

MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

12 TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12

Chương 4

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 4 §1. NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Khái niệm nguyên hàm

Kí hiệu $\mathcal{K}$ là khoảng hoặc đoạn, hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1 Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathcal{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathcal{K}$.

Tổng quát, ta có:

Định nghĩa 2 Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x) + C$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathcal{K}$;
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc $\mathcal{K}$.

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Ta gọi $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathcal{K}$, kí hiệu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ và viết

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Biểu thức $f(x)\,\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$.
Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathcal{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathcal{K}$.
Bài toán tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ ràng khoảng $\mathcal{K}$ thì được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của hàm số đó.

b) Từ định nghĩa nguyên hàm, ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

2 Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

- $\int 0\,\mathrm{d}x = C.$
- $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C.$
- $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1).$
- $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$
- $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + C.$
- $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$
- $\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1).$

Người ta thường viết $\int \mathrm{d}x$ *thay cho* $\int 1 \,\mathrm{d}x$.

3 Tính chất cơ bản của nguyên hàm

- $\int kf(x) \,\mathrm{d}x = k \int f(x) \,\mathrm{d}x$, với $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x.$

DẠNG 1 Nguyên hàm của hàm đa thức

1. Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

- $\int 0 \,\mathrm{d}x = C;$
- $\int 1 \,\mathrm{d}x = x + C;$
- $\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1).$
- $\int \dfrac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C;$

2. Nguyên hàm của hàm phân thức, căn

- $\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$
- $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C.$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C.$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u = 2\sqrt{u} + C.$

Dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$$

3. Tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x) \,\mathrm{d}x = k \int f(x) \,\mathrm{d}x, \ k \in \mathbb{R}, \ k \neq 0.$
- $\int [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x.$

4. Lũy thừa với số mũ thực: Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó

- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta};$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha;$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha};$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}.$

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Hàm số $F(x)=2x^3-2x+1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=6x^2-2$. **B.** $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x$.

C. $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+x+C$. **D.** $f(x)=6x^2-2+C$.

Ví dụ 2 (Mức độ 1). Tìm

a) $\int x^5\,\mathrm{d}x$; b) $\int x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 3 (Mức độ 2). Tìm

a) $\int (x^2+x)\,\mathrm{d}x$; b) $\int (4x^3-3x^2)\,\mathrm{d}x$; c) $\int (3x^2+1)\,\mathrm{d}x$; d) $\int (2x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 4 (Mức độ 2). Tìm

a) $\int (2x+5)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \left(2x^2-3x+5\right)\,\mathrm{d}x$; c) $\int 2x(x^3-x+2)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 5 (Mức độ 1). Tìm các nguyên hàm dưới đây:

a) $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \left(2x^2+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 6 (Mức độ 2). Tìm các nguyên hàm dưới đây:

a) $\int \frac{2x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x$; b) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \left(\frac{3}{x}-5\sqrt[3]{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 7 (Mức độ 1). Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=x^4$?

A. $-\frac{x^5}{5}$. **B.** $4x^3$. **C.** $\frac{x^5}{5}+1$. **D.** $-4x^3-1$.

Ví dụ 8 (Mức độ 2). Hàm số $F(x)=x^3+5$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=3x^2$. **B.** $f(x)=\frac{x^4}{4}+5x+C$.

C. $f(x)=\frac{x^4}{4}+5x$. **D.** $f(x)=3x^2+5x$.

Ví dụ 9 (Mức độ 2). Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)=3x^2-2x$ biết $F(2)=9$.

A. $F(x)=6x-3$. **B.** $F(x)=x^3-x^2+5$. **C.** $F(x)=6x+9$. **D.** $F(x)=x^3-x^2+9$.

Ví dụ 10 (Mức độ 2). Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x}+1\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}\ln|x|+x^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln|x|+x+C$. **C.** $\ln|x|+x+C$. **D.** $\frac{1}{2}\ln|x|+1+C$.

Ví dụ 11 (Mức độ 2). Tính nguyên hàm $\int \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,\mathrm{d}x$.

A. $-2\sqrt{3-x}+C$. **B.** $2\sqrt{3-x}+C$. **C.** $-\sqrt{3-x}+C$. **D.** $\sqrt{3-x}+C$.

Ví dụ 12. Cho hàm số $F(x)=x^3-2x+1, x\in\mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Th.S. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1)=3$ thì $G(x)=F(x)-1, x\in\mathbb{R}$.		
b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3, x\in\mathbb{R}$.		
c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0)=0$ thì $K(x)=F(x)+1, x\in\mathbb{R}$.		
d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2)=4$ thì $M(x)=F(x)-1, x\in\mathbb{R}$.		

Ví dụ 13 (Mức độ 2). Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Hàm số $f(x)=x^5$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\dfrac{x^6}{6}$.		
b) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$. Khi đó $\displaystyle\int[3f(x)+2x]\,\mathrm{d}x=3F(x)+2+C$.		
c) $\displaystyle\int(2x^5+3)\,\mathrm{d}x=\frac{x^6}{3}+3x+C$.		
d) $\displaystyle\int x(2x-3)^2\,\mathrm{d}x=x^4-4x^3+\frac{9}{2}x^2+C$.		

Ví dụ 14 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x+1\rvert+C$.		
b) $\displaystyle\int\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x\sqrt{2x}+C$.		
c) $\displaystyle\int\frac{x+1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln\lvert 2x-1\rvert+C$.		
d) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C$.		

Ví dụ 15. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-4x+1$ và $F(2)=2$. Tính $F(3)$.

KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 16 (Mức độ 2). Biết $F(x)=6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{1-x}}$. Tính a?

KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 17 (Mức độ 3). Biết rằng hàm số $F(x)=mx^3+(3m+n)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$. Tính $m+n$.

KQ: ☐☐☐☐

2 Bài tập tự luận

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=3x^2+2x-1$; b) $f(x)=x^3-x$; c) $f(x)=(2x+1)^2$; d) $f(x)=\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^2$.

Bài 2. Tính

a) $\int (x+2)(x^2-2x+4)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{3x^2-1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Bài 3. Tìm

a) $\int (x-2)^2\,\mathrm{d}x$; b) $\int (x-1)(x-3)\,\mathrm{d}x$; c) $\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$; d) $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Bài 4. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(1;2)$ và có hệ số góc của tiếp tuyến tại mỗi điểm $(x;f(x))$ là $\dfrac{1-x}{x^2}$ với $x>0$. Tìm hàm số $f(x)$.

Bài 5. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$. Từ đó, tìm $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$

Bài 6 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x)=3x^2+x$; b) $f(x)=9x^2-2x+7$; c) $f(x)=\int (4x-3)(x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

Bài 7 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=6x^5+2x-3$, biết $F(-1)=-5$.

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng, $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính giá trị $f(4)$.

Bài 9 (Mức độ 3). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x-1)^2$ và điểm M trùng với gốc toạ độ khi nó nằm trên trục tung. Tìm biểu thức $f(x)$.

Bài 10 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^2$.

Bài 11 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $\int \left(3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,\mathrm{d}x$.

Bài 12 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}\,(7x^2-3)$.

Bài 13 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $\int \dfrac{(2x+1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Bài 14. Tính

a) $\int \left(3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sqrt{x}(7x^2-3)\,\mathrm{d}x\ (x>0)$;

c) $\int \dfrac{(2x+1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$; d) $\int \left(2^x+\dfrac{3}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Bài 15 (Mức độ 3). Biết rằng trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$ **B.** $\int F(x)\mathrm{d}x = F'(x) + C.$

C. $\int F(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$ **D.** $\int F'(x)\mathrm{d}x = F'(x) + C.$

Câu 2. $\int (2x)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$ **B.** $\dfrac{2^{\sqrt{2}}x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C.$ **C.** $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}}}{\ln(2x)} + C.$ **D.** $(2x)^{\sqrt{2}} + C.$

Câu 3. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Mệnh đề nào sau đây **sai**.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$ **B.** $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$

C. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f'(x).$ **D.** $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x).$

Câu 4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C.$ **B.** $x^2 + 6x + C.$ **C.** $2x^2 + C.$ **D.** $2x^2 + 6x + C.$

Câu 5. $\int x^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2x + C.$ **B.** $\dfrac{1}{3}x^3 + C.$ **C.** $x^3 + C.$ **D.** $3x^3 + C.$

Câu 6. Tính nguyên hàm của hàm số $y = -4x^3 + 2x^2 + x - 4.$

A. $-x^4 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 4x + C.$ **B.** $-x^4 + \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 - 4x - 1 + C.$

C. $-x^4 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x - 2 + C.$ **D.** $-\dfrac{3x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 4x + C.$

Câu 7. Tính $\int (4x+2)^2\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $\dfrac{8x^3}{3} + 16x^2 + 4x + C.$ **B.** $\dfrac{25x^3}{3} + 8x^2 + 4x + C.$

C. $\dfrac{16x^3}{3} + 8x^2 + 4x + C.$ **D.** $\dfrac{16x^3}{3} + 8x^2 + 7x + C.$

Câu 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - 4$ và $F(3) = -\dfrac{23}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x - 4.$ **B.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 4 + C.$

C. $F(x) = x\,(x-8).$ **D.** $F(x) = \dfrac{x\,(8-x)}{2} + C.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C.$ **B.** $\dfrac{x^3}{3} + x + C.$ **C.** $6x + C.$ **D.** $x^3 + x + C.$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[2]{x^5}$ bằng

A. $\dfrac{4x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$ **B.** $\dfrac{6x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$ **C.** $\dfrac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$ **D.** $-\dfrac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$. **B.** $3x^2+1+C$. **C.** x^3+x+C. **D.** x^4+x^2+C.

Câu 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$. **B.** x^4+x^2+C. **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$.

Câu 13. Nguyên hàm của hàm số $y=\frac{3}{x}$ bằng

A. $\ln x+C$. **B.** $-\ln x+C$. **C.** $-3\ln x+C$. **D.** $3\ln x+C$.

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ thì $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$.

B. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k\neq 0$).

C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.

D. $\int [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 15. Nguyên hàm $I=\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **B.** $-\ln|2x+1|+C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **D.** $\ln|2x+1|+C$.

Câu 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^2+x+1$ là

A. $\frac{2x^3}{3}+x^2+x+C$. **B.** $4x+1$. **C.** $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$. **D.** $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$.

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{(1+x)^2}$.

A. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{(x+1)^3}+C$. **B.** $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x+1}+C$.

C. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}+C$. **D.** $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{(x+1)^3}+C$.

Câu 19. Cho nguyên hàm $I=\int \frac{2x-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I=2x+\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$. **B.** $I=\int \left(2-\frac{1}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x$.

C. $I=\int \frac{2x}{x-1}\,\mathrm{d}x$. **D.** $I=\int \frac{2x-1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 20. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
GV. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$.

Câu 21. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\dfrac{x^{2023}}{2023}+1$. **B.** $\dfrac{x^{2023}}{2023}$. **C.** $y = 2022x^{2021}$. **D.** $\dfrac{x^{2023}}{2023}-1$.

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

A. $\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$. **B.** $\dfrac{1}{9}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 2024x + C$.

C. $\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 2024x + C$. **D.** $\dfrac{1}{9}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 2024x + C$.

Câu 23. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 6x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + C$. **B.** $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$.

C. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 + 6x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$.

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6 + C$. **B.** $(5x+3)^4 + C$. **C.** $\dfrac{(5x+3)^6}{30} + C$. **D.** $\dfrac{(5x+3)^4}{30} + C$.

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{x} + C$.

Câu 26 (Mức độ 1). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$.

A. $\int x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + C$. **B.** $\int x^2\,\mathrm{d}x = 2x + C$. **C.** $\int x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C$. **D.** $\int x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}$.

Câu 27 (Mức độ 1). Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 12x^5$?

A. $y = 12x^6 + 5$. **B.** $y = 2x^6 + 3$. **C.** $y = 12x^4$. **D.** $y = 60x^4$.

Câu 28 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$.

A. $\dfrac{x^4}{4} - x^2 + C$. **B.** $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + C$. **C.** $\dfrac{x^4}{4} + C$. **D.** $x^2 + C$.

Câu 29 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. **B.** $F(x) = x^3 + x + C$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Câu 30 (Mức độ 2). Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$. **B.** $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Câu 31 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1+3x^3)$ là

A. $2x\left(x + \dfrac{3}{4}x^4\right) + C$. **B.** $x^2\left(1 + \dfrac{6x^3}{5}\right) + C$. **C.** $x^2\left(1 + \dfrac{3}{2}x^2\right) + C$. **D.** $x^2\left(x + \dfrac{3}{4}x^3\right) + C$.

Câu 32 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)$ là

A. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$. **B.** $F(x)=2x+3+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}x^2+2x+C$.

Câu 33 (Mức độ 2). Hàm số nào sau đây **không** phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-3)^4$?

A. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}+x$. **B.** $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}$.

C. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}+2020$. **D.** $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}-1$.

Câu 34 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Tìm nguyên hàm $I=\displaystyle\int[2f(x)+f'(x)+1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2F(x)+f(x)+x+C$. **B.** $I=2F(x)+xf(x)+C$.

C. $I=2xF(x)+f(x)+x+1$. **D.** $I=2xF(x)+f(x)+x+C$.

Câu 35 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+2x+3x^2$ thỏa mãn $F(1)=2$. Tính $F(0)+F(-1)$.

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 36 (Mức độ 2). Tìm m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 37 (Mức độ 2). Tìm các giá trị thực của m để $F(x)=mx^3+x^2-3x+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-x^2+2x-3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=\dfrac{1}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 38 (Mức độ 3). Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x)=3x^2+2x+1$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng a.

A. $F(x)=x^2+x+a$. **B.** $F(x)=\cos 2x+a-1$.

C. $F(x)=x^3+x^2+x+1$. **D.** $F(x)=x^3+x^2+x+a$.

Câu 39 (Mức độ 3). Biết rằng $F(x)=ax^3+(a+b)x^2+(2a-b+c)x+1$ là một nguyên hàm của $f(x)=3x^2+6x+2$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=5$.

Câu 40 (Mức độ 3). Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=|2x-4|$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, ở đó C, C' là các hằng số tùy ý?

A. $F(x)=|x^2-4x|+C$. **B.** $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+2C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+2C-8 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

C. $F(x)=|x^2-4x+C|$. **D.** $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+C' & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Câu 41. Tính $\displaystyle\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{4}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$. **B.** $\dfrac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C$. **C.** $\dfrac{8}{15}x\sqrt[15]{x^7}+C$. **D.** $\dfrac{4}{15}x\sqrt[15]{x^7}+C$.

Câu 42. Tính $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C.$ **B.** $\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

C. $x\sqrt[5]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[17]{x^5}+\sqrt[4]{x^3}+C.$ **D.** $\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x}-2x\sqrt[17]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x+C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+4x+C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+4x+C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3+4x+C.$

Câu 44. Trên khoảng $(0;+\infty)$, cho hàm số $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+C.$

Câu 45. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C.$

Câu 46 (Mức độ 2). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2x-1}+C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-2\sqrt{2x-1}+C.$

Câu 47 (Mức độ 2). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{5-3x}$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}+C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x}+C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}+C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(5-3x)\sqrt{5-3x}+C.$

Câu 48 (Mức độ 2). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C.$

Câu 49 (Mức độ 2). Nguyên hàm $\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln|x+1|+\ln|x+2|+C.$ **B.** $\ln|x+1|+C.$

C. $\ln|x+2|+C.$ **D.** $\ln|x+1|-\ln|x+2|+C.$

Câu 50 (Mức độ 3). Nguyên hàm $\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $3\ln|x-2|-2\ln|x-1|+C.$ **B.** $3\ln|x-2|+2\ln|x-1|+C.$

C. $2\ln|x-2|-3\ln|x-1|+C.$ **D.** $2\ln|x-2|+3\ln|x-1|+C.$

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 51. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, C là một hằng số.

Phát biểu	Đ	S
a) $\int f(x)\,dx = f'(x) + C.$		
b) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int f'(x)\,dx = f(x).$		
d) $\int f''(x)\,dx = f'(x) + C.$		

Câu 52. Xét hàm số $f(x) = (ax+b)^n$ với $a \neq 0$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ thì

Phát biểu	Đ	S
a) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C.$		
b) $f'(x) = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C.$		
c) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, thỏa $F\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ thì $F(0) = \dfrac{b^{n+1}}{a(n+1)}$.		
d) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C.$		

Câu 53. Cho hàm số $F(x) = x^3 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1) = 3$ thì $G(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.		
b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1) = -3$ thì $H(x) = F(x) - 3, x \in \mathbb{R}$.		
c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0) = 0$ thì $K(x) = F(x) + 1, x \in \mathbb{R}$.		
d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2) = 4$ thì $M(x) = F(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.		

Câu 54. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $F(1) = 0$ thì $F(2) = 6$.		
b) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(-1) = -4$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(1) - F(-1) = -6$.		
d) $F(1) + F(2) - 2F(0) = 2$.		

Câu 55. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

Phát biểu	Đ	S
a) $f'(x) = 3x^2 + 3$.		
b) Hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.		
c) Đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(2; 10)$. Giá trị $F(-2) = 6$.		
d) $F(2) - F(0) = -6$.		

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 56. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x-3}$.		
b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln(x-1)+C$.		
d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln\lvert x-3\rvert+C$.		

Câu 57. Gọi $F(x)$ và một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$, với C là hằng số bất kì.		
b) $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, với $a\neq 0$ và C là hằng số bất kì.		
c) $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=kF(x)+C$, với $k\neq 0$ và C là hằng số bất kì.		
d) $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(x)+C$.		

Câu 58. Biết rằng $y=\ln x$ có đạo hàm $y'=\dfrac{1}{x}$ với mọi $x>0$. Khi đó ta có

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$ với mọi $x\neq 0$.		
b) $\displaystyle\int \frac{1}{x+m}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x+m\rvert+C$ với mọi $x\neq -m$.		
c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert 2x+3\rvert+C$ với mọi $x\neq -\frac{3}{2}$.		
d) $\displaystyle\int \frac{1}{-x+2}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert -x+2\rvert+C$ với mọi $x\neq 2$.		

Câu 59. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int f(x)dx=f'(x)+C$.		
b) $\displaystyle\int f'(x)dx=f(x)+C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int f'(x)dx=f(x)$.		
d) $\displaystyle\int f''(x)dx=f'(x)+C$.		

Câu 60 (Mức độ 2). Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$.		
b) Nếu một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ là $F(x)$ thì $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.		
c) $\displaystyle\int f(2x-3)\,\mathrm{d}x=2F(2x-3)-3+C$.		

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
d) Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x^2 + x + 1 + C$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số thì $f(2025) = 8567$.		

Câu 61 (Mức độ 3). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x^2 + 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$.		
b) $f(2) = 30$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(x) = x^4 + x^2 + 2$.		
d) $F(1) = 1$.		

Câu 62 (Mức độ 3). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x^2 - x - 3$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và tiếp tuyến của $F(x)$ tại $M(0;2)$ có hệ số góc bằng 0.

Phát biểu	Đ	S
a) $f'(-1) = 0$.		
b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 3x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $f(2) = -\dfrac{7}{3}$.		
d) $F(1) = \dfrac{1}{2}$.		

Câu 63 (Mức độ 2). Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x$ là $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$.		
b) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ là $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + C$.		
c) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ là $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + C$.		
d) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+2)^9$ là $F(x) = \dfrac{(x+2)^{11}}{11} - \dfrac{(x+2)^{10}}{5} + C$.		

Câu 64. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$.		
b) $\displaystyle\int \frac{1}{2023x^{2024}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$.		
c) $\displaystyle\int (2x - 2024)^2\,\mathrm{d}x = x - 1012 + C$.		
d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$.		

Câu 65. Cho các mệnh đề sau đây

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln\lvert x\rvert + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \dfrac{1}{x}$.		
b) $F(x) = \dfrac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
c) $F(x)=\frac{3}{2}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt[3]{x}+\frac{5}{4}x\sqrt[4]{x}+C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$.		
d) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2024x+C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^3-2024x}{x}$.		

Câu 66 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{x}}+C$.		
b) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$.		
c) $\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.		
d) Trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\int \frac{x+2}{x-1}\,\mathrm{d}x=x+3\ln(x-1)+C$.		

Câu 67 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Nguyên hàm $\int \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$.		
b) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ là $F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.		
c) Nguyên hàm $\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}=3\ln\lvert x-2\rvert-\frac{4}{x-2}+C$.		
d) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là $F(x)=2\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert x+2\rvert+C$.		

Câu 68 (Mức độ 2). Hàm số $f(x)=ax+\frac{b}{x^2}$ $(x\neq 0)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $F(-1)=1$ và $F(1)=4$.		
b) $a=\frac{3}{2}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a+b=3$.		
d) $f(1)=0$.		

Câu 69 (Mức độ 2). Gọi $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}$ $(x>-1)$.

Phát biểu	Đ	S
a) Hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.		
b) Nguyên hàm $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$.		
c) $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-8\sqrt{x+1}+C$.		
d) Nếu $F(8)=-6$ thì $F(0)=-\frac{22}{3}$.		

Câu 70 (Mức độ 3). Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}$ và $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x)=\dfrac{1}{x}+C_1$.		
b) $G(x)=\dfrac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+C_2$.		
c) Nếu $G(3)=\dfrac{8}{3}$ thì $C_2=0$.		
d) Biết $G(3)=\dfrac{8}{3}$ và $G(3)-F(3)=6$ thì $F(8)=\dfrac{23}{8}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 71. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-2)(2x+1)$ và $F(-1)=\dfrac{1}{6}$. Tính $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ *(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 72. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó hàm số $kF(2x+2024)$ là nguyên hàm của hàm số $f(2x+2024)$. Hãy tìm k *(Làm tròn kết quả tới hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 73. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$; biết $F(1)=2$. Tính $F(2)$ *(Làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 74. Biết $F(x)$ là một họ nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ và $F(0)=\dfrac{1}{2}$. Khi đó $F(1)+F(2)$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 75. Biết $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x=a\ln|x+3|+\frac{2b}{x+3}+C$ với a,b là các số nguyên. Tính giá trị của $T=2a^2+b$. KQ: | | | | |

Câu 76. Cho $f'(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{3}$. Biết phương trình có $f(x)=-1$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$. Tính $T=2025^{x_0}$. KQ: | | | | |

Câu 77. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}$ $(x\neq 0)$. Biết $F(-1)=1$, $F(1)=4$, $f(1)=0$. Tính giá trị của $M=2a-b$ *(làm tròn tới hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=|x-1|+|x-2|$, $f(0)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1; f(4)=2$. Tính giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)$. KQ: | | | | |

Câu 79 (Mức độ 1). Biết hàm số $y=x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $y=ax^n$. Tính $a+n$.

KQ: | | | | |

Câu 80 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-3x^2+2x-2$ thỏa mãn $F(1)=9$. Tính $F(0)$. KQ: | | | | |

Câu 81 (Mức độ 2). Biết họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\left(1+3x^3\right)$ là $F(x)=ax^5+bx^2+C$. Tính $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 82 (Mức độ 3). Cho $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+2024$ và $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=x^2+2025$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot g(x)$ và $F(1)=3$, tính $F(10)$. KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 83 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ và $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Tính $f(-1)$. KQ: | | | | |

Câu 84 (Mức độ 1). Nguyên hàm $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = a\ln|5x-2| + C$. Tính a? KQ: | | | | |

Câu 85 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ là $F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(ax+b) + C$. Tính giá trị của $a-b$. KQ: | | | | |

Câu 86 (Mức độ 2). Nguyên hàm của hàm số $\int \sqrt[3]{3x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}(3x+1)^{\frac{4}{3}} + C$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, tính giá trị của $a \cdot b$? KQ: | | | | |

Câu 87 (Mức độ 3). Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Tìm nghiệm của phương trình $F(x) = x$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

Câu 88 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$; $f(0) = 1$; $f(1) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 89. Tính hệ số của x^2 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$?

KQ: | | | | |

Câu 90. Tính hệ số của x^3 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \dfrac{4m}{x^3} + \dfrac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số). KQ: | | | | |

Câu 91. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Tính tổng hệ số của biến x?

KQ: | | | | |

Câu 92. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}$. Tính tổng hệ số của bậc 3 và bậc 1 *(làm tròn đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

Câu 93. Tính $\int \left(\dfrac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 94. Tính $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4}\right)\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 95. Tính $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

Câu 96. Tính $\int \left(2\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 97. Tính $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x = a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\sqrt{x}$. Khi đó, tính giá trị của tổng $a+b+c$?

KQ: | | | | |

Câu 98. Tính $\int \dfrac{1}{\sqrt{5x}-\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{x}+C$. Khi đó, tính giá trị $a+b$?

KQ: | | | | |

Câu 99. Tính $\int \left(x^2-1\right)^3\,\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục)*.

KQ: | | | | |

Câu 100. Tính $\int \left(2-x^2\right)^4\,\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục)*.

KQ: | | | | |

Câu 101. Tính $\int \left(x-\sqrt[3]{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục)*.

KQ: | | | | |

Câu 102. Tính $\int \left(\dfrac{x^2+2\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$. Khi đó, tính giá trị tổng hệ số chứa biến *(làm tròn đến hàng phần chục)*.

KQ: | | | | |

Câu 103. Tìm m để $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

KQ: | | | | |

Câu 104. Tìm a, b, c để $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-2)\sqrt{x^2-4x}$. Khi đó, tính giá trị biểu thức $a+b+c$?

KQ: | | | | |

Câu 105. Tìm a, b, c để $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$. Khi đó, tính giá trị biểu thức $a+b+c$?

KQ: | | | | |

DẠNG 2 Nguyên hàm của hàm số mũ

- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 18 (Mức độ 1). Tìm các nguyên hàm dưới đây:

a) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int 4^x\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 19 (Mức độ 2). Tìm các nguyên hàm dưới đây:

a) $\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int \dfrac{1}{3^x}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 20 (Mức độ 2). Tìm các nguyên hàm dưới đây:

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

a) $\int (2\mathrm{e}^x - 5^x)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \left(2\cdot 3^x - \frac{1}{3}\cdot 7^x\right)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+2} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2 + C$.

Ví dụ 22 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.		
b) $\int \mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1} + C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int 5^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot 5^{3x} + C$.		
d) $\int (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.		

Ví dụ 23 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x\cdot \mathrm{e}^{x^2}$ và $f(0) = 2$. Tính giá trị của $f(1)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 16. Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x\ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) $F(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ và $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Bài 17. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $f'(x) = 2x - 6\mathrm{e}^{-2x}$ và $f(0) = -2$.

Bài 18 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3^x$.

Bài 19. Tìm:

a) $\int (5^x + 1)(5^x - 1)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \mathrm{e}^{-0,5x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int 2^{x-1}\cdot 5^{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Bài 20 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $\int \left(2^x + \frac{3}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.

Bài 21. Tính $\int \frac{\mathrm{e}^{3x} + 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Bài 22 (Mức độ 2). Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x - \mathrm{e}^x$, biết $F(0) = -2$.

Bài 23 (Mức độ 3). Cho $F(x) = (x-1)\cdot \mathrm{e}^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cdot \mathrm{e}^{x^2}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $[f'(x) + 2]\,\mathrm{e}^{x^2}$.

A. $\int [f'(x) + 2]\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C$. **B.** $\int [f'(x) + 2]\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 2x\cdot \mathrm{e}^{x^2} + C$.

C. $\int [f'(x) + 2]\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 4x\cdot \mathrm{e}^{x^2} + C$. **D.** $\int [f'(x) + 2]\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{x^2} + C$.

Bài 24 (Mức độ 3). Tốc độ tăng dân số của một thành phố trong một năm được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 20\cdot (1{,}106)^t$ với $0 \le t \le 7$, trong đó t là thời gian tính theo năm và $t = 0$ ứng với đầu năm 2015, $P(t)$ là dân số của thành phố tính theo nghìn người. Cho biết dân số của thành phố đầu năm 2015 là 1 008 nghìn người.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

a) Tính dân số của thành phố ở thời điểm đầu năm 2020 *(làm tròn đến nghìn người)*.

b) Tính tốc độ tăng dân số trung bình hằng năm của thành phố trong giai đoạn từ đầu năm 2015 đến đầu năm 2020.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 106. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-3x} + C$.

B. $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$.

C. $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$.

D. $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$.

Câu 107. $\int \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-2x} + C$.

B. $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-2x} + C$.

C. $\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C$.

D. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2x+1} + C$.

Câu 108 (Mức độ 1). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2^x + C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2^x \ln 2 + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 109. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{5}}$ bằng

A. $\dfrac{x^6}{\ln 6} + C$.

B. $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{x^{\sqrt{5}}}{\ln 6}$.

C. x^6.

D. $\dfrac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1}$.

Câu 110. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x \mathrm{d}x = 2^x + C$.

B. $\int 2^x \mathrm{d}x = \ln 2 \cdot 2^x + C$.

C. $\int 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

D. $\int 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 111. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$.

B. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

C. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

D. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + C$.

Câu 112 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + 2\mathrm{e}^{2x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \mathrm{e}^{2x} + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Câu 113 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{x} - 2x$ là

A. $\mathrm{e}^{x} + x^2 + C$.

B. $\mathrm{e}^{x} - x^2 + C$.

C. $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^{x} - x^2 + C$.

D. $\mathrm{e}^{x} - 2 + C$.

Câu 114. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6^x$ bằng

A. $\dfrac{6^x}{\ln 6} + C$.

B. 6^x.

C. $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{6^{5x+2}}{\ln 6} + C$.

D. $\dfrac{6^x}{\ln 6}$.

THS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 115. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3\mathrm{e}^{x}+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}+C$. **D.** $3\mathrm{e}^{3x}+C$.

Câu 116. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+C$.

Câu 117. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x}+2$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x-2}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+2x+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}-2x+C$.

Câu 118. $\displaystyle\int\left(5^{2x}-6\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$. **B.** $\dfrac{25^{x}}{2\ln 5}+12\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$.

C. $\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{-2x}+C$. **D.** $\dfrac{5^{2x+1}}{2x+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2x+1}+C$.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x}+2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+x^{2}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}-x^{2}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+2x^{2}+C$.

Câu 120 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=3^{x}+x+1$. Khi đó $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^{x}+x^{2}+x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3^{x}}{\ln 3}+\frac{x^{2}}{2}+x+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^{x}+\frac{x^{2}}{2}+x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3^{x}}{x+1}+\frac{x^{2}}{2}+x+C$.

Câu 121 (Mức độ 3). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x}\left(2024-\dfrac{2025\mathrm{e}^{-x}}{x^{5}}\right)$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2024\mathrm{e}^{x}-\frac{2025}{x^{4}}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2024\mathrm{e}^{x}+\frac{2025}{x^{4}}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2024\mathrm{e}^{x}+\frac{2025}{4x^{4}}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2024\mathrm{e}^{x}-\frac{2025}{4x^{4}}+C$.

Câu 122. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^{x}$.

A. $\displaystyle\int 7^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{7^{x}}{\ln 7}+C$. **B.** $\displaystyle\int 7^{x}\,\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$.

C. $\displaystyle\int 7^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{7^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\displaystyle\int 7^{x}\,\mathrm{d}x=7^{x}\ln 7+C$.

Câu 123. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^{x}$ là

A. $\displaystyle\int 2^{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2\cdot 2^{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int 2^{x}\,\mathrm{d}x=2^{x}+C$.

C. $\displaystyle\int 2^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{x}}{\ln 2}+C$. **D.** $\displaystyle\int 2^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{x}}{x+1}\ln 7+C$.

Câu 124. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$. **B.** $-3^{-x}+C$. **C.** $-3^{-x}\ln 3+C$. **D.** $\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+C$.

Câu 125. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+2x$.

A. $\int (3^x+2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x^2+C$.
B. $\int (3^x+2x)\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+x^2+C$.
C. $\int (3^x+2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+x+C$.
D. $\int (3^x+2x)\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+x+C$.

Câu 126. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(2017-\dfrac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{2018}{x^4}+C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{2018}{x^4}+C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{504{,}5}{x^4}+C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{504{,}5}{x^4}+C$.

Câu 127. Họ nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^x\left(2+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2\mathrm{e}^x+\tan x+C$. **B.** $2\mathrm{e}^x-\tan x+C$. **C.** $2\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\cos x}+C$. **D.** $2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\cos x}+C$.

Câu 128. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.
B. $\dfrac{x^3}{3}-3^x+\dfrac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.
C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.
D. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Câu 129. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x+C$.
B. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}+C$.
C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{x+1}+C$.
D. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

Câu 130. Cho hàm số $f(x)=1+\mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+2\mathrm{e}^{2x}+C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\mathrm{e}^{2x}+C$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 131. Biết rằng $y=\mathrm{e}^x$ có đạo hàm $y'=\mathrm{e}^x$ với mọi x. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.		
b) $\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}+C$.		
d) $\int 2^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$.		

Câu 132 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^{x^3+1}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Đạo hàm $\left(\mathrm{e}^{x^3+1}\right)'=(3x^2+1)\,\mathrm{e}^{x^3+1}$.		
b) $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x^3+1}}{3}+C$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
c) Nếu $F(-1)=1$ thì hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x^3+1}}{3}-\dfrac{2}{3}$.		
d) Biết $F(-1)=1$, khi đó $F(0)=\dfrac{\mathrm{e}+2}{3}$.		

Câu 133 (Mức độ 2). Cho hai hàm số $f(x)=x+1$ và $g(x)=(2\mathrm{e})^x$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+C.$		
b) $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{1+\ln 2}+C.$		
c) $\displaystyle\int 2\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x=x^2+2x+\frac{4\mathrm{e}^x}{1+\ln 2}+C.$		
d) $\displaystyle\int 4\big[f(x)-1\big]\cdot\frac{g(x)}{(2\mathrm{e})^x}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{1+\ln 2}+C.$		

Câu 134 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C.$		
b) $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int 5^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{5^{-x}}{\ln 5}+C.$		
d) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$		

Câu 135 (Mức độ 2). Mỗi kết quả nguyên hàm dưới đây đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{1-x}+C.$		
b) $\displaystyle\int 4^{3x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{4^{3x+2}}{3\ln 2}+C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int 2^x\cdot 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C.$		
d) $\displaystyle\int \frac{2^x}{5^x}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\cdot\frac{2^x}{5^x}+C.$		

Câu 136. Các mệnh đề sau đây đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C.$		
b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C.$		
d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$		

Câu 137. Các mệnh đề sau đây đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C.$		
b) $\displaystyle\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$		
d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C.$		

Câu 138. Các mệnh đề sau đây đúng hay **sai**?

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $\int 2^x \,\mathrm{d}x = 2^x \ln 2 + C.$		
b) $\int \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1) \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + C.$		
d) $\int \mathrm{e}^{3x} \cdot 3^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{(3\mathrm{e}^3)^x}{3 + \ln 3} + C.$		

Câu 139 (Mức độ 3). Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.

Phát biểu	Đ	S
a) Đạo hàm $F'(x) = (ax^2 + 2ax + 2bx + c)\,\mathrm{e}^x$.		
b) Tìm được $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$.		
c) Nguyên hàm $\int F(x) \cdot \mathrm{e}^{x^3 - 3x^2 + 5x} \,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{x^3 - 3x^2 + 6x} + C.$		
d) Giá trị $F(0) = 2$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 140 (Mức độ 1). Hàm số $f(x) = 6^x$ có một nguyên hàm là $F(x) = a \cdot 6^x + C$. Tìm a *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 141. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ và $F(0) = 0$. Tính giá trị của $F(\ln 3)$.

KQ: | | | | |

Câu 142. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$, biết $F(0) = 4$. Tìm $F(1)$ *(làm tròn kết quả tới phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 143 (Mức độ 2). Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 4$. Tính giá trị của $F(1)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 144 (Mức độ 2). Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ và $F(0) = 2$. Tính giá trị của $F(2)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 145 (Mức độ 3). Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$ và $F(0) = -\ln(2\mathrm{e})$. Tìm nghiệm của phương trình $F(x) + \ln(\mathrm{e}^x + 1) = 2$.

KQ: | | | | |

Câu 146 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = \dfrac{1}{2}$ và $f'(x) = -\mathrm{e}^x \cdot f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 147. Biết rằng $\int (2^x + 3^x) \,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln a} + \dfrac{3^x}{\ln b} + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b$.

KQ: | | | | |

Câu 148. Cho $\int \mathrm{e}^{3x+2024} \,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}\mathrm{e}^{cx+d} + C$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản . Tính giá trị của biểu thức $P = a + b - c + d$.

KQ: | | | | |

THS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 149. Biết rằng $\int 3^{x+2}\cdot 2^{2x+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a\cdot 12^x}{b\ln 2+c\ln 3}+C$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a}{b+c}$.

KQ: | | | | |

Câu 150. Biết rằng $\int (3^x+5^x)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{9^x}{a\ln 3}+\dfrac{30^x}{b\ln 5+c\ln 2+d\ln 3}+\dfrac{25^x}{e\ln 5}+C$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c+d+e$.

KQ: | | | | |

Câu 151. Cho $\int \dfrac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\mathrm{e}^{2x}+c\mathrm{e}^x+dx+C$ với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2$.

KQ: | | | | |

Câu 152. Biết rằng $\int (\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-2x}+px+C$ với $m,m,p\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=m+n+p$.

KQ: | | | | |

Câu 153. Biết rằng $\int \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}\mathrm{e}^{nx}+p\mathrm{e}^x+C$ với $m,m,p\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P=m+n-p$.

KQ: | | | | |

Câu 154. Biết rằng $F(x)=(ax+b)\cdot\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(4x-1)\cdot\mathrm{e}^x$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 155. Biết rằng $F(x)=8\mathrm{e}^x+\dfrac{na^x}{\ln a}+p\cos x$ (với $m,n,p\in\mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=m\mathrm{e}^x+2a^x-2\sin x$. Tính giá trị của biểu thức $P=m+n+p$.

KQ: | | | | |

Câu 156. Biết rằng $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-2x}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(-2x^2+8x-7)\mathrm{e}^{-2x}$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.

KQ: | | | | |

DẠNG 3 Nguyên hàm của hàm số lượng giác

- $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$.
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$.

⚠ $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 24 (Mức độ 1). Chứng minh rằng $G(x)=\tan x$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 25 (Mức độ 1). Tìm $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ trên $(0;\pi)$.

Ví dụ 26 (Mức độ 2). Tìm $\int 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 27 (Mức độ 2). Tìm $\int \dfrac{2\sin x}{3}\,\mathrm{d}x$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 28 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\cos x - \dfrac{4}{x}$.

Ví dụ 29 (Mức độ 2).

a) Tìm $\displaystyle\int \left(1 + \tan^2 x\right)\,\mathrm{d}x$.

b) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x$, biết $F(2\pi) = 0$.

Ví dụ 30 (Mức độ 2). Tìm $\displaystyle\int 6\left(1 + \cot^2 x\right)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 31 (Mức độ 1). Tìm:

a) $\displaystyle\int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int \left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 32 (Mức độ 1). Tìm:

a) $\displaystyle\int 3\cos x\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 33 (Mức độ 1). Tìm $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

2 Bài tập tự luận

Bài 25 (Mức độ 2). Cho $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ thoả mãn $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài 26. Tìm:

a) $\displaystyle\int \left(2\cos x - \frac{3}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int 4\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int (x + \tan^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 27. Tính $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x - 2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 28 (Mức độ 2). Tìm

a) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

Bài 29. Tìm:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int \left(1 + 3\sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x + 3}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 30. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng:

a) $f'(x) = 2x^3 - 4x + 1$, $f(1) = 0$;

b) $f'(x) = 5\cos x - \sin x$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Bài 31 (Mức độ 1). Tìm $\displaystyle\int (5\cos x - 3\sin x)\,\mathrm{d}x$.

THẦY. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 32 (Mức độ 2). Tìm

a) $\int \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{3\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x$;

b) $\int \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Bài 33 (Mức độ 1). Tìm:

a) $\int 8\sin x \ \mathrm{d}x$;

b) $\int (2\sin x - 5\cos x) \ \mathrm{d}x$.

Bài 34 (Mức độ 1). Tìm:

a) $\int (1+\cot^2 x) \ \mathrm{d}x$;

b) $\int \dfrac{1}{1+\cos 2x} \ \mathrm{d}x$.

Bài 35 (Mức độ 1).

a) $\int (5\sin x + 6\cos x) \ \mathrm{d}x$;

b) $\int (2+\cot^2 x) \ \mathrm{d}x$.

Bài 36 (Mức độ 2). Tìm $\int \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$.

Bài 37 (Mức độ 2). Tìm:

a) $\int (3\cos x - 4\sin x) \ \mathrm{d}x$;

b) $\int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \mathrm{d}x$.

Bài 38 (Mức độ 2). Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Bài 39 (Mức độ 1). Tìm

a) $\int (3 + 2\tan^2 x) \ \mathrm{d}x$;

b) $\int (1 - 3\cot^2 x) \ \mathrm{d}x$.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 157 (Mức độ 1). Hàm số nào trong các hàm số sau đây có một nguyên hàm bằng $\cos^2 x$?

A. $y = \dfrac{\cos^3 x}{3}$. **B.** $y = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$. **C.** $y = -\sin 2x$. **D.** $y = \sin 2x + C$.

Câu 158. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

A. $-\sin x + C$. **B.** $\cot x + C$. **C.** $\tan x + C$. **D.** $\sin x + C$.

Câu 159 (Mức độ 1). Hàm số $F(x) = 2\sin x - 3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$. **B.** $f(x) = -2\cos x + 3\sin x$.
C. $f(x) = -2\cos x - 3\sin x$. **D.** $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$.

Câu 160 (Mức độ 1). Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

A. $-\sin(4x+7) + x$. **B.** $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7) - 3$. **C.** $\sin(4x+7) - 1$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\sin(4x+7) + 3$.

Câu 161. Nguyên hàm của hàm số $y = \sin x + 2\cos x$ bằng

A. $2\sin x - \cos x + C$. **B.** $-2\sin x + \cos x + C$.
C. $-2\sin x - \cos x + C$. **D.** $-2\sin x - \cos x + C$.

TRUNG TÂM ÔN THI HÙ CHUNG KIÊN

Câu 162. Nguyên hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{5}{\cos^2 x}$ bằng

A. $-5\tan x+\cot x+C$. **B.** $5\tan x-\cot x+C$.
C. $5\tan x+\cot x+C$. **D.** $-5\tan x-\cot x+C$.

Câu 163 (Mức độ 1). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$.

A. $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$. **C.** $-3\sin 3x+C$. **D.** $-\sin 3x+C$.

Câu 164. $\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $x-\cos x+C$. **B.** $\left(-\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^3$. **D.** $x+\cos x+C$.

Câu 165. $\displaystyle\int\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $x+\sin x+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$. **C.** $\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$.

Câu 166 (Mức độ 1). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+\cos x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x+\cos x+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x-\cos x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

Câu 167. Tính nguyên hàm $F(x)=\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$.

A. $x-\cos x+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$. **C.** $\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+C$. **D.** $x+\cos x+C$.

Câu 168. Tính nguyên hàm $F(x)=\displaystyle\int\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$.

A. $x-\sin x+C$. **B.** $\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$.

Câu 169. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x\cos x$ là

A. $\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$. **B.** $\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$. **C.** $-\sin x\cos x$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

Câu 170. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+8\sin x$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=6x-8\cos x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3-8\cos x+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=6x+8\cos x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^3+8\cos x+C$.

Câu 171. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^3 x$ là

A. $\dfrac{1}{12}\sin 3x+\dfrac{3}{4}\sin x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{12}\sin 3x+\dfrac{3}{4}\sin x+C$.
C. $\dfrac{1}{12}\sin 3x-\dfrac{3}{4}\sin x+C$. **D.** $\dfrac{1}{12}\sin 3x+\dfrac{3}{4}\sin 2x+C$.

Câu 172 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ là

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $F(x)=\cos 2x+C$.
C. $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $F(x)=-\cos 2x+C$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 173 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$ là

A. $1 + \cos x + C$. **B.** $1 - \cos x + C$. **C.** $x + \cos x + C$. **D.** $x - \cos x + C$.

Câu 174 (Mức độ 1). Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$ là

A. $\frac{1}{5}\cos 5x + C$. **B.** $\cos 5x + C$. **C.** $-\cos 5x + C$. **D.** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

Câu 175 (Mức độ 1). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x + 1)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos(2x+1) + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(2x+1) + C$.

Câu 176. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 177. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \cos x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.

Câu 178. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

A. $F(x) = 2\cos\frac{x}{2} + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$.

C. $F(x) = 2\sin\frac{x}{2} + C$. **D.** $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$.

Câu 179. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \cot x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \tan x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \cot x + C$.

Câu 180. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Câu 181. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x + 3x$.

A. $\int (2\sin x + 3x)\,\mathrm{d}x = -2\cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$. **B.** $\int (2\sin x + 3x)\,\mathrm{d}x = 2\cos x + 3x^2 + C$.

C. $\int (2\sin x + 3x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$. **D.** $\int (2\sin x + 3x)\,\mathrm{d}x = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$.

Câu 182. Tính $\int (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. **B.** $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$. **C.** $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$. **D.** $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 183. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$. **B.** $6x + \cos x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $6x - \cos x + C$.

Câu 184. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$. **B.** $-\dfrac{1}{x^2} - \cos x + C$. **C.** $\ln|x| + \cos x + C$. **D.** $\ln|x| - \cos x + C$.

Câu 185. Cho $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$. **B.** $f(x) = -\cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = \cos x$.

Câu 186. Cho hàm số $f(x) = \int \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin + C$.
B. $\int \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cos x + C$.
C. $\int \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin x + C$.
D. $\int \cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos x + C$.

Câu 187 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

A. $F(x) = -\dfrac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \dfrac{1}{2}$.
B. $F(x) = \dfrac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \dfrac{1}{2}$.
C. $F(x) = \dfrac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$.
D. $F(x) = \dfrac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Câu 188 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$.
B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$.
C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$.
D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$.

Câu 189 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x + 3)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin(2x + 3) + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin(2x + 3) + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin(2x + 3) + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin(2x + 3) + C$.

Câu 190 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{3 + \cos 4\pi x}{4}$. Biết $F(4) = 2$.

A. $F(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{16}\sin 4\pi x + \dfrac{5}{4}$.
B. $F(x) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{16\pi}\sin 4\pi x - 1$.
C. $F(x) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4\pi}\sin 4\pi x - 1$.
D. $F(x) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{16}\sin 4\pi x - 1$.

Câu 191 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ là

A. $\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{16}\sin 4x + C$. **B.** $\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32}\sin 4x$. **C.** $\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{8}\sin 4x + C$. **D.** $\dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{32}\sin 4x + C$.

Câu 192 (Mức độ 3). Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Khi đó phương trình $2F(x) - x = 0$ có nghiệm là

A. $x = k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 193 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.
B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 194 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ là

A. $\tan\dfrac{x}{2}$. **B.** $-2\tan\dfrac{x}{2} + C$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2} + C$. **D.** $2\tan\dfrac{x}{2} + C$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 195 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.
B. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.
C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$.
D. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

Câu 196 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\pi}{6}$.
B. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.
C. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.
D. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 197. Biết rằng $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \sin u \, \mathrm{d}u = -\cos u + C$.		
b) $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\cos 2x + C$.		
c) $\int \sin(3x+1) \, \mathrm{d}x = -3\cos(3x+1) + C$.		
d) $\int \sin \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}\mathrm{e}^x = -\cos \mathrm{e}^x + C$.		

Câu 198. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \left(2 + \cot^2 x\right) \, \mathrm{d}x = x - \cot x + C$.		
b) $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$.		
c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 \, \mathrm{d}x = x + \cos x + C$.		
d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \, \mathrm{d}x = x - \cos x + C$.		

Câu 199 (Mức độ 1). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$.		
b) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = -\sin x + C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \cot x + C$.		
d) $\int \cot x \, \mathrm{d}x = -\tan x + C$.		

Câu 200. Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x) = -\sin x + C$.		
b) $f(x) = -\cos x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $f(x) = \cos x$.		
d) $F(x) = -\cos x + C$.		

TÀI LIỆU CHƯA CÓ CHỈNH SỬA

Câu 201. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2 x}$

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x)=\dfrac{4x}{\sin^2 x}$.		
b) $F(x)=4\tan x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(x)=\dfrac{4}{\cot x}\,\mathrm{d}x$.		
d) $F(x)=4x+\dfrac{4}{3}\tan^3 x$.		

Câu 202. Cho $F(x)=\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $f(x)=1+\sin(x)$.		
b) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.		
c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\cos x+C$.		

Câu 203. Cho hàm số $f(x)=\tan^2 x$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.		
b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\tan x+x+C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+x}$.		
d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}-x\,\mathrm{d}x$.		

Câu 204 (Mức độ 2). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$.		
b) $\displaystyle\int\sin 5x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\cos 5x+C$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin 3x+C$.		
d) $\displaystyle\int\cos 5x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\sin 5x+C$.		

Câu 205 (Mức độ 2). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int 3\sin x\,\mathrm{d}x=-3\cos x+C$.		
b) $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-2\sin 2x+C$.		
c) $\displaystyle\int(2\sin x+3\cos x)\,\mathrm{d}x=3\sin x-2\cos x+C$.		
d) $\displaystyle\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.		

Câu 206 (Mức độ 3). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int(-2\cos x)\,\mathrm{d}x=2\sin x+C$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) $\int (-3\sin 3x)\,\mathrm{d}x = \cos 3x + C.$		
c) $\int (2\sin 2x - 3\cos 3x)\,\mathrm{d}x = -\sin 3x - \cos 2x + C.$		
d) $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = \cot x - x + C.$		

Câu 207 (Mức độ 3). Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x) = 2\cos x + 3\sin x - 1.$		
b) $F(x) = -2\cos x - 3\sin x + 3.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(\pi) = 5.$		
d) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 208 (Mức độ 2). Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

KQ: | | | | |

Câu 209. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *(làm tròn kết quả tới hàng đơn vị).*

KQ: | | | | |

Câu 210 (Mức độ 2). Cho $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f'(\pi)$.

KQ: | | | | |

Câu 211 (Mức độ 3). Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tính $F(\pi)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 212 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Tính $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 213 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 214. Tìm nguyên hàm $F(x)$của hàm số $f(x) = 2024 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Hệ số của biến x là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 215. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} == a\cot x + C$. Giá trị a là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 216. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{x^3}{a} + bx^2 + \frac{1}{c}x + d\tan x + C$. Giá trị của $a+b+c+d$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 217. Tính $I = \int x\left(1 - \dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}\right)\,\mathrm{d}x$. Hệ số của hạng tử $\cos x$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 218. Tính $\int x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\tan^2 x}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^m}{n} + \dfrac{x^p}{q} + x + r\tan x + C$. Giá trị biểu thức $P = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} + 2r$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 219. Tính $T = \int x\left(2024 - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{\sin x}{x}\right)\,\mathrm{d}x$. Hệ số của hạng tử $\cos x$ của T là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 220. Tính $R = \int x^3\left[\dfrac{\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^3} - 2x + \dfrac{1}{x^{2024}}\right]\,\mathrm{d}x = ax + b\cos x + cx^5 - \dfrac{1}{d\cdot x^{2020}} + C$. Giá trị $a + b + c + d + 7$ là bao nhiêu? *(làm tròn đến hàng đơn vị)*

KQ: | | | | |

Câu 221. Tính $\int x^2\left[\dfrac{1}{x^2\sin^2\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}} + \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{4}{x^4}\right]\,\mathrm{d}x = a\cot x + b\ln|x| + \dfrac{c}{x} + C$. Giá trị $a + b + c$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

DẠNG 4 Nguyên hàm kết hợp nhiều hàm số

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 34 (Mức độ 1). Tìm

a) $\int (3x^2 - \cos x)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \left(3\sin x - \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}\right)\,\mathrm{d}x$; c) $\int \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 5^x\right)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 35 (CKP, Mức độ 2). Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x - \mathrm{e}x$, biết $F(0) = -2$.

2 Bài tập tự luận

Bài 40 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của các hàm số

a) $f(x) = x^3 - 3^x$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{\sin^2 x}$.

Bài 41 (CKP, Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = 6x^4 - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \sin x$. b) $f(x) = 5^x - \dfrac{4}{x\sqrt{x}} + 3$.

Bài 42 (Mức độ 1). Tìm hàm số $f(x)$, biết một nguyên hàm của $f(x)$ là

a) $F(x) = x\sin x + \sqrt{2}$. b) $F(x) = \mathrm{e}x - \sqrt{x}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 43 (Mức độ 1). Biết $F(x)=\mathrm{e}x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $\int f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 44 (Mức độ 1). Tìm $\int \mathrm{e}x\left(2+\dfrac{\mathrm{e}-x}{3\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

Bài 45 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}+3^{2x}$.

b) $f(x)=\sqrt{3x}-\dfrac{4}{\sin^2 x}$.

Bài 46 (Mức độ 2). Tìm:

a) $\int[4(2-3x)^2-3\cos x]\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\left(3^{2x-2}+4\cos x\right)\mathrm{d}x$.

Bài 47 (Mức độ 2). Tìm $\int(x+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 48 (Mức độ 2). Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số sau:

a) $y=2^x-\dfrac{1}{x}$;

b) $y=x\sqrt{x}+3\cos x-\dfrac{2}{\sin^2 x}$.

Bài 49 (Mức độ 2). Tìm

a) $(\sin x+2^{-x+1})\,\mathrm{d}x$;

b) $\int(2\cdot 6^{2x}-\mathrm{e}^{-x+1})\,\mathrm{d}x$.

Bài 50 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=x^2+\mathrm{e}^{-x}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0)=2\,023$.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 222 (Mức độ 1). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

B. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$.

C. $\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$.

D. $\int\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

Câu 223 (Mức độ 1). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-\sin x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}-\cos x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3+\cos x+C$.

Câu 224 (Mức độ 1). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+3^x$ là

A. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

B. $F(x)=1+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3^x+C$.

D. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3^x\ln 3+C$.

Câu 225 (Mức độ 1). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+\sin 2x$ là

A. $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

B. $\dfrac{x^4}{4}-\cos 2x+C$.

C. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

D. $\dfrac{x^4}{4}+\cos 2x+C$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 226 (Mức độ 2). Tính $\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **B.** $x^2+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$.

Câu 227 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x+x$ là

A. $\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** 2^x+x^2+C. **C.** $\dfrac{2^x}{\ln 2}+x^2+C$. **D.** $2^x+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Câu 228 (Mức độ 2). Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x\left(2017-\dfrac{2018\mathrm{e}^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{2018}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{2018}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017\mathrm{e}^x-\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

Câu 229 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+\dfrac{1}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x+\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+\dfrac{1}{x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x-\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 230 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2$ là

A. $\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x+\dfrac{x^3}{3}+C$. **B.** e^x+2x+C. **C.** $\mathrm{e}^x+\dfrac{x^3}{3}+C$. **D.** e^x+3x^3+C.

Câu 231 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=2^x+x+1$. Tìm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2^x+x^2+x+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2^x+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{x+1}+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$.

Câu 232 (Mức độ 1). Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+x$ là

A. $-\cos x+1+C$. **B.** $\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **C.** $-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **D.** $\cos x+x^2+C$.

Câu 233 (Mức độ 2). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x+\dfrac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $3\cos x+\ln x+C$. **B.** $3\sin x-\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $-3\sin x+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $3\cos x+\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 234 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $t(x)=2^x-x^2$ là

A. $\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{x^3}{3}+C$. **B.** 2^x-2x+C. **C.** $2^x\ln 2-\dfrac{x^3}{3}+C$. **D.** $\dfrac{2^x}{\ln 2}-2x+C$.

Câu 235 (Mức độ 2). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ là

A. $x^3+\cot x+C$. **B.** $x^3+\tan x+C$. **C.** $6x-\cot x+C$. **D.** $6x+\tan x+C$.

Câu 236 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x-\sin x$ là

A. $\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$. **B.** $1-\cos x+C$. **C.** $1+\cos x+C$. **D.** $\dfrac{x^2}{2}+\cos x+C$.

Câu 237 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$ là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\mathrm{e}^x - \cos x + C$. **B.** $\mathrm{e}^x + \cos x + C$.
C. $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x - \cos x + C$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \cos x + C$.

Câu 238 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x - 2x$ là

A. $3^x - x^2 + C$. **B.** $\dfrac{3^x}{\ln 3} - x^2 + C$. **C.** $\dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $3^x - \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 239 (Mức độ 1). Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \sin x$ là

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C$. **B.** $2\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \cos x + C$. **D.** $2\mathrm{e}^{2x-1} - \cos x + C$.

Câu 240 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 4^x$ là

A. $\cos x + 4^x + C$. **B.** $-\cos x + \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.
C. $\cos x + \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$. **D.** $-\cos x + \ln 4 \cdot 4^x + C$.

Câu 241 (Mức độ 2). Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$. **B.** $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x + 2019$.
C. $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 2019$. **D.** $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2019$.

Câu 242 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x + 2x$ là

A. $\dfrac{5^{x+1}}{x+1} + x^2 + C$. **B.** $5^x \ln 5 + 2x + C$. **C.** $5^x + x^2 + C$. **D.** $\dfrac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C$.

Câu 243 (Mức độ 2). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 2x + \dfrac{1}{2}$.

A. $\displaystyle\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = 2\tan 2x - 2x + C$. **B.** $\displaystyle\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \tan 2x - \frac{x}{2} + C$.
C. $\displaystyle\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \tan 2x - x + C$. **D.** $\displaystyle\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan 2x - \frac{x}{2} + C$.

Câu 244 (Mức độ 1). Hàm số $F(x) = x^2 + \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \cos x$. **B.** $f(x) = 2x + \cos x$. **C.** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \cos x$. **D.** $f(x) = 2x - \cos x$.

Câu 245 (Mức độ 3). Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot \mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 5x + 5)\,\mathrm{e}^x$. Giá trị của $2a + 3b + c$ là

A. 6. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 246 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

A. $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $x^2 + 2\cos 2x + C$. **C.** $x^2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $x^2 - 2\cos 2x + C$.

Câu 247 (Mức độ 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ là

A. $\mathrm{e}^x + x^2 + C$. **B.** $\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $\mathrm{e}^x + 1 + C$.

Câu 248 (Mức độ 3). Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sin x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 2$. **B.** $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \cos x$.
C. $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos x - 2$. **D.** $F(x) = -\mathrm{e}^{x} - \cos x + 2$.

Câu 249 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)\ln x$. Tính $F''(x)$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}$. **B.** $F''(x)=\dfrac{1}{x}$.
C. $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}+\ln x$. **D.** $F''(x)=x+\ln x$.

Câu 250 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)=2x+\mathrm{e}^x$. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0)=2\,023$ là

A. $x^2+\mathrm{e}^x+2\,023$. **B.** $x^2+\mathrm{e}^x+C$. **C.** $x^2+\mathrm{e}^x+2\,022$. **D.** $x^2+\mathrm{e}^x$.

Câu 251 (Mức độ 1). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-\sin x$ trên tập $\mathbb{R}$ là

A. $x^2+\cos x+C$. **B.** $2x^2-\cos x+C$. **C.** $x^2-\cos x+C$. **D.** $2x^2+\cos x+C$.

Câu 252 (Mức độ 1). Họ các nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^x-2x$ là

A. e^x-2x^2+C. **B.** e^x-2+C. **C.** e^x-x^2+C. **D.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^{x+1}-x^2+C$.

Câu 253 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\frac{1}{\cos x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\tan x+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\tan x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{\cos x}+C$.

Câu 254 (Mức độ 1). Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-4x$ là

A. $-\cos x-2x^2+C$. **B.** $\cos x-2x^2+C$. **C.** $-\cos x-x^2+C$. **D.** $\cos x-4x^2+C$.

Câu 255 (Mức độ 1). Hàm số $F(x)=\ln x+x+1$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(0;+\infty)$?

A. $x\ln x+x$. **B.** $x(\ln x-1)$. **C.** $x\ln x+\dfrac{x^2}{2}+x$. **D.** $\dfrac{1}{x}+1$.

Câu 256 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\sin x+\mathrm{e}^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\cos x+\mathrm{e}^x+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x+\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+\mathrm{e}^{x-1}+C$.

Câu 257 (Mức độ 3). Biết hàm số $f(x)=x(1-x)\mathrm{e}^{-x}$ có một nguyên hàm là $F(x)=(ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^{-x}$. Tính $A=2a+b+3c$.

A. $A=3$. **B.** $A=8$. **C.** $A=9$. **D.** $A=6$.

Câu 258 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=2x+\mathrm{e}^{-x}$. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2023$.

A. $F(x)=x^2-\mathrm{e}^{-x}+2023$. **B.** $F(x)=x^2-\mathrm{e}^x+2024$.
C. $F(x)=x^2+\mathrm{e}^{-x}+2022$. **D.** $F(x)=x^2-\mathrm{e}^{-x}+2024$.

Câu 259 (Mức độ 2). Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}$ thỏa mãn $F(0)=4$ là

A. $F(x)=\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}$. **B.** $F(x)=\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-2x}$.
C. $F(x)=\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}$. **D.** $F(x)=\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 260 (Mức độ 2). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \left(\frac{1}{x}+\sin x\right)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert - \cos x + C$, với $x \neq 0$.		
b) $\int \left(\frac{1}{x}+\cos x\right)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert - \sin x + C$, với $x \neq 0$.		
c) $\int \left(\frac{1}{x}+2^x\right)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + 2^x + C$, với $x \neq 0$.		
d) $\int \left(\frac{1}{x}+x\right)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + \frac{x^2}{2} + C$, với $x \neq 0$.		

Câu 261 (Mức độ 2). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int (\sin x + x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + x^2 + C$.		
b) $\int (\cos 2x + x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{x^2}{2} + C$.		
c) $\int (\cos 3x + 3^x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.		
d) $\int \left(\frac{2}{2x+1} + 5^{2x+1}\right)\,\mathrm{d}x = \ln\lvert 2x+1\rvert + \frac{5^{2x+1}}{2\ln 5} + C$, với $x \neq -\frac{1}{2}$.		

Câu 262 (Mức độ 3). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $F'(x) = \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}$.		
b) $f'(x) = \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(x) = \mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}$.		
d) $F(-1) = 3\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}$.		

Câu 263 (Mức độ 3). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

Phát biểu	Đ	S
a) $F(x) = \mathrm{e}^x - x^2 + 1$.		
b) $F(2) = \mathrm{e}^2 - 3$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $F(3) = \mathrm{e}^3 - 9$.		
d) $\int F(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \frac{1}{3}x^3 + C$.		

Câu 264 (Mức độ 3). Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int (\cos x + 2)\,\mathrm{d}x = \sin x + 2x + C$.		
b) $\int (6\sin 3x + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = 2\cos 3x + \mathrm{e}^x + C$.		
c) $\int \left(\cos 4x + \mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.		
d) $\int \left(\frac{1}{2x-1} + \mathrm{e}^{-2x+1}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+1} + C$, với $x \neq \frac{1}{2}$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

TÀI LIỆU CHƯA KIỂM DUYỆT NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 265 (Mức độ 2). Cho $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(1)$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 266 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-\cos 2x$, biết $F(0)=1$. Tính $F(\pi)$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 267 (Mức độ 2). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-3x^2$, biết $F(0)=1$. Tính $F(2)$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 268 (Mức độ 3). Gọi $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-1)^2\mathrm{e}^x$. Tính $S=a+2b+c$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 269 (Mức độ 3). Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x^2-5x+2)\mathrm{e}^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính $f(F(0))$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

DẠNG 5 Nguyên hàm hàm ẩn

1. Công thức đạo hàm của hàm hợp

- $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C.$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$
- $\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}.$
- $[f(x)^n]'=n\cdot f'(x)\cdot(f(x))^{n-1}.$
- $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$
- $[\ln(f(x))]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.$
- $\left[\dfrac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}\right]'=-\dfrac{f'(x)}{f^n(x)}.$
- $\left[\sqrt{f(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$

2. Hàm ẩn có dạng $\begin{bmatrix}f'(x)=g(x)\cdot h[f(x)]\\ f'(x)\cdot h[f(x)]=g(x).\end{bmatrix}$

Phương pháp giải

- $\dfrac{f'(x)}{h[f(x)]}=g(x)\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{h[f(x)]}\,\mathrm{d}x=\int g(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{h[f(x)]}=\int g(x)\,\mathrm{d}x.$
- $f'(x)h[f(x)]=g(x)\Leftrightarrow\displaystyle\int f'(x)h[f(x)]\,\mathrm{d}x=\int g(x)\,\mathrm{d}x$
  $\Leftrightarrow\displaystyle\int h[f(x)]\,\mathrm{d}[f'(x)]=\int g(x)\,\mathrm{d}x.$

⚠ *Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán).*

3. Hàm ẩn có dạng $\begin{bmatrix}f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0\\ f'(x)+p'(x)\cdot[f(x)]^n=0.\end{bmatrix}$

Phương pháp giải

- $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0.$
  Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-p(x).$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = -\int p(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

- $f'(x) + p(x)\cdot[f(x)]^n = 0$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x).$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,\mathrm{d}x = -\int p(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x.$

4. Hàm ẩn có dạng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$.
Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$.
Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x$. Từ đây ta tính được $f(x)$.

5. Hàm ẩn có dạng $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$. (1)

Phương pháp giải

- Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)\cdot h(x).$$

Khi đó

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x)\cdot h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x)\cdot h(x)$$
$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]\,\mathrm{d}x = \int u(x)\cdot h(x)\mathrm{d}x \Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x}{u(x)}$$

- Cách tìm $u(x)$: $u(x)$ được chọn sao cho $\begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x \Rightarrow u(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x}$$

Tóm lại:

- **Bước 1.** Tìm $u(x)$. $u(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x}$.
- **Bước 2.** Nhân $u(x)$ vào (1) suy ra $f(x) = \frac{\int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x}{u(x)}$.

6. Một số dạng đặc biệt của (1).

a) Hàm ẩn có dạng $\begin{bmatrix} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x). \end{bmatrix}$

Phương pháp giải

- $f'(x)+f(x)=h(x)$: Nhân hai vế với e^x ta được

$$\mathrm{e}^x\cdot f'(x)+\mathrm{e}^x\cdot f(x)=\mathrm{e}^x\cdot h(x)\Leftrightarrow[\mathrm{e}^x\cdot f(x)]'=\mathrm{e}^x\cdot h(x).$$

Suy ra $\mathrm{e}^x\cdot f(x)=\int \mathrm{e}^x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$. Từ đây ta tính được $f(x)$.

- $f'(x)-f(x)=h(x)$: Nhân hai vế với e^{-x} ta được

$$\mathrm{e}^{-x}\cdot f'(x)-\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)\right]'=\mathrm{e}^{-x}\cdot h(x).$$

Suy ra $\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\int \mathrm{e}^{-x}\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$. Từ đây ta tính được $f(x)$.

b) Hàm ẩn có dạng $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$.

Phương pháp giải

Nhân hai vế với $\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ ta được

$$f'(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+p(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\cdot f(x)=h(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$
$$\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right]'=h(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}=\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{e}x}h(x)\,\mathrm{d}x$. Từ đây ta tính được $f(x)$.

1 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 270. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **B.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **C.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. **D.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

Câu 271. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 272. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2\cdot f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị $f(1)$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Câu 273. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $f(1)=-\frac{2}{3}$. **B.** $f(1)=-\frac{2}{9}$. **C.** $f(1)=-\frac{7}{6}$. **D.** $f(1)=-\frac{11}{6}$.

Câu 274. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$. **B.** $-\frac{1}{40}$. **C.** $-\frac{41}{400}$. **D.** $-\frac{1}{10}$.

Câu 275. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$. **B.** $-\dfrac{71}{20}$. **C.** $-\dfrac{79}{20}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Câu 276. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

Câu 277. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=-\mathrm{e}^xf^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

A. $f(\ln 2)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$. **C.** $f(\ln 2)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2)=\ln^2 2+\dfrac{1}{2}$.

Câu 278. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2024)+f(2025)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=1519$.

Câu 279. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\dfrac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2=xf(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=\dfrac{43-24\sqrt{3}}{9}$. **B.** $f(8)=\dfrac{43+24\sqrt{3}}{9}$. **C.** $f(8)=\dfrac{43-\sqrt{3}}{3}$. **D.** $f(8)=\dfrac{43+\sqrt{3}}{3}$.

Câu 280. Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x}\cdot f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3)<2$. **B.** $2<f(3)<4$. **C.** $f(3)>6$. **D.** $4<f(3)<6$.

Câu 281. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1$, $f'(x)<0$, $[f'(x)]^2=f''(x)$, $\forall x\in[0;1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-3;-2)$.

Câu 282. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2-f(x)\cdot f''(x)+[f'(x)]^2=0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2.

Câu 283. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)=x^3-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $T=f^2(2)$ bằng

A. $\dfrac{43}{30}$. **B.** $\dfrac{16}{15}$. **C.** $\dfrac{43}{15}$. **D.** $\dfrac{26}{15}$.

Câu 284. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** 10.

Câu 285. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^x$ là

A. x^2+x+C. **B.** $2x^2+2x+C$. **C.** $2x^2+x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 286. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x\cdot f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 287. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x\cdot(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b\cdot\ln 3$ $(a,\,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị $2\left(a^2+b^2\right)$ là

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 288. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=-\dfrac{3}{16}$. **B.** $T=\dfrac{21}{16}$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Câu 289. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Câu 290. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 291. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Câu 292. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x\cdot f(x)-x^2\cdot f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\dfrac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\dfrac{9}{10}$. **B.** $\dfrac{21}{10}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

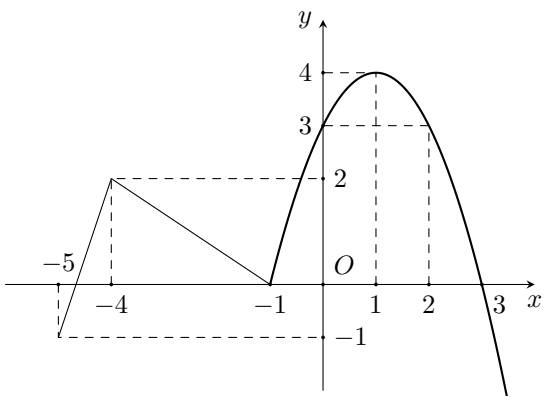
Câu 293. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 294.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\dfrac{109}{3}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** 11.



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

2 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 295. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 296. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = 3$, $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$. KQ: | | | | |

Câu 297. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0$, $\forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$, $\forall x > 0$ và $f(1) = -\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \ldots + f(2023) + f(2024)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

Câu 298. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $\mathrm{e}^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 299. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 300. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 301. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{f(x)} - \dfrac{x}{f'(x)} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(\mathrm{e}^2)$ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 302. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $(f'(x))^3 = \mathrm{e}^x (f(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*). KQ: | | | | |

Câu 303. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 (f'(x))^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f(2)$. KQ: | | | | |

Câu 304. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(2)$ (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

DẠNG 6 Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $S(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $S(t)$ và $v(t)$ như sau.

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $S'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $S(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t$.

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau.

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 36 (Mức độ 2). Một ô tô đang chạy với tốc độ 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 1 giây, 2 giây, 3 giây là bao nhiêu?

Ví dụ 37 (Mức độ 2). Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi 10 m/s^2. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu và đi được quãng đường bao nhiêu?

Ví dụ 38 (Mức độ 2). Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C. Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút $(0 \le t \le 5)$ được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ (°C/phút). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

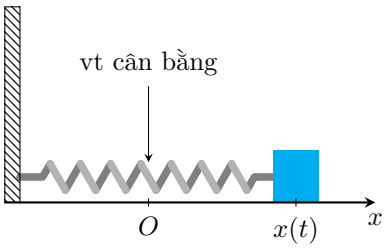
Ví dụ 39 (Mức độ 2). Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 400)$, $m(t)$ tính theo người.

(*Nguồn: A. Bigalke et al. Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*)

Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Ví dụ 40 (Mức độ 2).

Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như *Hình 1*, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 4\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng centimét/giây. Tại thời điểm $t = 0$, con lắc ở vị trí cân bằng.
Lập phương trình chuyển động của con lắc đó.



Ví dụ 41 (Mức độ 2). Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng.

(*Nguồn: Chris Kirkpatrick, Barbara Alldred, Crystal Chilvers, Beverly Farahani, Kristina Farentino, Angelo Lillo, Ian Macpherson, John Rodger, Susanne Trew, Advanced Function, Nelson 2012*)

Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

Ví dụ 42 (Mức độ 3). Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1\,000t$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 15)$, $B'(t)$ tính bằng khách/giờ.

(*Nguồn: A. Bigalke et al. Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \le t \le 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 43. Giả sử $s(t)$ là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian t (giây) và $v(t)$ là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian t (giây).

Phát biểu	Đ	S
a) $\int s(t)\mathrm{d}t = v(t) + C.$		
b) $\int v(t)\mathrm{d}t = s(t) + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int s'(t)\mathrm{d}t = v(t) + C.$		
d) $\int s'(t)\mathrm{d}t = s(t) + C.$		

Ví dụ 44. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t$ $(\mathrm{m/s^2})$.

Phát biểu	Đ	S
a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 2\sin t$ (m/s).		
b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ là 1 m/s.		
c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \pi$ (s) là 4 m.		
d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t = \dfrac{3\pi}{4}$ (s) là 2 m.		

Ví dụ 45. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5\cos t$ $(\mathrm{m/s^2})$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 2,5 m/s. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 51. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1 m). Biết rằng vật chuyển động với vận tốc (tính theo m/s) là $v(t) = 2t - t^2$ $(0 \le t \le 10$, tính theo giây) và lúc đầu vật ở vị trí có tọa độ $x_0 = 2$.

a) Xác định tọa độ $x(t)$ của vật tại mỗi thời điểm t $(0 \le t \le 10)$.

b) Tại thời điểm $t = 6$ giây, vật cách vị trí ban đầu bao xa?

Bài 52. Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $N'(t) = 10 \cdot \mathrm{e}^{0,2t}$ (trường hợp/ngày), trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày kể từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh.

a) Xác định số $N(t)$.

b) Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành số sau 10 ngày dịch bắt đầu.

Bài 53. Một vật chuyển động thẳng dọc theo một đường thẳng (có gắn trục tọa độ Ox với độ dài đơn vị bằng 1 m). Biết rằng vật xuất phát từ vị trí ban đầu là gốc tọa độ và chuyển động với vận tốc $v(t) = 8 - 0{,}4t$ (m/s), trong đó t là thời gian tính theo giây $(t \ge 0)$.

a) Xác định tọa độ $x(t)$ của vật tại thời điểm t, $t \ge 0$.

b) Tại thời điểm nào thì vật đi qua gốc tọa độ (không tính thời điểm ban đầu)?

Bài 54. Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi $P'(t) = 150\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0 \le t \le 10$, trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1000 cá thể.

a) Xác định hàm số $P(t)$.

b) Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (*kết quả làm tròn đến hàng trăm*).

Bài 55. Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho $v(t) = 5 + 3t$ (m/s), với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét?

Bài 56. Một quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m với vận tốc được tính theo công thức $v(t) = -9{,}8t + 19{,}6$ (m/s).

a) Viết công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t.

b) Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?

Bài 57. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \dfrac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm $(1 \le x \le 11)$.

b) Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m?

Bài 58. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 10$ m/s thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 2$ m/s^2. Tính quãng đường xe đó đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Bài 59. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 160 - 9{,}8t$ (m/s). Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

a) Khi $t = 5$ giây;

b) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 60. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1{,}5t + 5$, trong đó $h(t)$ (cm) là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm).

(*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage 2014*)

Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Bài 61. Doanh thu bán hàng của một công ty khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Một công ty công nghệ cho biết, tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại con chíp của hãng được cho bởi $M_R(x) = 300 - 0{,}1 \cdot x$, ở đó x là số lượng chíp đã bán. Tìm doanh thu của công ty khi đã bán 1000 con chíp.

Bài 62. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t. Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 63. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0 \le t \le 10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn.

(Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)

Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 64. Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi $T'(t) = -\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{50}}\right)^{\circ}$ C/phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút.

(Nguồn:https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/SeniorTopic3/3e/3e_4history_3.html)

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 305. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \dfrac{3}{t+1}$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

A. 10 m/s. **B.** 15,2 m/s. **C.** 13,2 m/s. **D.** 12 m/s.

Câu 306. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t) = -\dfrac{1}{24}t^3 + \dfrac{5}{16}t^2$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm giây thứ 5 sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

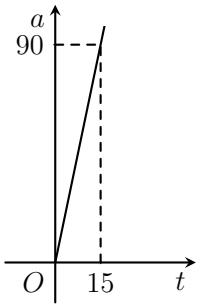
A. 5,6 m/s. **B.** 6,51 m/s. **C.** 7,26 m/s. **D.** 6,8 m/s.

Câu 307. Một nhà khoa học tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20 m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực. Hỏi sau 2 s thì tên lửa đạt đến tốc độ là bao nhiêu?

A. 0,45 m/s. **B.** 0,4 m/s. **C.** 0,6 m/s. **D.** 0,8 m/s.

Câu 308.

Một máy bay đang chuyển động thẳng đều trên mặt đất với tốc độ $v = 3$ m/s thì bắt đầu tăng tốc với độ biến thiên vận tốc là hàm số $a(t)$ có đồ thị hàm số là đường thẳng như hình bên. Sau 15 giây tăng tốc thì máy bay đạt đến vận tốc đủ lớn để phóng khỏi mặt đất. Hãy tính vận tốc khi máy bay bắt đầu rời khỏi mặt đất.



A. 876 m/s. **B.** 687 m/s. **C.** 768 m/s. **D.** 678 m/s.

Câu 309. Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là 72 m/s bắt đầu từ độ cao 2 m. Chiều cao của viên đạn sau thời gian 5 giây kể từ lúc bắn là, cho biết gia tốc trọng trường là $a(t) = -9{,}8$ m/s^2.

A. 239,5 m. **B.** 25 m. **C.** 237,5 m. **D.** 117 m.

Câu 310. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 cm. **B.** 7,5 m. **C.** $\dfrac{5}{2}$ m. **D.** 5 m.

Câu 311. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

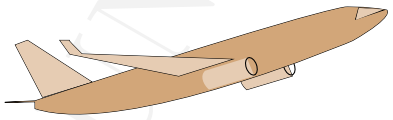
A. 24 m. **B.** 12 m. **C.** 6 m. **D.** 0,4 m.

Câu 312. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \dfrac{t}{3}$ (m/s^2) tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

A. $S = 90$ m. **B.** $S = 246$ m. **C.** $S = 58$ m. **D.** $S = 100$ m.

Câu 313.

Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy báy là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là



A. 36 m. **B.** 252 m.
C. 1134 m. **D.** 966 m.

Câu 314. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn thì ca nô đi được bao nhiêu mét?

A. 10 m. **B.** 20 m. **C.** 30 m. **D.** 40 m.

Câu 315. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2$ (m^2/s). Tính quãng đường vật đi được trong 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

A. $\dfrac{130}{3}$ m. **B.** $\dfrac{310}{3}$ m. **C.** $\dfrac{3400}{3}$ m. **D.** $\dfrac{4300}{3}$ m.

Câu 316. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

A. 5 m/p. **B.** 7 m/p. **C.** 9 m/p. **D.** 3 m/p.

Câu 317. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s^2. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau?

A. 30,78 m. **B.** 31,89 m. **C.** 32,43 m. **D.** 33,88 m.

Câu 318. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500$ (m^3/s). Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

A. $5 \cdot 10^4$ m^3. **B.** $4 \cdot 10^6$ m^3. **C.** $3 \cdot 10^7$ m^3. **D.** $6 \cdot 10^6$ m^3.

Câu 319. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. 8400 m^3. **B.** 7400 m^3. **C.** 6000 m^3. **D.** 4200 m^3.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 320. Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

A. 2,64 m. **B.** 1,22 m. **C.** 2,22 m. **D.** 1,64 m.

Câu 321. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250,000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

A. 272304 con. **B.** 212302 con. **C.** 242102 con. **D.** 252302 con.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 322. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây).

Phát biểu	Đ	S
a) $\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C.$		
b) $\int v(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int v'(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C.$		
d) $\int v'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C.$		

Câu 323. Giả sử $v(t)$ là phương tình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây).

Phát biểu	Đ	S
a) $\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C.$		
b) $\int v(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int v(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C.$		
d) $\int v'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C.$		

Câu 324. Một công ty có doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng x được xác định dưới dạng hàm số $f(x) = \frac{24}{x+1}$ $(x > 0)$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra.

Phát biểu	Đ	S
a) Doanh thu cận biên của 5 sản phẩm được bán ra là 3.		
b) Có 3 số nguyên x sao cho $f(x) > 5$.		
c) Cho biết hàm tổng doanh thu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, khi đó ta có $F(x) = 12\ln\lvert x+1\rvert$.		
d) Khi 100 sản phẩm được bán ra thì tổng doanh thu sẽ là 110,76 (làm tròn đến hàng phần trăm).		

Câu 325. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30$ m/s, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh.

Phát biểu	Đ	S
a) Vận tốc di chuyển của xe trước khi đạp phanh là 20 m/s.		

Phát biểu	Đ	S
b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn là 5 giây.		
c) Công thức biểu diễn hàm số $s(t)$ là $s(t) = -5t^2 + 30t$.		
d) Quãng đường ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi ô tô dừng hẳn là 65 m.		

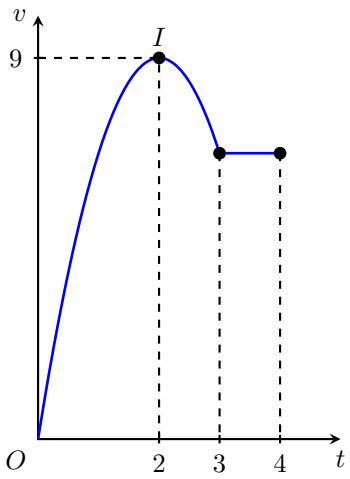
Câu 326. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng trưởng của cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0{,}1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t.

(Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016)

Phát biểu	Đ	S
a) Thời gian sinh trưởng của cây kéo dài trong 10 tuần.		
b) Công thức xác định hàm số $h(t)$ với $(t \geq 0)$ là $h(t) = -\dfrac{0{,}1t^4}{4} + \dfrac{t^3}{3}$.		
c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là khoảng 93,3 cm.		
d) Thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua đó sẽ cao khoảng 54,4 cm.		

Câu 327.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành.



Phát biểu	Đ	S
a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giờ là 9 km/h.		
b) Vận tốc của vật tăng dần từ 2 giờ đến 3 giờ.		
c) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giờ là 7 km/h.		
d) Quãng đường S mà vật di chuyển được từ 3 giờ đến 4 giờ là 6 km.		

Câu 328. Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t được tính bằng giờ $(0 \leq t \leq 13)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

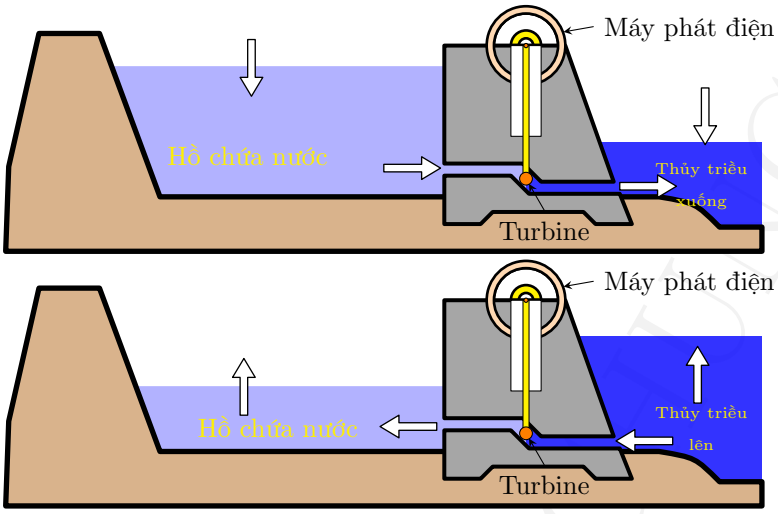
(Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage)

Phát biểu	Đ	S
a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.		
b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.		
c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.		
d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 329. Mực nước trong hồ chứa của một nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên. Tốc độ thay đổi mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số $h'(t) = \dfrac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480)$, trong đó t tính bằng giờ $(0 \le t \le 24)$, $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m.
(Nguồn: A.Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016)



Phát biểu	Đ	S
a) Nguyên hàm của $h'(t)$ là $\dfrac{5}{648}t^3 - \dfrac{5}{18}t^2 + \dfrac{20}{9}t + C$.		
b) Công thức xác định hàm số $h(t)$ là $h(t) = \dfrac{5}{648}t^3 - \dfrac{5}{18}t^2 + \dfrac{20}{9}t + 5$.		
c) Mực nước trong hồ chứa cao nhất khoảng 12,1 m (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).		
d) Mực nước trong hồ chứa thấp nhất khoảng 0,9 m (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 330. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 156 + 5{,}1t$. Quãng đường của vật đi được sau 3 giây bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*) KQ: | | | | |

Câu 331. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5\cot t$ (m/s^2). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 2,5 m/s. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên. KQ: | | | | |

Câu 332. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t) = -\dfrac{1}{24}t^3 + \dfrac{5}{16}t^2$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 s sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu? Vận tốc v chính là nguyên hàm của gia tốc a. Tại thời điểm ban đầu thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 333. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = \dfrac{3}{t+1}$ m/s^2. Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)

KQ: | | | | |

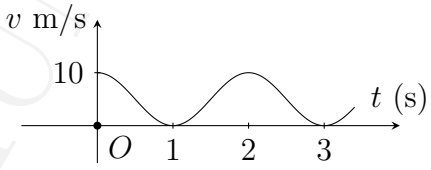
Câu 334. Tốc độ tăng các cặp đôi kết hôn (đơn vị tính: triệu người) của nước Mỹ từ năm 1970 đến năm 2005 có thể được mô hình bởi hàm số $f(t) = 1{,}218t^2 - 44{,}72t + 709{,}1$ với t là năm ($t = 0$ ứng với năm 1970). Số lượng cặp đôi kết hôn vào năm 2005 là 59 513 triệu người. Số lượng các cặp đôi kết hôn vào năm 2012 là $abcde{,}138$ triệu người, tính $100a + 10b + c + d + e$. KQ: | | | | |

Câu 335. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \dfrac{1000}{(1+0{,}3t)^2}, (t \geq 0)$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t. Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên mỗi ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì người ta phải xử lí và thay nước mới cho hồ bơi? KQ: | | | | |

Câu 336.

Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v = a\cos(\pi t) + b$ (mét/giây) (trong đó t là biến thời gian; a, b là các hằng số) có đồ thị như hình vẽ bên. Tính quãng đường mà vật đi được sau 6 giây.

KQ: | | | | |



Câu 337. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ (m/s), trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? KQ: | | | | |

Câu 338. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t tính bằng giây. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? KQ: | | | | |

Câu 339. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Tại thời điểm t giây vận tốc của nó được cho bởi công thức $v(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$ (m/s). Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất (*làm tròn tới hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

Câu 340. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \dfrac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao 8 m. Mực nước trong hồ cao nhất là bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 341. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5 m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét/năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3 m (*kết quả làm tròn tới hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 342. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (cm/s). Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu? (*kết quả làm tròn tới hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

Câu 343. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ t có số

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \dfrac{1500}{t}$ và tại ngày thứ nhất số lượng vi khuẩn là 5000 con. Tính số lượng vi khuẩn tại ngày thứ 12 (*làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

Câu 344. Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày, tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$. Biết $F'(t) = \dfrac{600}{t}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ tới hàng đơn vị)? Biết rằng nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. KQ: | | | | |

Câu 345. Một vật được ném lên từ độ cao 300 m với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9{,}81t + 29{,}43$ (m/s).

(*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengane*)

Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm t (s). Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục giây*)? KQ: | | | | |

Câu 346. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng.

(*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus ioe, Cengage*)

Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất? KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Diện tích hình thang cong

Định nghĩa 3 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là *hình thang cong*.

Định nghĩa 4 Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi

$$S = F(b) - F(a),$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

2 Khái niệm tích phân

Định nghĩa 5 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$. Vậy $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$

Ta gọi $\displaystyle\int_a^b$ là dấu tích phân, a và b là cận tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)\,\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

- *Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *và* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- *Người ta chứng minh được rằng, tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm số f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$.
- *Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

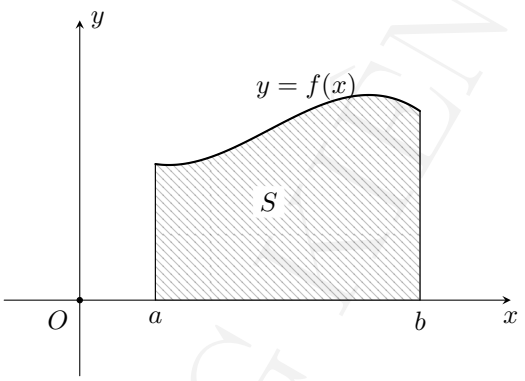
- *Ý nghĩa hình học của tích phân.*

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = q$, $x = b$.

Vậy $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



- *Ta đã biết rằng, đạo hàm của quãng đường di chuyển theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mỗi thời điểm ($v(t) = s'(t)$). Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức*

$$s = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

- *Tốc độ chuyển động $v(t)$ luôn nhận giá trị không âm.*

Nhận xét. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

3 Tính chất của tích phân

Tính chất 1 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tính chất 2 Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tính chất 3 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in (a;b)$. Khi đó,

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

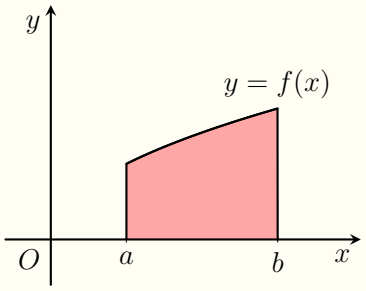
B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Tích phân hàm đa thức, căn, giá trị tuyệt đối

- $\int x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
- $\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
- $\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$
- $\int \dfrac{1}{u} \,\mathrm{d}u = \ln|u| + C.$
- $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C.$
- $\int \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{u} + C.$
- Với tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta xét dấu để mở giá trị tuyệt đối và sử dụng tính chất tích phân

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Ý nghĩa hình học của tích phân:** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$, thì tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Vậy $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Mức độ 2). Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x$.
b) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
c) $\displaystyle\int_{2}^{3} 3x^2\,\mathrm{d}x$;
d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} (2x-3)^2\,\mathrm{d}x$;
f) $\displaystyle\int_{1}^{3} x^3\,\mathrm{d}x$;
g) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x$;
h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} -\frac{3}{10x}\,\mathrm{d}x$;

i) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$.
k) $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(x^3 + 3\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.
l) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
b) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{2\sqrt{x}-x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
c) $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

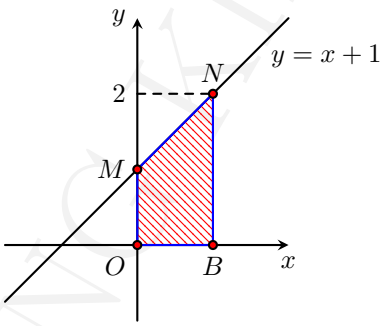
Ví dụ 3. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

a) $\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x$. b) $\int\limits_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$. c) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. d) $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 4.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = x+1\,(x \in [0;1])$. Xét hình thang vuông $OMNB$ giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = x+1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ như hình bên.



a) Tính diện tích hình thang vuông $OMNB$.

b) Giả sử $F(a)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x+1$ trên đoạn $[0;1]$. Tính $F(1)-F(0)$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng $S_{OMNB} = F(1)-F(0)$.

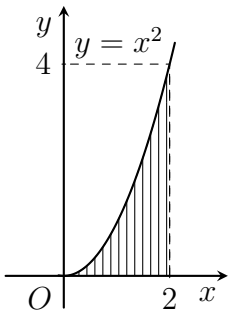
Ví dụ 5. Tính $\int\limits_{-3}^2 \left|1-x^2\right|\,\mathrm{d}x$.

2 Bài tập tự luận

Bài 1. Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính $\int\limits_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

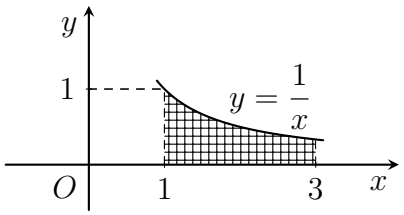
Bài 2.

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.



Bài 3.

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.



Bài 4. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_1^2 x^4\,\mathrm{d}x$. b) $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. c) $\int\limits_{-2}^4 (x+1)(x-1)\,\mathrm{d}x$. d) $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 5. Tính các tích phân

a) $\int\limits_1^9 \dfrac{2\sqrt{x}-x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$. b) $\int\limits_1^2 (2x-3)^2\,\mathrm{d}x$. c) $\int\limits_0^3 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 6. Tính:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^6-4x^3+3x^2\right)\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x^2-x+1)\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

Bài 7. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_2^3 6x\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_{-1}^3 x^2\,\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int_{-1}^1 4x^7\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_0^3 (3x-1)^2\,\mathrm{d}x$. e) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(3x^2-8x\right)\,\mathrm{d}x$. f) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+x\right)\,\mathrm{d}x$.

g) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3-x\right)\,\mathrm{d}x$. h) $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^3+3x^2-2\right)\,\mathrm{d}x$. i) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^6-4x^3+3x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

j) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x-2)^2\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^1 \left(4x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$. k) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(4x^3-5\right)\,\mathrm{d}x-\int_1^{\frac{1}{2}} \left(4x^3-5\right)\,\mathrm{d}x$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$, $x>0$. Tính giá trị của $f(4)-f(1)$.

Bài 9. Tính:

a) $A=\displaystyle\int_{-1}^2 \left(x-4x^2\right)\,\mathrm{d}x+4\int_{-1}^2 \left(x^2-1\right)\,\mathrm{d}x$. b) $B=\displaystyle\int_{-1}^0 \left(x^3-6x\right)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \left(t^3-6t\right)\,\mathrm{d}t$.

Bài 10. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x)=\sqrt{1+x^2}$. Từ đó, tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Bài 11. Tìm đạo hàm của hàm số $F(x)=\sqrt{4x+1}$. Từ đó, tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Bài 12. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(-1;3)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x;f(x))$ có hệ số góc là $3x^2-4x+1$. Tìm $f(2)$.

Bài 13. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;2)$ và tiếp tuyến của đồ thị này tại mỗi điểm $(x;f(x))$ có hệ số góc là $2x-3$. Tìm $f(4)$.

Bài 14. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=2x\,(x\in[0;2])$. Xét tam giác vuông OAB giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=2x$, trục Ox và đường thẳng $x=2$.

a) Tính diện tích tam giác vuông OAB.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

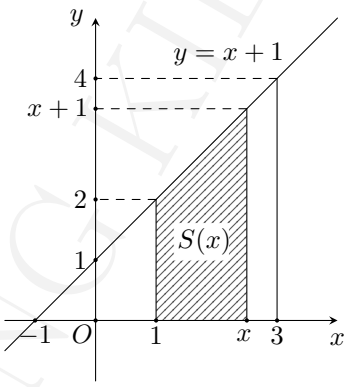
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

b) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $F(2) - F(0)$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng $S_{OAB} = F(2) - F(0)$.

Bài 15.

Cho hàm số $y = f(x) = x + 1$. Với mỗi $x \geq 1$, kí hiệu $S(x)$ là diện tích của hình thang giới hạn bởi đồ thị hàm $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng vuông góc với Ox tại các điểm có hoành độ 1 và x.



a) Tính $S(3)$.

b) Tính $S(x)$ với mỗi $x \geq 1$.

c) Tính $S'(x)$ và so sánh với $f(x)$. Từ đó suy ra $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[1;+\infty)$.

d) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Chứng tỏ rằng $F(3) - F(1) = S(3)$. Từ đó nhận xét về cách tính $S(3)$ khi biết một nguyên hàm của $f(x)$.

Bài 16. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x+1)(x-1)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{1}^{4} (x^3 - 2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{1}^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Bài 17. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} (3x-2)(3x+2)\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} t^2(5t^2-2)\,\mathrm{d}t$;

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x-2)(x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1-2x}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\,\mathrm{d}x$;

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{d}x$.

Bài 18. Cho $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x+m}}\,\mathrm{d}x$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I \geq 1$.

Bài 19. Tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x-2|\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{0}^{3} |2x-3|\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |2x+1|\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |2x+2|\,\mathrm{d}x$.

f) $\displaystyle\int_{0}^{4} |x^2-4|\,\mathrm{d}x$.

g) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-2x|\,\mathrm{d}x$.

h) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x-1|\,\mathrm{d}x$.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2+x-2|\,\mathrm{d}x$.

Bài 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $\displaystyle\int_{0}^{m} |3x-2|\,\mathrm{d}x = \frac{173}{6}$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $F(a)-F(b)$. **B.** $F(b)-F(a)$. **C.** $F(a)+F(b)$. **D.** $-F(b)-F(a)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $(a,b\in\mathbb{R}, a<b)$. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=f(x)$; trục hoành; $x=a$; $x=b$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **C.** $S=\displaystyle\int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Câu 3. Nếu $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=-5$ thì $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** -3. **C.** -7. **D.** 4.

Câu 4. Tính tích phân $\displaystyle\int_3^5 \left(2x^3+4\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-272-8\sqrt{3}+\dfrac{40\sqrt{5}}{3}$. **B.** $-272-\dfrac{40\sqrt{5}}{3}+8\sqrt{3}$.

C. $-\dfrac{40\sqrt{5}}{3}+8\sqrt{3}+272$. **D.** $-8\sqrt{3}+\dfrac{40\sqrt{5}}{3}+272$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(4;-1;7)$. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Tính độ dài đoạn MM'.

A. $MM'=10\sqrt{2}$. **B.** $MM'=2\sqrt{65}$. **C.** $MM'=8$. **D.** $MM'=2\sqrt{17}$.

Câu 6. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là

A. $2\ln 2+1$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2]$, $f(-1)=8$, $f(2)=-1$. Tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** -9. **D.** 9.

Câu 8. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\dfrac{26}{3}$. **D.** $\dfrac{32}{3}$.

Câu 9. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 10. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^2 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Câu 11. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^2 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

Câu 12. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 (2x + 1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 5$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

Câu 13. Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\displaystyle\int_0^b \left(3x^2 - 2ax - 1\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $b^3 - b^2a - b$. **B.** $b^3 + b^2a + b$. **C.** $b^3 - ba^2 - b$. **D.** $3b^2 - 2ab - 1$.

Câu 14. Cho $\displaystyle\int_0^m \left(3x^2 - 2x + 1\right)\,\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(0; 4)$. **D.** $(-3; 1)$.

Câu 15. Cho hàm số f liên tục trên khoảng K chứa a, b, c và $a < c < b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(u)\,\mathrm{d}u$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. Nếu f là hàm chẵn trên $[-a; a]$ thì $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. Nếu f là hàm lẻ trên $[-a; a]$ thì $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a < c < b$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 17. Tích phân $\int\limits_{-1}^{2}(-4x^3-6x^2+6x+5)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -9. **B.** 10. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 18. Tính tích phân $\int\limits_{1}^{5}\dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x$ kết quả bằng

A. $5\ln 7$. **B.** $-4\ln 5$. **C.** $-3\ln 5$. **D.** $2\ln 5$.

Câu 19. Tích phân $\int\limits_{0}^{1}(3x+1)\,(x+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 20. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **B.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\mathrm{e}$.

Câu 21. Biết $\int\limits_{1}^{3}\dfrac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=a+b\ln c$, với $a,\,b,\,c\in\mathbb{Z}$, $c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=8$. **D.** $S=6$.

Câu 22 (Mức độ 1). Giá trị $I=\int\limits_{2}^{4}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ là

A. $6\ln 2$. **B.** $6+\ln 2$. **C.** $\ln 64$. **D.** $2\ln 6$.

Câu 23 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 24 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{1+\ln 2}{2}$. **B.** $1+\ln 4$. **C.** $1+\ln 2$. **D.** $\dfrac{1+\ln 4}{2}$.

Câu 25 (Mức độ 3). Biết $\int\limits_{3}^{5}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-x}=a\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$ với $a,\,b,\,c\in\mathbb{Q}$, giá trị $-2a+b+3c^2$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 26. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 27. Tính tích phân $\int\limits_1^2 (3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 28. Tính tích phân $\int\limits_1^3 2x\,\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 29. Tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\ln\dfrac{4}{3}$.

Câu 30. Tích phân $\int\limits_0^1 \left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -2.

Câu 31. Tích phân $\int\limits_0^1 2^{2018x}dx$ bằng

A. $I=\dfrac{2^{2018}-1}{2018\ln 2}$. **B.** $\dfrac{2^{2018}-1}{2018}$.
C. $I=(2^{2018}-1)\ln 2$. **D.** $I=2018\,(2^{2018}-1)\ln 2$.

Câu 32. Tính tích phân $\int\limits_0^1 (2x+3)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 2,5. **C.** 3. **D.** 3,5.

Câu 33. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^4 |x^2-3x+2|\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{19}{2}$. **B.** $\dfrac{19}{2}$. **C.** $\dfrac{28}{6}$. **D.** 19.

Câu 34. $\int\limits_1^2 \left(2x+1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $4-\ln 2$. **B.** $4\ln 2$. **C.** $4+\ln 2$. **D.** 4.

Câu 35. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$.

Câu 36. Tìm các giá trị của b sao cho $\int\limits_0^b (2x-4)\,\mathrm{d}x=5$

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $\{5\}$. **B.** $\{-1;5\}$. **C.** $\{-1\}$. **D.** $\{-1;4\}$.

Câu 37. Cho $I=\displaystyle\int\limits_0^1\left[3x^2-2x+\ln(2x+1)\right]\,\mathrm{d}x$. Tìm giá trị của a biết $I=b\ln a-c$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

A. $a=3$. **B.** $a=-3$. **C.** $a=\dfrac{2}{3}$. **D.** $a=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 38. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^0 x^2(x+1)^3\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{-7}{70}$. **B.** $I=\dfrac{-1}{60}$. **C.** $I=\dfrac{2}{15}$. **D.** $I=\dfrac{1}{60}$.

Câu 39. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x(1-x)^5\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{-1}{42}$. **B.** $\dfrac{1}{42}$. **C.** $\dfrac{-1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 40. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1\left(x^3+3x\right)^{1000}\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{4^{1001}}{3003}$. **B.** $I=\dfrac{3^{1001}}{3000}$. **C.** $I=\dfrac{4^{1000}}{3000}$. **D.** $I=\dfrac{3^{1001}}{3003}$.

Câu 41. Tích phân $\displaystyle\int\limits_2^3\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{19}{648}$. **D.** $-\dfrac{19}{648}$.

Câu 42. Biết $\displaystyle\int\limits_1^4\dfrac{x^2+3}{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}+c\ln 2$, với $(a,\,b,\,c\in\mathbb{Z})$. Gọi $S=a+b-2c$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(4;6)$. **B.** $(8;10)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(6;8)$.

Câu 43. Biết $I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{2x+3}{x+2}\,\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{3}{2}+b$, $(a,\,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 44. Cho tích phân $\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $b<0$. **B.** $c>0$. **C.** $a<0$. **D.** $a+b+c>0$.

Câu 45. Cho $I=\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, $c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=2$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 46. Cho $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$.

Câu 47. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b} - \ln\frac{c}{d}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $T = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ bằng

A. 41. **B.** 20. **C.** $\frac{1039}{12}$. **D.** $\frac{1429}{324}$.

Câu 48. Biết $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{a} + \ln b - \ln c$. Tính giá trị biểu thức $S = a - b + c$.

A. $S=7$. **B.** $S=3$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

Câu 49. Biết $\displaystyle\int_2^3 \frac{-2x^2+14x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Giá trị của a^2+b+c bằng

A. 494. **B.** 484. **C.** 474. **D.** 464.

Câu 50. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Tính $P = a+b+c$.

A. $P=2$. **B.** $P=8$. **C.** $P=46$. **D.** $P=22$.

Câu 51 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 |2x-4|\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 52. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Câu 53. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 |x^3-x|\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{2}$. **B.** $I=5$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 54. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 |x^2+2x-3|\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=5$. **D.** $I=-4$.

Câu 55. Cho tích phân $I = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\displaystyle\int_{-3}^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3} = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a+b$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $P=\dfrac{40}{3}$. **B.** $P=\dfrac{80}{3}$. **C.** $P=\dfrac{17}{3}$. **D.** $P=\dfrac{98}{3}$.

Câu 56. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=38$. **B.** $I=44$. **C.** $I=48$. **D.** $I=40$.

Câu 57 (Mức độ 3). Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{4}|3x^2-6x-9|\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -20. **B.** 20. **C.** 34. **D.** 15.

Câu 58 (Mức độ 3). Số giá trị thực dương của tham số m thỏa mãn $\displaystyle\int_{0}^{m+1}|x-m|\,\mathrm{d}x=2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 59. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(|x|-|x-1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=-3$.

Câu 60. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{a}|x|\,\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{|3a^2-1|}{2}$.

Câu 61. Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\displaystyle\int_{1}^{m}|2mx-1|\,\mathrm{d}x=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Câu 62. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{d}x\right|$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{2024}\left|x^4-x^2+1\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2024}\left(x^4-x^2+1\right)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-2}^{3}\left|\mathrm{e}^x\left(x+1\right)\,\mathrm{d}x\right|=\int_{-2}^{3}\mathrm{e}^x\left(x+1\right)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Câu 63. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{1}^{4}\sqrt{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}$.

Câu 64. Biết $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x+1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của $T=a+b+c+d$ bằng

A. $T=13$. **B.** $T=10$. **C.** $T=12$. **D.** $T=11$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 65. Cho hai hàm số $y = f(x) = x^{100} + 2024$ và $y = g(x) = x^{100} + x^{99} + 2023x + 2024$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1.$		
b) $\int_{-10}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{101} + 2024.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x = 100.$		
d) $\int_{-1000}^{1000} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2.$		

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x) = x^{2025} + x$ và $y = g(x) = x^{2025} + x^{2024} + x + 2025$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\int_{-1000}^{1000} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$		
b) $\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 3.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int_0^{1000} f'(x)\,\mathrm{d}x = 1000^{2025} + 1000.$		
d) $\int_{-2024}^{2024} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = 0.$		

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $F(a) - F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$		
b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a < c < b.$		
c) $\int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$		
d) $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $y = f(x)$ lẻ trên $[-a; a].$		

Câu 68. Cho $I = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên.

Phát biểu	Đ	S
a) $\int \dfrac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln\lvert x+2\rvert.$		
b) $I = \ln\dfrac{\lvert x+1\rvert}{\lvert x+2\rvert}\Big\rvert_0^1.$		
c) $a + 3b = -1.$		

Phát biểu	Đ	S
d) $\displaystyle\int_0^1 \left(2-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)\mathrm{d}x = 2-\ln\frac{4}{3}$.		

Câu 69. Cho $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+3}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.		
b) $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+3} = \ln\lvert 2x+3\rvert\Big\vert_1^2$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $I=\ln\frac{7}{5}$.		
d) Giá trị $5\mathrm{e}^I=\sqrt{35}$.		

Câu 70. Biết $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{m}+n\ln 2$, với m, n là các số nguyên.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln\lvert x+1\rvert + C$.		
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.		
c) $m+n=1$.		
d) $I=\ln\frac{1}{m\sqrt{\mathrm{e}}}$.		

Câu 71. Cho $I=\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với a, $b\in\mathbb{Q}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \ln\lvert x+1\rvert + C$.		
b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.		
c) $I=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln\lvert x+1\rvert\right)\Big\vert_1^2$.		
d) $a+b=5$.		

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.		

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in [a;b]$, với mọi $a,\ b \in \mathbb{R}$.		
c) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.		
d) Nếu đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là a thì $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)$.		

Câu 73. Cho biết $I = \int\limits_0^2 \dfrac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,\ b \in \mathbb{Q}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\dfrac{x-1}{x^2+4x+3} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3}$.		
b) $I = \ln \dfrac{2\left\|x+3\right\|}{\left\|x+1\right\|}\Big\|_0^2$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $I = \ln 5^a \cdot 3^b$.		
d) $a^2 + b^2 = 13$.		

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$.		
b) $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}(2x)$.		
d) $\int\limits_a^a 2024 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.		

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.		
b) $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$.		
c) $\int\limits_a^b kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.		
d) $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\ \mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x}$.		

ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, $c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a < b < c$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$		
b) $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$		
c) $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$		
d) $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$		

Câu 77. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(y)\,\mathrm{d}y.$		
b) $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$		
c) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}x.$		
d) $\int\limits_a^b (f(x)g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$		

Câu 78. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_{-2024}^{2024} \mathrm{d}x = 4048.$		
b) $\int\limits_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$		
c) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.		
d) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(b)-f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 79. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\left[F(b)-F(a)\right]$.		
b) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.		
c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a$; $x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$.		
d) $\displaystyle\int_a^b f\left(2x+3\right)\,\mathrm{d}x = F\left(2x+3\right)\Big\vert_a^b$.		

Câu 80. Mỗi phát biểu dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.		
b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int_a^b f(kx)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.		

Câu 81 (Mức độ 1). Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.		
d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$.		

Câu 82 (Mức độ 4). Cho biết $I=\displaystyle\int_0^3 \left|\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right|\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + \frac{c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên.

Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) a, b, c chỉ có một số âm.		
b) $a+b+c=7$.		
c) a là số lớn nhất trong ba số a, b, c.		
d) $5a=2bc$.		

Câu 83. Với số thực k, xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$.		
b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} k\,\mathrm{d}x = 2k$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 2x$.		
d) $\displaystyle\int_{0}^{1} 3kx^2\,\mathrm{d}x = 2k$.		

Câu 84. Tích phân $\displaystyle\int_{0}^{3} x(x-1)\,\mathrm{d}x$ có bằng

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+4)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int_{0}^{\ln\sqrt{10}} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $3\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(3x+\pi)\,\mathrm{d}x$.		

Câu 85. Mỗi phát biểu dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) Nếu $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.		
c) Nếu $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ thì f là hàm số lẻ trên đoạn $[-1;1]$.		
d) Nếu $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ thì f là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$.		

Câu 86 (Mức độ 2). Cho $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2-x}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 - c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) a, b, c đều là các số nguyên dương.		
b) $ab = 1$.		
c) Ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.		
d) $b^2 - c^2 = 2$.		

Câu 87. Mỗi phát biểu dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big\vert_1^2$.		
b) $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x)\Big\vert_1^3$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = (-\sin x)\Big\vert_{\pi}^{2\pi}$.		
d) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln x)\Big\vert_{-3}^{-2}$.		

Câu 88. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Phát biểu	Đ	S
a) 0.		
b) 2.		

Phát biểu	Đ	S
c) 4.		
d) 6.		

Câu 89 (Mức độ 3). Cho $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3$ với a, $b \in \mathbb{Q}$.

Phát biểu	Đ	S
a) a, b là hai số cùng dấu.		
b) a, b là hai số nguyên.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a < b$.		
d) $\lvert a + b\rvert = 1$.		

Câu 90. Tích phân $J = \displaystyle\int_{-2}^{2} \lvert x^2 - 1\rvert\,\mathrm{d}x$ bằng

Phát biểu	Đ	S
a) $J = 3$.		
b) $J = 3{,}5$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $J = 4$.		
d) $J = 7$.		

Câu 91. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x$ và $y = x$?

Phát biểu	Đ	S
a) $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $S = 0$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} \lvert x^3 - 4x\rvert\,\mathrm{d}x$.		
d) $S = 8$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 92. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.

Phát biểu	Đ	S
a) $S = \int_0^5 \left\| x^2-4x+3 \right\| - x - 3 \Big\| \, \mathrm{d}x$.		
b) $S = \dfrac{109}{6}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $S = \int_1^3 \left\| x^2-4x+3 \right\| - x - 3 \Big\| \, \mathrm{d}x$.		
d) $S = \dfrac{197}{6}$.		

Câu 93. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 \frac{2abx + a + b}{(1+ax)(1+bx)} \, \mathrm{d}x = 0$. Giá trị của $S = ab + a + b$ bằng

Phát biểu	Đ	S
a) 0, 1.		
b) -2, 0.		

Phát biểu	Đ	S
c) 1, -2.		
d) -2, 1.		

Câu 94. Tìm số dương k nhỏ nhất thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+k} \geq 0$?

Phát biểu	Đ	S
a) $k = 3$.		
b) $k = 4$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $k = 1$.		
d) $k = 2$.		

Câu 95. Cho biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1} \, \mathrm{d}x = a + b\ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $a + b = \dfrac{1}{2}$.		
b) $a + b = \dfrac{3}{2}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a - b = -\dfrac{1}{2}$.		
d) $ab = \dfrac{5}{2}$.		

Câu 96. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+m}} \geq 1$ với $m > 0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $0 < m \leq \dfrac{1}{4}$.		
b) $m > \dfrac{1}{4}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\dfrac{1}{8} \leq m \leq \dfrac{1}{4}$.		
d) $m > 0$.		

Câu 97. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{10^{16}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \, \mathrm{d}x$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $I = \dfrac{1}{2}10^{16}\ln \mathrm{e}$.		
b) $I = \dfrac{1}{2}10^{16}\ln\dfrac{2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $I = \dfrac{1}{2}10^{15}\ln\dfrac{2\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}$.		
d) $I = \dfrac{1}{2}10^{16}\ln\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}$.		

GV. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

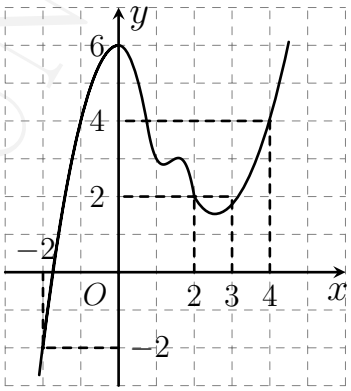
Câu 98. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|2x+1|+|x-2|$, biết $F(1)=\dfrac{5}{2}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_0^1 \lvert 2x+1\rvert \,\mathrm{d}x = 2.$		
b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \lvert x-2\rvert \,\mathrm{d}x = 4.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}.$		
d) Tính $F(-1)$.		

Câu 99.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_0^2 f'(x-2)\,\mathrm{d}x = 8.$		
b) $\displaystyle\int_0^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x = 3.$		
c) $\displaystyle\int_{-2}^0 \lvert f'(x)\rvert \,\mathrm{d}x = 8.$		
d) $S=\displaystyle\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x = 6.$		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=12x^2+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2$, khi đó $F(1)$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 101. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\left(-\sqrt{2}+c\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 102. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 103. Biết $I=\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 104. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 105. Tìm số thực m thỏa mãn $9+\displaystyle\int\limits_0^1 (2m^2x-6m)\,\mathrm{d}x=0$?

KQ: | | | | |

Câu 106. Tìm số giá trị của b sao cho $\displaystyle\int\limits_0^b (2x-3)\,\mathrm{d}x=-2$.

KQ: | | | | |

Câu 107. Cho bất phương trình $\displaystyle\int\limits_0^x (3t^2-8t+4)\,\mathrm{d}t\le x,\quad (x>0)$. Tính tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho.

KQ: | | | | |

Câu 108. Biết $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=a+b\ln c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}, c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 109. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)=a\ln b$ với a, b là các số tự nhiên. Tổng $a+b$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 110. Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_1^a (2x-3)\,\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$.

KQ: | | | | |

Câu 111. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 (x^3-3x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 112. Với a, b là các tham số thực. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)\,\mathrm{d}x=b^t-b^ya+zb$. Tính $t+y+z$.

KQ: | | | | |

Câu 113. Cho $\displaystyle\int\limits_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\,\mathrm{d}x=6$. Tính giá trị của tham số m.

KQ: | | | | |

Câu 114. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 115. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left(\dfrac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 116. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 117. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{(x^2+1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*). KQ: | | | | |

Câu 118. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x(1-x)^5\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 119. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^3|x-1|\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 120. Cho $\displaystyle\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\ln a$. Tính giá trị của a. KQ: | | | | |

Câu 121. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 122. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^4\dfrac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 123. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 124. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 125 (Mức độ 2). Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^5\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 126 (Mức độ 4). Biết $I=\displaystyle\int\limits_2^3\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, trong đó a, b, c là những số nguyên. Tính biểu thức $a^2+b^2+3c^2$. KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 127 (Mức độ 3). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	$-\infty$

Biết $\displaystyle\int_1^4 |f'(x)|\,\mathrm{d}x=2024$, tính giá trị của $f(4)$. KQ: | | | | |

Câu 128. Biết $I=\displaystyle\int_2^5 \frac{|x-2|}{x}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 5+c$ với $a,\,b,\,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 129. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-3}^3 \left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x$ *(tính gần đúng đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 130. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^2 \left|-x^2-2x+3\right|\,\mathrm{d}x$ *(tính gần đúng đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 131. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 \left|\frac{x+1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ *(tính gần đúng đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 132. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 133. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^1 \sqrt{4x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x$ *(làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 134. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{9x^2-6x+1}\,\mathrm{d}x$ *(làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 135. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8$. Tính $m+n$.

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 136. Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0 < a_1 < a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a (2x-3)\,\mathrm{d}x = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$. KQ: | | | | |

Câu 137. Cho $\int\limits_0^m (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính giá trị của tham số m. KQ: | | | | |

Câu 138. Cho $I = \int\limits_0^1 (4x - 2m^2)\,\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

KQ: | | | | |

Câu 139. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int\limits_0^a (2x-3)\,\mathrm{d}x \le 4$? KQ: | | | | |

DẠNG 2 Tích phân của hàm số lượng giác, mũ

- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \ne 1)$;
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x + C$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 6 (Mức độ 2). Tính

a) $\int\limits_0^1 2^x\,\mathrm{d}x$. b) $\int\limits_0^1 (3\cdot 2^x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$. c) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. d) $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

e) $\int\limits_0^2 2^{x+3}\,\mathrm{d}x$. f) $\int\limits_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$. g) $\int\limits_0^1 (2\cdot 3^x - 5\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 7 (Mức độ 2). Tính

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$. b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,\mathrm{d}t$. c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$. d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

e) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$. f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x$. g) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$. h) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{-2}{3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 8 (Mức độ 2). Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 9. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{e}^x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\int\limits_1^4 \left(2^x - \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^{2\pi} (2x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

2 Bài tập tự luận

Bài 21 (Mức độ 2). Tính

a) $\int\limits_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{e}^{x+2}\,\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_0^1 \left(3\cdot 4^x - 5\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

d) $\int\limits_0^1 (5 - 2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\int\limits_{-1}^{0} 5^{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

f) $\int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{2x} + 3x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Bài 22 (Mức độ 1). Cho $\int\limits_0^2 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}-1)$. Tính $\int\limits_0^2 \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}\,\mathrm{d}x$.

Bài 23. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_1^3 \mathrm{e}^{x-2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_0^1 (2^x - 1)^2\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_1^4 \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Bài 24. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^{\pi} (2\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_0^{\pi} (1 + \cot x)\sin x\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

Bài 25. Tính:

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + 2\cot^2 x\right)\,dx$.

c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(2\tan^2 x + 5\right)\,dx$.

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x\,\mathrm{d}x$.

f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 2)\,\mathrm{d}x$.

h) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x$.

i) $I = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

j) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\,\mathrm{d}x$.

k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

l) $\int\limits_0^1 \dfrac{4^x - 1}{2^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 26. Tính các tích phân

a) $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$. b) $\int\limits_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$. c) $\int\limits_0^{\pi} \left(1+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

Bài 27. Tính $\int\limits_{-1}^{1} |\mathrm{e}^x-1|\,\mathrm{d}x$.

Bài 28 (Mức độ 2). Tìm m để $\int\limits_0^{m} \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0$.

Bài 29 (Mức độ 3). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\cos x+1, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{8}+1$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 140 (Mức độ 2). Tích phân $\int\limits_1^3 \cos(x+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\sin 3-\sin 1$. **B.** $\sin 6-\sin 4$. **C.** $\dfrac{\sin 6-\sin 4}{3}$. **D.** $3(\sin 6-\sin 1)$.

Câu 141. Tính tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+2\cos x)\,\mathrm{d}x$ kết quả bằng

A. -8. **B.** 4. **C.** -12. **D.** 8.

Câu 142. Tính tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x}+\dfrac{5}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$.

Câu 143 (Mức độ 2). Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2019\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=2\sqrt{2}$. **C.** $I=2019\sqrt{2}$. **D.** $I=4038\sqrt{2}$.

Câu 144 (Mức độ 1). Giá trị tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x+\sin x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2$.

Câu 145. Giá trị của $I=\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 146. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} + 6$. **B.** $-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 6 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}$. **C.** $-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} + 6 + 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$. **D.** $-6 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} + 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Câu 147. Tính tích phân $\displaystyle\int_3^4 \left(3\cdot 2^x - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-2\ln 4 - 2\ln 3 + \dfrac{72}{\ln 2}$. **B.** $-\dfrac{24}{\ln 2} - 2\ln 3 + 2\ln 4$.
C. $-2\ln 4 + 2\ln 3 + \dfrac{24}{\ln 2}$. **D.** $-2\ln 4 + 2\ln 3 + \dfrac{48}{\ln 2}$.

Câu 148 (Mức độ 2). Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^{2021} 2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2021} - 1$. **B.** $\dfrac{2^{2021}}{\ln 2}$. **C.** $(2^{2021} - 1)\ln 2$. **D.** $\dfrac{2^{2021} - 1}{\ln 2}$.

Câu 149 (Mức độ 2). Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I = \mathrm{e}^3 - 1$. **B.** $I = \mathrm{e} - 1$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3}$. **D.** $I = \mathrm{e}^3 + \dfrac{1}{2}$.

Câu 150 (Mức độ 2). Giá trị của tích phân $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2021}\,\mathrm{d}x$ là

A. $\dfrac{\mathrm{e}^{2022}}{2022}$. **B.** $\dfrac{1}{2022}$. **C.** e^{2022}. **D.** e^{2021}.

Câu 151 (Mức độ 2). Giá trị của $P = \displaystyle\int_0^{2022} \left(\mathrm{e}^x + 1\right)\mathrm{d}x$ là

A. $P = \mathrm{e}^{2022} + 2021$. **B.** $P = \mathrm{e}^{2022} - 2021$. **C.** $P = \mathrm{e}^{2022} - 2022$. **D.** $P = \mathrm{e}^{2022} + 2022$.

Câu 152. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e})$. **B.** $\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$. **C.** $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$. **D.** $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$.

Câu 153. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e} - 1}{a - \ln b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

A. $P = -3$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 3$.

Câu 154. Giá trị của $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x} - 4}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x$ bằng

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. $I = 2(\mathrm{e}+3)$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}+3)$. **C.** $I = \mathrm{e}-3$. **D.** $I = 2(\mathrm{e}-3)$.

Câu 155. Biết $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 + a\cdot\mathrm{e} + b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=\dfrac{a+b}{a\cdot b}$ là

A. $P=-3$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=-2$.

Câu 156. Biết $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-\mathrm{e}^{-3x}+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}+b$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $P=\dfrac{a+b}{a\cdot b}$ là

A. $P=\mathrm{e}^4-1$. **B.** $P=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $P=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{\mathrm{e}^4}$. **D.** $P=\dfrac{1-\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4}$.

Câu 157. Giá trị của $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 158 (Mức độ 3). Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x < \frac{2018\cdot\mathrm{e}^k-2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Câu 159 (Mức độ 2). Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 [2f(x)+\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $5+\mathrm{e}$. **B.** $3+\mathrm{e}$. **C.** $3-\mathrm{e}$. **D.** $5-\mathrm{e}$.

Câu 160. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$.

C. $\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Câu 161. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng?

A. $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$.

Câu 162 (Mức độ 2). Gọi a, b là các số nguyên sao cho $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\mathrm{e}^{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 163 (Mức độ 2). Cho $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{e}^2+b\cdot\mathrm{e}$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức

$a+b$ bằng

A. 8. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 164 (Mức độ 2). Tính $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=3$.

Câu 165 (Mức độ 2). Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int_0^{2020} 7^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{7^{2020}-1}{\ln 7}$. **B.** $I=7^{2020}-\ln 7$. **C.** $I=\dfrac{7^{2021}}{2021}-7$. **D.** $I=2020\cdot 7^{2019}$.

Câu 166 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)$ thoả $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Câu 167 (Mức độ 4). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi^2-6}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-3}{32}$. **C.** $\dfrac{3\pi^2-16}{64}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2-6}{112}$.

Câu 168 (Mức độ 2). Tích phân $\displaystyle\int_a^b (1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ với $a<b$ có giá trị bằng

A. $\cos a-\cos b+b-a$. **B.** $\cos b-\cos a+a-b$.
C. $\sin a-\sin b+a-b$. **D.** $\sin b-\sin a-a+b$.

Câu 169 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $0,0861$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 170 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-1$.

Câu 171 (Mức độ 2). Cho $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c<0$ và $\dfrac{b}{c}$ tối giản.

Tổng $a+b+c$ bằng

A. -77. **B.** 103. **C.** -17. **D.** 43.

Câu 172 (Mức độ 2). Cho biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-\sin x)\,\mathrm{d}x=a\pi+b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

thức $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 173 (Mức độ 2). Kết quả của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)\,\mathrm{d}x$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$ với $a,\,b\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=5$. **C.** $2a-3b=2$. **D.** $a-b=2$.

Câu 174 (Mức độ 2). Tìm các số $a,\,b$ để hàm số $f(x)=a\sin(\pi x)+b$ thỏa $f(1)=2$ và $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

A. $a=\frac{\pi}{2},\,b=2$. **B.** $a=-\frac{\pi}{2},\,b=2$. **C.** $a=-\pi,\,b=2$. **D.** $a=\pi,\,b=2$.

Câu 175 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $\int\limits_0^{\pi}\sin 3x\,\mathrm{d}x$

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 176. Giá trị của $\int\limits_0^{\pi}(2\cos x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 177 (Mức độ 2). Giả sử $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}\ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của ab bằng

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $-\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{18}$.

Câu 178 (Mức độ 2). Số các số thực $m\in(0;2017)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{m}\cos 2x\,\mathrm{d}x=0$ là

A. 643. **B.** 1284. **C.** 1285. **D.** 642.

Câu 179 (Mức độ 2). Cho tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cdot\cos 4x\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$, trong đó a,b là các hằng số hữu tỉ. Tính $\mathrm{e}^a+\log_2|b|$.

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 0.

Câu 180 (Mức độ 2). Biết rằng $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{3}$ với $a,\,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a-4b$.

A. $P=-\frac{1}{2}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{9}{2}$. **D.** $P=3$.

Câu 181 (Mức độ 2). Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\,\mathrm{d}x$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=1$.

Câu 182. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x+x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a+b\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi^2}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+2b+3c$ là

A. $P=45$. **B.** $P=60$. **C.** $P=65$. **D.** $P=70$.

Câu 183. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}3\tan^2 x\,\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+b+\dfrac{\pi}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-6$.

Câu 184. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cot^2 x+5\right)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{a}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-6$.

Câu 185. Biết $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\dfrac{x}{4}\cos^2\dfrac{x}{4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{a}{b}$ với a, $b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=17$. **B.** $P=16$. **C.** $P=32$. **D.** $P=49$.

Câu 186 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}|\mathrm{e}^x-1|\,\mathrm{d}x$ bằng $a+b\mathrm{e}+\dfrac{c}{\mathrm{e}}$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ là

A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 187 (Mức độ 2). Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}|\sin 2x|\,\mathrm{d}x$ là

A. 2. **B.** π. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 188. Cho tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{3}|2^x-4|\,\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=15$. **B.** $P=10$. **C.** $P=5$. **D.** $P=18$.

Câu 189. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\dfrac{2}{\ln 2}$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 190. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}-4}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-3.$		
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}+1.$		
c) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\ln 2.$		
d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-\mathrm{e}^{-3x}+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^4-1.$		

Câu 191 (Mức độ 1). Cho biết $\displaystyle\int_{2^{2024}}^{2^{2025}} \left(1+\frac{1}{x\ln 2}\right)\,\mathrm{d}x = 2^a+b$; trong đó a và b là những số nguyên dương.

Phát biểu	Đ	S
a) $a+b$ chia hết cho 5.		
b) a^2-b^2 chia hết cho 3.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a<b$.		
d) $a+b=2024$.		

Câu 192 (Mức độ 2). Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}-\frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên, $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản.

Phát biểu	Đ	S
a) a, b, c đều là các số nguyên dương.		
b) $a+b=9$.		
c) Ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng.		
d) c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c.		

Câu 193 (Mức độ 2). Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (a\mathrm{e}^x+b)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}+4$ thì

Phát biểu	Đ	S
a) $a>b$.		
b) $a=2b$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a=3$, $b=7$.		
d) $2a-b=-1$.		

Câu 194 (Mức độ 2). Cho biết $\displaystyle\int_0^3 |2^x-4|\,\mathrm{d}x = a+\frac{b}{\ln 2}$ với a, b là các số nguyên dương.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $a+b=5$.		
b) a^2-b^2 có tận cùng là chữ số 5.		
c) a, 3 và b lập thành một cấp số cộng.		
d) $\log_b a=9$.		

Câu 195 (Mức độ 2). Biết rằng $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = m\left(\mathrm{e}^p-\mathrm{e}^q\right)$ với m, p, $q\in\mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản.

Phát biểu	Đ	S
a) $p>q$.		
b) $p=2q$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $m<q$.		
d) $m+p+q=\dfrac{22}{3}$.		

Câu 196 (Mức độ 3). Biết rằng $\displaystyle\int_0^3 \frac{1-\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = a-\mathrm{e}^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $b>5$.		
b) $b-a=-1$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a=4$; $b=3$.		
d) $a<0$.		

Câu 197 (Mức độ 2). Biết $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^a-1}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}; b\neq 0$.

Phát biểu	Đ	S
a) $a<2$.		
b) $a=b$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $2a-b=4$.		
d) $b<3$.		

Câu 198 (Mức độ 2). Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x = a+\frac{\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên.

Phát biểu	Đ	S
a) $a>b$.		
b) $b=c$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a+b+c=1$.		
d) $a-b\sqrt{2}=0$.		

Câu 199 (Mức độ 2). Biết rằng tích phân $I=\displaystyle\int_{-3}^1 \left|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\right|\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{e}^b+c\cdot\mathrm{e}$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Trong a, b, c có đúng một số dương.		
b) $a+b+c=-1$.		
c) c là số lớn nhất trong ba số.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
d) $a^2+b^2+c^2=19$.		

Câu 200 (Mức độ 2). Mỗi phát biểu sau đây đúng hay sai

Phát biểu	Đ	S
a) $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$.		
b) $I=\int\limits_0^1 \dfrac{3^x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 3}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.		
d) $I=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2022x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2022}-1}{2022}$.		

Câu 201 (Mức độ 2). Cho $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=a+b\sqrt{3}$ với a,b là số thực.

Phát biểu	Đ	S
a) $a-b=-\dfrac{2}{3}$.		
b) $a=1-2b$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a<b$.		
d) $b<0$.		

Câu 202 (Mức độ 2). Cho $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,\mathrm{d}x=c+d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(c,d\in\mathbb{Q})$.

Phát biểu	Đ	S
a) $c>0$.		
b) $d=\dfrac{1}{3}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $c-d=0$.		
d) $c=d=1$.		

Câu 203 (Mức độ 2). Cho biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin x|\,\mathrm{d}x=a-\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương.

Phát biểu	Đ	S
a) $a=b$.		
b) $a^2+b^2=a^3$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $a+b$ là một số chính phương.		
d) $ab=a+b$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 204. Cho $\int\limits_0^{\ln 2} \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3}=a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 205 (Mức độ 1). Tính tích phân $\int\limits_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$ *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 206. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 5^{x+1}\cdot 7^{2x-1}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 207. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \left(x+\mathrm{e}^{-x-2}\right)\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 208. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 209. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 210. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)^2}{\mathrm{e}^{x-1}}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b+\frac{c}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của $P=a+b+c$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 211. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+\frac{\pi}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 212. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\left(2024^x+1\right)^2}{\mathrm{e}^{-3x}}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 213. Tính $I=\dfrac{1}{1000}\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\left(\mathrm{e}^{-x}+2\right)^2}{\mathrm{e}^{x-1}}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 214. Tính $I=\dfrac{1}{100}\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{2x}\left(2023+\frac{2024\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

KQ: ☐☐☐☐

Câu 215 (Mức độ 2). Cho số thực a thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_{-1}^{a} \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2-1$, tính a? KQ: ☐☐☐☐

Câu 216. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \left(4x^3-2\cdot 3^{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*). KQ: ☐☐☐☐

Câu 217 (Mức độ 3). Biết $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x\left(1+\mathrm{e}^x\right)+\ln x+1}{\left(x\ln x+\mathrm{e}^x\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b\ln 2+\mathrm{e}^c}+\frac{2}{\mathrm{e}}$ với a, b, c là các số nguyên.

Tính tổng $P=a+b+c$. KQ: ☐☐☐☐

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 218 (Mức độ 3). Biết $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x = a+\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $T=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 219 (Mức độ 2). Cho $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,\mathrm{d}x = a+b\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $a-b$? KQ: | | | | |

Câu 220 (Mức độ 2). Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = a-\frac{\pi}{b}(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $S=a+b^2$. KQ: | | | | |

Câu 221 (Mức độ 3). Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{a\sqrt{3}}{b}(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $P=\dfrac{a-2b}{b}$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 222 (Mức độ 2). Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 223 (Mức độ 3). Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\displaystyle\int_\pi^b 4\cos 2x\,\mathrm{d}x = 1$?

KQ: | | | | |

Câu 224 (Mức độ 2). Cho tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Tính giá trị của $10I$ *(làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy).* KQ: | | | | |

Câu 225 (Mức độ 3). Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{2024\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ *(kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).* KQ: | | | | |

Câu 226 (Mức độ 3). Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x\cos x\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 227 (Mức độ 3). Cho tích phân $\displaystyle\int_0^1 \left(\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{x}{(x+1)^3}\right)\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}+\frac{b}{c}$; với a, b, c là những số nguyên dương và phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 228 (Mức độ 4). Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+\mathrm{e}^{-x}} = a\ln 2+b\ln\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)$, với a, b là những số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2+3ab$. KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 229 (Mức độ 4). Cho tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{(12\cos x-5\sin x+10)\,\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x+5}=a\pi+b\ln 2-c\ln 7$; với a, b, c là những số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 230. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 231. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 232. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$, (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 233. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 234. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{b}4\cos 2x\,\mathrm{d}x=1$?

KQ: | | | | |

DẠNG 3 Tích phân hàm phân nhánh

Sử dụng tính chất của tích phân để tách tích phân cần tìm thành tổng của hai hay nhiều tích phân, trong đó mỗi tích phân nằm hoàn toàn ở một nhánh của hàm số.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 10 (Mức độ 2). Cho $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 1\\ 2x-1 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính $\displaystyle\int\limits_{0}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 11 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\ge 1\\ 2x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 12 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{khi } x\ge 0\\ \sin x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

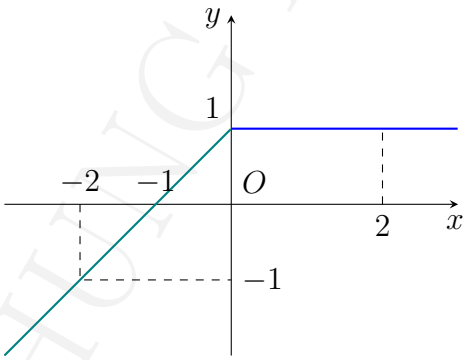
Ví dụ 13 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\geq 0\\ \mathrm{e}^x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Giá trị tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{5\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$. **B.** $I=\dfrac{5\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I=\dfrac{5\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. **D.** $I=\dfrac{5\mathrm{e}+1}{2\mathrm{e}}$.

Ví dụ 14 (Mức độ 2).

Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.



Ví dụ 15 (Mức độ 2). Cho biết $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x<2\\ 3x^2-7 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=3$.		
b) $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=24$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=186$.		
d) $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=46$.		

Ví dụ 16 (Mức độ 2). Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x<0\\ \mathrm{e}^x & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$. Biết $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+3c$.

KQ: | | | | |

Ví dụ 17 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\geq 1\\ x^2+b, & x<1\end{cases}$, với a, b là các số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 30 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } 0\leq x\leq 1\\ 2-x & \text{khi } 1<x\leq 2\end{cases}$. Tính $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 31 (Mức độ 2). Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\leq x<1\\ 4-x & \text{khi } 1\leq x\leq 2\end{cases}$. Tính $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

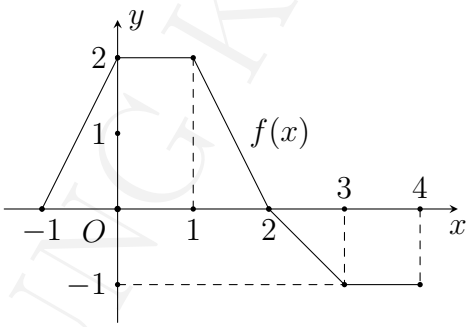
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 32 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\geq 0\\ \mathrm{e}^{2x} & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Bài 33 (Mức độ 3).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ bên.

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.



3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 235 (Mức độ 1). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } x\leq 0\\ 2 & \text{khi } x>0.\end{cases}$ Giá trị của $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 236 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^3+2 & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$. Giá trị của $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 237 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\leq 1\\ 2x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Giá trị của $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 238 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x>0\\ \mathrm{e}^{x}+1 & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{7\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}^2}$. **B.** $I=\dfrac{3\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$. **C.** $I=\dfrac{9\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$. **D.** $I=\dfrac{11\mathrm{e}^2-11}{2\mathrm{e}^2}$.

Câu 239 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} & \text{khi } 0\leq x\leq 1\\ 2x-1 & \text{khi } 1<x\leq 3\end{cases}$. Khi đó $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $6+\ln 4$. **B.** $4+\ln 4$. **C.** $6+\ln 2$. **D.** $2+2\ln 2$.

Câu 240. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x} & \text{khi } x\geq 0\\ x^2+x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{\mathrm{e}^2}{c}$ $\left(\dfrac{a}{b}\text{ là phân số tối giản}\right)$. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 241. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\geq 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{23}{3}$. **B.** $\dfrac{23}{6}$. **C.** $\dfrac{17}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Câu 242. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x^2)}{x-4} & \text{khi } x\geq 3\\ \dfrac{1}{x-4} & \text{khi } x<3\end{cases}$. Tích phân $I=\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng

A. $\dfrac{40}{3}-\ln 2$. **B.** $\dfrac{95}{6}+\ln 2$. **C.** $\dfrac{189}{4}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{189}{4}-\ln 2$.

Câu 243. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\leq 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{a}{6}-1$. **B.** $\dfrac{2a}{3}+1$. **C.** $\dfrac{a}{6}+1$. **D.** $\dfrac{2a}{3}-1$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 244. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & \text{khi } x\geq 1\\ 1-x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_1^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{2024}(2x^2-3)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int_{-2024}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2024}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int_{-2024}^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2024}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{2024}(2x^2-3)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int_{-2024}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=2024$.		

Câu 245. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}5x-1 & \text{nếu } x<1\\ 2x^2+x-3 & \text{nếu } x\geq 1\end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$.		
b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f'(x),x=18$.		
d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f'(2x+1)\,\mathrm{d}x=68$.		

Câu 246. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x} & \text{khi } x\geq 0\\ x^2+x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khi đó

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) Giá trị $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.		
b) Giá trị $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$.		
c) Giá trị của $m, m>0$ để $\displaystyle\int_m^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ bằng 1.		
d) Biết $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + \frac{\mathrm{e}^2}{c}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị $a+b+c$ bằng 9.		

Câu 247 (Mức độ 1). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \le 0 \\ f_2(x) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f_2(x)\,\mathrm{d}x$.		

Câu 248 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \le -2 \\ 2 & \text{khi } x > -2 \end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}$.		
b) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}$.		
d) $\displaystyle\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.		

Câu 249. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{khi } x \ge 1 \\ 2-x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_1^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{2024} (2x^2+3)\,\mathrm{d}x$.		

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT | PHÚ THỌ HÒA | TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) $\int\limits_{-2024}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2024}^{1} (2-x^3)\,\mathrm{d}x.$		
c) $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2024} (2x^2+3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-2024}^{1} (2-x^3)\,\mathrm{d}x.$		
d) $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2024} (2x^2+3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-2024}^{1} (2-x^3)\,\mathrm{d}x.$		

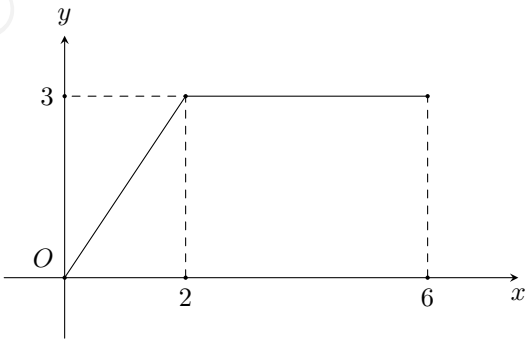
Câu 250 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3-3x^2+1 & \text{khi } x \geq 4 \\ x^2-x-1 & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{4}{3}.$		
b) $\int\limits_{4}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = 615.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 40.$		
d) $\int\limits_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{707}{6}.$		

Câu 251 (Mức độ 3).

Hình bên là đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$.



Phát biểu	Đ	S
a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{khi } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}.$		
b) $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$		
c) $\int\limits_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 6.$		
d) $\int\limits_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 11.$		

Câu 252. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x+1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} (x+1)\,\mathrm{d}x.$		
b) $\int\limits_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{2}^{3} (x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{1}{2}f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{41}{12}.$		
d) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} (x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x.$		

Câu 253 (Mức độ 2). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{khi } x \geq \pi \\ \sin x & \text{khi } x < \pi \end{cases}$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$		
b) $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$		
d) $\int_{-\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -1.$		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 254. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 255. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & \text{khi } x < 0 \\ x-1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^{9} \frac{1}{7} f(t)\,\mathrm{d}t$. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 256. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? (*Làm tròn đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 257. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x+12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

KQ: | | | | |

Câu 258 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{nếu } x \leq 2 \\ 3x^2+m & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hãy xác định giá trị của tích phân $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 259 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x+a & \text{khi } x \geq 0 \\ 2+bx & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ (với a, b là các số thực). Nếu $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{m}{n}$ (với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản) thì $m+2n$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 260 (Mức độ 4). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3-x^2-8x+10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Tính $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 261 (Mức độ 4). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & x\geq 0 \\ ax-b-1, & x<0 \end{cases}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 262 (Mức độ 4). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2ax, & x\leq 0 \\ 3x^2+2bx, & x>0 \end{cases}$ (với a, b là các tham số thực) thỏa $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=[f(-1)]^2+[f(1)]^2$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 263 (Mức độ 3). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{2x}+4x+1 & \text{khi } x\geq 0 \\ 3x^2+2x+3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(-1)=1$. Biết rằng $2F(2)-F(-3)=a\mathrm{e}^4+b$ (trong đó a, b là các số hữu tỉ). Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

DẠNG 4 Tích phân hàm ẩn

Xem lại **Bài 1. Dạng 5:** Nguyên hàm hàm ẩn.

6 Bài tập tự luận

Bài 34. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=-10$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$, $F(3)=-8$. Tính $F(-2)$.

Bài 35. Cho $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\displaystyle\int_{0}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính

a) $\displaystyle\int_{0}^{3}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{0}^{3}3f(x)\,\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_{0}^{3}[2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Bài 36. Cho $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=4$, $\displaystyle\int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-2$; $\displaystyle\int_{0}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t=4$. Tính $\displaystyle\int_{4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

7 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 264. Nếu $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=6$ thì $\displaystyle\int_{0}^{3}\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 265. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{17}{2}$. **B.** $I = \dfrac{5}{2}$. **C.** $I = \dfrac{7}{2}$. **D.** $I = \dfrac{11}{2}$.

Câu 266. Cho $\int\limits_{2}^{3} f(x)\ \mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{2}^{3} g(x)\ \mathrm{d}x = 5$. Hãy chọn mệnh đề đúng?

A. $\int\limits_{2}^{3} 2f(x)\ \mathrm{d}x = 10$. **B.** $\int\limits_{2}^{3} [f(x) + g(x)]\ \mathrm{d}x = 10$.

C. $\int\limits_{2}^{3} [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x = 0$. **D.** $\int\limits_{2}^{3} [2f(x) - 3g(x)]\ \mathrm{d}x = 0$.

Câu 267. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(4) = 1$ và $\int\limits_{4}^{5} f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** -6.

Câu 268. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_{a}^{b} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$. **B.** $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ \forall k \in \mathbb{R}$.

C. $\int\limits_{a}^{b} kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall k \in \mathbb{R}$. **D.** $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 269. Nếu $\int\limits_{1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_{2}^{3} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$ thì $\int\limits_{1}^{3} f(x)\ \mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 270. Nếu $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\int\limits_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -4$ thì $\int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 271. Cho $\int\limits_{0}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int\limits_{9}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 16$, khi đó $\int\limits_{0}^{9} [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 26. **B.** 58. **C.** 143. **D.** 122.

Câu 272. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[2;3]$, $f(2) = 2$ và $f(3) = 5$. Khi đó $\int\limits_{2}^{3} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 3.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 273. Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và là hàm chẵn thỏa $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Khi đó $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 274. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$f(4)$	↘	$-\infty$

Biết $\int\limits_{1}^{4} |f'(x)|\ \mathrm{d}x = 2019$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 275. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1) = 15$, $f(4) = 8$. Tính $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x$

A. $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = 7$. **B.** $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$. **C.** $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = 23$. **D.** $\int\limits_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = -7$.

Câu 276. Cho $\int\limits_{1}^{2} [4f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_{1}^{2} f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 277. Biết $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\int\limits_{1}^{2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -4.

Câu 278. Nếu $\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_{1}^{4} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 279. Nếu $\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = -4$ thì $\int\limits_{1}^{4} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -9. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 280. Biết $\int\limits_{1}^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int\limits_{2024}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_{1}^{2024} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -1.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 281. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^3 4f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Câu 282. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2024}$. Tính $I = \int\limits_0^2 2024f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = \dfrac{1}{2024}$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 2024$.

Câu 283. Nếu $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_5^0 5f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 25. **D.** -25.

Câu 284. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 285. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int\limits_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 286. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -8. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 12.

Câu 287. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 5 + \pi$.

Câu 288. Cho $\int\limits_1^2 [4f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 289. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tích phân $\int\limits_0^1 \left(2f(x) - 3x^2\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 290. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{17}{2}$. **B.** $I = \dfrac{5}{2}$. **C.** $I = \dfrac{7}{2}$. **D.** $I = \dfrac{11}{2}$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 291 (Mức độ 1). Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\int\limits_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 292. Cho $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int\limits_0^5 \left[4f(x) - 3x^2\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -140. **B.** -130. **C.** -120. **D.** -133.

Câu 293. Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int\limits_2^4 f(y)\,\mathrm{d}y$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = -5$.

Câu 294. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$; $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 36$. **C.** $I = \dfrac{9}{4}$. **D.** $I = 13$.

Câu 295. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 296. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$; $\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -4$.

Câu 297. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;6]$ thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính giá trị của biểu thức $P = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 10$.

Câu 298 (Mức độ 2). Nếu $\int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$ và $\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}$ thì $\int\limits_0^4 \left[4\mathrm{e}^{2x} + 2f(x)\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\mathrm{e}^8 + 2$. **B.** $2\mathrm{e}^8 - 2$. **C.** $2\mathrm{e}^8 + 4$. **D.** $2\mathrm{e}^8$.

Câu 299 (Mức độ 3). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0) = f(2) = 1$. Biết $\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x \left[f(x) + f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c$. Tính $P = a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 300 (Mức độ 2). Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [2\sin x - f(x)]\ \mathrm{d}x = -8$. Giá trị tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 4$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 10$.

Câu 301 (Mức độ 2). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi} [f(x) + \sin x]\ \mathrm{d}x = 10$. Giá trị tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 4$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 6$.

Câu 302. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left(x^3 - 1\right) f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 303. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \dfrac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 (2x+1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{7}{6}$. **B.** $I = \dfrac{5}{6}$. **C.** $I = \dfrac{37}{6}$. **D.** $I = \dfrac{1}{6}$.

Câu 304. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x)} - \dfrac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 0$, tính tích phân $I = \int\limits_0^{2024} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2024}$. **C.** 2024. **D.** 0.

Câu 305. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$ với $\forall x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \dfrac{3}{2}$, tính $I = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1186}{45}$. **B.** $I = \dfrac{1186}{9}$. **C.** $I = \dfrac{1186}{5}$. **D.** $I = \dfrac{1186}{41}$.

Câu 306. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $[f'(x)]^3 = \mathrm{e}^x [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^2 + 1$. **B.** $I = \mathrm{e} - 1$. **C.** $I = \mathrm{e}^2 - e$. **D.** $I = \mathrm{e}$.

Câu 307. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

và $f(1)=0$. Tính $I=\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{31}{2}$. **B.** $I=-\dfrac{31}{2}$. **C.** $I=\dfrac{61}{4}$. **D.** $I=-\dfrac{61}{4}$.

Câu 308. Cho hàm số $f(x)>0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2\sqrt{\mathrm{e}}$. **B.** $I=\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$. **C.** $I=2\mathrm{e}-2\sqrt{\mathrm{e}}$. **D.** $I=2\mathrm{e}+2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Câu 309. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x$, và $f(0)=f'(0)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=\dfrac{19}{2}$. **D.** $I=15$.

Câu 310. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 311. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=x^3-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$.

A. $\dfrac{160}{15}$. **B.** $\dfrac{268}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{15}$. **D.** $\dfrac{268}{30}$.

Câu 312. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2\ln 2$. **B.** $I=\ln 2$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=1+2\ln 2$.

Câu 313. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)\,f(x)+(x+1)\,f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính $I=\int\limits_1^2 (2x+2)\,f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}^2$. **B.** $I=1+\mathrm{e}$. **C.** $I=1+\mathrm{e}^2$. **D.** $I=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$.

Câu 314. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\,[f'(x)-2\sin x]=x^2\cos x$, $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-\pi$.

Câu 315. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$, $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

A. $\dfrac{25}{6}$. **B.** $\dfrac{25}{3}$. **C.** $\dfrac{17}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Câu 316. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn

$$f(1)=1,\,\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right],\forall x\in[0;1].$$

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 317. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $[f'(x)]^2+4f(x)=8x^2+4$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

Câu 318. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2018\cdot 2020}$. **B.** $\dfrac{1}{2019\cdot 2020}$. **C.** $\dfrac{1}{2020\cdot 2021}$. **D.** $\dfrac{1}{2019\cdot 2021}$.

Câu 319. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}f(0)=f'(0)=1\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1\end{cases}$ với $x,\,y\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Câu 320. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-xf'(x)\\ f(x)=-xg'(x)\end{cases}$, với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $3\ln 2$. **B.** $4\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $8\ln 2$.

Câu 321. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2023x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2024x^2\end{cases},\forall x\in[1;2].$$

Tính $I=\int\limits_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Câu 322. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn

$$x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1,$$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa mãn $f(1) = -2$. Tính $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{\ln 2}{2} - 1$. **B.** $-\ln 2 - \dfrac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2 - \dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Câu 323. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x \cdot f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 324. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = \left(3x^2 + x\right) f'(x) + (6x + 1) f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Biết $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$, $(a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 325. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [1;3]$; $f'(x)\left[1 + f(x)\right]^2 = (x-1)^2\left[f(x)\right]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

8 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 326. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [-1;3]$ và $f(3) = -1$.

Phát biểu	Đ	S
a) $f(-1) = 3$.		
b) $\displaystyle\int_{-1}^3 \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.		

Câu 327. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K.

Phát biểu	Đ	S
a) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.		
d) $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.		

Câu 328. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\displaystyle\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = 6$.		
b) Nếu $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\displaystyle\int_2^5 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		
c) Nếu $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ và $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$ thì $\displaystyle\int_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		
d) Nếu $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\displaystyle\int_2^3 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 3$.		

Câu 329. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Biết $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_3^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\displaystyle\int_2^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$.		
b) Biết $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2022$ và $\displaystyle\int_3^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 2021$.		
c) Biết $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		
d) Biết $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\displaystyle\int_2^5 3f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.		

Câu 330. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\displaystyle\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
b) Nếu $\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 2024$ thì $\int\limits_{4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -2024$.		
c) Nếu $\int\limits_{6}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ thì $\int\limits_{0}^{6} 2022f(x)\,\mathrm{d}x = 24264$.		
d) Nếu $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_{0}^{1} 2f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.		

Câu 331. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx = 6$ thì $\int\limits_{0}^{2} [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = -10$.		
b) Nếu $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_{0}^{2} [2f(x) - 1)]\,\mathrm{d}x = 6$.		
c) Nếu $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{0}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 7$ thì $\int\limits_{0}^{2} [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 24$.		
d) Nếu $\int\limits_{0}^{1} [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.		

Câu 332. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int\limits_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.		
b) Nếu $\int\limits_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -6$ thì $\int\limits_{3}^{2} 2f(x)\,\mathrm{d}x = 12$.		
c) Nếu $\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 6$ thì $\int\limits_{2}^{1} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = -4$.		
d) Nếu $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = -4$ thì $\int\limits_{1}^{0} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = -1$.		

Câu 333. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ và $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_{1}^{3} f(x) = 6$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
b) Nếu $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.		
c) Nếu $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$.		
d) Nếu $\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int_5^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{-2}^5 (f(x) - 4g(x) - 1)\,\mathrm{d}x = -13$.		

Câu 334. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Biết $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int_2^1 3f(x)\,\mathrm{d}x = -6$.		
b) Biết $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ và $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int_2^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 5$.		
c) Nếu $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.		
d) Nếu $\int_0^2 (f(x) + 3x^2)\,\mathrm{d}x = 10$ thì $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.		

9 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 335. Cho $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 336. Cho $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x$. KQ: | | | | |

Câu 337. Nếu $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 338. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	0		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	-1	↗	$f(5)$	↘	$-\infty$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

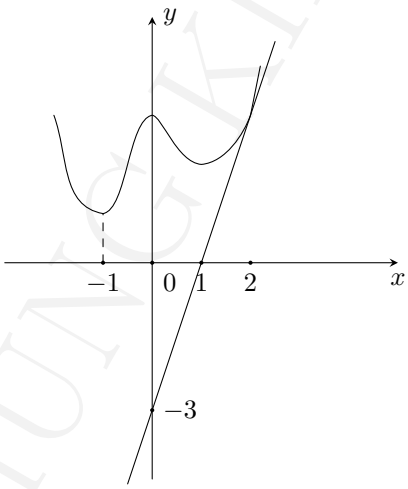
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Biết $\int\limits_1^5 |f'(x)|\ \mathrm{d}x = 5$. Giá trị của $f(5)$ bằng bao nhiêu? KQ: ☐☐☐☐

Câu 339.

Biết hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ có đồ thị như hình bên và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tích phân $I = \int\limits_1^4 f''(x-2)\ \mathrm{d}x$ có giá trị là bao nhiêu?

KQ: ☐☐☐☐



Câu 340. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 341. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \left[2f(x) - 3x^2\right]\,\mathrm{d}x$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 342. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của $I = \int\limits_3^1 2f(x)\,\mathrm{d}x$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 343. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 344. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1) = 12$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Tính giá trị của $f(4)$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 345. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_1^0 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$. Tính $I = \int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 346. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x = 2022$. Tính $I = \int\limits_1^2 [f(x) - g(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 347. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$. Tính $I = \int\limits_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. KQ: ☐☐☐☐

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 348. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;\,3]$ thoả $\displaystyle\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\displaystyle\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \displaystyle\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 349. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$, $\displaystyle\int_4^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \displaystyle\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 350 (Mức độ 3). Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ và $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^3 f(|2x-5|)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 351. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$ và $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$. Tính $P = a+b+c$. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 352. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

Câu 353. Biết rằng hàm số $f(x) = mx+n$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính tổng $m+n$?

KQ: | | | | |

Câu 354. Giả sử $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9$. Tổng $I = \displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

DẠNG 5 Bài toán thực tế – liên môn

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $S(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $S(t)$ và $v(t)$ như sau.

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $S'(t) = v(t)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $S(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$.

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau.

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$.

1 Bài tập tự luận

Bài 38.

a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s). Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a;b]$. Hãy giải thích vì sao $\int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \dfrac{3\pi}{4}$ (s).

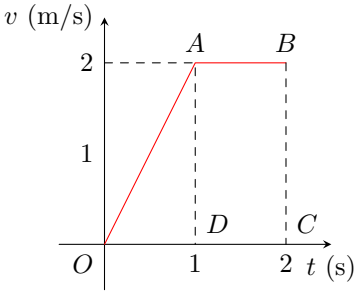
Bài 39. Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên $[a;b]$ được định nghĩa là $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $T(t) = 20 + 1{,}5(t-6)$, $6 \le t \le 12$. Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Bài 40.

Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở hình bên.

a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.



Bài 41. Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$, tức là tính $\int\limits_1^4 v(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int\limits_1^4 |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 42. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 s người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s^2). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

Bài 43. Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4} y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là 0,05 mol L^{-1}.

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

Bài 44. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức $P'(x) = -0{,}0005x + 12{,}2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Bài 45. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

Bài 46. Dọc theo đường thẳng (gắn trục tọa độ Ox có độ dài đơn vị bằng 1 (m), một vật chuyển động với vận tốc (m/s) $v(t) = 12 - 4t, 0 \leq t \leq 10$.

a) Tính hiệu số tọa độ (độ dịch chuyển) của vật giữa hai thời điểm $t = 2$ và $t = 5$.

b) Tính quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 5$.

Bài 47. Một bình chứa nước có dạng hình trụ với chiều cao 4m và bán kính đáy 0,5m. Lúc đầu bình chứa đầy nước. Kể từ khi bắt đầu xả nước, tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước trong bồn theo thời gian là $h'(t) = \dfrac{t}{50} - \dfrac{2}{5}$(m/phút).

a) Tìm chiều cao $h(t)$ của mực nước trong bồn sau t phút kể từ khi bắt đầu xả nước.

b) Cần thời gian bao lâu để xả hết nước trong bồn?

c) Sau khi xả 5 phút, trong bồn còn bao nhiêu lít nước (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

2 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 355. Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hoá bằng công thức $P'(x) = -0{,}0005x + 12{,}2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Lợi nhuận tăng khoảng bao nhiêu khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

A. 121,3 triệu đồng. **B.** 121,4 triệu đồng. **C.** 121,5 triệu đồng. **D.** 121,6 triệu đồng.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 356. Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hoá bởi công thức $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$.

A. $\frac{1}{3}kR^2$. **B.** $\frac{2}{3}kR^2$. **C.** $\frac{1}{2}kR^2$. **D.** $\frac{4}{3}kR^2$.

Câu 357. Một ô tô đang chạy với vận tốc 8 m/s thì người lái xe đạp phanh. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 8$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét?

A. 6 m. **B.** 16 m. **C.** 32 m. **D.** 8m.

Câu 358. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15(m/s). **B.** 9(m/s). **C.** 42(m/s). **D.** 25(m/s).

Câu 359. Một ôtô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ lúc đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2 m. **B.** 2 m. **C.** 10 m. **D.** 20 m.

Câu 360. Một ôtô đang chạy với tốc độ 20 m/s thì người lái đạp phanh, từ lúc đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. **B.** 30 m. **C.** 10 m. **D.** 40 m.

Câu 361. Một ôtô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh, từ lúc đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m. **B.** 20 m. **C.** 40 m. **D.** 10 m.

Câu 362. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. 55 m. **B.** 25 m. **C.** 50 m. **D.** 16 m.

Câu 363. Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s), $(t \ge 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0.

A. $v_0 = 35$ m/s. **B.** $v_0 = 25$ m/s. **C.** $v_0 = 10$ m/s. **D.** $v_0 = 20$ m/s.

Câu 364. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\ (t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. 55 m. **B.** 25 m. **C.** 50 m. **D.** 16 m.

Câu 365. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\ (t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển

động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 21 m/s. **B.** 25 m/s. **C.** 36 m/s. **D.** 30 m/s.

Câu 366. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15 (m/s). **B.** 20 (m/s). **C.** 16 (m/s). **D.** 13 (m/s).

Câu 367. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s) với $t \geq 6$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0.

A. $v_0 = 35$ m/s. **B.** $v_0 = 25$ m/s. **C.** $v_0 = 10$ m/s. **D.** $v_0 = 20$ m/s.

Câu 368. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Câu 369. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. 70,25 m. **B.** 68,25 m. **C.** 67,25 m. **D.** 69,75 m.

Câu 370. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

A. 136 m. **B.** 126 m. **C.** 276 m. **D.** 216 m.

Câu 371. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}$ m. **B.** 2000 m. **C.** 500 m. **D.** $\frac{4000}{3}$ m.

Câu 372. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 96{,}25$ m. **B.** $S = 87{,}5$ m. **C.** $S = 94$ m. **D.** $S = 95{,}7$ m.

Câu 373. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ m/s. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s^2). Tính quãng đường đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

A. $s = 168$ m. **B.** $s = 166$ m. **C.** $s = 144$ m. **D.** $s = 152$ m.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 374. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

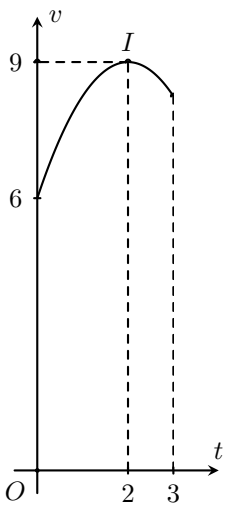
A. 18 m. **B.** 36 m. **C.** 22,5 m. **D.** 6,75 m.

Câu 375. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15 (m/s). **B.** 10 (m/s). **C.** 7 (m/s). **D.** 22(m/s).

Câu 376.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 25{,}25$ (km). **B.** $s = 24{,}25$ (km).
C. $s = 24{,}75$ (km). **D.** $s = 26{,}75$ (km).

Câu 377. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. 70,25 m. **B.** 68,25 m. **C.** 67,25 m. **D.** 69,75 m.

Câu 378. Một ôtô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ m/s. Sau 5 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ôtô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

A. $S = 96{,}25$ (m). **B.** $S = 87{,}5$ (m). **C.** $S = 94$ (m). **D.** $S = 95{,}7$ (m).

Câu 379. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 32. **D.** 22.

Câu 380. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

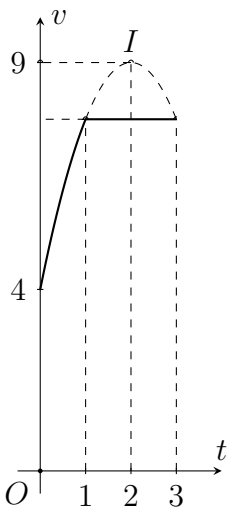
A. $\dfrac{2500}{3}$ (m). **B.** 2000 (m). **C.** 500 (m). **D.** $\dfrac{4000}{3}$ (m).

Câu 381. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{180}t^2+\dfrac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15 (m/s). **B.** 10 (m/s). **C.** 7 (m/s). **D.** 22 (m/s).

Câu 382.

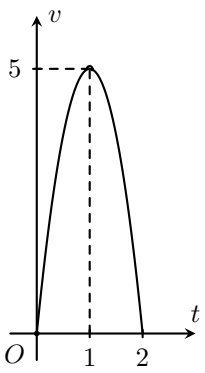
Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).



A. $s=21{,}58$ (km). **B.** $s=23{,}25$ (km).
C. $s=13{,}83$ (km). **D.** $s=15{,}50$ (km).

Câu 383.

Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. 2,11 km. **B.** 6,67 km. **C.** 5,63 km. **D.** 6,63 km.

3 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 384. Một ôtô đang di chuyển với tốc độ 20 (m/s) thì hãm phanh nên tốc độ (m/s) của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t)=20-5t\,(0\le t\le 4)$.

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường xe di chuyển trong 2 giây đầu là 20 m.		
b) Tốc độ trung bình của xe trong 2 giây đầu là 10 (m/s).		
c) Quãng đường xe di chuyển từ khi hãm phanh đến khi dừng là 40 m.		
d) Tốc độ trung bình của xe từ khi hãm phanh đến khi dừng là 10 m/s.		

Câu 385. Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t)=2t-0{,}03t^2$ $(0\le t\le 10)$, trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo giây với $t=0$ là thời điểm xe xuất phát.

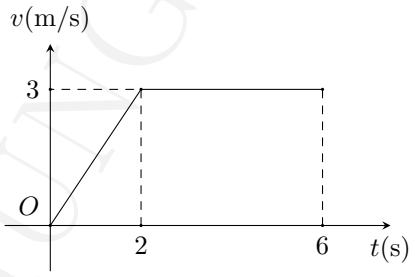
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường xe đi được sau 5 giây là 23,75 (m).		
b) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t=0$ đến $t=5$ là $\frac{19}{4}$ (m/s).		
c) Quãng đường xe đi được sau 10 giây là 90 (m).		
d) Tốc độ trung bình của xe trong khoảng thời gian từ $t=5$ đến $t=10$ là 9 (m/s).		

Câu 386.

Hình bên là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t=0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động).



Phát biểu	Đ	S
a) Công thức của hàm số $v(t)$ với $t\in[0;6]$ là $v(t)=\begin{cases}\frac{3}{2}t & \text{nếu } t\le 2\\ 3 & \text{nếu } 2<t\le 6\end{cases}$.		
b) Quãng đường vật đi được trong 2 giây đầu tiên là 3 m.		
c) Quãng đường vật đi được từ giây thứ 2 đến giây thứ 6 là 12 m.		
d) Vận tốc trung bình của vật trong 6 giây đầu tiên là 2 m/s.		

Câu 387. Tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 2\\ 2 & 2<t\le 20\\ 12-0{,}5t & 20<t\le 24.\end{cases}$

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường chuyển động trong 20 giây đầu của thang máy là 36 m.		
b) Tốc độ trung bình của thang máy trong 20 giây đầu là 1,8 (m/s).		
c) Quãng đường chuyển động của thang máy là 48 m.		
d) Tốc độ trung bình của thang máy là 1,75 (m/s).		

Câu 388. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12$ (m/s^2).

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường xe đi được từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật là 144 (m).		
b) Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là 20 (m/s).		
c) Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là $t=2$ (m).		

Phát biểu	Đ	S
d) Quãng đường đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn là 168 (m).		

Câu 389. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A.

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S=\displaystyle\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\,\mathrm{d}t=96$ (m).		
b) Gia tốc của chất điểm B là $a=\dfrac{4}{3}$ (m/s^2).		
c) Vận tốc của chất điểm B tại thời điểm $t=3$ là $v_B(3)=\dfrac{121}{50}$ (m/s).		
d) Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\dfrac{133}{10}$ (m/s).		

4 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 390. Một vật chuyển động theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=1-3t^2$, (m/s). Tính độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian từ 2 đến 3 giây.

KQ: | | | | |

Câu 391. Một vật chuyển động theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=3t^2-4t-5$, (m/s). Tính tổng quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian từ 3 đến 4 giây.

KQ: | | | | |

Câu 392. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 393. Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường (tính theo m) ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 394. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15$ (m/s), trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 395. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường (đơn vị m) vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

KQ: | | | | |

Câu 396. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

KQ: | | | | |

Câu 397. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 398. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 399. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu m/s?

KQ: | | | | |

Câu 400. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s^2). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

KQ: | | | | |

Câu 401. Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x tấn sản phẩm trong một tuần. Khi đó, đạo hàm $P'(x)$, gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $P'(x) = 16 - 0{,}02x$ với $0 \le x \le 100$. Tính lợi nhuận (đơn vị triệu đồng) nhà máy thu được khi bán 90 tấn sản phẩm trong tuần. Biết rằng nhà máy lỗ 25 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

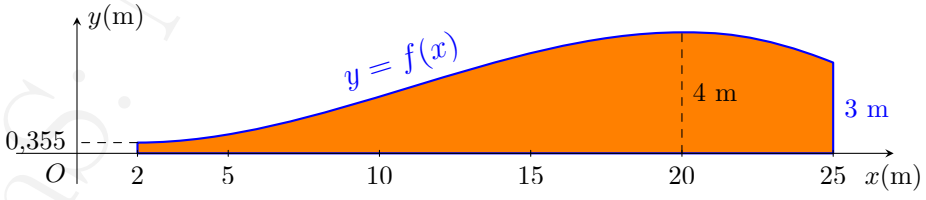
KQ: | | | | |

Câu 402. Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu cam) trong *Hình dưới* mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2, x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)$.

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematick, Grundkurs ma-1 Cornelsen 2016)

Hãy tính diện tích (đơn vị m^2) hình thang cong đó *(kết quả làm tròn đến hàng phần mười)*.

KQ: | | | | |



Câu 403. Tại một nhà máy, gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu đồng) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó, đạo hàm $C'(x)$, gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

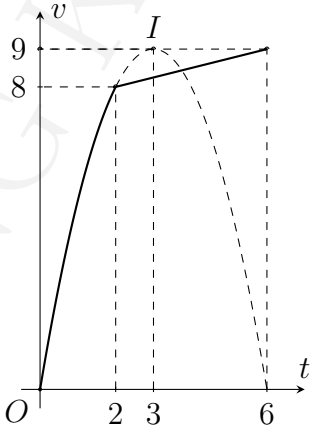
theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $C'(x) = 5 - 0{,}06x + 0{,}00072x^2$ với $0 \le x \le 150$. Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí (đơn vị triệu đồng) khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

KQ: | | | | |

Câu 404.

Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ? (*đơn vị tính bằng* km, *làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

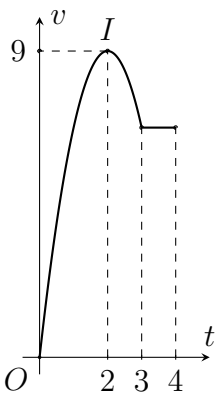
KQ: | | | | |



Câu 405.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (đơn vị tính bằng km).

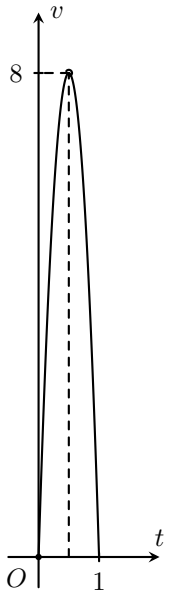
KQ: | | | | |



Câu 406.

Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy (đơn vị tính bằng km)?

KQ: | | | | |



Câu 407. Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường (đơn vị m) vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) *(kết quả làm*

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

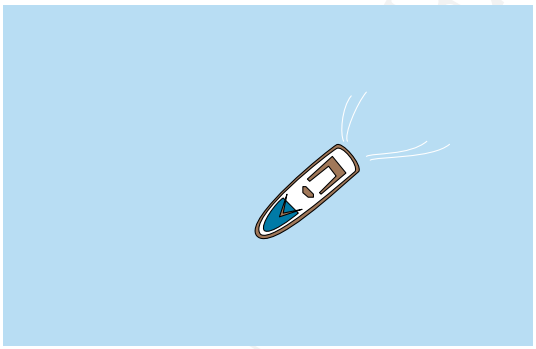
tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

Câu 408.

Biết rằng tốc độ v (km/phút) của một ca nô cao tốc thay đổi theo thời gian t (phút) như sau:

$$v(t)=\begin{cases}0{,}5t & 0\le t<2\\ 1 & 2\le t<15\\ 4-0{,}2t & 15\le t\le 20.\end{cases}$$



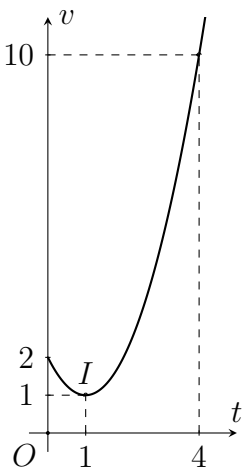
Tính quãng đường (đơn vị tính km) ca nô di chuyển được trong khoảng thời gian từ 0 đến 20 phút *(kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 409.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

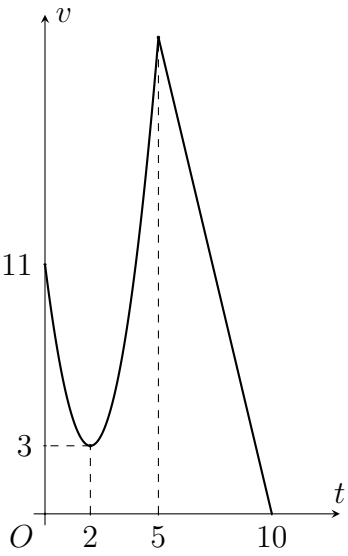
KQ: | | | | |



Câu 410.

Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường Parapol khi $0\le t\le 5$ (s) và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10$ (s). Cho đỉnh Parapol là $I(2;3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10$ (s) là bao nhiêu mét? (*Làm tròn đến hàng đơn vị*)

KQ: | | | | |



TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 4

§3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Tính diện tích hình phẳng

Hình giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Định nghĩa 6 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

⚠ *Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$ thì*

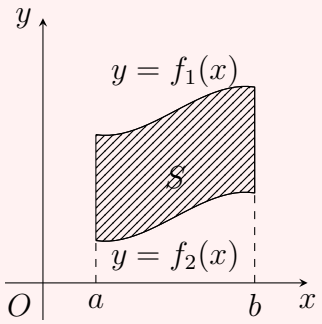
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a;b)$ thì công thức trên vẫn đúng.

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

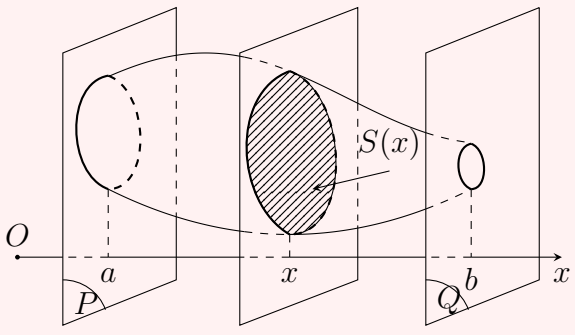
Định nghĩa 7
Cho hai hàm số $y = f_1(x), y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int\limits_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x.$$



2 Tính thể tích hình khối

Định nghĩa 8
Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể là $V = \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

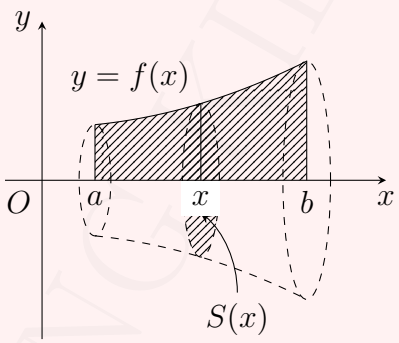
3 Thể tích khối tròn xoay

Định nghĩa 9

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay*. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = f^2(x)$.

Vậy khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

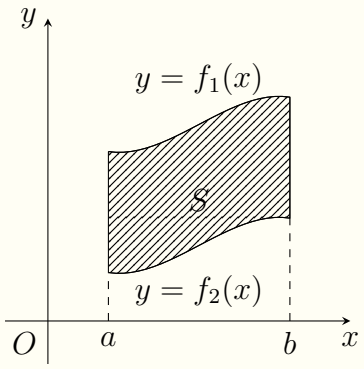
DẠNG 1 Diện tích hình phẳng, thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay

1 Diện tích hình phẳng

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Xét trường hợp $f_1(x) \geq f_2(x)$ với mọi $x \in [a;b]$. Kí hiệu S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ tương ứng. Khi đó:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x.$$



Nhận xét.

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

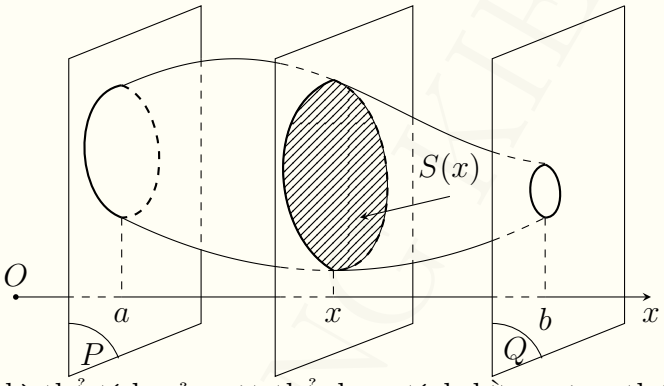
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Trong trường hợp $y = f_2(x) = 0$ (tức trùng với trục hoành). Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f_1(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

2 Thể tích vật thể

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (a \le x \le b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$ (Hình bên)



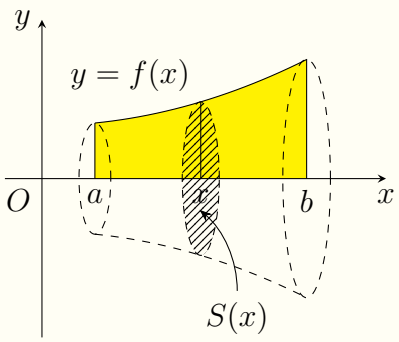
Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bằng công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ *Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a;b]$ thì $V = (b-a)S$.*

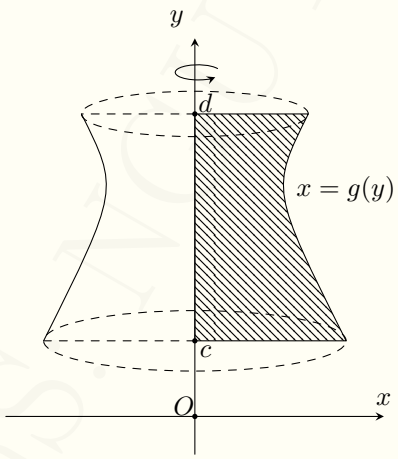
3 Thể tích khối tròn xoay

Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay D xung quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay*. Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a;b]$, ta được mặt cắt là hình tròn có bán kính bằng $f(x)$ và diện tích là $S(x) = \pi \cdot f^2(x)$.



Vậy khối tròn xoay có thể tích là $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

⚠ *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Ox:*



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$$

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Mức độ 2). Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Ví dụ 2 (Mức độ 2). Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

Ví dụ 3 (Mức độ 2). Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đổ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Ví dụ 4 (Mức độ 2). Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + 1$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

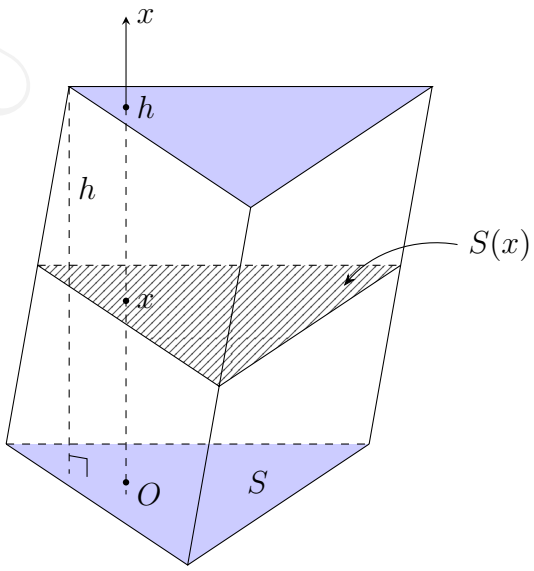
Ví dụ 6 (Mức độ 2). Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.

Ví dụ 7 (Mức độ 1).

Cho khối lăng trụ tam giác có diện tích đáy S và chiều cao h. Sử dụng tích phân, tính thể tích của khối lăng trụ theo S và h.

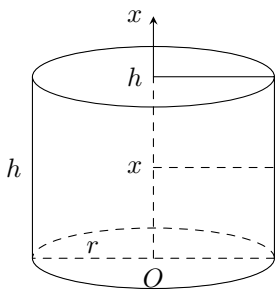


Ví dụ 8. Tính thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.

Ví dụ 9. Tính thể tích của khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h.

Ví dụ 10 (Mức độ 2).

Hãy sử dụng tích phân để chứng minh công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r (khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó).

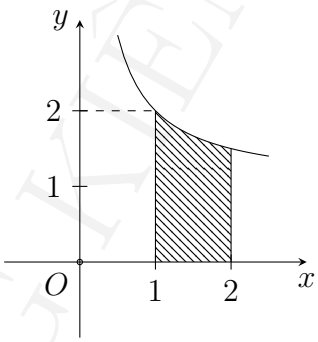


Ví dụ 11 (Mức độ 2). Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(1 \le x \le 2)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x) = 2x$. Tính thể tích V của phần vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 12 (Mức độ 1).

Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ như hình bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



Ví dụ 13 (Mức độ 1). Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

a) $y = \sqrt{2 + \cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $y = x^2 - 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

Ví dụ 14. Tính thể tích của khối cầu bán kính R.

Ví dụ 15 (Mức độ 2). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

A. -9. **B.** 9. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Ví dụ 16 (Mức độ 2). Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3, y = x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 17 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3 - x$, $y = x^3 - x^2$ và các đường thẳng $x = -2$, $x = 1$.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{6}$. **C.** $\dfrac{14}{3}$. **D.** 9.

Ví dụ 18 (THPT QG 2017 – Mức độ 2). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1)$. **B.** $V = 2\pi(\pi + 1)$. **C.** $V = 2\pi^2$. **D.** $V = 2\pi$.

Ví dụ 19 (THPT QG 2017 – Mức độ 2). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{\pi\,\mathrm{e}^2}{2}$. **B.** $V = \dfrac{\pi(\mathrm{e}^2 + 1)}{2}$. **C.** $V = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$. **D.** $V = \dfrac{\pi(\mathrm{e}^2 - 1)}{2}$.

Ví dụ 20 (THPT QG 2017 – Mức độ 2). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $V = 2\pi$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}$. **D.** $V = 2$.

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$.

Phát biểu	Đ	S
a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

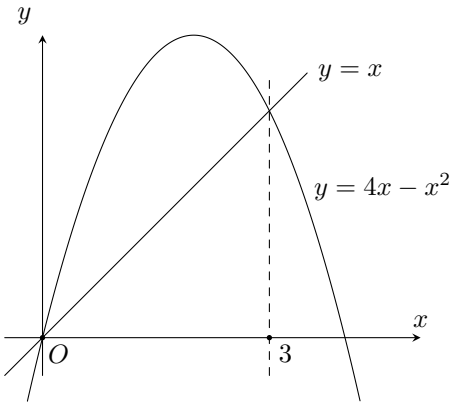
Phát biểu	Đ	S
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^1 \left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 \left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.		
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\dfrac{1}{3}$ đvdt.		

Ví dụ 22 (Mức độ 2). Cho vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $a\sqrt{\sin x}$ với $a>0$. Mỗi mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Công thức tính thể tích của phần vật thể là $V=\int\limits_0^{\pi} S(x)\,\mathrm{d}x$, trong đó $S(x)$ là diện tích của thiết diện.		
b) Diện tích của thiết diện là $S(x)=(a\sqrt{\sin x})^2$.		
c) Khi $a=1$ thì thể tích của phần vật thể là $V=\sqrt{3}$.		
d) Khi $a=2$ thì thể tích của phần vật thể là $V=2\sqrt{3}$.		

Ví dụ 23 (Mức độ 2).

Cho hình vẽ bên.



Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ giao điểm của $y=4x-x^2$ và $y=x$ là $A(0;0)$ và $B(3;3)$.		
b) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4x-x^2$, Ox quanh trục Ox bằng $\dfrac{512\pi}{15}$.		
c) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x$, Ox và $x=3$ quanh trục Ox bằng 27π.		
d) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4x-x^2$, $y=x$ quanh trục Ox bằng $\dfrac{108\pi}{5}$.		

Ví dụ 24 (Mức độ 3). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+2x+1$, $y=x^3+x+3$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng bao nhiêu? KQ: ☐☐☐☐

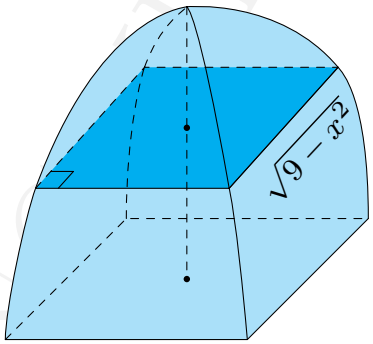
Ví dụ 25 (Mức độ 3). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=x^3-3x$, $y=x$ và hai đường thẳng $x=-1$, $x=3$ bằng bao nhiêu? KQ: ☐☐☐☐

Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 26 (Mức độ 3). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3\pi$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Ví dụ 27 (Mức độ 2).

Cho vật thể có hình dạng như hình bên. Nếu cắt vật thể bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt một khoảng x (m) $(0 \le x \le 3)$ thì được hình vuông có cạnh $\sqrt{9-x^2}$ (m). Thể tích của vật thể bằng bao nhiêu theo đơn vị m^3? KQ: | | | | |



2 Bài tập tự luận

Bài 1. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

a) Tính diện tích của D.

b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.

Bài 2 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

Bài 3 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$.

Bài 4. Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

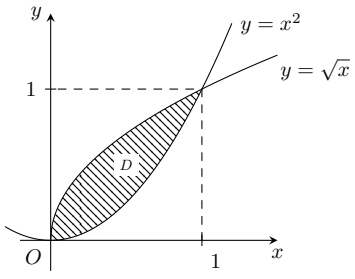
Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Bài 6.

Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$.

a) Tính diện tích của D.

b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Đồ thị của hàm số $y = 3x(2 - x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

b) Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{4-x}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

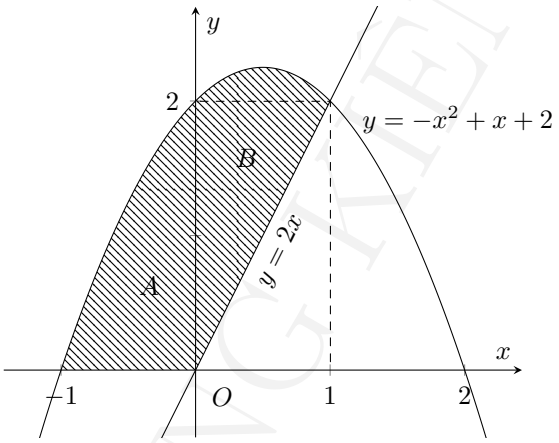
c) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

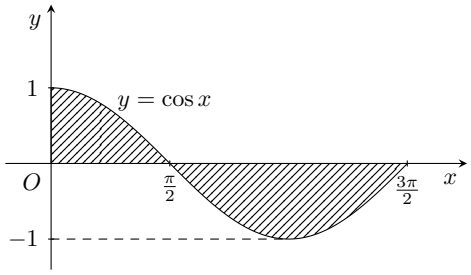
Bài 8.

Tính diện tích S của hình phẳng được gạch chéo ở trong hình bên.

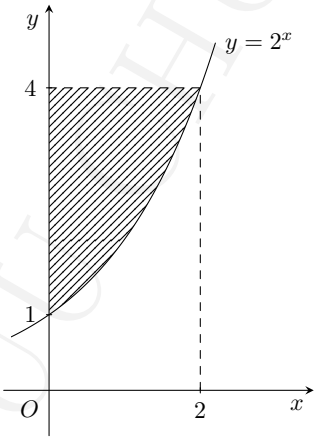


Bài 9. Tính diện tích của hình phẳng được gạch chéo trong mỗi hình sau.

a)



b)



Bài 10 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Bài 11 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = 5x - x^2$, $y = x^2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

Bài 12 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 10 - x^2$, $y = x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$.

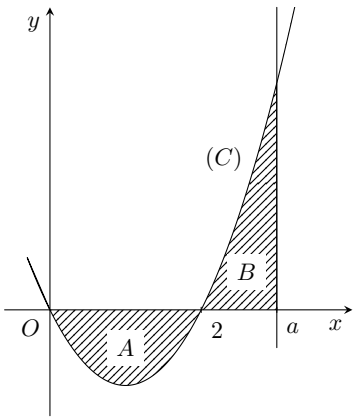
Bài 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số

a) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = 1 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$.

b) $y = x - 4x^3$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Bài 14.

Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C). Kí hiệu A là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$; B là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = a\,(a > 2)$. Tìm giá trị của a để A và B có diện tích bằng nhau.



ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 15 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = x$, $x = 0$ và $x = 1$.

Bài 16 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

b) $y = 12 - x^2$, $y = -x$, $x = -3$, $x = 4$.

Bài 17 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và các đường thẳng $x = -3$, $x = 2$.

Bài 18 (Mức độ 2). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

b) $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

c) $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$.

Bài 19 (Mức độ 2). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = \mathrm{e}^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

b) $y = 9 - x^2$, $y = 2x^2$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$.

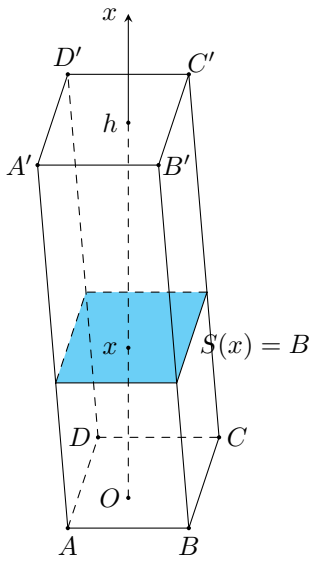
c) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Bài 20. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ xung quanh trục Ox.

Bài 21 (Mức độ 3). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2, y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

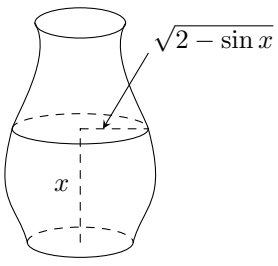
Bài 22 (Mức độ 1).

Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.



Bài 23.

Một bình chứa nước dạng như hình bên có chiều cao là $\dfrac{3\pi}{2}$ dm. Nếu lượng nước trong bình có chiều cao là x (dm) thì mặt nước là hình tròn có bán kính $\sqrt{2 - \sin x}$ (dm) với $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$. Tính dung tích của bình *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của* đêximét *khối)*.



Bài 24 (Mức độ 2). Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 2$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(2 \le x \le 4)$ thì phần chung giữa mặt phẳng và vật thể là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $\sqrt{x^2 - 2}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

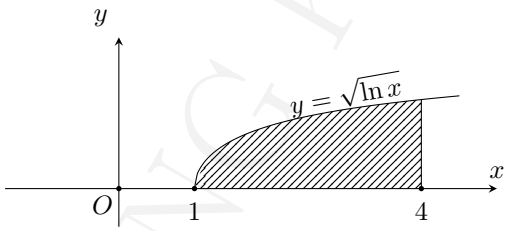
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Bài 25 (Mức độ 2). Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì phần chung giữa chúng là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x-2$.

Bài 26 (Mức độ 2). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$.

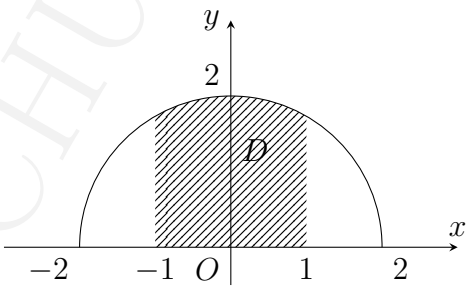
Bài 27 (Mức độ 2).

Tính thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox.



Bài 28 (Mức độ 2).

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ nữa đường tròn tâm O, bán kính $r=2$ nằm phía trên trục Ox. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.



3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1 (Mức độ 2). Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x=0$, $x=\pi$ đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục Ox là

A. $S=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|\ \mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|\ \mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\ \mathrm{d}x$.

Câu 2 (Mức độ 1). Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=3$ là

A. $\dfrac{28}{9}$. **B.** $\dfrac{28}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 3 (Mức độ 2). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-4x$, trục hoành, đường thẳng $x=-2$ và $x=4$ là

A. 44. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 28.

Câu 4 (Mức độ 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x=\mathrm{e}$ là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$. **C.** e. **D.** 2.

Câu 5. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

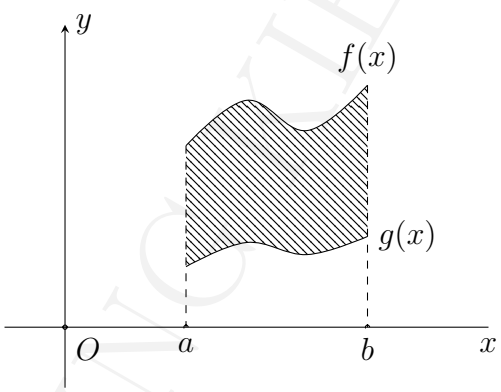
A. $S=\displaystyle\int_0^{2}2^x\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_0^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_0^{2}2^x\mathrm{d}x$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\dfrac{7\pi}{6}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7\pi}{6}-1$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7\pi}{6}+1$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7\pi}{3}+1$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{7\pi}{6}-1$.

Câu 7.

Công thức nào sau đây để tính diện tích hình phẳng S (phần tô đậm trong hình vẽ)



A. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|-\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 8 (Mức độ 2). Diện tích hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính bằng công thức

A. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 9 (Mức độ 2). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x$ và $y=\mathrm{e}^x$, trục tung và đường thẳng $x=1$ được tính theo công thức?

A. $S=\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x-x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^1 (x-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_{-1}^1 |\mathrm{e}^x-x|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^1 |\mathrm{e}^x-1|\,\mathrm{d}x$.

Câu 10 (Mức độ 2). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A. $S=\dfrac{7}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Câu 11 (Mức độ 2). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-3^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=\pi\displaystyle\int_0^4 3^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^4 3^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^4 (-3)^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_0^4 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 12. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a, x=b$ bằng

A. $\left|\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\displaystyle\int_a^b |f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Câu 13. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 15. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Câu 16. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 17. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=\mathrm{e}$ bằng

A. e^2. **B.** $\mathrm{e}+2$. **C.** $2\mathrm{e}$. **D.** $\mathrm{e}-2$.

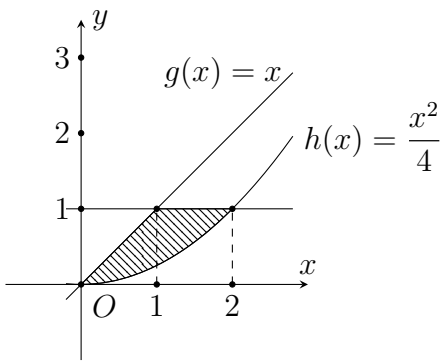
Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2$, $y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=\mathrm{e}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 19.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=1$, $y=x$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ trong miền $x\geq 0$, $y\leq 1$ là $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Khi đó $b-a$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.



Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{8}$, $y=\frac{27}{x}$ bằng

A. $\frac{63}{8}$. **B.** $27\ln 2-\frac{63}{8}$. **C.** $27\ln 2$. **D.** $27\ln 2-\frac{63}{4}$.

Câu 21. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 22 (Mức độ 2). Một vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=5$. Nếu cắt vật thể bằng một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\leq x\leq 5)$ thì thiết diện thu được là hình phẳng có diện tích $x(x+2)$. Thể tích của vật thể đó bằng

A. $\frac{21212}{15}\pi$. **B.** $\frac{196}{3}$. **C.** $\frac{196}{3}\pi$. **D.** $\frac{21212}{15}$.

Câu 23 (Mức độ 2). Cho vật thể (H) giới hạn giữa hai mặt phẳng $x=1$ và $x=2$. Cắt (H) bằng mặt phẳng $x=a$ $(1\leq a\leq 2)$ ta được thiết diện là hình chữ nhật với chiều rộng bằng a và chiều dài bằng $2a$. Khi đó thể tích V của (H) được cho bởi công thức

A. $V=\displaystyle\int_1^2 3x\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_1^2 2x^2\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 2x^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 3x\,\mathrm{d}x$.

Câu 24 (Mức độ 2). Một vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=5$. Nếu cắt vật thể bằng một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 5)$ thì thiết diện thu được là tam giác đều có cạnh bằng $\dfrac{2}{3}x$. Thể tích của vật thể đó bằng

A. $\dfrac{124}{27}$. **B.** $\dfrac{248\sqrt{3}}{27}\pi$. **C.** $\dfrac{124\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{124\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 25 (Mức độ 2). Cho phần vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Thể tích của phần vật thể (H) bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 26 (Mức độ 1). Thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ quanh trục Ox được tính bởi công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Câu 27 (Mức độ 2). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay quanh trục Ox được tính theo công thức.

A. $\pi\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

Câu 28. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ xung quanh trục Ox.

A. $V=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 29. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x)=2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=3036$. **B.** $V=3036\pi$. **C.** $V=1518$. **D.** $V=1518\pi$.

Câu 30. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$ và $x=3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1\le x\le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V=156$. **B.** $V=156\pi$. **C.** $V=312$. **D.** $V=312\pi$.

Câu 31. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 32. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{4x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{8x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{8x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 33. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Câu 34. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Câu 35. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$. **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $V=2\pi$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}$.

Câu 36. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$. **B.** $V=\pi-1$. **C.** $V=\pi+1$. **D.** $V=(\pi-1)\pi$.

Câu 37. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi(\pi+1)$. **B.** $V=2\pi$. **C.** $V=2(\pi+1)$. **D.** $V=2\pi^2$.

Câu 38. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$, đường thẳng $d\colon y=2x$ và đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\displaystyle\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Câu 39. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo hành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

Câu 40. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

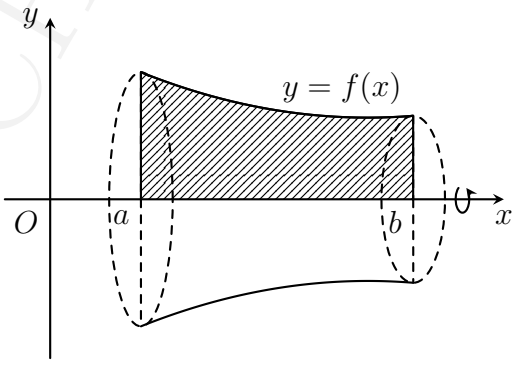
A. $V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Câu 41. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{15}$.

Câu 42.

Công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, xung quanh trục Ox là



A. $V=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 43. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\dfrac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\dfrac{16}{15}$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}$.

Câu 44. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\dfrac{7}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\dfrac{11\pi}{6}$.

Câu 45. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)\mathrm{e}^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=(\mathrm{e}^2-5)\pi$. **B.** $V=(4-2\mathrm{e})\pi$. **C.** $V=\mathrm{e}^2-5$. **D.** $V=4-2\mathrm{e}$.

Câu 46. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 47. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 48. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4$, $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\dfrac{7}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\dfrac{11\pi}{6}$.

Câu 49. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+2\right)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

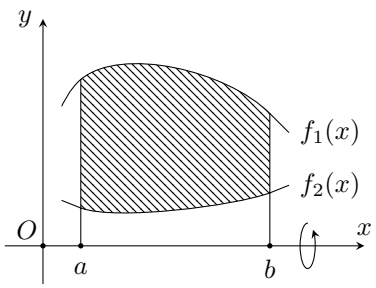
C. $V=\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+2\right)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+2\right)\,\mathrm{d}x$.

Câu 50 (THPT QG 2017 — Mức độ 2). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=(\pi-1)\pi$. **C.** $V=(\pi+1)\pi$. **D.** $V=\pi+1$.

Câu 51 (Mức độ 2).

Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức



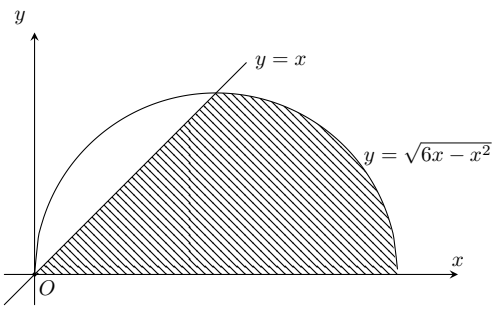
A. $V=\displaystyle\int_a^b \left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b \left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_a^b \left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b \left[f_1(x)-f_2(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$.

Câu 52 (Mức độ 3).

Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox bằng

A. 24π. **B.** 27π. **C.** 25π. **D.** 26π.



4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 53. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $S=\displaystyle\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$.		
b) $S=\dfrac{3}{\ln 2}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $S=\pi\displaystyle\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$.		
d) $S=\dfrac{3\pi}{\ln 2}$.		

Câu 54. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
b) $S=\mathrm{e}^2$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
d) $S=(\mathrm{e}^2-1)\,\pi$.		

Câu 55 (Mức độ 3). Cho parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=x+2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.		
b) Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) trục Ox và đường thẳng $x=2$ là $S=\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$.		
c) Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d là $S=\displaystyle\int_{-1}^2 \left(x^2-x-2\right)\mathrm{d}x$.		
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d và trục Ox bằng $\dfrac{6}{5}$.		

Câu 56. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P)\colon y=x^2-4x+3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Có 2 tiếp tuyến từ A đến đồ thị (P).		
b) Hai tiếp tuyến cắt nhau tại điểm có toạ độ là $\left(\dfrac{3}{2};-3\right)$.		
c) Biểu thức diện tích phần giới hạn bởi đồ thị (P), một tiếp tuyến từ A và đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} x^2\,\mathrm{d}x$.		
d) $S=\dfrac{9}{5}$.		

Câu 57 (Mức độ 3). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-\sin x$, $y=1$, $x=a\,(0\le a\le\pi)$, $x=\pi$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.		
b) Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.		
c) Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\dfrac{3}{2}$ thì $\dfrac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.		
d) Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\displaystyle\int_a^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=S'-\pi-a$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TRẦN NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

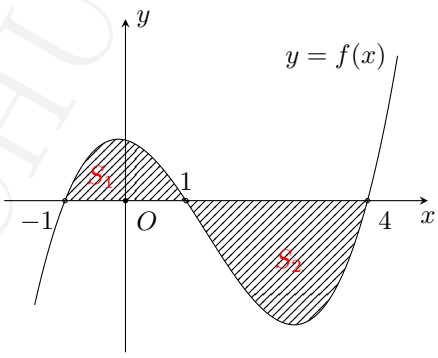
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 58 (Mức độ 3). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-3x^2+x+4$ và trục hoành. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích phần hình (H) nằm bên trái và bên phải trục tung. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đồ thị hàm số $y=-3x^2+x+4$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.		
b) Công thức tính S_1 là $S_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}(-3x^2+x+4)\,\mathrm{d}x$.		
c) Giá trị của S_2 bằng $\dfrac{104}{27}$.		
d) Đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.		

Câu 59.

Cho diện tích hình phẳng $S=S_1+S_2$ (miền gạch sọc) như hình vẽ. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $S=\displaystyle\int_{-1}^{4}\lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$.		
d) $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x$.		

Câu 60 (Mức độ 4). Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x^3-3x^2+x+3$ và $y=-x^2+2x+1$, với S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trên. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là số nguyên.		
b) Công thức tính diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị và nằm bên trái trục tung là $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trên và các đường thẳng $x=1$, $x=2$ lớn hơn $\dfrac{1}{2}$.		
d) Ta có $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.		

Câu 61 (Mức độ 4). Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P):y=(x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1>k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Khi đó

BẢN QUYỀN HỮU CHUNG KIÊN

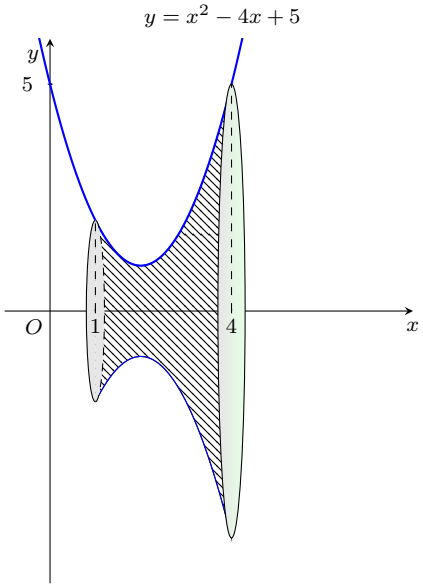
Phát biểu	Đ	S
a) Giao điểm của $(P): y=(x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.		
b) Diện tích hình phẳng (H) bằng 9.		
c) Theo bài ra ta có $k_2=k_1$.		
d) Giá trị của k_1 bằng $\dfrac{4}{27}$.		

Câu 62 (Mức độ 2). Cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1\le x\le 1)$ là một hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{1-x^2}$, với $a>0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Công thức tính thể tích của phần vật thể là $V=\displaystyle\int_{-1}^{1}[S(x)]^2\,\mathrm{d}x$.		
b) Diện tích của thiết diện là $S(x)=a\,(1-x^2)$.		
c) Khi $a=1$ thì thể tích của phần vật thể là $V=\dfrac{6}{3}$.		
d) Khi $a=2$ thì thể tích của phần vật thể là $V=\dfrac{16}{3}$.		

Câu 63 (Mức độ 2).

Cho hàm số $y=x^2-4x+5$ và khối tròn xoay như hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+5$, $x=0$, $y=0$, $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như hình đã cho.		
b) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2-4x+5$, $x=0$, $y=0$, và $x=4$ có diện tích là $S=\dfrac{28}{3}$.		
c) Công thức tính thể tích của khối tròn xoay là $V=\displaystyle\int_{1}^{4}(x^2-4x+5)^2\,\mathrm{d}x$.		
d) Thể tích của khối tròn xoay là $V=\dfrac{78\pi}{5}$.		

Câu 64 (Mức độ 2). Cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=1$ và $x=a$ với $a>1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le a)$ là một hình tròn có bán kính bằng $\sqrt{x}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Công thức tính thể tích của phần vật thể là $V=\displaystyle\int_{1}^{a}S(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) Diện tích của thiết diện là $S(x)=2\pi x$.		

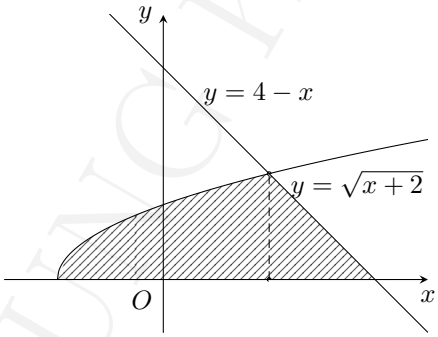
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
c) Khi $a=2$ thì thể tích của phần vật thể là $V=\dfrac{5\pi}{2}$.		
d) Khi $a=4$ thì thể tích của phần vật thể là $V=\dfrac{15\pi}{2}$.		

Câu 65 (Mức độ 3).

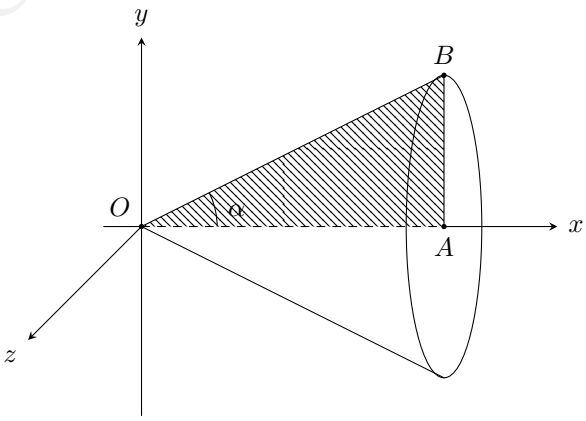
Cho vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành. Gọi V_1 là thể tích của vật thể tròn xoay giới hạn bởi hàm số $y=\sqrt{x+2}$, $x=2$ và Ox thu được khi quay hình phẳng xung quanh trục hoành. Gọi V_2 là thể tích của vật thể tròn xoay giới hạn bởi hàm số $y=4-x$, $x=2$ và Ox thu được khi quay hình phẳng xung quanh trục hoành. Gọi V là thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Giao điểm của $y=\sqrt{x+2}$ với Ox là $(-2;0)$, $y=4-x$ với Ox là $(0;4)$.		
b) $V_1=8\pi$.		
c) $V_2=\dfrac{8}{3}\pi$.		
d) $V=\dfrac{16\pi}{3}$.		

Câu 66 (Mức độ 3).

Cho tam giác vuông OAB có $OA=a$ thuộc Ox và $\widehat{AOB}=\alpha\left(0<\alpha\le\dfrac{\pi}{4}\right)$. Gọi $\mathcal{B}$ là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền $\triangle OAB$ quanh trục Ox. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $OB\colon y=x\sin\alpha$.		
b) Thể tích $V_{\mathcal{B}}=\pi\tan^2\alpha\cdot\dfrac{a^3}{3}$.		
c) $V_{\mathcal{B}}$ lớn nhất khi $\alpha=30^\circ$.		
d) Thể tích V của $\mathcal{B}$ lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{2}R^3}{12}$.		

Câu 67 (Mức độ 2). Cho vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$, $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$ thì diện tích của thiết diện là $S(x)=3x\cdot(3x^2-2)$.		
b) Nếu thiết diện là hình vuông cạnh là $3x$ thì diện tích của thiết diện là $S(x)=3x^2$.		
c) Nếu thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $3x^2-2$ thì thể tích của phần vật thể là $V=156$.		
d) Nếu thiết diện là hình vuông cạnh là $3x$ thì thể tích của phần vật thể là $V=26$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 68. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$. KQ: | | | | |

Câu 69. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t\,(t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$. KQ: | | | | |

Câu 70. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{4x - x^2}$, Ox quanh Ox. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |

Câu 71. Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)* KQ: | | | | |

Câu 72. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |

Câu 73. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2 (m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$. KQ: | | | | |

Câu 74. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = m$ bằng 10 là bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$. KQ: | | | | |

Câu 76. Diện tích hình phẳng *(làm tròn đến hàng phần mười)* giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ và trục hoành bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 77 (Mức độ 2). Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 78 (Mức độ 3). Tính giá trị của a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P) : y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng d: $y = x - 1$ và $x = a$, $x = 2a$ $(a > 1)$ bằng $\ln 3$? KQ: | | | | |

Câu 79 (Mức độ 3). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$, $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 80. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Tìm k để đường thẳng d đi qua $A(0; 4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau. KQ: | | | | |

Câu 81. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x$ và $y = x$. KQ: | | | | |

ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 82 (Mức độ 3). Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 83. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Thể tích vật thể (T) là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a + b$. KQ: | | | | |

Câu 84. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$; $x = 3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$. Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a \cdot b$. KQ: | | | | |

Câu 85. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 86. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 87. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox *(làm tròn đến hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 88. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính V *(Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).* KQ: | | | | |

Câu 89 (Mức độ 2). Cho vật thể (H) nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\cos x}$. Tính thể tích của vật thể (H). *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |

Câu 90 (Mức độ 2). Cho phần vật thể (H) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1 - x^4}$. Thể tích của phần vật thể (H) bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 91 (Mức độ 2). Cho phần vật thể (H) nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 2$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$ là một nửa hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{5}x^2$. Thể tích của vật thể (H) bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |

Câu 92 (Mức độ 2). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 93 (Mức độ 2). Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành: $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

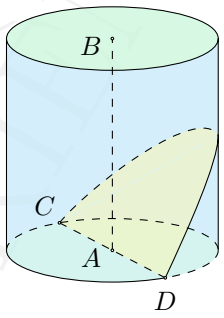
KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 94 (Mức độ 3).

Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy góc $45°$. Thể tích của vật thể đó bằng bao nhiêu lần R^3? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*

KQ: | | | | |



DẠNG 2 Các bài toán liên quan đến hình vẽ

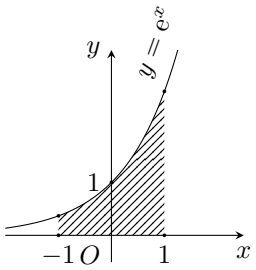
1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 28 (Mức độ 2).

Cho đồ thị hàm số $y = \mathrm{e}^x$ và hình gạch sọc như hình vẽ bên.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

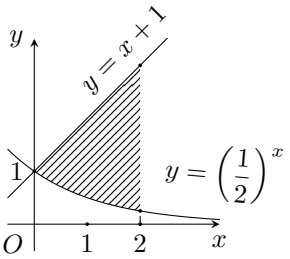


Ví dụ 29 (Mức độ 2).

Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ và hình phẳng được gạch sọc như hình vẽ bên.

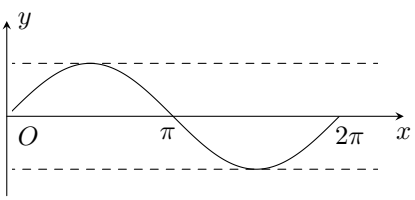
a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.



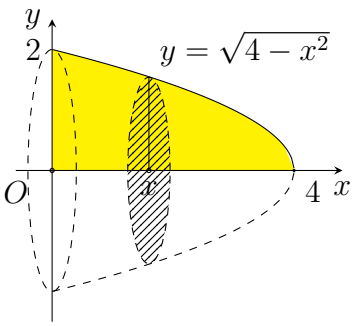
Ví dụ 30.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.



Ví dụ 31 (Mức độ 2).

Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - x}$ $(x \le 4)$, trục tung và trục hoành như hình bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.

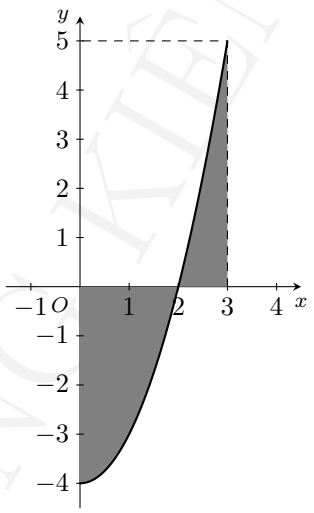


TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

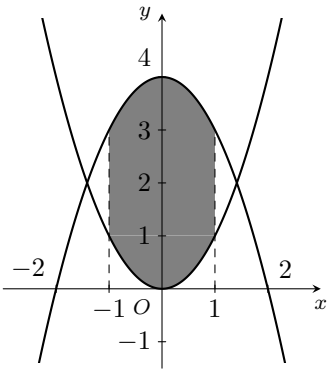
Ví dụ 32.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.



Ví dụ 33.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

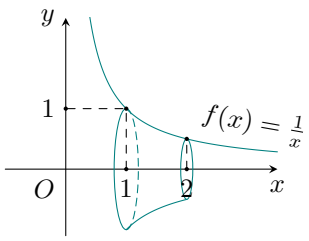


Ví dụ 34 (Mức độ 2).

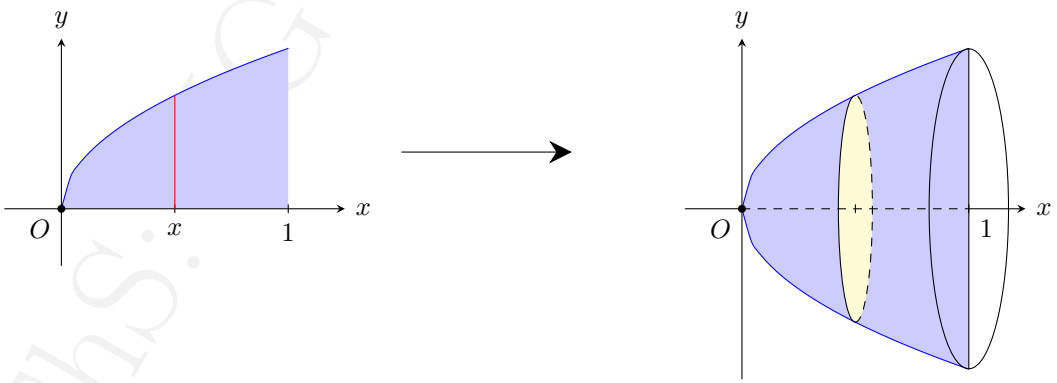
Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ và khối tròn xoay như hình bên.

a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như hình trên?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

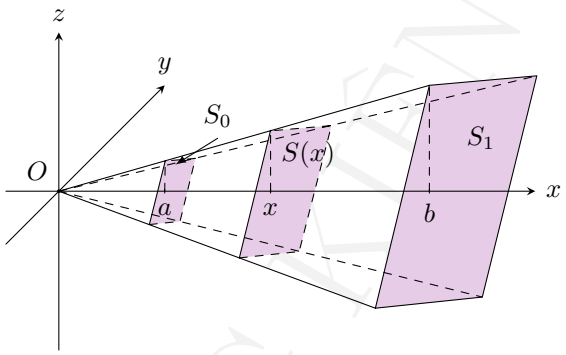


Ví dụ 35 (Mức độ 2). Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ như hình dưới đây.



Ví dụ 36 (Mức độ 3).

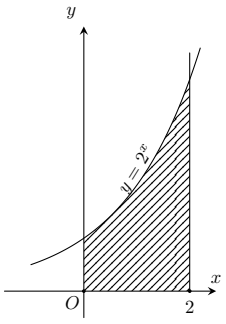
Tính thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích hai đáy là S_0, S_1 và chiều cao bằng h như hình bên. Từ đó suy ra công thức tính thể tích khối chóp đều có diện tích đáy bằng S và chiều cao bằng h.



Ví dụ 37 (Mức độ 2).

Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{15\pi}{\ln 4}$. **B.** $\dfrac{8\pi}{\ln 2}$. **C.** $\dfrac{15\pi}{\ln 2}$. **D.** $\dfrac{17\pi}{\ln 4}$.

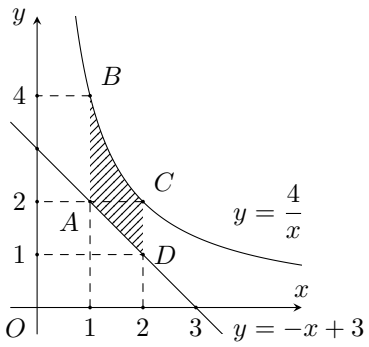


Ví dụ 38 (Mức độ 2).

Hình thang cong $ABCD$ ở hình bên có diện tích bằng

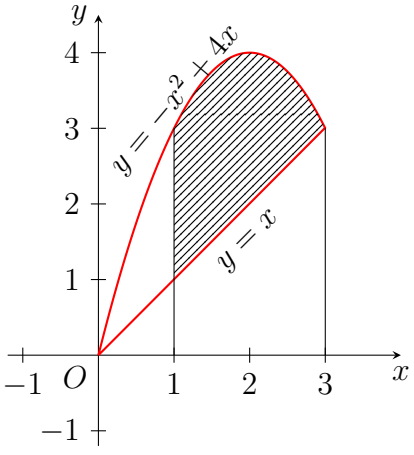
A. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x}+x+3\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x}-x+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x}-x-3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{4}{x}+x+3\right)\mathrm{d}x$.



Ví dụ 39 (Mức độ 2).

Cho (C): $y=-x^2+4x$, d: $y=x$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục Ox và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$. S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$. S là diện tích phần tô màu (như hình vẽ bên). Khi đó



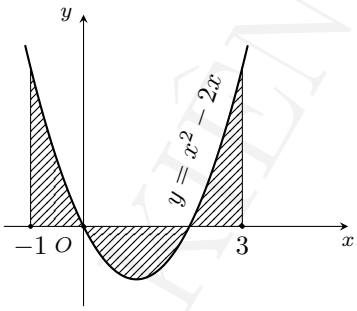
Phát biểu	Đ	S
a) S là hình phẳng giới hạn bởi đường cong C, đường thẳng d và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$..		
b) $S_1=\displaystyle\int_1^3(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $S_2=4{,}5$.		
d) $S=\dfrac{11}{3}$.		

Ví dụ 40 (Mức độ 2).

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

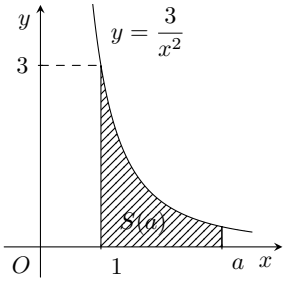
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$. KQ: | | | | |



2 Bài tập tự luận

Bài 29.

Kí hiệu $S(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = a$ với $a > 1$ (Hình bên). Tính giới hạn $\lim\limits_{a \to +\infty} S(a)$.

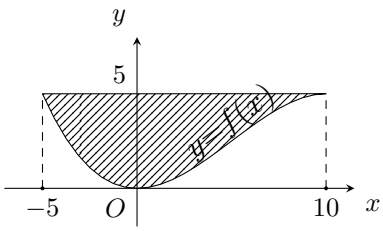


Bài 30 (Mức độ 2).

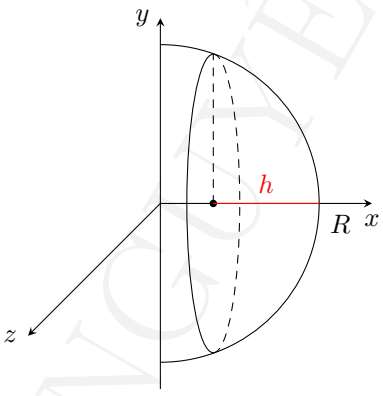
Cho hình vẽ bên. Đường cong $f(x)$ cho bởi phương trình

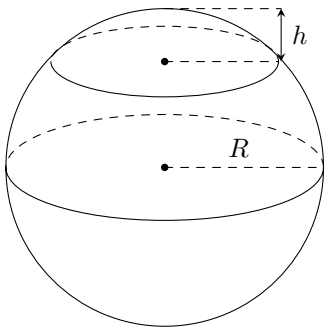
$$y = f(x) = \frac{3}{100}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right).$$

Hãy tính diện tích hình phẳng bị gạch chéo trong hình bên, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét.



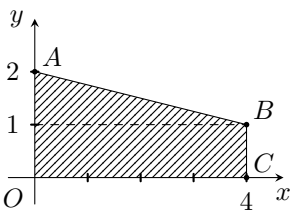
Bài 31 (Mức độ 3). Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $(0 < h \leq R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ xung quanh trục Ox như hình dưới đây. Tính thể tích của khối chỏm cầu này.





Bài 32.

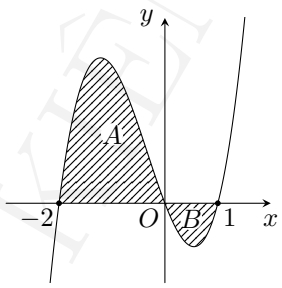
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ có $A(0;2)$, $B(4;1)$ và $C(4;0)$ như hình bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $OABC$ quanh trục Ox.



THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

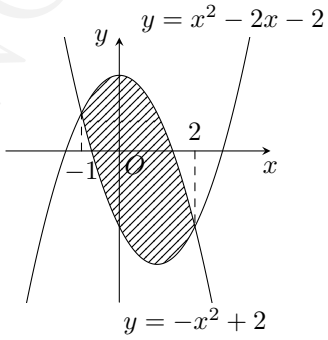
Bài 33 (Mức độ 2).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2. Tính $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



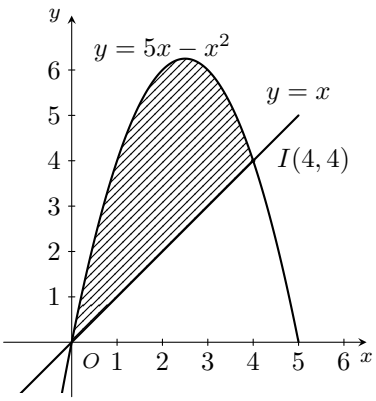
Bài 34 (Mức độ 2).

Tính diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên.



Bài 35 (Mức độ 2).

Tính diện tích của hình phẳng được gạch chéo trong hình bên.

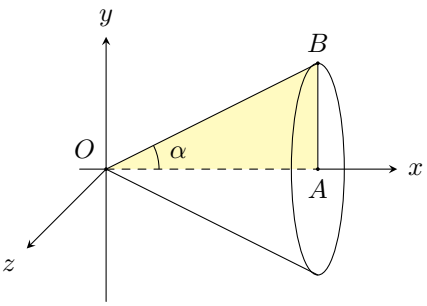


Bài 36 (Mức độ 2).

Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $\widehat{AOB} = \alpha \left(0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$. Gọi $\mathcal{B}$ là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox như hình bên.

a) Tính thể tích V của $\mathcal{B}$ theo a và α.

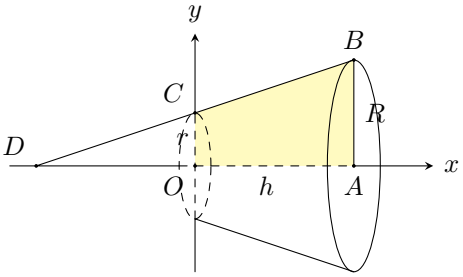
b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.



Bài 37 (Mức độ 3).

a) Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang vuông $OABC$ trong mặt phẳng Oxy với $OA = h$, $AB = R$ và $OC = r$, quanh trục Ox (Hình bên).

b) Từ công thức ở câu a), hãy rút ra công thức tính thể tích của khối nón có bán kính đáy bằng R, chiều cao h.



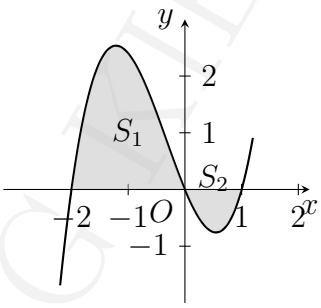
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 95 (Mức độ 3).

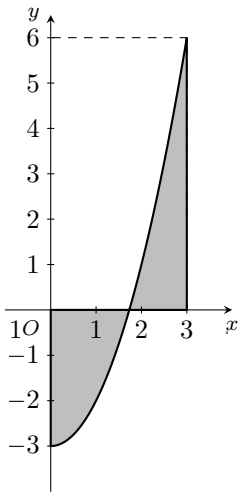
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích $S_1 = \dfrac{8}{3}$ và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích $S_2 = \dfrac{5}{12}$. Tính $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.



A. $I = \dfrac{5}{3}$. **B.** $I = \dfrac{3}{4}$. **C.** $I = \dfrac{37}{36}$. **D.** $I = \dfrac{27}{4}$.

Câu 96 (Mức độ 2).

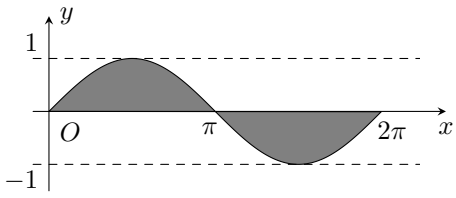
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ bằng



A. $3\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3} - 1$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 97 (Mức độ 2).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2\pi$ (phần tô đậm). Công thức tính diện tích nào sau đây **sai**

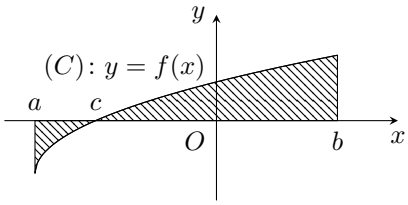


A. $y = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$. **B.** $y = \left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x\right|$.

C. $y = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$. **D.** $y = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x$.

Câu 98.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



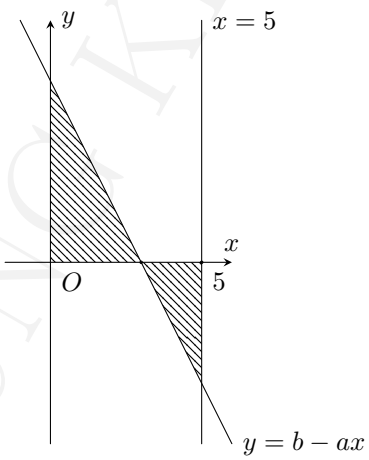
A. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

C. $S = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$

Câu 99 (Mức độ 2).

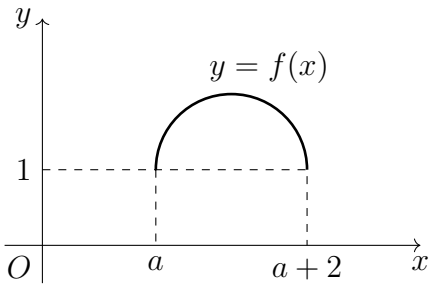
Gọi d là đồ thị của hàm số $f(x) = b - ax$ $(a, b > 0)$. Diện tích hình phẳng được gạch chéo (như hình vẽ) bằng



A. $\dfrac{7a}{2} + b.$ **B.** $\dfrac{5a}{2} + b.$ **C.** $7a + b.$ **D.** $5a + b.$

Câu 100 (Mức độ 3).

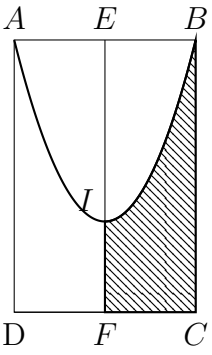
Trên đoạn $[a; a+2]$, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị là nửa đường tròn như hình vẽ bên. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; a+2]$ thỏa mãn điều kiện $F(a) = 2$. Khi đó $F(a+2)$ bằng:



A. $\pi + 4.$ **B.** $\dfrac{\pi}{2} + 5.$ **C.** $\dfrac{\pi}{2} + 4.$ **D.** $\pi + 5.$

Câu 101 (Mức độ 3).

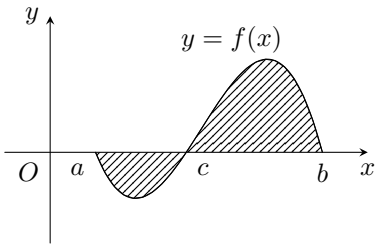
Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và I thuộc cạnh EF sao cho $EF = 3IF$. Gọi (P) là đường parabol đi qua các điểm A, I, B. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi (P) và các cạnh IF, FC, CB quay quanh trục EF ta được khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



A. 8,4 cm^3. **B.** 50,2 cm^3. **C.** 50,3 cm^3. **D.** 8,3 cm^3.

Câu 102.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $S = \left|\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

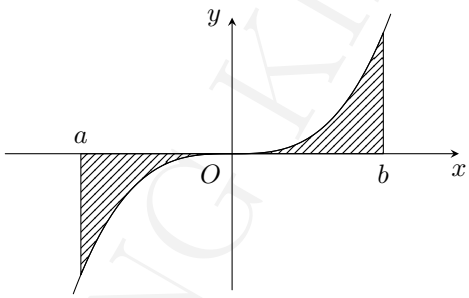
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $S=-\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 103.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y=f(x)$, trục hoành, $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D.



A. $S_D=\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

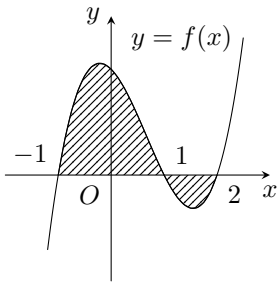
B. $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 104.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$ (hình bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

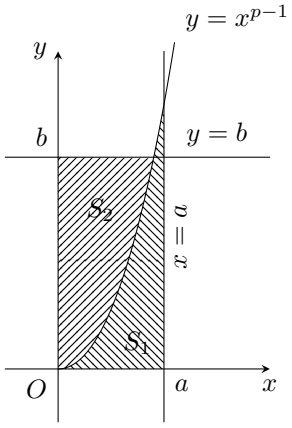
B. $S=-\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=-\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 105.

Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện $p>0$, $q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ và các số dương a,b. Xét hàm số $y=x^{p-1}$ $(x>0)$ có đồ thị (C). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x=a$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y=b$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x=a$, $y=b$ (như hình vẽ bên). Khi so sánh S_1+S_2 và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\le ab$.

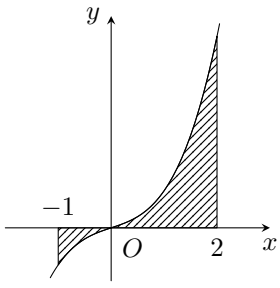
B. $\dfrac{a^{p-1}}{p-1}+\dfrac{b^{q-1}}{q-1}\le ab$.

C. $\dfrac{a^{p+1}}{p+1}+\dfrac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$.

D. $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 106.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ (hình vẽ). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$.

B. $S=b+a$.

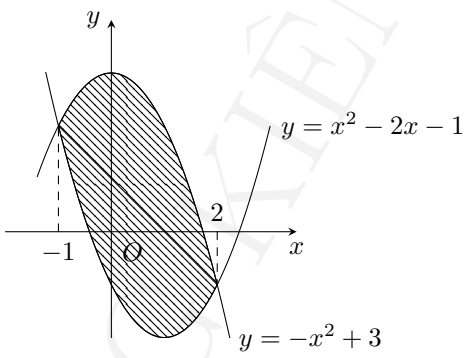
C. $S=-b+a$.

D. $S=-b-a$.

THS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 107.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

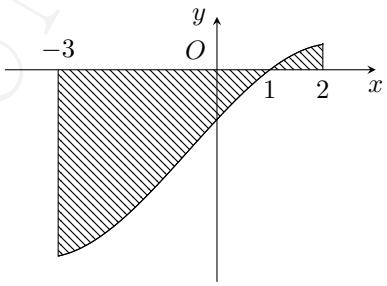
B. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x$.

Câu 108.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, Ox, $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\displaystyle\int_{-3}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\displaystyle\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$ (hình bên).

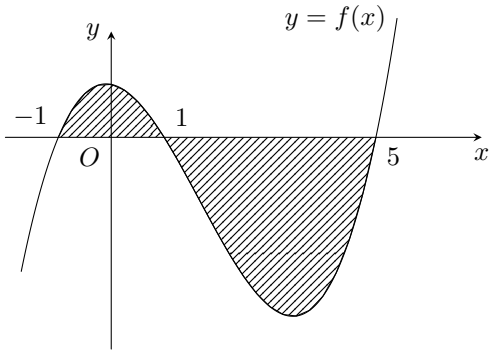


Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Câu 109.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=5$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

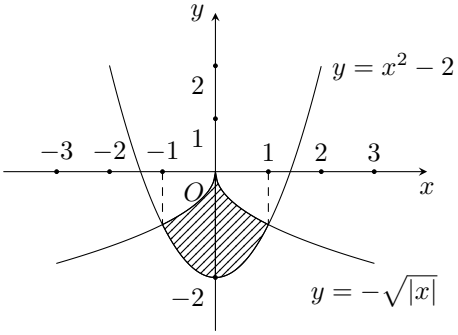
B. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 110.

Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 111.

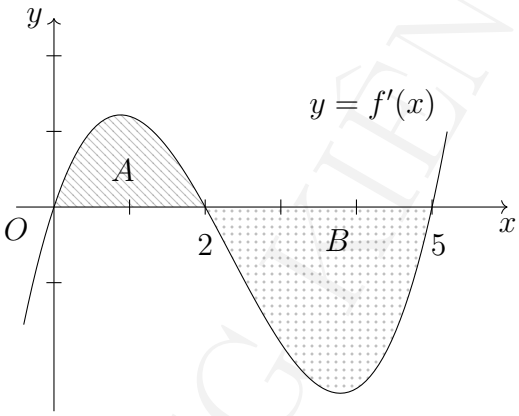
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 2$ và $S_B = 3$. Nếu $f(0) = 4$ thì giá trị của $f(5)$ bằng

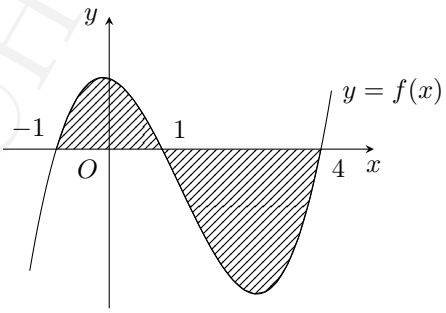
A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** -1.



4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 112.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$ (như hình vẽ). Khi đó

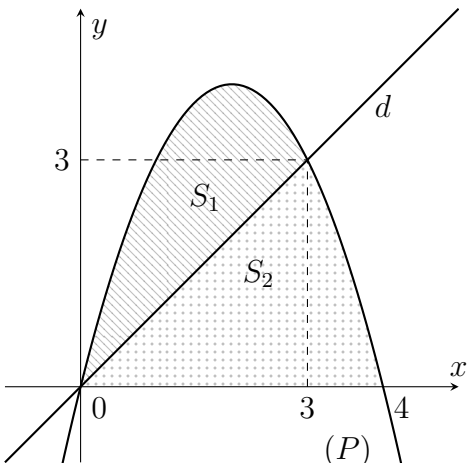


Phát biểu	Đ	S
a) $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $S = \int_{-1}^{1} \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $S = \left\lvert \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert$.		
d) $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.		

Câu 113.

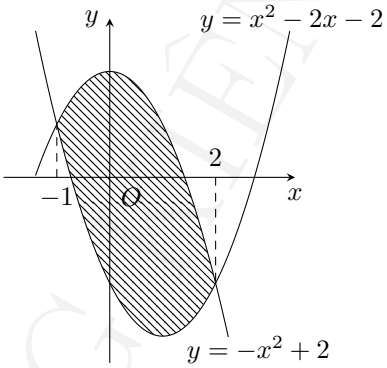
Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình đường thẳng d là $y = x$.		
b) Phương trình $(P)\colon y = -x^2 - 4x$.		
c) $S_1 = \int_{0}^{3} (-x^2 + 3x)\mathrm{d}x$.		
d) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{38}$.		

Câu 114.

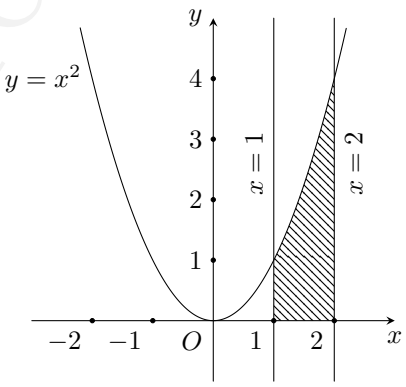
Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^{2} \left\lvert x^2 - 2x - 2 \right\rvert \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \left\lvert -x^2 + 2 \right\rvert \mathrm{d}x$.		
c) Hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$.		
d) Diện tích hình phẳng là $S = 9$.		

Câu 115.

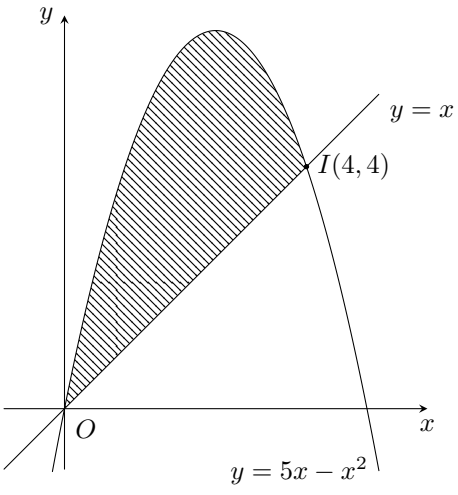
Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được giới hạn bởi $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng là $S = \int_{1}^{2} x^2 \mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng là $S = \frac{4}{3}$.		
d) Hình phẳng được giới hạn bởi $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$.		

Câu 116.

Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi đó

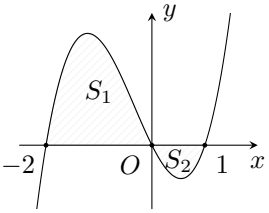


Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được giới hạn bởi $y = 5x - x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 4$.		
b) Diện tích hình phẳng là $S = \int_{0}^{4} \left(x^2 - 4x\right) \mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng là $S = \int_{0}^{4} \left\lvert x^2 - 4x \right\rvert \mathrm{d}x$.		
d) Diện tích hình phẳng bằng $S = \frac{56}{3}$.		

Câu 117.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo. Cho $S_1 = \frac{16}{3}$, $S_2 = \frac{5}{6}$ và $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1) \mathrm{d}x$.

Khi đó



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

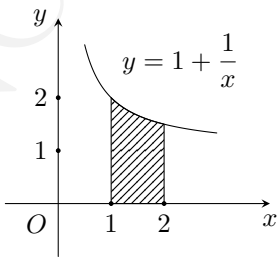
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) $S_1 = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$.		
b) $S_2 = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{6}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $I = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $I = \dfrac{9}{2}$.		

Câu 118.

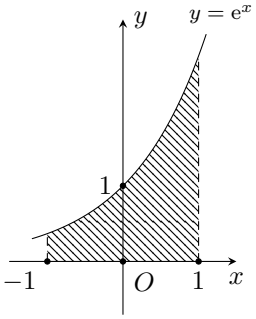
Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_{1}^{2} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \int\limits_{1}^{2} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.		

Câu 119.

Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Khi đó



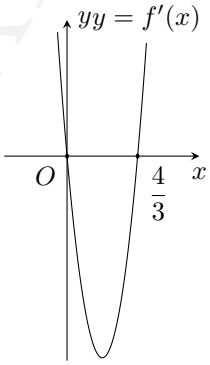
Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = \mathrm{e}^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = \mathrm{e}^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.		

Câu 120.

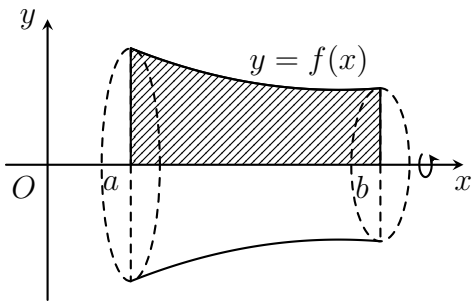
Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\dfrac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \end{array}\right.$.		
b) $f(x) = f'(x)$ có các nghiệm lần lượt là $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$.		
c) Giá trị của $f(x) = f'(1) + 2f'(2)$ là 17.		
d) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\dfrac{71}{3}$.		

Câu 121.

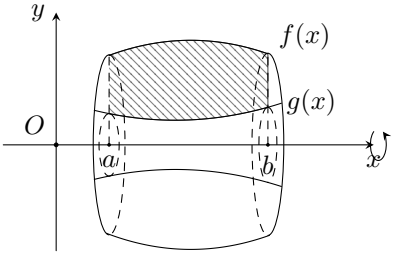
Cho vật thể tròn xoay như hình bên. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.		
b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.		
c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.		

Câu 122.

Cho vật thể tròn xoay như hình bên. Khi đó



ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

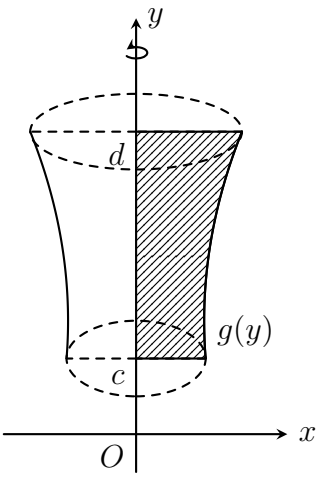
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.		
b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.		
c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.		
d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\,\mathrm{d}x$.		

Câu 123.

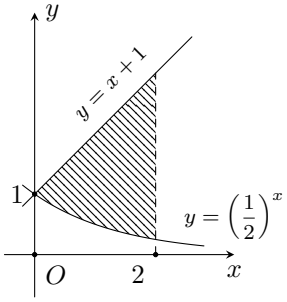
Cho vật thể tròn xoay như hình bên.



Phát biểu	Đ	S
a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c$, $x = d$ quay quanh trục Oy.		
b) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = g(y)$, trục tung và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quay quanh trục Oy.		
c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$.		
d) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$.		

Câu 124.

Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên.

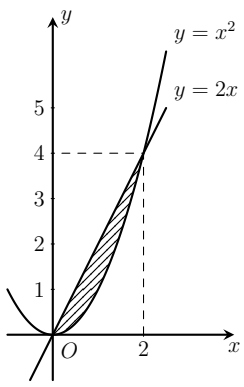


ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=x+1$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x=0$; $x=2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1\right] \mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4\ln 2}$.		
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=x+1$; $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x=1$; $x=2$.		

Câu 125.

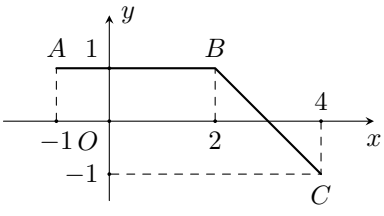
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x$, $x=0$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox.



Phát biểu	Đ	S
a) Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(2;4)$.		
b) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V=\pi\int_0^2 \left(x^2-2x\right)^2 \mathrm{d}x$.		
c) Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm.		
d) Thể tích vật thể là $V=\frac{64}{15}\pi$.		

Câu 126 (TN THPT 2023 - Mã đề 103, Mức độ 1).

Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục Ox, $x=-2$, $x=4$ bằng 4.		
b) Tích phân $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng 3.		

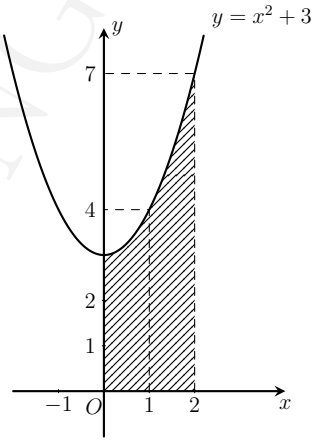
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TRẦN NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
c) Tích phân $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng 3.		
d) Tích phân $\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng 1.		

Câu 127.

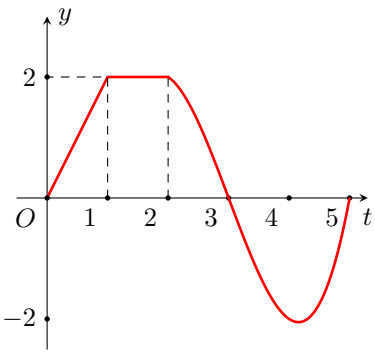
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox.



Phát biểu	Đ	S
a) Gọi V_1 là thể tích vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox. Khi đó $V_1 = \dfrac{56}{5}$.		
b) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_{0}^{2} \left(x^2 + 6x + 9\right)\,\mathrm{d}x$.		
c) Gọi V_2 là thể tích vật thể được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox. Khi đó $5V_2 - 10V_1 = 34\pi$.		
d) Thể tích vật thể là $V = \dfrac{202}{5}\pi$.		

Câu 128.

Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



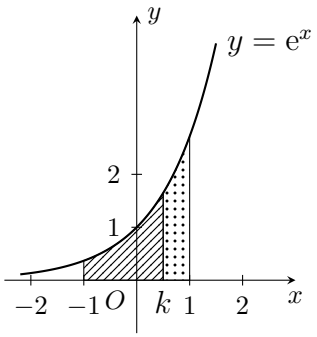
Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$; $t = 1$ là $S = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{1} t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}$.		

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1$; $t=2$ là $S=\int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}t=2$.		
c) Tích phân $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=2$; $t=3$.		
d) Tích phân $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3$; $t=5$.		

Câu 129 (Mức độ 2).

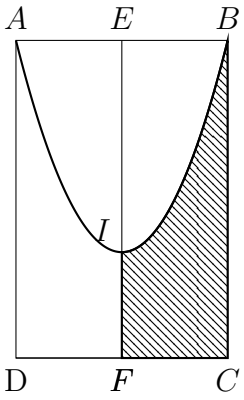
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $x=-1$, $x=k$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $x=k$, $x=1$; S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^2$, $x=-1$, $x=1$; V là thể tích hình khối khi xoay S quanh trục Ox. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $S=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}$.		
b) $V=11{,}4$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).		
c) $S_1=S-\int\limits_k^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
d) Khi $k=\ln\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)-\ln 2$ thì $S_1=S_2$..		

Câu 130 (Mức độ 3).

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4$ cm, $BC=6$ cm. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và I thuộc cạnh EF sao cho $EF=3IF$. Gọi (P) là đường parabol đi qua các điểm A, I, B. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi (P) và các cạnh IF, FC, CB quay quanh trục EF ta được khối tròn xoay. Khi xem EF là trục Oy, CD là trục Ox và F trùng gốc tọa độ thì mỗi khẳng định sau đây đúng hay **sai**?



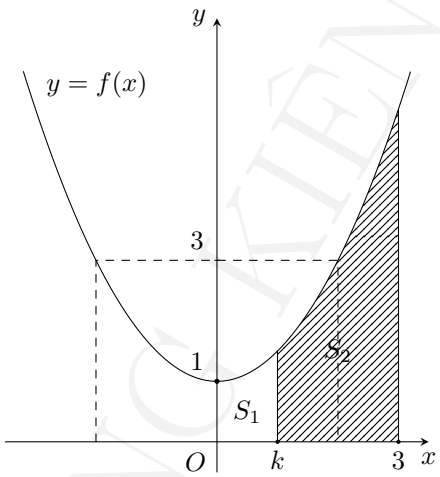
Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình của Parabol (P): $y=x^2+2$.		
b) Hình gạch sọc giới hạn bởi các đường $x=0$; $x=2$; $y=x^2+2$.		
c) Thể tích của khối tròn đã cho xoay là $V=\pi\int\limits_0^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.		
d) Thể tích của khối tròn xoay là $50{,}3$ cm^3.		

Câu 131 (Mức độ 2).

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) là đường parabol như hình vẽ bên. Hình phẳng giới hạn bởi (C), trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = 3$ có diện tích S. Đường thẳng $x = k$ với $0 < k < 3$, chia S ra thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Biết $3S_1 = S_2$.



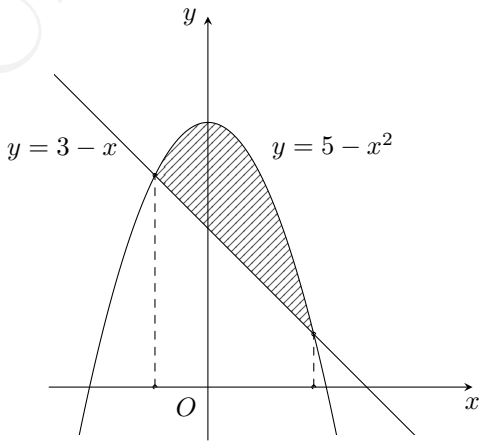
Phát biểu	Đ	S
a) $(C)\colon y = f(x) = \frac{1}{2}x + x + 1$.		
b) $S = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $S = 8$.		
d) Giá trị biểu thức $T = k^3 + 6k = \frac{45}{4}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 132 (Mức độ 2).

Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*

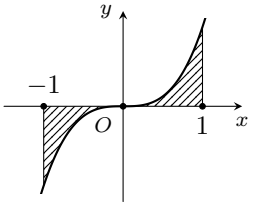
KQ: ☐☐☐☐



Câu 133 (Mức độ 2).

Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị như hình. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

KQ: ☐☐☐☐

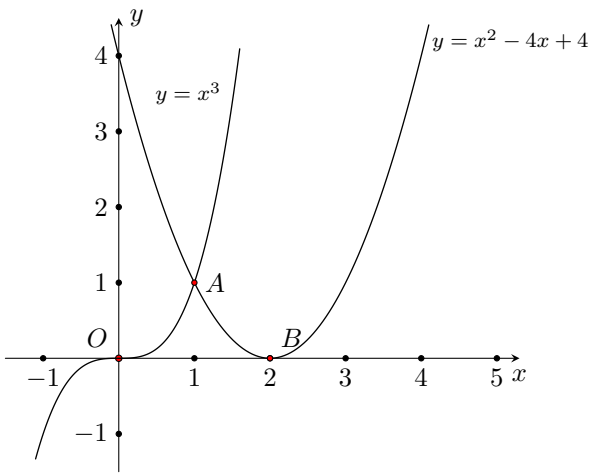


Câu 134.

Biết diện tích phần tam giác cong OAB trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính hiệu $b - a$.

KQ: ☐☐☐☐

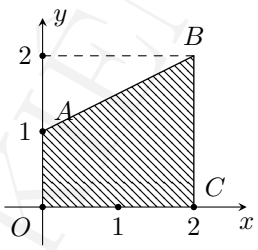


ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 135.

Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên.

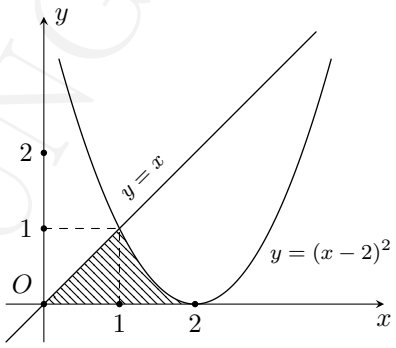
KQ: | | | | |



Câu 136.

Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a+b$.

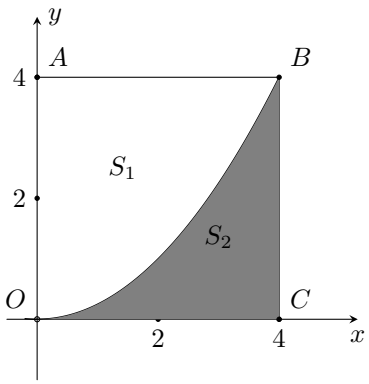
KQ: | | | | |



Câu 137.

Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_2, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?

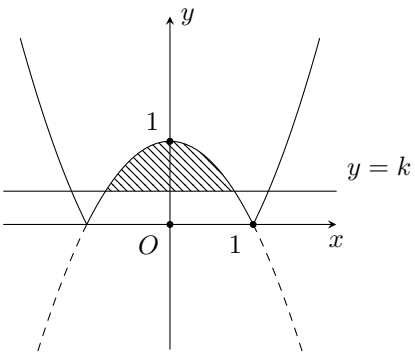
KQ: | | | | |



Câu 138.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

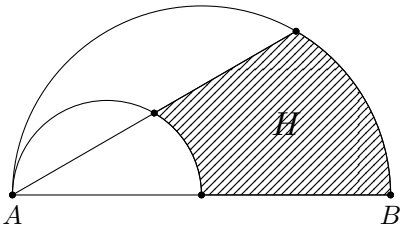
KQ: | | | | |



Câu 139 (Mức độ 3).

Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30°$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB *(Làm tròn đến phần trăm)*.

KQ: | | | | |



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TRẦN NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

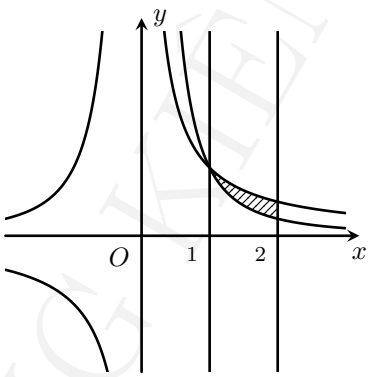
Câu 140 (Mức độ 2).

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

$$y = \frac{1}{x^2},\ y = \frac{1}{x}$$

và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ *(Làm tròn đến phần trăm).*

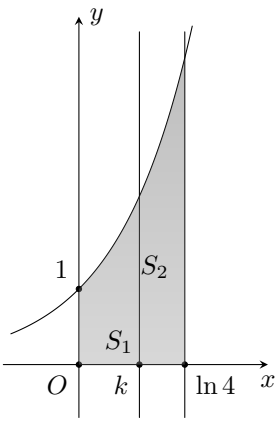
KQ: ☐☐☐☐



Câu 141.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$, $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

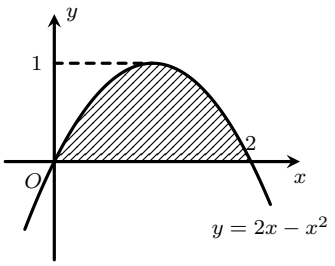
KQ: ☐☐☐☐



Câu 142 (Mức độ 2).

Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox *(Kết quả làm tròn đến phần trăm).*

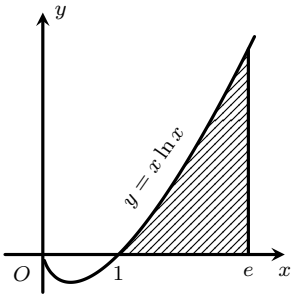
KQ: ☐☐☐☐



Câu 143 (Mức độ 2).

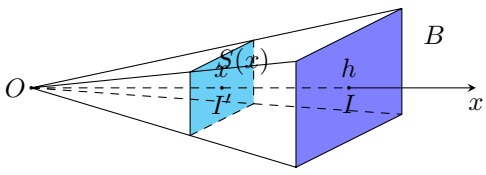
Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox *(Làm tròn đến phần trăm).*

KQ: ☐☐☐☐



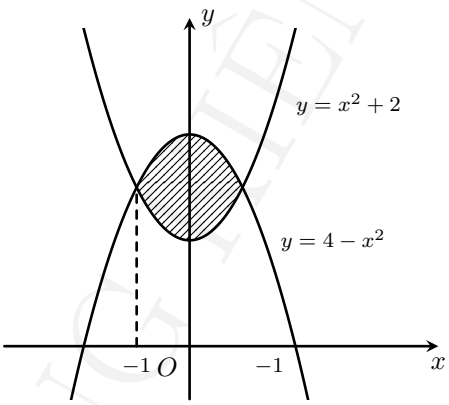
Câu 144 (Mức 3).

Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$ (xem hình bên). Đặt $OI = h$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo hình phẳng có diện tích $S(x)$. Người ta chứng minh được rằng $S(x) = B\dfrac{x^2}{h^2}$. Tính thể tích khối chóp. KQ: ☐☐☐☐



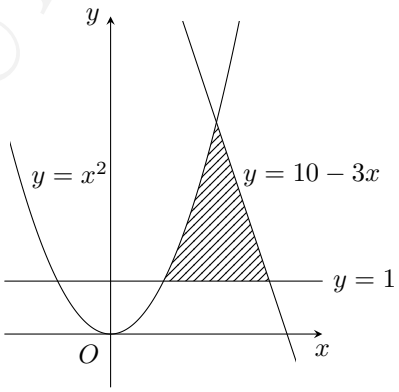
Câu 145.

Cho miền D giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$; $y=x^2+2$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |



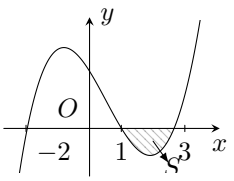
Câu 146 (Mức độ 3).

Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)* KQ: | | | | |



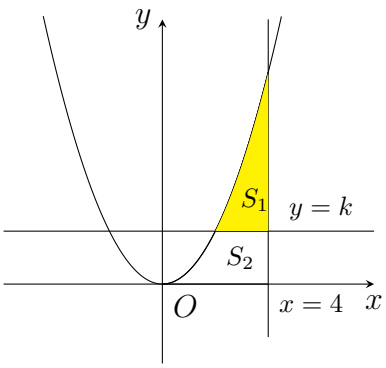
Câu 147.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2;3]$ và $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $\int\limits_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x=3$ và diện tích $S=\dfrac{5}{3}$. Giá trị $f(3)-f(-2)=\dfrac{a}{b}$. Tích $a\cdot b$ bằng bao nhiêu, biết $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản? KQ: | | | | |



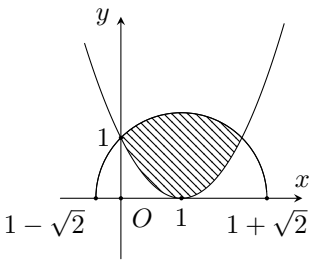
Câu 148.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=0, x=0, x=4$. Đường thẳng $y=k(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$. KQ: | | | | |



Câu 149.

Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và nửa đường tròn (C) cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và (C) có diện tích $S=\dfrac{\pi}{m}+\dfrac{1}{n}$ (m,n nguyên dương). Giá trị biểu thức $P=m^2+n^2$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |



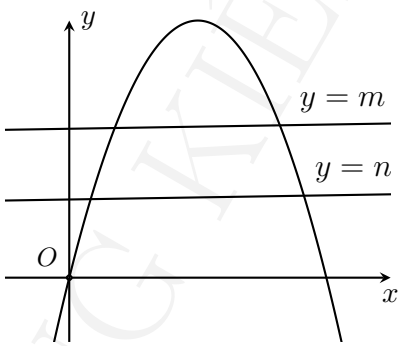
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 150.

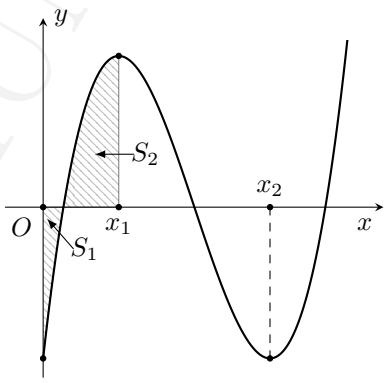
Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)*

KQ: | | | | |



Câu 151.

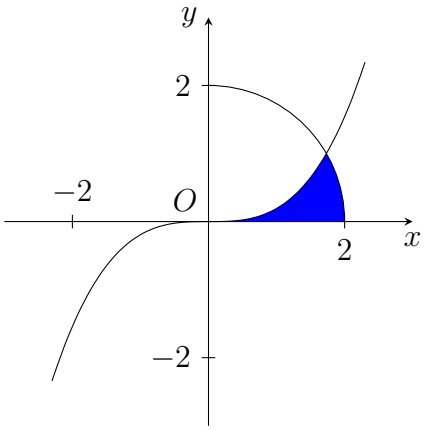
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2=x_1+2$ và $f''(2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu? *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân làm tròn tới hàng phần trăm).* KQ: | | | | |



Câu 152.

Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V=\left(-\dfrac{a}{b}\sqrt{3}+\dfrac{c}{d}\right)\pi$, trong đó a, b, c, $d\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P=a+b+c+d$.

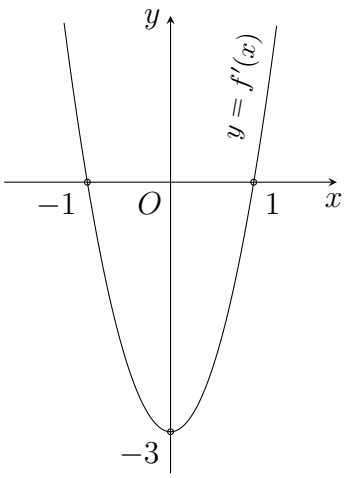
KQ: | | | | |



Câu 153.

Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R},\,a\ne 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)*

KQ: | | | | |

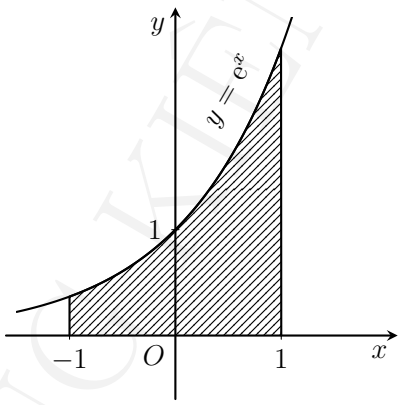


ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 154.

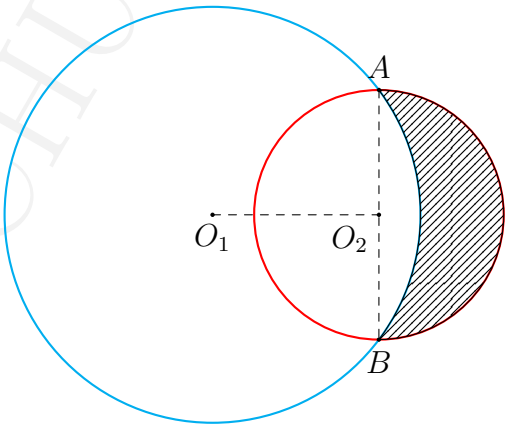
Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |



Câu 155 (Mức độ 4).

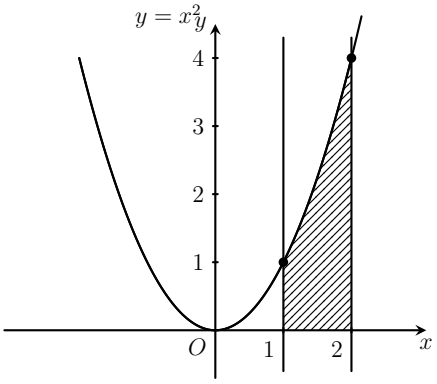
Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành. KQ: | | | | |



Câu 156.

Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).*

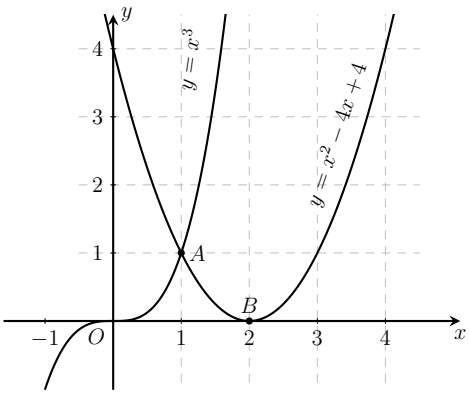
KQ: | | | | |



Câu 157.

Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

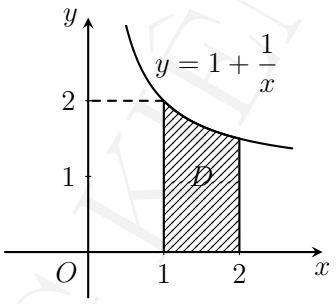


ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

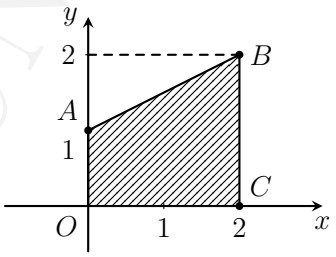
Câu 158.

Cho hình phẳng (D) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |



Câu 159.

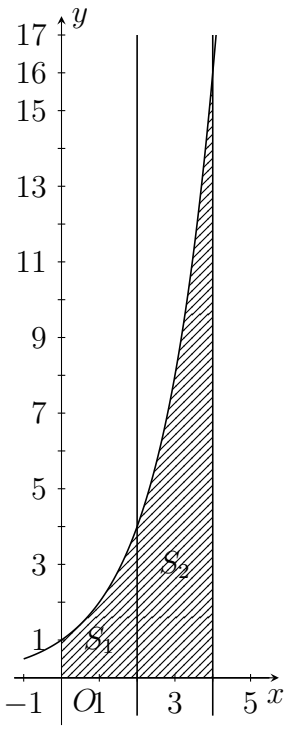
Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox *(Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |



Câu 160 (Mức độ 3).

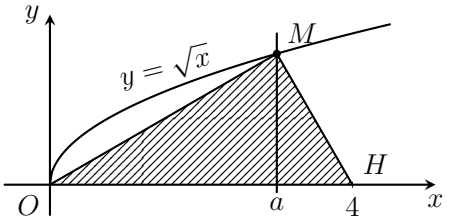
Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $x=a$ $(0<a<4)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Giá trị của a bằng bao nhiêu để $S_2=4S_1$?

KQ: | | | | |



Câu 161.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$, $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle OMH$ quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Tìm a. KQ: | | | | |



Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

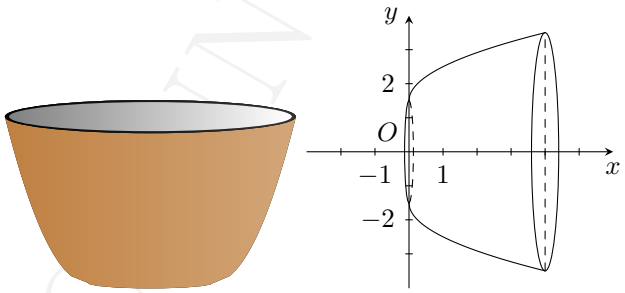
DẠNG 3 Bài toán thực tế

- Đọc đề cẩn thận, nên đọc từ hai đến ba lần để nắm bắt được nội dung chính đề ra.
- Gắn tọa độ, tìm phương trình các đường cong (nếu chưa có sẵn).
- Áp dụng các công thức tính diện tích hình phẳng, thể tích, thể tích khối tròn xoay đã học.

1 Ví dụ mẫu

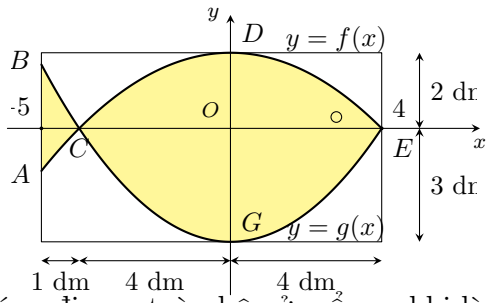
Ví dụ 41 (Mức độ 2).

Hình bên mô phỏng phần bên trong của một chậu cây có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} + \dfrac{3}{2}$ với $0 \le x \le 4$ quanh trục hoành. Tính thể tích phần bên trong (dung tích) của chậu cây, biết đơn vị trên các trục Ox, Oy là decimét.



Ví dụ 42 (Mức độ 4).

Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, hoạ sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình bên (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là dm).



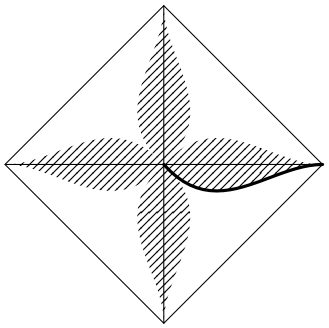
a) Lập phương trình các parabol $y = f(x)$, $y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*.

Ví dụ 43 (Mức độ 3).

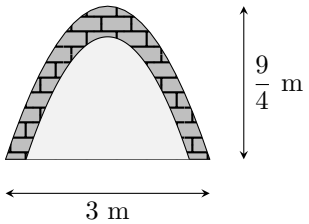
Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được gạch chéo) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo. Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo (đường cong được tô đậm) là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập 2/3, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\dfrac{2}{3}$. Tính $2a + 2b$.



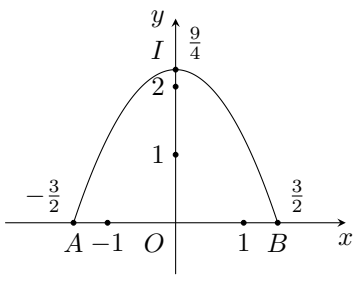
A. $\dfrac{41}{80}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{9}{10}$.

Ví dụ 44 (Mức độ 3).

Cửa vòm lấy ánh sáng của một toà nhà được thiết kế với kích thước như hình a). Cửa có hình dạng một parabol có đỉnh I và đi qua hai điểm A, B như hình b). Người ta dự định lắp kính cho cửa này



a)



b)

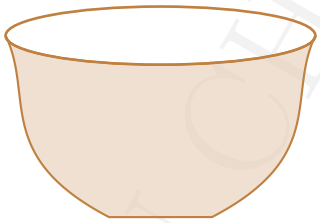
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

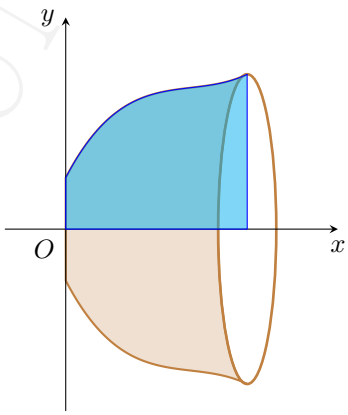
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu chỉ sử dụng một lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa thì diện tích kính cần lắp là $\frac{9}{2}$ m^2.		
b) Nếu chỉ sử dụng một lớp kính, giá tiền kính là 1 triệu đồng trên một mét vuông và bỏ qua giá tiền khung cửa thì số tiền phải trả là 4 triệu đồng.		
c) Nếu sử dụng hai lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa thì diện tích kính cần lắp là $\frac{9}{2}$ m^2.		
d) Phương trình của Parabol ở hình b có dạng $y = -x^2 + \frac{9}{4}$.		

Ví dụ 45 (Mức độ 3).

Xét chiếc chén (cái ly) trong bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = 0{,}14x^3 - 0{,}87x^2 + 1{,}92x + 0{,}85$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (*làm tròn đến hàng đơn vị của* centimét *khối*). KQ: ☐☐☐☐





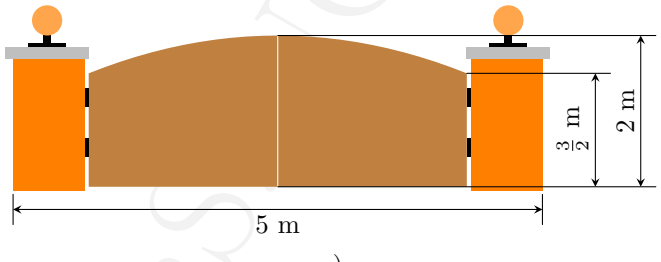
2 Bài tập tự luận

Bài 38 (Mức độ 2). Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh hoạ sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hoá bởi hàm số $y = (0{,}00061x^2 + 0{,}0218x + 1723)^2$, $0 \le x \le 100$, trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất.

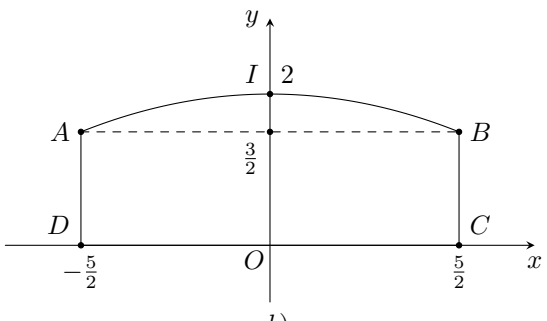
(Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Hãy tính sự bất bình đẳng về thu nhập ở Hoa Kỳ vào năm 2005.

Bài 39 (Mức độ 3). Một cái cổng có kích thước như Hình a. Vòm cổng có hình dạng một parabol có đỉnh $I(0;2)$ và đi qua điểm $B\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ như Hình b. Tính diện tích hai cánh cửa cổng.



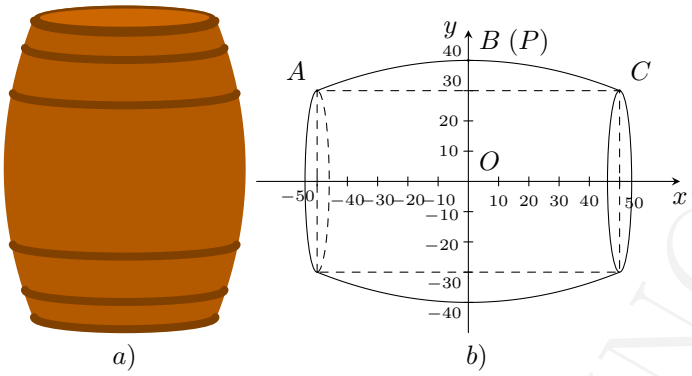
a)



b)

Bài 40 (Mức độ 3). Một thùng rượu vang có dạng khối tròn xoay với bán kính mặt đáy và mặt ở trên là 33 cm, bán kính mặt cắt ở chính giữa thùng là 43 cm. Chiều cao của thùng rượu là 112 cm, bao gồm

phần thân thùng rượu, hai đế đỡ thùng rượu (mỗi đế cao 6 cm) và thùng rượu được ghép từ các thanh gỗ sồi với độ dày mỗi thanh gỗ là 3 cm (Hình a). Hình b mô phỏng phần bên trong thùng rượu có dạng một khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ quanh trục hoành.



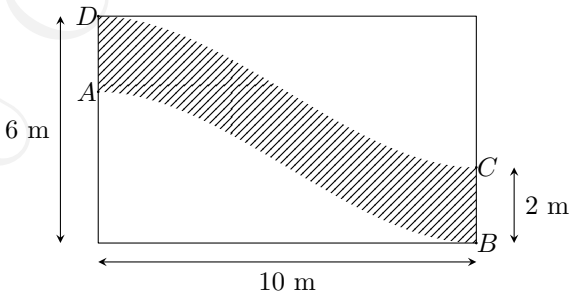
a) b)

a) Tìm a, b, c.

b) Hỏi thùng rượu đó chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

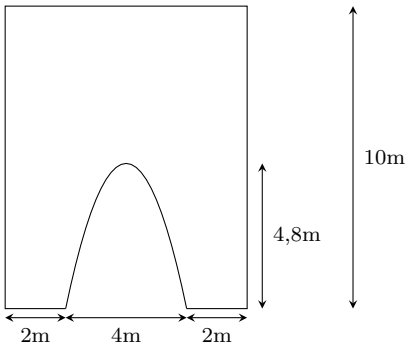
Bài 41 (Mức độ 3).

Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình bên. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra cô Hạnh quyết định đổ bê tông dày 15 cm với giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



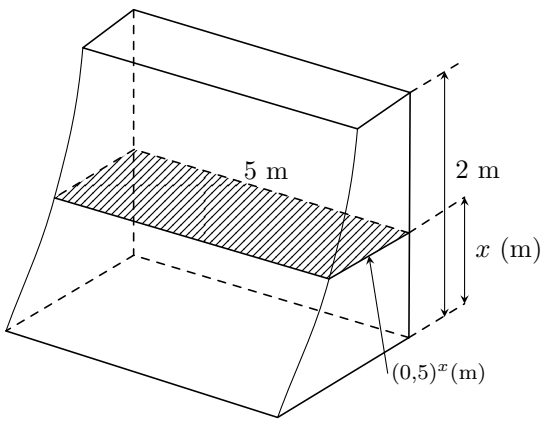
Bài 42 (Mức độ 3).

Hình bên minh họa mặt cắt đứng của một bức tường cũ có dạng hình chữ nhật với một cổng ra vào có dạng hình parabol với các kích thước được cho như trong hình đó. Người ta dự định sơn lại mặt ngoài của bức tường đó. Chi phí để sơn bức tường là 15 000 đồng/m^2. Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó sẽ là bao nhiêu?



Bài 43.

Một khối bê tông cao 2 m được đặt trên mặt đất phẳng. Nếu cắt khối bê tông này bằng mặt phẳng nằm ngang, cắt mặt đất x (m) $(0 \le x \le 2)$ thì được mặt cắt là hình chữ nhật có chiều dài 5 m, chiều rộng $(0{,}5)^x$ (m) (Hình bên). Tính thể tích của khối bê tông *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).*

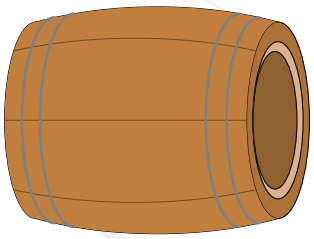


TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

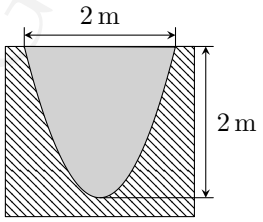
Bài 44 (Mức độ 3).

Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang, bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -0{,}011x^2 - 0{,}071x + 40$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -35$, $x = 35$ quay trục Ox. Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét.



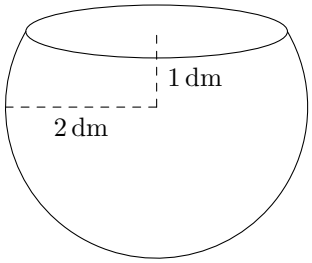
Bài 45.

Mặt cắt ngang của lòng máng dẫn nước là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình bên (phần được tô màu xám). Tính diện tích của mặt cắt ngang đó.



Bài 46.

Một bể cá có dạng là một phần hình cầu được tạo thành khi cắt hình cầu bán kính 2 dm bằng mặt phẳng cách tâm của hình cầu 1 dm (Hình bên). Tính dung tích của bể cá (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của đềximét khối). ***Gợi ý:*** Có thể coi bể cá là khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ với $-2 \le x \le 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ quanh trục hoành.



3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

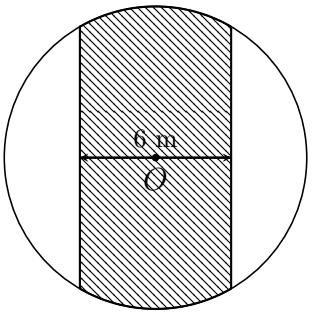
Câu 162. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

A. 33 750 000 đồng. **B.** 3 750 000 đồng. **C.** 12 750 000 đồng. **D.** 6 750 000 đồng.

Câu 163 (Mức độ 3).

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6 m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6 m nhận O làm tâm đối xứng (xem hình vẽ), kinh phí trồng cây là 70 000 đồng/m^2. Đặt hệ trục Oxy với O là tâm hình tròn và mỗi đơn vị trên trục tọa độ dài 1m. Số tiền cần để trồng cây gần bằng

A. 5 824 252 đồng. **B.** 7 475 251 đồng.
C. 3 324 352 đồng. **D.** 4 821 322 đồng.

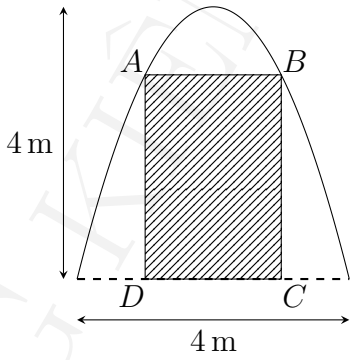


Câu 164 (Mức độ 3). Một mảnh vườn hình dạng elip được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết hình elip được mô phỏng bởi phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{2500} + \dfrac{y^2}{1600} = 1$, lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Câu 165 (Mức độ 3).

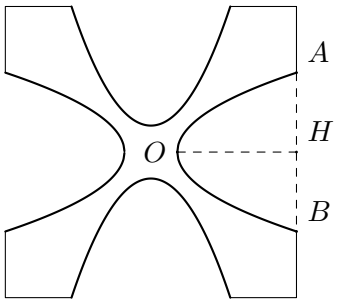
Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200 000 đồng cho một mét vuông bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 900 000 (đồng). **B.** 1 232 000 (đồng).
C. 902 000 (đồng). **D.** 1 230 000 (đồng).

Câu 166 (Mức độ 3).

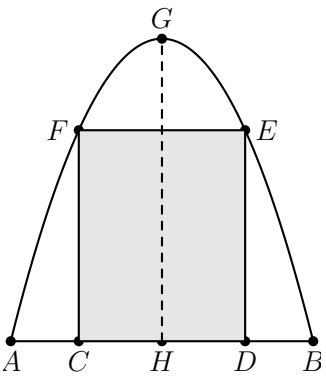
Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}$ cm^2. **B.** $\dfrac{140}{3}$ cm^2. **C.** $\dfrac{14}{3}$ cm^2. **D.** 50 cm^2.

Câu 167.

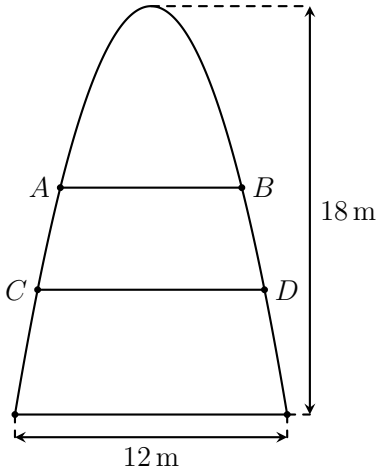
Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0{,}9$ m. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1 200 000 đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900 000 đồng/m^2. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 11 445 000 đồng. **B.** 4 077 000 đồng.
C. 7 368 000 đồng. **D.** 11 370 000 đồng.

Câu 168.

Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 169 (Mức độ 3). Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{14^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1$. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20 000đ. Hỏi từ quả dưa hấu

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

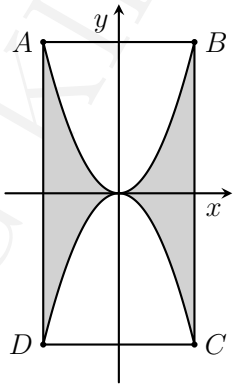
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183 000đ. **B.** 180 000đ. **C.** 185 000đ . **D.** 190 000đ.

Câu 170.

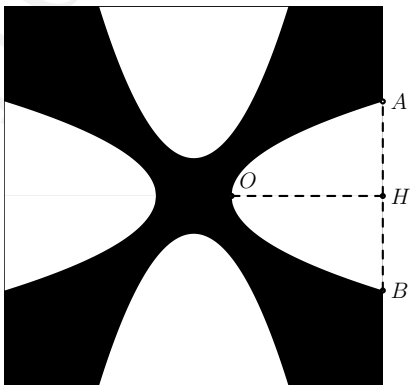
Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đính đá với giá thành 500 000/ m^2. Phần còn lại được tô màu với giá thành 250 000/ m^2. Cho $AB = 4\,\text{dm}$; $BC = 8\,\text{dm}$. Hỏi để trang trí 1 000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.



A. 105 660 667. **B.** 106 666 667. **C.** 107 665 667. **D.** 108 665 667.

Câu 171.

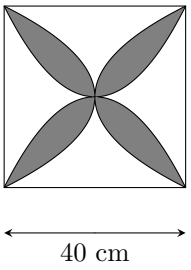
Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1 cm^2 là 50000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A. 2 553 333 đồng. **B.** 2 333 333 đồng.
C. 2 780 333 đồng. **D.** 2 123 333 đồng.

Câu 172.

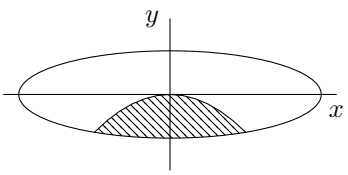
Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A. 800 cm^2. **B.** $\dfrac{800}{3}$ cm^2. **C.** $\dfrac{400}{3}$ cm^2. **D.** 250 cm^2.

Câu 173 (Mức độ 4).

Bác An có sân vườn hình Elip được mô phỏng như hình vẽ, bác xây ao cá là phần tô đậm trong hình vẽ, đường viền biên của ao cá trong sân là một đường Parabol. Phần không xây ao cá, Bác An mua thêm hoa về trồng. Biết rằng Elip có phương trình $x^2 + 12y^2 = 4$, 1 m^2 ao cá có giá 250 000 đồng và 1 m^2 trồng hoa có giá 50 000 đồng. Hỏi bác An tốn bao nhiêu tiền để hoàn thành khu vườn?



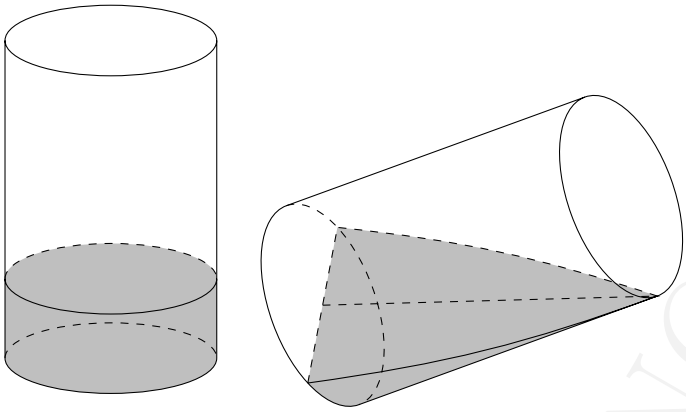
A. 257056,872 đồng. **B.** 335633,2274 đồng. **C.** 725519,7457 đồng. **D.** 362759,8728 đồng.

Câu 174. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. 30 m^3. **B.** 36 m^3. **C.** 40 m^3. **D.** 41 m^3.

Câu 175 (Mức độ 4). Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng

cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.

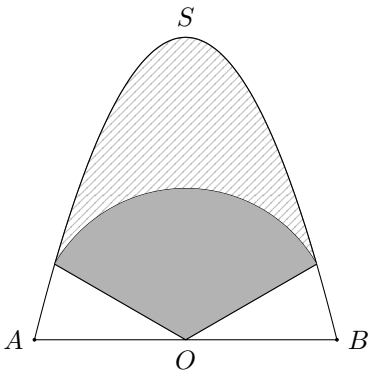


A. 240 cm^3. **B.** 240π cm^3. **C.** 120 cm^3. **D.** 120π cm^3.

Câu 176 (Mức độ 4).

Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4$ m, O là trung điểm AB. Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí:

- phần trên (phần kẻ sọc) giá 140 000 đồng/m^2;
- phần giữa (hình quạt tâm O bán kính 2 m được tô đậm) giá 150 000 đồng/m^2;
- phần còn lại giá 160 000 đồng/m^2.

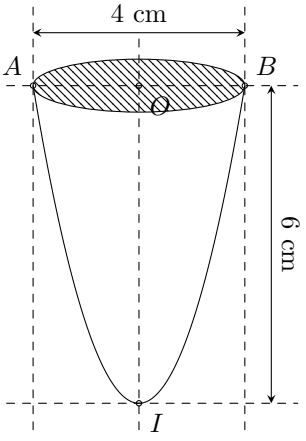


Tổng chi phí để sơn cả ba phần gần nhất với số nào sau đây?

A. 1625000 đồng. **B.** 1575000 đồng. **C.** 1600000 đồng. **D.** 1589000 đồng.

Câu 177 (Mức độ 3).

Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho.



A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 12$. **C.** $V = \dfrac{72}{5}\pi$. **D.** $V = \dfrac{72}{5}$.

Câu 178. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 m^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

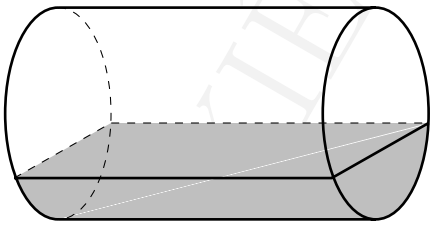
Câu 179. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

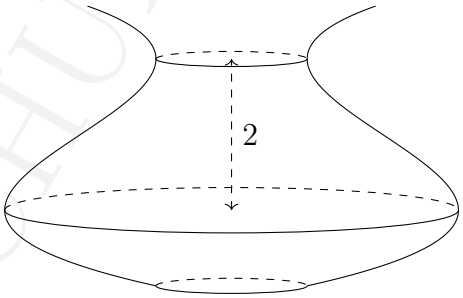
Câu 180 (Mức độ 4).



Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{0{,}5^2}+\dfrac{y^2}{0{,}4^2}=1$, chiều dài (nằm trong của thùng) bằng 3 m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình vẽ bên). Biết chiều cao của dầu trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (kết quả được làm tròn đến phần trăm).

A. $V=1{,}42$ m^3. **B.** $V=1{,}31$ m^3. **C.** $V=1{,}27$ m^3. **D.** $V=1{,}52$ m^3.

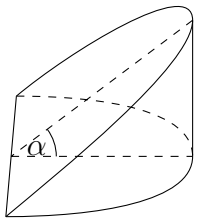
Câu 181 (Mức độ 4).



Một con quạ khát nước, nó tìm thấy một cái lọ có nước nhưng cổ lọ lại cao nó không thò mỏ uống được nên đã gắp từng viên bi (hình cầu) bỏ vào trong lọ để nước dâng lên. Hỏi con quạ cần bỏ vào lọ ít nhất bao nhiêu viên bi để có thể uống nước? Biết rằng viên bi có bán kính là $\dfrac{3}{4}$ (đvđd) và không thấm nước, cái lọ có hình dáng là một khối tròn xoay với đường sinh là đồ thị của một hàm bậc 3, mực nước ban đầu trong lọ ở vị trí mà mặt thoáng tạo thành hình tròn có bán kính lớn nhất $R=3$, mực nước mà quạ có thể uống được là vị trí mà hình tròn có bán kính nhỏ nhất $r=1$ và khoảng cách giữa hai mặt này bằng 2, được minh họa ở hình vẽ trên.

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

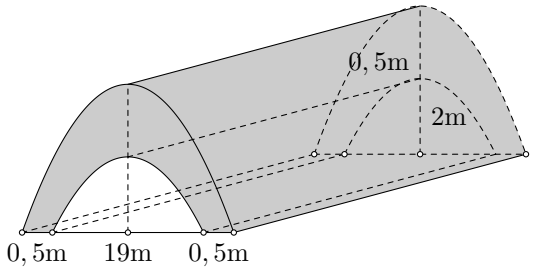
Câu 182.



Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2\le x\le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.

A. $V=20$. **B.** $V=20\pi$. **C.** $V=10$. **D.** $V=10\pi$.

Câu 183.



Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.

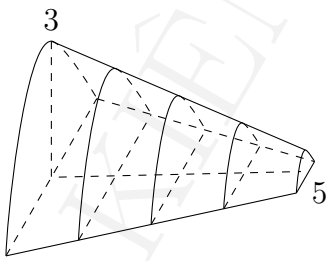
A. 110 triệu đồng. **B.** 250 triệu đồng. **C.** 180 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

Câu 184. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1<V_2$. Thể tích V_1 bằng

A. $V_1=\dfrac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1=\dfrac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Câu 185.

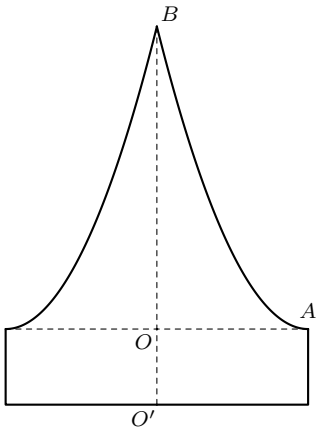
Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 cm; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đấy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x$ cm, với x cm là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

Câu 186.

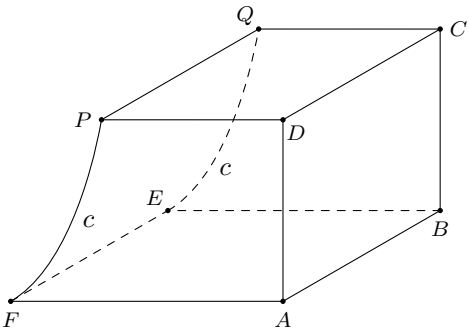
Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}$ cm^3. **B.** $\dfrac{2500\pi}{3}$ cm^3. **C.** $\dfrac{2050\pi}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{2250\pi}{3}$ cm^3.

Câu 187.

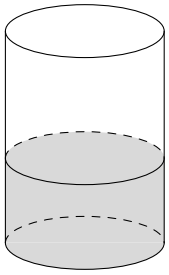
Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh 2,5 (cm). Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE=3{,}5$ (cm). Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

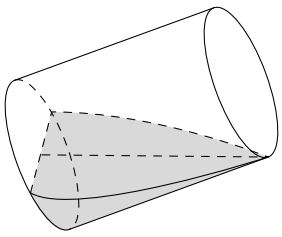


A. $\dfrac{395}{24}$ cm^3. **B.** $\dfrac{50}{3}$ cm^3. **C.** $\dfrac{125}{8}$ cm^3. **D.** $\dfrac{425}{24}$ cm^3.

Câu 188.

Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.





A. 240 cm^3. **B.** 240π cm^3.
C. 120 cm^3. **D.** 120π cm^3.

Câu 189. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h\,(t)$là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

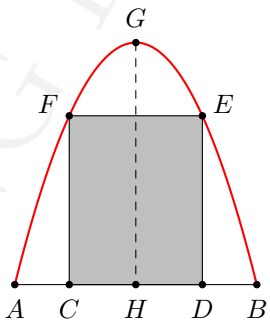
lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 48 giây. **C.** 2 giờ 38 giây. **D.** 2 giờ 46 giây.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 190 (Mức độ 3).

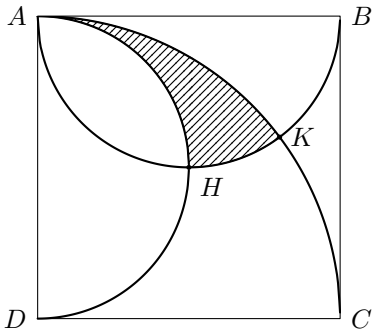
Một cái cổng hình parabol như hình bên. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0{,}9$ m. Người ta làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm với giá 1 200 000 đồng/m^2, phần còn lại làm khung hoa sắt với giá 900 000 đồng/m^2.



Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích hình chữ nhật $CDEF$ là 6 m^2.		
b) Diện tích phần khung hoa sắt là 4 m^2.		
c) Chi phí để làm phần khung hoa sắt là 3 triệu 600 nghìn đồng.		
d) Chi phí để làm cả hai phần gần bằng 11 445 000 đồng.		

Câu 191 (Mức độ 4).

Một bức tường lớn hình vuông $ABCD$ có kích thước 8 m $\times$ 8 m trước đại sảnh của một tòa biệt thự được sơn loại sơn đặc biệt. Người ta vẽ hai nửa đường tròn đường kính AD, AB cắt nhau tại H; đường tròn tâm D, bán kính AD cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Biết "tam giác cong" AHK được sơn màu xanh và các phần còn lại được sơn màu trắng (như hình vẽ) và một mét vuông sơn trắng, sơn xanh lần lượt có giá trị 1 triệu đồng và 1,5 triệu đồng.



Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích phần tam giác cong AHK gần bằng 6,26m^2.		
b) Số tiền sơn trắng phải trả gần bằng 60 triệu đồng.		
c) Số tiền sơn xanh phải trả gần bằng 10,5 triệu đồng.		
d) Số tiền phải trả để sơn bức tường trên (làm tròn đến hàng ngàn) là 67128000 (đồng).		

Câu 192 (Mức độ 2). Người ta tạo ra mô hình một quả trứng ngỗng bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$ và trục hoành với $-4{,}35 \le x \le 4{,}35$ quanh trục hoành. Xem thể tích mô hình này như bằng thể tích quả trứng ngỗng và x, y tính theo cen-ti-mét.

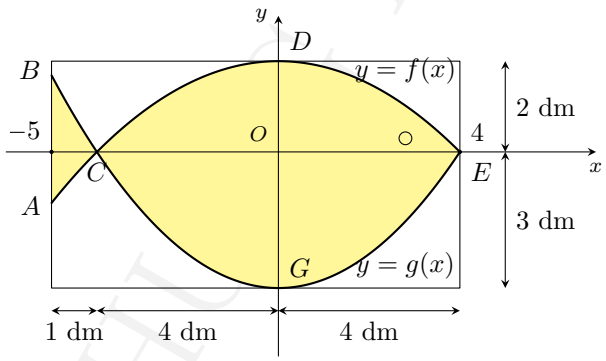
Phát biểu	Đ	S
a) Thể tích quả trứng gần bằng 153,24 cm^3.		
b) Công thức tính thể tích quả trứng là $V = \pi \int_{-4{,}35}^{4{,}35} \frac{1}{900}\left(7569 - 400x^2\right) \mathrm{d}x$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
c) Đổ đầy quả trứng bằng dung dịch ni-tơ lỏng cần dùng khoảng 0,15 lít dung dịch ni-tơ lỏng.		
d) Nếu sử dụng 20 lít dung dịch ni-tơ lỏng thì có thể đổ đầy 150 quả trứng được thiết kế theo kích thước như trên.		

Câu 193.

Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, hoạ sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình bên (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là dm).



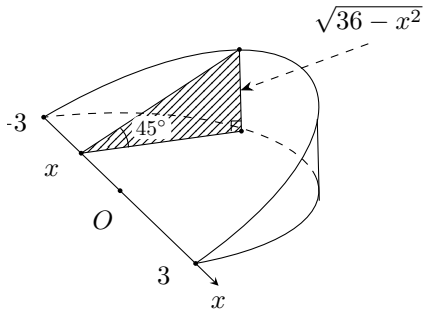
Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình parabol $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.		
b) Phương trình parabol $y = g(x) = \frac{3}{16}x^2 + 3$.		
c) Diện tích của logo là $\frac{1345}{48}$ dm^2.		
d) Nếu logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm 30,1% (kết quả đến hàng phần mười).		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 194 (Mức độ 2).

Khi cắt một vật thể hình chiếc nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(-3 \le x \le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{36-x^2}$ (dm) (hình bên). Tính thể tích của vật thể (đơn vị dm^3).

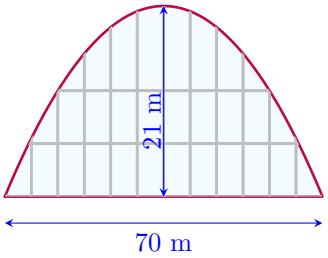
KQ: | | | | |



Câu 195 (Mức độ 3).

Người ta dự định lắp kính cho cửa của một vòm có dạng parabol. Hãy tính diện tích mặt kính (theo đơn vị m^2) cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m.

KQ: | | | | |



Câu 196 (Mức độ 3). Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

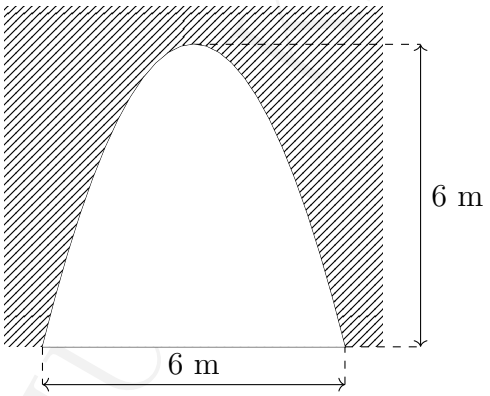
hàm số $y=\dfrac{1}{175}x^2+\dfrac{3}{35}x+5$ $(0\le x\le 30)$ (x, y tính theo cm) quay tròn quanh bệ gốm có trục trùng với trục hoành Ox. Để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng x cm^3 đất sét. Biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là 1 cm. Tính $\dfrac{x}{\pi}$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 197 (Mức độ 3).

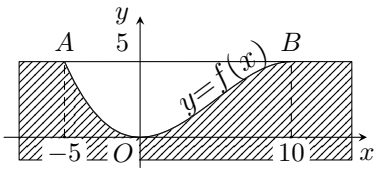
Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình bên. Tính diện tích của cửa hầm (theo đơn vị m^2).

KQ: ☐☐☐☐



Câu 198 (Mức độ 3).

Hình bên đây minh họa mặt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục tọa độ Oxy. Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình $y=f(x)=\dfrac{3}{100}\left(-\dfrac{1}{3}x^3+5x^2\right)$. Biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, diện tích mặt cắt đứng của mức nước trong con kênh là một phân số tối giản có dạng $\dfrac{a}{b}$ m^2, trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tìm a.



KQ: ☐☐☐☐

DẠNG 4 Ứng dụng vật lí của tích phân

Một vật chuyển động sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t là $y=v(t)$. Khi đó

- Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $a\le t\le b$ bằng $\displaystyle\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.
- Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $a\le t\le b$ bằng $\displaystyle\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 46 (Mức độ 1). Bạn Đăng Khoa ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t)=3t^2+5$ (m/s). Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

Ví dụ 47 (Mức độ 1). Một vật chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình vận tốc là $v=6+3t$ (m/s). Hỏi quãng đường vật đi được kể từ điểm $t_0=0$ (s) đến thời điểm $t_1=4$ (s) là bao nhiêu?

A. 40 m. **B.** 50 m. **C.** 48 m. **D.** 18 m.

Ví dụ 48 (Mức độ 1). Một vật chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình vận tốc là $v=6+2t$ (m/s). Hỏi quãng đường vật đi được kể từ điểm $t_0=0$ giây đến thời điểm $t_1=3$ giây là bao nhiêu?

A. 25 m. **B.** 27 m. **C.** 15 m. **D.** 18 m.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 49 (Mức độ 2). Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s).

a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$, tức là tính $\int_1^4 v(t)\mathrm{d}t$.

b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính $\int_1^4 |v(t)|\,\mathrm{d}t$.

Ví dụ 50 (Mức độ 2). Một vật chuyển động với vận tốc $v(x) = 30x - 3x^2$ (m/s), trong đó x là khoảng thời gian tính bằng giây.

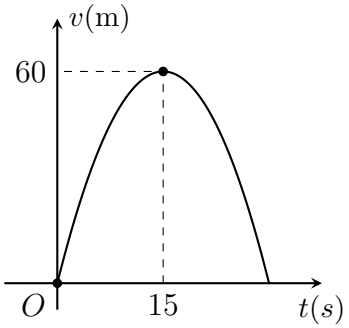
Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 1 đến giây thứ 5 là 236 m.		
b) Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 10 là 392 m.		
c) Quãng đường vật đó đi được trong 3 giây đầu tiên là 94 m.		
d) Quãng đường vật đó đi được từ lúc xuất phát đến khi dừng hẳn là 500 m.		

Ví dụ 51 (Mức độ 2). Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Hỏi rằng trong 3 (s) trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét? KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 52 (Mức độ 3).

Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong Parabol có hình bên. Biết rằng sau 15 s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 60 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

KQ: ☐☐☐☐



2 Bài tập tự luận

Bài 47 (Mức độ 1). Một vật chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình vận tốc là $v = 6 + 2t$ (m/s). Hỏi quãng đường vật đi được kể từ thời điểm $t_0 = 5$ giây đến thời điểm $t_1 = 7$ giây là bao nhiêu?

Bài 48 (Mức độ 1). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính bằng giây, quãng đường tính bằng mét. Tính từ lúc xuất phát đến thời điểm $t = 30$ s thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

Bài 49 (Mức độ 2). Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 36 - 4t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t = 3$ (s) đến khi dừng hẳn.

Bài 50 (Mức độ 2). Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Hỏi khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu mét?

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

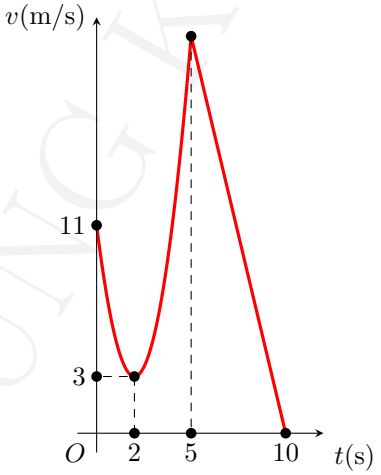
Bài 51 (Mức độ 2). Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 2t$ m/s với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết máy bay đạt vận tốc 120 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

Bài 52 (Mức độ 3).

Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường parabol khi $0 \le t \le 5$ (s) và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10$ (s) như đồ thị.

a) Viết công thức của hàm số $v(t)$ với $t \in [0; 10]$.

b) Tính quãng đường chất điểm di chuyển được trong 10 giây đầu tiên.



Bài 53 (Mức độ 2). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ m/s. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ s đến thời điểm $t = \dfrac{\pi}{12}$ s.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 199 (Mức độ 1). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t^2 + 4$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Tính quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 10.

A. 945 m. **B.** 994 m. **C.** 471 m. **D.** 1001 m.

Câu 200 (Mức độ 1). Một vật đang chuyển động thì tăng tốc với vận tốc $v(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 + 10$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc vật bắt đầu tăng tốc.

A. $\dfrac{4297}{3}$ m. **B.** $\dfrac{4304}{3}$ m. **C.** $\dfrac{4300}{3}$ m. **D.** $\dfrac{4301}{3}$ m.

Câu 201 (Mức độ 2). Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 12$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 18 m. **B.** 24 m. **C.** 0,24 m. **D.** 4 m.

Câu 202 (Mức độ 2). Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Hỏi rằng trong 3 s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 16 m. **B.** 130 m. **C.** 170 m. **D.** 45 m.

Câu 203 (Mức độ 2). Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trong thành phố thì các xe khi dừng lại phải cách nhau một khoảng tối thiểu là 1 m. Một xe máy di chuyển trên đường thì gặp đèn đỏ từ xa, người điều khiển xe máy đạp phanh và xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s). Hỏi để giữ khoảng cách an toàn, người điều khiển xe máy phải bắt đầu đạp phanh khi cách xe đang dừng phía trước tối thiểu một khoảng bao xa, biết rằng ngay lúc đạp phanh thì xe phía trước đang đứng yên?

A. 9 m. **B.** 10 m. **C.** 11 m. **D.** 12 m.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 204 (Mức độ 2). Một xe ô tô chuyển động với vận tốc tại giây thứ t là $v(t) = 4t^3 + 2t + 3$ (m/s).

Phát biểu	Đ	S
a) Từ lúc bắt đầu đến lúc $t = 3$ s, quãng đường ô tô đi được là 99 m.		
b) Từ lúc bắt đầu đến lúc $t = 5$ s, quãng đường ô tô đi được là 665 m.		
c) Trong khoảng thời gian từ $t = 1$ s đến $t = 4$ s, quãng đường ô tô đi được là 279 m.		
d) Trong khoảng thời gian từ $t = 6$ s đến $t = 7$ s, quãng đường ô tô đi được là 1121 m.		

Câu 205 (Mức độ 2). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 100 - 4t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây.

Phát biểu	Đ	S
a) Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 1 đến giây thứ 10 là 700 m.		
b) Quãng đường vật đó đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 15 đến giây thứ 20 là 150 m.		
c) Quãng đường vật đó đi được trong 5 giây đầu tiên là 350 m.		
d) Quãng đường vật đó đi được từ lúc xuất phát đến khi dừng hẳn là 1250 m.		

Câu 206 (Mức độ 3). Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p).

Phát biểu	Đ	S
a) Khi bắt đầu tiếp đất vật chuyển động được quãng đường là $s = 162$ m.		
b) Thời điểm vật tiếp đất là $t = 10$ phút.		
c) Tại thời điểm vật tiếp đất, vận tốc của khí cầu là $v = 9$ m/p.		
d) Tại thời điểm vật tiếp đất, gia tốc của khí cầu là $a = 8$ m/p^2.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 207 (Mức độ 1). Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính bằng giây, quãng đường tính bằng mét. Biết tại thời điểm $t = 2$ s thì vật đi được quãng đường 10 m. Tính từ lúc xuất phát đến thời điểm $t = 30$ s thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu mét? KQ: | | | | |

Câu 208 (Mức độ 2). Một tàu hỏa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh, từ đó tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 - 20t$ (m/s). Hỏi thời gian tàu đi được quãng đường 750 m (kể từ lúc bắt đầu đạp phanh) ít hơn bao nhiêu giây so với lúc tàu dừng hẳn?

KQ: | | | | |

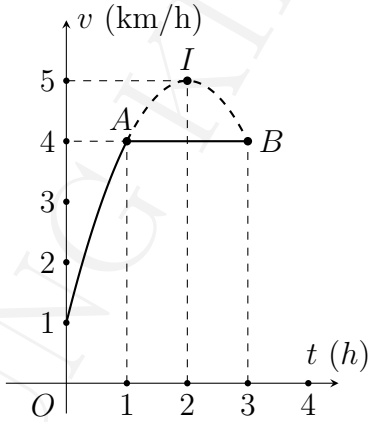
Câu 209 (Mức độ 3). Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ (m/s), người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ (m/s). Tính khoảng cách giữa hai xe khi đã dừng hẳn (đơn vị: mét). KQ: | | | | |

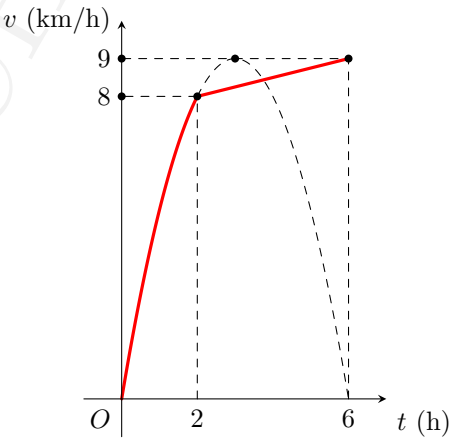
Câu 210 (Mức độ 3).

Vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường (km) mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần mười*) KQ: | | | | |



Câu 211 (Mức độ 3).

Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường parabol, trong khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng. Tính quãng đường s (km) mà vật di chuyển được trong 6 giờ đó. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*) KQ: | | | | |



TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 4

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(x;f(x))$ có hệ số góc là $3x^2-6x+2$. Tìm hàm số $y=f(x)$, biết đồ thị của nó đi qua điểm $(-1;1)$.

Bài 2. Tính

a) $\displaystyle\int\left(3x-\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int\left(7x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x,\ (x>0)$.

c) $\displaystyle\int\left(3^{2x}-1\right)^2\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int\left(2-3\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Bài 3. Tính

a) $\displaystyle\int_1^2\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2}\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_1^2\frac{xe^x+1}{x}\mathrm{d}x$.

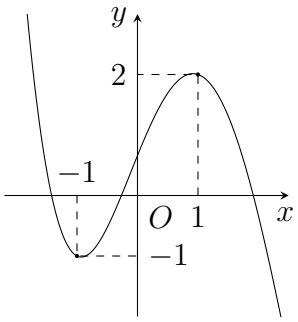
c) $\displaystyle\int_0^1\frac{8^x+1}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin^2x}{1-\cos^2x}\mathrm{d}x$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$. Biết $\displaystyle\int_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=4$; $\displaystyle\int_1^5f(x)\,\mathrm{d}x=6$; $\displaystyle\int_1^3f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $\displaystyle\int_0^5f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bài 5.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^1f'(x)\,\mathrm{d}x$.



Bài 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=\begin{cases}4-3x^2, & x<1\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$ Tính $f(2)-f(0)$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[3\cos x+2f'(x)\right]\mathrm{d}x=-5$; $f(0)=1$. Tính giá trị $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 8. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H.

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox.

Bài 9. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

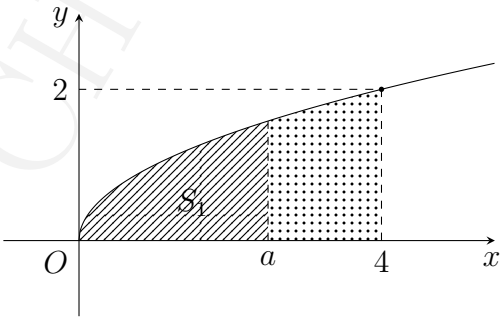
a) Tính diện tích S của hình phẳng H.

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox.

Bài 10. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 1 + x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$ quanh trục Ox.

Bài 11.

Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Đường thẳng $x = a$ $(0 < a < 4)$ chia D thành hai phần có diện tích bằng nhau như hình vẽ. Tính giá trị của a.



Bài 12. Một cột bê tông hình trụ có chiều cao 9 (m). Nếu cắt cột bê tông bằng mặt phẳng nằm ngang cách chân cột x (m) thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $1 - \dfrac{\sqrt{x}}{4}$ (m) với $0 \le x \le 9$. Tính thể tích của cột bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).

Bài 13. Một chiếc xe đang chuyển động với tốc độ $v_0 = 5$ (m/s) thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3$ (m/s^2).

a) Sau 5 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc, tốc độ của xe là bao nhiêu?

b) Tính quãng đường xe đi được trong 5 giây đầu kể từ khi tăng tốc.

Bài 14. Giả sử tốc độ tăng trưởng của một quần thể muỗi thoả mãn công thức $N'(t) = 0,2N(t)$, $0 \le t \le 5$, trong đó t là thời gian tính theo ngày, $N(t)$ là số cá thể muỗi tại thời điểm t. Biết rằng ban đầu quần thể muỗi có 2 000 cá thể.

a) Đặt $y(t) = \ln N(t)$, $0 \le t \le 5$. Chứng tỏ rằng $y'(t) = 0,2$. Từ đó, tìm $N(t)$ với $0 \le t \le 5$.

b) Tìm số lượng cá thể của quần thể muỗi sau 3 ngày (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

Bài 15. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3 - 2\sin t$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \dfrac{\pi}{4}$ (s).

Bài 16. Một xe ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 110 m. Người lái xe phải ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -20t + 40$ m/s, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $S(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

a) Lập công thức biểu diễn hàm số $S(t)$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là bao nhiêu giây?

c) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hăn là bao nhiêu mét? Xe ô tô có va chạm với chướng ngại vật trên đường hay không?

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM BỐN PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

1 Tính nguyên hàm bằng cách sử dụng bảng công thức

Câu 1. Biết rằng $f'(x) = 8x^3 - 4x + 2$ và $f(1) = 4$. Hàm số $f(x)$ là

A. $2x^4 - 2x^2 + x + 4$. **B.** $2x^4 - 2x^2 + 2x + 2$. **C.** $8x^4 - 4x^2 + x$. **D.** $8x^4 - 4x^2 + x + 4$.

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $(0;2)$ và $f'(x) = \cos x - \sin x$. Giá trị của $f(\pi)$ là

A. -1 . **B.** 1 . **C.** 4 . **D.** 0 .

Câu 3. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = 9^x \cdot \ln 9 + C$. **B.** $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{9^x}{2\ln 3} + C$.

C. $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{3^x}{\ln 3}\right)^2 + C$. **D.** $\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^{2x}}{\ln 3} + C$.

Câu 4. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

A. $f'(x) = F(x)$. **B.** $F(x) = f(x)$. **C.** $F'(x) = f(x)$. **D.** $F'(x) = f'(x)$.

Câu 5. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và số $k \in \mathbb{R}$. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.
3. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6. Tìm họ nguyên hàm $\int 3^x\,\mathrm{d}x$, ta được kết quả là

A. $\dfrac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $3^x \ln 3 + C$. **C.** $3^{x+1} + C$. **D.** $3^x + C$.

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A. $-\dfrac{\cos 3x}{3} + C$. **B.** $\dfrac{\cos 3x}{3} + C$. **C.** $-\dfrac{\sin 3x}{3} + C$. **D.** $-\cos 3x + C$.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 3x$ là

A. $F(x) = -6\sin 3x + C$. **B.** $F(x) = 6\sin 3x + C$.

C. $F(x) = -\dfrac{2}{3}\sin 3x + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{2}{3}\sin 3x + C$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2x) + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x| + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

Câu 10. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $2x + 4$. **B.** $\frac{x^3}{3} + 4x$. **C.** $\frac{x^3}{3} + 2x^2$. **D.** $\frac{x^3}{3} + 4$.

Câu 11. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào?

A. $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{\cos^2 x}$. **B.** $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$.

A. $\int (\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = -\cos x + x + C$. **B.** $\int (\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = \cos x - x + C$.

C. $\int (\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = \cos x + x + C$. **D.** $\int (\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = -\cos x - x + C$.

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

A. $3x^3 - \cos x + C$. **B.** $x^3 + \cos x + C$. **C.** $3x^3 + \cos x + C$. **D.** $x^3 - \cos x + C$.

Câu 14. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [4x + 1 - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4x + 1 - F(x) + C$. **B.** $I = 2x^2 + x - F(x)$.

C. $I = 2x^2 + x - F(x) + C$. **D.** $I = (2x^2 + x) \cdot F(x) + C$.

Câu 15. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x - 3}$ là

A. $2\ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\left(2x - \frac{3}{2}\right) + C$. **D.** $\frac{1}{4}\ln\left|2x - \frac{3}{2}\right| + C$.

Câu 16. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)^8$ là

A. $\frac{(2x-1)^9}{9} + C$. **B.** $\frac{(1-2x)^9}{18} + C$. **C.** $\frac{(2x-1)^9}{18} + C$. **D.** $\frac{(1-2x)^9}{9} + C$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6(3x-2)^2} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6(3x-2)^2} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3(3x-2)^2} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3(3x-2)^2} + C$.

Câu 18. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$ là

A. $\mathrm{e}^{5x}\ln 5$. **B.** $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C$. **C.** $5\mathrm{e}^{5x} + C$. **D.** e^{5x}.

Câu 19. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$. **B.** $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$. **C.** $84^x + C$. **D.** $84^x \cdot \ln 84 + C$.

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x+1}$ và $F(0) = 2$ thì $F(1)$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $2 + \ln 2$. **C.** 3. **D.** 4.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=27+\cos x$ và $f(0)=2019$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=27x+\sin x+1991$.
B. $f(x)=27x-\sin x+2019$.
C. $f(x)=27x+\sin x+2019$.
D. $f(x)=27x-\sin x-2019$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x)=x+\sin x$ và $f(0)=1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x$.
B. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x-2$.
C. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+2$.
D. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x+\dfrac{1}{2}$.

Câu 23. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x+\tan x+C$.
B. $-\cos x+\tan x-\sqrt{2}+1$.
C. $\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$.
D. $-\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$.

Câu 24. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+3}$ trên khoảng $(-3;+\infty)$ là

A. $\dfrac{x^2}{2}+2\ln(x+3)+C$.
B. $x+2\ln(x+3)+C$.
C. $\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+3)+C$.
D. $\dfrac{x^2}{2}-2\ln(x+3)+C$.

Câu 25. Cho biết $\displaystyle\int\dfrac{4x+1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=ax-\dfrac{b}{2}\ln(2x+3)+C$ với $x\in\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ (a, b là các tham số thực). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2a-b=-1$.
B. $2a-b=-3$.
C. $2a-b=9$.
D. $2a-b=7$.

Câu 26. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $\ln\dfrac{x-3}{x-1}+C$.
B. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-3}{x-1}+C$.
C. $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+3\right)+C$.
D. $\ln\left(x^2-4x+3\right)+C$.

Câu 27. Tìm họ nguyên hàm $I=\displaystyle\int\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

A. $\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$.
B. $\ln|x-1|+\ln|x-2|$.
C. $\ln(x-1)+\ln(x-2)+C$.
D. $\ln|x-1|-\ln|x-2|+C$.

Câu 28. Hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}$.

A. $\displaystyle\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.
B. $\displaystyle\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.
C. $\displaystyle\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$.
D. $\displaystyle\int\dfrac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

Câu 29. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ thì $\displaystyle\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$.
B. $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k\neq 0$).
C. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.
D. $\displaystyle\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x+1$ là

A. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$. **C.** $x^4+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $3x^2+C$.

Câu 31. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\dfrac{1}{x}$.

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$. **B.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$.

C. $\dfrac{x^3}{3}-3^x+\dfrac{1}{x^2}+C, C\in\mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{x^2}+C, C\in\mathbb{R}$.

Câu 32. Tìm họ nguyên hàm $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{4(2x+1)^2}+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{6(2x+1)^2}+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{4(2x+1)^3}+C$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{6(2x+1)^3}+C$.

Câu 33. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(3x+2)$ là

A. x^3+x^2+1. **B.** $3x^3+2x^2+1$. **C.** x^3+2x^2+1. **D.** x^3-x^2+1.

Câu 34. $\displaystyle\int\dfrac{3x^2+2x-3}{x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{x^3+x^2-3x}{x^3}+C$. **B.** $3x+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C$.

C. $\dfrac{3\left(x^3+x^2-3x\right)}{x^3}+C$. **D.** $3x+2\ln|x|+\dfrac{3}{x}+C$.

Câu 35. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2018x$.

A. $\dfrac{\cos 2018x}{2018}+C$. **B.** $-\dfrac{\cos 2018x}{2019}+C$.

C. $-\dfrac{\cos 2018x}{2018}+C$. **D.** $2018\cdot\cos 2018x+C$.

Câu 36. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $F(x)$ đi qua điểm $M\left(\dfrac{\pi}{6};0\right)$ thì $F(x)$ là

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\cot x$. **B.** $-\sqrt{3}+\cot x$. **C.** $\sqrt{3}-\cot x$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\cot x$.

Câu 38. Cho $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3x^2-4x+C$. Tìm $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$

A. $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^x 2x-4\mathrm{e}^x+C$.

C. $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=6\mathrm{e}^x+4x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=6\mathrm{e}^x-4x+C$.

Câu 39. $\displaystyle\int\left(3^x-\frac{1}{3^x}\right)^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{9^x}{2\ln 3}-\dfrac{1}{2\cdot 9^x\ln 3}-2x+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{3^x\ln 3}\right)^3+C$.

C. $\dfrac{9^x}{\ln 9}-2x+\dfrac{\ln 9}{9^x}+C$. **D.** $\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{\ln 3}{3^x}\right)^2+C$.

Câu 40. Giá trị m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^3}$, $f(-1)=2$, $f(1)=3$, $f'(1)=0$. Tính $a+2b$.

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 5. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 42. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+m-1$ thỏa mãn $F(0)=0$ và $F(3)=7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 43. Cho $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=a\ln|x-1|+b\ln|x+1|+C$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 44. Cho biết $\displaystyle\int\dfrac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Câu 45. Biết $\displaystyle\int(\sin 2x-\cos 2x)^2\,\mathrm{d}x=x+\dfrac{a}{b}\cos 4x+C$, với a, b là các số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=(x^2-6x+9)^{100}$ thỏa $F(3)=0$. Tập nghiệm của phương trình $F(x)=1$ có bao nhiêu phần tử?

A. 100. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 47. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\tan^2 x$ thỏa $F(0)=1$. Phương trình $F(x)+x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2020\pi)$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 1010.

Câu 48. Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2f^2(x)=(F(x)-1)\,f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1,b=4$. **B.** $a=1,b=-1$. **C.** $a=1,b\in\mathbb{R}\backslash\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$.

2 Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

Câu 49. Cho hàm số $f(x)=4\sqrt[3]{x}$. Giá trị của $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_8^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 45 . **B.** 80 . **C.** 15 . **D.** $18\sqrt[3]{3}-51$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=3x-1$. Biết rằng a là số thoả mãn $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=a\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$. Giá trị của a là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. 2 . **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 4 . **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 51. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(1;1)$ và có hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm $(x;f(x))$ là $1-4x$. Giá trị của $f(3)$ là

A. -12 . **B.** -13 . **C.** -15 . **D.** -30 .

Câu 52 (TN2020 - Mã đề 101). Biết $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_1^3 2f(x)\,\mathrm{d}x=3$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 53 (TN2020 -Mã đề 101). Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_1^2 (2+f(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\dfrac{13}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Câu 54. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2x+1}+3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $1+\ln\sqrt{3}$. **B.** $2+\ln 3$. **C.** $2+\ln\sqrt{3}$. **D.** $4+\ln 3$.

Câu 55. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I=F(\mathrm{e})-F(1)$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\mathrm{e}$.

Câu 56. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_0^1 (2019x^{2018}-1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2017}-1$. **D.** 1.

Câu 57. Với a,b là các tham số thực. Giá trị của tích phân $\displaystyle\int\limits_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. b^3-b^2a-b. **B.** b^3+b^2a+b. **C.** b^3-ba^2-b. **D.** $3b^2-2ab-1$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. -18. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

Câu 59. Nếu $\displaystyle\int\limits_{-2}^1 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x=3$ thì $\displaystyle\int\limits_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** -9. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 60. Nếu $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int\limits_1^2 [3f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=2$ thì $\displaystyle\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 11. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Tính $f(4)$.

A. 29. **B.** 9. **C.** 26. **D.** 5.

Câu 62. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-5$, khi đó $\int\limits_0^2 [3f(x)+4g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 29. **B.** -3. **C.** -11. **D.** 4.

Câu 63. Cho $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^{-1}[2f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-7$. **B.** $I=7$. **C.** $I=-14$. **D.** $I=14$.

Câu 64. Cho hai tích phân $\int\limits_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{-2}^5 g(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Tính $\int\limits_{-2}^5 [f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-11$. **B.** $I=13$. **C.** $I=27$. **D.** $I=3$.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 66. Có hai giá trị của số thực a là a_1 và a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a (2x-3)\,\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$.

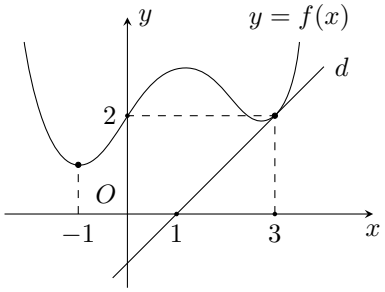
A. $T=26$. **B.** $T=12$. **C.** $T=13$. **D.** $T=28$.

Câu 67. Cho $I=\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2x+m}}\,\mathrm{d}x$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I\ge 1$.

A. $0<m\le\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $\dfrac{1}{8}\le m\le\dfrac{1}{4}$.

Câu 68.

Cho hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=-1$ và có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f(x)$ như hình bên. Biết rằng đường thẳng d là một tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=3$. Tính $\int\limits_{-1}^3 f''(x)\mathrm{d}x$.



A. 0. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 69. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)+1$ chia hết cho $(x-1)^2$ và $f(x)-1$ chia hết cho $(x+1)^2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. 5. **B.** 7. **C.** $-\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I=\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\displaystyle\int\limits_0^3 (\mathrm{e}^{1+\ln f(x)}+4)\,\mathrm{d}x$ là

A. $14+3\mathrm{e}$. **B.** $4\mathrm{e}+14$. **C.** $12+4\mathrm{e}$. **D.** $3\mathrm{e}+12$.

Câu 71. Cho biết $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

A. $a+b=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b=\dfrac{3}{2}$. **C.** $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a+b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 72. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+b=2$.

Câu 73. Cho $\displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{x+2}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+3\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=2a-b$.

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\dfrac{15}{2}$. **D.** $P=\dfrac{15}{2}$.

Câu 74. Cho tích phân $\displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b+c$.

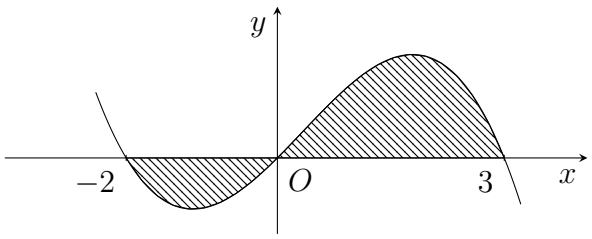
A. $S=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $S=-\dfrac{7}{6}$. **C.** $S=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{7}{6}$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)=\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{x}} \left(4t^3-8t\right)\mathrm{d}t$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;6]$. Tính $M-m$.

A. 16. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 9.

Câu 76.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục Ox nằm phía trên và phía dưới trục Ox lần lượt là 3 và 1. Khi đó $\displaystyle\int\limits_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



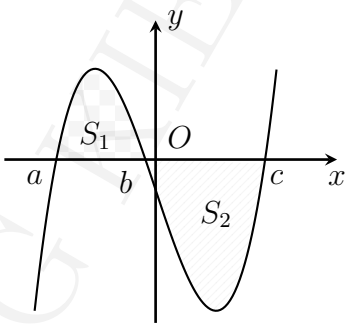
A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 77. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{2abx+a+b}{(1+ax)(1+bx)}\,\mathrm{d}x=0$. Giá trị của $S=ab+a+b$ bằng

A. $S=0, S=1$. **B.** $S=-2, S=0$. **C.** $S=1, S=-2$. **D.** $S=-2, S=1$.

Câu 78.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $a, b, c (a<b<c)$. Biết phần hình phẳng nằm phía trên trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_1=\dfrac{7}{10}$, phần hình phẳng nằm phía dưới trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_2=2$ (như hình vẽ). Tính $I=\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.



A. $I=-\dfrac{13}{10}$. **B.** $I=\dfrac{13}{10}$. **C.** $I=\dfrac{27}{10}$. **D.** $I=-\dfrac{27}{10}$.

3 Tích phân hàm ẩn

Câu 79. Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=32$. Tính tích phân $J=\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $J=64$. **B.** $J=8$. **C.** $J=32$. **D.** $J=16$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2018$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 f\left(3x+2\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6054$. **B.** $I=6056$. **C.** $I=\dfrac{2018}{5}$. **D.** $I=\dfrac{2018}{3}$.

Câu 81. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=7$. Tính $I=\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$

A. $I=a+b+7$. **B.** $I=a+b-7$. **C.** $I=7-a-b$. **D.** $I=7$.

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. **B.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. **C.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. **D.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=8$.

Câu 83. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f\left(\ln x^3\right)}{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 9. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 6.

Câu 84. Biết $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, tính $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 85. Nếu $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{x}\ln^2 x \cdot f(\ln x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ thì tích phân $I = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\ln 2} f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int\limits_1^2 \dfrac{2x+f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^2 f(4x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-2}^2 f\left(3|x|+2\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{20}{3}$. **B.** $I = 20$. **C.** $I = \dfrac{40}{3}$. **D.** 40.

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và thoả mãn $\int\limits_1^3 \left[3x^2 - 2f'(x)\right]\,\mathrm{d}x = 4$; $f(1) = -2$. Giá trị $f(3)$ là

A. 9 . **B.** 11 . **C.** -13 . **D.** 19 .

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;4]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f\left(|3x-1|\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = \dfrac{4}{3}$. **D.** $I = 1$.

Câu 90. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int\limits_{-1}^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 11$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 14$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2) = 3x-1$. Tính $I = \int\limits_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{135}{4}$. **B.** $\dfrac{125}{4}$. **C.** $\dfrac{105}{4}$. **D.** $\dfrac{75}{4}$.

Câu 92. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}$ và $f(1) = 2$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Tính $\int\limits_0^1 \Big[f(x)+2\Big]\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{13}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{13}{3}$.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2)=3$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int\limits_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=6$. **D.** $I=0$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3)=21$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf'(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=15$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=12$. **B.** $I=112$. **C.** $I=28$. **D.** $I=144$.

Câu 96. Cho hàm $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Khi đó $\int\limits_0^1 x^3f'(x^2)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(2018)=2$ và $\int\limits_2^{1011} f(2x-4)\,\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int\limits_0^{2018} x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4037$. **B.** $I=4036$. **C.** $I=4034$. **D.** $I=4035$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^2 x(f'(x)-1)\,\mathrm{d}x=2f(2)$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=6$, $\int\limits_0^1 (2x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -3. **B.** -9. **C.** 3. **D.** 6.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ có $f(7)=15$ và $f'(x)=\dfrac{x+1}{x+2-\sqrt{x+2}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{271}{6}$. **B.** $\dfrac{347}{6}$. **C.** $\dfrac{287}{6}$. **D.** 7.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=10$ và $f(0)=3$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-7$. **B.** $I=13$. **C.** $I=7$. **D.** $I=-13$.

Câu 102. Cho $\displaystyle\int_3^8 f(x+1)\,\mathrm{d}x=10$. Tính $J=\displaystyle\int_0^1 f(5x+4)\,\mathrm{d}x$.

A. $J=4$. **B.** $J=10$. **C.** $J=32$. **D.** $J=2$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, có $f(2)=14$ và $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=14\ln 2-6$. **B.** $I=7\ln 2-6$. **C.** $I=7\ln 2-6$. **D.** $I=14\ln 2+6$.

Câu 104. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0)\cdot f'(2)\neq 0$ và $g(x)\cdot f'(x)=x(x-2)\mathrm{e}^x$. Tính $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-4$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2-\mathrm{e}$.

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3xf(x^2)-f(x)=9x^3-1$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Câu 106. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{ khi } x\geq 2\\ 4x-3, \text{ khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\ln 5}\mathrm{e}^{2x}f'\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 126. **B.** 84. **C.** 63. **D.** 42.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)>0$, $\forall x\in[1;2]$ và có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$. Biết $f(2)=20$ và $\displaystyle\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln 2$. Tính giá trị của $f(1)$.

A. $f(1)=10$. **B.** $f(1)=20$. **C.** $f(1)=-10$. **D.** $f(1)=0$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $3f'(x)+2f^2(x)=0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0)=1$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=\mathrm{e}^4$. Khi đó $f(1)$ bằng

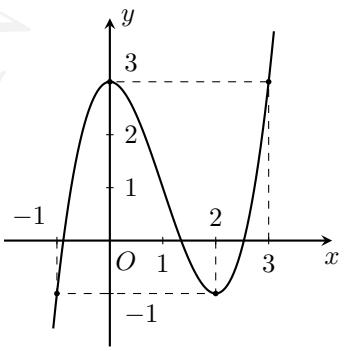
A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}$. **B.** e. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **D.** e^2.

Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f(1)=1$ và $f(x)=xf'(x)+\ln x$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của $f(\mathrm{e})$ bằng

A. e. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 111.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 f'(2x-1)\,\mathrm{d}x$.



A. $I=-2$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2$.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=2x\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=0$, tính $I=\displaystyle\int_1^4 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{22}{3}$. **B.** $I=\dfrac{20}{3}$. **C.** $I=\dfrac{8}{3}$. **D.** $I=\dfrac{14}{3}$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3)<2$. **B.** $2<f(3)<4$. **C.** $f(3)>6$. **D.** $4<f(3)<6$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ với $f(x)\neq 0,\forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

A. $\mathrm{e}+1$. **B.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}$.

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x+2x\cdot f(x)=[f'(x)]^2$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính $I=\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1186}{45}$. **B.** $I=\dfrac{1174}{45}$. **C.** $I=\dfrac{1222}{45}$. **D.** $I=\dfrac{1201}{45}$.

Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$, với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2018\cdot 2021}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2019\cdot 2020}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2019\cdot 2021}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2018\cdot 2019}$.

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

và $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{7}$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x$ bằng

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $-\dfrac{7}{10}$.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 80$, $\int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -5. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** 5.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{30}$, $\int\limits_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{30}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{30}$. **B.** $\dfrac{11}{30}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

4 Diện tích hình phẳng

Câu 120. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \mathrm{e}^x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=\ln 4$ là

A. 1 . **B.** 3 . **C.** $2\ln 2 - 1$. **D.** $3 - 4\ln 2$.

Câu 121. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, trục Oy, đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $x=2$ được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int\limits_2^0 |f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^2 |f(x)-2|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^2 |f(x)|\mathrm{d}x$.

Câu 122. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \pi\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \pi\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 123. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 124. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=4$, $x=-1$, $x=2$ là

A. 4. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{17}{4}$.

Câu 125. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=\sin x, y=\cos x$ và các đường thẳng $x=0, x=\pi$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $-2\sqrt{2}$.

TRS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 126. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x$, trục hoành, $x = -3$ và $x = 4$.

A. 36. **B.** 44. **C.** $\dfrac{201}{4}$. **D.** $\dfrac{119}{4}$.

Câu 127. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 128. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = 4x$ được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} (4x - x^3)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 129. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và trục hoành.

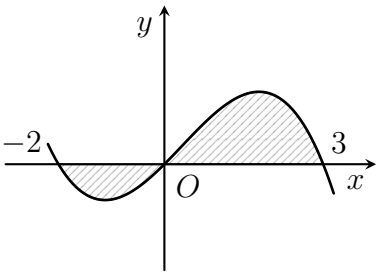
A. $S = \dfrac{27}{4}$. **B.** $S = \dfrac{27\pi}{4}$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 1$.

Câu 130. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$ là

A. $S = \dfrac{9}{4}$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}$. **C.** $S = \dfrac{7}{3}$. **D.** $S = \dfrac{37}{12}$.

Câu 131.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (*phần gạch sọc của hình vẽ bên*) là

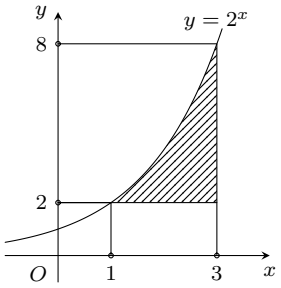


A. $S = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 132.

Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng



A. $\displaystyle\int_{3}^{1} 2^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{1}^{3} 2^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_{3}^{1} (2^x - 2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{1}^{3} (2^x - 2)\,\mathrm{d}x$.

Câu 133. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x$ và $x + y = -2$ là

A. $\dfrac{6}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 134. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^5$ bằng

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = \dfrac{1}{6}$. **D.** $S = \dfrac{1}{3}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

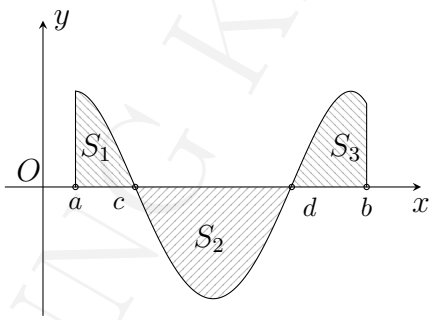
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 135. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

A. $3 + \ln 2$. **B.** $3 - \ln 2$. **C.** $3 + 2\ln 2$. **D.** $3 - 2\ln 2$.

Câu 136.

Tổng diện tích $S = S_1 + S_2 + S_3$ trong hình vẽ được tính bằng tích phân nào sau đây?



A. $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

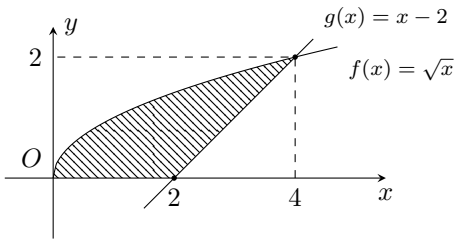
D. $S = \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 137. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 138.

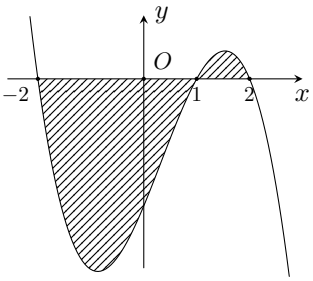
Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S = \dfrac{8}{3}$. **B.** $S = \dfrac{10}{3}$. **C.** $S = \dfrac{11}{3}$. **D.** $S = \dfrac{7}{3}$.

Câu 139.

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Biết $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = b$. Tính diện tích S của phần hình phẳng được tô đậm.



A. $S = -a - b$. **B.** $S = a + b$. **C.** $S = b - a$. **D.** $S = a - b$.

Câu 140. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 141. Diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = -x + 3$, $y = 1$ bằng

A. $\dfrac{1}{\ln 2} + 3$. **B.** $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\ln 2} + 1$. **D.** $\dfrac{1}{\ln 2} + 2$.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 142. Cho hình D giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$. Khi đó diện tích của hình D là

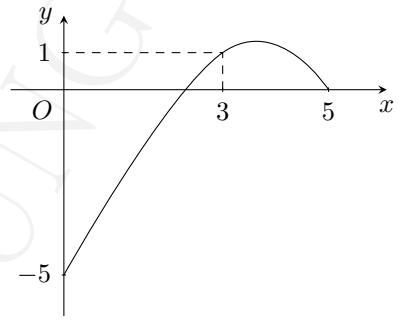
A. $\dfrac{13}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{13\pi}{3}$.

Câu 143. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $(P)\colon y = |x^2-4x+3|$, $d\colon y = x+3$.

A. $\dfrac{109}{3}$. **B.** $\dfrac{109}{6}$. **C.** $\dfrac{125}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{3}$.

Câu 144.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên. Tìm mệnh đề đúng



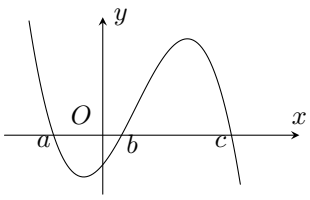
A. $f(0) = f(5) < f(3)$. **B.** $f(3) < f(0) = f(5)$.
C. $f(3) < f(0) < f(5)$. **D.** $f(3) < f(5) < f(0)$.

Câu 145. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \displaystyle\int_0^2 \pi \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_0^2 \pi \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $S = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 146.

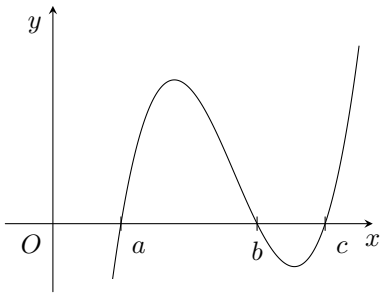
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $f(a) > f(b) > f(c)$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.
C. $f(c) > f(a) > f(b)$. **D.** $f(b) > f(a) > f(c)$.

Câu 147.

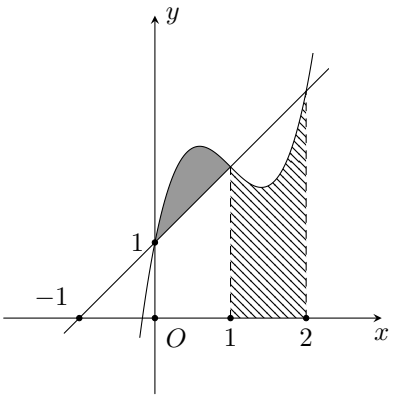
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm, biết $f(a) > 0$?



A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 148.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d\colon g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ. Nếu diện tích phần tô bằng $\dfrac{1}{2}$, thì diện tích phần gạch bằng



A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 149. Hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon x^2-x-6$ và trục Ox có diện tích bằng

A. $\dfrac{95}{6}$. **B.** $\dfrac{-95}{6}$. **C.** $\dfrac{-125}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Câu 150. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ có diện tích bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

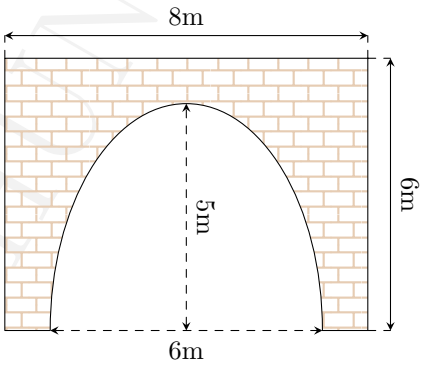
Câu 151 (TN — 2020). . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Câu 152.

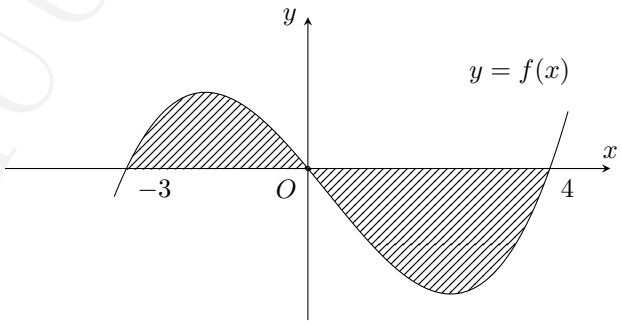
Một cái cổng có dạng như hình vẽ, với chiều cao 6m và chiều rộng là 8m. Mái vòm của cổng có hình bán elip với chiều rộng là 6m, điểm cao nhất của mái vòm là 5m (tham khảo hình vẽ). Người ta muốn lát gạch hoa để trang trí cho cổng với chi phí là 250.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền cần chi trả gần nhất với số nào sau đây?

A. 6.110.000. **B.** 6.100.000. **C.** 6.210.000. **D.** 6.145.000.



Câu 153.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch trong hình) là



A. $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_{0}^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 154. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 1.

Câu 155. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $\dfrac{937}{12}$. **B.** $\dfrac{343}{12}$. **C.** $\dfrac{793}{4}$. **D.** $\dfrac{397}{4}$.

Câu 156. Diện tích hình phẳng H được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^3-2x-1$ và $y=2x-1$ được tính theo công thức

A. $S=\displaystyle\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

C. $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 157. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ và trục Ox.

A. $S=\dfrac{9}{4}$. **B.** $S=\dfrac{9}{8}$. **C.** $S=\dfrac{9}{2}$. **D.** $S=\dfrac{11}{4}$.

Câu 158. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(H)\colon y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục toạ độ là

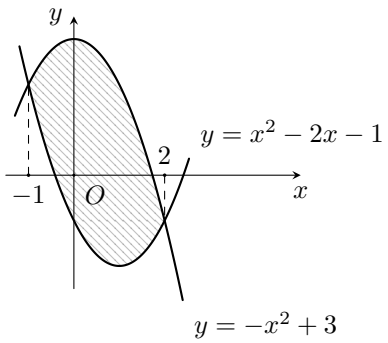
A. $\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $2\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Câu 159. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ và $y=x^2+x-4$.

A. $S=\dfrac{253}{12}$. **B.** $S=\dfrac{125}{12}$. **C.** $S=\dfrac{16}{3}$. **D.** $S=\dfrac{63}{4}$.

Câu 160.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 161. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x=\mathrm{e}$.

A. $S=\dfrac{\mathrm{e}^2+3}{4}$. **B.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2}$. **D.** $S=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Câu 162. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^2$ và $y=|x-2|$ bằng

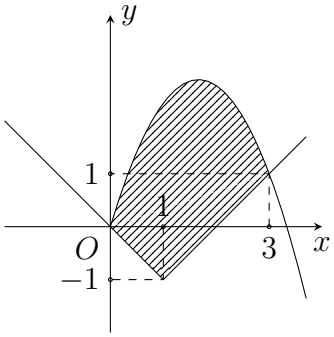
A. $\dfrac{13}{2}$. **B.** $\dfrac{21}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 163. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=x^2$ và $y=2-|x|$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

Câu 164.

Cho H là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\dfrac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của H bằng



A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{6}$. **D.** $\dfrac{14}{3}$.

Câu 165. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y=x^3-3x^2$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $S=\dfrac{5}{4}$. **B.** $S=\dfrac{81}{4}$. **C.** $S=108$. **D.** $S=\dfrac{43}{2}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 166. Gọi (H) là hình giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ và trục hoành. Diện tích của hình (H) bằng

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $2-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

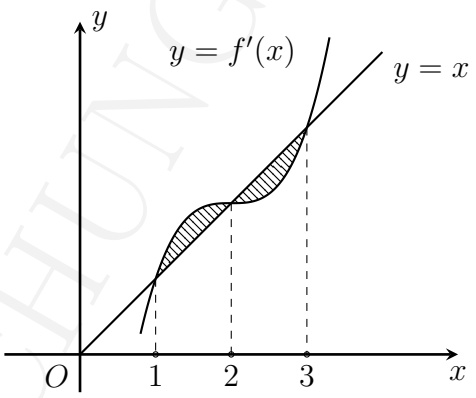
Câu 167. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x^2+2mx+m^2+1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=\sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $m\in(-4;-1)$. **B.** $m\in(3;5)$. **C.** $m\in(0;3)$. **D.** $m\in(-2;1)$.

Câu 168.

Cho hàm $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x$ (phần gạch chéo trong hình vẽ bên). Diện tích hình (H) bằng

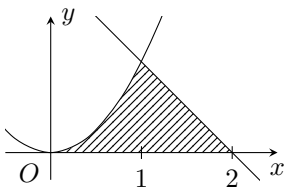
A. $2f(2)-f(1)-f(3)+1$. **B.** $f(3)-f(1)-4$.
C. $2f(3)-f(2)-f(1)+1$. **D.** $f(1)-f(3)+4$.



Câu 169.

Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y=x^2$, đường thẳng $y=-x+2$ và trục hoành trên đoạn $[0;2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ).

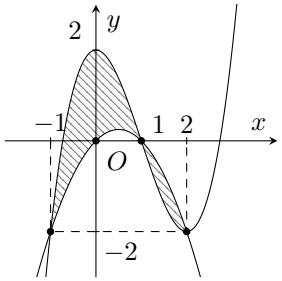
A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.



Câu 170.

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng

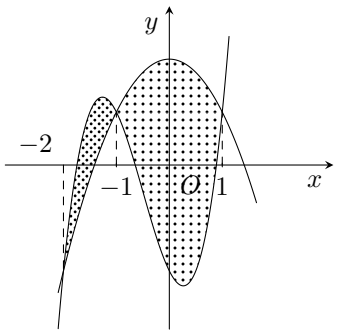
A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.



Câu 171.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.



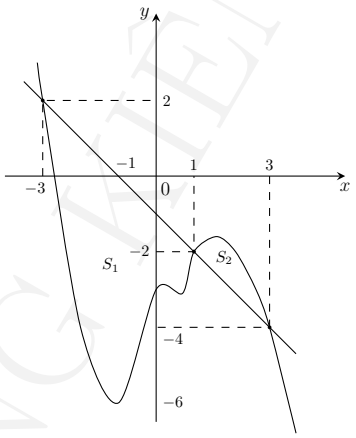
Câu 172. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x_A=a$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d) và (C) bằng $\dfrac{27}{4}$, các giá trị của a thỏa mãn đẳng thức nào?

A. $2a^2-2a-1=0$. **B.** $a^2-2a=0$. **C.** $a^2-a-2=0$. **D.** $a^2+2a-3=0$.

Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 173.

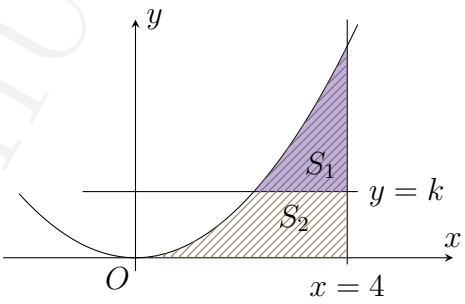
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=-x-1$ lần lượt là M, m. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.



A. $6+m-M$. **B.** $6-m-M$. **C.** $M-m+6$. **D.** $m-M-6$.

Câu 174.

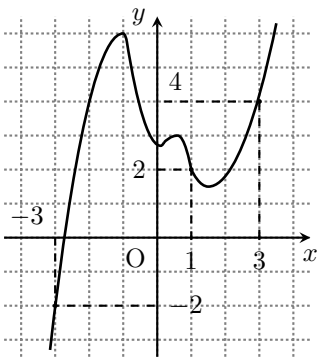
Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A. $k=8$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=3$.

Câu 175.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$. **B.** $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(1)$.

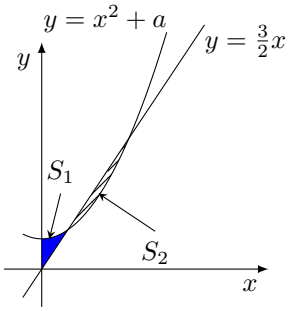
C. $\max\limits_{[-3;3]} g(x)=g(3)$. **D.** Không tồn tại $\min\limits_{[-3;3]} g(x)$.

Câu 176. Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là (P), trên (P) có hai điểm A,B với hoành độ lần lượt là a,b. Biết rằng $AB=3\sqrt{2}$ và diện tích hình phẳng tạo bởi (P) với đường thẳng AB bằng $\sqrt{6}$. Giá trị của a^2+b^2 là

A. 4. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 177.

Cho đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{20}\right)$.

C. $\left(\dfrac{9}{20};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 178 (THPT Quốc gia năm 2021 – lần 2).

Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

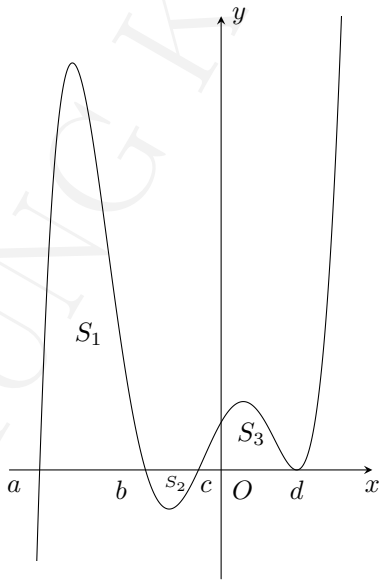
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

$y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{64}{9}$. **D.** $\dfrac{71}{6}$.

Câu 179.

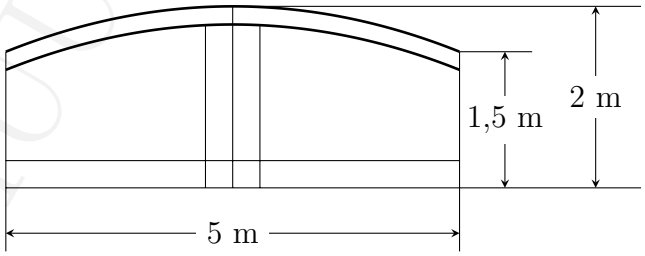
Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ d. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành, biết $S_1 > S_3 > S_2$ (hình vẽ). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$.



A. $\min f(x) = f(a)$. **B.** $\min f(x) = f(b)$.
C. $\min f(x) = f(c)$. **D.** $\min f(x) = f(d)$.

Câu 180.

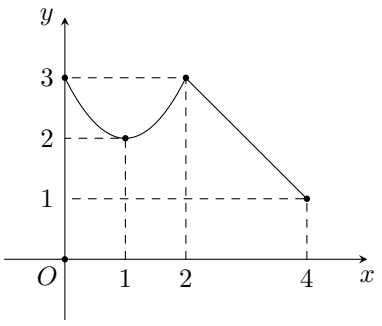
Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là



A. 6500. **B.** $\dfrac{55}{6} \cdot 10^3$.
C. 5600. **D.** 6050.

Câu 181.

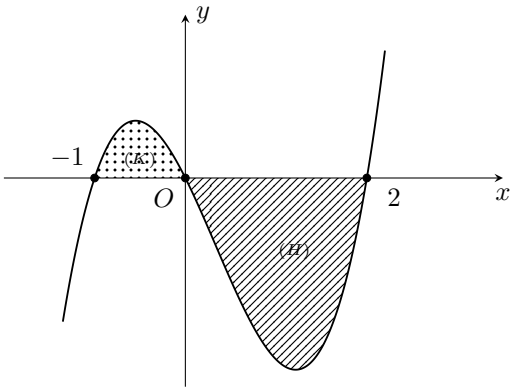
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ và có đồ thị gồm một phần parabol hợp với một đoạn thẳng như hình vẽ bên. Tính $I = \displaystyle\int_0^4 \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x$.



A. $I = 4$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = -2$.

Câu 182.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng (K), (H) lần lượt là $\dfrac{5}{12}$ và $\dfrac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \dfrac{19}{12}$, tính $f(2)$.

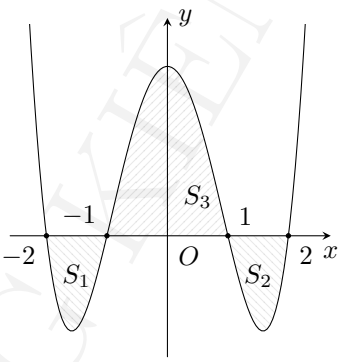


A. $f(2) = \dfrac{11}{6}$. **B.** $f(2) = -\dfrac{2}{3}$.
C. $f(2) = 3$. **D.** $f(2) = 0$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 183.

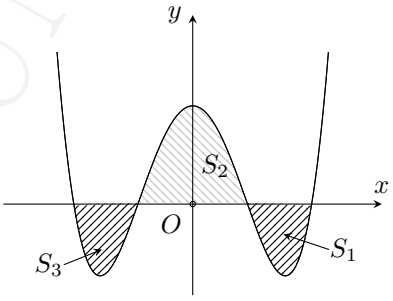
Cho đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích $S_1 = S_2 = 2$ và $S_3 = 6$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ là



A. $I = 4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 8$.

Câu 184.

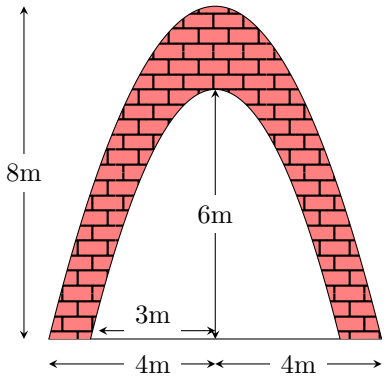
Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là



A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $-\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 185.

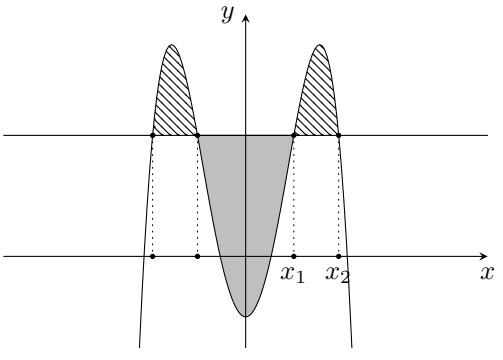
Để chào mừng xã đạt chuẩn nông thôn mới. Uỷ ban nhân dân xã X tiến hành ốp gạch trang trí **hai bên bề mặt cổng chào** vào xã. Cổng chào được thiết kế như hình bên với các đường viền cổng là dạng đường parabol. Biết rằng tiền vật liệu cho một mét vuông bề mặt cổng bằng 1.000.000 đồng và tiền công thợ cho một mét vuông là 200.000 đồng. Tổng kinh phí trang trí cổng chào bằng



A. 40.500.000 đồng. **B.** 81.000.000 đồng.
C. 22.400.000 đồng. **D.** 44.800.000 đồng.

Câu 186.

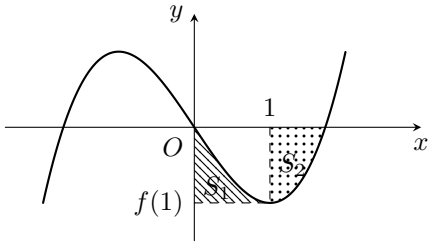
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt (như hình vẽ) với $x_2 = 2x_1$. Gọi S_1 là diện tích phần hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho; S_2 là tổng diện tích hai hình phẳng nằm phía trên đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{19}{8}$. **B.** $\dfrac{30}{11}$. **C.** $\dfrac{19}{11}$. **D.** $\dfrac{30}{19}$.

Câu 187.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $f(x) + 1$ và $f(x) - 1$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích như trong hình bên. Tính $2S_2 + 8S_1$.



A. 4. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 9.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

5 Thể tích khối tròn xoay

Câu 188. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ quay quanh trục hoành là

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_b^u f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 189. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x\sqrt{x}$; $y=0$;$x=0$; $x=1$ xoay quanh trục Ox là

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 190. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$. Quay (H) quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\displaystyle\int_1^2 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_1^2 \left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-3x+2\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 \left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Câu 191. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Câu 192. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và các đường thẳng $y=0$; $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 193. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\dfrac{81\pi}{10}$ (đvtt). **B.** $\dfrac{41\pi}{7}$ (đvtt). **C.** $\dfrac{8\pi}{7}$ (đvtt). **D.** $\dfrac{85\pi}{10}$ (đvtt).

Câu 194. Thể tích V của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và đường thẳng $x=1$ khi quay quanh trục Ox là

A. $V=\dfrac{9}{15}$. **B.** $V=\dfrac{8\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{8}{15}$. **D.** $V=\dfrac{9\pi}{15}$.

Câu 195. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=a$ $(a>0)$. Giá trị của a sao cho thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng 57π là

A. $a=3$. **B.** $a=5$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Câu 196. Tính thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\dfrac{31\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{34\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Câu 197. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox.

A. $\dfrac{32\pi}{7}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{22\pi}{5}$.

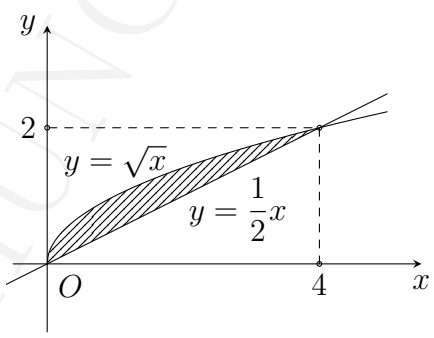
Câu 198. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{4}{x}$ và đường thẳng $(d)\colon y = 5 - x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $V = 51\pi$. **B.** $V = 33\pi$. **C.** $V = 9\pi$. **D.** $V = 18\pi$.

Câu 199.

Cho hình phẳng A giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \dfrac{1}{2}x$ (phần gạch sọc trong hình vẽ). Tính thể tích V khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A xung quanh trục Ox.

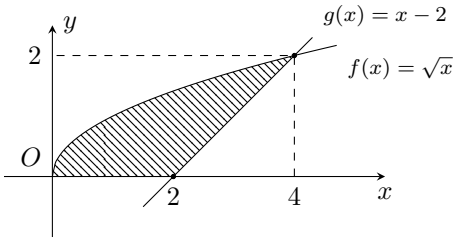
A. $V = \dfrac{8}{3}\pi$. **B.** $V = \dfrac{8}{5}\pi$. **C.** $V = 0{,}533$. **D.** $V = 0{,}53\pi$.



Câu 200.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Quay (H) xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

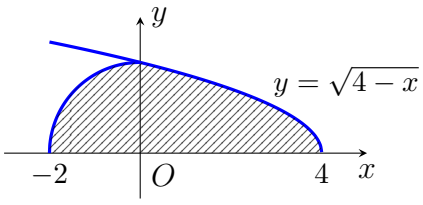
A. $\dfrac{10\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.



Câu 201.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\dfrac{1}{4}$ đường tròn tâm O bán kính bằng 2, đường cong $y = \sqrt{4 - x}$ và trục hoành (miền gạch sọc như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox.

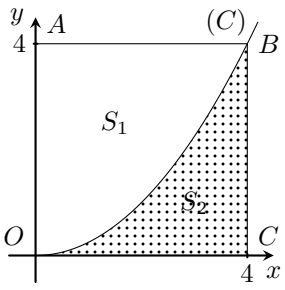
A. $V = \dfrac{77\pi}{6}$. **B.** $V = \dfrac{53\pi}{6}$. **C.** $V = \dfrac{67\pi}{6}$. **D.** $V = \dfrac{40\pi}{3}$.



Câu 202.

Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1 là phần hình phẳng không bị gạch chéo (hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng S_1 xung quanh trục Ox.

A. $V = \dfrac{128\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{128\pi}{5}$. **C.** $V = \dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{256\pi}{5}$.



Câu 203. Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{64\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi^2}{3}$.

Câu 204. Cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$, $x = 3$. Cắt vật thể đã cho bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x, $1 \le x \le 3$ ta được thiết diện có diện tích bằng

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

$3x^2+2x$. Thể tích của vật thể đã cho là

A. $V=42\pi$. **B.** $V=42$. **C.** $V=34$. **D.** $V=34\pi$.

Câu 205. Cho một vật thể (T), gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{2}$. Cắt vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (với $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$) thiết diện thu được là một nửa hình tròn có bán kính bằng $\sin x$. Tính thể tích V của vật thể B.

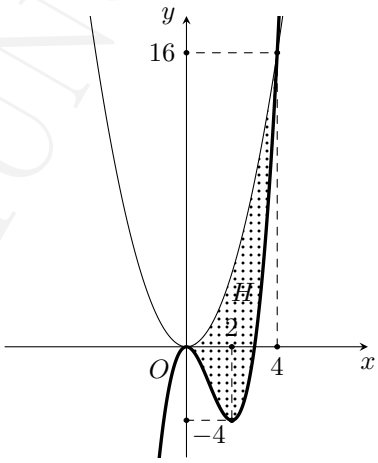
A. $V=\dfrac{\pi^2}{8}$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{8}$. **C.** $V=\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $V=\dfrac{\pi^2}{4}$.

Câu 206.

Cho hình H giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc hai (nét mảnh) và đồ thị hàm số bậc ba (nét đậm) như hình vẽ. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình H quanh trục Ox là

A. $\dfrac{1024}{35}\pi$. **B.** $\dfrac{4096}{35}$.

C. $\dfrac{5017}{35}\pi$. **D.** $\dfrac{4096}{35}\pi$.

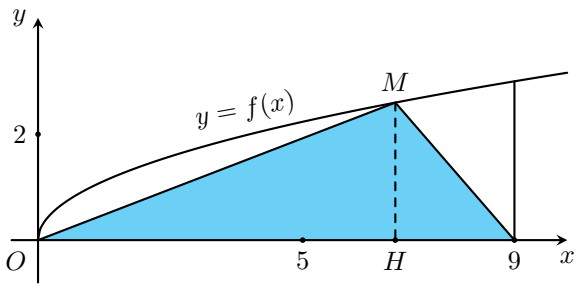


Câu 207. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{2x}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{28\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{36\pi}{35}$.

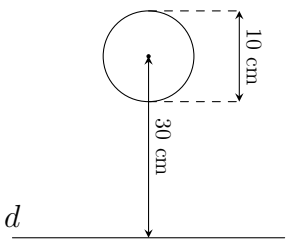
Câu 208.

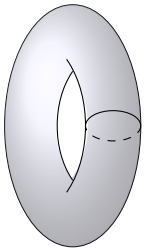
Cho đồ thị $(C)\colon y=f(x)=\sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x=9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1=2V_2$, tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S=\dfrac{4}{3}$.

Câu 209. Người ta làm một chiếc phao bơi như hình vẽ (với bề mặt có được bằng cách quay đường tròn $(\mathscr{C})$ quanh trục d).





ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Biết rằng khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến trục d bằng 30 cm và đường tròn (C) có bán kính bằng 5 cm. Tính thể tích V của chiếc phao.

A. $V = 1500\pi^2\,\text{cm}^3$. **B.** $V = 9000\pi^2\,\text{cm}^3$. **C.** $V = 1500\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $V = 9000\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 210. Thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1, x = 2$ và có thiết diện tại $x\,(1 < x < 2)$ là hình chữ nhật có cạnh là 2 và $\sqrt{2x+1}$ và được cho bởi công thức nào sau đây?

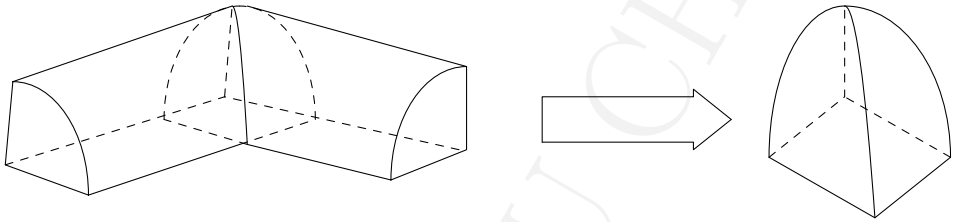
A. $V = \pi \displaystyle\int_1^2 (8x+4)\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \displaystyle\int_1^2 (8x+4)\,\mathrm{d}x$.

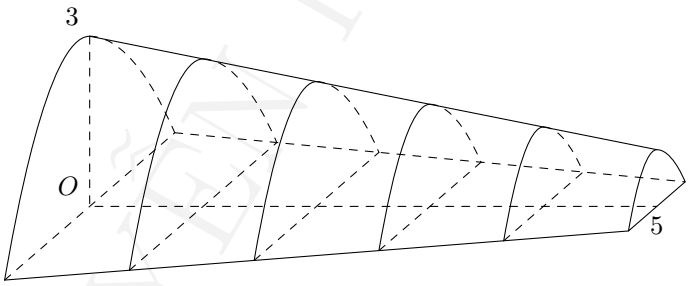
D. $V = \displaystyle\int_1^2 2\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Câu 211. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ đều có bán kính $R = a$, biết hai trục hình trụ vuông góc với nhau (*hình vẽ dưới*). Tính thể tích V của khối (H).



A. $V_{(H)} = \dfrac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)} = \dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)} = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)} = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Câu 212. Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \dfrac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

6 Bài toán chuyển động

Câu 213. Một ô-tô đang chạy thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô-tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô-tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. **B.** 25 m. **C.** 60 m. **D.** 15 m.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 214. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 m/s rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

A. 100 m. **B.** 75 m. **C.** 200 m. **D.** 125 m.

Câu 215. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 25 m. **B.** $\frac{44}{5}$ m. **C.** $\frac{25}{2}$ m. **D.** $\frac{45}{4}$ m.

Câu 216. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều và sau đúng 4 giây thì ô tô bắt đầu dừng hẳn. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 20. **B.** 50. **C.** 40. **D.** 30.

Câu 217. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S = 96{,}25$ (m). **B.** $S = 87{,}5$ (m). **C.** $S = 94$ (m). **D.** $S = 95{,}7$ (m).

Câu 218. Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn 72 km/h, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là 72 km/h, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ 72 km/h, ô tô đã di chuyển quãng đường là bao nhiêu mét?

A. 100 m. **B.** 150 m. **C.** 175 m. **D.** 125 m.

Câu 219. Một ô tô đang chạy với vận tốc 54 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 3t - 8$ (m/s^2) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây. Quãng đường mà ô tô đi được sau 10s kể từ lúc tăng tốc là

A. 150 m. **B.** 250 m. **C.** 246 m. **D.** 540 m.

Câu 220. Một xe chuyển động với vận tốc thay đổi là $v(t) = 3at^2 + bt$. Gọi $S(t)$ là quãng đường đi được sau t giây. Biết rằng sau 5 giây thì quãng đường đi được là 150 m, sau 10 giây thì quãng đường đi được là 1100 m. Tính quãng đường xe đi được sau 20 giây.

A. 8400 m. **B.** 600 m. **C.** 4200 m. **D.** 2200 m.

Câu 221. Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở điểm dừng xe, một chiếc xe đang chuyển động đều với vận tốc là 60 km/h. Chiếc xe di chuyển trong trạng thái đó 5 phút rồi bắt đầu đạp phanh và chuyển động chậm dần đều thêm 8 phút nữa rồi mới dừng hẳn ở điểm đỗ xe. Tính quãng đường mà xe đi được từ thời điểm t nói trên đến khi dừng hẳn.

A. 4 km. **B.** 5 km. **C.** 9 km. **D.** 6 km.

Câu 222. Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

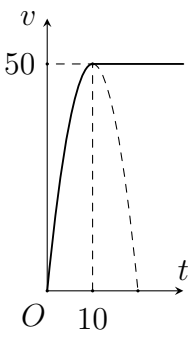
A. 5 m. **B.** 6 m. **C.** 4 m. **D.** 3 m.

Câu 223. Một ô tô đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 + at$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh và $a\left(\text{m/s}^2\right)$ là gia tốc. Biết rằng khi đi được 1500 m thì xe dừng hẳn, hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

A. $a = -\dfrac{200}{13}$ m/s^2. **B.** $a = -\dfrac{100}{13}$ m/s^2. **C.** $a = \dfrac{40}{3}$ m/s^2. **D.** $a = -\dfrac{40}{3}$ m/s^2.

Câu 224.

Một chất điểm bắt đầu chuyển động với vận tốc $v(t) = at^2 + bt$ với t tính bằng giây và v tính bằng mét/giây (m/s). Sau 10 giây thì chất điểm đạt vận tốc cao nhất $v = 50\ m/s$ và giữ nguyên vận tốc đó, có đồ thị vận tốc như hình bên. Tính quãng đường s chất điểm đi được trong 20 giây đầu.

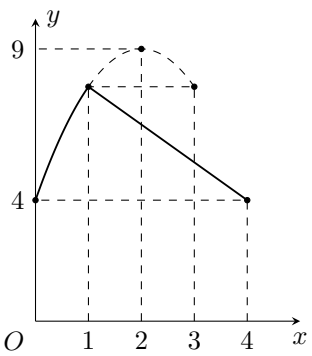


A. $s = \dfrac{2500}{3}$ m. **B.** $s = \dfrac{2600}{3}$ m.

C. $s = 800$ m. **D.** $s = \dfrac{2000}{3}$ m.

Câu 225.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại vật chuyển động chậm dần đều. Tính quãng đường S mà vật đi được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $S = 23,71$ km. **B.** $S = 23,58$ km.

C. $S = 23,56$ km. **D.** $S = 23,72$ km.

Câu 226. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bằng công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn thì khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33 m. **B.** 12 m. **C.** 31 m. **D.** 32 m.

Câu 227. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{150}t^2 + \dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 20 (m/s). **B.** 16 (m/s). **C.** 13 (m/s). **D.** 15 (m/s).

C. TÍCH PHÂN TRONNG ĐỀ THI THPT QG

Câu 228 (THPT QG 2022 – Mã 101). Nếu $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\displaystyle\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 229 (THPT QG 2022 — Mã 101). Nếu $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int\limits_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 230 (THPT QG 2022 — Mã 101). Cho $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$. **B.** $f(x) = -\cos x$. **C.** $f(x) = \sin x$. **D.** $f(x) = \cos x$.

Câu 231 (THPT QG 2022 — Mã 101). Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x^2 + C$.

Câu 232 (THPT QG 2022 — Mã 101). Cho hàm số $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{2}\cot 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \dfrac{1}{2}\tan 2x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{2}\tan 2x + C$.

Câu 233 (THPT QG 2022 — Mã 101). Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - G(0) + a$ $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng?

A. 15. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 5.

Câu 234 (THPT QG 2022 — Mã 101). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\dfrac{43}{8}$	$\nearrow$	$\ln 6$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 235 (THPT QG 2022 — Mã 102). Cho hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 2x^2 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Câu 236 (THPT QG 2022 — Mã 102). Đạo hàm của hàm số $y = x^{-3}$ là

A. $y' = -x^{-4}$. **B.** $y' = -3x^{-4}$. **C.** $y' = -\dfrac{1}{3}x^{-4}$. **D.** $y' = -\dfrac{1}{2}x^{-2}$.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 237 (THPT QG 2022 – Mã 102). Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 238 (THPT QG 2022 – Mã 102). Nếu $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ thì $\int\limits_{5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 239 (THPT QG 2022 – Mã 102). Cho hàm số $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Câu 240 (THPT QG 2022 – Mã 102). Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - G(0) + a$, $(a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

Câu 241 (THPT QG 2022 – Mã 102). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 10$	↗	$\ln 42$	↘	$\ln 37$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38;39)$. **B.** $(25;26)$. **C.** $(28;29)$. **D.** $(35;36)$.

Câu 242 (Minh họa 2021). Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^3 - x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - C$.

Câu 243 (Minh họa 2021). Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

Câu 244 (Minh họa 2021). Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. 3. **B.** 7. **C.** -10. **D.** -7.

Câu 245 (Minh họa 2021). Tích phân $\int\limits_1^2 x^3\mathrm{d}x$ bằng

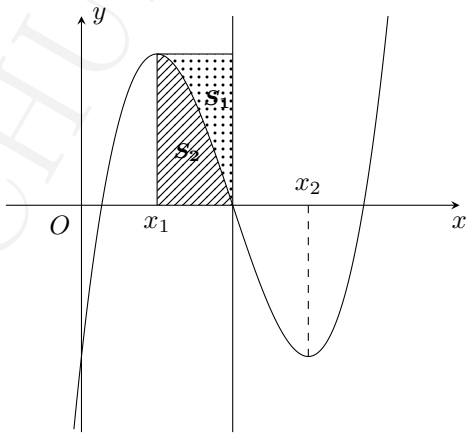
A. $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 246 (Minh họa 2021). Nếu $\int\limits_1^3 [2f(x)+1]\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 247 (Minh họa 2021).

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch sọc trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 248 (Minh họa 2021). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\geq 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 249 (THPT QG 2021 - Mã 101). Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 250 (THPT QG 2021 - Mã 101). Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+4x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3+4x+C$.

Câu 251 (THPT QG 2021 - Mã 101). Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 252 (THPT QG 2021 - Mã 101). Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+2x+C$.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - 2x + C.$

Câu 253 (THPT QG 2021 - Mã 101). Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 [2f(x) - 1]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 254 (THPT QG 2021 - Mã 101). Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Câu 255 (THPT QG 2021 - Mã 101). Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 256 (THPT QG Lần 2 — 2021). Cho hàm số $f(x) = 3 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x + \sin x + c.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x - \sin x + c.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x + \cos x + C.$

Câu 257 (THPT QG Lần 2 — 2021). Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 12. **C.** 7. **D.** -1.

Câu 258 (THPT QG Lần 2 — 2021). Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 + c.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^4 - 4x + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 12x^2 + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3 - 4x + C.$

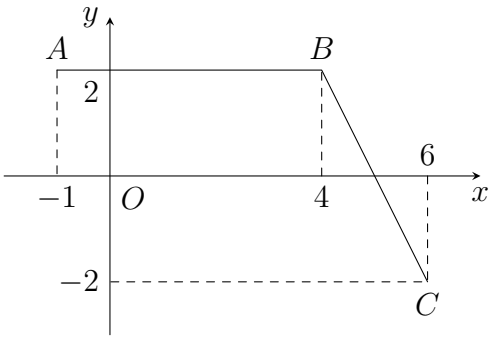
Câu 259 (THPT QG Lần 2 — 2021). Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1) = -1$ và $F(2) = 4$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** -5.

Câu 260 (THPT QG Lần 2 — 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

A. 19. **B.** 17. **C.** 22. **D.** 18.



ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 261 (THPT QG Lần 2 – 2021). Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^2 [4x - f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 11.

Câu 262 (THPT QG Lần 2 – 2021). Cho hai hàm số $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x) = mx^3+nx^2-2x$; với $a, b, c, m, n \in \mathrm{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có 3 điểm cực trị là $-1, 2$ và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{64}{9}$. **D.** $\dfrac{71}{6}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

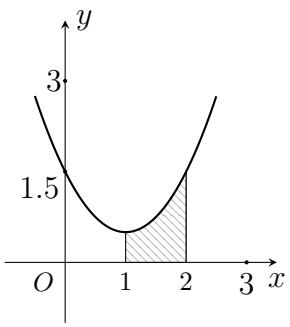
Câu 263. Cho K là một khoảng trên $\mathbb{R}$; $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K; $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên K. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $F(x) = G(x)$ thì $f(x) = g(x)$.		
b) Nếu $f(x) = g(x)$ thì $F(x) = G(x)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.		
d) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.		

Câu 264.

Cho đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và gọi S là diện tích hình phẳng được gạch sọc. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $S = \int\limits_1^2 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.		
b) $S = \int\limits_0^2 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.		
c) $S = \int\limits_1^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$.		
d) $S = \int\limits_1^2 \lvert g(x) - f(x)\rvert\mathrm{d}x$.		

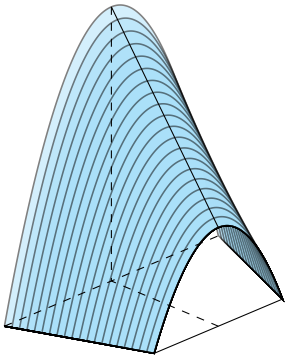
Câu 265. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên K. Khi đó

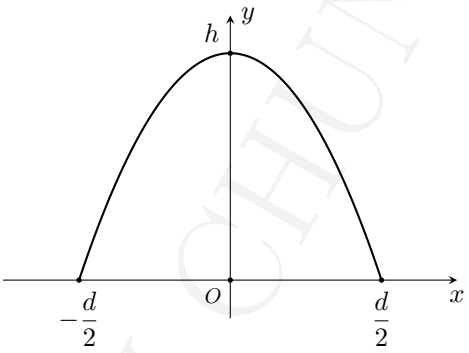
Phát biểu	Đ	S
a) $\int [f(x) \cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$.		
b) $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.		
c) $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.		

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
d) $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int g(x)\mathrm{d}x}$.		

Câu 266. Một đường hầm có mô hình như bên dưới. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 m. Khi cắt mô hình này bởi các mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao của parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (m), với x (m) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình đến mặt phẳng chứa thiết diện.

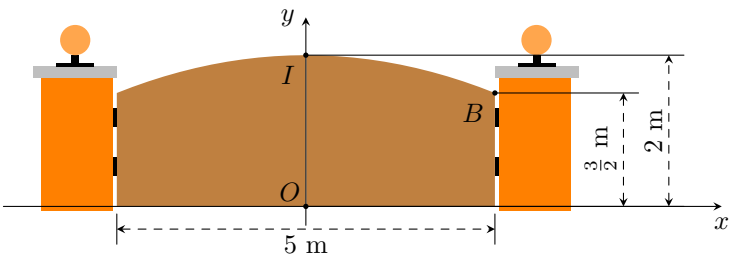




Phát biểu	Đ	S
a) Nếu hình parabol có độ dài đáy là d và chiều cao h như hình vẽ thì phương trình của parabol là $y = -\frac{4h}{d^2}x^2 + h$.		
b) Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi parabol có độ dài đáy là d và chiều cao h như hình vẽ và trục hoành là $S = \frac{2}{3}dh$.		
c) Thể tích của hầm khoảng 29,889 m^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).		
d) Để hoàn thành đường hầm từ lúc đào núi đến lúc hoàn thiện đưa vào sử dụng thì giá mỗi mét khối là 990 (triệu đồng). Khi đó chi phí làm hầm là khoảng 28 (tỷ đồng) (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).		

Câu 267.

Một cái vòm cổng dạng một parabol. Hình vẽ sau mô tả các kích thước của cổng và một hệ trục tọa độ Oxy được gán sẵn (*đơn vị trên các trục là* mét).



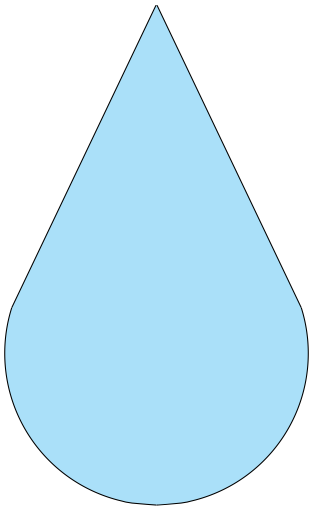
Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ đỉnh của parabol là $I(0;2)$.		
b) Parabol đi qua điểm $B\left(5;\frac{3}{2}\right)$.		
c) Phương trình đường parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.		

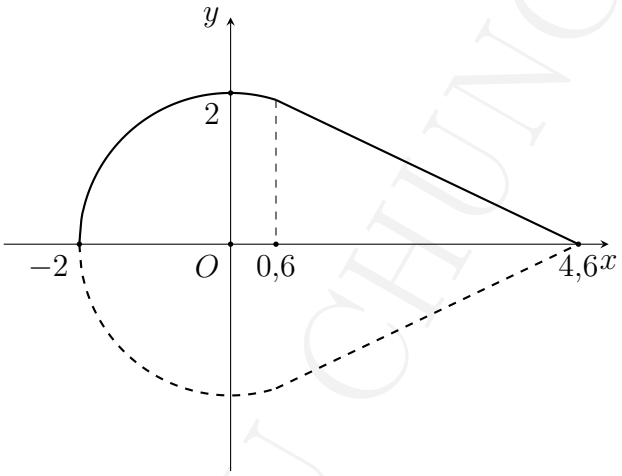
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
d) Diện tích hai cánh cửa cổng là 9,17 m^2 (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).		

Câu 268. Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & \text{khi } -2\le x\le 0{,}6\\ -\dfrac{\sqrt{91}}{20}x+\dfrac{23\sqrt{91}}{100} & \text{khi } 0{,}6<x\le 4{,}6\end{cases}$ và trục Ox quanh trục Ox (*đơn vị trên trục là* centimet). Khi đó

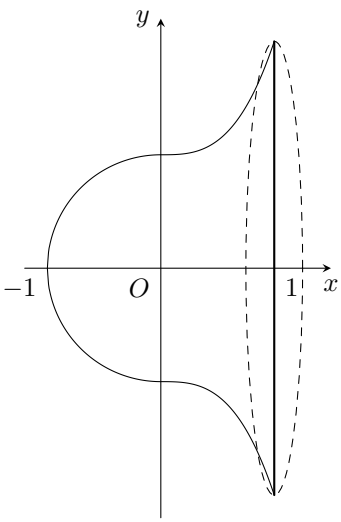




Phát biểu	Đ	S
a) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0{,}6$.		
b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S=2\displaystyle\int_{-2}^{4{,}6} f(x)\,\mathrm{d}x$ cm^2.		
c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 40 cm^3.		
d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho=2{,}6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22 g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).		

Câu 269.

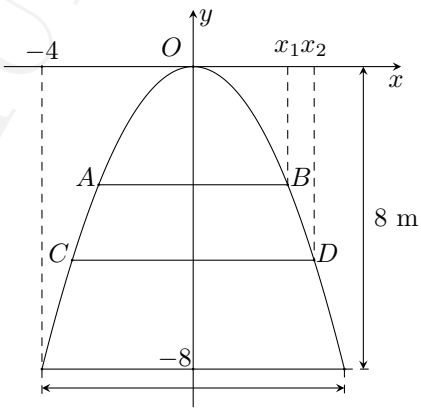
Giả sử chiếc nón rộng vành có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le 1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le 0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (*đơn vị trên trục là* dm).



Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $\int\limits_{-1}^{1}\left\lvert\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right\rvert \mathrm{d}x$.		
b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\dfrac{\pi+5}{2}$ dm^2.		
c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay trên là $V=\pi\int\limits_{-1}^{0}(x^2-1)\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{1}^{0}(x^6+2x^3+1)\,\mathrm{d}x$.		
d) Nếu thể tích của khối tròn xoay có dạng $\dfrac{a\pi}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $a+b=139$.		

Câu 270.

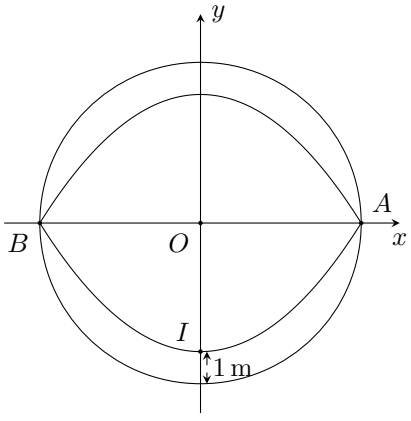
Một cổng có dạng hình parabol với chiều cao 8 m, chiều rộng chân đế 8 m như hình bên. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang, đồng thời chia cổng thành ba phần sao cho hai phần ở phía trên có diện tích bằng nhau. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (*đơn vị trên các trục tọa độ là* mét).



Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình parabol là $y=-\dfrac{1}{2}x^2$.		
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng AB là $\dfrac{1}{3}x_1^3$ m^2.		
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng CD là $\dfrac{2}{3}x_2^3$ m^2.		
d) Tỉ số $\dfrac{CD}{AB}\approx 1{,}26$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).		

Câu 271.

Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10 m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh I cách mép hình tròn 1 m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ bên (đơn vị trên các trục là mét).

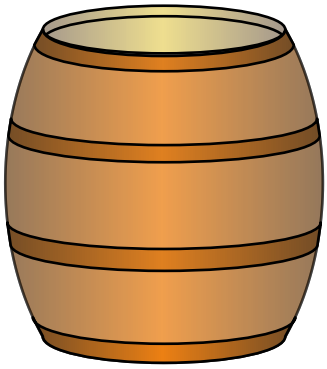


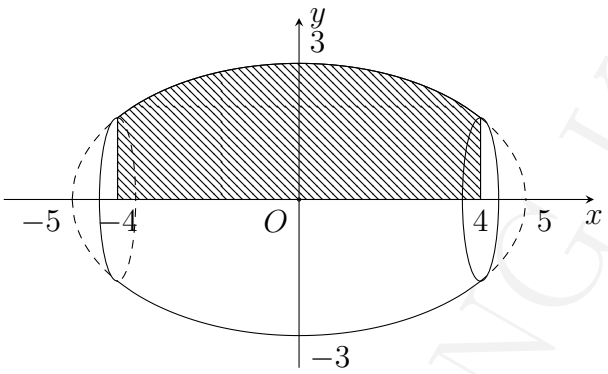
Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ đỉnh $I(0;4)$ và các điểm $A(5;0)$, $B(-5,0)$.		
b) Parabol có đỉnh I và bề lõm hướng lên có phương trình là $y=\dfrac{4}{25}x^2-4$.		
c) Diện tích phần trồng hoa bị giới hạn bởi hai parabol là $\dfrac{170}{3}$ m^2.		
d) Tổng chi phí để hoàn thành khu vực này là 31 triệu (*làm tròn đến hàng đơn vị*).		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

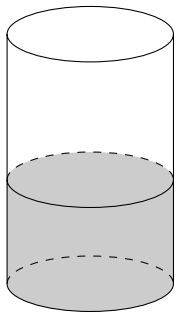
Câu 272. Một thùng chứa rượu bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai mặt đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy là 8 dm. Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm, trục bé bằng 6 dm. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

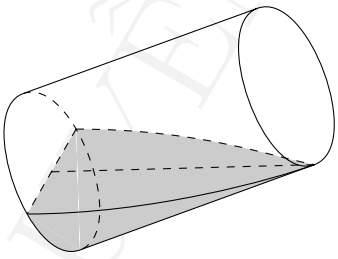


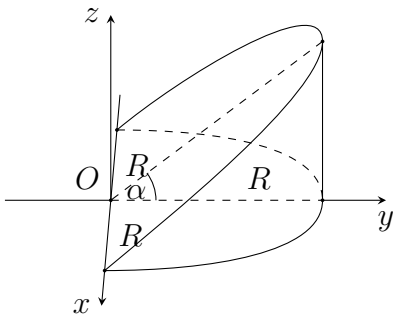


Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình elip là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.		
b) Thể tích của thùng rượu được tính bởi công thức $V=\dfrac{9\pi}{25}\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(25+x^2\right)\mathrm{d}x$.		
c) Thùng gỗ này đựng được $\dfrac{1\,416}{25}$ lít rượu.		
d) Biết mỗi lít rượu có giá 35 000 đồng. Số tiền đã dùng để mua rượu đổ đầy thùng gỗ là khoảng 6,228 triệu đồng (*làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn*).		

Câu 273. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $R=6$ cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Phần chứa nước trong cốc có dạng hình cái nêm. Gán hệ trục tọa độ trong không gian như hình vẽ. Gọi α là góc giữa bề mặt nước và mặt đáy cốc, $S(x)$ là diện tích mặt cắt khi cắt hình cái nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox và cắt trục Ox tại x.

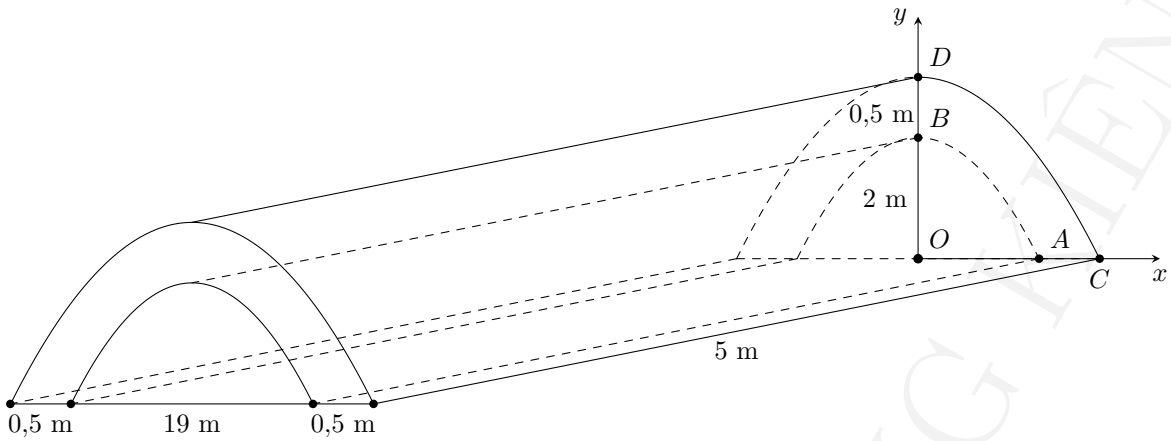






Phát biểu	Đ	S
a) $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(R^2+x^2\right)\tan\alpha$.		
b) $\tan\alpha=\dfrac{h}{R}$.		
c) Thể tích của cái nêm được tính bằng công thức $V=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha$.		
d) Thể tích lượng nước trong cốc là 250 cm^3.		

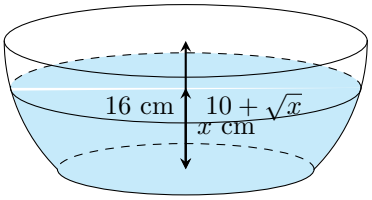
Câu 274. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một đoạn đường hầm bằng bê tông như hình vẽ. Biết các đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ sau.



Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ các điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right)$, $B(0;2)$, $C(10;0)$, $D\left(0;\frac{5}{2}\right)$.		
b) Phương trình parabol (P_1) đi qua A và B là $(P_1)\colon y=-\frac{8}{361}x^2-2$.		
c) Phương trình parabol (P_2) đi qua C và D là $(P_2)\colon y=-\frac{1}{40}x^2+\frac{5}{2}$.		
d) Biết $1\,\text{m}^3$ khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Số tiền mà tỉnh Y cần bỏ ra để xây cây cầu trên là 200 triệu đồng.		

Câu 275.

Một chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x cm $(0\le x\le 16)$ thì mặt cắt hình tròn có bán kính $(10+\sqrt{x})$ cm. Gọi h là chiều cao của phần nước trong chậu.



Phát biểu	Đ	S
a) Diện tích mặt cắt là $S(x)=(100+20\sqrt{x}+x)$.		
b) Dung tích của chậu là $V=\frac{7\,744}{3}\pi$.		
c) Lượng nước chứa trong chậu có thể tích là $\pi\left(10h+\frac{h^2}{2}+\frac{40}{3}h\sqrt{h}\right)$.		
d) Với $h\approx 8{,}94$ cm thì dung tích nước trong chậu bằng nửa thể tích chậu.		

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 276. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

KQ: | | | | |

Câu 277. Một ô tô chuyển động đều với vận tốc 20 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường (theo đơn vị mét) mà ô tô di chuyển được trong 10 giây cuối.

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

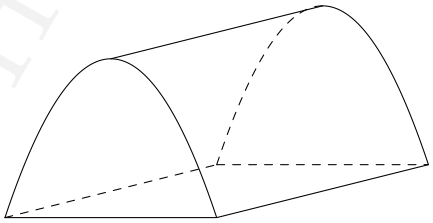
Câu 278. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 m/s thì đèn tín hiệu chuyển sang đỏ. Người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Để đảm bảo an toàn thì xe phải được dừng cách xe trước tối thiểu 1 m. Hỏi người lái xe phải đạp phanh khi cách xe phía trước tối thiểu bao nhiêu mét thì an toàn? KQ: ☐☐☐☐

Câu 279. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ m/s. Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Đi được 5 s người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ m/s^2. Tính quãng đường (theo đơn vị mét) của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn. KQ: ☐☐☐☐

Câu 280. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$, với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 2 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng. KQ: ☐☐☐☐

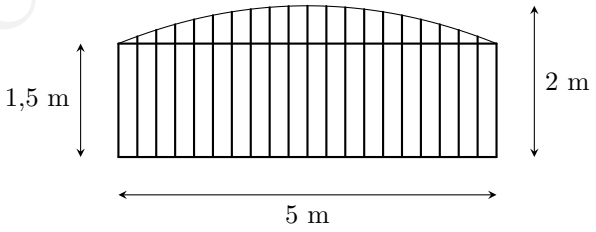
Câu 281.

Để chuẩn bị cho buổi dã ngoại, nhóm du lịch dự định dựng một cái lều trại có dạng như hình vẽ. Biết rằng mặt trước và mặt sau của trại là hai parabol bằng nhau, nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và cùng vuông góc với mặt nền. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước chiều rộng là 4 m, chiều dài là 6 m, đỉnh parabol cách nền 3 m. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại. KQ: ☐☐☐☐



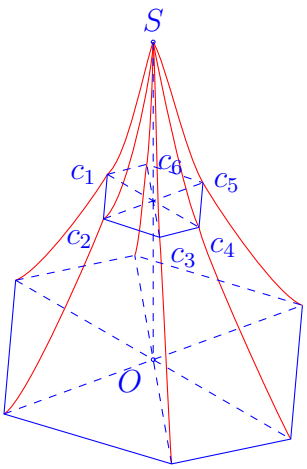
Câu 282.

Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1 m^2 cửa rào sắt là 700 000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy, *làm tròn đến nghìn* đồng. KQ: ☐☐☐☐



Câu 283.

Gia đình ông An xây một cái chòi hình lục giác, trong đó mái chòi (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" có trần bằng gỗ như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều có đường chéo chính là 6 m. Chiều cao $SO = 6$ m (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây thép c_1 ,c_2 ,c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_7 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (α) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh 1 m. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) đó. KQ: ☐☐☐☐



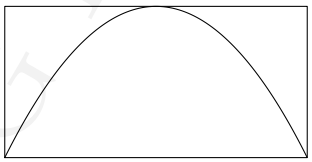
Câu 284. Khảo sát chuyển động của xe khách A trong 30 phút trên một quãng đường, ta thu được kết quả: vận tốc v (m/phút) của xe khách theo thời gian t được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \le t \le 10 \\ 20t + 800, & 10 < t \le 20 \\ -10t + 1400, & 20 < t \le 30. \end{cases}$ Tính vận tốc trung bình (m/phút) của xe khách trong 30 phút đã khảo

sát (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |

Câu 285. Để kỷ niệm ngày $26-3$. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp. KQ: | | | | |

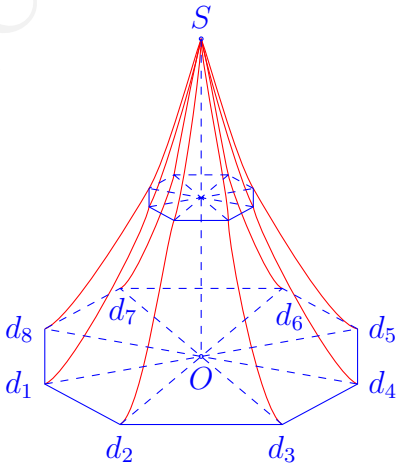
Câu 286.

Bạn An có các tấm thẻ hình chữ nhật có kích thước khác nhau nhưng có cùng chu vi là 6 cm. Trên mỗi tấm thẻ, An vẽ một hình parabol sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của tấm thẻ như hình vẽ. Hỏi diện tích của hình parabol lớn nhất mà An vẽ được bằng bao nhiêu xăng ti mét vuông? KQ: | | | | |



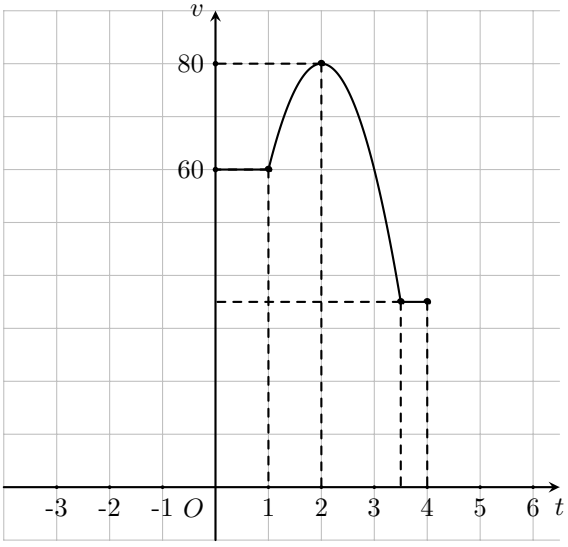
Câu 287.

Gia đình ông Bình xây một cái chòi hình bát giác, trong đó mái chòi (H) có dạng hình "chóp bát giác cong đều" có trần bằng gỗ như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình bát giác đều có cạnh là $a=\dfrac{3\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}$ m. Chiều cao $SO=6$ m (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây thép d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một bát giác đều và khi (α) qua trung điểm của SO thì bát giác đều có cạnh $b=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}$ m. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi đó. KQ: | | | | |



Câu 288.

Một ô tô đi từ tỉnh A đến D thì phải đi qua đoạn đường BC hết 4,5 giờ. Ô tô đó đi với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình vẽ. Trong khoảng thời gian 1h, ô tô đi từ tỉnh B có đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox và trong 2,5h tiếp theo đồ thị ô tô đó chuyển động là một phần của Parabol có đỉnh $I(2;80)$ và trục đối xứng song song với trục Oy. Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục Ox. Tính độ dài đoạn đường BC (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*). KQ: | | | | |



Câu 289. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t$ m/s. Đi được 5 giây người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp. Ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35$ m/s^2. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn? (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*) KQ: | | | | |

Câu 290. Một ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)=2t$ (m/s) ($t=0$ là lúc bắt đầu chuyển động). Sau 20 giây thì gặp chướng ngại vật nên đạp phanh và chuyển động với gia tốc $a(t)=-5$ (m/s^2). Tính quãng

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

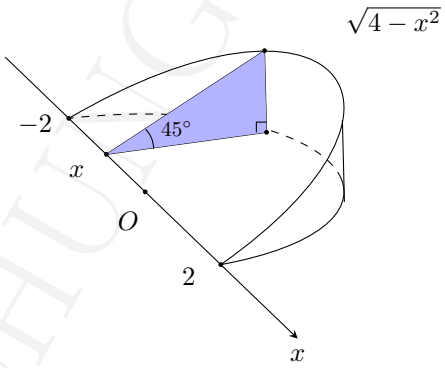
đường xe ô tô đi được từ khi bắt đầu đi đến khi dừng hẳn. KQ: | | | | |

Câu 291. Một xe chuyển động với vận tốc thay đổi là $v(t) = 3at^2 + bt$. Gọi $S(t)$ là quãng đường đi được sau t giây. Biết rằng sau 5 giây thì quãng đường đi được là 150 m, sau 10 giây thì quãng đường đi được là 1100 m. Tính quãng đường xe đi được sau 20 giây. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

KQ: | | | | |

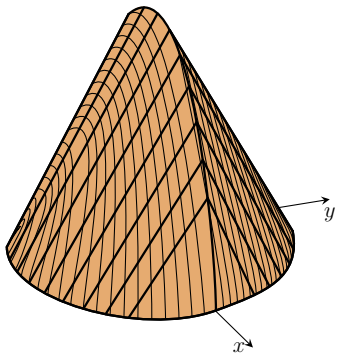
Câu 292.

Khi cắt một vật thể hình chiếc nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14 - 3x^2}$. Tính thể tích vật thể đó. KQ: | | | | |



Câu 293.

Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

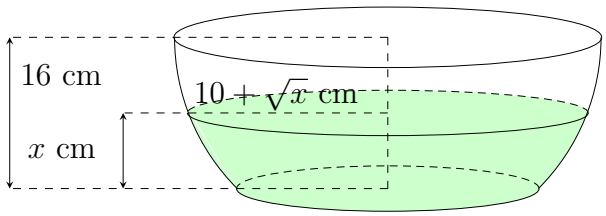


Câu 294. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

KQ: | | | | |

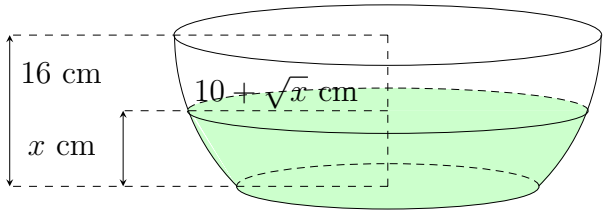
Câu 295.

Nếu cắt một chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x cm $(0 \le x \le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})$ (cm). Tính dung tích của chậu. KQ: | | | | |



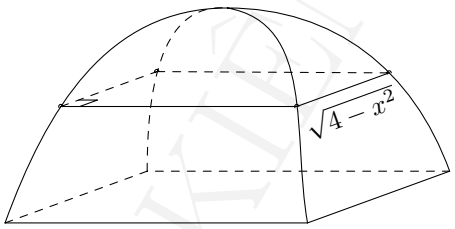
Câu 296.

Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x $(0 \le x \le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $10 + \sqrt{x}$. Tìm x để dung tích nước trong chậu bằng nửa thể tích của chậu. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*) KQ: | | | | |



Câu 297.

Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như hình bên. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x $(0 \le x \le 3)$ thì được hình chữ nhật có các kích thước lần lượt là x và $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích cái lều. KQ: | | | | |

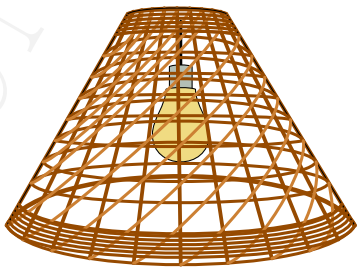


Câu 298. Một cái lu đựng nước có dạng hình trụ. Biết rằng khi lượng nước trong lu là x $(0 < x \le 9)$ thì mặt nước là hình tròn có bán kính là x (dm). Hãy tính dung tích của cái lu (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

KQ: | | | | |

Câu 299.

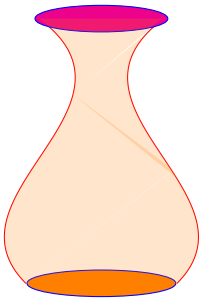
Một chiếc đèn cói có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x $(0 \le x \le 4)$ thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{4-x}$. Thể tích của chiếc đèn cói là bao nhiêu? (*Làm tròn đến hàng phần mười*) KQ: | | | | |



Câu 300.

Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25 cm. Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R = \dfrac{4}{9}x^3 - \dfrac{5}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{25}{36}$ (dm) với $x \in \left[0; \dfrac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa. Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

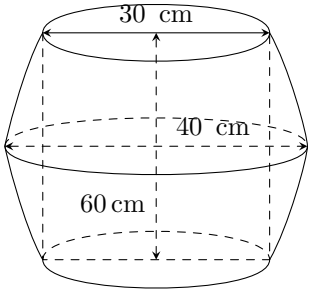
KQ: | | | | |



Câu 301.

Một thùng đựng bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30 cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40 cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Thể tích của thùng bia hơi này bằng bao nhiêu (giả sử độ dày vỏ không đáng kể và *làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị* lít)?

KQ: | | | | |



ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

PHẦN II

HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

12 TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12

Chương 5

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

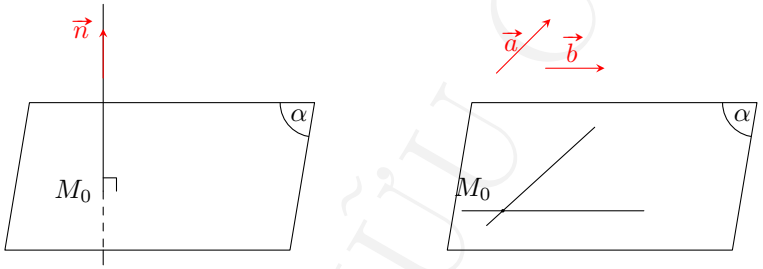
TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 5

§1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Vectơ pháp tuyến. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng



a) b)

Định nghĩa 10 Cho mặt phẳng (α).

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của (α).

Nếu hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

- *Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.*
- *Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).*

2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa 11 Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó

- Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

- $N(x_0;y_0;z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$\text{hay } Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Do a,b,c đều khác 0 nên có thể viết lại phương trình trên thành $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
Phương trình này gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

3 Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.
Gọi $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2). Khi đó

- $(P_1) \parallel (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2.\end{cases}$
- $(P_1) \equiv (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n_2}\\ D_1=kD_2.\end{cases}$
- (P_1) cắt (P_2) khi và chỉ khi $\vec{n}_1$ và $\vec{n_2}$ không cùng phương.
- $(P_1)\perp(P_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

4 Khoảng cách

- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức

$$\mathrm{d}(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song. Lấy điểm $M\in(P)$. Khi đó

$$\mathrm{d}((P),(Q))=\mathrm{d}(M,(Q)).$$

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Tích có hướng và ứng dụng

Định nghĩa 12 Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\begin{cases}\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)\end{cases}$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ, ký hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và được xác định bởi công thức

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).$$

⚠ *Nếu* $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *thì ta luôn có* $\vec{c}\perp\vec{a}$ *và* $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Tính chất 4

1. $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$, $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$, $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$.
2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.
3. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.
4. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

Ứng dụng của tích có hướng

- Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0$.
  - Để chứng minh $ABCD$ là một tứ diện, ta chứng minh $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\neq0$.
  - Để chứng minh 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, ta chứng minh $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
- Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.
- Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Mức độ 2). Biết ba vectơ $\vec{u}=(2;-1;1)$, $\vec{v}=(1;2;1)$ và $\vec{w}=(m;3;-1)$ đồng phẳng. Tìm m.

A. $m=\dfrac{3}{8}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{8}$. **C.** $m=\dfrac{8}{3}$. **D.** $m=-\dfrac{8}{3}$.

Ví dụ 2 (Mức độ 2). Cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{78}}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Ví dụ 3 (Mức độ 2). Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ với $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$, $C(1;1;3)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $2\sqrt{87}$. **B.** $\sqrt{349}$. **C.** $\sqrt{87}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{349}}{2}$.

Ví dụ 4 (Mức độ 3). Cho bốn điểm $A(1;1;4), B(5;-1;3), C(2;2;m), D(3;1;5)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tích có hướng $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(-2;-6;4)$.		
b) Diện tích tam giác ABD bằng 4.		
c) Khi $m=6$ thì bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng.		
d) Khi $m=4$ thì thể tích khối chóp $ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}$.		

Ví dụ 5 (Mức độ 2). Tính thể tích tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;0), B(0;3;0), C(0;-2;1), D(2;1;1)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 1 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A\,(1;0;0)$, $B\,(0;1;0)$, $C\,(0;0;1)$, $D\,(-2;1;-1)$.

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện. Tính thể tích của tứ diện này.

b) Tính diện tích tam giác BCD. Từ đó suy ra độ dài đường cao của tứ diện vẽ từ A.

Bài 2 (Mức độ 2). Cho $A(1;2;-1), B(0;-2;3)$. Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của $\triangle OAB$.

Bài 3 (Mức độ 2). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, có toạ độ các đỉnh $A\,(0;0;1)$, $B\,(0;2;1)$, $D\,(3;0;1)$, $A'\,(0;0;0)$. Tính thể tích của khối hộp đã cho.

Bài 4 (Mức độ 3). Cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$ và $D\in Oy$. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5 (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh D.

Bài 5 (Mức độ 3). Cho $A(a;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0)$ và $D(1;2;1)$. Tìm toạ độ điểm A để thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một véctơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai véctơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(3;5;-2)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và véctơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-3), B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ véctơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\vec{n}=(8;4;-3)$. **B.** $\vec{n}=(-18;0;-3)$. **C.** $\vec{n}=(-18;4;-3)$. **D.** $\vec{n}=(1;4;-3)$.

Câu 4 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Gọi $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{a}$. **B.** $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{b}$.
C. $\vec{c}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. **D.** $\vec{c}$ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 5 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, trong các bộ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sau đây, bộ nào thỏa mãn tính chất $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = 0$ (hay còn gọi là ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng)?

A. $\vec{a} = (1;-1;1)$, $\vec{b} = (0;1;2)$, $\vec{c} = (4;2;3)$.
B. $\vec{a} = (4;3;4)$, $\vec{b} = (2;-1;2)$, $\vec{c} = (1;2;1)$.
C. $\vec{a} = (1;7;9)$, $\vec{b} = (3;6;1)$, $\vec{c} = (2;1;7)$.
D. $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (1;-1;2)$, $\vec{c} = (2;2;-1)$.

Câu 6 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;-1;-2)$, $\vec{b} = (1;2;m)$, $\vec{c} = (5;1;7)$. Giá trị của tham số m để $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 7 (Mức độ 2). Tìm m để bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(0;-2;5)$, $D(m;5;0)$ đồng phẳng.

A. $m = 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -4$.

Câu 8 (Mức độ 2). Tính diện tích tam giác ABC với $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ và $C(4;5;-2)$.

A. $\dfrac{49}{2}$. **B.** $\dfrac{51}{2}$. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{47}{2}$.

Câu 9 (Mức độ 2). Cho tam giác ABC có $A(-1;0;3)$, $B(2;-2;0)$ và $C(-3;2;1)$. Tính chiều cao AH.

A. $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{651}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{651}}{21}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{651}}{21}$.

Câu 10 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 11 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 12 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và giao điểm của hai đường chéo là $I\left(\dfrac{3}{2};0;\dfrac{3}{2}\right)$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 13 (Mức độ 2). Diện tích hình bình hành $ABCD$ biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$, $D(-3;8;-7)$ là

A. $\sqrt{281}$. **B.** $\sqrt{181}$. **C.** $2\sqrt{281}$. **D.** $2\sqrt{181}$.

Câu 14 (Mức độ 2). Tính thể tích tứ diện $ABCD$ với $A(1;0;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;1;3)$, $D(3;1;1)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 15 (Mức độ 3). Cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$, $D(3;3;1)$. Tính độ dài đường cao h hạ từ đỉnh D xuống mặt (ABC).

A. $\dfrac{9}{7}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{14}$. **C.** $\dfrac{9}{14}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 16 (Mức độ 3). Cho ba véctơ $\vec{u} = (1;2;1)$, $\vec{v} = (-1;1;2)$ và $\vec{w} = (m;3m;m+2)$. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Trần Nguyễn Hữu Chung Kiên

Phát biểu	Đ	S
a) Tích vô hướng $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$.		
b) Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ vuông góc khi $m=-\dfrac{1}{4}$.		
c) Tích có hướng $[\vec{u},\vec{v}]=(3;-3;3)$.		
d) Ba vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng khi $m=2$.		

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=3$.		
b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=5$.		
d) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-1;-4;3)$.		

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(3;-1;0)$, $\vec{c}=(1;-5;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.		
b) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\vec{a}$ không cùng phương với $\vec{b}$.		
d) $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.		

Câu 19 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;4)$, $B(2;1;0)$, $C(1;4;0)$ và $D(a;b;0)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điều kiện cần và đủ của a, b để hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng là $3a+b=7$.		
b) Diện tích tam giác ABC là 30.		
c) Nếu tồn tại điểm D là hình bình hành thì diện tích hình bình hành $ABCD$ là 4.		
d) Nếu $a=1, b=-1$ thì thể tích khối chóp $ABCD$ là 2.		

Câu 20 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;1;-6)$, $B(0;0;-2)$, $C(-5;1;2)$ và $D'(2;1;-1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Kết quả tích có hướng $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=(-8;16;6)$.		
b) Độ dài đoạn thẳng AB là $4\sqrt{2}$.		
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{90}$.		
d) Thể tích của khối hộp đã cho bằng 38.		

Câu 21 (Mức độ 3). Cho $A(-1;-2;4)$, $B(4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $D(1;1;1)$ là bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Kết quả tích có hướng $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;1;1)$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) Diện tích tam giác ABC là $\frac{1}{2}$.		
c) Thể tích tứ diện $ABCD$ là 1.		
d) Đường cao DH của tứ diện $ABCD$ có độ dài bằng 3.		

Câu 22 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$ và D thuộc trục tung. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Kết quả tích có hướng $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;4;-2)$.		
b) Diện tích tam giác ABC bằng 2.		
c) Chiều cao kẻ từ A của tam giác ABC bằng $\sqrt{30}$.		
d) Nếu điểm $D(0;8;0)$ thì thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$ và $C(1;-1;0)$. Biết $\vec{u}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]$. Khi đó, độ dài của $\vec{u}$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$ và $C(-1;1;0)$. Một véctơ $\vec{n}=(a;b;2)$ có phương vuông góc với hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tính giá trị của $a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 25. Hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Tính giá trị của phép tính $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}$. KQ: | | | | |

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2)$, $\vec{v}=(-1;m;m-2)$. Tìm giá trị của m dương sao cho $|[\vec{u},\vec{v}]|=\sqrt{14}$. KQ: | | | | |

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}=(a;b;c)$ là véctơ cùng hướng với $[\vec{m},\vec{n}]$ (tích có hướng của hai véctơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}|=15$, giá trị của tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 28 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ và $D(1;1;1)$. Tính độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ kẻ từ đỉnh D. KQ: | | | | |

Câu 29 (Mức độ 2). Tính diện tích tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, và $C(2;1;1)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

Câu 30 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(-2;1;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 31 (Mức độ 2). Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ với $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(6;5;2)$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).* KQ: | | | | |

Câu 32 (Mức độ 3). Cho tam giác ABC có $A(1;0;1)$, $B(0;2;3)$ và $C(2;1;0)$. Tính chiều cao CH *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).* KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

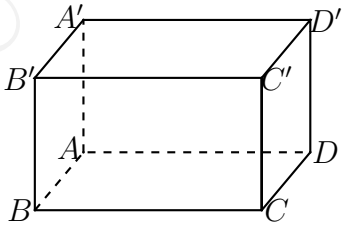
DẠNG 2 Xác định vectơ pháp tuyến, cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

- Tìm vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
- Tìm hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P).
- Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ trong đó $\vec{a}$, $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P).

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 6 (Mức độ 1).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ bên. Chỉ ra hai vectơ pháp tuyến, hai cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABCD)$.



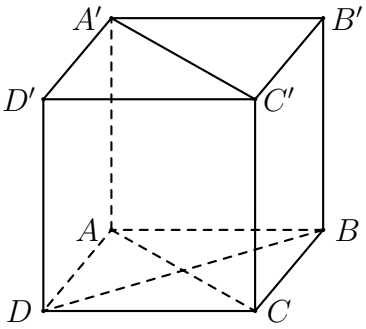
Ví dụ 7.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

c) $\overrightarrow{A'C'}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.



Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;-2;0)$ và $\vec{v} = (3;1;-4)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2;3;1)$ và $\vec{v} = (4;6;2)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = (2;-1;0)$, $\vec{v} = (1;-1;2)$. Gọi (α) là một mặt phẳng song song với các giá của $\vec{u}$, $\vec{v}$. Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-3;0;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 12 (Mức độ 2). Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với $M(1;-2;3)$, $N(1;4;1)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1;-2;1)$, $B(-2;1;0)$, $C(-2;3;2)$. Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 14 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1;2;-4)$, $\vec{b} = (3;-1;0)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ví dụ 15 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;1)$ và $C(1;2;0)$.

Ví dụ 16 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $M(3;-1;4)$, $N(-2;3;2)$ và song song với trục Oy.

Ví dụ 17 (Mức độ 3). Cho $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (OAH) với O là gốc tọa độ.

Ví dụ 18 (Mức độ 1). Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a}=(2;-1;3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}_1=(-2;1;3)$. **B.** $\vec{n}_2=(-2;1;-3)$. **C.** $\vec{n}_3=(4;2;6)$. **D.** $\vec{n}_4=(4;-2;-6)$.

Ví dụ 19 (Mức độ 2). Cho (α) song song với giá của $\vec{a}=(1;-2;-3)$, $\vec{b}=(-4;2;0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}_1=(6;12;-6)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;2;-1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;-4;2)$. **D.** $\vec{n}_4=(-3;-6;-3)$.

Ví dụ 20 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(2;1;-1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{a}$ có giá song song với mặt phẳng (α).		
b) $2\vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α).		
c) $\vec{n}_1=(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).		
d) $\vec{n}_2=(1;-7;-5)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (α).		

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng (α) đi qua các điểm $M(1;-2;3)$, $N(2;1;-1)$, $P(0;-2;4)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{MN}$ có giá song song với mặt phẳng (α).		
b) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PN}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α).		
c) $\vec{n}_1=(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).		
d) $\vec{n}_2=(1;1;1)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (α).		

Ví dụ 22 (Mức độ 2). Mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(3;2;-1)$, $B(0;-1;3)$. Vectơ $\vec{n}=(6;a;b)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Tính $a+b$. KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 23 (Mức độ 2). Cho tam giác ABC có $A(0;2;-3)$, $B(-1;2;2)$, $C(2;2;-3)$ và trọng tâm G. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với BG có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;m;n)$. Tính $m+n$.

KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 24 (Mức độ 2). Cho điểm $M(1;3;4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M lên các trục Ox, Oy, Oz. Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;4;b)$. Tính $2a+b$. KQ: ☐☐☐☐

2 Bài tập tự luận

Bài 6. Cho mặt phẳng (Q) nhận $\vec{u}=(2;1;3)$, $\vec{v}=(1;0;-5)$ làm cặp vectơ chỉ phương. Tìm một vectơ pháp tuyến của (Q).

Bài 7 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng sau

a) (Oxy) b) (Oyz) c) (Oxz)

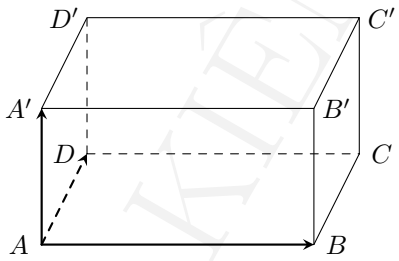
Bài 8. Cho mặt phẳng (Q) nhận $\vec{a}=(4;0;1)$; $\vec{b}=(2;1;1)$ làm cặp vectơ chỉ phương. Tìm một vectơ pháp tuyến của (Q).

TÀI LIỆU ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 9.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;2;0)$, $D(-2;0;0)$. Tìm tọa độ một cặp vectơ chỉ phương và một vectơ chỉ phương và một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.



Bài 10 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) vuông góc với giá của $\vec{n} = (2;-4;1)$

b) (α) song song với giá của các vectơ $\vec{a} = (2;-4;0)$ và $\vec{b} = (4;-2;1)$

c) (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(2;4;6)$ và $B(0;-4;2)$

Bài 11 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1;3;5)$, $B(3;2;-2)$ và song song với trục Oz

b) (α) đi qua $M(0;3;1)$, $N(-3;2;5)$ và song song với trục Ox

Bài 12 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1;3;5)$ và chứa trục Ox

b) (α) đi qua $B(2;-3;4)$ và chứa trục Oy

c) (α) đi qua $C(4;-1;-2)$ và chứa trục Oz

Bài 13 (Mức độ 2). Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1;3;5)$, $B(3;2;-2)$ và $C(0;3;0)$.

b) (α) đi qua $M(0;3;1)$, $N(-3;2;5)$ và $P(-2;0;0)$.

Bài 14 (Mức độ 3). Cho điểm $A(1;-2;3)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A lên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).

a) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (MNP).

b) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (AMN).

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x - 3y^2 + z - 1 = 0$.
B. $x^2 + 2y + 4z - 2 = 0$.
C. $2x - 3y + 4z - 2024 = 0$.
D. $2x - 3y + 4z^2 - 2025 = 0$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$. véctơ nào dưới đây **không phải** là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n} = (-3;1;-2)$.
B. $\vec{n} = (3;1;2)$.
C. $\vec{n} = (3;-1;2)$.
D. $\vec{n} = (6;-2;4)$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i} = (1;0;0)$.
B. $\vec{m} = (1;1;1)$.
C. $\vec{j} = (0;1;0)$.
D. $\vec{k} = (0;0;1)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+1=0$?

A. $\vec{a}=(2;-3;1)$. **B.** $\vec{b}=(2;1;-3)$. **C.** $\vec{c}=(2;-3;0)$. **D.** $\vec{d}=(3;2;0)$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$. **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-2=0$.

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không thuộc** (α)?

A. $Q(3;3;0)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $M(1;-1;1)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$. **B.** $M(1;1;6)$. **C.** $Q(2;-1;5)$. **D.** $N(-5;0;0)$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $N(1;2;3)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $Q(0;0;3)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $N\left(1;-1;-\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $P(1;6;1)$. **D.** $Q(0;3;0)$.

Câu 43 (Mức độ 1). Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a}=(-4;2;6)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}_1=(2;1;3)$. **B.** $\vec{n}_2=(-2;1;3)$. **C.** $\vec{n}_3=(4;-2;6)$. **D.** $\vec{n}_4=(4;2;-6)$.

Câu 44 (Mức độ 1). Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (Oxy)?

A. $\vec{n}_1=(2;0;0)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;1;0)$. **C.** $\vec{n}_3=(0;3;0)$. **D.** $\vec{n}_4=(0;0;-1)$.

Câu 45 (Mức độ 1). Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (Oyz)?

A. $\vec{n}_1=(2;0;0)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;1;0)$. **C.** $\vec{n}_3=(0;3;0)$. **D.** $\vec{n}_4=(0;0;-1)$.

Câu 46 (Mức độ 1). Cho điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có một vec tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(3;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;2;2)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;1;2)$. **D.** $\vec{n}_4=(6;2;2)$.

Câu 47 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n}_1=(1;2;2)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;-2;2)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;2;0)$. **D.** $\vec{n}_4=(1;8;2)$.

Câu 48 (Mức độ 2). Cho (α) đi qua $M(-4;3;7)$ và chứa trục Oz. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}_1=(-4;3;6)$. **B.** $\vec{n}_2=(0;7;-3)$. **C.** $\vec{n}_3=(-7;0;-4)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;4;0)$.

Câu 49 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(2;0;0)$, $C(0;3;0)$. Mặt phẳng (α) là mặt phẳng có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OC}$. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $1=(2;0;-1)$. **B.** $\vec{n}_2=(0;1;0)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;0;2)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;1;-1)$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 50 (Mức độ 3). Cho ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz sao cho điểm $M(1;2;3)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(6;3;2)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-1;-1)$. **C.** $\vec{n}_3=(3;2;1)$. **D.** $\vec{n}_4=(1;2;3)$.

Câu 51 (Mức độ 3). Cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$ với H là trực tâm. Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{a}$ với $\vec{a}$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC). Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(1;6;-8)$. **B.** $\vec{n}_2=(4;-2;-1)$. **C.** $\vec{n}_3=(22;31;26)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;-3;-2)$.

Câu 52 (Mức độ 3). Cho ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz sao cho điểm $H(1;2;5)$ là trực tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(10;5;2)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;2;5)$. **C.** $\vec{n}_3=(5;2;1)$. **D.** $\vec{n}_4=(2;5;10)$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 53. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (Oxy) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.		
b) Mặt phẳng (Oxz) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;3;0)$.		
c) Mặt phẳng (Oyz) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;0;0)$.		
d) Trục Oz có véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(0;0;-2024)$.		

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{n}_1=(1;-3;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).		
b) $\vec{n}_2=(-4;12;-8)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).		
c) $\vec{n}_3=(-2;6;-4)$ không phải là một vectơ pháp tuyến của (P).		
d) $\vec{n}_4=(1;-2;3)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).		

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;-3;1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có một cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-2;2;-1)$ và $\vec{u}_2=(3;-5;0)$.		
b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-5;-3;4)$.		
c) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(5;3;4)$.		
d) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(10;6;-8)$.		

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-2024=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.		

Phát biểu	Đ	S
b) Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.		
c) Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.		
d) Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).		

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M(-1;-1;-1)$ **không thuộc** mặt phẳng (P).		
b) Điểm $N(1;1;1)$ **thuộc** mặt phẳng (P).		
c) Điểm $K(-3;0;0)$ **không thuộc** mặt phẳng (P).		
d) Điểm $Q(0;0;-3)$ **thuộc** mặt phẳng (P).		

Câu 58 (Mức độ 2). Cho (α) đi qua $M(-1;4;7)$, $N(0;3;-1)$ và song song với trục Oz. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{k}=(0;0;1)$.		
b) Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(-1;1;8)$.		
c) Trung điểm của đoạn MN là $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-4\right)$.		
d) Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{b}=(-1;1;0)$.		

Câu 59 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;6)$ có H là trực tâm, G là trọng tâm. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Trọng tâm của $\triangle ABC$ là $G(1;-1;2)$.		
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$.		
c) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(2;-2;1)$.		
d) $\vec{b}=(1;-1;0)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (OHC).		

Câu 60 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(3;0;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(-3;1;4)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.		
b) Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(1;-3;-2)$.		
c) $D(-2;-2;-2)$ là điểm thỏa mãn điều kiện tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.		
d) $\vec{b}=(13;-7;17)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (ABC).		

Câu 61 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;2;3)$, $B(2;0;4)$, $C(3;-1;2)$. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ là một cặp vectơ chỉ phương của (α).		
b) $\vec{a}=(4;-3;-1)$ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α).		
c) $\vec{n}=(-1;1;-17)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).		
d) $\vec{b}=(10;14;-2)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (α).		

Câu 62 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;4;-2)$, $C(-5;1;0)$, $D(1;0;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.		
b) Tồn tại một số thực $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.		
c) Mặt phẳng song song với AD, BC có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(7;-13;-2)$.		
d) $\vec{n}_2=(4;22;23)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (BCD).		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-6y-8z+1=0$ có một véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;a;b)$. Khi đó tổng $a+b$ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 64 (Mức độ 2). Mặt phẳng (α) đi qua $M(4;1;-2)$ và chứa trục Ox có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;2)$. Tính $2a+3b$. KQ: | | | | |

Câu 65 (Mức độ 2). Cho điểm $A(5;1;-4)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz. Một vec tơ pháp tuyến của (MNP) là $\vec{n}=(4;m;n)$. Tính $m-2n$. KQ: | | | | |

Câu 66 (Mức độ 3). Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $G(2;-3;4)$. Một vec tơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{a}=(1;a;b)$. Tính $2a+3b$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 67 (Mức độ 3). Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $H(2;-3;4)$ là trực tâm của tam giác ABC. Một vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\vec{a}=(a;b;1)$. Tính $a+4b$ *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).* KQ: | | | | |

Câu 68 (Mức độ 3). Cho hình chóp $S.ABC$ có $A(3;0;0)$, $B(0;-1;0)$,$C(0;0;4)$. Hình chiếu của S lên (ABC) là trực tâm H của tam giác (ABC). Một vectơ pháp tuyến của (SAH) là $\vec{n}=(m;2;n)$. Tính $m+3n$. KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

DẠNG 3 Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

1. Mặt phẳng (α) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ có phương trình tổng quát là
$$(\alpha)\colon A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

a. *Phải nắm vững khái niệm* ***vectơ pháp tuyến*** *và* ***vectơ chỉ phương*** *của mặt phẳng.*

- *Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là vectơ có giá vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng thì $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.*
- *Vectơ chỉ phương của mặt phẳng là vectơ có giá song song với mặt phẳng đó. Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng thì $k\vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.*

b. *Mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương) thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.*

c. *Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ nên mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.*

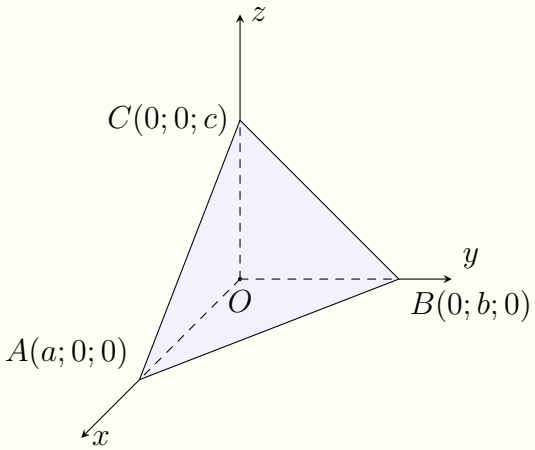
d. *Dựa vào tính chất vuông góc, song song giữa mặt phẳng với mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng trong không gian để tìm vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần lập.*

- *Hai mặt phẳng song song thì có cùng vectơ pháp tuyến.*
- *Hai mặt phẳng vuông góc thì vectơ chỉ phương của mặt phẳng này là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.*
- *Đường thẳng song song mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơ chỉ phương của mặt phẳng.*
- *Đường thẳng vuông góc mặt phẳng thì vectơ chỉ phương của đường thẳng là vectơpháp tuyến của mặt phẳng.*

2. Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

a. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn** là
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
với $a\cdot b\cdot c\neq 0$.



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

b. Phương trình mặt phẳng đặc biệt

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$

- Nếu $D=0$ thì (α) đi qua gốc tọa độ O và có dạng $(\alpha): Ax+By+Cz=0$.
- Nếu $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox.
  - Mặt phẳng (α) song song Ox thì $(\alpha): By+Cz+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa trục Ox thì $(\alpha): By+Cz=0$.
- Nếu $A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy.
  - Mặt phẳng (α) song song Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa trục Oy thì có dạng $(\alpha): Ax+Cz=0$.
- Nếu $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C=0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz.
  - Mặt phẳng (α) song song Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa trục Oz thì có dạng $(\alpha): Ax+By=0$.
- Nếu $A=B=0$, $C\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy).
  - Mặt phẳng (α) song song (Oxy) thì có dạng $(\alpha): Cz+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa (Oxy) thì có dạng $(\alpha): z=0$.
- Nếu $A=C=0$, $B\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz).
  - Mặt phẳng (α) song song (Oxz) thì có dạng $(\alpha): By+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa (Oxz) thì có dạng $(\alpha): y=0$.
- Nếu $B=C=0$, $A\neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz).
  - Mặt phẳng (α) song song (Oyz) thì có dạng $(\alpha): Ax+D=0$.
  - Mặt phẳng (α) chứa (Oyz) thì có dạng $(\alpha): x=0$.



- *Để nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì lấy phương trình $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ làm chuẩn.*
  - *Mặt phẳng (α) chứa gốc tọa độ $O(0;0;0)$ thì $D=0$.*
  - *Mặt phẳng (α) chứa trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D=0$.*
  - *Mặt phẳng (α) song song với trục tương ứng nào (trục Ox, Oy, Oz) thì ẩn đó không có (không chứa Ax, By, Cz) và $D\neq 0$.*
- *Nếu không nhớ các phương trình mặt phẳng đặc biệt thì nhớ vectơ chỉ phương của các trục Ox, Oy, Oz và vectơ pháp tuyến các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz), (Oyz) để chuyển bài toán lập phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến.*
  - *Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.*
  - *Trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.*
  - *Trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.*
  - *Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.*
  - *Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.*
  - *Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.*

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 25. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x+2y-3z^2+1=0$; b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0$; c) $y+1=0$.

Ví dụ 26. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x^2+2y^2-3z^2-1=0$; b) $\dfrac{x}{2}-y+\dfrac{z}{3}+5=0$; c) $xy+5=0$.

Ví dụ 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-z+1=0$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Vectơ $\vec{m}=(2;4;-2)$ có là vectơ pháp tuyến của (α) hay không?

c) Trong hai điểm $A(1;3;2)$, $B(1;1;4)$, điểm nào thuộc mặt phẳng (α)?

Ví dụ 28 (Mức độ 1). Chỉ ra hai vectơ pháp tuyến của $(P)\colon 2x-4y-3z-1=0$.

Ví dụ 29 (Mức độ 1). Chỉ ra hai điểm thuộc $(P)\colon 2x-4y-3z-1=0$.

Ví dụ 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\alpha\colon x+2=0$.

a) Điểm $A(-2;1;0)$ có thuộc (α) hay không? b) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

Ví dụ 31 (Mức độ 2). Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+3z+3=0$.

a) Điểm $A(1;2;3)$ có thuộc mặt phẳng (α) hay không?

b) Tìm x để $B(1;2x;3-x)$ thuộc mặt phẳng (α).

Ví dụ 32. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-4;6)$.

Ví dụ 33. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;-4)$ và vuông góc với trục Oz

Ví dụ 34 (Mức độ 1). Lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M\,(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

Ví dụ 35 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3;-2;2)$ và $\vec{b}=(5;-4;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (α).

Ví dụ 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với $A(1;2;3)$, $B(4;3;5)$, $C(2;3;2)$, $A'(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Ví dụ 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;-1)$, $B(4;1;2)$, $C(2;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;-2;-1)$ đồng thời song song với trục Oy và đường thẳng BC.

Ví dụ 38 (Mức độ 1). Trong không gian $(Oxyz)$, cho điểm $A(6;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(0;2;-1)$. **B.** $M(6;0;-1)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M(6;2;0)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 39 (Mức độ 1). Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x^2+y^2+z^2-1=0$. **B.** $x+y^2+z-1=0$.
C. $x+y+z^2-1=0$. **D.** $3x+4y+z-1=0$.

Ví dụ 40 (Mức độ 1). Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây đi qua điểm $A(-1;2;3)$?

A. $x+2y-3z-1=0$. **B.** $2x+y-3z+9=0$.
C. $x-2y+3z-2=0$. **D.** $-x+3y-4z-2=0$.

Ví dụ 41 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-z+2=0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3=(3;0;-1)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-1;2)$. **C.** $\vec{n}_1=(0;3;-1)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;-1;0)$.

Ví dụ 42 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oxy) là

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $z=0$.

Ví dụ 43 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$. **B.** $x-2y-3z-6=0$.
C. $x-2y+3z-12=0$. **D.** $x-2y-3z+6=0$.

Ví dụ 44 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$ và $B(4;3;1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+2z-3=0$. **B.** $x+y+2z+3=0$. **C.** $x+2y-z-3=0$. **D.** $x+2y-z+3=0$.

Ví dụ 45 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $x-2y-5z-5=0$. **B.** $2x-y+5z-5=0$.
C. $x-2y-5=0$. **D.** $x-2y-5z+5=0$.

Ví dụ 46 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.
C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Ví dụ 47 (Mức độ 2). Mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;4;-6)$ và chứa trục Oy. Lập phương trình (α).

Ví dụ 48 (Mức độ 2). Trong không gian $(Oxyz)$, cho điểm $A(2;-1;0)$, mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z+6=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $B(0;0;-6)$ thuộc mặt phẳng (α).		
b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(3;2;1)$.		
c) Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (α) bằng 6.		
d) Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α) là điểm $H(-1;1;-1)$.		

Ví dụ 49 (Mức độ 2). Các khẳng định sau đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $(1;1;0)$.		
b) Mặt phẳng $x-y-1=0$ song song với trục Ox.		

Phát biểu	Đ	S
c) Mặt phẳng $2x+y-z=0$ đi qua điểm O.		
d) Mặt phẳng $2x-z+2=0$ có một vectơ pháp tuyến là $(2;-1;2)$.		

Ví dụ 50 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (α) song song với trục Ox và Oy.		
b) Mặt phẳng (α) cắt Ox tại điểm $A(1;0;0)$.		
c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm O.		
d) Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.		

Ví dụ 51 (mức độ 3). Trong không gian $(Oxyz)$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$. Tính giá trị của $a^2+b^2+c^2$. KQ: | | | | |

Ví dụ 52 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;4;2)$, $B(2;-2;6)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua $M(2;-1;m)$. Tính m. KQ: | | | | |

Ví dụ 53 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Tính $a+3d$. KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;0;-1), B(1;3;-2), C(3;-4;1)$. Tìm N thuộc (Oyz) sao cho $NA=NB=NC$.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;3;1)$, $B(0;-1;2)$, $C(1;0;3)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc (Oxy) sao cho

a) $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ min. b) $(PA^2+PB^2+PC^2)$ min.

Bài 17. Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Tìm tọa độ điểm $M\in(Oxy)$ sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;3;-3)$, $B(2;-6;7)$, $C(-7;-4;3)$ và $D(0;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 19. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-1=0$ và hai điểm $A(0;-2;3)$; $B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Tính $a^2+b^2+c^2$.

Bài 20 (Mức độ 1). Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-4z-3=0$. Chỉ ra hai vectơ pháp tuyến của (α) và hai điểm thuộc (α).

Bài 21 (Mức độ 1). Viết phương trình các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).

Bài 22. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và vuông góc với trục Ox.

Bài 23. Lập phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

a) (P) đi qua điểm $A(0;4;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;5)$.

b) (P) đi qua điểm $B(1;-2;0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a}=(-3;-1;2)$, $\vec{b}=(1;1;3)$.

c) (P) đi qua ba điểm $M(0;1;1)$, $N(3;2;2)$, $P(4;3;5)$.

d) (P) cắt ba trục tọa độ tại các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;-5)$.

Bài 24. Lập phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau

a) (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1;-2)$.

b) (P) đi qua điểm $N(-2;3;0)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1;)$, $\vec{v}=(3;0;4)$.

c) (P) đi qua ba điểm $A(1;2;2)$, $B(5;3;2)$, $C(2;4;2)$.

d) (P) cắt ba trục tọa độ tại các điểm $M(3;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;2)$.

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, với $A(1;-1;3)$, $B(0;2;4)$, $D(2;-1;1)$, $A'(0;1;2)$.

a) Tính tọa độ các điểm C, B', D'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CB'D')$.

Bài 26 (Mức độ 2). Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $M\,(1;3;-2)$ và vuông góc với giá của $\vec{n}=(2;-1;3)$

b) (α) đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$

c) (α) đi qua hai điểm $C(1;-1;5)$, $D(0;-4;-3)$ và song song với trục Oy

d) (α) là mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng PQ biết $P(1;3;-4)$ và $Q(-1;2;2)$

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;2;1)$, $C(3;1;4)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

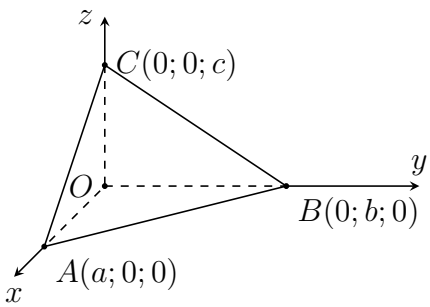
b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Bài 28.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ và cắt ba trục Ox, Oy, Oz tương ứng tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c\neq 0)$. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) có phương trình

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Phương trình trên được gọi là **phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn**.



3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x+y^2+z+1=0$. **B.** $x^2+y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z+3=0$. **D.** $2x+y+z^2+4=0$.

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $I(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}=(a;b;c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

A. $c(x-x_0)+b(y-y_0)+a(z-z_0)=0$.
B. $b(x-x_0)+a(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.
C. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.
D. $d(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Câu 71. Cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_1=(1;3;-1)$. **B.** $\vec{n}_2=(2;3;-1)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;2;-1)$. **D.** $\vec{n}_4=(1;2;3)$.

Câu 72. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y-z=0$. **D.** $z=0$.

Câu 73. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$?

A. $x-2y+3z-12=0$.
B. $x-2y-3z+6=0$.
C. $x-2y+3z+12=0$.
D. $x-2y-3z-6=0$.

Câu 74. Mặt phẳng $(P)\colon 3x-4y+5z-6=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(3;4;5)$. **B.** $\vec{n}_2=(3;-4;5)$. **C.** $\vec{n}_3=(-3;4;5)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;4;-5)$.

Câu 75. Cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y-z+5=0$.
B. $2x-y-z-5=0$.
C. $x+y+2z-3=0$.
D. $3x+2y-z-14=0$.

Câu 76. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0;0;-1)$, có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(-1;2;-3)$ và $\vec{b}=(3;0;5)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là

A. $5x-2y-3z-21=0$.
B. $-5x+2y+3z+3=0$.
C. $10x-4y-6z+21=0$.
D. $5x-2y-3z+21=0$.

Câu 77. Cho ba điểm $A(3;0;1)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình của mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y-4z+2=0$.
B. $2x+3y-4z-2=0$.
C. $4x+6y-8z+2=0$.
D. $2x-3y-4z+1=0$.

Câu 78. Cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-y+2z+4=0$. Mặt phẳng đi qua M và song song với (α) có phương trình là

A. $3x+y-2z-14=0$.
B. $3x-y+2z+6=0$.
C. $3x-y+2z-6=0$.
D. $3x-y-2z+6=0$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(6;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(0;2;-1)$. **B.** $M(6;0;-1)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $M(6;2;0)$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α)?

A. $M(1;2;3)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(1;-1;0)$. **D.** $Q(3;3;0)$.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-3=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a-b=3$. **B.** $2a-b=2$. **C.** $2a-b=-2$. **D.** $2a-b=4$.

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính thể tích tứ diện $OABC$ biết A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $2x-3y+4z+24=0$ với trục Ox, Oy, Oz.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. 192. **B.** 288. **C.** 96. **D.** 78.

Câu 83. Cho $(P)\colon 2x-y-z+4=0$ và $A(2;0;1)$, $B(0;-2;3)$. Gọi M là điểm có tọa độ nguyên thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA=MB=3$. Tìm tọa độ của điểm M

A. $\left(\frac{6}{7};\frac{-4}{7};\frac{12}{7}\right)$. **B.** $(0;-1;5)$. **C.** $(0;1;-3)$. **D.** $(0;1;3)$.

Câu 84 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon\ x+2y+3z-5=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1=(3;2;1)$. **B.** $\vec{n}_3=(-1;2;3)$. **C.** $\vec{n}_4=(1;2;-3)$. **D.** $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Câu 85 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;3)$?

A. $2x+4y-6z-1=0$. **B.** $-x+2y-3z+2=0$.
C. $x-2z+3=0$. **D.** $x-2y+3=0$.

Câu 86 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-z+1=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;0;0)$. **B.** $N(0;-2;0)$. **C.** $P(1;-2;1)$. **D.** $Q(1;2;-1)$.

Câu 87 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y-z=0$. **D.** $z=0$.

Câu 88 (Mức độ 1). Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+2z-3=0$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\,(3;0;0)$. **B.** $N\,(1;1;1)$. **C.** $P\,(2;1;1)$. **D.** $Q\,(-3;0;3)$.

Câu 89 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. **B.** $\vec{n}=(3;6;-2)$. **C.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$. **D.** $\vec{n}=(2;-1;3)$.

Câu 90 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{m}=(1;1;1)$. **C.** $\vec{j}=(0;1;0)$. **D.** $\vec{k}=(0;0;1)$.

Câu 91 (Mức độ 1). Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây song song với trục Oz?

A. $z-18=0$. **B.** $3x+y=0$. **C.** $6x-2y-1=0$. **D.** $x+y-3z=0$.

Câu 92 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $Q(2;-1;5)$. **B.** $N(2;-3;0)$. **C.** $P(0;2;-3)$. **D.** $M(2;0;-3)$.

Câu 93 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):2x-3y+1=0$?

A. $\vec{a}=(2;-3;1)$. **B.** $\vec{b}=(2;1;-3)$. **C.** $\vec{c}=(2;-3;0)$. **D.** $\vec{d}=(3;2;0)$.

Câu 94 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2019=0$. **C.** $y+5=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Câu 95 (Mức độ 1). Xác định m để mặt phẳng $(P)\colon 3x-4y+2z+m=0$ đi qua điểm $A(3;1;-2)$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=-9$.

Th.S NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 96 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(1;-4;1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $-6y-2z-18=0$. **B.** $3y+z+1=0$. **C.** $-6y-2z-22=0$. **D.** $3y+z-9=0$.

Câu 97 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P\,(0;2;0)$. **B.** $N\,(1;2;3)$. **C.** $M\,(1;0;0)$. **D.** $Q\,(0;0;3)$.

Câu 98 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M\,(0;0;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;-2)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x-y+2z-2=0$. **B.** $y-2z+1=0$. **C.** $y-2z+2=0$. **D.** $y+2z-2=0$.

Câu 99 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-1)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y-z+5=0$. **B.** $2x-y-4=0$.
C. $x+y+2z-3=0$. **D.** $3x+2y-z-14=0$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 100. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-2z+2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;0;-2)$.		
b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng 2.		
c) (P) cắt trục Oz tại điểm có cao độ bằng 1.		
d) Điểm $M(2;1;4)$ thuộc mặt phẳng (P).		

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-3;2)$ là $x-3y+2z=0$.		
b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;0;-2)$ là $x-2z-5=0$.		
c) Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y=0$.		
d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;-1)$ và nhận vectơ $\vec{j}$ làm vectơ pháp tuyến là $z+1=0$..		

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua $A(1;2;1)$ là $-x+2y=0$.		
b) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;-4)$ là $4x+2y-z-4=0$.		
c) Cho $A(2;-4;-6)$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA là $x-2y-3z-14=0$.		

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
d) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-1;2)$, $B(1;3;2)$ và $C(-1;2;1)$ là $-4x-y+9z+2=0$.		

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(6;2;-1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $OA=\sqrt{41}$.		
b) Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox là điểm $B(6;0;0)$.		
c) Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (Oxz) là điểm $C(6;0;1)$.		
d) Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $D(0;2;-1)$.		

Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+3=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{d}(A,(P))=4$.		
b) (P) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1.		
c) (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$.		
d) Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ thỏa mãn $AM=4$ thì $a+b+c=\dfrac{2}{3}$.		

Câu 105. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-1=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $OM=\sqrt{14}$.		
b) $\mathrm{d}(M,(Oyx))=\sqrt{10}$.		
c) $\mathrm{d}(M,(P))=1$.		
d) Điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P) có tọa độ là $(0;1;3)$.		

Câu 106. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $OA=2\sqrt{3}$.		
b) Gọi H là hình chiếu của A lên trục Oz thì $OH=2$.		
c) $A\in(S)$.		
d) Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=6$, khi đó M thuộc mặt phẳng có phương trình $2x-2y+6z+9=0$.		

Câu 107 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-y-2z-1=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (α) song song với trục Ox.		
b) Mặt phẳng (α) cắt Oy tại điểm $A(0;1;0)$.		
c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $B(1;0;1)$.		
d) Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $(3;-1;-2)$.		

Câu 108 (Mức độ 2). Các khẳng định sau đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $(\alpha)\colon x^2+y^2-2x-2y=0$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng.		
b) $(\beta)\colon 3x-4y+2z-2=0$ đi qua điểm $A(0;0;1)$.		
c) $(\gamma)\colon x-2y-2=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;-2)$.		
d) (Oyz) đi qua điểm $B(0;3;4)$.		

Câu 109 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(-2;1;4)$, $C(0;-3;0)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.		
b) (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.		
c) $D(-5;-2;4)$ là điểm thỏa mãn điều kiện tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.		
d) Bốn điểm A, B, C, E đồng phẳng, biết $E(2;-1;0)$.		

Câu 110 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(4;1;0)$, $B(-2;1;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $I(-3;0;2)$ là trung điểm của đoạn AB.		
b) (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;4)$.		
c) (P) có phương trình là $3x-2z+1=0$.		
d) Điểm $M(3;5;5)$ nằm trên (P).		

Câu 111 (Mức độ 3). Cho ba điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;3;-6)$, $C(4;4;-5)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Trọng tâm của tam giác ABC là $G(7;11;-16)$.		
b) (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;1;1)$.		
c) (ABC) đi qua điểm $M(2;3;-6)$.		
d) Điểm $H(2;3;-6)$ là trực tâm của tam giác ABC.		

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm giá trị của a để điểm $M(a;2a-1;1)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-3=0$. KQ: | | | | |

Câu 113. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+5=0$. Gọi giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục Ox và Oz lần lượt là X và Z. Tính diện tích tam giác OXZ.

KQ: | | | | |

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0), B(1;b;0), C(1;0;c)$, với a,b,c là các số thực thay đổi sao cho $H(3;2;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $S=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y-z+1=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA=MB=MC$. Tính thể tích khối tứ diện $MABC$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z+1=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2+MB^2=246$. Tính $S=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 117 (Mức độ 2). Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+4mz-2=0$ với m là tham số. Tìm m để điểm $A(1;2;1)$ nằm trên (α). KQ: | | | | |

Câu 118 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(0;3;1)$, $B(-2;5;-3)$. Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 119 (Mức độ 2). Cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(-2;0;-3)$, $C(3;4;1)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $4x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$. KQ: | | | | |

Câu 120 (Mức độ 2). Cho (α) đi qua $M(0;1;1)$, $N(-2;0;-3)$ và song song với trục Oy. Tìm giá trị m để điểm $M(m-1;1;4m+2)$ nằm trên (α). KQ: | | | | |

Câu 121 (Mức độ 3). Mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+1=0$ cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm M, N, P sao cho $G(-1;2;2)$ là trọng tâm tam giác MNP. Tính $A+2B+3C$. KQ: | | | | |

DẠNG 4 Vị trí tương đối, góc, khoảng cách

1. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho mặt phẳng

$(P_1)\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$;
$(P_2)\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó

— $(P_1)\parallel(P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$.

— $(P_1)\equiv(P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k\neq 0$ sao cho $\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}$.

— (P_1) cắt (P_2) khi và chỉ khi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

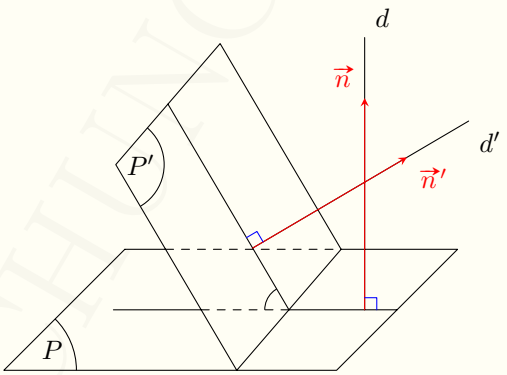
— (P_1) vuông góc (P_2) khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Để xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng, ta cần xác định cặp vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng. Trong trường hợp hai vectơ này cùng phương với nhau, ta mới xét tiếp quan hệ giữa hai hệ số D_1 và D_2. Từ đó đưa ra kết luận hai mặt phẳng đã cho cắt nhau, song song hay trùng nhau.

2. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$, $\vec{n}' = (n_1'; n_2'; n_3')$.
Gọi d và d' là hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (P) và (P'). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') là góc giữa hai đường thẳng d và d'.

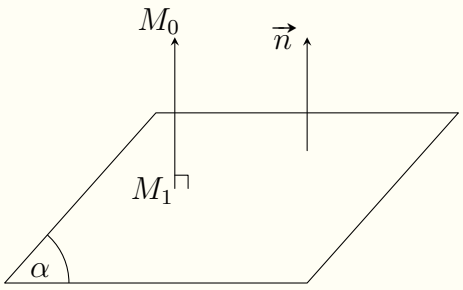


Định lí 1 Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ và $\vec{n}' = (n_1'; n_2'; n_3')$ được tính bởi công thức

$$\cos((P),(P')) = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|n_1 \cdot n_1' + n_2 \cdot n_2' + n_3 \cdot n_3'|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \cdot \sqrt{n_1'^2 + n_2'^2 + n_3'^2}}.$$

3. Khoảng cách

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Gọi $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên (α).
Độ dài đoạn thẳng M_0M_1 gọi là **khoảng cách** từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α).



Định lí 2 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến (α) là

$$\mathrm{d}(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 54 (Mức độ 1). Mặt phẳng (P): $4x - 3y + z + 5 = 0$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

a) (Q): $8x + 6y + 2z + 9 = 0$; b) (R): $8x + 6y + 2z + 10 = 0$; c) (S): $4x + 2y + z + 5 = 0$.

Ví dụ 55 (Mức độ 1). Cho hai mặt phẳng (P_1): $2x - y - 3z + 1 = 0$, (P_2): $6x - 3y - 9z + 1 = 0$. Chứng minh rằng $(P_1) \parallel (P_2)$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 56 (Mức độ 2). Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z+12=0$.

Ví dụ 57 (Mức độ 1). Cho ba mặt phẳng $(P)\colon x-4y+3z+2=0$; $(Q)\colon 4x+y+88=0$; $(R)\colon x+y+z+9=0$. Chứng minh rằng $(P)\perp(Q)$ và $(P)\perp(R)$.

Ví dụ 58 (Mức độ 1). Cho hai mặt phẳng $(P_1)\colon x-y-2z+4=0$, $(P_2)\colon x-y+z+5=0$. Chứng minh rằng $(P_1)\perp(P_2)$.

Ví dụ 59 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-y+z+\sqrt{2}=0$ và $(\beta)\colon 3\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z+1=0$. Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?

Ví dụ 60 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, chứng minh hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-3y+2z+1=0$ và $(\beta)\colon 5x+y-z+2=0$. vuông góc với nhau.

Ví dụ 61 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;2;-2)$, $B(2;4;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+3y+z-1=0$.

Ví dụ 62 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+z+5=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(\alpha')\colon -4x+6y-2z+7=0$ song song với (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và song song với (α).

Ví dụ 63 (Mức độ 1). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(P_1)\colon x+y+2z-1=0$ và $(P_2)\colon 2x-y+z-2=0$.

Ví dụ 64 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon \sqrt{3}x-y+2=0$ và các mặt phẳng tọa độ $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$

Ví dụ 65 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-1=0$ và $(Q)\colon x+y-z+1=0$.

Ví dụ 66 (Mức độ 1). Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') trong mỗi trường hợp sau

a) $(P)\colon x+y-2z+9=0$ và $(P')\colon 3x-5y+z+2024=0$;

b) $(P)\colon x+y+24=0$ và $(P')\colon y+z+24=0$;

c) $(P)\colon 2x+4y-z+23=0$ và $(P')\colon 3x+5y+26z+2025=0$.

Ví dụ 67. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') trong mỗi trường hợp sau

a) $(P)\colon 3x+7y-z+4=0$ và $(P')\colon x+y-10z+2025=0$.

b) $(P)\colon x+y-2z+2024=0$ và $(P')\colon 3x-5y+z+9=0$.

c) $(P)\colon x+z+3=0$ và $(P')\colon 3y+3z+5=0$.

Ví dụ 68 (Mức độ 1). Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến mặt phẳng sau

a) $(P)\colon x+y+z+12=0$; b) $(Q)\colon 4x+3y+10=0$.

Ví dụ 69 (Mức độ 2). Tính chiều cao của hình chóp $S.ABC$ có tọa độ các đỉnh là $S(5;0;1)$, $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(5;2;3)$.

Ví dụ 70 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách

a) Từ $A(-2;-3;-5)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z-5=0$;

b) Giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon y-4=0$ và $(\beta)\colon y+5=0$

Th.S NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 71 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+3y+z+2=0$ và $(Q)\colon x+3y+z+5=0$.

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) song song với nhau.

b) Lấy một điểm thuộc (P), tính khoảng cách từ điểm đó đến (Q). Từ đó tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ví dụ 72 (Mức độ 3). Trong hệ trục toạ độ không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, biết $b,\, c>0$, $(P)\colon y-z+1=0$. Tính $M=b+c$ biết $(ABC)\perp(P)$, $\mathrm{d}(O;(ABC))=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 73 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ (với $abc>0$) đi qua hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$. Biết $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{2}{3}$ và điểm $C(-3;1;0)$. Tính $\mathrm{d}(C,(P))$.

2 Bài tập tự luận

Bài 29. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-3y+2z+1=0$, $(\beta)\colon 5x+y-z+2=0$ vuông góc với nhau.

Bài 30. Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x+y-z+1=0$, $(\beta)\colon 9x+3y-3z+3=0$ có vuông góc với nhau hay không?

Bài 31. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y-2z+7=0$, $(Q)\colon 3x-2y-11=0$, $(R)\colon 4x+6y-4z-9=0$, $(T)\colon 7x+y-z+1=0$.

Bài 32. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$; $(Q)\colon 2x+2y-2z+99=0$; $(R)\colon 3x+3y+6z+7=0$.

Bài 33. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $C(1;-5;0)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 3x-5y+4z-2024=0$.

Bài 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 5x+2y-4z+6=0$, $(\beta)\colon 10x+4y-2z+12=0$.

a) Hỏi (α) và (β) có song song với nhau hay không?

b) Chứng minh rằng điểm $M(1;-3;5)$ không thuộc mặt phẳng (α) nhưng thuộc mặt phẳng (β).

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;-3;5)$ và song song với (α).

Bài 35. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(5;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon 2x-y+z-7=0$.

Bài 36. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P)\colon 4x-2y+6z-11=0$, $(Q)\colon 2x+2y+2z-7=0$.

Bài 37. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;-1;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q)\colon 3x+2y-z=0$, $(R)\colon x+y-z=0$.

Bài 38. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $M(2;3;-1)$, song song với trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-3z+1=0$.

Bài 39. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua

a) điểm $I(3;-4;1)$ và vuông góc với trục Ox;
b) điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với (Ozx);
c) điểm $K(-2;4;-1)$ và song song với $(Q)\colon 3x+7y+10z+1=0$.

Bài 40. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta)\colon 2x-y+3x+4=0$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 41. Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng sau

a) $(\alpha_1)\colon x+2y-3z+2=0$ và $(\alpha_2)\colon -2x-4y+6x-5=0$;

b) $(\beta_1)\colon x+2z-5=0$ và $(\beta_2)\colon 4x-3y-2z+1=0$;

c) $(\gamma_1)\colon x-2y+z+3=0$ và $(\gamma_2)\colon 2x-4y+3z+2=0$

Bài 42 (Mức độ 1). Tính góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon 4y+4z+1=0$ và $(P')\colon 7x+7z+2=0$.

Bài 43 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để góc giữa hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z+2=0$ và $(Q)\colon -x+(2m^2-1)y+2z-1=0$ bằng 60°.

Bài 44 (Mức độ 2). Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau

a) $(\alpha)\colon 3x+4y+5z-1=0$ và $(\beta)\colon 2x+y+z-3=0$.

b) $(\alpha)\colon x-y+2z-1=0$ và $(\beta)\colon x+2y-z+3=0$.

c) $(\alpha)\colon x+3y-2z-1$ và $(\beta)\colon 4x+2y+5z-3$.

Bài 45 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $(Q)\colon y+z+1=0$ một góc bằng 60°. Viết phương trình của mặt phẳng (P).

Bài 46. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;-2;3)$ tới mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+4=0$.

Bài 47. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+5=0$.

Bài 48. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+1=0$.

Bài 49. Tính khoảng cách từ điểm $M(2;-1;4)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P)\colon 4x+3y+5=0$; b) $(Q)\colon 6x-8z-13=0$; c) $(R)\colon x+y-z+8=0$.

Bài 50. Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P)\colon 3x+4z+10=0$; b) $(Q)\colon 2x-10=0$; c) $(R)\colon 2x+2y+z-3=0$.

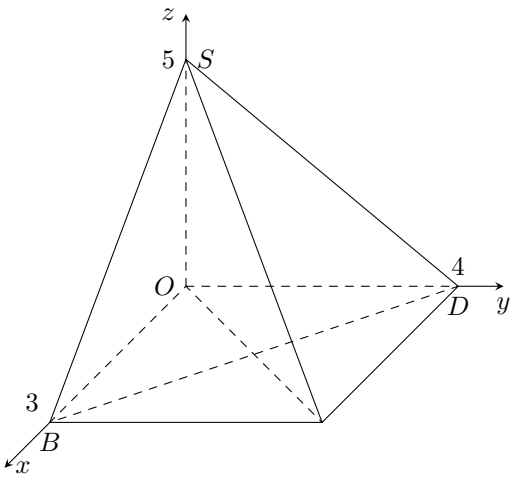
Bài 51.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật với $O(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;4;0)$, $S(0;0;5)$.

a) Tìm tọa độ điểm C.

b) Viết phương trình mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).



Bài 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0, (Q)\colon x+y+z+6=0$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng đã cho song song với nhau và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 53. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+3y-z=0, (Q)\colon x-y-2z+1=0$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Tìm điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 54. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+12=0$, $(Q)\colon 4x+2y+4z-6=0$.

a) Chứng minh $(P)\ /\!/\ (Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa (P) và (Q).

Bài 55. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+3=0$ và $(Q)\colon 2x-2y+z+9=0$.

Bài 56. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon -3x+4y+12z-1=0$ và $(\beta)\colon 6x-8y-24z+4=0$.

Bài 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ và $D(2;1;3)$. Tìm độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ vẽ từ đỉnh D.

Bài 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng có phương trình là $3x-6y+12z-3=0$ và $2x-my+8z+2=0$, với m là tham số thực. Tìm m để mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và khi đó tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 59. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $DA=2$, $DC=3$, $DD'=2$. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng $(BA'C')$.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 122 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)?

A. $3x+y-2z-14=0$. **B.** $3x-y-2z+6=0$.
C. $3x-y+2z-6=0$. **D.** $3x-y-2z+6=0$.

Câu 123 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+4=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z-7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.
C. $2x+y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z+7=0$.

Câu 124. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y-3z+8=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (α)?

A. $x-3y+3z-7=0$. **B.** $3x-3y+z-7=0$.
C. $x+2y-z-8=0$. **D.** $x-2y+z+8=0$.

Câu 125 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oyz) và đi qua điểm $M(1;1;3)$ có phương trình là

A. $x+y+z-5=0$. **B.** $x-1=0$. **C.** $y+z-4=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Câu 126 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) tương ứng có phương trình là $2x+6y-4z+8=0$; $5x+15y-10z+20=0$ và $6x+18y-12z-24=0$. Chọn mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề sau

A. $(P)\ /\!/\ (Q)$. **B.** (P) cắt (Q). **C.** (Q) cắt (R). **D.** $(R)\ /\!/\ (P)$.

Câu 127 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $(Q)\colon 2x+m^2y-2z+1=0$, với m là tham số thực. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi m thỏa mãn

A. $|m|=2$. **B.** $|m|=1$. **C.** $|m|=\sqrt{3}$. **D.** $|m|=\sqrt{2}$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và $\vec{n'}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Chọn công thức đúng.

A. $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{|\vec{n}|\left|\vec{n'}\right|}$. **B.** $\sin\varphi = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\left|\vec{n'}\right|}$. **C.** $\sin\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n'}\right|}{|\vec{n}|\left|\vec{n'}\right|}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\left|\vec{n'}\right|}$.

Câu 130. Góc giữa 2 mặt phẳng $(P)\colon 8x-4y-8z-11=0$ và $(Q)\colon \sqrt{2}x-\sqrt{2}y+7=0$ bằng

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x+z-1=0$ và $(\beta)\colon y+3=0$ bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $0°$.

Câu 132. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$, mặt phẳng $(Q)\colon x-3y+5z-2=0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

A. $-\dfrac{5}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-1=0$, $(Q)\colon x+2y-z+2=0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) được kết quả là

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $120°$. **D.** $150°$.

Câu 134. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và $(Q)\colon mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=6$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=1$.

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{5}$. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$.

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\dfrac{5}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$.

Câu 137. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $y+z+1=0$ góc $60°$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x-z-1=0 \\ x-z=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x-2z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right.$.

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc $60°$ thì giá trị của m là

A. $m=\pm\dfrac{12}{5}$. **B.** $m=\pm\dfrac{2}{5}$. **C.** $m=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$. **D.** $m=\pm\dfrac{5}{2}$.

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-2=0$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 1.

Câu 140. Cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

A. $\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **B.** $\dfrac{5}{29}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Câu 141. Cho ba mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+2z+1=0$, $(\beta)\colon x+y-z+2=0$ và $(\gamma)\colon x-y+5=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $(\alpha)\perp(\beta)$. **B.** $(\gamma)\perp(\beta)$. **C.** $(\alpha)\parallel(\beta)$. **D.** $(\alpha)\perp(\gamma)$.

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+16=0$ và điểm $M(0;1;-3)$, khi đó khoảng cách từ M đến (P) là

A. $\dfrac{21}{9}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(1;-2;3)$ đến $(P)\colon x+3y-4z+9=0$ là

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\dfrac{17}{\sqrt{26}}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{26}}{13}$.

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-2z-1=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y-2z+4=0$ và $(\beta)\colon -x+2y+2z-7=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

A. 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 146. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;1)$. Tính khoảng cách h từ gốc toạ độ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $h=\dfrac{1}{3}$. **B.** $h=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $h=\dfrac{2}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 148. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;-1)$ và $C(2;-1;2)$. Điểm D thuộc tia Oz sao cho độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh D của tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{30}}{10}$ có tọa độ là

A. $(0;0;1)$. **B.** $(0;0;3)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;0;4)$.

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(2;1;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Tính khoảng cách từ điểm $I(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{17\sqrt{30}}{30}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. **C.** $\dfrac{19\sqrt{30}}{30}$. **D.** $\dfrac{11\sqrt{30}}{30}$.

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất, khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích V của khối chóp $O.ABC$.

A. $V=\dfrac{1372}{9}$. **B.** $V=\dfrac{686}{9}$. **C.** $V=\dfrac{524}{3}$. **D.** $V=\dfrac{343}{9}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 151. Các khẳng định sau đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.		
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thì cắt nhau.		
c) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.		
d) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.		

Câu 152. Trong không gian $Oxzy$, các khẳng định sau đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) Hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z+1=0$ và $(Q)\colon 4x-6y+2z+3=0$ song song với nhau.		
b) Hai mặt phẳng $(P)\colon z-3=0$ và $(Q)\colon 3x+2y-1=0$ vuông góc với nhau.		
c) Hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$ và $(Q)\colon 4x+2y-4z+5=0$ song song với nhau.		
d) Hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+3=0$ và $(Q)\colon -3x+6y-3z-9=0$ trùng nhau.		

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+1=0$, $(Q)\colon -4x+by+cz+5=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow b=2,\ c=-6$.		
b) Tồn tại giá trị của b và c để $(P)\equiv(Q)$.		
c) Với $b=1$ và $c=2$ thì (P) cắt (Q).		
d) Với $b=1$ và $c=3$ thì $(P)\perp(Q)$.		

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, Cho ba mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+2z+1=0$; $(\beta)\colon x+y-z+2=0$; $(\gamma)\colon x-y+5=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $(\alpha)\parallel(\gamma)$.		
b) $(\alpha)\perp(\beta)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $(\gamma)\perp(\beta)$.		
d) $(\alpha)\perp(\gamma)$.		

Câu 155. Các khẳng định sau đúng hay **sai**?

Phát biểu	Đ	S
a) $(P)\colon x+2y-z+5=0\parallel(Q)\colon 2x+3y-7z-4=0$.		
b) $(P)\colon x-2y+z-3=0\parallel(Q)\colon 2x-4y+2z-6=0$.		
c) $(P)\colon x+y+z-1=0\parallel(Q)\colon 2x+2y+2z+3=0$.		

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
d) $(P)\colon x-y+2z-4=0 \,//\, (Q)\colon 10x-10y+20z-40=0.$		

Câu 156. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon (m^2+m+1)x-3y+(m+3)z+1=0$ và $(Q)\colon x-3y-3z+5=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=(m^2+m+1;-3;m+3)$.		
b) Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=(1;-3;-3)$.		
c) Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(3;0;0)$.		
d) Tồn tại 2 giá trị của m để (P) và (Q) song song với nhau.		

Câu 157. Cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;3)$.		
b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;3)$.		
c) Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với (P).		
d) Mặt phẳng (Q) có phương trình là $x+2y-3z-3=0$.		

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-my+1=0$ và $(Q)\colon 5y+12z+3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tồn tại giá trị m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.		
b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi $m=0$.		
c) Với $m=4$ thì góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) gần bằng $42{,}4°$.		
d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $60°$ khi và chỉ khi $m=\pm\dfrac{39}{\sqrt{407}}$.		

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$ $(m\neq 0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình của mặt phẳng (P) là $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{m}=-1$.		
b) Nếu $m=\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ thì (P) hợp với (Oxy) góc $60°$.		
c) Với $m=1$ thì (P) hợp với mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z-3=0$ một góc xấp xỉ $74,2°$.		
d) (P) luôn hợp với (Oxz) và (Oyz) các góc bằng nhau với $m\neq 0$ bất kỳ.		

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2). Khi đó

Phát biểu	Đ	S

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.		
b) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.		
c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$.		
d) $\cos\alpha = \dfrac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$.		

Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có các véc tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Gọi α là góc giữa (P_1) và (P_2). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\alpha = (\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.		
b) $\alpha + (\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 180°$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\cos\alpha = \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)$.		
d) $\cos\alpha = \lvert\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)\rvert$.		

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q)\colon x - y + 2 = 0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $135°$.		
b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $45°$.		
c) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.		
d) Điểm $M\,(0;5;0)$ thuộc mặt phẳng (P).		

Câu 163. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x - y - 5 = 0$, và biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H\,(2;-1;-2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $135°$.		
b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $45°$.		
c) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $60°$.		
d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $120°$.		

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$, $(Q)\colon x - y - z - 2 = 1$, $(R)\colon x + 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi α_1, α_2, α_3 lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), (Q) và (R), (R) và (P). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$.		
b) $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$.		
d) $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$.		

Câu 165. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $(Q)\colon y + z + 1 = 0$ góc $60°$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Góc giữa mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (Oyz) là $90°$.		
b) Có vô số mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán.		
c) Có đúng hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x-z=0$ và $x+z=0$.		
d) Tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và vuông góc với nhau.		

Câu 166. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc $60°$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $c>-1$.		
b) $a+b+c<3$.		
c) Góc giữa (P) và mặt phẳng (Q): $z=3$ là $45°$.		
d) Mặt phẳng (R): $(m-1)x+(1-m)y=0$ luôn tạo với (P) một góc không đổi khi m thay đổi và $m\neq 1$.		

Câu 167. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P_1): $2x+y+2z-1=0$; (P_2): $x-2y-2z-7=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Vectơ có tọa độ $(2;1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_1).		
b) Vectơ có tọa độ $(1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P_2).		
c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{n}_1=(2;1;2)$ và $\vec{n}_2=(1;-2;-2)$ bằng $-\dfrac{4}{9}$.		
d) Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng $116°$.		

Câu 168. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.		
b) Góc giữa (OAB) và mặt phẳng (Oyz) bằng $45°$.		
c) $M(0;0;-\sqrt{3})$.		
d) Góc giữa (MAB) và (OAB) bằng $45°$.		

Câu 169. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $ax+by+cz+d=0$ và một điểm $A(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.		
b) Nếu $A\in(P)$ thì $\mathrm{d}(A,(P))\neq 0$.		
c) Nếu $A\notin(P)$ và H là hình chiếu của A trên (P) thì $\mathrm{d}(A,(P))=AH$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Phát biểu	Đ	S
d) Nếu $AB \parallel (P)$ thì $\mathrm{d}(A,(P)) = \mathrm{d}(B,(P))$.		

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi a là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-12=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $a = OM$ với M là hình chiếu vuông góc của O trên (α).		
b) $a = \dfrac{4}{3}$.		
c) $a = 4$.		
d) $a = OM$ với M là điểm bất kỳ trên (α).		

Câu 171. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x-y+z=0$ và $2x-y+z-7=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{d}((P),(Q)) = d(A,(Q))$ với $A \in (P)$.		
b) $\mathrm{d}((P),(Q)) = 7\sqrt{6}$.		
c) $\mathrm{d}((P),(Q)) = 6\sqrt{7}$.		
d) $\mathrm{d}((P),(Q)) = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$.		

Câu 172. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$, $(Q)\colon x-2y+2z-3=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.		
b) $\mathrm{d}(A,(P)) = 1$.		
c) $\mathrm{d}((P),(Q)) = \dfrac{2}{3}$.		
d) Phương trình mặt phẳng song song cách đều (P) và (Q) là $x-2y+2z+2=0$.		

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4z+5=0$, điểm $A(1;-2;0)$ và $B(-3;2;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $AB \parallel (P)$.		
b) $\mathrm{d}(A,(P)) = 3$.		
c) $\mathrm{d}(A,(P)) = 2\mathrm{d}(B,(P))$.		
d) Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua B và cắt ba trục tọa độ sao cho $\mathrm{d}(O,(Q))$ lớn nhất là $-3x+2y+2z-17=0$.		

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+m=0$ và điểm $A(1;1;1)$. Khi đó

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu $m=-1$ thì $A\in(P)$.		
b) Nếu $m=1$ thì $\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{2}{3}$.		
c) Với $B(3;1;2)$ thì $\mathrm{d}(A,(P))=\mathrm{d}(B,(P))$ với mọi $m\in\mathbb{R}$.		
d) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P), khi đó $\mathrm{d}((P),(Q))=\dfrac{m-1}{3}$.		

Câu 175. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-5=0$ và điểm $A(1;-2;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{4}{3}$.		
b) Mặt phẳng $(Q)\colon -x-2y-2z+2=0$ song song và cách (P) một khoảng bằng 2.		
c) Mặt phẳng $(R)\colon 2x+4y-4z+1=0$ song song và cách (P) một khoảng bằng 1.		
d) Các mặt phẳng song song và cách (P) một khoảng bằng 3 có phương trình là $x+2y+2z+6=0$ và $x+2y+2z-12=0$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 176 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-2=0$ song song với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-(m^2+1)\,y+(3m^2-1)\,z-4m=0$ khi m nhận giá trị bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 177 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon m^2x-y+(m^2-2)\,z+2=0$ và $(Q)\colon 2x+m^2y-2z+1=0$. Với m là tham số, $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q)?

KQ: | | | | |

Câu 178 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z+1=0$ và $(\beta)\colon -2x+my+2z-2=0$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để (α) song song với (β)?

KQ: | | | | |

Câu 179 (Mức độ 2). Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $2x+ny+2z+3=0$ và $mx+2y-4z+7=0$. Khi (P) song song với (Q) thì tổng $m+n$ có giá trị là bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*

KQ: | | | | |

Câu 180 (Mức độ 2). Cho hai mặt phẳng có phương trình là $2x-my+3z-6+m=0$ và $(m+3)x-2y+(5m+1)z-10=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó trùng nhau. *(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

KQ: | | | | |

Câu 181. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y-2z+m=0$ và $(Q)\colon 2x-z+3=0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

KQ: | | | | |

Câu 182. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+\sqrt{2}z-2=0$ và $(Q)\colon -x+(m^2-3)y+4=0$. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $((P),(Q))=45^\circ$.

KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 183. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Trên hai tia Bt, Ds vuông góc và nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $BE = \dfrac{a}{2}$, $DF = a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AEF) và (CEF).

KQ: | | | | |

Câu 184. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ và $D(2;1;3)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ vẽ từ đỉnh D bằng $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a - 2b$.

KQ: | | | | |

Câu 185. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $OM = 7$. Biết rằng khoảng cách từ M tới mặt phẳng (Oxz), (Oyz) lần lượt là 2 và 3. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy).

KQ: | | | | |

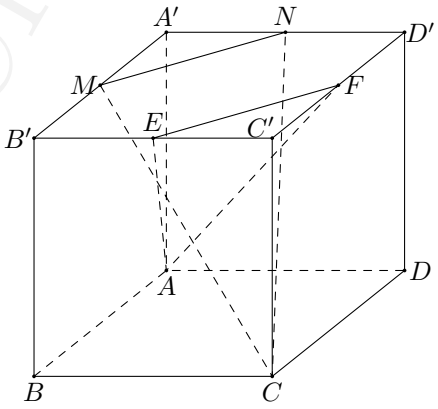
Câu 186. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $CD, CB, A'B'$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (MNP) bằng x, tính giá trị biểu thức $P = 4x^2$.

KQ: | | | | |

Câu 187.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, E, F lần lượt là trung điểm của cạnh $A'B'$, $A'D'$, $B'C'$, $C'D'$ (tham khảo hình bên). Cosin của góc tạo giữa hai mặt phẳng (CMN) và (AEF) bằng $\dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $n - 3m$.

KQ: | | | | |



Câu 188. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P). Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q)\colon x+y-11=0$.

KQ: | | | | |

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q) : x + (2m-1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tính tổng tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\dfrac{\pi}{4}$.

KQ: | | | | |

Câu 190. Biết mặt phẳng $(\alpha) : (2m-1)x - 3my + 2z + 3 = 0$ và $(\beta) : mx + (m-1)y + 4z - 5 = 0$ vuông góc với nhau. Tính tích tất cả các giá trị tìm được của tham số m.

KQ: | | | | |

Câu 191. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(2;0;0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với (P), cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\dfrac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + 3b$.

KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

DẠNG 5 Các bài toán thực tiễn - Cực trị

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 74. Một vật thể chuyển động trong không gian $Oxyz$. Tại mỗi thời điểm t, vật thể ở vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$.

a) Xác định tọa độ của vị trí M_1, M_2, M_3 của vật tương ứng với các thời điểm $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \pi$.

b) Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$.

c) Vị trí $M(\cos t - \sin t; \cos t + \sin t; \cos t)$ có luôn thuộc mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$ hay không?

Ví dụ 75 (Mức độ 3). Trong không gian tọa độ cho điểm $A(0;2;-1)$ và điểm $B(2;0;1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $OA = OB$.		
b) Điểm $I(1;1;0)$ là trung điểm của đoạn AB.		
c) Hình chiếu của điểm A lên trục Ox có tọa độ là $(0;2;0)$.		
d) $M(a;b;c) \in (Oyz)$ là điểm sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị bé nhất, khi đó $a+b+c = 1$.		

Ví dụ 76 (mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;5)$, $B(0;4;-3)$, $C(2;-3;7)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.

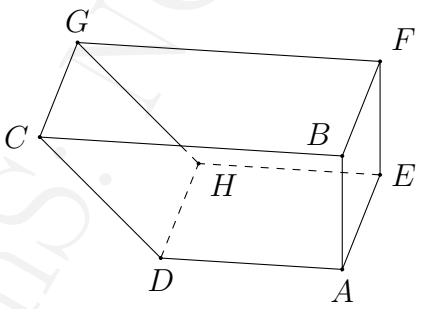
A. $P = -3$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 6$.

Ví dụ 77 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 60. Thùng của một máy nông nghiệp được thiết kế mô phỏng trong hệ trục $Oxyz$ là một hình lăng trụ tứ giác $ABCD.EFGH$ với $A(0;1;2)$, $B\left(0;1;\dfrac{7}{2}\right)$, $C\left(0;4;\dfrac{7}{2}\right)$, $D\left(0;\dfrac{5}{2};2\right)$, $E(2;1;2)$ (Hình dưới).





a) Viết phương trình mặt phẳng $(EFGH)$ và tính chiều cao của lăng trụ $ABCD.EFGH$;

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

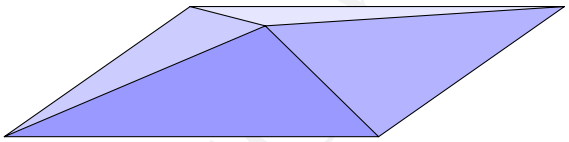
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

b) Viết phương trình mặt phẳng $(CDHG)$ và tính khoảng cách từ F đến mặt phẳng $(CDHG)$.

Bài 61. Trong không gian $Oxyz$, một ngôi nhà có sàn nhà thuộc mặt phẳng Oxy, trần nhà tầng 1 thuộc mặt phẳng $z-1=0$, mái nhà tầng 2 thuộc mặt phẳng $x+y+50z-100=0$. Hỏi trong ba mặt phẳng tương ứng chứa sàn nhà, trần tầng 1, mái tầng 2, hai mặt phẳng nào song song với nhau?

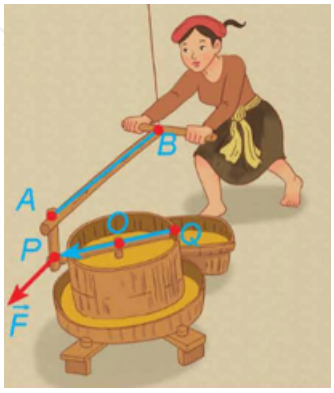
Bài 62.

Bác An dự định làm bốn mái của ngôi nhà sao cho chúng là bốn mặt bên của một hình chóp đều và các mái nhà kề nhau thì vuông góc với nhau. Hỏi ý tưởng trên có thực hiện được không?



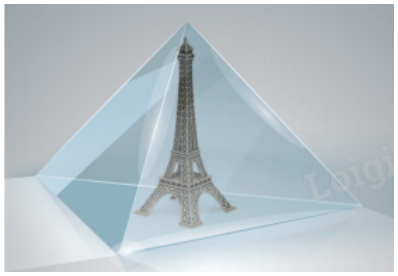
Bài 63.

Xét một cối xay lúa trong không gian $Oxyz$, với đơn vị đo là mét. Nếu tác động vào tai cối xay lúa (ở vị tri P) một lực $\vec{F}$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M}=\left[\overrightarrow{OP},\vec{F}\right]$. Trong quá trình xay, các thanh gỗ AB và PQ luôn có phương nằm ngang. Vectơ lực $\vec{F}$ có giá song song với AB. Giải thích vì sao giá của vectơ moment lực $\vec{M}$ có phương thẳng đứng?



Bài 64.

Bạn An muốn trưng bày một mô hình tháp Effel trong một cái hộp có dạng hình chóp tam giác đều với cạnh bên bằng 20 cm, các mặt bên là các tam giác vuông và chân tháp nằm trên mặt đáy của cái hộp (Hình bên). Hỏi nếu mô hình tháp Effel này cao 11 cm thì đặt được trong hộp không? Vì sao?



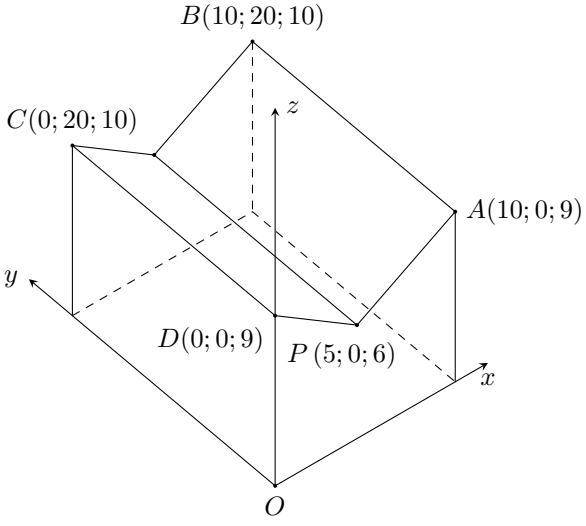
Bài 65.

Hình bên minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.

a) Lập phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.

b) Tìm tọa độ của điểm Q.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.



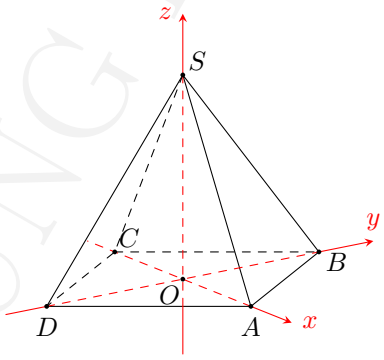
Bài 66. Trong một kì thi tuyển sinh có ba môn thi Toán, Văn, Tiếng Anh. Trong không gian $Oxyz$, người ta biểu diễn kết quả thi của mỗi thí sinh bởi điểm có hoành độ, tung độ, cao độ tương ứng là điểm Toán, Văn, Tiếng Anh của thí sinh đó.

a) Chứng minh rằng các điểm biểu diễn tương ứng với các thi sinh có tổng số điểm ba môn thi bằng 27 (nếu có) cùng thuộc mặt phẳng có phương trình $x+y+z-27=0$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một số mặt phẳng đôi một song song với nhau sao cho hai điểm biểu diễn ứng với hai thí sinh có tổng số điểm thi bằng nhau thì cùng thuộc một mặt phẳng trong số các mặt phẳng đó.

Bài 67 (Mức độ 3).

Để chuẩn bị cho chuyến đi dã ngoại, nhóm bạn Đức thiết kế lều cắm trại dạng hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh 4m. Theo bản vẽ thiết kế thì góc giữa hai mặt bên của lều bằng 60°. Bằng phương pháp tọa độ, hãy tính chiều cao của lều này.

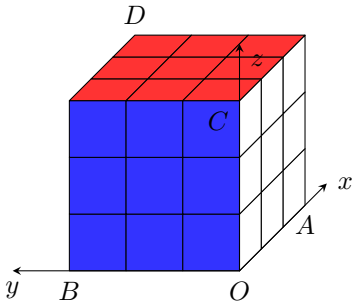


Bài 68.

Một khối rubic được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ với $O(0;0;0)$, $A(3;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $D(3;3;3)$

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng không?

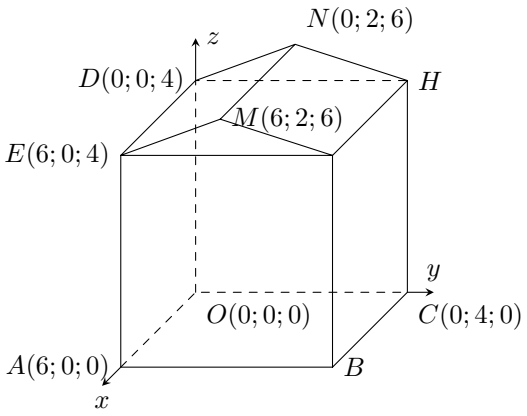


Bài 69.

Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như hình bên nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.

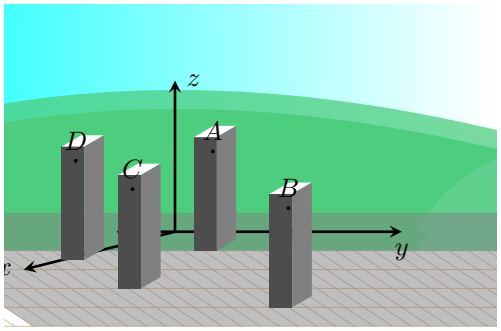


Bài 70.

Hình bên minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng không?



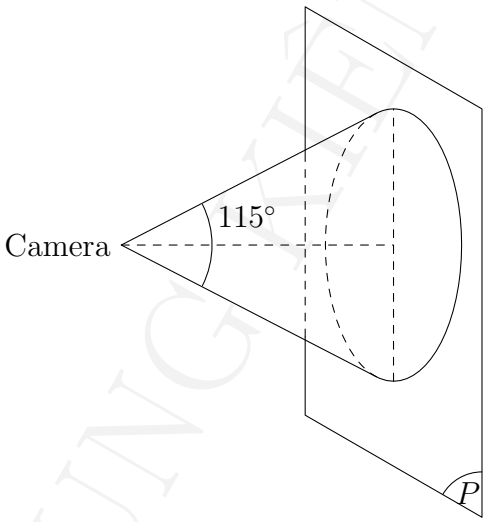
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRẦN NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 71.

Góc quan sát ngang của một camera là 115°. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(1;2;4)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z+3=0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).*

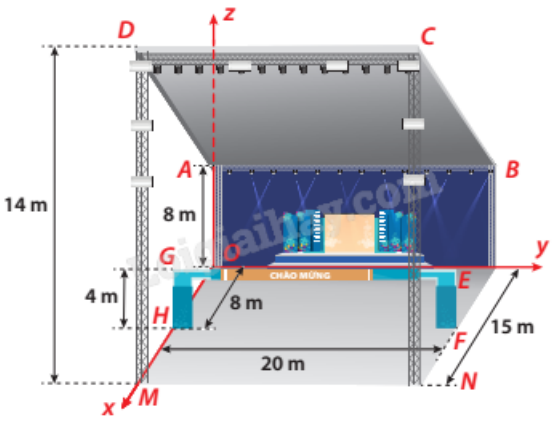


3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 192.

Người ta thiết kế một mái che hình chữ nhật $ABCD$ phía trên sân khấu. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên trục là mét) và các kích thước được cho như hình bên. Phương trình mặt phẳng chứa mái che là

A. $2x-5z+40=0$.
B. $4x+15z+120=0$.
C. $4y+15z-120=0$.
D. $4x+4y-15z-120=0$.



Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z+6=0$. Nếu M thay đổi và thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ là

A. 18. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 108.

Câu 194. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(3;2;4)$, $C(0;5;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(1;3;0)$. **B.** $M(1;-3;0)$. **C.** $M(3;1;0)$. **D.** $M(2;6;0)$.

Câu 195. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ và các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P)\colon ax+by+cz+3=0$. Tính $T=a+b+c$.

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-3y+2z-15=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0+3y_0+z_0$ bằng

A. 11. **B.** 15. **C.** 5. **D.** 10.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $OM = 1$.		
b) Hình chiếu của điểm M lên trục Ox có tọa độ là $(1;2;0)$.		
c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy) bằng 3.		
d) $V_{O.ABC} = \dfrac{686}{9}$.		

Câu 198.

Một công trường xây dựng nhà cao tầng đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$. Các mặt kính của tòa nhà được ký hiệu là $(P), (Q), (R)$ (như hình bên), biết $(P)\colon 3x + y - z + 2 = 0$; $(Q)\colon 6x + 2y - 2z + 11 = 0$; $(R)\colon x - 3y + 1 = 0$. Khi đó

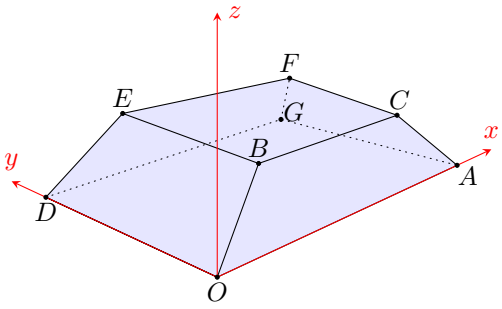


Phát biểu	Đ	S
a) $(P) \parallel (Q)$.		
b) $(P) \perp (R)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $(Q) \parallel (R)$.		
d) (P), (Q), (R) đôi một vuông góc.		

Câu 199.

Hình bên minh họa hình ảnh một toà nhà trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Biết $A(50;0;0)$, $D(0;20;0)$, $B(4k;3k;2k)$ với $k > 0$ và mặt phẳng $(CBEF)$ có phương trình là $z = 3$. Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) $B\left(6;\dfrac{9}{2};3\right)$.		
b) Mặt phẳng $(AOBC)\colon 2y - 3z = 0$.		
c) Mặt phẳng $(DOBE)\colon x + 2z = 0$.		
d) Gọi $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$. Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -6$.		

Câu 200. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;0;0)$, $B(0;0;3)$, $C(0;-3;0)$, $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\triangle ABC$ đều.		

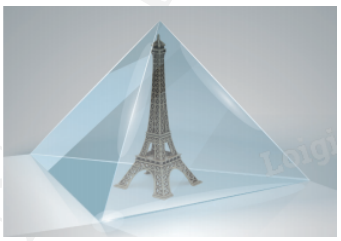
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x+y-z+3=0$.		
c) $C \in (P)$.		
d) Gọi $M(a;b;c) \in (P)$ thỏa mãn $\left\lvert \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} \right\rvert$ nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c=3$.		

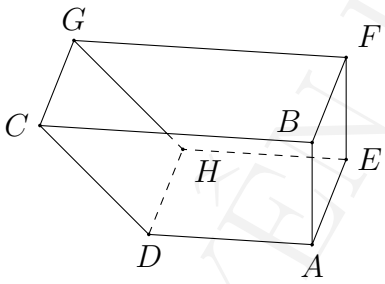
Câu 201.

Bạn An muốn trưng bày một mô hình tháp Eiffel trong một cái hộp có dạng hình chóp tam giác đều với cạnh bên bằng 20 (cm), các mặt bên là các tam giác vuông và chân tháp nằm trên mặt đáy của cái hộp.



Phát biểu	Đ	S
a) Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đỉnh của hình chóp $S(0;0;0)$ trùng với gốc tọa độ, các tia Ox, Oy, Oz tương ứng với các cạnh SA, SB, SC của hình chóp, giả sử 1 đơn vị tương ứng 1 cm, khi đó $A(20;0;0), B(0;20;0), C(0;0;20)$.		
b) Phương trình mặt đáy của hình chóp là $x+y+z-20=0$.		
c) Gọi h là chiều cao của hình chóp, khi đó $h=12$ (cm).		
d) Biết mô hình tháp Eiffel có chiều cao là 12 cm, khi đó tháp sẽ đặt được trong hộp.		

Câu 202. Thùng của một máy nông nghiệp được thiết kế mô phỏng trong hệ trục $Oxyz$ là một hình lăng trụ tứ giác $ABCD.EFGH$ với $A(0;1;2)$, $B\left(0;1;\frac{7}{2}\right)$, $C\left(0;4;\frac{7}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{5}{2};2\right)$, $E(2;1;2)$.

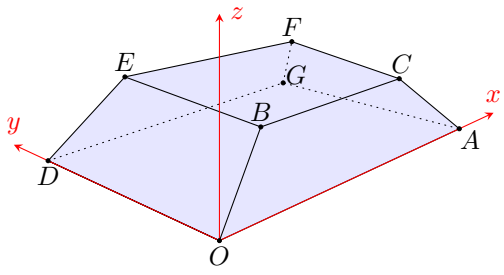




Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt phẳng $(EFGH)$ là $x-2=0$.		
b) Chiều cao của lăng trụ $ABCD.EFGH$ bằng 2.		
c) Phương trình mặt phẳng $(CDHG)$ là $2y-2z+1=0$.		
d) $d(F,(CDHG)) \approx 2{,}12$ *(làm tròn đến hàng phần trăm)*.		

Câu 203.

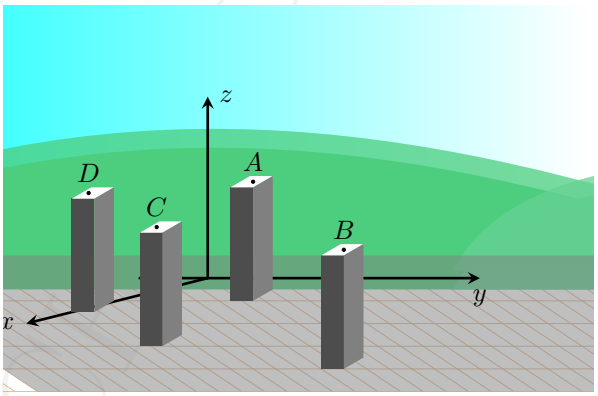
Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hay đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình bên (đơn vị là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100$ m, chiều rộng $OD=60$ m và tọa độ điểm $B(10;10;8)$.



Phát biểu	Đ	S
a) Ta có $A(100;0;0)$, $D(0;60;0)$, $G100;60;0)$.		
b) VTPT của $(OBED)$ là $\vec{n}=(4;0;-5)$.		
c) $(OBED)$: $4x-5z=0$.		
d) $\mathrm{d}(G,(OBED))\approx 62{,}5$ (m).		

Câu 204.

Hình bên minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3)$, $B(4;3;3)$, $C(6;3;2,5)$, $D(4;0;2,8)$.

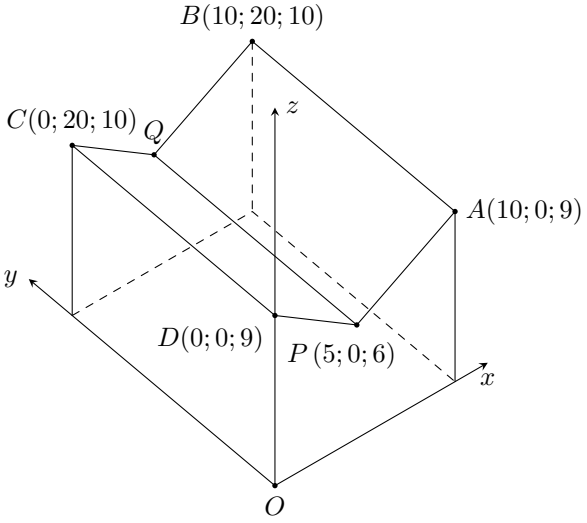


Phát biểu	Đ	S
a) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;-4)$.		
b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x-y-4z+9=0$.		
c) Điểm D thuộc mặt phẳng (ABC).		
d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC) gần bằng 0,42, (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).		

Câu 205.

Hình bên minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.

Phát biểu	Đ	S
a) (ABP): $12x+y-20z+60=0$.		
b) (CDP): $12x-y+20z-180=0$.		
c) Tọa độ điểm $Q(5;20;7)$.		
d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{PQ}=(0;20;1)$.		



5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

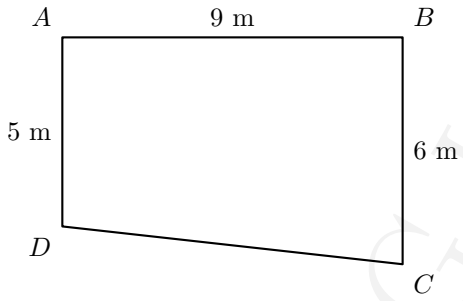
Câu 206. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB=9$ m, $AD=5$ m và $BC=6$ m như hình dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu cm so với độ cao ở A? KQ: | | | | |



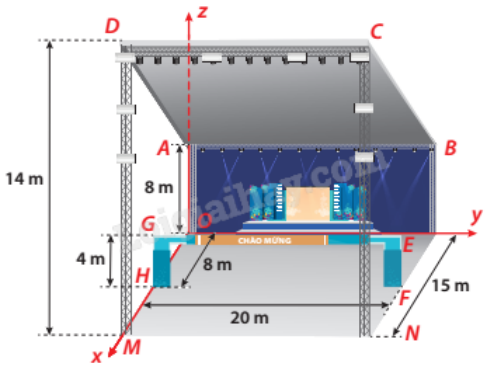


Câu 207 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thoả mãn $ab+bc+ca=-1$. Mặt phẳng (α) qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Hỏi mặt cầu tâm O tiếp xúc với (α) có bán kính nhỏ nhất bằng bao nhiêu? *(Làm tròn đến hàng phần trăm)* KQ: | | | | |

Câu 208 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-d=0$ đi qua M và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác gốc O sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính $a\cdot b\cdot c\cdot d$. KQ: | | | | |

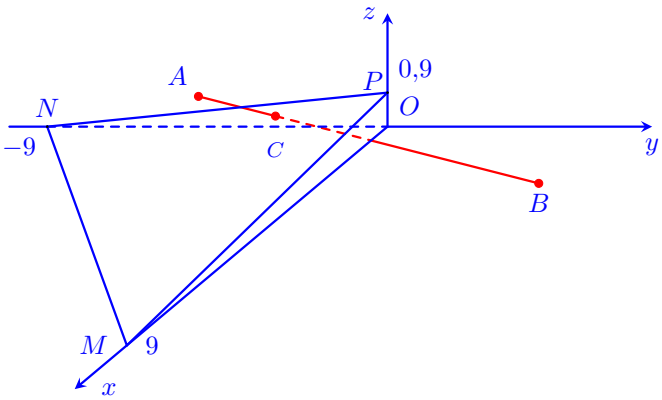
Câu 209 (Mức độ 3).

Người ta thiết kế một mái che hình chữ nhật $ABCD$ phía trên sân khấu như hình vẽ. Một cổng chào hình chữ nhật $EFHG$ cao 4 m dựng vuông góc với mặt đất. Người ta muốn làm các đoạn dây nối thanh ngang GE với mái che để gắn hoa và đèn led. Tính độ dài ngắn nhất của mỗi đoạn dây này *(làm tròn đến hàng phần phần mười)*. KQ: | | | | |



Câu 210 (Mức độ 3).

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2{,}5;0{,}5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3;7{,}5;0)$ trên đường băng (hình bên). Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9;0;0)$, $N(0;-9;0)$, $P(0;0;0{,}9)$. Tính độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh. KQ: | | | | |

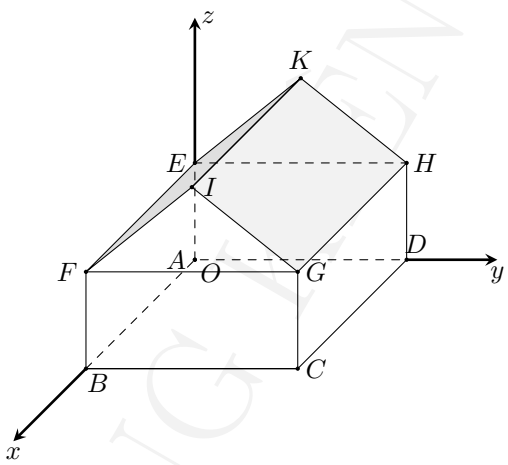


Câu 211. Biết góc quan sát ngang của một camera là 116°. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+13=0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu (*làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần mười*)? KQ: | | | | |

Câu 212.

Hình bên minh họa một nhà kho trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai mái $EFIK$, $HGIK$ có kích thước bằng nhau. Biết rằng chiều cao của nhà kho là 9 m và các bức tường của nhà kho tạo thành hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 10$ m, $AD = 24$ m, $AE = 7$ m. Mặt phẳng $(EFIK)$: $ax + y + bz + c = 0$. Tính $a - bc$.

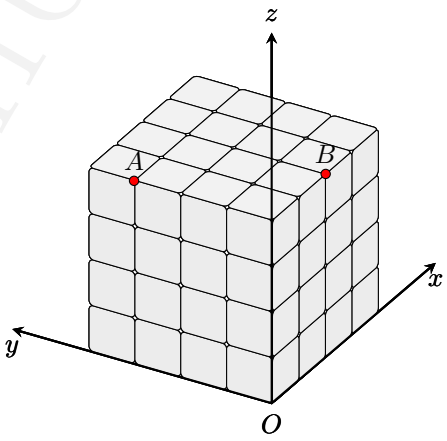
KQ: | | | | |



Câu 213.

Một khối Rubik 4×4 được gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ có đơn vị trên mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương nhỏ. Xét mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(0;3;4), B(2;1;4), C(1;0;0)$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) bằng bao nhiêu độ? (*Làm tròn đến hàng đơn vị*)

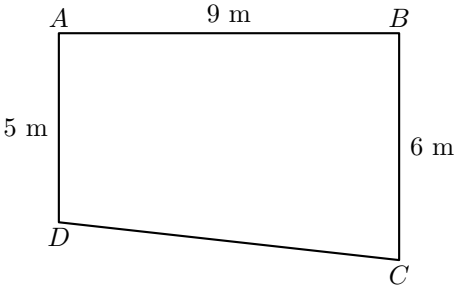
KQ: | | | | |



Câu 214.

Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB = 9$ m, $AD = 5$ m và $BC = 6$ m như hình bên. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu cm so với độ cao ở A? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)

KQ: | | | | |

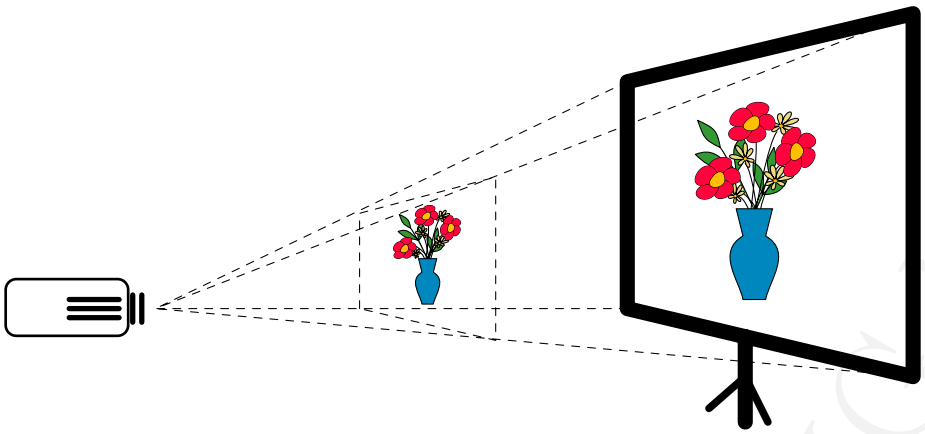


Câu 215. Trong các chương trình đồ họa máy tính, để tạo ảo giác theo đúng phối cảnh, các vật ở càng gần thì càng lớn hơn các vật ở xa, các hình ảnh ba chiều trong bộ nhớ của máy tính được chiếu lên một màn hình hình chữ nhật từ điểm nhìn của mắt hoặc máy chiếu. Không gian quan sát, một phần của không gian được nhìn thấy là vùng nằm trong bốn mặt phẳng đi qua điểm nhìn và một đường biên của màn hình. Nếu vật trong cảnh vật mở rộng vượt quá bốn mặt phẳng này thì chúng phải được cắt xén trước khi dữ liệu điểm ảnh được gửi đến màn hình. Vì vậy các mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng cắt. Giả sử màn hình được biểu diễn bởi hình chữ nhật trong mặt phẳng Oyz với các đỉnh $(0;400;0)$, $(0;-400;0)$, $(0;400;600)$, $(0;-400;600)$ và máy quay được đặt tại $(1000;0;0)$. Tính góc giữa màn hình và các mặt phẳng cắt.

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

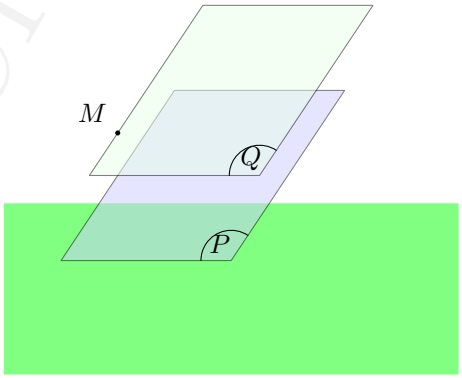
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH



Câu 216.

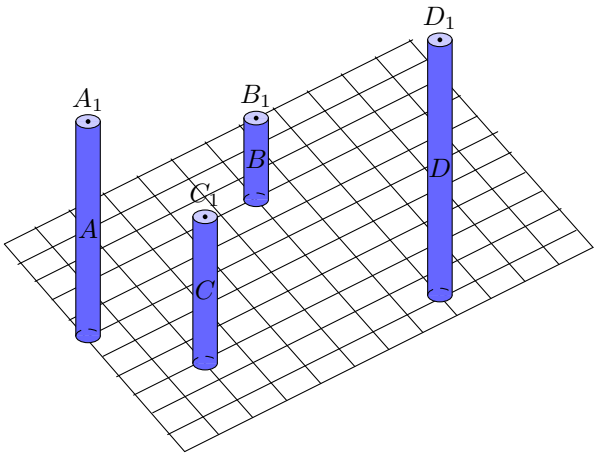
Một sinh viên thiết kế đồ họa 3D của một cánh đồng điện mặt trời trong không gian $Oxyz$, một tấm pin nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z+2=0$; một tấm pin khác nằm trên mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và song song với mặt phẳng (P). Biết rằng phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $ax+2y+bz+c=0$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |



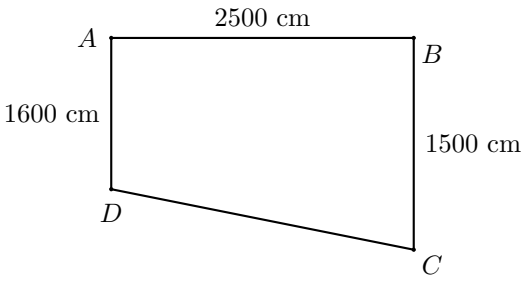
Câu 217.

Một công trình đang thiết kê xây dựng 3D trên máy tính 4 cột A, B, C, D vuông góc với mặt đất có vị trí như hình vẽ bên dưới (đơn vị trên mỗi cột là mét). Mỗi cột có dạng hình trụ và có chiều cao các cột lần lượt là A, B, C, D. Xem các điểm 10 m, 4 m, 7 m, 11 m là đỉnh của các cột A_1, B_1, C_1, D_1. Khi đó hãy tính khoảng cách từ điểm D_1 đến mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$, với 1 ô vuông đơn vị là mét. *(làm tròn đến hàng phần trăm)* KQ: | | | | |



Câu 218.

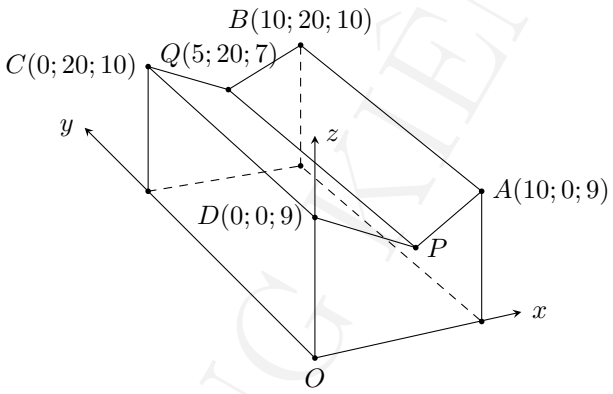
Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ. Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25$ m, $AD=15$ m, $BC=18$ m. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng. Giá trị của a là bao nhiêu? KQ: | | | | |



Câu 219.

Hình bên minh họa hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất. Biết rằng tọa độ của điểm $P(a;b;c)$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABQ) và (CDQ). Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

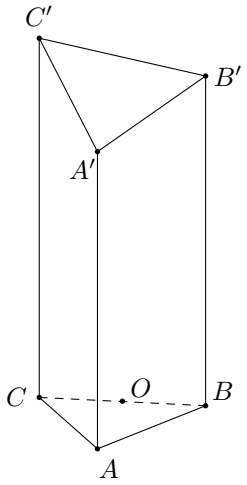
KQ: | | | | |



Câu 220.

Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? (*Làm tròn đến hàng phần chục*).

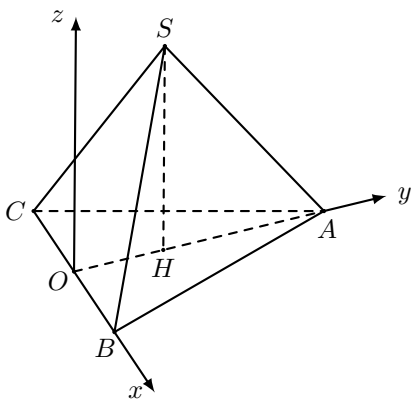
KQ: | | | | |



Câu 221.

Một vật trang trí kim tự tháp dạng hình chóp tam giác đều có chiều cao 110 mm và đáy là tam giác đều cạnh 120 mm được vẽ lại như hình bên. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho gốc toạ độ O trùng với trung điểm của cạnh đáy BC, đỉnh B thuộc tia Ox và đỉnh A thuộc tia Oy. Tính côsin của góc giữa hai mặt bên của vật trang trí đó.

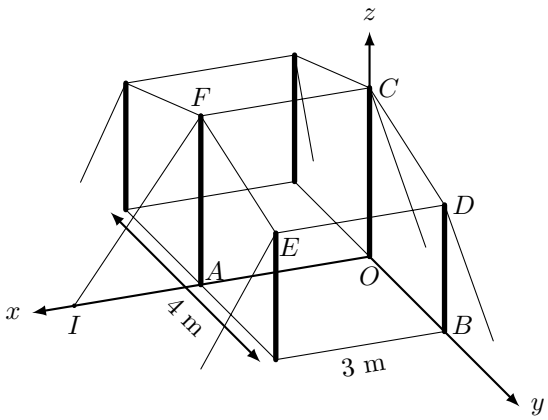
KQ: | | | | |



Câu 222.

Một lều trại có mặt trước và mặt sau rộng 4 m, hai mặt bên rộng 3 m gồm sáu thanh cọc tre, vải bạt chống thấm nước, dây dù hoặc dây thừng để cố định lều tại sáu cọc sắt cắm sát đất như hình bên. Biết rằng, hai thanh AF, OC có chiều dài 2,2 m; bốn thanh còn lại có chiều dài 1,7 m và đoạn dây thừng $IF = 3$ m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ và cho biết góc giữa đường thẳng chứa dây thừng IF và mặt phẳng chứa tấm bạt $(CDEF)$ là $a°$. Tính giá trị của a. *Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ.*

KQ: | | | | |



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

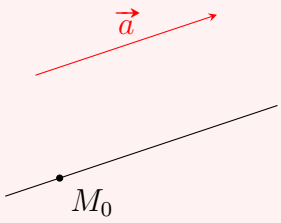
K12 – CHƯƠNG 5

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 13
Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của d.



- *Một đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một vectơ chỉ phương và một điểm của nó.*
- *Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{a}$ (với $k \neq 0$) cũng là vectơ chỉ phương của d.*

2 Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 14 Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R} \ (t \text{ được gọi là tham số}).$$

a) Trong phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$, *mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.*

b) Để cho gọn, trong phương trình tham số của đường thẳng, ta không viết $t \in \mathbb{R}$.

3 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Định nghĩa 15 Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì hệ phương trình

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

4 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Hai đường thẳng vuông góc

Cho hai đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}, d'$ đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.

- Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} = 0$ thì d và d' đồng phẳng và
  - d cắt $d' \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0}$.
  - $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{MM'}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$
  - $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{MM'}\right] = \vec{0}. \end{cases}$
- Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'].\overrightarrow{MM'} \neq 0 \Rightarrow d$ và d' chéo nhau.

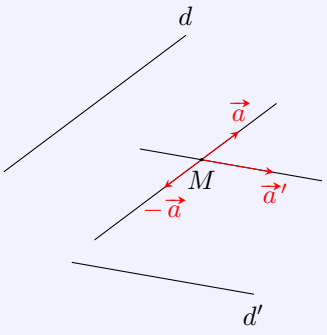
Định lí 3 Cho hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a}' = (a_1'; a_2'; a_3')$. Ta có

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0 \Leftrightarrow a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' = 0.$$

5 Góc giữa hai đường thẳng

Định lí 4
Góc giữa hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{a}' = (a_1'; a_2'; a_3')$ được tính bởi công thức

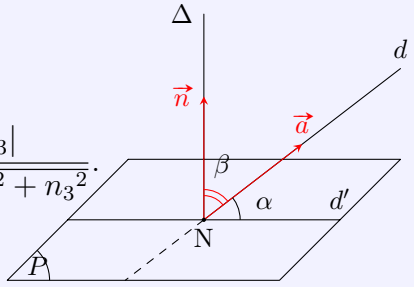
$$\begin{aligned} \cos(d, d') &= |\cos(\vec{a}, \vec{a}')| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}'|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|} \\ &= \frac{|a_1 \cdot a_1' + a_2 \cdot a_2' + a_3 \cdot a_3'|}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{a_1'}^2 + {a_2'}^2 + {a_3'}^2}}. \end{aligned}$$



6 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định lí 5
Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ được tính bởi công thức

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1 \cdot n_2 + a_2 \cdot n_2 + a_3 \cdot n_3|}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2}}.$$



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

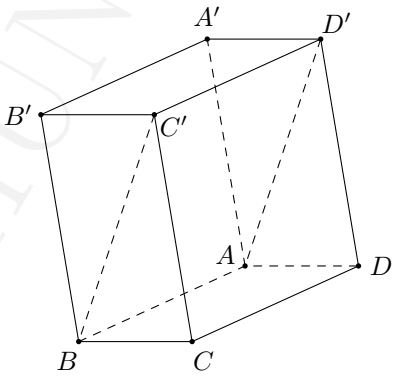
DẠNG 1 Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng

- $\vec{a} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của d.
- Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của d thì $k\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

1 Ví dụ mẫu

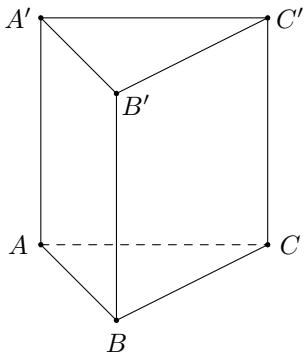
Ví dụ 1 (Mức độ 1).

Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra các vectơ chỉ phương của đường thẳng BC' mà điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó đều là các đỉnh của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.



Ví dụ 2 (Mức độ 1).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối đều là đỉnh của hình lăng trụ, những vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB?



Ví dụ 3 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A\,(2;0;0)$, $B\,(0;4;0)$ và $C\,(0;0;7)$.

a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, AC.

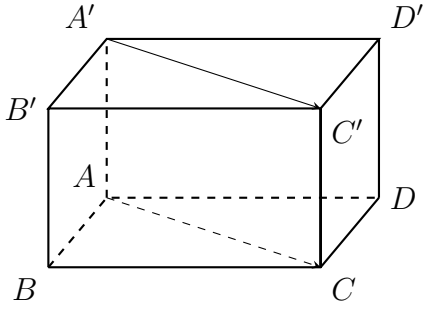
b) Vectơ $\vec{v} = (-1;2;0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

Ví dụ 4 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ với $A\,(1;2;1)$, $B\,(7;5;3)$, $C\,(4;2;0)$, $A'\,(4;9;9)$. Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của AB, $A'C'$ và BB'.

Ví dụ 5 (Mức độ 1).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ là vectơ chỉ phương của AB.		
b) $\overrightarrow{B'D'}$ là vectơ chỉ phương của BD.		
c) $\overrightarrow{B'D}$ là vectơ chỉ phương của BD.		
d) $\overrightarrow{B'D}$ là vectơ chỉ phương của DB.		



2 Bài tập tự luận

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;6)$, $B(0;2;-1)$, $C(2;4;3)$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa trung tuyến AM của tam giác ABC.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-1=0$ và $(Q)\colon x-2y+z-5=0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm một vectơ chỉ phương của Δ.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;2;2), B(0;-1;2), C(3;1;-3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua C và song song với đường thẳng AB. Tìm một vectơ chỉ phương của Δ.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2\,;3\,;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\,: x+3z-4=0$. Tìm một vectơ chỉ phương của Δ.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x+y-3=0$, $(Q)\colon 2x+y+z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P) và (Q). Tìm một vectơ chỉ phương của Δ.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;0)$ và $B(0;0;1)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB?

A. $\vec{d}=(-1;1;2)$. **B.** $\vec{a}=(-3;0;1)$. **C.** $\vec{b}=(3;0;1)$. **D.** $\vec{c}=(1;2;2)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z-5=0$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;1;1)$. **B.** $\vec{u}=(-2;3;-1)$. **C.** $\vec{u}=(2;1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(2;3;1)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;3;2)$. Đường trung tuyến đi qua đỉnh A của tam giác ABC nhận vectơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

A. $\vec{a}=(-1;1;0)$. **B.** $\vec{a}=(-2;2;2)$. **C.** $\vec{a}=(-1;2;1)$. **D.** $\vec{a}=(1;1;0)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;4)$, $B(-2;3;5)$, $C(-9;7;6)$ có toạ độ là

A. $(3;4;-5)$. **B.** $(3;-4;5)$. **C.** $(-3;4;-5)$. **D.** $(3;4;5)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d

A. $\vec{u}_1=(2;1;-3)$. **B.** $\vec{u}_2=(-2;-1;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(-1;2;1)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;2;-1)$.

Câu 6. Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-1}{9}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(2;3;1)$. **B.** $\vec{u}_2=(6;3;9)$. **C.** $\vec{u}_3=(3;9;6)$. **D.** $\vec{u}_4=(1;2;3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{u}_2=(2;3;4)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;2;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(-1;2;-3)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;2;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;-2;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(2;1;1)$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_2=(2;4;-1)$. **B.** $\vec{u}_1=(2;-5;3)$. **C.** $\vec{u}_3=(2;5;3)$. **D.** $\vec{u}_4=(3;4;1)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(3;-1;5)$. **B.** $\vec{u}_4=(-1;1;-2)$. **C.** $\vec{u}_2=(-3;1;5)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;-1;-2)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu không phải là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(-1;2;3)$. **B.** $\vec{u}_2=(3;-6;-9)$. **C.** $\vec{u}_3=(1;-2;-3)$. **D.** $\vec{u}_4=(-2;4;3)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+5=0$ làm một vectơ chỉ phương?

A. $(Q)\colon x-y+2=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-4t\\z=4-5t\end{cases}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-4t\\z=4-5t\end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

A. $\vec{d}=(-1;1;2)$. **B.** $\vec{a}=(-1;0;-2)$. **C.** $\vec{b}=(-1;0;2)$. **D.** $\vec{c}=(1;2;2)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. **B.** $\vec{u}_1=(0;2;0)$. **C.** $\vec{u}_2=(1;2;0)$. **D.** $\vec{u}_3=(1;0;0)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+2z-5=0$ và $Q\colon 4x+5y-z+1=0$. Gọi A và B là hai điểm phân biệt thuộc giao tuyến của (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ nào sau đây

A. $\vec{k}=(4;5;-1)$. **B.** $\vec{u}=(8;-11;-23)$. **C.** $\vec{w}=(3;-2;2)$. **D.** $\vec{v}=(-8;11;-23)$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(3;4;1)$ là một vectơ chỉ phương.		
b) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(-3;-4;1)$ là một vectơ chỉ phương.		
c) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(3;4;-1)$ là một vectơ chỉ phương.		
d) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(-6;-8;2)$ là một vectơ chỉ phương.		

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. Một vectơ chỉ phương của d là

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{u}_3=(4;6;-2)$.		
b) $\vec{u}_2=(1;2;-1)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\vec{u}_1=(2;3;-1)$.		
d) $\vec{u}_4=(-1;-2;1)$.		

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-4t \\ z=6-5t \end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của d là

Phát biểu	Đ	S
a) $\vec{u}_1=(-2;4;-5)$.		
b) $\vec{u}_2=(2;4;5)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\vec{u}_3=(1;3;6)$.		
d) $\vec{u}_4=(2;-4;-5)$.		

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$, $(Q)\colon 3x-y+z-1=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(1;2;-2)$.		
b) Một vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q=(3;-1;1)$.		
c) Giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;1;1)$.		
d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với (P) thì Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-2;-2)$.		

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-4z+1=0$ và điểm $A(1;2;3)$. Đường thẳng d đi qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Khi đó, gọi $\vec{u}=(a;b;1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (P) nhận vectơ $\vec{n}=(2;1;-4)$ làm vectơ pháp tuyến.		
b) Gọi M là giao điểm của d và trục Ox thì $\overrightarrow{AM}$ có tọa độ là $(-1;-2;m-3)$.		
c) Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi $m=2$.		
d) $a+b=-3$.		

Câu 23. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ không vuông góc với (α). Gọi $\vec{u}_\Delta$, $\vec{n}_{(\alpha)}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của Δ và vectơ pháp tuyến của (α) và đường thẳng Δ' là hình chiếu của Δ trên (α).

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng chứa đường thẳng Δ và vuông góc mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha]$.		
b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) là hình chiếu của Δ trên (α).		
c) Đường thẳng Δ' có một vectơ chỉ phương là $\left[\left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(\alpha)}\right], \vec{n}_{(\alpha)}\right]$.		
d) Đường thẳng Δ' và đường thẳng Δ có cùng vectơ chỉ phương.		

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(5;1;3)$, $B(1;2;3)$, $C(0;1;2)$. Gọi Δ là đường đường thẳng chứa đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-4;5)$ làm vectơ pháp tuyến.		
b) Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) và vuông góc với vectơ $\overrightarrow{BC}$.		
c) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{d} = (3;-2;-1)$.		
d) Đường thẳng Δ nhận vectơ $\vec{u} = \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right]$ làm vectơ chỉ phương.		

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z+5=0$, mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y-5z-3=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I của mặt cầu (S) và giao điểm A của trục Oy và mặt phẳng (α). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z+5=0$ có tâm $I(2;-4;1)$.		
b) Điểm A có tọa độ là $A(0;-3;0)$.		
c) Vectơ $\overrightarrow{AI}$ có tọa độ là $(2;-1;1)$.		
d) Vectơ chỉ phương của đường thẳng d vuông góc với vectơ $\vec{n} = (-2;1;-1)$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1;2;-1)$ và $N(3;3;1)$. Biết rằng d nhận vectơ $\vec{u} = (a;2;b)$ làm vectơ chỉ phương. Tính $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm M, N có dạng $\vec{u} = (a;b;2)$. Tìm $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $B(1;1;1)$, $C(3;4;0)$. Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ song song với BC có dạng $(a;b;-1)$. Tìm $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $(a;b;2)$. Tìm $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-z+2024=0$ và $(Q)\colon x-2y+2025=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$. KQ: | | | | |

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+3y-2z-2024=0$ và $\vec{a}=(1;1;0)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và cùng phương với $\vec{a}$ có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$.

KQ: | | | | |

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$. Đường thẳng d đi qua O, song song với (P) đồng thời vuông góc với Oz có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;1;b)$. Tính $a-b$.

KQ: | | | | |

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z=0$ và đường thẳng d đi qua $M(-1;0;0)$ nhận $\vec{u}_d=(1;2;-1)$ là vectơ chỉ phương. Gọi Δ là một đường thẳng chứa trong (P), cắt và vuông góc với d. Vectơ $\vec{u}=(a;1;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Tính tổng $S=a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-10=0$ và đường thẳng d đi qua $(-2;1;1)$, nhận $\vec{u}_d=(2;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của đoạn MN. Biết $\vec{u}=(a;b;1)$ là một vectơ chỉ phương của Δ, tính $a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết vectơ $\vec{u}=(a;b;2)$ với a, $b\in\mathbb{R}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

KQ: | | | | |

DẠNG 2 Viết phương trình đường thẳng

1) Phương trình tham số của đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$, nhận $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số

$$d\colon \begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases} \text{ với } t\in\mathbb{R} \text{ (t được gọi là tham số).}$$

- Trong phương trình trên, mỗi giá trị của tham số t xác định duy nhất một điểm $M\in d$ và ngược lại.
- Mọi đường thẳng trong không gian đều có vô số phương trình tham số.

2) Phương trình chính tắc của đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$, vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì phương trình

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

3) Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm.

- Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và có phương

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

trình tham số

$$d\colon \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t. \end{cases}$$

- Nếu $x_A \neq x_B$, $y_A \neq y_B$, $z_A \neq z_B$ thì d có phương trình chính tắc

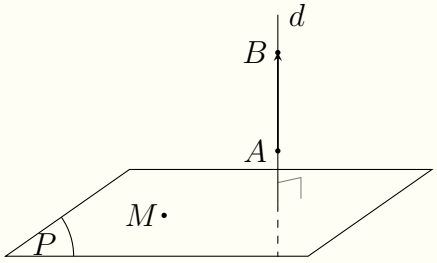
$$d\colon \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

4) Điểm thuộc đường thẳng

- $M(x_M; y_M; z_M) \in \Delta\colon \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$ nếu $\dfrac{x_M - x_0}{a_1} = \dfrac{y_M - y_0}{a_2} = \dfrac{z_M - z_0}{a_3}$
- Nếu $M \in \Delta\colon \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ thì tọa độ M là $M(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$.

5) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng d (hoặc vuông góc với đường thẳng AB).

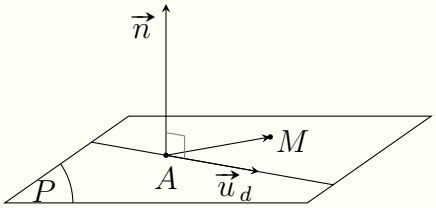
$$(P)\colon \begin{cases} \text{Qua } M\,(x_0; y_0; z_0) \\ \text{Vectơ pháp tuyến } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB}. \end{cases}$$



6) Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với $M \notin d$.

- Chọn điểm $A \in d$ và một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$. Tính $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d\right]$.
- Khi đó

$$(P)\colon \begin{cases} \text{Đi qua } M \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d\right]. \end{cases}$$



1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 6. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -4t \\ z = 3 + 12t. \end{cases}$

a) Tìm ba vectơ chỉ phương của d.

b) Tìm các điểm trên d ứng với t lần lượt bằng -1; 0; 1.

Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 7. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 11 + 2t \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

a) Tìm hai vectơ chỉ phương của d.

b) Tìm các điểm trên d ứng với t lần lượt bằng 0; 2; -3.

Ví dụ 8. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases}$.

a) Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ' đi qua $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (3;0;2)$.

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

a) Hãy chỉ ra hai điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua gốc toạ độ $O(0;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1;3;1)$.

Ví dụ 10.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;-1;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4;-5)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 7t \\ z = 9t \end{cases}$ (t là tham số). Chỉ ra tọa độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Ví dụ 11. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$. Hãy chỉ ra một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;-2;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;-5;1)$.

Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;4;5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y = 0$.

Ví dụ 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(2;4;0)$.

Ví dụ 15. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng MN, biết $M\,(2;0;-1)$ và $N\,(4;3;1)$.

Ví dụ 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $A(6;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;2;-1)$.

THS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

a) Viết phương trình tham số của d. b) Tìm điểm M thuộc d biết $OM = 7$.

Ví dụ 17. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác OAB với $A(2;-3;4), B(-4;5;0)$. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng AB và đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ O của tam giác OAB.

Ví dụ 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1;-1;2)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d.

b) Trong hai điểm $A(3;-3;3)$ và $B(1;-1;1)$ điểm nào thuộc d?

Ví dụ 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{6}$.

a) Tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Trong hai điểm $A(1;-5;-6)$ và $B(3;-2;1)$, điểm nào thuộc d?

Ví dụ 20. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0\,(1;2;3)$ và nhận $\vec{a} = (4;5;-7)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d có đi qua điểm $A\,(1;1;5)$ không?

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3+3t \\ z = 6+4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

a) Tìm toạ độ điểm A thuộc d, biết $OA = 7$.

b) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của O trên d và tính khoảng cách từ O đến d.

Ví dụ 22 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $M(2;3;1)$ và $d\colon \begin{cases} x = 1-4t \\ y = 2+2t \\ z = 4t-1. \end{cases}$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M lên d.

b) Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng với M qua d.

Ví dụ 23 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Ví dụ 24 (THPTQG 2017, Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;b;c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M(-1;0;-3)$. **B.** $M(2;3;3)$. **C.** $M\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 25 (Mức độ 3). Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Cho điểm $I(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho $IA = IB$. Tính $a^2+b^2+c^2$.

KQ: | | | | |

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 26 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-4}$. Biết hai điểm A, B thuộc đường thẳng d sao cho tam giác IAB cân tại I và diện tích của tam giác IAB bằng 12. Tính IA.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 1. Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng AB biết $A(4;1;2)$ và $B(5;8;6)$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với Δ

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng

$$\Delta\colon \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}.$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;1)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z+5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (P).

Bài 6 (CKP, Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-3t \\ z=5+4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

a) Hãy tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Hãy tìm toạ độ của các điểm thuộc d ứng với các giá trị $t=0, t=-1, t=2$.

Bài 7 (Mức độ 1). Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ (t là tham số).

a) Chỉ ra tọa độ hai điểm thuộc đường thẳng Δ.

b) Điểm nào trong các điểm $C(6;-7;-16)$, $D(-3;11;-11)$ thuộc đường thẳng Δ?

Bài 8 (Mức độ 1). Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A\,(5;0;-7)$ và nhận $\vec{v}=(9;0;-2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d có đi qua có điểm $M\,(-4;0;-5)$ không?

Bài 9 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua $N(-2;3;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(3;-4;5)$.

a) Viết phương trình chính tắc của d.

b) Tìm điểm $A\in d$ biết A có hoành độ bằng 4.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng?

A. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{z}=\dfrac{z-5}{4}$.
B. $\dfrac{x-9}{7}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-6}{-2}$.
C. $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{z}$.
D. $\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{4}$.

Câu 37. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$?

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.
C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Câu 38. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
C. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3 \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
D. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 39. Cho hai điểm $A(1;-2;-3)$, $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

A. $d'\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.
B. $d'\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.
C. $d'\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
D. $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 40. Cho hai điểm $M(1;-1;-1)$ và $N(5;5;1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\begin{cases} x=5+2t \\ y=5+3t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
B. $\begin{cases} x=5+t \\ y=5+2t \\ z=1+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.
D. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-1+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 41. Đường thẳng đi qua điểm $B(-1;3;6)$ nhận $\vec{u}=(2;-3;8)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+6}{8}$.
B. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-6}{8}$.
C. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-6}{8}$.
D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-6}{8}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;2;-3)$. Phương trình của d là

A. $\begin{cases} x=2+5t \\ y=2+2t \\ z=-1-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+5t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+5t \\ y=2+2t \\ z=1-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5+2t \\ y=2+2t \\ z=-3+t \end{cases}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z=0$. **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số

A. $x=0$. **B.** $y+z=0$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-2;-1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+5=0$.

A. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-1-2t \\ z=2-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-1+2t \\ z=2-2t \end{cases}$.

Câu 48. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-2=0$ và song song với mặt phẳng $(Q)\colon x-2y-2z+1=0$, biết Δ đi qua điểm $M(1;1;1)$.

A. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$. **B.** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B(0;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng cách đều ba đỉnh O, A, B của tam giác OAB.

A. $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{-4}=\dfrac{z+\frac{3}{2}}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+3}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{-4}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-3;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oz và song song với (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$. **B.** $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-10}{-7}$.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+9=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-1=0$, $(\beta)\colon 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng Oxy có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Câu 56. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3;-1;5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-4=0$, $(Q)\colon 2x+y+z+4=0$.

A. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

C. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$. **D.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-3}$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-1=0$, $(\beta)\colon 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 58. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}$; $d_3\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$.

B. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

C. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$.

D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d là

A. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

B. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

D. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}, d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;8;-5)$.

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$.

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\ y=1+2t\\ z=4-2t\end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

D. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $x+y-2z+8=0$, điểm $A(2;-1;3)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại Mvà N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN là

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

B. $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

C. $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{2}$.

D. $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm A và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-3z-7=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A, song song (P) và cắt đường thẳng d?

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\begin{cases} x=3+11t \\ y=2-54t \\ z=-4+47t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+54t \\ y=2+11t \\ z=-4-47t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+47t \\ y=2+54t \\ z=-4+11t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-11t \\ y=2-47t \\ z=-4+54t \end{cases}$.

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2z-6=0$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-1-t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d.

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0, (Q)\colon x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases} x=1+1t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+1t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$.

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$, $d_2\colon \begin{cases} x=-1+3t \\ y=-2t \\ z=-4-t \end{cases}$, $d_3\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 và cắt đồng thời d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

C. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$. **D.** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

Câu 67. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\dfrac{a}{c}$.

A. $\dfrac{a}{c}=2$. **B.** $\dfrac{a}{c}=-2$. **C.** $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-3=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$.

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-t \\ z=-2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d', đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn MN.

A. $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Câu 72. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}$; d_2: $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1 ; d_2 lần lượt ở B, C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 73. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 74. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+3t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 75. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Câu 76. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P): $x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-4t \\ z=-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+4t \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-4t \\ z=2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+6t \\ z=2+t \end{cases}$.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases}$, $d'\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và d'?

A. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z-2}{9}$. **B.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z+2}{9}$.

C. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-2}{14}$. **D.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y+z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-5t \\ z=3-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-5t \\ z=-4-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=7-5t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.
C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{-4}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1; d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{3}$. **B.** $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.
C. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M\,(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng (d_1) : $\begin{cases} x=t \\ y=1-t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1 \end{cases}$ và cắt đường thẳng (d_2) : $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình của (Δ) là?

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=1+t. \\ z=1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 86. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A\,(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-3z-2=0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$.
B. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.
C. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.
D. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 89. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.
B. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.
C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$.
D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 90. Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2)\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình nào sau đây là phương trình của (Δ)?

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.
B. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.
D. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

A. $(0;1;3)$.
B. $(2;3;3)$.
C. $(5;6;8)$.
D. $(1;-2;0)$.

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
B. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
C. $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
D. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với Δ và Δ'?

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=2 \end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A. $2x-y+2z+13=0$.
B. $2x+y+2z-22=0$.
C. $2x-y+2z-13=0$.
D. $2x-y+2z+22=0$.

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng OAB có phương trình là

A. $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$.
B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$.
C. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.
D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+5}{3}$.
B. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.
C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+1}{3}$.
D. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z-1}{3}$.

Câu 98. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+\frac{13}{5}}{1}=\dfrac{y-\frac{9}{5}}{1}=\dfrac{z-\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}$.
B. $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.
C. $\dfrac{x-\frac{7}{5}}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-\frac{2}{5}}{1}$.
D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 100. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là

A. $\Delta\colon \begin{cases} x=5t \\ y=-1+t \\ z=4+5t \end{cases}$.
B. $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$.
C. $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$.
D. $\Delta\colon \begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=4+t \end{cases}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
GV. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0;-2;-5)$. **B.** $N(1;-1;-4)$. **C.** $P(2;0;1)$. **D.** $Q(3;1;-4)$.

Câu 102. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Gọi M là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn OM.

A. $OM=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **B.** $OM=\sqrt{5}$. **C.** $OM=2\sqrt{35}$. **D.** $OM=\sqrt{35}$.

Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$. **B.** $(3;-2;-1)$. **C.** $(-3;8;-3)$. **D.** $(0;3;-2)$.

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P)\colon x-2y+z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2020.

Câu 106. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$; $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt d_1 và d_2 tại B và C. Độ dài BC là

A. $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\,(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 108. Cho ba điểm $A\,(1;1;1)$, $B\,(0;0;2)$, $C\,(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=t. \end{cases}$ Biết điểm $M\,(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $AM\perp\Delta$ và $AM=\sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. -1. **B.** 5. **C.** 7. **D.** -6.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\,:\,x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(3;-2;-1)$. **B.** $(-3;8;-3)$. **C.** $(0;3;-2)$. **D.** $(6;-7;0)$.

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

A. $a=-1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=1$.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+2t\\y=2-3t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2-3t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2+3t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$ và $C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=-1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-2+2t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 116. Đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1)$ và $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

A. $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{4}$. **B.** $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$.

C. $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 118. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.
B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.
D. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(1;1;-2)$, biết $(\Delta)\parallel(P)$ và (Δ) cắt (d).

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.
B. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.
D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$.

Câu 120. Cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-4t\\z=2t\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$.

Câu 121. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và song song với (P) có phương trình là:

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+9}{3}=\dfrac{z-5}{-5}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+5}{-5}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z+5}{-5}$.
D. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-5}{-5}$.

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+3}{4}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2.

A. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
B. $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+9}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.
D. $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$.

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(3;-1;-2)$.
B. $Q(2;4;1)$.
C. $P(2;4;-1)$.
D. $M(3;1;2)$.

Câu 124. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$.
B. $Q(1;-2;-1)$.
C. $N(-1;3;2)$.
D. $M(1;2;1)$.

Câu 125. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $P\,(1;2;5)$.
B. $N\,(1;5;2)$.
C. $Q\,(-1;1;3)$.
D. $M\,(1;1;3)$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $Q(2;1;1)$. **B.** $M(1;2;3$. **C.** $P(2;1;-1)$. **D.** $N(1;-2;3)$.

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

A. $P(-1\,2;1)$. **B.** $Q(1;-2;-1)$. **C.** $N(-1;3;2)$. **D.** $M(1;2;1)$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{z-2}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $N(4;2;-1)$. **B.** $Q(2;5;1)$. **C.** $M(4;2;1)$. **D.** $P(2;-5;1)$.

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t.\end{cases}$

A. $N(1;5;2)$. **B.** $Q(-1;1;3)$. **C.** $M(1;1;3)$. **D.** $P(1;2;5)$.

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

A. $K\,(1;-1;1)$. **B.** $E\,(1;1;2)$. **C.** $H\,(1;2;0)$. **D.** $F\,(0;1;2)$.

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q\,(-1;1;3)$. **B.** $P\,(1;2;5)$. **C.** $N\,(1;5;2)$. **D.** $M\,(1;1;3)$.

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và điểm $I(3;2;-1)$. Xác định điểm M trên d sao cho $IM=\sqrt{3}$.

A. $M(4;3;-2)$ hoặc $M(2;-1;0)$. **B.** $M(4;3;-2)$ hoặc $M(-2;1;0)$.
C. $M(4;3;2)$ hoặc $M(2;1;0)$. **D.** $M(4;3;-2)$ hoặc $M(2;1;0)$.

Câu 133. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm B đối xứng với điểm $A(1;2;1)$ qua trục Oy là

A. $B(-1;2;1)$. **B.** $B(-1;-2;-1)$. **C.** $B(1;-2;-1)$. **D.** $B(-1;2;-1)$.

Câu 134. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(1;2;3)$. Tìm tọa độ hình chiếu của M lên Ox.

A. $(2;0;0)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;2;3)$.

Câu 135. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2t\\y=-t\\z=-1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+5=0$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng d, biết rằng khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (P) bằng 3 và H có hoành độ dương.

A. $H(0;0;-1)$. **B.** $H(-2;1;-2)$. **C.** $H(2;-1;0)$. **D.** $H(4;-2;1)$.

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{3}$ và điểm $M(3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm N là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng d.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $N(-1;1;5)$. **B.** $N(-9;-3;-7)$. **C.** $N(-5;-1;-1)$. **D.** $N(1;6;2)$.

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d?

A. $(T)\colon x+y+2z+1=0$. **B.** $(P)\colon x-2y+z+1=0$.
C. $(Q)\colon x-2y-z+1=0$. **D.** $(R)\colon x+y+z+1=0$.

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ là

A. $x+y+z+1=0$. **B.** $x-y-z=1$. **C.** $x+y+z=1$. **D.** $x+y+z=0$.

Câu 139. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $2x-y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-6=0$.
C. $2x-y+z+3=0$. **D.** $2x-y-z+3=0$.

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P)\colon 10x+2y+mz+11=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $m=2$. **B.** $m=-52$. **C.** $m=52$. **D.** $m=-2$.

Câu 141. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O, song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $x-2y+z=0$. **C.** $x+2y+z-4=0$. **D.** $x-2y+z+4=0$.

Câu 142. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;-2)$ và đi qua điểm $M(1;-3;2)$, $d_2\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax+by+cz+11=0$. Giá trị $a+2b+3c$ bằng

A. -42. **B.** -32. **C.** 11. **D.** 20.

Câu 143. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $-2x-y+9z-36=0$. **B.** $2x-y-z=0$.
C. $6x+9y+z+8=0$. **D.** $6x+9y+z-8=0$.

Câu 144. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q)\colon x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=5-t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và vuông góc với (Q) là

A. $3x+y+z-1=0$. **B.** $3x-y-z+1=0$. **C.** $x+3y+z-3=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$ chéo nhau. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P)\colon x+5y+8z-16=0$.
B. $(P)\colon x+5y+8z+16=0$.
C. $(P)\colon x+4y+6z-12=0$.
D. $(P)\colon 2x+y-6=0$.

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó?

A. $\vec{n}=(1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}=(1;-1;5)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

Câu 147. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d là

A. $(P)\colon 5x+2y+4z-5=0$.
B. $(P)\colon 2x+1y+2z-1=0$.
C. $(P)\colon 5x-2y-4z-5=0$.
D. $(P)\colon 2x+1y+2z-2=0$.

Câu 148. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $2y-2z+1=0$. **B.** $2y-2z-1=0$. **C.** $2x-2z+1=0$. **D.** $2x-2z-1=0$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua hai điểm $A(2;3;-1)$; $B(1;2;4)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=4-5t \end{cases}$.		
b) $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=-1-5t \end{cases}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=3+t \\ z=-1-5t \end{cases}$.		
d) $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=4+5t \end{cases}$.		

Câu 150. Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng d đi qua $M(1;2;-3)$ và nhận $\vec{u}=(2;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.		
b) $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.		
d) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.		

Câu 151. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$,$B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) Đường thẳng đi qua hai điểm B, C có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.		
c) Điểm $M(2;3;1)$ không thuộc đường thẳng BC.		
d) Điểm $N(3;5;0)$ không thuộc đường thẳng BC.		

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.		
b) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.		
d) $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.		

Câu 153. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-t \\ z=5+4t \end{cases}$.		
b) $d\colon \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$.		
d) $d\colon \begin{cases} x=3-2t \\ y=-1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$.		

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

Phát biểu	Đ	S
a) $MN\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.		
b) $MN\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $MN\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.		
d) $MN\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$.		

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng có phương trình tham số là $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.		
b) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$.		
d) $d\colon \dfrac{1-x}{-2}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{-z-3}{-1}$.		

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d có phương trình là

Phát biểu	Đ	S
a) $\Delta\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=2-3t \\ z=3+t \end{cases}$.		
b) $\Delta\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.		
d) $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$.		

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;3)$, $B(1;3;4)$ và $C(3;-1;5)$. Đường thẳng d đi qua A và song song với BC có phương trình

Phát biểu	Đ	S
a) $d\colon \begin{cases} x=2-2t \\ y=-2+4t \\ z=3-t \end{cases}$.		
b) $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{9}$.		
d) $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$.		

Câu 158. Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-6=0$ và $(Q)\colon 2x+y-z=0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương vuông góc với vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P) và (Q).		
b) Tọa độ mọi điểm thuộc Δ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x++y+z-6=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$.		
c) Đường thẳng Δ nhận $\vec{u}=(-2;3;-1)$ làm vectơ chỉ phương.		
d) Đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.		

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-y-3z+2=0$ và $(Q)\colon -4x+y+2z+1=0$. Phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P), (Q) là Δ.

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm O không thuộc hai mặt phẳng (P) và (Q).		
b) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương vuông góc với vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P) và (Q).		
c) Đường thẳng Δ nhận $\vec{u}=(1;6;-1)$ làm vectơ chỉ phương.		
d) Đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{1}$.		

Câu 160. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$; $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Hai đường thẳng d_1, d_1 lần lượt nhận $\vec{u}_1=(2;-1;1)$, $\vec{u}_2=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.		
b) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_2 tại điểm có tọa độ $(2;-1;2)$.		
c) Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương có tọa độ $(1;-3;-5)$.		
d) Đường thẳng Δ có phương trình là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.		

Câu 161. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+3=0$. Gọi d là thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Giao điểm của Δ và (P) có tọa độ là $(1;1;2)$.		
b) d nằm trong (P) và vuông góc với Δ nên d có vectơ chỉ phương vuông góc với vectơ pháp tuyến của (P) và vectơ chỉ phương của Δ.		
c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là có tọa độ là $(-1;2;1)$.		
d) Δ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.		

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\,(2;1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm M thuộc đường thẳng d.		
b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;-1;0)$ và nhận $\vec{u}_d=(2;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương.		
c) Δ nhận vectơ $\vec{u}=(1;-4;-2)$ làm vectơ chỉ phương.		
d) Đường thẳng Δ có phương trình là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$.		

Câu 163. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=-1+8t\\y=-4t\\z=3+12t\end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M(-1;-4;3)$ thuộc d.		
b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_1=(-1;-4;3)$.		
c) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_2=(2;-1;3)$.		
d) Điểm $N(7;-4;12)$ thuộc d.		

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $Q\,(2;-1;2)$ thuộc đường thẳng d.		
b) Điểm $P\,(1;2;3)$ thuộc đường thẳng d.		
c) Điểm $M\,(-1;-2;-3)$ thuộc đường thẳng d.		
d) Điểm $N\,(-2;1;-2)$ thuộc đường thẳng d.		

Câu 165. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3+4t \\ y=-1-2t \\ z=-2+3t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M\,(7;-3;-1)$ thuộc đường thẳng d.		
b) Điểm $N\,(-1;1;-5)$ thuộc đường thẳng d.		
c) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(4;-2;3)$ là một vectơ chỉ phương.		
d) Đường thẳng d nhận $\vec{u}=-(-4;2;-3)$ là một vectơ chỉ phương.		

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=1-t \end{cases}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M\,(-3;5;3)$ không thuộc đường thẳng d.		
b) Điểm $N\,(1;3;-1)$ không thuộc đường thẳng d.		
c) Điểm $P\,(3;5;3)$ không thuộc đường thẳng d.		
d) Điểm $Q\,(1;2;-3)$ không thuộc đường thẳng d.		

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=6-4t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và điểm $A(1;1;1)$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M(-4;-1;2)$ thuộc d.		
b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(-4;-1;2)$.		
c) Điểm $A(1;1;1)$ không thuộc d.		
d) Hình chiếu của A trên d là $H(2;-3;1)$.		

Câu 168. Cho điểm $A(1;1;2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm A không thuộc Δ.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{v}=(2;1;-1)$.		
c) Hình chiếu của A trên Δ là $H(0;-1;2)$.		
d) Điểm đối xứng với A qua Δ là $A'(1;3;-2)$.		

Câu 169. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $I\,(0;0;3)$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho hoành độ của M âm. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm I thuộc d.		
b) Một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{v}=(1;2;1)$.		
c) Nếu $M(-1+t;2t;2+t)$ thì $IM=\sqrt{6t^2-4t+2}$.		
d) $M\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$.		

Câu 170. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1\\z=-1-2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+1=0$. Gọi N là điểm thuộc Δ và có hoành độ bằng 2.

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M(0;1;-1)$ thuộc d.		
b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{v}=(1;1;-2)$.		
c) Tung độ của N là 2.		
d) Khoảng cách từ N đến (P) là $\mathrm{d}=\dfrac{16}{3}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 171. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;5)$. Gọi d đường cao của tam giác ABC đi qua đỉnh A. Biết rằng d đi qua điểm $M(a;b;5)$. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 172. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, đồng thời song song với mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Biết rằng Δ đi qua điểm $M(10;b;c)$. Tính $b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 173. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường thẳng:

$$d_1\colon\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1};\quad d_2\colon\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2. Biết rằng Δ đi qua điểm $M(0;b;c)$. Tính $b+c$.

KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 174. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;0;1)$. Gọi d là đường thẳng vuông góc với AB tại A đồng thời song song với mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z=0$. Biết d đi qua điểm $M(a;b;10)$. Tính $a\cdot b$.

KQ: | | | | |

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t. \end{cases}$ Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2. Biết Δ đi qua điểm $D(a;-1;c)$. Tính $a+c$.

KQ: | | | | |

Câu 176. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$. Tính $m+n$.

KQ: | | | | |

Câu 177. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+5=0$. Điểm $A(m;n;k)$ thuộc d với $m<0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng 3. Tính $m+n+k$.

KQ: | | | | |

Câu 178. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-2;3;1)$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ trên Δ sao cho $MA=MB$. Tính $4a+6b+12c$.

KQ: | | | | |

Câu 179. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;4;2)$, $B\,(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ trên Δ thỏa mãn $MA^2+MB^2=28$. Tính $T=a+b^2+c^3$.

KQ: | | | | |

Câu 180. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

KQ: | | | | |

Câu 181. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có dạng $3x+by+cz+d=0$. Tính b^2+cd.

KQ: | | | | |

Câu 182. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;0)$ và chứa đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ có dạng $3x+ay+bz-c$. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 183. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A và vuông góc đường thẳng d có dạng $ax+by+10z+c=0$. Tính c.

KQ: | | | | |

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ có dạng $ax+by+cz+1=0$. Tính $a^2+b^2+c^2$.

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 185. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t+2 \\ y=3t-1 \\ z=2t+1 \end{cases}$ và $\Delta\colon \begin{cases} x=m+3 \\ y=3m-2 \\ z=2m+1 \end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P=a+2b+3c$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t. \end{cases}$ Phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d' có dạng $ax+by+cz+8=0$. Tính $T=a-b+3c$. KQ: ☐☐☐☐

Câu 187. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, tính OM. *(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).* KQ: ☐☐☐☐

Câu 188. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(h;k;1)$. Tính giá trị $h-k$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+3z-14=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông tại M. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy). KQ: ☐☐☐☐

Câu 190. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d và (α), A thuộc d sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α). KQ: ☐☐☐☐

DẠNG 3 Vị trí tương đối. Góc. Khoảng cách

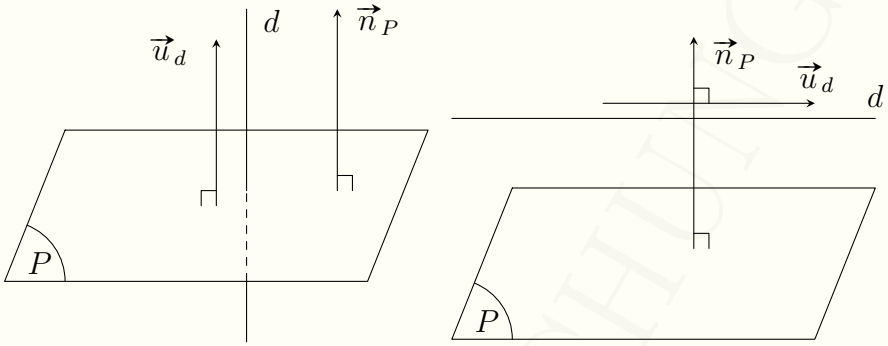
1. **Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**
Cho hai đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}, d'$ đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.

- Nếu $[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{MM'}=0$ thì d và d' đồng phẳng và
  - d cắt $d' \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{u}']\neq\vec{0}$.
  - $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u}']=\vec{0} \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{MM'}\right]\neq\vec{0}. \end{cases}$
  - $d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u},\vec{u}']=\vec{0} \\ \left[\vec{u},\overrightarrow{MM'}\right]=\vec{0}. \end{cases}$
- Nếu $[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{MM'}\neq 0 \Rightarrow d$ và d' chéo nhau.

2. **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0.$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=x_0+a_1t & (1)\\y=y_0+a_2t & (2)\\z=z_0+a_3t & (3)\\Ax+By+Cz+D=0 & (4).\end{cases}$ $(*)$

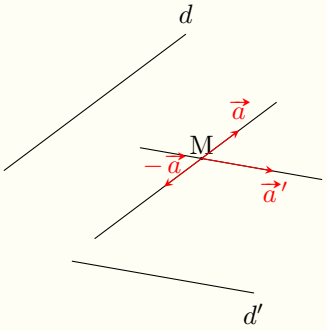


- Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ d cắt (α).
- Nếu $(*)$ có vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $d \parallel (\alpha)$.
- Nếu $(*)$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $d \subset (\alpha)$.

3. Góc

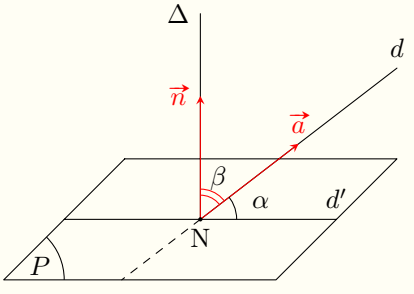
- Góc giữa hai đường thẳng d và d' có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{a}'=(a_1';a_2';a_3')$ được tính bởi công thức

$$\begin{aligned}\cos(d,d') &= |\cos(\vec{a},\vec{a}')| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{a}'|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}'|}\\ &= \frac{|a_1\cdot a_1'+a_2\cdot a_2'+a_3\cdot a_3'|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2}}.\end{aligned}$$



- Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ được tính bởi công thức

$$\begin{aligned}\sin(d,(P)) &= |\cos(\vec{a},\vec{n})| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}\\ &= \frac{|a_1\cdot n_2+a_2\cdot n_2+a_3\cdot n_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}.\end{aligned}$$

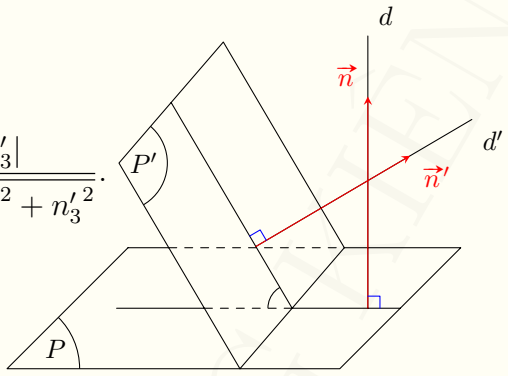


- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ và $\vec{n}'=(n_1';n_2';n_3')$ được tính bởi công thức

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

$$\cos((P),(P')) = |\cos(\vec{n},\vec{n}')| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}$$
$$= \frac{|n_1\cdot n_1' + n_2\cdot n_2' + n_3\cdot n_3'|}{\sqrt{{n_1}^2+{n_2}^2+{n_3}^2}\cdot\sqrt{{n_1'}^2+{n_2'}^2+{n_3'}^2}}.$$



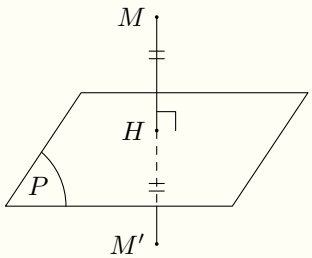
4. Khoảng cách

- Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng
  - Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức $\mathrm{d}(M,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}$.
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
  - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d đi qua M, vectơ chỉ phương $\vec{u}$; d' đi qua M', vectơ chỉ phương $\vec{u'}$ là $\mathrm{d}(d,d') = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\cdot\overrightarrow{M'M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$.

5. Hình chiếu

- Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$.
  Viết phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P), khi đó $H = d\cap(P)$ thỏa

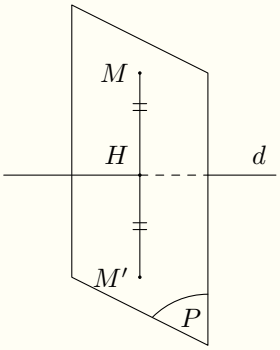
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow H.$$



  Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm của MM'.

- Tìm hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d.
  Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d, khi đó $H = d\cap(P)$ thỏa

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow H.$$



  Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm của MM'.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 27. Kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của các cặp đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1+2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=5+2t'\\z=1+4t'\end{cases}$

b) $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d':\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{6}$.

Ví dụ 28. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau:

a) $d:\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}$ và $d:\begin{cases}x=1+2t'\\y=2+5t'\\z=3+t'\end{cases}$;

b) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$ và $d':\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-9}{6}$.

Ví dụ 29. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1:\begin{cases}x=1+5t_1\\y=2-t_1\\z=3+2t_1\end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=2+10t_2\\y=4-2t_2\\z=1+4t_2\end{cases}$;

b) $\Delta_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+4}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$;

c) $\Delta_1:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=6+3t\\y=8+2t\\z=-1-t\end{cases}$.

Ví dụ 30. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng $\Delta_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+2t\end{cases}$, $\Delta_2:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ vuông góc và chéo nhau.

Ví dụ 31. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng $\Delta_1:\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}$ cắt $\Delta_2:\begin{cases}x=-6+s\\y=5+s\\z=5+2s\end{cases}$.

Ví dụ 32. Tính góc giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau

a) $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$;

b) $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ và $d':\begin{cases}x=2-2t\\y=2-2t\\z=1+t;\end{cases}$

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

c) $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=2+2t' \\ y=3+4t' \\ z=10t'. \end{cases}$

Ví dụ 33. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau

a) $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ và $(P)\colon x+z+24=0$;

b) $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P)\colon 2x+4y-2z+23=0$.

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Cho biết $AB=2a$, $AD=3a$ và $SA=2a$. Tính góc giữa:

a) Hai đường thẳng SC và BD;

b) Mặt phẳng (SBD) và mặt đáy;

c) Đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

Ví dụ 35. Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-3t \\ z=2-t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2+s \\ y=1-2s \\ z=3+8s \end{cases}$ vuông góc với nhau.

Ví dụ 36. Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Chứng minh rằng $\Delta_1\perp\Delta_2$.

Ví dụ 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=2t \\ y=-3-t \\ z=0 \end{cases}$.
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.
B. d_1 và d_2 trùng nhau.
C. d_1 song song d_2.
D. d_1 cắt d_2 và vuông góc với nhau.

Ví dụ 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{2}$. Khi đó

A. Δ_1 song song Δ_2.
B. Δ_1 cắt và không vuông góc với Δ_2.
C. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.
D. Δ_1 cắt và vuông góc với Δ_2.

Ví dụ 39. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Chọn khẳng định đúng.

A. d_1 và d_2 chéo nhau.
B. d_1 và d_2 song song.
C. d_1 và d_2 cắt nhau.
D. d_1 và d_2 trùng nhau.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Ví dụ 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ và đường thẳng $d_2\colon \begin{cases} x=2s \\ y=1-2s \\ z=6s \end{cases} (s\in\mathbb{R})$. Chọn khẳng định **đúng**.

A. $d_1 \parallel d_2$. **B.** d_1, d_2 chéo nhau. **C.** $d_1 \equiv d_2$. **D.** d_1, d_2 cắt nhau.

Ví dụ 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1\colon \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3-t \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì d_1 và d_2 cắt nhau?

A. $a=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Ví dụ 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x=-t \\ y=-1+4t \\ z=3t \end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z+3}{-3}$. Xác định góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $0°$. **D.** $60°$.

Ví dụ 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(2;1;5)$, $C(2;4;2)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và AC.

A. $30°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $60°$.

Ví dụ 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Tính sin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $150°$. **B.** $30°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Ví dụ 46. Cho đường thẳng d_1 đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Vectơ $\vec{u}_1$ và vectơ $\vec{u}_2$ cùng phương thì d_1 song song d_2.		
b) Hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương và điểm $M_1\in d_2$ thì d_1 trùng với d_2.		
c) Nếu $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.		
d) Nếu $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$ thì hai đường thẳng chéo nhau.		

Ví dụ 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2-2t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Khi

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

đó

Phát biểu	Đ	S
a) (d_1) và (d_2) chéo nhau.		
b) (d_1) và (d_2) cắt nhau.		

Phát biểu	Đ	S
c) (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.		
d) (d_1) và (d_2) song song với nhau.		

Ví dụ 48. Cho đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;-1;3)$, d_2 đi qua điểm $B(-1;2;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(4;-2;6)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $A(1;2;3)$ thuộc đường thẳng d_2.		
b) $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}$.		
c) d_1 và d_2 song song với nhau.		
d) d_1 và d_2 trùng nhau.		

Ví dụ 49. Cho đường thẳng Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$, mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\lvert\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\rvert$.		
b) $\cos(\Delta_1,(P))=\lvert\cos(\vec{u}_1,\vec{n}_P)\rvert$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\sin(\Delta_2,(P))=\lvert\cos(\vec{u}_2,\vec{n}_P)\rvert$.		
d) $\sin((P),(Q))=\lvert\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_Q)\rvert$.		

Ví dụ 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-8}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d và d'. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Ví dụ 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 *(làm tròn đến hai chữ số thập phân)*.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 10. Kiểm tra tính song song hoặc trùng nhau của các cặp đường thẳng sau:

a) $d\colon \begin{cases}x=7+4t\\ y=3-2t\\ z=2-2t\end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$;

b) $d\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ và $d'\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-5}{4}$.

Bài 11. Bằng cách giải hệ phương trình, xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases}x=t_1\\ y=1\\ z=0\end{cases}$

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2 \\ y=t_2 \\ z=0. \end{cases}$

Bài 12. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau

a) $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=3+4t' \\ y=3+2t' \\ z=4+2t'; \end{cases}$

b) $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{9}=\dfrac{y-4}{6}=\dfrac{z-2}{3}$;

c) $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{4}$;

d) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d'\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-2t. \end{cases}$

Bài 13. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau

a) $d\colon \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2-3t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z+1}{11}$;

b) $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{9}$.

Bài 14. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1+5t_1 \\ y=2-t_1 \\ z=3+2t_1 \end{cases}$, $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2+10t_2 \\ y=4-2t_2 \\ z=1+4t_2 \end{cases}$;

b) $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+4}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$;

c) $\Delta_1\colon \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$, $\Delta_2\colon \begin{cases} x=6+3t \\ y=8+2t \\ z=-1-t. \end{cases}$

Bài 15. Kiểm tra tính vuông góc của các cặp đường thẳng sau

a) $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d'\colon \begin{cases} x=-2+t \\ y=7+t \\ z=9-8t; \end{cases}$

b) $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d'\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-9}{1}$.

Bài 16. Tính góc giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

a) $d\colon \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-11}{4}$ và $d'\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+6}{5}=\dfrac{z-1}{-4}$;

b) $d\colon \dfrac{x+9}{3}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z+1}{6}$ và $d'\colon \begin{cases} x=9-10t \\ y=7-10t \\ z=15+5t; \end{cases}$

c) $d\colon \begin{cases} x=23+2t \\ y=57+t \\ z=19-5t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=24+t' \\ y=6+t' \\ z=t'. \end{cases}$

Bài 17. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau

a) $d\colon \begin{cases} x=11+3t \\ y=-11+t \\ z=-21-2t \end{cases}$ và $(P)\colon 6x+2y-4z+7=0$;

b) $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-5}{2}$ và $(P)\colon 2x+2y-4z+1=0$;

c) $d\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z+11}{2}$ và $(P)\colon 2y-4z+7=0$.

Bài 18. Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;2)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;-1)$. Tính sin của góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 19. Cho hai mặt phẳng $(P_1)\colon \sqrt{3}x+z+5=0$ và $(P_2)\colon -\sqrt{3}x+z-7=0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 191. Cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-t \\ z=-2-t \end{cases}$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với d?

A. $d_1\colon \begin{cases} x=3t' \\ y=1+t' \\ z=5t' \end{cases}$. **B.** $d_2\colon \begin{cases} x=2 \\ y=2+t' \\ z=1+t' \end{cases}$.

C. $d_3\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-5}$. **D.** $d_4\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 192. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và $d_2\colon \begin{cases} x=3+4t' \\ y=5+6t' \\ z=7+8t' \end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau. **B.** $d_1 \parallel d_2$. **C.** $d_1\equiv d_2$. **D.** d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 193. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=3+4t \\ y=5+6t \\ z=7+8t \end{cases}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.

A. Chéo nhau. **B.** Song song với nhau. **C.** Trùng nhau. **D.** Cắt nhau.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 194. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào cắt d?

A. $d_4\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=3+2t \end{cases}$.

B. $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $d_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $d_3\colon \begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 195. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+12t \\ y=2+6t \\ z=3+3t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=7+8t \\ y=6+4t \\ z=5+2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** chéo nhau. **D.** cắt nhau.

Câu 196. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** chéo nhau. **D.** cắt nhau.

Câu 197. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z+1}{-8}$ và $d'\colon \dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-2}{9}=\dfrac{z}{12}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng khi nói về vị trí tương đối của hai đường thẳng trên?

A. Song song. **B.** tTrùng nhau. **C.** Chéo nhau. **D.** Cắt nhau.

Câu 198. Hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+12t \\ y=2+6t \\ z=3+3t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=7+8t \\ y=6+4t \\ z=5+2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** chéo nhau. **D.** cắt nhau.

Câu 199. Trong không gian $ABCD.A'B'C'D'$, hai đường thẳng A và $B(a;0;0)$ có vị trí tương đối là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** chéo nhau. **D.** cắt nhau.

Câu 200. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+4t \\ z=-2+6t \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3t' \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $d_1 \equiv d_2$. **B.** d_1 và d_2 chéo nhau. **C.** $d_1 \perp d_2$. **D.** $d_1 \parallel d_2$.

Câu 201. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. Δ_1 cắt và không vuông góc với Δ_2. **B.** Δ_1, Δ_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.
C. Δ_1 cắt và vuông góc với Δ_2. **D.** Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Câu 202. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=4+4t \\ y=3-t \\ z=2+2t. \end{cases}$
Giá trị của m để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau là

A. $m=3$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=\dfrac{25}{8}$. **D.** $m=-\dfrac{25}{8}$.

Câu 203. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$. Tọa độ điểm M là

A. $M(2;0;-1)$. **B.** $M(5;-1;-3)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(-1;1;1)$.

Câu 204. Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** -2.

Câu 205. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và $d\colon \begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$.
Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (ABC). Tổng $S=a+b+c$ là

A. -7. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 206. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P). **B.** d vuông góc với (P).
C. d song song với (P). **D.** d nằm trong (P).

Câu 207. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d\subset(Q)$. **B.** $d\parallel(Q)$. **C.** d cắt (Q). **D.** $d\perp(Q)$.

Câu 208. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-5=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+4t \\ z=3t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d\parallel(P)$. **B.** $d\subset(P)$. **C.** d cắt (P). **D.** $d\perp(P)$.

Câu 209. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$.
Số giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. Vô số. **B.** 1. **C.** Không có. **D.** 2.

Câu 210. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ là

A. $M(0;2;3)$. **B.** $M(0;0;-2)$. **C.** $M(0;0;2)$. **D.** $M(0;-2;-3)$.

Câu 211. Giao điểm của mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=-t \\ z=3+3t \end{cases}$ là

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;4;2)$. **D.** $(2;0;3)$.

Câu 212. Trong không gian$Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=1-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tìm tọa độ của điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $A(3;5;3)$. **B.** $A(1;3;1)$. **C.** $A(-3;5;3)$. **D.** $A(1;2;-3)$.

Câu 213. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=4-2t \\ y=-3+t \\ z=1-t \end{cases}$, giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;-3;0)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-1)$. **D.** $(-2;0;-2)$.

Câu 214. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là toạ độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC). Tính tổng $S=a+b-c$.

A. 6. **B.** 5. **C.** -7. **D.** 11.

Câu 215. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4;5;2)$ lên mặt phẳng $(P): y+1=0$ là điểm có tọa độ

A. $(-4;-1;2)$. **B.** $(-4;1;2)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(0;1;0)$.

Câu 216. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(1;1;6)$. **D.** $(12;9;1)$.

Câu 217. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta\subset(P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

A. $T=2$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=14$. **D.** $T=-14$.

Câu 218. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x-my-2z+19=0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d\ /\!/\ (\alpha)$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\emptyset$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Câu 219. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x+y-m^2z+m=0$

A. $m=1$. **B.** $m\in\emptyset$. **C.** $m\in\{-1;1\}$. **D.** $m=-1$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 220. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z+-4=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+2m}{3}=\dfrac{z}{2}$. Với giá trị nào của m thì giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thuộc mặt phẳng (Oyz).

A. $m=\dfrac{4}{5}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{12}{17}$.

Câu 221. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+my-3z+m-2=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+4t \\ y=1-t \\ z=1+3t \end{cases}$. Với giá trị nào của m thì d cắt (P)

A. $m\neq\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\neq -1$.

Câu 222. Trong không gian (P), cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=-3+t \\ z=1+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): m^2x-2my+(6-3m)z-5=0$. Tìm m để $d \parallel (P)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-6 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=6 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-6 \end{array}\right.$. **D.** $\emptyset$.

Câu 223. Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=3$.

Câu 224. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=6+5t \\ y=2+t \\ z=1 \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $3x-2y+1=0$. Tính góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 225. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ và $D(-2;1;-1)$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD có số đo là

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 226. Trong không giamn $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+2z+1=0$, đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Tính giá trị $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi=\dfrac{6}{9}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{4}{9}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{9\sqrt{65}}{65}$.

Câu 227. Góc giữa hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-4-2t \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=2+t \end{cases}$ là

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 228. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=5+t \\ y=-2+t \\ z=4+\sqrt{2}t \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P): x-y+\sqrt{2}z-7=0$. Hãy xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Câu 229. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD. Khi đó

A. $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

C. $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

Câu 230. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $30°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $60°$.

Câu 231. Cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là

A. $60°$. **B.** $-30°$. **C.** $30°$. **D.** $-60°$.

Câu 232. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $120°$. **D.** $45°$.

Câu 233. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $120°$. **D.** $150°$.

Câu 234. Cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+1=0$, $(\beta)\colon x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 235. Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z-1=0$ và $(\beta)\colon x+2y-2z-3=0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $-\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. **D.** $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

Câu 236. Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc $60°$?

A. $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-z-2=0$.
B. $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.
C. $(P)\colon 2x-11y+5z-21=0$ và $(Q)\colon 2x+y+z-2=0$.
D. $(P)\colon 2x-5y+11z-6=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.

Câu 237. Tính tổng các giá trị tham số m để mặt phẳng $(P)\colon (m+2)x+2my-mz+5=0$ và $(Q)\colon mx+(m-3)y+2z-3=0$ hợp với nhau một góc $\alpha=90°$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** -4.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 238. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M\,(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 239. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M\,(1;0;1)$ lên đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ là

A. $(2;4;6)$. **B.** $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;0)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Câu 240. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-2t \end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên Δ. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 7.

Câu 241. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A\,(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z=0$ là

A. $(-2;1;1)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$. **C.** $(1;1;-2)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 242. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M\,(-1;0;3)$ theo phương vectơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+2=0$ có tọa độ là

A. $(2;-2;-2)$. **B.** $(-1;0;1)$. **C.** $(-2;2;2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Câu 243. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 6x-2y+z-35=0$ và điểm $A\,(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), tính OA'.

A. $OA'=5\sqrt{3}$. **B.** $OA'=\sqrt{46}$. **C.** $OA'=\sqrt{186}$. **D.** $OA'=3\sqrt{26}$.

Câu 244. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi d' là hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P), vectơ chỉ phương của đường thẳng d' là

A. $\vec{u}_3=(5;-6;-13)$. **B.** $\vec{u}_2=(5;-4;-3)$. **C.** $\vec{u}_4=(5;16;13)$. **D.** $\vec{u}_1=(5;16;-13)$.

Câu 245. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z+4}{-2}$.

C. $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{2}$.

Câu 246. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$.

Câu 247. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.
B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+5}{1}$.
C. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.
D. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 248. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P).

A. $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$.
B. $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.
C. $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$.
D. $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 249. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

A. $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$.
B. $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.
C. $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$.
D. $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 250. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.
B. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.
C. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.
D. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

Câu 251. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d'. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d'?

A. $M(2;5;-4)$.
B. $P(1;3;-1)$.
C. $N(1;-1;3)$.
D. $Q(2;7;-6)$.

Câu 252. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ làm một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $a+b$.

A. 2019.
B. -2019.
C. 2018.
D. -2020.

Câu 253. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-2 \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$, $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$. Gọi d' và Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b\cdot c$ bằng

A. 4.
B. 5.
C. 3.
D. 6.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 254. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ.

A. $H\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Câu 255. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=6-4t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

A. $A'(2;3;1)$. **B.** $A'(-2;3;1)$. **C.** $A'(2;-3;1)$. **D.** $A'(2;-3;-1)$.

Câu 256. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B.** $(7;1;-1)$. **C.** $(2;1;-2)$. **D.** $(0;2;-5)$.

Câu 257. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z=0$.

A. $M'\left(2;\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $M'(1;3;5)$. **C.** $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M'(3;1;2)$.

Câu 258. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-3=0$ có tọa độ là

A. $(-3;0;0)$. **B.** $(-1;1;2)$. **C.** $(-1;-2;-4)$. **D.** $(2;1;2)$.

Câu 259. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$.

Câu 260. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+5}{1}$.

Câu 261. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ và M có tung độ âm và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=11$. **C.** $T=-13$. **D.** $T=1$.

Câu 262. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;b;c)$ thuộc d sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết $c<0$.

A. $M\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6};-\frac{2}{3}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{7}{6};-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $M(-1;0;-3)$. **D.** $M(2;3;3)$.

Câu 263. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;0;1)$, đường thẳng d qua điểm A và tạo với trục Oy góc 45°. Phương trình đường thẳng d là

A. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

Câu 264. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x-7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P). Đường thẳng d_2 nằm trong (P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(a;b;c)$. Tính $\dfrac{a+2b}{c}$.

A. $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{a+2b}{c}=0$. **C.** $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{a+2b}{c}=1$.

Câu 265. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, $d_2\colon \begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45° và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích $b\cdot c$.

A. -4 hoặc 0. **B.** 4 hoặc 0. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 266. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=0\\ y=3-t\\ z=t\end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 45°. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(3;2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(3;-1;2)$. **D.** $M(3;-1;-2)$.

Câu 267. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x+z-3=0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh A.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 268. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua $A(2;1;-1)$ tạo với trục Oz một góc 30°?

A. $\sqrt{2}(x-2)+(y-1)-(z-2)-3=0$. **B.** $(x-2)+\sqrt{2}(y-1)-(z+1)-2=0$.
C. $2(x-2)+(y-1)-(z-2)=0$. **D.** $2(x-2)+(y-1)-(z-1)-2=0$.

Câu 269. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+2z-5=0$ và điểm $A(1;-2;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45°.

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 270. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 271. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 272. Khoảng cách từ điểm $H(1;0;3)$ đến đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P)\colon z-3=0$ lần lượt là $\mathrm{d}(H,d_1)$ và $\mathrm{d}(H,(P))$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\mathrm{d}(H,d_1)>\mathrm{d}(H,(P))$. **B.** $\mathrm{d}(H,(P))>\mathrm{d}(H,d_1)$.
C. $\mathrm{d}(H,d_1)=6\cdot\mathrm{d}(H,(P))$. **D.** $\mathrm{d}(H,(P))=1$.

Câu 273. Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y-2z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+4t \\ z=-t \end{cases}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 274. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

A. $\mathrm{d}=2$. **B.** $\mathrm{d}=\dfrac{5}{3}$. **C.** $\mathrm{d}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\mathrm{d}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 275. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 276. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+4=0$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 277. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Điểm M thuộc đường thẳng d sao cho M cách A một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm M là

A. $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$. **B.** $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$.
C. $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$. **D.** $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$.

Câu 278. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các

phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Câu 279. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{12}{5}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 3.

Câu 280. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-3-t \\ z=2+2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Khi đó khoảng cách giữa d và d' bằng

A. $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$. **D.** 0.

Câu 281. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+4t \\ y=-1-2t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Câu 282. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 tới mặt phẳng (P). Với $d_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{3}$; $d_2\colon \dfrac{-x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $(P)\colon 2x+4y-4z-3=0$.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{13}{6}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 283. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** 1.

Câu 284. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P), Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với d và cách M một khoảng bằng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. **D.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Câu 285. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(4;3;7)$. **B.** $(-1;-2;1)$. **C.** $(7;5;3)$. **D.** $(3;4;3)$.

Câu 286. Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 287. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P)\colon x-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases}$. Gọi $d_1;d_2$ là các đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 288. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến Δ.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 289. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ tại điểm I. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta\perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) của điểm I trên đường thẳng Δ.

A. $M\,(2;5;-4)$. **B.** $M\,(6;-3;0)$. **C.** $M\,(5;2;-4)$. **D.** $M\,(-3;6;0)$.

Câu 290. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A,B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t. \\ z=t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t. \\ z=2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t. \\ z=2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t. \\ z=4t \end{cases}$

Câu 291. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P)\colon x+ay+bz+c=0\,(c>0)$ song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng hai lần khoảng cách từ d_2 đến (P). Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 14. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 292. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$, $\Delta_2:\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1=(1,-1,2)$ và $\vec{u}_2=(2,1,-1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0,3,-3)$ và có $\vec{u}_1$ là một vectơ chỉ phương.		
b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4,-2,4)$ và có $\vec{u}_2$ là một vectơ chỉ phương.		
c) $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(1,-5,-3)$.		
d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.		

Câu 293. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$, $\Delta_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Xét các vectơ $\vec{u}_1 = (3,-1,2)$ và $\vec{u}_2 = (1,2,1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1,-2,3)$ và có $\vec{u}_1$ là một vectơ chỉ phương.		
b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-2,1,-1)$ và có $\vec{u}_2$ là một vectơ chỉ phương.		
c) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1,7,-5)$.		
d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.		

Câu 294. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$, $\Delta_2 : \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-6}{2}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Vectơ có tọa độ $(1;2;3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_1.		
b) Vectơ có tọa độ $(4;5;6)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_2.		
c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}_1 = (2;1;-2)$ và $\vec{u}_2 = (-1;-2;2)$ bằng $-\dfrac{8}{9}$.		
d) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) bằng $132°$.		

Câu 295. Cho đường thẳng Δ_1 đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, Δ_2 đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0} \end{cases}$.		
b) $\Delta_1 \,/\!/\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0} \end{cases}$.		
c) Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$.		
d) Δ_1 chéo $\Delta_2 \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.		

Câu 296. Cho đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (3;4;-2)$, d_2 đi qua điểm $B(0;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2;1;5)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $B(1;2;3)$ thuộc đường thẳng d_1.		
b) $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (22;-11;11)$.		
c) d_1 và d_2 chéo nhau.		
d) d_1 và d_2 không vuông góc.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 297. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(-1;-1;4)$, $D(3;1;-2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng đi qua AB có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-6;-6)$.		
b) Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD.		
c) Góc (*làm tròn đến hàng đơn vị của độ*) giữa đường thẳng AB và AD là $33°$.		
d) Góc (*làm tròn đến hàng đơn vị của độ*) giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $20°$.		

Câu 298. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(1;-3;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+4z-1=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-4;4)$.		
b) Đường thẳng đi qua A vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=1-3t\\z=-3+4t\end{cases}$.		
c) Mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình $x+4y-4z-18=0$.		
d) Góc (*làm tròn đến hàng đơn vị của độ*) giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là $67°$.		

Câu 299. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;4;-3)$, $B(-3;1;-1)$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$, $d'\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm A nằm trên đường thẳng d.		
b) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.		
c) cosin của góc giữa đường thẳng d và đường thẳng AB là $\dfrac{17\sqrt{6}}{42}$.		
d) Gọi (P) là mặt phẳng chứa d' và AB. Góc (*làm tròn đến hàng đơn vị của độ*) giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $70°$.		

Câu 300. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d'\colon \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d song song đường thẳng d'.		
b) Đường thẳng d trùng đường thẳng d'.		
c) Đường thẳng d cắt đường thẳng d'.		
d) Đường thẳng d chéo đường thẳng d'.		

Câu 301. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ giao điểm của d và d' là $I(1;-2;4)$.		
b) Tọa độ giao điểm của d và d' là $I(1;2;4)$.		
c) Đường thẳng d cắt đường thẳng d'.		
d) Đường thẳng d chéo đường thẳng d'.		

Câu 302. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d_3\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_4\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.		
b) Đường thẳng d_3 cắt đường thẳng d_2.		
c) Đường thẳng d_4 không cắt đường thẳng d_1.		
d) Đường thẳng d_3 cắt đường thẳng d_1.		

Câu 303. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;5)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z-1=0$, $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;-2;3)$.		
b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P).		
c) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $90°$.		
d) Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=5+t \end{cases}$.		

Câu 304. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=1+2t \\ z=-2+4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-y+z-2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương có tọa độ là $(3;1;-2)$.		
b) Góc (làm tròn đến đơn vị của độ) giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $4°$.		
c) Điểm $M(1;5;6)$ là điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (P).		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
d) Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $6x+13y-5z-41=0$.		

Câu 305. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ vuông góc với d.		
b) Đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$ cắt d tại một điểm.		
c) Đường thẳng $d_3\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ song song với d.		
d) Đường thẳng $d_4\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ chéo với d.		

Câu 306. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) d_1, d_2 cắt nhau.		
b) d_1, d_2 chéo nhau.		

Phát biểu	Đ	S
c) $d_1 \equiv d_2$.		
d) $d_1 \parallel d_2$.		

Câu 307. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z-5=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{-1}$ vuông góc với (P).		
b) Đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$ cắt (P) tại một điểm.		
c) Trục Ox không song song với (P).		
d) Đường thẳng $d_3\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ nằm trên (P).		

Câu 308. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=5 \end{cases}$ nằm trên (P).		
b) Đường thẳng $d_2\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases}$ cắt (P) tại một điểm.		
c) Trục Oz song song với (P).		
d) Trục Oy cắt (P).		

Câu 309. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $B(2;-1;8)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B lên d. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) BH vuông góc với d.		
b) Điểm H có tọa độ là $H(-2;1;3)$.		
c) Điểm H có tọa độ là $H(5;-3;4)$.		
d) Điểm $B'(8;-7;0)$ là điểm đối xứng với B qua d.		

Câu 310. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d và M' là điểm đối xứng với M qua d. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ điểm $H(1;0;-2)$.		
b) M là trung điểm của $M'H$.		

Phát biểu	Đ	S
c) Tọa độ điểm $M'(-1;0;6)$.		
d) Tọa độ điểm $M'(-1;-1;3)$.		

Câu 311. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;2;-1)$, $B\,(7;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Điểm I thuộc d sao cho $AI+BI$ nhỏ nhất. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $A\in d$.		
b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2;2)$.		
c) $\min(AI+BI)=2\sqrt{15}$.		
d) $I(2;0;4)$.		

Câu 312. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) là lớn nhất. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{d}(A,(P))$ lớn nhất khi chỉ khi hình chiếu của A lên đường thẳng d trùng với hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).		
b) Tọa độ hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d là $K(3;1;4)$.		
c) Phương trình mặt phẳng (P) là $(P)\colon x-4y+z+3=0$.		
d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.		

Câu 313. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;-1)$..		
b) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là $H(1;1;1)$.		
c) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AH}=(1;2;3)$.		
d) Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $3x+z+2=0$.		

Câu 314. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng lớn nhất. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $A\in d$.		
b) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;1;1)$.		
c) Hình chiếu vuông góc của A trên d là $H(1;0;1)$.		
d) Vectơ $\vec{n}=(1;1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).		

Câu 315. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;5;0)$.		
b) Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ có phương trình là $2x+2y-z+9=0$.		
c) Hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (P) là $H(-3;-2;-1)$.		
d) d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0;2)$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 316. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ và $d'\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z-4}{7}$. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d và d'. Tính abc. KQ: $\square\square\square\square$

Câu 317. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=4+2t\end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases}x=2+t\\y=3-3t\\z=6+2t\end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d và d'. Tính $a+2b+3c$. KQ: $\square\square\square\square$

Câu 318. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases}x=3-t\\y=3-2t\\z=-2+t\end{cases}$. Tìm $a+b+c$. KQ: $\square\square\square\square$

Câu 319. Trong không gian $Oxyz$, biết hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt nhau tại $I(a;b;c)$. Tính giá trị $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 320. Tính tan của góc giữa hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z+4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=3+3t \\ y=-4-2t \\ z=2+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

KQ: | | | | |

Câu 321. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=5+t \\ y=-2+t \\ z=4+\sqrt{2}t \end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+\sqrt{2}z-7=0$. Hãy tính cos của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) *(làm tròn đến hai chữ số thập phân).*

KQ: | | | | |

Câu 322. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;4)$, $B(-1;2;5)$, $C(1;-2;0)$, $D(-3;-4;1)$. Tính sin của góc giữa AB và CD. *(Làm tròn đến một chữ số thập phân)*

KQ: | | | | |

Câu 323. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;4;3)$, $B(2;-3;1)$, $C(-1;8;4)$. Tính cotang của góc giữa hai đường thẳng AB và AC *(làm tròn đến hai chữ số thập phân).*

KQ: | | | | |

Câu 324. Tìm số mặt phẳng (α) chứa $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+1=0$ một góc 45°.

KQ: | | | | |

Câu 325. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có dạng $ax+by+cz=0$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

KQ: | | | | |

Câu 326. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$, $(Q)\colon x+my+(m-1)z+2024=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 327. Cho hai điểm $A(1;-1;1)$; $B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa A, B và tạo với mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-7=0$ một góc 60°?

KQ: | | | | |

Câu 328. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1)$, $B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$ có dạng $ax+by+cz+d=0$ với $d\neq 0$. Tính $\dfrac{d}{a}$.

KQ: | | | | |

Câu 329. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60°. Tính giá trị $a+b+c$. *(Kết quả lấy đến hàng phần chục)*

KQ: | | | | |

Câu 330. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

$(\alpha)\colon 3x-4y+z-12=0$ và cách điểm $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất có dạng $\begin{cases} x=4+at \\ y=-2+bt \\ z=1+ct \end{cases}$. Tính tổng $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 331. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là nhỏ nhất. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$. Tính $\dfrac{b}{c}$.

KQ: | | | | |

Câu 332. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho chu vi của tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 333. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax+by+cz-3=0$ (với a, b, c là các số nguyên). Tính tổng $T=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 334. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A, vuông góc với d đồng thời khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất. Biết $\vec{v}=(a;b;4)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

KQ: | | | | |

DẠNG 4 Tọa độ hóa. Bài toán thực tiễn. Cực trị

Sử dụng các kiến thức về đường thẳng, mặt phẳng để giải toán.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 52 (Mức độ 1).

Một mô hình cầu treo được thiết kế trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Viết phương trình tham số của làn đường d đi qua hai điểm $M\,(4;3;20)$ và $N\,(4;1000;20)$.



Ví dụ 53 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(1;3;4)$ và trong 3 giây, đầu đạn đi với vận tốc không đổi; vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v}=(2;1;6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu trong mỗi tình huống sau hay không?

a) Mục tiêu đặt tại điểm $M\left(7;\frac{7}{2};21\right)$.

b) Mục tiêu đặt tại điểm $N(-3;1;-8)$.

Ví dụ 54 (Mức độ 2). Anh Bình là một nhiếp ảnh gia chuyên săn ảnh chim hoang dã. Giả sử với hệ trục $Oxyz$ cho trước, anh Bình đang ngắm và ống kính ở vị trí A có toạ độ $(200;685;436)$ thì có một con gà lôi tía xuất hiện ở vị trí B có toạ độ $(640;550;474)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa đoạn thẳng nối hai vị trí ống kính ngắm của anh Bình và con gà lôi tía.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TÀI LIỆU ÔN THI CHUNG

b) Nếu một quả đồi có toạ độ đỉnh C là $(420; 617,5; 450)$. Hỏi C có thuộc đường ngắm AB không? Anh Bình có ngắm thấy con gà lôi tía này không?

Ví dụ 55 (Mức độ 1).

Trên một máy khoan bàn đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ. Nêu nhận xét về vị trí giữa trục d của mũi khoan và trục d' của giá đỡ có phương trình lần lượt là

$$d\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và } d'\colon \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 5 + 5t'. \end{cases}$$



Ví dụ 56 (Mức độ 3).

Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m. *(Nguồn: www.goldengate.org)*

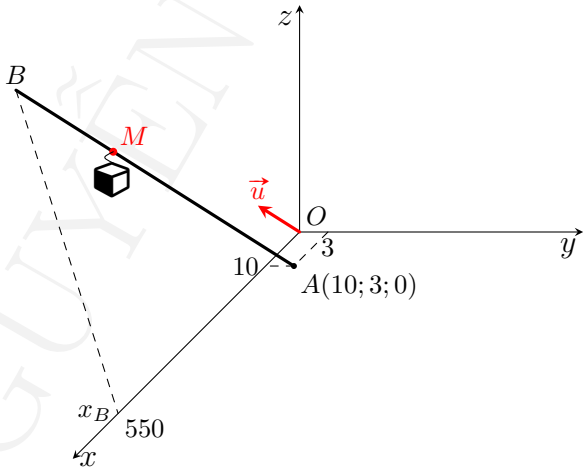
Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.



a) Tính độ dài MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m.

b) Người ta có thể dùng đoạn dây dài 100 m để nối dây cáp AD với thành cầu tại vị trí điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 148 m không? Vì sao?

Ví dụ 57 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (*Hình dưới*).



a) Viết phương trình đường cáp.

b) Giả sử sau t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Tìm tọa độ điểm M.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Tìm độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?

THS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 58. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;6)$. **C.** $\vec{u}=(-1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Ví dụ 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+3z+z-6=0$.		
b) $D\in(ABC)$.		
c) Tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ lớn nhất khi $\Delta\subset(ABC)$.		
d) Δ đi qua điểm $M(-1;-2;0)$.		

Ví dụ 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P)\colon 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến (P).

Bài 21. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1\\ y=4+3t\\ z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất. Hãy viết phương trình Δ.

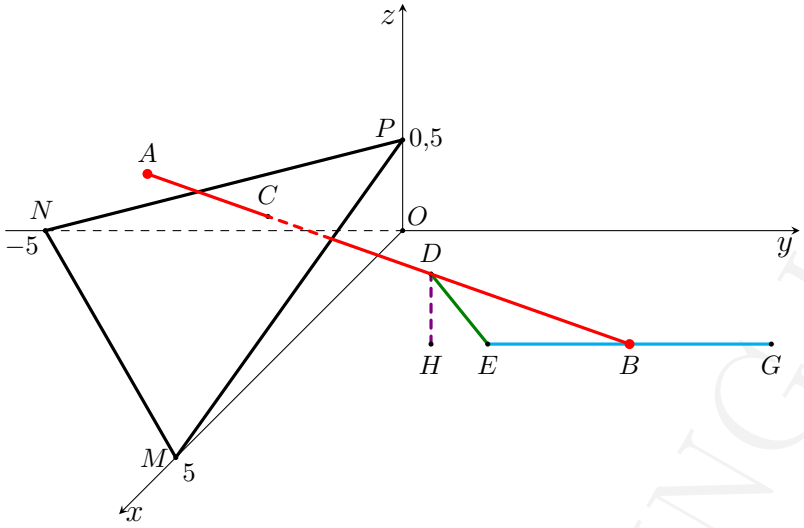
Bài 22. Cho $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$ và điểm M thuộc d. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMB.

Bài 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (Δ) sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (Q).

Bài 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x+2y-z-5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất.

Bài 25 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3{,}5;-2;0{,}4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3{,}5;5{,}5;0)$ trên đường băng EG (*Hình dưới*).

(*Nguồn: R.Laurson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage, 2014*)



a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ 2,5° đến 3,5° hay không?

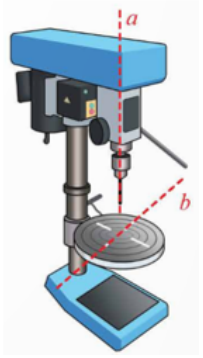
c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;-5;0)$, $P(0;0;0{,}5)$. Tìm tọa độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm tọa độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3{,}5;6{,}5;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m.

Bài 26 (Mức độ 2).

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là



$$a:\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3t \end{cases} \text{ và } b:\begin{cases} x=1+4t' \\ y=2+2t' \\ z=6. \end{cases}$$

a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.

Bài 27 (Mức độ 2).

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Xác định tọa độ du khách khi ở độ cao 12 mét.



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 28 (Mức độ 1).

Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng 3D trong không gian $Oxyz$, một xạ thủ đang ngắm với tọa độ khe ngắm và đầu ruồi lần lượt là $M(3;3;1{,}5)$, $N(3;4;1{,}5)$. Viết phương trình tham số của đường ngắm bắn của xạ thủ (xem như đường thẳng MN).



Bài 29 (Mức độ 1).

Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ và mặt sàn sân khấu có phương trình $z=0$.



3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 335. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA=a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và (ABC).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 336. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

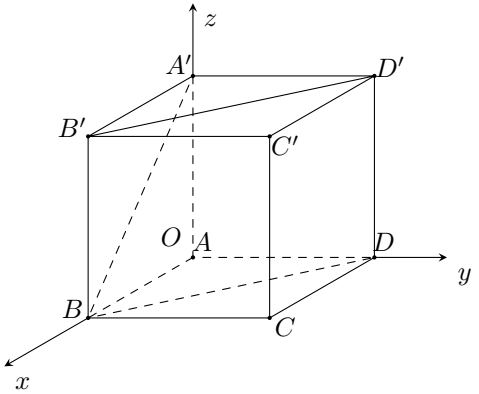
A. $135°$. **B.** $150°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Câu 337.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



Câu 338. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 339. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác

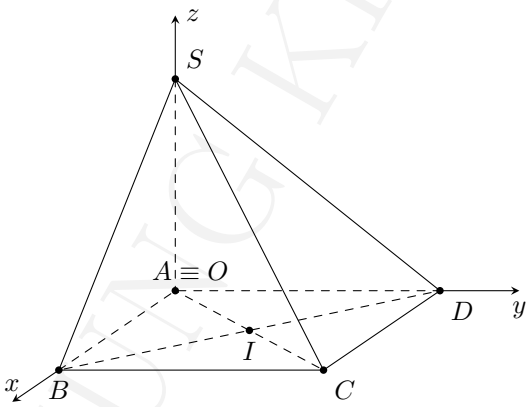
SCD. Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 340.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.



Câu 341. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN\perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Câu 342. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\dfrac{5}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

Câu 343. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Câu 344. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 345. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{13}$.

Câu 346. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 347. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 348. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°. Côsin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 349. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30°. Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC. Tìm cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN).

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 350. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 120°. **D.** 60°.

Câu 351. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$ với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Câu 352. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

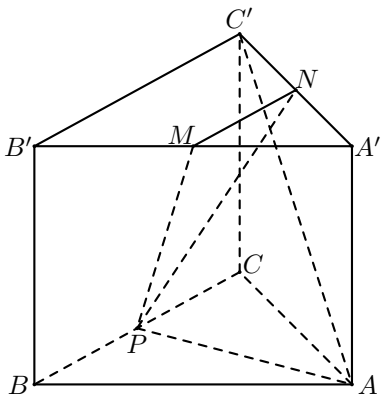
Câu 353. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 354.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

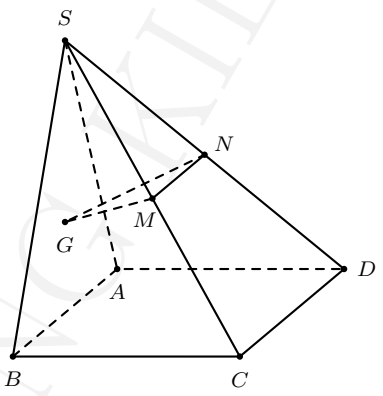


Câu 355. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{30}$.

Câu 356.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Câu 357. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Câu 358. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2;1;2)$, $B(2;1;-2)$ và $C(1;1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua C sao cho tổng khoảng cách từ A và B đến d lớn nhất. Giao điểm của d với mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z=0$ có tọa độ là

A. $\left(1;-\dfrac{1}{10};1\right)$. **B.** $(1;3;1)$. **C.** $(1;-3;1)$. **D.** $\left(1;\dfrac{1}{10};1\right)$.

Câu 359. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ cắt đường thẳng Δ_1 và tạo với đường thẳng Δ_2 một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 360. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $P\left(\dfrac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Giả sử $M\in d$ sao cho chu vi $\triangle ABM$ nhỏ nhất. Tìm độ dài MP.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 361. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 362. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $M(1;3;4)$ và trong 3 giây, đầu

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Th.S. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

đạn đi với vận tốc không đổi; vectơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (2;1;6)$. Hỏi viên đạn trên có bắn trúng mục tiêu nào trong các mục tiêu sau?

A. $E(7;11;21)$. **B.** $F\left(7;\frac{7}{2};21\right)$. **C.** $G(5;4;8)$. **D.** $H(6;9;5)$.

Câu 363.

Trên phần mềm thiết kế chiếc cầu treo, cho đường thẳng d trên trụ cầu và đường thẳng d' trên sàn cầu có phương trình lần lượt là

$$d\colon \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=50+t \end{cases} \text{ và } d'\colon \begin{cases} x=20 \\ y=t' \\ z=50. \end{cases}$$



Vị trí tương đối giữa d và d' là

A. cắt nhau. **B.** song song. **C.** trùng nhau. **D.** chéo nhau.

Câu 364.

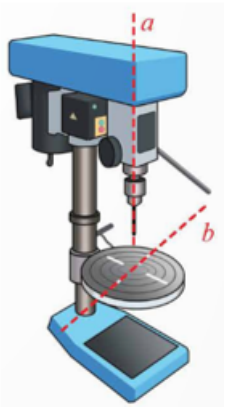
Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Viết phương trình đường thẳng chứa đường zipline này.



A. $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2{,}5+25t \\ z=15-5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=18+3 \\ y=25+2{,}5t \\ z=-5+15t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+21t \\ y=2{,}5+27t \\ z=15+10t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+24t \\ y=2{,}5+29{,}5 \\ z=15+25t \end{cases}$.

Câu 365.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là $a\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3t \end{cases}$ và $b\colon \begin{cases} x=1+4t' \\ y=2+2t' \\ z=6. \end{cases}$



A. a và b vuông góc và cắt nhau.
B. a và b chéo nhau.
C. a và b song song với nhau.
D. a và b không vuông góc và cắt nhau.

Câu 366.

Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Tính góc giữa tia sáng có phương trình $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ và mặt sàn sân khấu có phương trình $z=0$.



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $50°$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 367.

Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết trục $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=20 \\ z=9 \end{cases}$ của nòng súng và cọc đỡ bia $d'\colon \begin{cases} x=10 \\ y=20 \\ z=1+3t' \end{cases}$. Khi đó



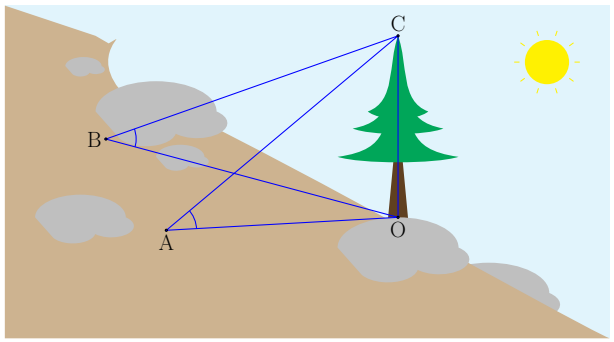
Phát biểu	Đ	S
a) d đi qua điểm $M(0;20;9)$.		
b) Một vectơ chỉ phương của d' là $\vec{v}=(0;0;1)$.		
c) d cắt d'.		
d) d không vuông góc với d'.		

Câu 368. Trên một phần mềm đã thiết kế sân khấu 3D trong không gian $Oxyz$, hai tia sáng có phương trình lần lượt là $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{9}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;-1)$.		
b) Một vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u'}=(1;1;3)$.		
c) d đi qua điểm $M(1;1;1)$.		
d) Góc giữa d và d' là $45°$.		

Câu 369.

Trên một sườn núi (có độ nghiêng không đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình bên. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0;0;0)$, $A(3;-4;2)$, $B(-5;-2;1)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $(0;0;5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.



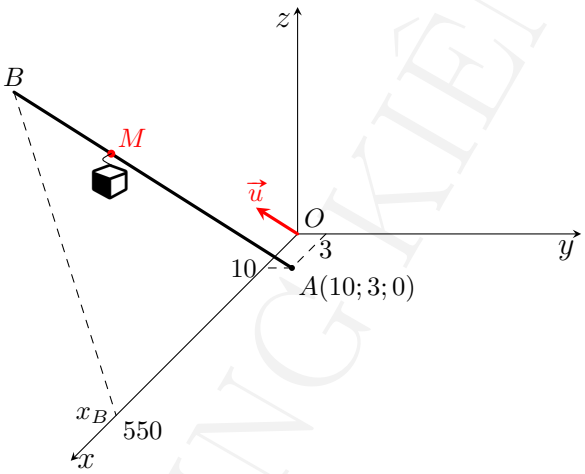
Phát biểu	Đ	S
a) Độ dài dây neo AC là $\sqrt{52}$ (m).		
b) Độ dài dây neo BC là $3\sqrt{5}$ (m).		
c) Góc tạo bởi mỗi dây neo AC và mặt phẳng sườn núi là $\approx 45°$.		
d) Góc tạo bởi mỗi dây neo BC và mặt phẳng sườn núi là $\approx 42°$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 370.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-2;1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (*Hình bên*). Giả sử sau t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Điểm B có hoành độ $x_B = 550$.



Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình chính tắc của đường cáp là $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$.		
b) Tọa độ M là $\left(3t+10;-3t+3;\dfrac{3t}{2}\right)$.		
c) Độ dài quãng đường AB là 800 (m).		
d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc $\approx 19°$.		

Câu 371.

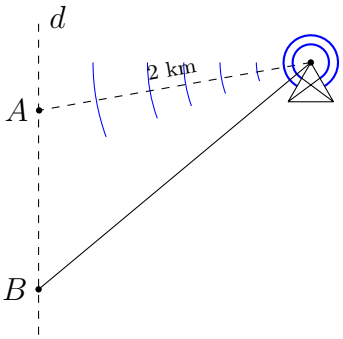
Trên một cánh đồng điện mặt phẳng, người ta đã thiết lập sẵn một hệ tọa độ $Oxyz$. Hai tấm pin năng lượng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+2z+1=0$ và $(P')\colon x+z+7=0$. Cho mặt đất (Q) có phương trình $z=0$.



Phát biểu	Đ	S
a) Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_1=(2;2;1)$.		
b) Một vectơ pháp tuyến của (P') là $\vec{n}_2=(1;1;7)$.		
c) Góc giữa (P) và (P') là $0°$.		
d) Góc giữa (P) với mặt đất là $45°$.		

Câu 372.

Một máy phát tín hiệu P được đặt cố định ở một địa điểm và ta có thể nhận được tín hiệu của máy phát này trong phạm vi của một mặt cầu với bán kính R của nó. Một người cầm máy dò tín hiệu A chuyển động trên đường thẳng d như hình bên.

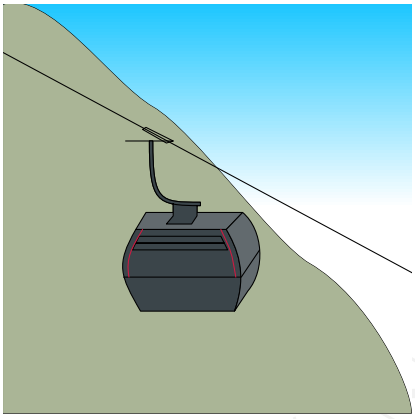


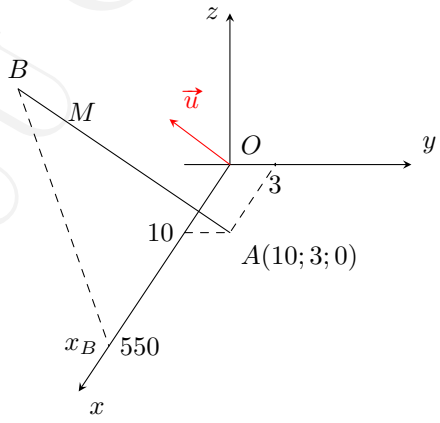
ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Nếu chọn điểm đặt máy phát tín hiệu P là gốc tọa độ O của hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì máy dò A di chuyển theo đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 5 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$, (trong đó t (h) là thời gian chuyển động). Mặt cầu giới hạn phạm vi nhận tín hiệu của máy dò A tại thời điểm nó gần máy phát tín hiệu P nhất có tâm $I(a;b;c)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $N(5;5;-7)$ là một điểm thuộc đường thẳng d.		
b) Gọi M là vị trí của máy dò A trên đường thẳng d. Điểm M có tọa độ $M(5-t;5-t;7-2t)$.		
c) Khoảng cách ngắn nhất giữa máy dò A và máy phát tín hiệu P là 4.		
d) $M(a;b;c)$ là tọa độ vị trí gần nhất của máy dò A và máy phát tín hiệu P. Khi đó $a+b+c=1$.		

Câu 373. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (Hình bên dưới).





Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình tham số của đường cáp là $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.		
b) Giả sử sau thời gian t giây kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t+10;-3t+3;\dfrac{3t}{2}\right)$.		
c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Khi đó $AB = 800$ m.		
d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc $30°$.		

Câu 374. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng a: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt mặt bàn (P): $x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA = 40\sqrt{3}$ cm. Khi đó

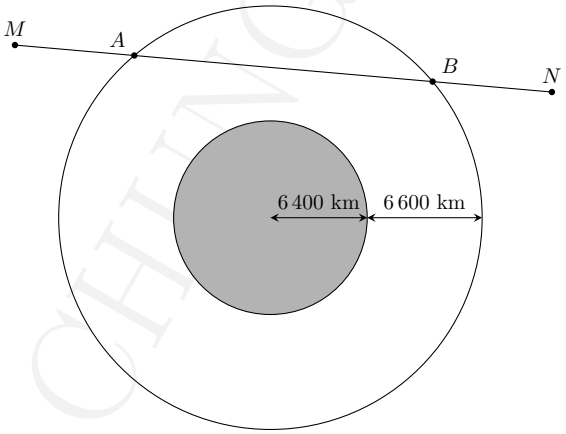
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-2)$.		
b) Đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;4)$.		
c) $\cos\big(a,(P)\big) = \dfrac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{u}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{u}\rvert} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.		
d) Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là $40\sqrt{2}$ cm.		

Câu 375.

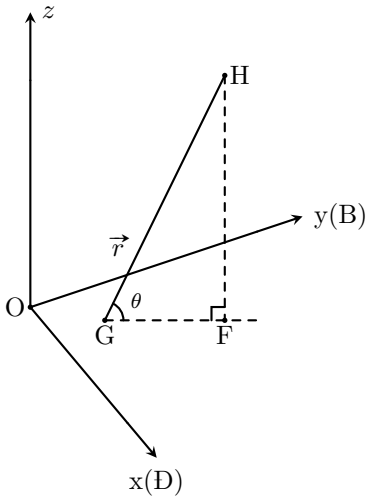
Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1 000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6+3t \\ y = 20+8t \\ z = -4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.		
b) Vị trí đầu tiên thiên thạch đi chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.		
c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm đơn vị ki-lô-mét).		
d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.		

Câu 376.

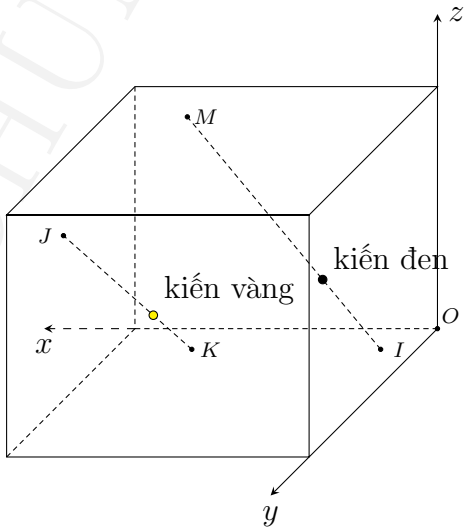
Hình minh họa bên là đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng Đông (Đ), trục Oy là hướng Bắc (B) và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G. Vectơ $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh $(t \geq 0)$ có tọa độ là $\vec{r} = (1+t;0{,}5+2t;2t)$.



Phát biểu	Đ	S
a) $\theta \approx 40^\circ$ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).		
b) Phương trình tham số của GF là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0{,}5+2t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.		
c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tọa độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây là $I(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c = 7{,}5$.		
d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5;4{,}5;3)$ thì HM vuông góc với đường bay GH. Khoảng cách từ trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó bằng $\sqrt{5}$ km.		

Câu 377.

Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị = 1 cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng (kiến bên trái) ở tại vị trí $(6+t;8-t;3+t)$ trên đường thẳng d_1. Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(1+t;2+t;2t)$ trên đường thẳng d_2 được mô hình hóa như hình vẽ bên.



Phát biểu	Đ	S
a) Hai chú kiến bò trên hai đường thẳng chéo nhau.		
b) Khoảng cách giữa hai chú kiến tại các thời điểm $t = 0$ là 70 cm.		
c) Khoảng cách giữa hai chú kiến tại các thời điểm $t = 10$ là $3\sqrt{30}$ cm.		
d) Khoảng cách ngắn nhất giữa hai chú kiến gần bằng 7,33 cm.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 378. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$. *Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

Câu 379. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính $\left(\widehat{(AHK),(ABB'A')}\right)$.

KQ: | | | | |

Câu 380. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC), tính $\cos\alpha$. *Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

Câu 381. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$, tam giác SAB và tam giác SCB lần lượt vuông tại A, C. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$. Tính

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB). *Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

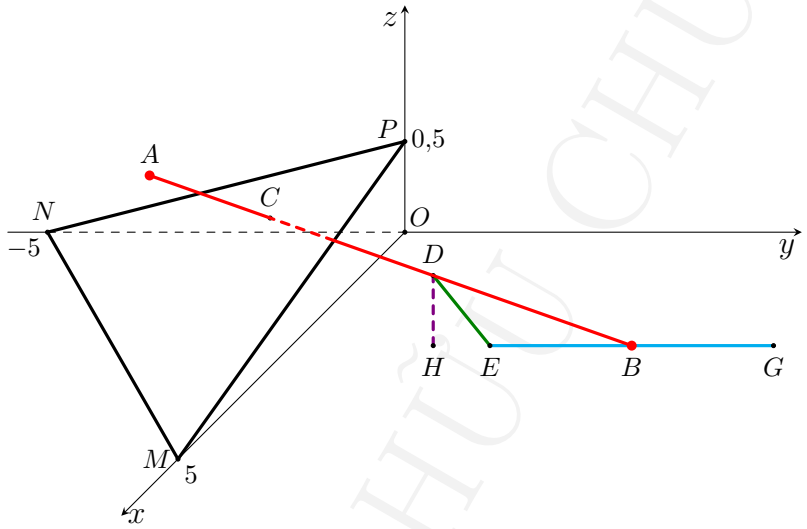
Câu 382. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh A. Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'}$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'M)$, khi đó tính $\sin\alpha$. *Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

Câu 383. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60°. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD). *Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

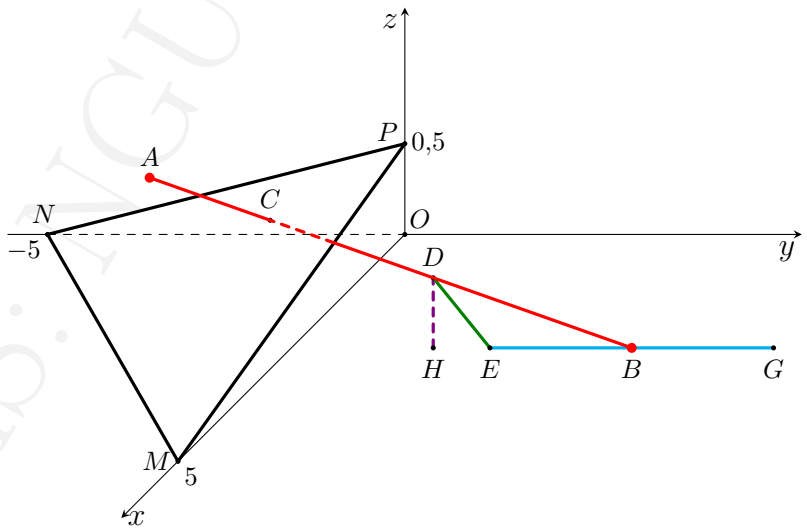
Câu 384. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3{,}5; -2; 0{,}4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3{,}5; 5{,}5; 0)$ trên đường băng EG (*Hình dưới*).



Gọi α° là góc trượt (góc giữa đường bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)). Phạm vi cho phép của góc trượt là từ $2{,}5^\circ$ đến $3{,}5^\circ$. Tìm α *(Đơn vị độ và làm tròn số đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 385. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3{,}5; -2; 0{,}4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3{,}5; 5{,}5; 0)$ trên đường băng EG (*Hình dưới*).



ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

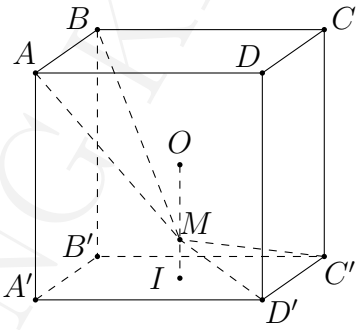
Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5;0;0)$, $N(0;-5;0)$, $P(0;0;0{,}5)$. Gọi C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh. Tìm hoành độ điểm C.

KQ: | | | | |

Câu 386.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm cùa hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) *(kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |



Câu 387.

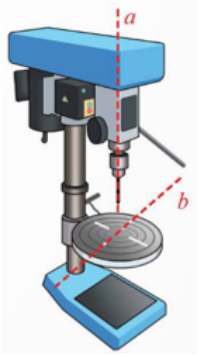
Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$. Tọa độ du khác khi ở độ cao 12 mét là $(a;b;c)$. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |



Câu 388.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là a: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3t \end{cases}$ và b: $\begin{cases} x=1+4t' \\ y=2+2t' \\ z=6. \end{cases}$ Gọi $I(m;n;k)$ là giao điểm của a và b. Tính $a+b+c$.

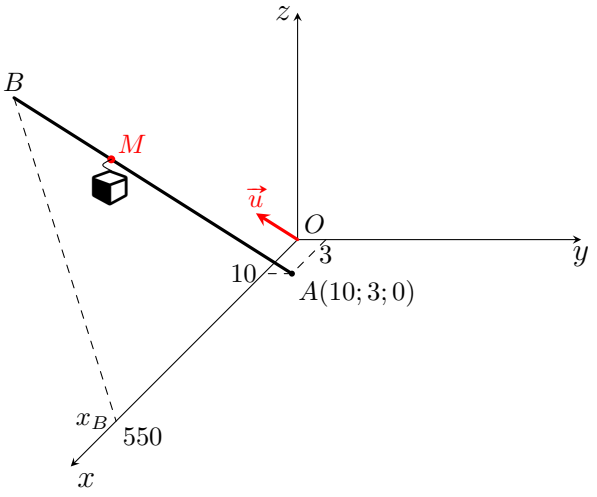
KQ: | | | | |



Câu 389.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) (*Hình bên*). Sau thời gian 180 giây, Cabin dừng ở điểm B. Tìm tung độ điểm B.

KQ: | | | | |

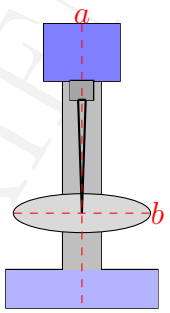


TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 390.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$ cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ) lần lượt là $a\colon \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3t \end{cases}$ và $b\colon \begin{cases} x=1+4k \\ y=2+2k \\ z=6 \end{cases}$. Tọa độ giao điểm của a và b là $M(a;b;c)$.



Tính $S=a+b+c$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 391. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho mặt phẳng $(P)\colon -\sqrt{3}x+y+1=0$. Góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng $a°$. Khi đó a là (*làm tròn đến độ*).

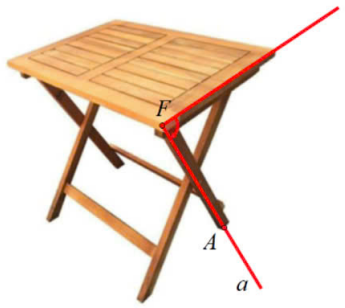
KQ: ☐☐☐☐

Câu 392. Một chiếc máy bay đang bay theo hướng nhất định trong không gian. Giả sử vị trí ban đầu của máy bay tại thời điểm $t=0$ là $A(2;3;5)$. Máy bay di chuyển theo hướng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$. Biết rằng vị trí của máy bay tại thời điểm $t=4$ là $C(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 393.

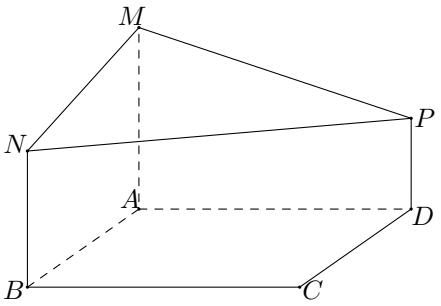
Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a\colon \begin{cases} x=-3+t \\ y=1+t \\ z=-2+4t \end{cases}$ cắt mặt bàn $(P)\colon x+y-2z+6=0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA=40\sqrt{3}$ cm, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm?



KQ: ☐☐☐☐

Câu 394.

Một phần thiết kế của một công trình đang xây dựng có dạng như hình bên, trong đó $ABCD$ là hình vuông cạnh 6 m, AM, BN, DP cùng vuông góc với $(ABCD)$, $AM=4$ m, $BN=3$ m và $DP=2$ m. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (MNP) là $n°$ (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ*, n là số nguyên dương). Giá trị của n là bao nhiêu?



KQ: ☐☐☐☐

Câu 395. Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục toạ độ $Oxyz$. Sân nhà của công trình thuộc mặt phẳng (Oxy), đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(5;6;-2)$. Góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sân bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

KQ: ☐☐☐☐

Câu 396. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên một trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và theo hướng về đài không lưu. $E(a;b;c)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình. Tính $T=a+b+c$.

KQ: ☐☐☐☐

Câu 397. Tại một nút giao thông có hai con đường. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$, hai con đường

đó thuộc hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1\colon \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Tìm a để nút giao thông trên là nút giao thông cùng mức. KQ: | | | | |

Câu 398. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, từ gốc tọa độ, một con cá mập di chuyển dọc theo đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=m \\ y=2m \\ z=2m \end{cases}$, $m>0$ với vận tốc 9 m/s (đơn vị trên các trục là mét). Tọa độ của con cá mập sau 3 giây là $M(a;b;c)$. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

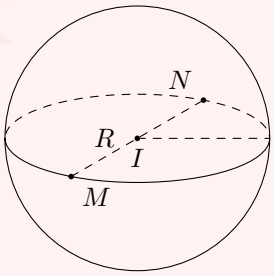
K12 – CHƯƠNG 5

§3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Khái niệm mặt cầu

Định nghĩa 16
Trong không gian, cho điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I, bán kính R, kí hiệu $S(I;R)$, là tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn $IM=R$. Đoạn thẳng nối hai điểm thuộc mặt cầu và đi qua tâm I gọi là đường kính của mặt cầu.



Cho mặt cầu $S(I;R)$.

- *Nếu $IM=R$ thì M nằm trên mặt cầu.*
- *Nếu $IM<R$ thì M nằm trong mặt cầu.*
- *Nếu $IM>R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.*

2 Phương trình của mặt cầu

Định nghĩa 17 Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \ (d=a^2+b^2+c^2-R^2).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Phương trình mặt cầu

- Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

  - Cho dưới dấu bình phương $=0$ tìm tâm.
  - Lấy căn vế phải tìm bán kính.

- Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu.

  - Chia hệ số của x, y, z cho -2 tìm tâm.
  - Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

LƯU HÀNH NỘI BỘ

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Viết phương trình của mặt cầu, biết

a) Tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=10$;

b) Tâm $I(3;-1;-5)$ và đi qua điểm $B(0;2;1)$.

c) Tâm là gốc toạ độ, bán kính $R=1$.

d) Đường kính AB, với $A(1;-1;2)$, $B(2;-3;-1)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình mặt cầu (S)

a) Có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$;

b) Có đường kính AB với $A(1;3;7)$, $B(3;5;1)$;

c) Có tâm $A(1;0;-2)$ và đi qua điểm $B(2;4;1)$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho (S) là tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ có tọa độ thoả mãn phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Chứng minh rằng (S) là một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

Ví dụ 4. Mỗi phương trình sau đây có là phương trình mặt cầu hay không? Nếu có, hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-4y+6z+20=0$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình của một mặt cầu? Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x+3y-8z+100=0$.

b) $x^2+y^2+z^2-4x+5y-2z-\dfrac{3}{4}=0$.

c) $x^2+y^2+z^2-2xy+6y-9z+10=0$.

Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;-2;3)$, $M(3;-1;5)$. Phương trình mặt cầu tâm I và qua M là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3$.

Ví dụ 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;0)$ và $B(3;5;-8)$. Viết phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính.

A. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.
B. $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=5$.
C. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=25$.
D. $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=5$.

Ví dụ 8. Trong không gian $Oxyz$, tìm tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. 6. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 15.

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu là

Phát biểu	Đ	S
a) $x^2+y^2+z^2+5x-7y+z-1=0$.		
b) $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+100=0$.		
c) $x^2+y^2+z^2-x-y-z+\dfrac{1}{2}=0$.		
d) $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;8)$ và $B(2;4;4)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Trung điểm của AB là điểm $I(3;5;6)$.		
b) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (2;2;4)$.		
c) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 2\sqrt{6}$.		
d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 6$.		

Ví dụ 11. Cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(5;0;0)$, điểm $M(x,y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm bán kính của (S). KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 1. Viết phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau

a) (S) có tâm $I(4;-2;1)$ và bán kính $R = 9$.

b) (S) có tâm $I(3;2;0)$ và đi qua điểm $M(2;4;-1)$.

c) (S) có đường kính là đoạn thẳng AB với $A(1;2;0)$ và $B(-1;0;4)$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$. Xác định tâm và bán kính của (S).

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;5)$ và bán kính $R = 2$.

Bài 4. Viết phương trình mặt cầu (S)

a) có tâm $I(-5;7;6)$ và bán kính $R = 9$.

b) có tâm $I(0;-3;0)$ và đi qua điểm $M(4;0;-2)$.

c) có đường kính EF với $E(1;5;9)$, $F(11;3;1)$.

Bài 5. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình sau

c) $(S) : (x-7)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 49$;

c) $(S') : x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 11$;

c) $(S'') : x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Bài 6. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính mặt của cầu đó.

c) $4x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 14y - 7z + 4 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 4z - 19 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 6z + 40 = 0$.

Bài 7. Xác định tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau

a) $(S) : (x-1)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 144$;

b) $(S') : (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 23$;

c) $(S'') : x^2 + y^2 + (z-9)^2 = 36$.

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Bài 8. Viết phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau

a) (S) có tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=5$;

b) (S) có tâm $I(4;1;0)$ và đi qua điểm $A(3;2;2)$;

c) (S) có đường kính là BC với $B(5;3;7)$, $C(1;3;1)$.

Bài 9. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+2z^2-12x-4y-6z+1=0$;

b) $x^2+y^2-2x+y+4z+2=0$;

c) $x^2+y^2+z^2+4x-2y-2z-11=0$;

d) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+9=0$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;-1)$ và có bán kính bằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P): 3x+2y-z=0$.

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2y+8z-18=0$. Xác định tâm, tính bán kính của (S).

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình mặt cầu? Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$;

c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$;

d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.

Bài 13. Cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ).

Bài 14. Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+7)^2=1$. Tìm tọa độ các điểm M, N là chân đường vuông góc vẽ từ tâm I của (S) đến các trục tọa độ Oy và Oz.

Bài 15. Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=2$.

a) Tính khoảng cách từ tâm I của (S) đến mặt phẳng (Oxy).

b) Gọi J là điểm đối xứng của I qua gốc toạ độ O. Viết phương trình mặt cầu (S') tâm J và có cùng bán kính với (S).

Bài 16. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$, với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;6;0)$, $O'(0;0;4)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp.

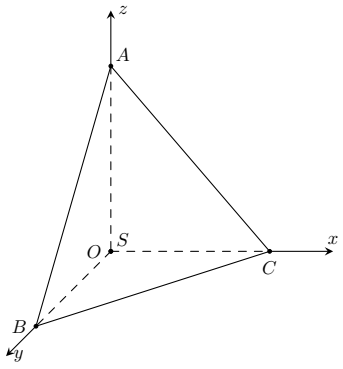
Bài 17. Cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thoả mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của (S).

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm nằm trên trục Oy, đi qua hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B(3;1;-1)$.

Bài 19. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\,(4;0;0)$, $B\,(0;0;2)$, $C\,(0;-3;0)$, $D\,(4;-3;2)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài 20.

Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA=5$, $SB=2$, $SC=4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$.

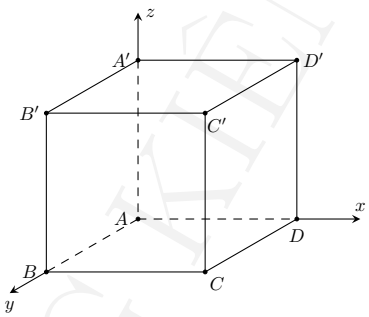


TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 21.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



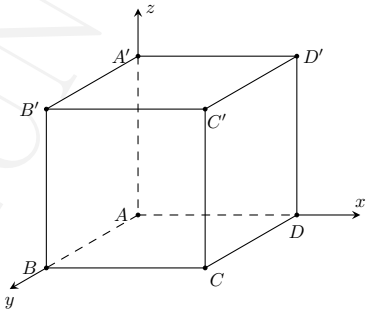
Bài 22.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng $2a$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

a) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Tính khoảng cách từ C' đến mặt phẳng $(CB'D')$.

c) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $B'D$.



Bài 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(1;-2;-1)$, $R=3$. **B.** $I(1;2;1)$, $R=9$.
C. $I(1;2;1)$, $R=3$. **D.** $I(1;-2;-1)$, $R=9$.

Câu 2. Cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. tọa tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(-1;2;1)$ và $R=3$. **B.** $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.
C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$. **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R=9$.

Câu 3. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM<R$. **B.** $OM=R$. **C.** $OM>R$. **D.** $OM\le R$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 3.

Câu 5. Mặt cầu $(S)\colon 3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-4;2;-6)$. **C.** $(4;-2;6)$. **D.** $(2;-1;3)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 81. **C.** 9. **D.** 6.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$.
B. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
D. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) là

A. 32. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(x_0;y_0;z_0)$ bán kính R có phương trình là

A. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.
B. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=R^2$.
C. $(x-x_0)^2-(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.
D. $-(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(7;6;-5)$ và bán kính 9?

A. $(x+7)^2+(y+6)^2+(z-5)^2=81$.
B. $(x+7)^2+(y+6)^2+(z-5)^2=9$.
C. $(x-7)^2+(y-6)^2+(z+5)^2=81$.
D. $(x-7)^2+(y-6)^2+(z+5)^2=9$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;1;-3)$ và bán kính 9 có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=81$.
B. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=81$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
D. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 14. Cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Toạ tâm I và bán kính R của (S) là

A. $I(-1;2;1)$ và $R=3$.
B. $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.
C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$.
D. $I(1;-2;-1)$ và $R=9$.

Câu 15. Mặt cầu tâm $I(-3;0;4)$ và đi qua điểm $A(-3;0;0)$ có phương trình là

A. $(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=4$.
B. $(x-3)^2-y^2+(z+4)^2=16$.
C. $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=16$.
D. $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=4$.

Câu 16. Mặt cầu $(S)\colon (x-11)^2+(y-12)^2+(z-13)^2=100$ có bán kính là

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 17. Tọa độ tâm của mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=8$ là

A. $(-5;6;7)$. **B.** $(5;6;-7)$. **C.** $(5;-6;7)$. **D.** $(-5;6;-7)$.

Câu 18. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$, bán kính $R=2$ là

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.
B. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

Câu 19. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của (S) bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 12.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $(x^2-8)^2+(y-12)^2+(z-24)^2=9^2$.
B. $(x-9)^2+(y-10)^2+(z-11)^2=12^2$.
C. $(x-13)^2+(y-24)^2+(z-36)^2=7^2$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2$.

Câu 21. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+6z+14=0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Th.S NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;2;-3)$; $R=2$. **B.** $I(-1;2;-3)$; $R=4$. **C.** $I(1;-2;3)$; $R=2$. **D.** $I(1;-2;3)$; $R=4$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.
C. $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Câu 25. Cho các phương trình sau

a) $(x-1)^2+y^2+z^2=1$; b) $x^2+(2y-1)^2+z^2=4$;

c) $x^2+y^2+z^2+1=0$; d) $(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16$.

Số phương trình là phương trình mặt cầu là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(3;1;-2)$, $C(1;5;4)$. Biết rằng tâm hình chữ nhật $A'B'C'D'$ thuộc trục hoành, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\dfrac{\sqrt{91}}{2}$. **B.** $\dfrac{74}{2}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$ và $B(0;2;1)$. Mặt cầu có tâm thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B có đường kính bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$$

là phương trình mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$$x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$$

là phương trình một mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 31. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I, đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=5$. **B.** $R=3$. **C.** $R=1$. **D.** $R=9$.

Câu 33. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;2)$, $B(3;2;-2)$. Biết tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2+MB^2=30$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.
C. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.
C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7)$, $B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.
C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Câu 37. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$. **B.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$. **D.** $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$. **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.
C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$. **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$. **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 41. Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Câu 45. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S)\colon (x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$$

với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π. **B.** 4π. **C.** 20π. **D.** 36π.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$. **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.
C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.
C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $A(2;4;6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$. **B.** $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.
C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$. **D.** $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $a^2+b^2+c^2-d>0$.		
b) Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=a^2+b^2+c^2-d$.		
c) Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$.		
d) Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.		

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu là

Phát biểu	Đ	S
a) $x^2+y^2+z^2-2x-5z+30=0$.		
b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$.		
c) $x^3+y^3+z^3-2x+6y-9z-10=0$.		
d) $x^2+y^2+z^2+5=0$.		

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=16$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S) có tâm $I(-2;-3;4)$.		
b) (S) có tâm $I(2;3;-4)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) (S) có $R=4$.		
d) (S) có $R=16$.		

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu là $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.		
b) Phương trình mặt cầu là $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$.		
c) Phương trình mặt cầu là $(S)\colon (x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=R^2$.		
d) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d=a^2+b^2+c^2-R^2$.		

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2y-10z+2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S) có tâm $I(2;1;5)$.		
b) (S) có tâm $I(-2;-1;-5)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) (S) có $R=\sqrt{28}$.		
d) (S) có $R=\sqrt{32}$.		

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(-5;-2;3)$ bán kính $R=4$. Khi đó

THS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $(S)\colon x^2+y^2+z^2+10x+4y-6z+22=0$.		
b) $(S)\colon (x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.		
c) $(S)\colon (x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.		
d) $(S)\colon (x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.		

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;-5)$ và đi qua điểm $M(3;1;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=74$.		
b) $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=\sqrt{74}$.		
c) $R=74$.		
d) $R=\sqrt{74}$.		

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;-1)$ và có bán kính bằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P)\colon 3x+2y-z=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;2;1)$.		
b) $OI=2\sqrt{2}$.		
c) $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.		
d) $(S)\colon x^2+(y-3)^2+(x+1)^2=\dfrac{7}{2}$.		

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$ tâm I, bán kính R. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;0;2)$.		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=9$.		
c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.		
d) Diện tích mặt cầu (S) bằng 36π.		

Câu 61. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+y^2+(z-2)^2=16$ có tâm I và bán kính R. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M(-1;0;3)$ nằm trong mặt cầu (S).		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=4$.		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-3;0;2)$.		
d) Thể tích mặt cầu (S) là $V=\dfrac{16384\pi}{3}$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
FB: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $M\,(2;0;2)$ thuộc mặt cầu (S).		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=2\sqrt{2}$.		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I\,(0;-2;2)$.		
d) Hình chiếu của tâm mặt cầu lên trục Ox là điểm có tọa độ $(0;0;2)$.		

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Bán kính mặt cầu (S) là 20.		
b) Diện tích mặt cầu (S) là 1600π.		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I\,(-1;2;-4)$.		
d) Điểm đối xứng của tâm mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Oyz) là $I\,(-1;-2;4)$.		

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$,
b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$,
c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$,
d) $(S_4)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,
b) $(S_2)\colon x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$,
c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,
d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2-1$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,

b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,

c) $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) là phương trình của một mặt cầu.		

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon (x-1)^2+(2y-1)^2+(z-1)^2=6$,

b) $(S_2)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$,

c) $(S_3)\colon (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z+1)^2=6$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+3-6x$.

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) (S_1) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

Câu 68. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$, với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;6;0)$, $O'(0;0;4)$.

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ điểm $B'(2;6;4)$.		
b) Phương trình mặt phẳng $(O'AC)$ là $-6x+2y+3z+12=0$.		
c) Đường thẳng CO' có phương trình tham số là $\begin{cases} x=0 \\ y=6-6t \\ z=-4t \end{cases}$.		
d) Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp có phương trình $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=\dfrac{27}{2}$.		

Câu 69. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Với $m=0$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.		
b) Với $m=1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(3;-2;1)$.		

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
c) Với $m=3$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu có bán kính là $R=4$.		
d) Với $m<-5$ hoặc $m>1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.		

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính bằng 2. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$.		
b) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$.		
c) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.		
d) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$.		

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I và đi qua điểm A. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.		
b) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$.		
c) Phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.		
d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.		

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$.		
b) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$.		
c) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$.		
d) Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm AB và đi qua hai điểm A, B là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$.		

Câu 73. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(1;-1;1)$.		
b) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(0;1;1)$.		
c) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=6$.		
d) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{6}$.		

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(2;-1;0)$.		
b) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(-2;1;0)$.		
c) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{26}$.		
d) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=26$.		

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, $B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $I(4;0;0)$.		
b) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R=14$.		
c) Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$.		
d) Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.		

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$.		
b) Mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.		
c) Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$.		
d) Mặt cầu (S) có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(a;b;c)$, tính $a+b+c$? KQ: | | | | |

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là $S=(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Tính $a+b$?

KQ: | | | | |

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu. KQ: | | | | |

Câu 80. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ: | | | | |

Câu 81. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA^2+MB^2=30$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$?

KQ: | | | | |

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\dfrac{MB}{MA}=2$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$ *(làm tròn đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 84. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA=MB$ là mặt phẳng có phương trình $x+ay+bz+c=0$. Tính $a+b+c$?

KQ: | | | | |

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;-1;2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\widehat{AMB}=90^\circ$ là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{d}$. Tính $a+b+c+d$?

KQ: | | | | |

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tìm d.

KQ: | | | | |

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$. Tính bán kính của mặt cầu đã cho *(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).*

KQ: | | | | |

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính tổng $S=a+b+c+d$.

KQ: | | | | |

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ *(làm tròn đến hàng phần nghìn).*

KQ: | | | | |

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$. Tính đường kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) *(Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).*

KQ: | | | | |

Câu 91. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), C(0;0;3), B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).*

KQ: | | | | |

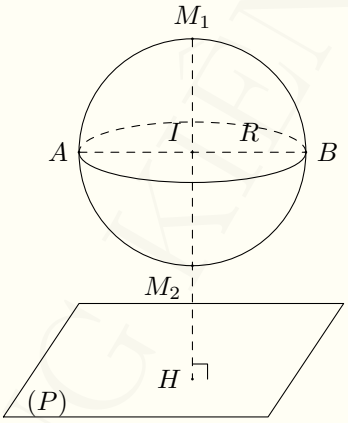
DẠNG 2 Vị trí tương đối

1. **Vị trí tương đối giữa mặt cầu và điểm:** Cho mặt cầu $S(I;R)$.
   - Nếu $IM=R$ thì M nằm trên mặt cầu.
   - Nếu $IM<R$ thì M nằm trong mặt cầu.
   - Nếu $IM>R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.
2. **Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:**
   Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$.
   Đặt $\mathrm{d}=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Khi đó

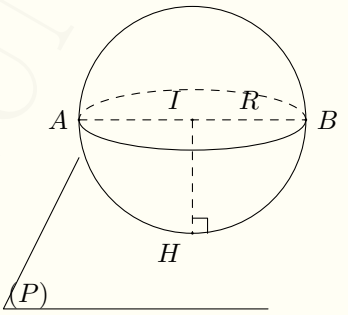
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

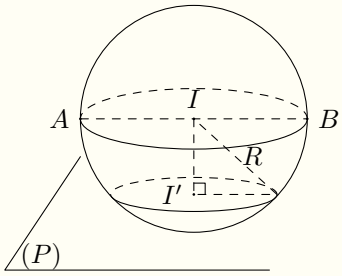
- Nếu d $>R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



- Nếu d $=R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.



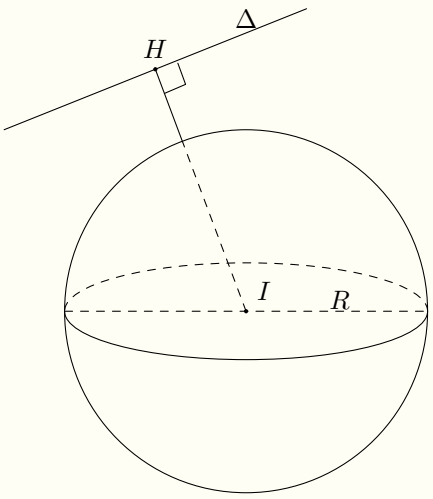
- Nếu d $<R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$.



Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng kính và thiết diện lúc đó được gọi là đường tròn lớn.

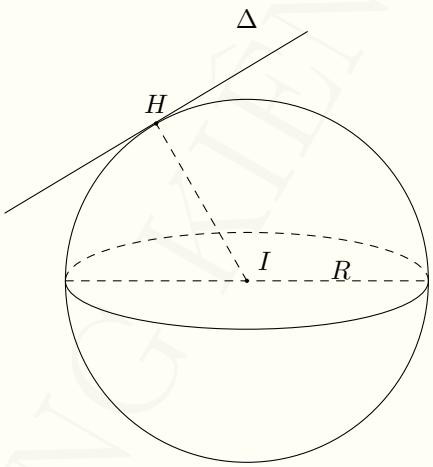
3. **Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:** Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

- Nếu $IH>R$: Δ không cắt mặt cầu.

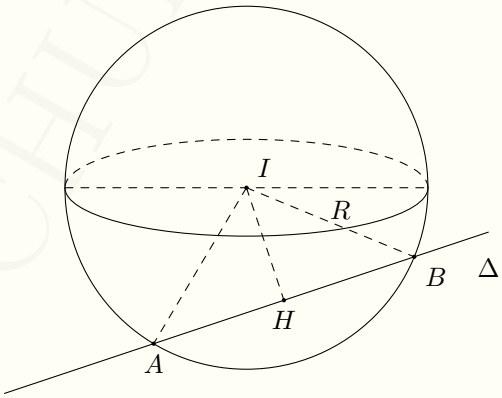


ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

- Nếu $IH = R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là tiếp tuyến của (S) và H là tiếp điểm.



- Nếu $IH < R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



⚠ *Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:*

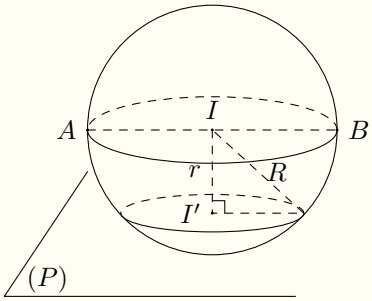
- *Xác định* $\mathrm{d}(I;\Delta) = IH$.
- *Lúc đó* $R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$

4. **Đường tròn trong không gian:**

- Đường tròn (C) trong không gian $Oxyz$, được xem là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α).
  - $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.
  - $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

  Khi đó

$$C\left(H, \sqrt{R^2 - IH^2}\right): \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \end{cases}$$



- Xác định tâm I' và bán kính R' của (C).
  - Tâm $I' = d \cap (\alpha)$. Trong đó d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(α).
  - Bán kính $R' = \sqrt{R^2 - (II')^2} = \sqrt{R^2 - [d(I;(\alpha))]^2}$.

5. **Điều kiện tiếp xúc:** Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

- Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I;\Delta) = R$.
- Mặt phẳng (α) là tiếp diện của $(S) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I;(\alpha)) = R$.

Tìm tiếp điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Sử dụng tính chất

$$\begin{bmatrix} IM_0 \perp d \\ IM_0 \perp (\alpha) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{IM_0} \perp \vec{a}_d \\ \overrightarrow{IM_0} \perp \vec{n}_\alpha. \end{bmatrix}$$

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=5$.

a) Xác định tâm và bán kính của (S).

b) Hỏi gốc toạ độ $O(0;0;0)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S) ?

Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+y^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

a) Xác định tâm và bán kính của (S).

b) Hỏi điểm $M(2;0;1)$ nằm trong, nằm ngoài hay thuộc mặt cầu (S)?

Ví dụ 14. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ tiếp xúc với (Oyz).

Ví dụ 15 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$,, cho mặt cầu tâm $I(4;2;-2)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 12x-5z-19=0$. Tính bán kính mặt cầu đó.

Ví dụ 16 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-4;3)$. Lập phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với trục Oy.

Ví dụ 17 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-4;2;-3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+1=0$.

Ví dụ 18 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=25$ cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=3\sqrt{3}$ theo giao tuyến là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Ví dụ 19 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=0 \end{cases}$. Biết rằng đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 20 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-5}{3}$ và hai điểm $A(3;4;5)$, $B(-4;0;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)\in d$, bán kính R và (S) đi qua hai điểm A, B. Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S).

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta)\colon 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

Ví dụ 22 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=90^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$.

Ví dụ 23 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón $(\mathbb{N})$ có đỉnh $S\,(0;0;3)$, độ dài đường sinh bằng $3\sqrt{2}$ và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của (N) với mặt phẳng $(Q): x+y+z=0$ và M là một điểm di động trên (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng SM.

Ví dụ 24 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=5$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$. Một đường thẳng d đi qua O, song song với (P) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB.

Ví dụ 25 (MH2024 – Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh $A(2;3;0)$, độ dài đường sinh bằng 5 và đường tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi (C) là giao tuyến của mặt xung quanh của $(\mathcal{N})$ với mặt phẳng $(Q)\colon x-4y+z+4=0$ và M là một điểm di động trên (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AM.

Ví dụ 26. Cho điểm $M\,(1;-1;3)$ và mặt cầu $(S)\colon\ (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Khẳng định đúng là

A. M nằm ngoài (S).
B. M nằm trong (S).
C. M nằm trên(S).
D. M trùng với tâm của (S).

Ví dụ 27. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và ba điểm $O(0;0;0)$, $A(1;2;3)$, $B(2;-1;-1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Ví dụ 28. Cho mặt cầu $(S)\,: x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+4=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. (P) tiếp xúc (S).
B. (P) và (S) không có điểm chung.
C. (P) đi qua tâm của (S).
D. (P) cắt (S).

Ví dụ 29. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(3;4;0)$ thuộc (S). Phương trình mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A là

A. $x+y+z-7=0$.
B. $2x-2y+z+2=0$.
C. $2x+2y+z-14=0$.
D. $2x-2y-z+2=0$.

Ví dụ 30. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $r=\sqrt{6}$. Cho các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;2;2)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=6$.		
b) Điểm A nằm trên mặt cầu (S).		
c) Điểm B nằm trong mặt cầu (S).		
d) Đường thẳng BC cắt mặt cầu (S) tại hai điểm.		

Ví dụ 31. Trong không gian $Oxyz$, cho $A\,(1;0;0)$, $B\,(0;1;0)$, $C\,(0;0;1)$, và mặt phẳng $(Q)\,: 2x-3y+z+1=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa cạnh BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi (C) là đường tròn đường kính BC và nằm trong mặt phẳng (P). Gọi S là một điểm bất kỳ nằm trên (C) khác B, C và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCS$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BSC là $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.		
b) Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $x-y=0$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
c) $I\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.		
d) (Q) cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCS$ theo đường tròn có bán kính $r=\frac{5}{42}$.		

Ví dụ 32. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng. Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(-5;-2;5)$ và sau đó di chuyển đến điểm $N(-1;0;1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+6)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$.		
b) Độ dài $MN=4$.		
c) Tại M người này sử dụng được dịch vụ.		
d) Tại N người này cũng sử dụng được dịch vụ.		

Ví dụ 33. Cho hai đường thẳng $(d)\colon \frac{x}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ và $(d')\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(3;2;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng d. Biết I nằm trên (d') và $a<2$. Tính $T=a+b+c$. KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(2;3;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S). Khi đó điểm M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là $3x+ay+bz+c=0$. Tính $a+b+c$. KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 35 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-1)$ là tâm của mặt cầu (S) và đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$, đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Mặt cầu (S) có bán kính R bằng bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 36 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+z^2=2$ và điểm $A(1;1;0)$ thuộc mặt cầu (S). Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có phương trình là $ax+y+cz+d=0$. Tính $a+c-d$. KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 37 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+4=0$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M và N là tiếp điểm, $H(a;b;c)$ là trung điểm MN. Khi đó, tích abc bằng bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục).* KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 38 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;-1;2)$, $B(1;1;8)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-5=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định, tính bán kính r của đường tròn (T) *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: ☐☐☐☐

Ví dụ 39 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Lấy điểm $M(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d sao cho

từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là tiếp điểm) thỏa mãn góc $\widehat{AMB} = 60°$, $\widehat{BMC} = 90°$, $\widehat{CMA} = 120°$. Tính tổng $a + b + c$. KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 24. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;4)$ và bán kính $R = 5$. Các điểm $A(3;1;5)$, $B(-1;11;14)$, $C(6;2;4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

Bài 25. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 100$.

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu.

b) Mỗi điểm $A(1;1;1)$, $B(9;4;7)$, $C(9;9;10)$ nằm trong, nằm ngoài hay nằm trên mặt cầu đó?

Bài 26 (Mức độ 1). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz). Tìm giá trị của b.

Bài 27 (Mức độ 1). Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB, với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

Bài 28 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)\colon x + y + 2z + 5 = 0$, $(Q)\colon 2x - y + z - 5 = 0$ lần lượt tại các điểm A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Bài 29 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm I và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 2z + 7 = 0$. Tính thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

Bài 30 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo thiết diện là một hình tròn có diện tích bằng π.Tìm phương trình mặt cầu (S).

Bài 31 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-1)$ là tâm của mặt cầu (S) và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Tính bán kính R của mặt cầu.

Bài 32 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z + m = 0$ (m là tham số thực). Tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 8π.

Bài 33 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tìm tọa độ điểm M.

Bài 34 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;3;1)$, $N(2;0;3)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 9$. Mặt phẳng (P) đi qua M, N và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm $E(0;0;1)$ đến (P).

Bài 35 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ và đường thẳng $\Delta : x = y = z$. Xét điểm $M(0;0;m)$ với $m \in \mathbb{Z}$ sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt MA, MB đến (S) (với A, B là các tiếp điểm); MA, MB cùng vuông góc với Δ và $\widehat{AMB}$ là góc nhọn. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn các điều kiện trên?

Bài 36 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-2;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Biết B, C, D là ba điểm phân biệt trên (S) sao cho các tiếp diện của (S) tại mỗi điểm đó đều đi qua A. Xác định bán kính r của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 92. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P)\colon 5x+y-6z+62=0$. **B.** $(P)\colon 5x+y-6z-62=0$.
C. $(P)\colon 5x-y-6z-62=0$. **D.** $(P)\colon 5x+y+6z+62=0$.

Câu 93. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+7=0$. Biết mp(Q) cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-2y+z+17=0$.
C. $2x-2y+z+7=0$. **D.** $2x-2y+z-17=0$.

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là

A. $2x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-y+2z+9=0$.
C. $2x-y+2z+7=0$. **D.** $2x-y+2z-9=0$.

Câu 95. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là

A. $y-2z=0$. **B.** $y+2z=0$. **C.** $y+3z=0$. **D.** $y-3z=0$.

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.
C. $2x+2y+z+2=0$. **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Câu 97. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ x-2y+z-21=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} 3x+y+4z+1=0 \\ 3x+y+4z-2=0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} 4x-3y-z+5=0 \\ 4x-3y-z-27=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{cases}$.

Câu 98. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $x-2y-2z+1=0$. **B.** $-x+2y+2z+5=0$.
C. $x-2y-2z-23=0$. **D.** $-x+2y+2z+17=0$.

Câu 99. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.
C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A. $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x-y+2z+9=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ x+y+2z+9=0 \end{cases}$.

C. $x+y+2z+9=0$. **D.** $x-y+2z+9=0$.

Câu 101. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$. **D.** Đáp án khác.

Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$. **B.** $x+z+1=0$. **C.** $x+y+1=0$. **D.** $x+z-1=0$.

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Câu 105. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** vô số mặt phẳng.

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm là điểm $I(1;2;4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-1=0$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=4$.

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+6=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Tính bán kính của đường tròn (C).

A. 4. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 5.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(-1;4;2)$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2-2x+8y+6z-3=0$ theo một đường tròn (C) có bán kính lớn nhất.

ThS NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. $(P)\colon 2x+3y+4z-10=0$. **B.** $(P)\colon 2x+5y-4z-6=0$.
C. $(P)\colon 2x+3y-4z-2=0$. **D.** $(P)\colon 2x-3y-4z+10=0$.

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+\sqrt{2}y-z+3=0$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=5$ theo giao tuyến là đường tròn có diện tích là

A. $\dfrac{11\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{15\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{7\pi}{4}$.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-15=0$. Mặt phẳng (P) song song với (α) và tiếp xúc với (S) là

A. $(P)\colon 2x+y+2z-15=0$. **B.** $(P)\colon 2x+y+2z+15=0$.
C. $(P)\colon 2x+y+2z-3=0$. **D.** $(P)\colon 2x+y+2z+3=0$.

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm tại I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=5$.

A. $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
C. $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α), biết (α) song song với $(P)\colon 2x+y-2z+11=0$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $2x+y-2x-11=0$. **B.** $2x-y-2z-7=0$.
C. $2x+y-2z-5=0$. **D.** $2x+y-2z-7=0$.

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\dfrac{1}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{1}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r=3$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=\sqrt{6}$. **D.** $r=\sqrt{14}$.

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.
C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Câu 118. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I\,(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\,:\,x-2y+2z-7=0$.

A. $x^2+y^2+z^2+4x+2y-8z-4=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+8z-4=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-4=0$.

Câu 119. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I\,(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A\,(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x+y+3z-9=0$. **B.** $x+y-3z+3=0$. **C.** $x+y-3z-8=0$. **D.** $x-y-3z+3=0$.

Câu 120. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.
B. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
C. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.
D. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 121. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 122. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$.
B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 123. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$.
B. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.
C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$.
D. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$.
B. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.
C. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.
D. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$?

A. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$.
B. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

Câu 126. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$.
B. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.
C. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$.
D. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Câu 127. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.
B. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
C. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.
D. $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q): y+3z=0$.
B. $(Q): x+y-2z=0$.
C. $(Q): y-z=0$.
D. $(Q): y-2z=0$.

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 130. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+m=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

A. $\begin{bmatrix} m>11 \\ m<-19 \end{bmatrix}$. **B.** $-19<m<11$. **C.** $-12<m<4$. **D.** $\begin{bmatrix} m>4 \\ m<-12 \end{bmatrix}$.

Câu 131. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z=1$. Tìm tất cả các giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C).

A. $-\dfrac{17}{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{17}{2}< a< \dfrac{1}{2}$. **C.** $-8<a<1$. **D.** $-8\le a\le 1$.

Câu 132. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).
B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
C. (P) và (S) không có điểm chung.
D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Câu 133. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Câu 134. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-11=0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H, khi đó H có tọa độ là

A. $H(-3;-1;-2)$. **B.** $H(-1;-5;0)$. **C.** $H(1;5;0)$. **D.** $H(3;1;2)$.

Câu 135. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính r của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 136. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với trục Oy.

A. $x^2+(y+2)^2+(z+3)^2=2$. **B.** $x^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3$.
C. $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 137. Cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm A và cắt trục Oz tại hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông?

A. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=40$. **B.** $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=82$.
C. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=58$. **D.** $(x+2)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=90$.

Câu 138 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và có tiếp diện là mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+5=0$, có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Câu 139 (Mức độ 2). Cắt mặt cầu tâm I bởi mặt phẳng qua I, thiết diện thu được là hình tròn có diện tích bằng 9π. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. 12π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 27π.

Câu 140 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;0)$, $B(1;1;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính lớn nhất có phương trình là

A. $x-2y+3z-2=0$. **B.** $2x-y-1=0$.
C. $x+2y-3z-6=0$. **D.** $x-2y-3z-2=0$.

Câu 141 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2z-m^2=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+6y-2z-2=0$. Với giá trị nào của m thì (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 2π?

A. $m=\pm\dfrac{\sqrt{65}}{7}$. **B.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{7}$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

Câu 142 (Mức độ 2). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-14=0$. Mặt phẳng $(P)\colon -x+4z+5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tọa độ tâm H của (C) là

A. $H(1;1;-1)$. **B.** $H(-3;1;-2)$. **C.** $H(9;1;1)$. **D.** $H(-7;1;-3)$.

Câu 143 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z+5=0$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π. Tính bán kính mặt cầu (S).

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 144. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-67=0$. Số điểm chung của Δ và (S) là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 145. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;1)$, $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon \begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=0\end{cases}$. Mặt cầu (S) đi qua A, có tâm I nằm trên d_1, biết rằng (S) cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho $\widehat{BAC}=90^\circ$. Tìm tọa độ điểm I.

A. $I(2;3;2)$. **B.** $I(3;4;4)$. **C.** $I(1;2;0)$. **D.** $I(0;0;2)$.

Câu 146. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$, $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại A và B. Đường thẳng AB đi qua điểm có tọa độ là

A. $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(1;1;-\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 147. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 148. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 149. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T,T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 150. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \\ z=5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 152. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vec-tơ nào sau đây là vec-tơ chỉ phương của Δ ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{m}=(-3;1;0)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B.** $K(-1;2;3)$, $r=8$. **C.** $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D.** $K(1;2;3)$, $r=6$.

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Câu 155. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 156. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 157. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM\cdot AN$ bằng

A. 39. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $28\sqrt{3}$.

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi M; N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox; Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM\cdot AN$ bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 14. **C.** 8. **D.** $9\sqrt{2}$.

Câu 159. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của Δ và (S) là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 160. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=1+mt\\ z=-2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S).

A. $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$.

C. $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 161. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=1+mt\\ z=-2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S).

A. $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$.

C. $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 162. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases}x=2+t\\ y=1+mt\\ z=-2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$.

C. $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 163. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{10}$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=10$.
D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

Câu 164. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=11+2t \\ y=t \\ z=-25-2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=16$ là

A. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.
B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.
C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.
D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

Câu 165. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2.
B. -1.
C. 1.
D. -2.

Câu 166. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $I(1;0;2)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\dfrac{5}{3}$.
B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.
C. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.
D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$.
B. $N(1;2;-1)$.
C. $P(-5;2;-7)$.
D. $Q(5;-2;7)$.

Câu 168. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$, $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$.
B. $R=2$.
C. $R=1$.
D. $R=\sqrt{6}$.

Câu 169. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$.
B. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.
C. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.
D. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.

Câu 170. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z=0$, $(Q)\colon x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$.
B. $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$.
D. $(S)\colon (x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

Câu 171. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ và điểm $I(1;0;0)$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là

A. $(x+1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$.

C. $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{16}{4}$. **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{5}{3}$.

Câu 172 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-z-4=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon x-2y-2=0$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng d, tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q). Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 173 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$ và điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OAB.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 174 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A. $x-y+2z+9=0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$.

C. $x+y+2z+9=0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$.

Câu 175 (Mức độ 3). Cho mặt cầu $S(O;9)$. Một hình nón có đỉnh và đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S). Khi thể tích của hình nón lớn nhất, diện tích đường tròn đáy của hình nón thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $[200;220]$. **B.** $(230;240)$. **C.** $(200;220)$. **D.** $[220;230]$.

Câu 176 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;4;-3)$ và chứa trục Ox. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$.

Câu 177 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω) kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=3\sqrt{2}$. **B.** $r=6\sqrt{2}$. **C.** $r=3\sqrt{5}$. **D.** $r=3\sqrt{10}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 178. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2;1;5)$ bán kính 3. Cho các điểm $A(10;1;2)$, $B(0;1;4)$, $C(0;3;4)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=3$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

Phát biểu	Đ	S
b) Điểm A ngoài mặt cầu (S).		
c) Đường thẳng AB cắt mặt cầu (S).		
d) Mặt phẳng (ABC) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.		

Câu 179. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z+5=0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$, đồng thời cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 4π. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-2)$ và bán kính $R=2$.		
b) Đường tròn giao tuyến có bán kính $r=2$.		
c) Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến.		
d) Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 3x-y+2z-3=0$.		

Câu 180. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;3;1)$, $N(2;0;3)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=9$. Mặt phẳng (P) đi qua M, N và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất là $r_{\min}$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;5;-3)$ và bán kính $R=3$.		
b) $r_{\min}=\sqrt{3}$.		
c) Phương trình mặt phẳng $(P)\colon x-y-2z+4=0$.		
d) Khoảng cách từ điểm $E(0;0;1)$ đến (P) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.		

Câu 181. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$ tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+5=0$, $(Q)\colon 2x-y+z-5=0$ lần lượt tại các điểm A, B. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu có tâm $I(-1;-2;1)$.		
b) Mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{6}$.		
c) Mặt cầu cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt.		
d) $AB=3\sqrt{2}$.		

Câu 182. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $I(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+4=0$. Mặt cầu (S) tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính $r=4$. Gọi H là hình chiếu của I lên (P). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $IH=\sqrt{3}$.		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R=5$.		
c) Tọa độ điểm $H(1;2;3)$.		

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.		

Câu 183. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+1=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ có tâm I. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu có bán kính $R=2$.		
b) Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn.		
c) Bán kính đường tròn giao tuyến $r=\sqrt{2}$.		
d) Hình nón đỉnh I và đáy là đường tròn giao tuyến có thể tích $V=3\pi$.		

Câu 184. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$ tâm I. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại A và B. Gọi K là hình chiếu của I lên d. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{6}$.		
b) $IK=3\sqrt{6}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.		
d) $\cos\widehat{AIB}=\dfrac{1}{9}$.		

Câu 185. Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+10=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C). Gọi V_1 là thể tích khối cầu (S), V_2 là thể tích khối nón (N) có đỉnh là giao điểm của mặt cầu (S) với đường thẳng đi qua tâm qua mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P), đáy là đường tròn (C). Biết độ dài đường cao khối nón (N) lớn hơn bán kính của khối cầu (S). Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu có tâm $I(2;1;3)$, bán kính $R=5$.		
b) Tâm mặt cầu cách mặt phẳng (P) một đoạn $\sqrt{3}$.		
c) Bán kính đáy hình nón $r=4$.		
d) $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{125}{32}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 186. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+6x-4z+9-m^2=0$. Gọi T là tập các giá trị của m để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz). Tính tích các giá trị của m trong T. KQ: ☐☐☐☐

Câu 187. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z+m=0$ (m là tham số thực). Tìm tổng các giá trị của m sao cho mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 8π. KQ: ☐☐☐☐

Câu 188. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z=0$ và điểm $M(0;1;0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

$N(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON=\sqrt{6}$. Tính y_0. KQ:

Câu 189. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $5a+3b$.

KQ:

Câu 190. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;2;4)$, $B\,(0;0;1)$ và mặt cầu $(S)\colon\ (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+3=0$ đi qua A, B và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=-a-b-c$. KQ:

Câu 191 (Mức độ 1). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+3=0$ và điểm $I\,(1;1;0)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (P) *(làm tròn kết quả thành số nguyên)*.

KQ:

Câu 192 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Tính bán kính mặt cầu có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC)? KQ:

Câu 193. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(S)\colon\ (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S). KQ:

Câu 194. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\,(1;2;3)$. Tính bán kính của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x-2y+2z+3=0$. KQ:

Câu 195. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết phương trình của (Q) có dạng $ax+by+cz+d=0$, tính giá trị $a+b+c+d$? KQ:

Câu 196. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương. Biết (β) có dạng $ax+by+cz+d=0$, tính giá trị $a+b+c+d$? KQ:

Câu 197. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (Q) có phương trình $x-2y+z-5=0$ và mặt cầu S có phương trình $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Gọi phương trình của mặt phẳng (Q) có dạng $x+by+cz+d=0$, tính giá trị $V=a+b+c+d$. KQ:

Câu 198. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Biết tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

KQ:

Câu 199. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thoả mãn $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=6$. Biết tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=1+b+c+d$. KQ:

Câu 200. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu S sao cho đường thẳng

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

AM luôn tiếp xúc với (S). Gọi tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=2-b+c-3d$. KQ:

Câu 201. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*).

KQ:

Câu 202. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $Oxyz$ đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c, biết rằng $a+b+c<5$. KQ:

Câu 203. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Gọi phương trình mặt phẳng (BCD) là phương trình có dạng $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=2+b+c+d$. KQ:

Câu 204. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S) và (S') có phương trình lần lượt là $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi 6π. Viết khoảng cách từ O đến (P) dưới dạng số thập phân, *lấy 2 chữ số sau dấu phẩy*. KQ:

Câu 205. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Tìm R. KQ:

Câu 206. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2, (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B và C và có bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

KQ:

Câu 207. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ (a, b, c, $d\in\mathbb{Z}$; $d<-5$) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A và B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất. KQ:

Câu 208. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$; $(S_2)\colon x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$; $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)? KQ:

Câu 209. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Tính bán kính mặt cầu (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ:

Câu 210. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ:

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 211. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$, (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau? KQ: | | | | |

Câu 212. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau? KQ: | | | | |

Câu 213. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 214. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P)\colon x=1$, $(Q)\colon y=-1$ và $(R)\colon z=1$ có bán kính bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 215. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta)\colon \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1-m}+\dfrac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng (α), (β). Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 216. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*). KQ: | | | | |

Câu 217. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T). KQ: | | | | |

Câu 218. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$. KQ: | | | | |

Câu 219. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 220. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S). Tính tổng các phần tử của T. KQ: | | | | |

Câu 221. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon x+my+z-3m-1=0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2. Tính tổng các phần tử của T.

KQ: | | | | |

Câu 222. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(\beta)\colon 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π. Tính tổng các phần tử của T. KQ: | | | | |

Câu 223. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-2=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P), (Q)?

KQ: | | | | |

Câu 224. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M\,(2;\,3;\,1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C). (*Kết quả làm tròn tới hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 225. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A\,(0;0;1)$, $B\,(m;0;0)$, $C\,(0;n;0)$, $D\,(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó. KQ: | | | | |

Câu 226. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a+b+c-d$.

KQ: | | | | |

Câu 227. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M, tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Phương trình của mặt cầu (S) có dạng có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a\cdot b+c\cdot d$.

KQ: | | | | |

Câu 228. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z-4=0$ và điểm $I(1;2;3)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm $H(a;b;c)$. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 229. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$ và $(S_2):x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với vectơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Một vectơ chỉ phương của d có tọa độ là $(1;a;b)$. Tính $a\cdot b$. KQ: | | | | |

Câu 230. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=4+2t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=8$. Tìm giá trị của m. KQ: | | | | |

Câu 231. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon z+2=0$, điểm $K(0;0;-2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r=\sqrt{5}$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a+b+c+d$. KQ: | | | | |

Câu 232. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 233. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P)\colon 2x+y+2z-1=0, A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Bán kính r của đường tròn đó có dạng $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$, tính giá trị $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 234. Trong không gian cho mặt phẳng $(P)\colon x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2):x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu

(S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó bằng $\frac{a}{b}\pi$, tính tổng $S = a + b$. KQ: | | | | |

Câu 235. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt $(P)\colon x + 2y + z - 7 = 0$ và đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(2;5;3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 236 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Biết rằng mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm A, B phân biệt. Tính độ dài đoạn thẳng AB?

KQ: | | | | |

Câu 237 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng bao nhiêu *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*. KQ: | | | | |

Câu 238 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oyz) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 239 (Mức độ 2). Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;5)$, cắt đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 12$. Tính diện tích (S) *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*. KQ: | | | | |

Câu 240 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và hai điểm $A(5;0;3)$, $B(9;-3;4)$. Gọi (P), (Q) lần lượt là hai mặt phẳng chứa AB và tiếp xúc với (S) tại M, N. Tính thể tích tứ diện $ABMN$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 241 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $M(1;2;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + d$? KQ: | | | | |

Câu 242 (Mức độ 3). Trong không gian $Oxyz$, cho đường tròn (C) tâm O có bán kính 2 và nằm trong mặt phẳng (Oxy). Tìm bán kính R của mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua điểm $A\,(0;0;-4)$.

KQ: | | | | |

Câu 243 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;0;4)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9$. Qua điểm M vẽ 3 tia Mu, Mv, Mw đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu (S) lần lượt tại các điểm A, B, C. Gọi E là đỉnh đối diện với đỉnh M của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là MA, MB, MC. Biết điểm E luôn thuộc một mặt cầu cố định khi 3 tia Mu, Mv, Mw thay đổi thỏa mãn đề bài, tính bán kính mặt cầu đó *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 244 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(0;4;1)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A và nội tiếp khối cầu (S). Khi diện tích xung quanh của hình nón (N) lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $-x + by + cz + d = 0$. Tính $b + c + 2d$? KQ: | | | | |

Câu 245 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3;2;4)$, $B(5;3;7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1). Tính bán kính của (C_1)? KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 246. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$. KQ: | | | | |

Câu 247. Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m *(làm tròn đến hàng phần nghìn)* sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2(z-2)^2=m^2+1$. KQ: | | | | |

Câu 248. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Tính bán kính của (S) *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*. KQ: | | | | |

Câu 249. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π. KQ: | | | | |

Câu 250. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M,N sao cho $AM=3AN$. Tìm bán kính của mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) *(làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)*.

KQ: | | | | |

Câu 251. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu? *(Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)*. KQ: | | | | |

Câu 252. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)$, $(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=60^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$. Biết $a^3+b^3+c^3=\dfrac{m}{n}$, tính $m+n$. KQ: | | | | |

Câu 253. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;4;2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), tính giá trị $AM\cdot AN$ *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 254. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M,N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S). Tính giá trị $AM\cdot AN$ *(làm tròn đến hàng phần chục)*. KQ: | | | | |

Câu 255. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 256. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t, \\ z=-2+t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB có dạng $2x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$?

KQ: | | | | |

Câu 257. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu (S_m): $x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*. KQ: | | | | |

Câu 258. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=-2+t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Biết phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB có dạng $ax+by+cz+d=0$. Tính $2a+b-12c+d$.

KQ: | | | | |

Câu 259. Trong không gian $Oxyz$, cho (S): $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a;b;c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, tính giá trị của k. KQ: | | | | |

Câu 260. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi đó m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*. KQ: | | | | |

DẠNG 3 Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

a) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất liên quan đến biểu thức

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A_1, $A_2,\ldots,A_n$ và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất (với α_1; α_2;...; α_n là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\neq 0$).

— *Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)*

+ *Bước 1:* Tìm tọa độ điểm phụ I.

· Gọi I là điểm thỏa mãn $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

· Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ ta tìm được tọa độ I.

· Ta có

$$\begin{aligned}&\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)+\ldots+\alpha_n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)\\&=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MI}+\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}\\&=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MI}\quad\left(\text{do }\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}\right)\\\Rightarrow T&=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|\\&=|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|\,|\overrightarrow{MI}|.\end{aligned}$$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $T_{\min}\Leftrightarrow|\overrightarrow{MI}|_{\min}$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
Ths. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

· Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi M cần tìm là hình chiếu của I trên (P).

+ *Bước 2:* Tìm tọa độ điểm M.

· Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A;B;C). \end{cases}$

· Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ điểm M cần tìm.

— *Cách 2: Phương pháp đại số:* Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki.
Với $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A_1, A_2,..., A_n và mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) (với $\alpha_1;\alpha_2 \ldots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \neq 0$).

$T_{\min} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n > 0$, $T_{\max} \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n < 0$.

— *Cách 1: Phương pháp hình học (Chọn điểm phụ)*

+ *Bước 1:* Tìm tọa độ điểm phụ I.

· Gọi I là điểm thỏa mãn $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

· Dựa vào đẳng thức $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ ta tìm được tọa độ I.

· Ta có

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \ldots + \alpha_n MA_n^2 \\
= \ & \alpha_1 \left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2 + \alpha_2 \left(\overrightarrow{MA_2}\right)^2 + \ldots + \alpha_n \left(\overrightarrow{MA_n}\right)^2 \\
= \ & \alpha_1 \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right)^2 + \alpha_2 \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right)^2 + \ldots + \alpha_n \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)^2 \\
= \ & (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\, MI^2 + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \ldots + \alpha_n IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI} \\
= \ & (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\, \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \ldots + \alpha_n IA_n^2 \\
\Rightarrow T \ = \ & (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\, \overrightarrow{MI} + \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \ldots + \alpha_n IA_n^2.
\end{aligned}$$

· Vì $\alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + \ldots + \alpha_n IA_n^2$ không đổi nên
Với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n > 0$ thì T đạt GTNN khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.
Với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n < 0$ thì T đạt GTLN khi và chỉ khi MI nhỏ nhất.

· Mà $M \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi M cần tìm là hình chiếu của I trên (P).

Bước 2: Tìm tọa độ điểm M.

· Lập phương trình tham số đường thẳng IM với $\begin{cases} \text{qua } I \\ \vec{u}_{IM} = \vec{n}_P = (A;B;C). \end{cases}$

· Ta có $M = IM \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ điểm M cần tìm.

— *Cách 2: Phương pháp đại số:* Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki.

b) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất liên quan đến khoảng cách

Bài toán 1. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ cố định và điểm M di động trên mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$. Tìm tọa độ điểm M để AM có giá trị nhỏ nhất.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

— **Cách 1. Phương pháp hình học**

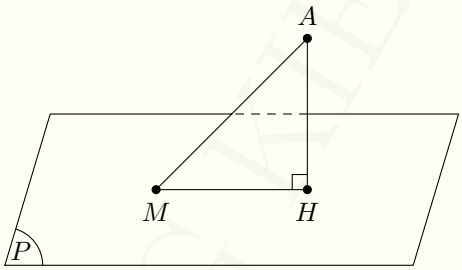
+ Bước 1:

· Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P).

· Khi đó, tam giác AHM vuông tại H, suy ra $AM \geq AH$.

· Dẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$.

· Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P).



+ Bước 2: Tìm tọa độ điểm M $(M \equiv H)$.

· Lập phương trình tham số đường thẳng AH với $\begin{cases} \text{đi qua điểm } A \\ \vec{u}_{AH} = \vec{n}_P = (a;b;c). \end{cases}$

· Ta có $M \equiv H = AH \cap (P) \Rightarrow$ tọa độ điểm M cần tìm.

— *Cách 2: Phương pháp đại số:* Dùng bất đẳng thức bộ 3 của Bunhiacốpxki.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm A, B cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.

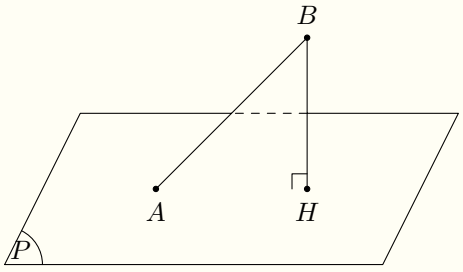
— **Cách 1. Phương pháp hình học**

+ Bước 1:

· Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).

· Khi đó $\mathrm{d}(B,(P)) = BH \leq BA$.

· Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB.



+ Bước 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases} \text{đi qua điểm } A \\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AB}. \end{cases}$

— **Cách 2. Phương pháp đại số**

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \neq 0$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

+ Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A là

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0.$$

+ Khi đó $\vec{n}_P \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ từ đây ta rút được theo a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

+ Ta có $\mathrm{d}(B;(P)) = f(t)$, với $t = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$.

Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1;b;c)$.

Bài toán 3. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A và đường thẳng Δ cố định. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất.

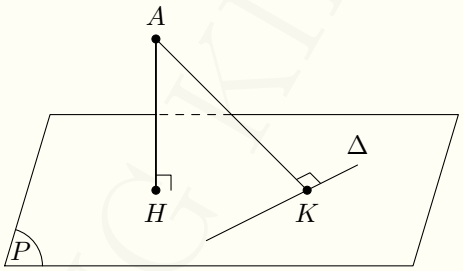
— **Cách 1. Phương pháp hình học**

+ Bước 1.

· Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ.

· Khi đó $\mathrm{d}(A,(P)) = AH \le AK$.

· Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.



+ Bước 2.

· Tìm tọa độ điểm K.

· Lập phương trình mặt phẳng (P) với $\begin{cases}\text{đi qua điểm } K\\ \vec{n}_P = \overrightarrow{AK}.\end{cases}$

— **Cách 2. Phương pháp đại số**

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

+ Khi đó $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

+ Ta có $\mathrm{d}(A,(P)) = f(t)$, với $t = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$.

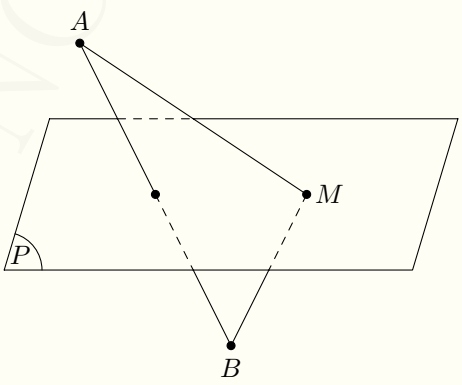
Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1;b;c)$.

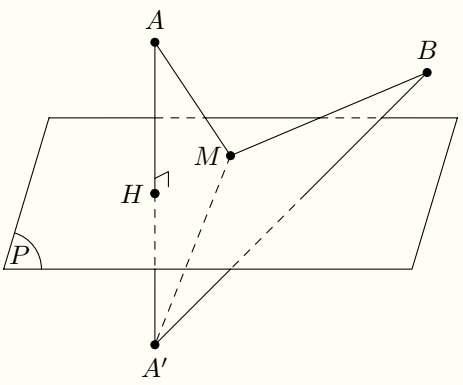
Bài toán 4. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

a) $MA + MB$ nhỏ nhất.

— **Trường hợp 1.** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó $AM + BM \ge AB$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

— **Trường hợp 2.** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó $AM + BM = A'M + BM \ge A'B$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).





TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

b) $|MA-MB|$ lớn nhất.

— **Trường hợp 1.** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P).

+ Khi đó $|AM-BM|\le AB$.

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

— **Trường hợp 2.** Nếu A và B nằm khác phía so với (P).

+ Gọi A' đối xứng với A qua (P).

+ Khi đó $|AM-BM|=|A'M-BM|\le AB$.

+ Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 5. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B, C. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và thỏa mãn $T=\alpha\mathrm{d}(A,(P))+\beta\mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

— TH1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P).

+ Nếu $AB\parallel(P)$ thì $P=(\alpha+\beta)\,\mathrm{d}(A,(P))\le(\alpha+\beta)\,AC$.

+ Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IB}=\dfrac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{ID}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P=\alpha\mathrm{d}(A;(P))+\beta\cdot\frac{IB}{ID}\cdot\mathrm{d}(D,(P))=2\alpha\mathrm{d}(E,(P))=2\,(\alpha+\beta)\,EC.$$

— TH2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P).

+ Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I.

+ Khi đó $P=\alpha\mathrm{d}(A,(P))+\beta\mathrm{d}(B',(P))$.

Đến đây ta chuyển về **Bài toán 4** trên.

Bài toán 6. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho n điểm A_1, A_2,…, A_n và điểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm A_i $(i=\overline{1,n})$ lớn nhất.

— Xét n điểm A_1, A_2,…, A_n nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}(A_i,(P))=n\mathrm{d}(G,(P))\le nGA.$$

— Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó

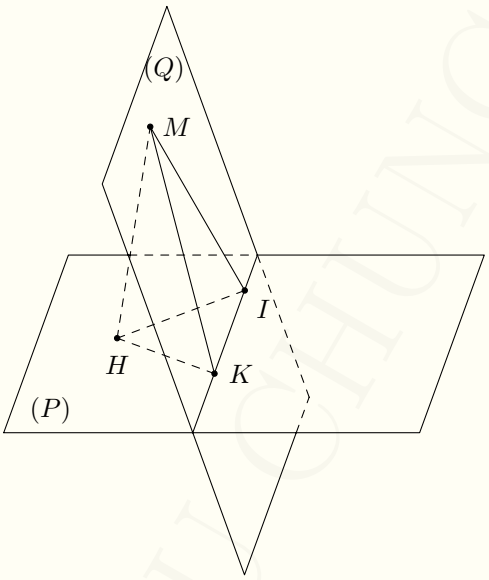
$$P=m\mathrm{d}(G_3,(P))+k\mathrm{d}(G_2,(P)).$$

Đến đây ta chuyển về **Bài toán 5** trên.

c) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất liên quan đến góc

Bài toán 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Lập phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

— **Cách 1: Phương pháp hình học**



+ Gọi I là giao điểm của d với (P) và lấy điểm $M \in d$, $M \neq I$.
+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và $\Delta = (P) \cap (Q)$.
+ Đặt α là góc giữa (P) và (Q), ta có $\alpha = \widehat{MKH}$, do đó $\tan\alpha = \dfrac{HM}{HK} \geq \dfrac{HM}{HI}$.
+ Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $[[\vec{n}_P, \vec{u}_d], \vec{u}_d]$ làm vectơ pháp tuyến.

— **Cách 2: Phương pháp đại số**

+ Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q).
+ Khi đó $\vec{n}_Q \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút ra được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
+ Gọi α là góc giữa (P) và (Q), ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$, với $t = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.
+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$.

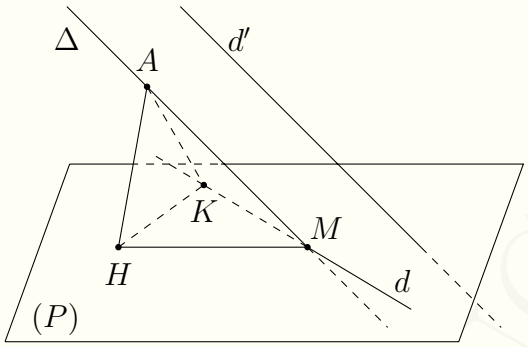
Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q$ của mặt phẳng (Q) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_Q = (1; b; c)$.

Bài toán 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

— **Cách 1: Phương pháp hình học**



+ Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d và (P).

+ Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, α là góc giữa Δ và (P). Khi đó $\alpha = \widehat{AMH}$ và $\cos\alpha = \dfrac{HM}{AM} \geq \dfrac{KM}{AM}$.

+ Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_d) \wedge \vec{u}_d$ làm vectơ pháp tuyến.

— **Cách 2: Phương pháp đại số**

+ Gọi $\vec{n}_P = (a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (P).

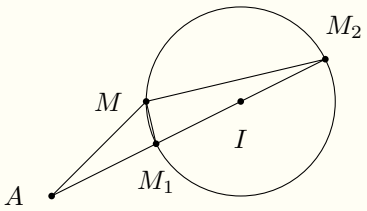
+ Khi đó $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút ra được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).

+ Gọi α là góc giữa (P) và d, ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{u}_d|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}_d|} = f(t)$, với $t = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.

+ Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$.

⚠ *Để tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ của mặt phẳng (P) đơn giản hơn thì nên gọi $\vec{n}_P = (1;b;c)$.*

c) Mặt phẳng liên quan đến mặt cầu: Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.



Xét A nằm ngoài mặt cầu (S).
Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) $(AM_1 < AM_2)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI.
Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C).
Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90°$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù.
Nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2. Ta có

$$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R.$$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \leq AM \leq R + AI$.
Vậy $\min AM = |AI - R|$, $\max AM = R + AI$.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 40 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm m để phương trình $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2-2x-m^2=0$ xác định một mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

Ví dụ 41 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $A(2;2;-3)$ và M là điểm bất kì thuộc trục Ox. Xác định M sao cho mặt cầu tâm A bán kính AM có thể tích nhỏ nhất.

Ví dụ 42 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** Không tồn tại.

Ví dụ 43 (Mức độ 3). Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M,m. Khi đó, $M-m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Ví dụ 44 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho phương trình $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2-2y+m^2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Với $m\in(-1;1)$ thì (S_m) là phương trình mặt cầu.		
b) Nếu (S_m) là phương trình mặt cầu thì có bán kính là $R=\sqrt{1+m^2}$.		
c) Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S_m) là 1.		
d) Khi $m=0$ thì mặt cầu (S_m) có bán kính lớn nhất.		

Ví dụ 45 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$ và $A(1;1;1)$. Gọi I là tâm mặt cầu S và (P) là mặt phẳng đi qua A. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) A nằm ngoài mặt cầu S.		
b) Khoảng cách từ tâm I đến (P) nhỏ nhất khi $IA\perp(P)$.		
c) $I(0;-1;1)$.		
d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x+2z-3=0$ khi đó khoảng cách từ tâm I đến (P) là nhỏ nhất.		

Ví dụ 46 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của OM *(làm tròn đến phần chục).*

KQ: | | | | |

Ví dụ 47 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox,Oy lần lượt lấy hai điểm A,B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ *(làm tròn đến phần trăm)*? KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

2 Bài tập tự luận

Bài 37 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm m để phương trình $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-3m^2=0$ xác định một mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

Bài 38 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $A(-3;5;1)$ và B là điểm bất kì thuộc trục Oz. Xác định B sao cho mặt cầu tâm A bán kính AB có thể tích nhỏ nhất.

Bài 39 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $K(2;1;-3)$ và M là điểm bất kì thuộc mặt phẳng Oxy. Xác định M sao cho mặt cầu tâm K bán kính KM có thể tích nhỏ nhất.

Bài 40 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$ và M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng Oxy là ngắn nhất. Tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

Bài 41 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$ và N là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ N đến mặt phẳng toạ độ Oxy là lớn nhất. Tìm khoảng cách lớn nhất đó.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 261 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm m để phương trình
$$(S_m)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2my+2mz-5m^2=0$$
xác định một mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=7$. **C.** $m=0$. **D.** $m=\dfrac{1}{7}$.

Câu 262 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $M(3;-6;2)$ và N là điểm bất kì thuộc trục Ox. Xác định N sao cho mặt cầu tâm M bán kính MN có thể tích nhỏ nhất.

A. $N=(3;0;0)$. **B.** $N=(0;-6;0)$. **C.** $N=(0;0;2)$. **D.** $N=(3;-6;0)$.

Câu 263 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $I(5;-3;7)$ và J là điểm bất kì thuộc mặt phẳng Oyz. Xác định J sao cho mặt cầu tâm I bán kính IJ có thể tích nhỏ nhất.

A. $J=(5;-3;0)$. **B.** $J=(5;0;7)$. **C.** $J=(0;-3;0)$. **D.** $J=(0;-3;7)$.

Câu 264 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=1$ và K là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ K đến mặt phẳng Oxz là ngắn nhất. Gọi khoảng cách ngắn nhất đó là h, tìm h.

A. $h=1$. **B.** $h=2$. **C.** $h=4$. **D.** $h=3$.

Câu 265 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-6=0$ và $M(2;1;1)$. Gọi I là tâm mặt cầu S và (P) là mặt phẳng đi qua M sao cho khoảng cách từ I đến (P) là nhỏ nhất. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là

A. $(P)\colon 2x-y+z-2=0$. **B.** $(P)\colon y-1=0$.
C. $(P)\colon x-2=0$. **D.** $(P)\colon z-1=0$.

Câu 266 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $m-n$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Câu 267 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\dfrac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\dfrac{51}{7}$.

Câu 268 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 269 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 270 (Mức độ 4). Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Câu 271 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3)$, $B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

A. $P=0$. **B.** $P=6$. **C.** $P=\sqrt{14}$. **D.** $P=3\sqrt{14}$.

Câu 272. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$, $B(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 273. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(2;3;0)$. **B.** $M(1;3;0)$. **C.** $M(2;-3;0)$. **D.** $M(2;3;1)$.

Câu 274. Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 275. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

A. $M(2;3;1)$. **B.** $M(0;3;1)$. **C.** $M(0;-3;1)$. **D.** $M(0;1;2)$.

Câu 276. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Câu 277. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\dfrac{62}{9}$. **B.** $\dfrac{27}{9}$. **C.** $\dfrac{46}{9}$. **D.** $\dfrac{43}{9}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 278. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-1;2;0), C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Câu 279. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là

A. $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Câu 280. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 281. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3), B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Câu 282. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), tính giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$.

A. 135. **B.** 90. **C.** 45. **D.** 210.

Câu 283. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 284. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -8.

Câu 285. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y-2z+3=0$?

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{121}{54}$. **C.** 24. **D.** $\dfrac{91}{54}$.

Câu 286. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Câu 287. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng (ABC). Xét $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ thuộc mặt phẳng $M(2;-2;1)\in(ABC)$ sao cho $\overrightarrow{OM}=(2;-2;1), OM=3$ nhỏ nhất. Giá trị của $d(O;(ABC))=OH\le OM$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 288. Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;3), C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2-2MB^2-MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(3;-4;0)$.

Câu 289. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282 . **C.** 256. **D.** 328.

Câu 290. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q)\colon 3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+5c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 14.

Câu 291. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N(-2;0;1)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N(-1;2;1)$.

Câu 292. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha)\colon x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Câu 293. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 294. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha)\colon x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $M\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $M(4;3;1)$. **C.** $M(1;3;4)$. **D.** $M\left(\frac{37}{3};-\frac{56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Câu 295. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2,0,3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị bằng

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 296. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P=a-2b+4c$.

A. $P=23$. **B.** $P=31$. **C.** $P=11$. **D.** $P=13$.

Câu 297. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+34$. Biết rằng $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tích số $x_0y_0z_0$ bằng

A. 16. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 12.

Câu 298. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

A. $2y+z=0$. **B.** $2y-z=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $y-z=0$.

Câu 299. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P)\colon 3x+3y+3z-10=0$. **B.** $(P)\colon x+y+z-1=0$.
C. $(P)\colon x+y+z-10=0$. **D.** $(P)\colon x+y+z+10=0$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 300. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10$.
C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Câu 301. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 302. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$.
C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Câu 303. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P).

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Câu 304. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

A. $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Câu 305. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Biết rằng $(P)\colon ax+by+cz-3=0$ $(a,\,b,\,c\in\mathbb{Z})$ là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

Câu 306. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Câu 307. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $\mathrm{d}(B,(P))=2\mathrm{d}(A,(P))$ cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 8. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 308. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $\mathrm{d}(B,(P))=2\mathrm{d}(A,(P))$ cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 8. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 4.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 309. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$.Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\dfrac{7}{3}\right)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M\left(1;0;\dfrac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{1}{2};0;2\right)$.

Câu 310. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\dfrac{81}{2}$. **B.** $\dfrac{243}{2}$. **C.** $\dfrac{81}{6}$. **D.** 243.

Câu 311. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{27}$.

Câu 312. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q)\colon 2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 313. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x-2y+z=0$. **B.** $x+22y+10z=0$. **C.** $x-2y-z=0$. **D.** $x+10y-22z=0$.

Câu 314. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $P\colon 2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q=a;b;1$ là một vec-tơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào đúng?

A. $a-b=-1$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=0$.

Câu 315. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Câu 316. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=-t\end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 317. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=6$. **B.** $T=12$. **C.** $T=\sqrt{5}$. **D.** $T=21$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 318. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+2=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

A. $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.
B. $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.
C. $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$.
D. $d\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 319. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2-t \\ z=1+2t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2-t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 320. Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-4y+z-12=0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=4-t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-t \\ z=-1+t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 321. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.
B. $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.
C. $d\colon \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$.
D. $d\colon \dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 322. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\dfrac{x-1}{-5}=y-2=\dfrac{z}{4}$.
B. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{13}=\dfrac{z-3}{-2}$.
D. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$.

Câu 323. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$.
B. $M(-1;-2;1)$.
C. $M(3;4;3)$.
D. $M(7;13;5)$.

Câu 324. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó giá trị x_0+y_0 bằng

A. $\dfrac{4}{3}$.
B. 0.
C. $\dfrac{2}{3}$.
D. $\sqrt{2}$.

Câu 325. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2<m<6$.
B. $m>6$.
C. $-2<m<2$.
D. $-6<m<2$.

Câu 326. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;8;-5)$. **B.** $N(0;2;-5)$. **C.** $P(0;-2;-5)$. **D.** $Q(-2;0;-3)$.

Câu 327. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Câu 328. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 329. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Câu 330. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

C. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$. **D.** $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{8}$.

Câu 331. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Câu 332. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-14=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 333. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

đổi nằm trên mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 334. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 335. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc 90°. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $J(-3;2;7)$. **B.** $K(3;0;15)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Câu 336. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$. Xét đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử (P), (Q) là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N. Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{237}}{21}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{273}}{21}$.

Câu 337. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc 90°. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\dfrac{36}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 6. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 338. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\dfrac{5}{6}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của $\mathrm{d}(M;\Delta)$ là

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 339. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$ trong đó x_0, y_0 là các số thực dương và thỏa mãn $x_0+y_0=4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 340. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1-4t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Câu 341. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3)$, $B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M\,(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

A. $P=0$. **B.** $P=6$. **C.** $P=\sqrt{14}$. **D.** $P=3\sqrt{14}$.

Câu 342. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 343. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=abc$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Câu 344. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{19}{4}$. **D.** $\dfrac{21}{4}$.

Câu 345. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 là

A. 12. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 24.

Câu 346. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $m-n$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Câu 347. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 348. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P^2=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Câu 349. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 350. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D\left(2;0;\sqrt{7}\right)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 351. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Câu 352. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0)$; $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 353. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 354. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$. **B.** $3\sqrt{79}$. **C.** $5\sqrt{79}$. **D.** $3\sqrt{82}$.

Câu 355. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 356. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Câu 357. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Câu 358. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Câu 359. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+4BC$ là

A. $2\sqrt{265}$. **B.** $\sqrt{265}$. **C.** $3\sqrt{265}$. **D.** $4\sqrt{265}$.

Câu 360. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{17}$.

Câu 361. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\dfrac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\dfrac{51}{7}$.

Câu 362. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $\sqrt{3}+1$. **C.** $4-2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Câu 363. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 364. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+z+3=0$. **B.** $x+y+z-3=0$.
C. $x+2y+3z-3=0$. **D.** $x+2y+3z+3=0$.

Câu 365. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d. Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

A. $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Câu 366. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Câu 367. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9.\end{cases}$ Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M, m. Khi đó, $M-m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 368. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

A. 5. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 369. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

A. $\max P=20$. **B.** $\max P=-18$. **C.** $\max P=18$. **D.** $\max P=12$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 370. Trong không gian $Oxyz$, cho $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0$. Tọa độ điểm M trên (S) sao cho $\mathrm{d}(M,d)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $(1;2;-1)$. **B.** $(2;2;-1)$. **C.** $(0;2;-1)$. **D.** $(-3;-2;1)$.

Câu 371. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$. **B.** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Câu 372. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x2y+z+15=0$và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB nhỏ nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$. **D.** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{-11}=\dfrac{z+3}{10}$.

Câu 373. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

A. $x-4y-5z+17=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.
C. $x-4y+5z-13=0$. **D.** $3x+2y+z-11=0$.

Câu 374. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 375. Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m\cdot n=4$. **B.** $m\cdot n=2$. **C.** $m\cdot n=-4$. **D.** $m\cdot n=-2$.

Câu 376. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.
C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Câu 377. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$. **B.** $T=4$. **C.** $T=5$. **D.** $T=2$.

Câu 378. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-4=0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

A. $T=\dfrac{1}{5}$. **B.** $T=\dfrac{3}{4}$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-2$.

Câu 379. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là

A. $(P)\colon x-2y+3z-6=0$. **B.** $(P)\colon x+2y+3z-6=0$.
C. $(P)\colon 3x+2y+2z-4=0$. **D.** $(P)\colon x+2y+z-2=0$.

Câu 380. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

A. 8. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 381. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AMB=90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** Không tồn tại.

Câu 382. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Câu 383. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $R=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$. **C.** $R=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Câu 384. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=4\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=3-t'\\ y=t'\\ z=0\end{cases}$.
Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.

Câu 385. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \begin{cases}x=4-2t\\ y=t\\ z=3\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=1\\ y=t'\\ z=-t'\end{cases}$ $(t,\,t'\in\mathbb{R})$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng (d_1), (d_2) là

A. $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\dfrac{9}{4}$. **B.** $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\dfrac{3}{2}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{3}{2}$.

Câu 386. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2\colon \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 387. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$, $t\in\mathrm{R}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.
C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Câu 388. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+2=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ có tâm I. Gọi tọa độ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** 14. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 389. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$; bán kính $R=4$ và đường thẳng $d\colon \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

A. $O(0;0;0)$. **B.** $A\left(1;\frac{3}{5};-\frac{1}{4}\right)$. **C.** $B(-1;-2;-3)$. **D.** $C(2;1;0)$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 390 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2+2mx-4y-3m^2=0$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Với $m\in(-1;1)$ thì (S_m) không phải là phương trình mặt cầu.		
b) (S_m) là phương trình mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{4+4m^2}$.		
c) Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S_m) là 2.		
d) Khi $m=0$ thì mặt cầu (S_m) có bán kính lớn nhất.		

Câu 391 (Mức độ 2). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-3=0$ và $M(-1;1;1)$. Gọi I là tâm mặt cầu S và (P) là mặt phẳng đi qua M.

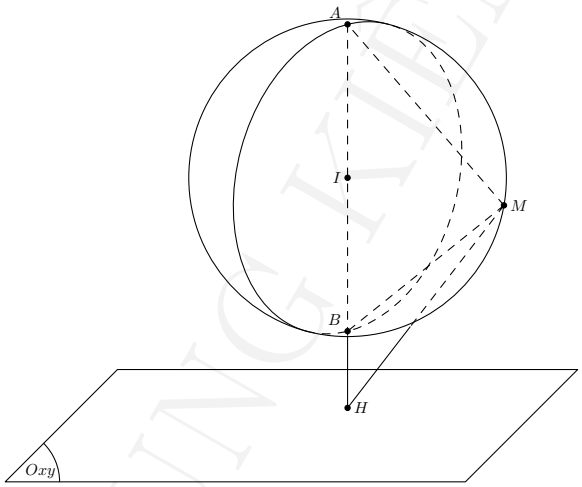
Phát biểu	Đ	S
a) A nằm trong mặt cầu S.		
b) Khoảng cách từ tâm I đến (P) lớn nhất khi $IM\perp(P)$.		
c) (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính lớn nhất khi $IM\perp(P)$.		
d) Mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-7=0$, khi đó $\mathrm{d}(I,(P))$ là nhỏ nhất.		

Câu 392 (Mức độ 2).

Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S)\colon (x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=1$$

và M là điểm thuộc mặt cầu (S). Gọi I là tâm mặt cầu S và AB là đường kính của mặt cầu (S) vuông góc với mặt phẳng Oxy (Hình vẽ bên). Khi đó



Phát biểu	Đ	S
a) (S) có tâm $I(1;4;5)$, bán kính là 1.		
b) Khoảng cách từ M đến Oxy lớn nhất khi và chỉ khi $M\equiv A$.		
c) Khoảng cách nhỏ nhất từ M đến Oxy là 1.		
d) Khoảng cách lớn nhất từ M đến Oxy là 5.		

Ví dụ 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;1)$, bán kính $R=1$ và điểm $A(1;1;0)$. Từ A ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu . Gọi $M(a;b;c)$ là một trong các tiếp điểm ứng với các tiếp tuyến trên. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $MA=\sqrt{2}$.		
b) M thuộc mặt cầu $(S')\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$.		
c) M thuộc mặt phẳng $(P)\colon 2x-z-2=0$.		
d) Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\lvert 2a-b+2c\rvert$ bằng $\dfrac{3+2\sqrt{41}}{5}$.		

Ví dụ 49. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+12=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$ có tâm I, bán kính R. Xét hai điểm M, N lần lượt thuộc (P) và (S) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;1;1)$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=1$.		
b) $\mathrm{d}(I,(P))=3$.		
c) MN luôn tạo với (P) một góc α với $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.		
d) Giá trị nhỏ nhất của MN bằng $3\sqrt{3}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 393. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
TRẦN NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 394. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3)$, $B(6,-5,8)$ và $\overrightarrow{OM}=a\,\vec{i}+b\vec{k}$, trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng bao nhiêu? KQ:

Câu 395. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+2=0$. KQ:

Câu 396. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Tính giá trị của $a+b$? KQ:

Câu 397. Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính ab. KQ:

Câu 398. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2)$, $B(1;1;0)$, $C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q)\colon x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ bằng $\dfrac{a}{b}$ với a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tính $a+b$. KQ:

Câu 399. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ và $D(2;2;-1)$, biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M(x;y;z)$. Tính $x+y+z$. KQ:

Câu 400. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M di động trên mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+2=0$. Biết giá trị nhỏ nhất của $3MA^2+2MB^2+MC^2$ là $\dfrac{a}{b}$ với a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tính $a-b$. KQ:

Câu 401. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$. KQ:

Câu 402. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-3y-2z-12=0$ Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$. KQ:

Câu 403. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2)$, $B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2+3BN^2$. *(kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân).* KQ:

Câu 404. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\dfrac{a}{b^2+c^2}-\dfrac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó phương trình mặt phẳng (MNP) là $mx+ny+pz-1=0$. Tính $m+np$? KQ:

Câu 405. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz=0$ là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Tính $a+b+c$. KQ:

Câu 406. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+c=0$ là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính $a+b+c$. KQ:

Câu 407. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng $y+az=0$. Tính a.

KQ: | | | | |

Câu 408. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ (d) tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $T=a+b+c+d$.

KQ: | | | | |

Câu 409. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{m\sqrt{n}}{n}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $T=m+n$.

KQ: | | | | |

Câu 410. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Tính m.

KQ: | | | | |

Câu 411. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Biết $\vec{n}=(1;a;b)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Tính $T=a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 412. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d qua và vuông góc với $(Q)\colon 3x+4y-4z+5=0$, cắt mặt phẳng (P) tại B. Điểm M nằm trong (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB *(làm tròn một chữ số)*.

KQ: | | | | |

Câu 413. Cho $A(4;5;6)$; $B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+1=0$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $|MA-MB|$ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 414. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 415. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$, $(Q)\colon -x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

KQ: | | | | |

Câu 416. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon y-1=0$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1\\ y=2-t\\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11), B\left(\dfrac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M,N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

KQ: | | | | |

Câu 417. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, tính giá trị của $T=m+n+p$.

KQ: | | | | |

Câu 418. Trong không gian $Oxyz$ gọi $(P)\colon ax+by+cz-3=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2)$, $N(-1;1;3)$ và không đi qua

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

$H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của $P=a-2b+3c+12$. KQ: | | | | |

Câu 419. Trong không gian $Oxyz$ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $O.ABC$ nhỏ nhất. Tính $T=a+2b+3c$.

KQ: | | | | |

Câu 420. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 421. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (A, B, C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $O.ABC$ có thể tích nhỏ nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Tính $T=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 422. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC).

KQ: | | | | |

Câu 423. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 424. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ với a,b,c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất. KQ: | | | | |

Câu 425. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1)$; $B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)(a>2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 426. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình của mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng d có dạng $4x+by+cz+d=0$. Khi đó giá trị $b+c+d$ bằng *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 427. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng (P): $2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó *(làm tròn đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 428. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0.

KQ: | | | | |

Câu 429. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng (P): $x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Gọi $\vec{u}=(6;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $M=b^2+c^2$. KQ: | | | | |

Câu 430. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Gọi $\vec{u}=(26;a;b)$ là một vectơ chỉ phương của d. Tính $a+b$. KQ: | | | | |

Câu 431. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, biết d đi qua điểm $M(a;b;c)$ sao cho a, b, c lập thành một cấp số cộng. Tính $a^2+b^2-c^2$. KQ: | | | | |

Câu 432. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất. Biết điểm $N(a;b;2) \in d$, tính $\dfrac{4b}{a}$. KQ: | | | | |

Câu 433. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 434. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 435 (Mức độ 1). Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm m để phương trình

$$(S_m): x^2+y^2+z^2+2mx-2y+2mz-3m^2=0$$

xác định một mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. KQ: | | | | |

Câu 436 (Mức độ 2). . Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(5;3;4)$. Mặt cầu (S) tâm A có giao điểm với mặt phẳng toạ độ Oyz có bán kính bằng nhỏ nhất bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 437 (Mức độ 4). Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 438 (Mức độ 4). Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 439 (Mức độ 4). Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

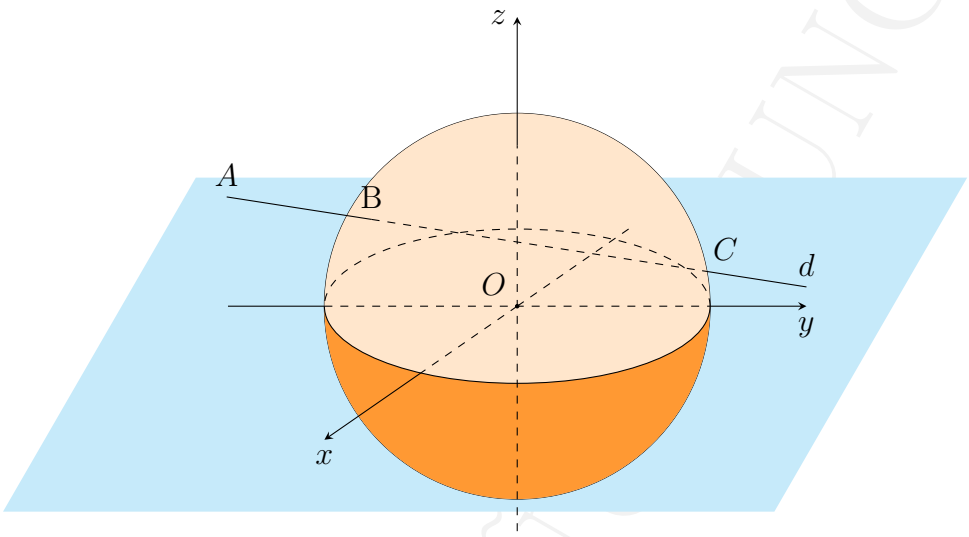
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

DẠNG 4 Các bài toán thực tiễn

6 Ví dụ mẫu

Ví dụ 50 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu.



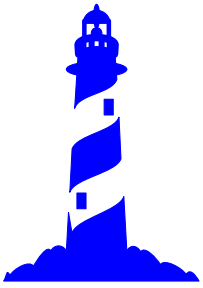
a) Xác định tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

b) Xác định tọa độ của vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất. Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Xác định tọa độ của vị trí mà máy bay ra khỏi màn hình ra đa.

Ví dụ 51. Biết rằng nếu vị trí M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N$, $\beta^\circ E (0<\alpha<90, 0<\beta<90)$ thì có toạ độ $M(\cos\alpha^\circ\cos\beta^\circ;\cos\alpha^\circ\sin\beta^\circ;\sin\alpha^\circ)$. Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí P : 10°N, 15°E đến vị trí Q : 80°N, 70°E.

Ví dụ 52 (Mức độ 3). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng đặt ở vị trí $I(21;35;50)$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $C(42;37;0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng không?

c) Nếu người đi biển ở vị trí $D(5\,121;658;0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

Ví dụ 53. Trong công nghệ hỗ trợ của trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$ đồng thời thuộc mặt cầu (S): $(x-32)^2+(y-50)^2+(z-10)^2=109$ (đơn vị độ dài tính theo mét).

a) Tìm tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu (S).

b) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

c) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

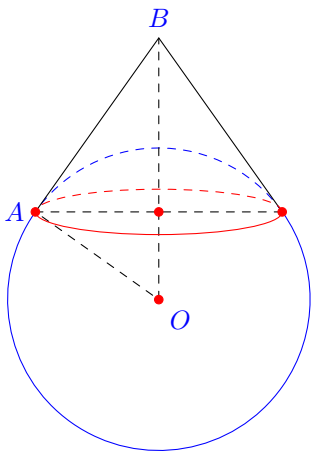
Ví dụ 54. Nếu đứng trước biển và nhìn ra xa, người ta sẽ thấy một đường giao giữa mặt biển và bầu trời, đó là đường chân trời đối với người quan sát (Hình a). Về mặt Vật lí, đường chân trời là đường giới hạn phần Trái Đất mà người quan sát có thể nhìn thấy được (phần còn lại bị chính Trái Đất che khuất). Ta có thể hình dung rằng, nếu người quan sát ở tại đỉnh của một chiếc nón và Trái Đất được "thả" vào trong chiếc nón đó, thì đường chân trời trong trường hợp này là đường chạm giữa Trái Đất và chiếc nón (Hình b). Trong mô hình toán học, đường chân trời đối với người quan sát tại vị trí B là tập hợp những điểm A nằm trên bề mặt Trái Đất sao cho $\widehat{BAO} = 90^\circ$, với O là tâm Trái Đất (Hình c). Trong không gian $Oxyz$, giả sử bề mặt Trái Đất (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và người quan sát ở vị trí $B(1;1;-1)$. Gọi A là một vị trí bất kì trên đường chân trời đối với người quan sát ở vị trí B. Tính khoảng cách AB.



Hình a

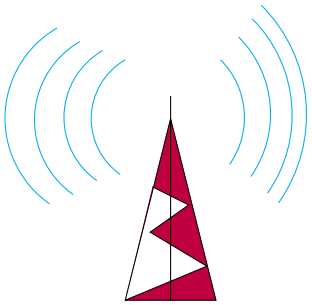


Hình b



Hình c

Ví dụ 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(-3;2;7)$.



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

b) Điểm $A(-2;1;8)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $A(-2;1;8)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

c) Điểm $B(2;3;4)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $B(2;3;4)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Ví dụ 56. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$.

a) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(-5;-2;5)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không?

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(-1;0;1)$.

Ví dụ 57.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục toạ độ là mét), các nhà nghiên cứu khí tượng dùng một phần mềm mô phỏng bề mặt của một quả bóng thám không có dạng hình cầu bằng phương trình $(x-300)^2+(y-400)^2+(z-2000)^2=1$. Tìm tọa độ tâm, bán kính của quả bóng và tính khoảng cách từ tâm của quả bóng đến mặt đất có phương trình $z=0$.



Ví dụ 58. Trong mô hình toán học, bề mặt Trái Đất là mặt cầu với bán kính 6371 km.

(theo: science.nasa. gov/earth/facts/)

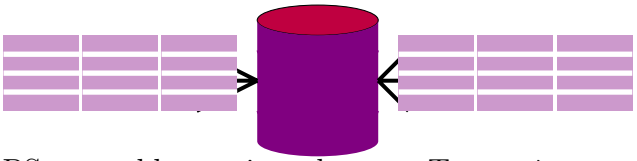
Mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn có đường kính là trục của Trái Đất (đoạn thẳng nối cực Bắc N và cực Nam S). Kinh tuyến gốc là kinh tuyến đi qua Đài Thiên văn Greenwich ở London. Mặt phẳng chứa kinh tuyến gốc chia Trái Đất làm hai nửa là bán cầu Đông và bán cầu Tây, nước ta nằm ở bán cầu Đông. Kinh độ của một điểm P trên bề mặt Trái Đất là số đo của góc nhị diện có hai mặt tương ứng chứa kinh tuyến gốc và kinh tuyến đi qua P (cạnh của góc nhị diện này là đường thẳng chứa trục Trái Đất). Kinh độ nhận giá trị trong đoạn từ $0°$ đến $180°$. Vĩ độ của điểm P là số đo của góc giữa mặt phẳng chứa đường xích đạo và đường thẳng đi qua P và tâm O của Trái Đất. Vĩ độ nhận giá trị trong đoạn từ $0°$ đến $90°$. Mỗi điểm trên bề mặt Trái Đất thuộc một trong hai bán cầu Bắc hoặc Nam và thuộc một trong hai bán cầu Đông hoặc Tây. Vì vậy, đi kèm với vĩ độ, còn có chữ E hoặc W nếu vị trí đó tương ứng thuộc bán cầu Đông hay bán cầu Tây và có chữ N, S nếu vị trí đó tương ứng ở bán cầu Bắc hay bán cầu Nam. Chẳng hạn, hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí: $21°01'51''N, 105°51'09''E$ (theo: maps.google.com). Vị trí trên mặt đất hoàn toàn xác định khi biết vĩ độ và kinh độ (bao gồm cả các kí hiệu N, S, E, W). Trong bài học này, ta xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N, tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, 1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6 371 km trên thực tế. Như vậy, trong không gian $Oxyz$, bề mặt Trái Đất có phương trình: $x^2+y^2+z^2=1$. Nếu biết vĩ độ và kinh độ của một vị trí trên mặt đất thì toạ độ của nó trong không gian cũng dễ dàng được xác định và ngược lại. Chẳng hạn, vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha°N$, $\beta°E(0<\alpha<90, 0<\beta<180)$ có toạ độ $P(\cos\alpha°\cos\beta°;\cos\alpha°\sin\beta°;\sin\alpha°)$, vị trí Q có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha°N$, $\beta°W(0<\alpha<90,\ 0<\beta<180)$ thì có toạ độ $Q(\cos\alpha°\cos\beta°, -\cos\alpha°\sin\beta°, \sin\alpha°)$.

Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q. Cung tròn nói trên là đường đi ngắn nhất trên bề mặt Trái Đất từ P đến Q. Trong ví dụ sau đây, ta sẽ tính khoảng cách giữa hai vị trí đã được nêu ra trong mở đầu bài học.

Biết rằng nếu vị trí M có vĩ độ và kinh độ tương ứng là $\alpha°N$, $\beta°E(0<\alpha<90,\ 0<\beta<90)$ thì có toạ độ $M(\cos\alpha°\cos\beta°;\cos\alpha°\sin\beta°;\sin\alpha°)$. Tính khoảng cách trên mặt đất từ vị trí P : $10°$N, $15°$E đến vị trí Q : $80°$N, $70°$E.

Ví dụ 59.

Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian.



Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ

vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.
Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(3;-1;6)$, $B(1;4;8)$, $C(7;9;6)$ và $D(7;-15;18)$. Điểm $M(x;y;z)$ trong không gian biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$. Tính $x+y+z$. KQ: | | | | |

7 Bài tập tự luận

Bài 42. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Hỏi vị trí $M(2;1;1)$ có thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên hay không?

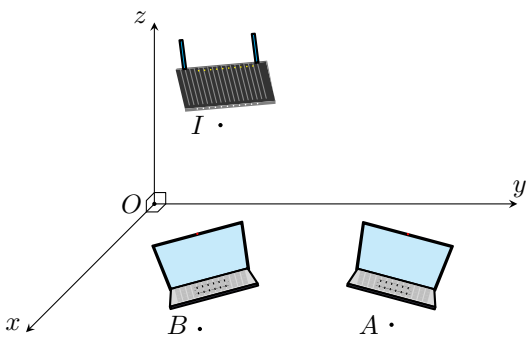
Bài 43. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5000 m.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1;2;0)$ và $N(-3;1;0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Bài 44.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4;2;10)$.



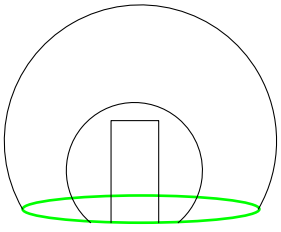
a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6;12;0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14;6;50)$.

Bài 45.

Người ta muốn thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết phương trình của bề mặt lều là $(S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$, phương trình mặt phẳng chứa cửa lều là $(P)\colon x=2$, phương trình chứa sàn lều là $(Q)\colon z=0$. Tìm tâm và bán kính đường tròn cửa lều và đường tròn sàn lều.



Bài 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

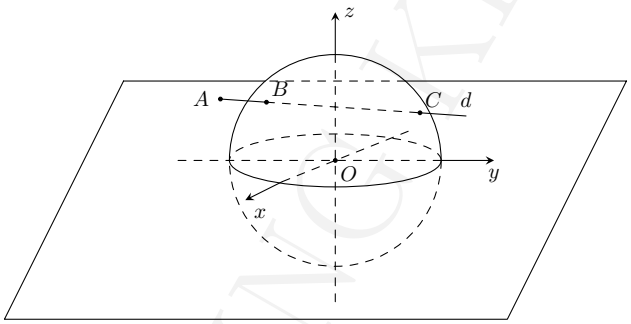
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi rađa của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

Bài 47.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-1\,000;-200;10)$, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-200+80t \\ z=10 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

Bài 48.

Người ta muốn thiết kế một quả địa cầu trong không gian $Oxyz$ bằng phần mềm 3D. Biết phương trình mặt cầu là $(S)\colon (x-24)^2+(y-24)^2+(z-24)^2=100$ (đơn vị cm) và phương trình đường thẳng trục xoay là $d\colon \dfrac{x-24}{1}=\dfrac{y-24}{1}=\dfrac{z-24}{3{,}25}$.



a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (S).

b) Tính số đo góc giữa d và trục Oz. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ.

Bài 49.

Trong không gian $Oxyz$ (*đơn vị trên các trục tọa độ là* mét), một ngọn hải đăng có bóng đèn đặt tại điểm $I(20;40;60)$.



a) Cho biết bán kính phủ sáng của đèn trên hải đăng là 3 km, viết phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới của vùng phủ sáng của hải đăng trong không gian.

b) Một người đi biển đang ở vị trí $M(420;340;0)$. Người đó có thể nhìn thấy được ánh sáng của hải đăng hay không? Giải thích.

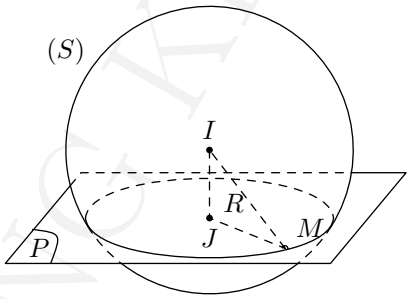
Bài 50 (Mức độ 1). Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S)\colon (x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=25$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là $(P)\colon z=10$.

a) Tìm tâm và bán kính của bồn chứa.

b) Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.

Bài 51.

Một khu vực đã được thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Một flycam đang phát sóng wifi bao phủ một vùng không gian bên trong mặt cầu $(S)\colon (x-20)^2+(y-30)^2+(z-10)^2=400$. Một người đang sử dụng máy tính tại điểm M nằm trên điểm giao của mặt cầu (S) và mặt đất $(P)\colon z=0$.

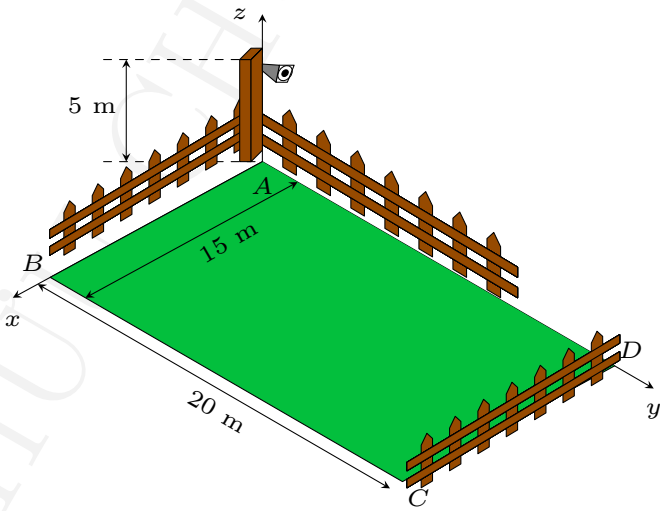


a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu (S). Tính khoảng cách IJ của đoạn vuông góc từ I đến (P).

b) Tính JM. *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét.*

Bài 52.

Một sân hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AD=20$ m, chiều rộng $AB=15$ m. Người ta đặt một camera ở độ cao 5 m trên một cây cột vuông góc với mặt sân tại A, biết camera có bán kính quan sát là 25 m. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O trùng với điểm A chân cột, các tia Ox, Oy lần lượt chứa các cạnh AB, AD của sân và tia Oz chứa cây cột.



a) Viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài và bên trong của vùng quan sát được.

b) Hỏi camera có thể quan sát toàn bộ sân hay không? Vì sao?

8 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 440. Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn 4,5 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng. Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Gọi r là bán kính của viên bi, khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Thể tích viên bi là $V_1=\dfrac{4}{3}\pi r^2$.		
b) Phần thể tích nước dâng lên sau khi bỏ viên bi vào là $V_2=\pi\cdot(5{,}4)^2(2r-4{,}5)$.		
c) Thể tích nước dâng lên chính là thể tích của viên bi.		
d) Bán kính của viên bi đó bằng 2,5 cm.		

Câu 441. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5000 m. Một người sử dụng điện thoại tại vị trí $B(10;-8;5)$. Khi đó

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Thầy: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Bán kính vùng phủ sóng là $R = 5$ km.		
b) Tâm của mặt cầu đó là $I(-1;2;3)$.		
c) Người dùng ở vị trí B không kết nối được sóng điện thoại.		
d) Phương trình mặt cầu biểu diễn vùng phủ sóng là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$.		

Câu 442. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D. Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S)\colon (x-8)^2+(y-8)^2+(z-8)^2=81$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là $(P)\colon z=12$ và điểm $B(6;7;8)$.





Phát biểu	Đ	S
a) Tâm của bồn chứa khí lỏng là $I(8;8;8)$.		
b) Bán kính của bồn chứa khí lỏng là $R = 81$.		
c) Điểm B nằm bên trong bồn chứa khí lỏng.		
d) Khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp d $= 4$.		

Câu 443. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, tia Oz hướng lên trời, ta xét một ra-đa phát sóng điện thoại đặt tại $I(1;1;1)$. Biết đơn vị trên các trục tính bằng ki-lô-mét và bán kính phủ sóng của máy là 5000 mét. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $A(5;0;0)$ sẽ có sóng điện thoại.		
b) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng của ra-đa trong không gian là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=25$.		
c) Tập hợp các điểm xa nhất có thể nhận được sóng từ ra-đa trên mặt đất lập thành một đường tròn có bán kính $2\sqrt{6}$ ki-lô-mét.		
d) Một người tại điểm $B(9;7;0)$ di chuyển với tốc độ 40 km/h cần ít nhất 7 phút để tới được vùng có sóng (với giả sử di chuyển không có vật cản).		

Câu 444. Trong không gian $Oxyz$ có mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, tia Oz hướng lên và đơn vị trên các trục là mét, một thiết bị phát sóng wifi của một tòa nhà cao tầng đặt tại vị trí $A(3;1;5)$. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 m. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng tốt là $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=121$.		

Phát biểu	Đ	S
b) Một người đứng tại điểm $B(2;5;0)$ sẽ nhận sóng tốt.		
c) Một người đứng tại điểm $C(-5;-5;0)$ sẽ nhận sóng kém.		
d) Nếu trung bình mỗi tầng của tòa nhà cao 4m thì tầng 5 của tòa nhà sẽ nhận sóng kém từ thiết bị này.		

Câu 445. Công nghệ VAR thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí quả bóng di chuyển trên sân vận động. Biết quả bóng tại điểm M nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S)\colon (x-22)^2+(y-4)^2+(z-12)^2=400$, đơn vị trên các trục là mét. Khi đó

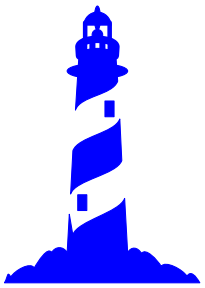
Phát biểu	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(22;4;12)$ và bán kính $R=20$.		
b) Hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân là $J(22;4;0)$.		
c) $JM=16$.		
d) Nếu đặt một ra-đa giám sát bóng tại điểm $A(0;0;10)$ có bán kính kiểm soát 50m thì sẽ kiểm soát được tất cả vị trí có thể của điểm M.		

Câu 446. Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ và có một bóng đèn cách không xa. Trong không gian $Oxyz$, giả sử mặt ngoài quả bóng là mặt cầu có phương trình $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA với MA là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Quả bóng có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=3$.		
b) $IM=\sqrt{206}$.		
c) $MA=14$.		
d) Ngoài điểm A thì còn các tiếp điểm khác của tiếp tuyến từ M đến mặt cầu S. Các điểm này cùng với A đều thuộc một đường tròn giới hạn phần diện tích là 27.		

Câu 447.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng đặt ở vị trí $I(21;35;50)$. Mặt cầu (S) để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km. Các khẳng định sau đúng hay sai?



Phát biểu	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu $(S)\colon (x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4^2$.		
b) Người đi biển ở vị trí $C(42;37;0)$ cách ngọn hải đăng khoảng 200 m.		
c) Người đi biển ở vị trí $C(42;37;0)$ có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.		
d) Người đi biển ở vị trí $D(5\,121;658;0)$ có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.		

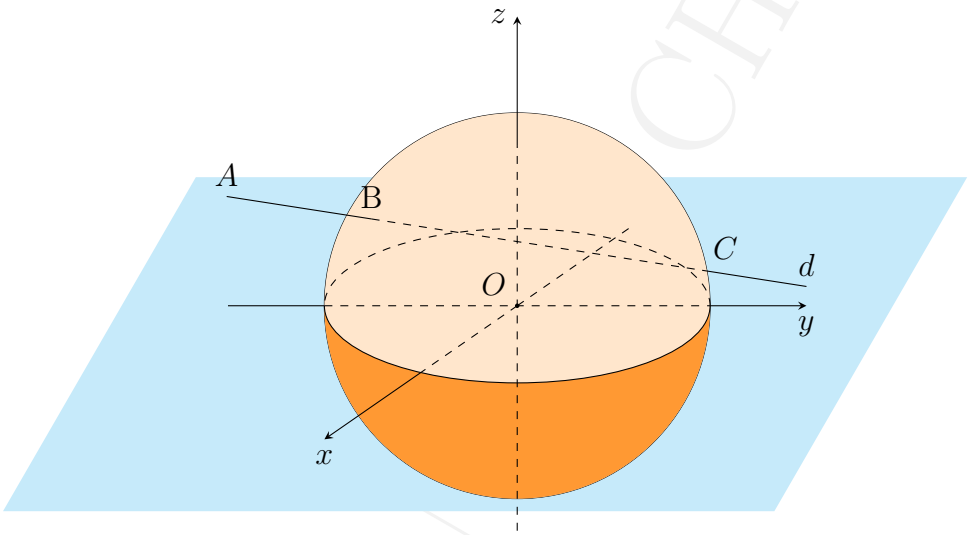
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 448. Trong không gian $Oxyz$, một vòm được thiết kế có bề mặt là mặt cầu tâm $I(1;2;20)$; bán kính bằng 50 và có đáy nằm trên mặt phẳng (Oxy). Biết đơn vị trên các trục là mét. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Một người đứng tại điểm $A(10;20;0)$ là đang ở trong mái vòm.		
b) Phương trình mái vòm là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-20)^2=2\,500$.		
c) Chiều cao mái vòm là 70 mét.		
d) Diện tích đáy vòm là $S=2\,000\pi$.		

Câu 449. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu. Các khẳng định sau đúng hay sai?



Phát biểu	Đ	S
a) Tọa độ sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình rada là $(-506;40;8)$.		
b) Tọa độ của vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất là $\left(-\frac{375}{2};\frac{455}{2};8\right)$.		
c) Khoảng cách gần nhất giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu là 300 km (làm tròn đến hàng đơn vị).		
d) Tọa độ của vị trí mà máy bay ra khỏi màn hình ra đa là $(40;415;8)$.		

9 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 450. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), các nhà nghiên cứu khí tượng dùng một phần mềm mô phỏng bề mặt của một quả bóng thám không có dạng hình cầu bằng phương trình $(x-300)^2+(y-400)^2+(z-2000)^2=1$. Tính khoảng cách từ tâm của quả bóng đến mặt đất có phương trình $z=0$.

KQ: | | | | |

Câu 451. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả

dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8 m; 8,8 m; 9,6 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là bao nhiêu độ?

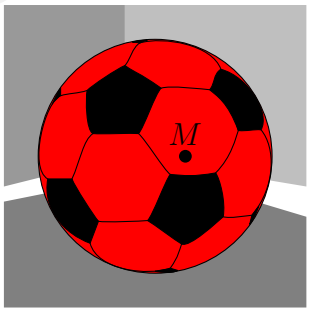
KQ: | | | | |

Câu 452. Trên hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600 m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Người dùng điện thoại đang ở vị trí $A(-100;50;10)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này. Tỉ lệ khoảng cách từ tâm máy phát sóng đến vị trí của người này là bao nhiêu phần trăm so với bán kính ngưỡng phát sóng?

KQ: | | | | |

Câu 453.

Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng đó. Biết rằng loại bóng tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm. *(làm tròn đến 1 chữ số thập phân)*



KQ: | | | | |

Câu 454. Bề mặt của một bóng thám không dạng hình cầu có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-200x-600y-4000z+4099900=0.$$

Tìm bán kính mặt cầu.

KQ: | | | | |

Câu 455.

Đầu in phun của một máy in 3D đang in bề mặt của một mặt cầu có phương trình

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}y-z+\frac{1}{16}=0.$$



Tính khoảng cách từ đầu in phun đến tâm mặt cầu (*làm tròn đến 2 chữ số thập phân*).

KQ: | | | | |

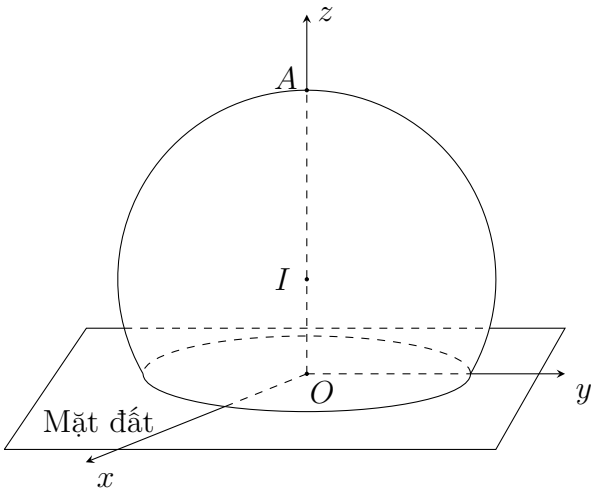
Câu 456.

Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA=85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Phương trình của mặt cầu này có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Giá trị của biểu thức $a+b+c-R$ là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

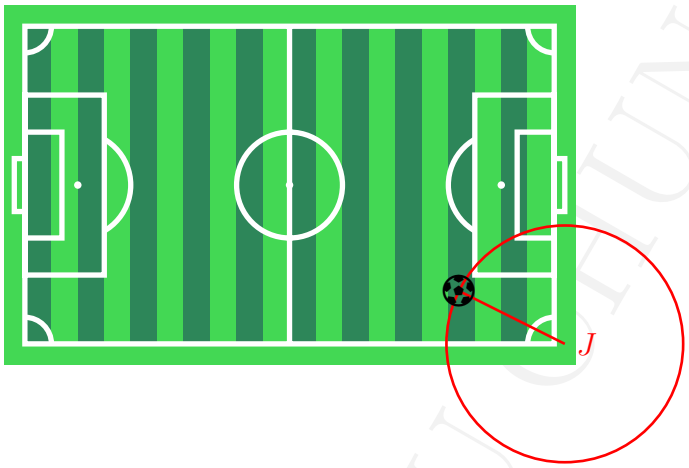


TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

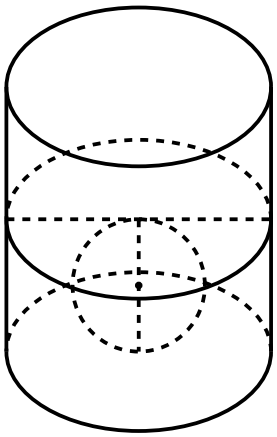
Câu 457. Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $Oxyz$, giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15;1;6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét? KQ: | | | | |

Câu 458. Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR thiết lập một hệ toạ độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu: $(x-22)^2+(y-4)^2+(z-13)^2=194$. Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu xuống mặt sân bóng. Hỏi khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J bằng bao nhiêu mét? KQ: | | | | |



Câu 459.

Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính nhỏ hơn $4,5$ cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước thì viên bi đó tiếp xúc với đáy cốc và tiếp xúc với mặt nước sau khi dâng. Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc bằng $5,4$ cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng $4,5$ cm. Bán kính của viên bi đó bằng bao nhiêu? KQ: | | | | |



Câu 460. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hóa lỏng hình cầu bằng phần mềm 3 D. Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là $(S)\colon (x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=25$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là $(P)\colon z=10$. Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.

KQ: | | | | |

Câu 461. Ericsson Globe là toà nhà bán cầu lớn nhất trên thế giới, với hình dạng một quả cầu màu trắng có đường kính 110 m và chiều cao bên trong 85 m, nó có đủ chỗ ngồi cho 16 000 khán giả của các buổi biểu diễn hoà nhạc hoặc 13 850 khán giả của các trận đấu khúc côn cầu trên băng. Giả sử ta biểu diễn mô phỏng của toà nhà Ericsson Globe trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA=85$ m, Phương trình của mặt cầu này có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính $c+R$. KQ: | | | | |

Câu 462. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3;1;1)$. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 m. Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.

KQ: | | | | |

Câu 463. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1;-2;-3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5\,000m$. Sử dụng phương trình mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=5\,000^2$ để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 464. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km. Sử dụng phương trình mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=250\,000$ để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 465. Phần mềm mô phỏng thiết bị thám hiểm đại dương có dạng hình cầu trong không gian $Oxyz$. Sử dụng phương trình mặt cầu $(x-360)^2+(y-200)^2+(z-400)^2=4$ để mô tả ranh giới bên ngoài vùng thám hiểm trong không gian, biết tâm của mặt cầu là $I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 466. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(a;b;c)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5 km. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Tính a. KQ: | | | | |

Câu 467. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, một trạm phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(a;b;c)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5 km. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. Tính a. KQ: | | | | |

Câu 468. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5;1;9)$ và $B(2;1;12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ? KQ: | | | | |

Câu 469. Bề mặt của một quả bóng thám không dạng hình cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-200x-600y-4\,000z+4\,099\,900=0$. Tính bán kính mặt cầu. KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 5

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. ÔN TẬP TỔNG HỢP

1 Bài tập tự luận

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;-2;3)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Viết phương trình đường thẳng AC.

c) Viết phương trình mặt cầu đường kính AC.

d) Viết phương trình mặt cầu tâm A, đi qua B.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=4-2t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và gốc toạ độ O.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;1;0)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d'\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d'.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với đường thẳng d.

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d.

d) Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxz).

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d'\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với đường thẳng d'.

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y-z-1=0$, $(Q)\colon 2x+y-z-2=0$ và điểm $A(-1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm A đồng thời vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ và $d'\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases}$.

a) Xác định vị trí tương đối của hia đường thẳng d và d'.

b) Tính góc giữa d và d'.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, tính góc tạo bởi đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z+3=0$.

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$ và mặt phẳng Oxy.

Bài 11. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?

Bài 12. Bản vẽ thiết kế của một công trình được vẽ trong một hệ trục toạ độ $Oxyz$. Sàn nhà của công trình thuộc mặt phẳng Oxy, đường ống thoát nước thẳng và đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(5;6;-2)$. Tính góc tạo bởi đường ống thoát nước và mặt sàn.

Bài 13. Cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$.

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chóp.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

Bài 14. Cho bốn điểm $A(-2;6;3)$, $B(1;0;6)$, $C(0;2;-1)$, $D(1;4;0)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.

b) Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

Bài 15. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y-6=0$ và (Q). Biết rằng điểm $H(2;-1;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ $O(0;0;0)$ xuống mặt phẳng (Q). Tính góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

Bài 16. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$, với O là gốc toạ độ, $A(2;0;0)$, $C(0;6;0)$, $O'(0;0;4)$. Viết phương trình

a) mặt phẳng $(O'AC)$;

b) đường thẳng CO';

c) mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp.

2 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z+10=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Khoảng cách từ M đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{15}{9}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 2. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-10=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-3=0$. Khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 3. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $M(1;1;6)$. **B.** $N(-5;0;0)$. **C.** $P(0;0;-5)$. **D.** $Q(2;-1;5)$.

Câu 4. Cho ba mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x+3y+6z+13=0$, $(\beta)\colon 2x+2y-2z+9=0$ và $(\gamma)\colon x-y-21=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $(\alpha)\perp(\beta)$. **B.** $(\gamma)\perp(\beta)$. **C.** $(\alpha)\parallel(\beta)$. **D.** $(\alpha)\perp(\gamma)$.

Câu 5. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=1+4t\\y=6t\\z=-2+2t\end{cases}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng d?

A. $\frac{x+1}{\frac{4}{z-2}{2}}=\frac{y}{6}$. **B.** $\frac{x-5}{\frac{2}{z}{1}}=\frac{y-6}{3}$. **C.** $\frac{x+1}{\frac{2}{z-2}{-2}}=\frac{y}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{\frac{4}{z+2}{2}}=\frac{y}{6}$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{-1}=\frac{z+1}{1}$. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tham số của d?

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=-1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3+t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+t\\z=-1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+t\\z=-2+t\end{cases}$.

Câu 7. Đường thẳng đi qua điểm $I(1;-1;-1)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(-2;3;-5)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-5}$. **B.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{-5}$.
C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{-1}$. **D.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+5}{-1}$.

Câu 8. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+3y-z+5=0$?

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=1+3t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=3t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+3t\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+3t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 9. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$. **D.** $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$.

Câu 10. Cho $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu (m là tham số). Tất cả giá trị của m là

A. $m<9$. **B.** $m\le 9$. **C.** $m>9$. **D.** $m\ge 9$.

Câu 11. Mặt cầu có phương trình nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2=0$. **B.** $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$.
C. $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+2x+6z=0$. **D.** $(S_4)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-2=0$.

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 12. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$. Điểm nào sau đây nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(-1;2;5)$. **B.** $N(0;3;2)$. **C.** $P(-1;6;-1)$. **D.** $Q(2;4;5)$.

Câu 13. Trong không gian Oxy, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-3z+1=0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có toạ độ là

A. $(1;2;3)$. **B.** $(1;-2;3)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1;-1;2)$ và nhận vectơ $\vec{n}=(2;1;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến là

A. $x-y+2z+1=0$. **B.** $x-y+2z-6=0$. **C.** $2x+y-z-1=0$. **D.** $2x+y-z+1=0$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có toạ độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(2;1;-2)$. **C.** $(2;1;2)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+t\\ z=3-t\end{cases}$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d có toạ độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(2;0;0)$. **C.** $(2;1;-1)$. **D.** $(2;1;1)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2;-1;1)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(1;2;-3)$ làm một vectơ chỉ phương là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;-1)$, $B(2;1;1)$. Phương trình đường thẳng AB là

A. $\begin{cases}x=1+3t\\ y=t\\ z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+t\\ y=t\\ z=-1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+3t\\ y=t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua $I(2;1;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-3=0$ là

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Toạ độ tâm I và bán kính R của (S) lần lượt là

A. $I(1;0;3)$, $R=4$. **B.** $I(1;0;3)$, $R=2$. **C.** $I(-1;0;3)$, $R=2$. **D.** $I(-1;0;3)$, $R=4$.

Câu 21 (Trần Phú — Hà Tĩnh). Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{PQ}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{PR}=(-2;-1;0)$ và điểm $M(1;-2;2)$ là trung điểm của đoạn QR. Tọa độ điểm Q là

A. $(-1;1;-2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(0;1;3)$. **D.** $(2;-1;1)$.

Câu 22 (Chuyên Hạ Long — QN). Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-3)$ và bán kính $R=5$ là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=5$. **B.** $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=5$.
C. $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=25$.

Câu 23 (Chuyên Hạ Long – QN). Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B(3;-5;2)$. Tìm tọa độ véctơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AB}=(2;-7;-5)$. **B.** $\overrightarrow{AB}=(-2;-7;5)$. **C.** $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-5)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=(2;-7;5)$.

Câu 24 (Chuyên Hạ Long – QN). Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Tính góc giữa hai véctơ đó.

A. $45°$. **B.** $135°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 25 (Chuyên Hạ Long – QN). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(2;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;3)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn $MA^2+MC^2=MB^2$. Tính MP với $P(3;-2;5)$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 26 (Chuyên Hạ Long – QN). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(a;b;-b+1)$ và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2, với a, b là những tham số thực. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{\dfrac{30}{11}}$. **B.** $\sqrt{\dfrac{21}{11}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{24}{5}}$. **D.** $\sqrt{\dfrac{19}{4}}$.

Câu 27 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 3.

Câu 28 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(0;2;-3)$. **B.** $(1;0;-3)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(1;0;0)$.

Câu 29 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (Oyz) là

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y+z=0$. **D.** $y=0$.

Câu 30 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;-3;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+5=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-3=0$.
C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $2x-y+3z-9=0$.

Câu 31 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Phương trình của (P) là

A. $2y+z=0$. **B.** $2y-z=0$. **C.** $y+z=0$. **D.** $y-z=0$.

Câu 32 (THPT QG 2022 – Mã 101). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3 . Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM\cdot AN$ bằng

A. 39. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** 18. **D.** $28\sqrt{3}$.

Câu 33 (THPT QG 2022 – Mã 102). Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$.
Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của (d)?

A. $\vec{u}_1 = (2;1;1)$. **B.** $\vec{u}_2 = (2;1;-1)$. **C.** $\vec{u}_3 = (1;-2;3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (1;2;3)$.

Câu 34 (THPT QG 2022 — Mã 102). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;-3;2)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+5=0$. Mặt phẳng đi qua A và và song song với (P) có phương trình là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-3=0$.
C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $2x-y+3z-9=0$.

Câu 35 (THPT QG 2022 — Mã 102). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.
C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 36 (THPT QG 2022 — Mã 102). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Phương trình của (P) là

A. $2x-z=0$. **B.** $2x+z=0$. **C.** $x-z=0$. **D.** $x+z=0$.

Câu 37 (THPT QG 2022 — Mã 102). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S), đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S), giá trị $AM\cdot AN$ bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 14. **C.** 8. **D.** $9\sqrt{2}$.

3 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 38. Cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;2;2)$, $C(4;3;5)$.

Phát biểu	Đ	S
a) Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(3;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(4;2;4)$.		
b) Mặt phẳng P có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;4;1)$.		
c) Mặt phẳng P đi qua điểm $M(1;2;4)$.		
d) Mặt phẳng P vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$.		

Câu 39. Cho điểm $M(2;0;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+11=0$.

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm $A(0;5;3)$ thuộc mặt phẳng (P).		
b) $\mathrm{d}\big(M,(P)\big)=\dfrac{5}{9}$.		
c) Đường thẳng MA vuông góc với mặt phẳng (P).		
d) Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-9}{-2}=\dfrac{z-31}{2}$ song song với mặt phẳng (P).		

Câu 40. Cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(-2;-2;-9)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=-t. \end{cases}$

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Điểm A thuộc đường thẳng d.		
b) Điểm B thuộc đường thẳng d.		
c) $\overrightarrow{AB} = (4;3;-7)$.		
d) Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng d.		

Câu 41. Cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-1}{-5}$.

Phát biểu	Đ	S
a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2;0;-1)$.		
b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-4;2;-4)$.		
c) Đường thẳng d' không đi qua điểm $N(2;0;1)$.		
d) Đường thẳng d vuông góc với d'.		

Câu 42. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2 = 9$.

Phát biểu	Đ	S
a) (S) có tâm $I(-1;-3;2)$.		
b) (S) có bán kính $R = 9$.		
c) Điểm $O(0;0;0)$ nằm ngoài mặt cầu (S).		
d) Điểm $M(1;3;1)$ nằm trên mặt cầu (S).		

4 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M\,(0;a;0)$ thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x+y-z+1=0$ và $(Q): x-y+z-5=0$, tính a. KQ: | | | | |

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho $A\,(1;2;3)$, $B\,(3;4;4)$. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P): 2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB. KQ: | | | | |

Câu 45. Gọi điểm $M\,(0;a;0)$ trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-4=0$ nhỏ nhất. Tính a. KQ: | | | | |

Câu 46. Cho điểm $M\,(0;0;m)$ thuộc trục Oz sao cho điểm M cách đều điểm $A\,(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$. Tính m. KQ: | | | | |

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\,(1;2;3)$, $B\,(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $\mathrm{d}\,(B;(P)) = 2\mathrm{d}\,(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I\,(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P). KQ: | | | | |

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+2mz-9=0$ và $(Q): 6x-y-z-10=0$. Tìm m để $(P)\perp(Q)$ KQ: | | | | |

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x+my+z-5=0$ và $(Q): nx-3y-2z+7=0$. Để $(P)\ //\ (Q)$ thì giá trị của $m+n$ là (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*). KQ: | | | | |

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-my-4z-6+m=0$ và $(Q): (m+3)x+y+(5m+1)z-7=0$. Tìm m để $(P)\equiv(Q)$. KQ: | | | | |

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$ và $(Q): 2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của $(R): m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là bao nhiêu? KQ: | | | | |

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ trong đó $b\cdot c\neq 0$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Giá trị của $\dfrac{2b}{c}$ bằng bao nhiêu để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P). KQ: | | | | |

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$ và $(Q): x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$ KQ: | | | | |

Câu 55. Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

KQ: | | | | |

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x+y+z+3=0$, cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a;b;c)$ trên mặt phẳng đó, tính $a+b+c$. KQ: | | | | |

Câu 57. Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử $(P): x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q): x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính $b_1b_2+c_1c_2$.

KQ: | | | | |

B. BÀI TẬP ÔN THEO DẠNG

1 Mặt phẳng

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oyz) là

A. $y+z=0$. **B.** $x-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là $(P): x+3y-2z-2022=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $\vec{n}=(2;1;3)$. **B.** $\vec{n}=(1;3;-2)$. **C.** $\vec{n}=(-2;0;2022)$. **D.** $\vec{n}=(4;1;1)$.

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;2;2)$ và đi qua điểm $A(2;1;4)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $(P): 3x+2y+2z-7=0$. **B.** $(P): 3x+2y+2z-10=0$.
C. $(P): 3x-2y+2z-18=0$. **D.** $(P): 3x+2y+2z-16=0$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;6)$ và đi qua điểm $A(1;-2;0)$. Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (P) tương ứng là

A. $(P)\colon 2x+3y+6z+4=0$.
B. $(P)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$.
C. $(P)\colon \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-4/3}+\dfrac{z}{-2/3}=1$.
D. $(P)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=-4$.

Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-7=0$ và điểm $A(1;0;2)$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) tương ứng là

A. 2.
B. 4.
C. 3.
D. 1.

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y-z+1=0$. Cặp vectơ nào dưới đây là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P)?

A. $(1;2;-1),(1;0;1)$.
B. $(1;2;-1),(-2;-4;2)$.
C. $(1;2;-1),(2;-1;2)$.
D. $(0;0;0),(1;0;1)$.

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+1=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua gốc O và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $2x-y-z=0$.
B. $x-2y-z=0$.
C. $x-2y-2z=0$.
D. $2x-y-z+3=0$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z+6=0$. Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (α)?

A. $(0;0;1)$.
B. $(1;1;3)$.
C. $(2;3;1)$.
D. $(-1;2;-1)$.

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;0;-1)$. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC) tương ứng là

A. $x-y+1=0$.
B. $x+y-1=0$.
C. $y-z-1=0$.
D. $2x-1=0$.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+z-6=0$. Phát biểu đúng là

A. Mặt phẳng (P) song song với trục Oy.
B. Mặt phẳng (P) đi qua trục Oy.
C. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Oxz).
D. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Oy.

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;-2)$ và đi qua điểm $A(0;-1;3)$. Biết rằng (P) cắt ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P. Thể tích của tứ diện $OMNP$ tương ứng bằng

A. 128.
B. $\dfrac{64}{3}$.
C. 32.
D. $12\sqrt{3}$.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và đi qua A, mặt phẳng (Q) cắt ba trục tọa độ lần lượt tại M, N, P. Thể tích tứ diện $OMNP$ bằng

A. $\dfrac{1}{12}$.
B. $\dfrac{1}{6}$.
C. $\dfrac{1}{9}$.
D. $\dfrac{1}{24}$.

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-z-1=0$ và $(Q)\colon y+2z-2=0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng này nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(64°;68°)$.
B. $(22°;27°)$.
C. $(50°;62°)$.
D. $(20°;40°)$.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-2=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon mx+3y-nz-2019=0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì

A. $m-n=3$.
B. $m+n=3$.
C. $m+n=0$.
D. $m-2n=1$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z-2019=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 3mx-2y+2z+2020=0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì:

A. $m=\dfrac{2}{3}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=-1$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Có hai mặt phẳng phân biệt (Q_1), (Q_2) song song với (P) và cách A một khoảng bằng 3. Hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) cách nhau một khoảng là

A. 6. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon mx+y-2z-1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 2x-my+z+3=0$. Để hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc 60° thì số giá trị thực của m thỏa mãn bài toán là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-2;0;1)$ và bốn mặt phẳng lần lượt có phương trình là $(P)\colon x+2y-5=0$, $(Q)\colon 2x-z-1=0$, $(R)\colon x+y-2z-4=0$ và $(T)\colon y+3z-1=0$. Trong bốn mặt phẳng trên, số mặt phẳng thỏa mãn điều kiện nằm giữa hai điểm A và B là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(-4;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là

A. $3x+z+1=0$. **B.** $-x+y+2z-2=0$.
C. $3x+z-4=0$. **D.** $-x+y+2z+1=0$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) là

A. $2x+y-3z+12=0$. **B.** $2x+y-3z=0$.
C. $2x-y+z-2=0$. **D.** $3x+y+z-1=0$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần là $(P)\colon x+y+2z+1=0$ và $(Q)\colon m^2x+(1-n)y+(2m-3)z+2020=0$. Biết rằng (P) và (Q) lần lượt vuông góc với nhau. Giá trị nhỏ nhất của tham số thực n là

A. 1. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -9.

Câu 79. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-11=0$ và điểm $A(1;0;-1)$. Mặt phẳng (Q) cách đều A và (P), đồng thời (Q) cắt trục Oz tại điểm có cao độ z_C bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** -2.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-1=0$ và điểm $A(1;0;3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách điểm A một khoảng bằng 2. Mặt phẳng (Q) cắt trục Ox tại điểm cách gốc O một đoạn nhỏ hơn 5 và bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+3y+z-3=0$ và $(Q)\colon -x-3y-z-11=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng là mặt phẳng có phương trình

A. $x+3y+z-7=0$. **B.** $x+3y+z-8=0$. **C.** $x+3y+z-4=0$. **D.** $x+3y+z+4=0$.

Câu 82. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon x+2y+2z+1=0$ và $(Q)\colon x+2y+2z-8=0$. Gọi (R) là mặt phẳng song song và nằm giữa hai mặt phẳng (P), (Q); sao

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

cho khoảng cách giữa (P) và (R) gấp đôi khoảng cách giữa (Q) và (R). Phương trình mặt phẳng (R) là

A. $x+2y+2z-4=0$. **B.** $x+2y+2z-1=0$.
C. $x+2y+2z-5=0$. **D.** $x+2y+2z-7=0$.

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon x+y-3z+2=0$ và $(Q)\colon x+y-3z-4=0$. Gọi (R) là mặt phẳng song song và mặt phẳng (P) nằm giữa hai mặt phẳng (R), (Q); sao cho khoảng cách giữa (P) và (R) gấp ba khoảng cách giữa (Q) và (R). Mặt phẳng (R) là

A. $x+y-3z-7=0$. **B.** $x+y-2z-7=0$. **C.** $x+y-3z-1=0$. **D.** $x+y-3z+3=0$.

Câu 84. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là $(P)\colon x+y+3z-1=0$ và $(Q)\colon 3x-y+z-2=0$. Biết mặt phẳng (R) cắt cả ba trục tọa độ. Mặt phẳng (R) chứa tất cả các điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tổng quát là

A. $4x+4y-3=0$. **B.** $x-2y-2z=0$.
C. $3x+y-z-1=0$. **D.** $2x-2y-2z-1=0$.

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-4=0$ và $(Q)\colon x+y-2z-3=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng là hai mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-z+-1=0$. **B.** $x-2y-z-4=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.
C. $x-y-2z-7=0$ hoặc $y-3z+2=0$. **D.** $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.

Câu 86. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-10=0$ và hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;3;1)$. Gọi (Q) là một mặt phẳng đi qua A, B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Biết rằng phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) là $2x+by+cz+d=0$, với a, b, c, d là những số thực. Khi đó giá trị của tổng $b+c+d$ bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** 18. **D.** -18.

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-7=0$ và các điểm $A(3;1;-3)$, $B(2;3;-1)$, $C\,(4;m;2-m^2)$. Số giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt đúng hai cạnh của $\triangle ABC$ là

A. 4. **B.** -2. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+5z-7=0$, $(\beta)\colon x+y-z-1=0$, $(\lambda)\colon x-y-z-1=0$, $(\delta)\colon x-y-3z-1=0$. Thể tích của khối tứ diện được giới hạn bởi bốn mặt phẳng đó bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;0)$, $B(-2;0;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và khoảng cách từ B đến (P) lớn nhất có phương trình tổng quát là $(P)\colon ax+2y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. 20. **B.** -12. **C.** -28. **D.** 15.

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+y+(m-1)z+1=0$ và điểm $A(2;1;0)$. Khoảng cách lớn nhất tính từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+(n+1)y+(m-2n)z+6=0$ với m, n là các tham số thực. Khoảng cách từ gốc O đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(2;0;3)$, $C(0;1;3)$, $D(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+2z+d=0$. Biết rằng (P) đi qua A và ba điểm B, C, D nằm cùng phía với (P). Khi tổng khoảng cách từ các điểm B, C, D đến (P) lớn nhất thì giá trị của biểu thức $S=a+b+2d$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(0;2;3)$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+2y+cz+d=0$ đi qua C, sao cho A, B nằm cùng phía với (P) đồng thời tổng khoảng cách từ A và B đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $T=a+c+d$ bằng

A. 0. **B.** -8. **C.** 12. **D.** -10.

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-3)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-2)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc O sao cho A, B, C nằm cùng phía với (P). Tổng khoảng cách từ A, B, C đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;-2;0)$, $C(0;0;-5)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua D sao cho A, B, C cùng phía với (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\mathrm{d}(A;(P))+2\mathrm{d}(B;(P))+\mathrm{d}(C;(P))$ bằng

A. $12\sqrt{5}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{6}$. **D.** $8\sqrt{5}$.

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;1)$, $B(1;-3;0)$, $C(-2;2;4)$, $D(-3;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc O sao cho bốn điểm A, B, C, D nằm cùng phía với (P). Khi biểu thức $T=\mathrm{d}(A;(P))+2\mathrm{d}(B;(P))+\mathrm{d}(C;(P))+3\mathrm{d}(D;(P))$ đạt giá trị lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+by+cz+d=0$. Giá trị biểu thức $S=b+c+d$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $2a+2b-c=3$ thì G luôn nằm trên mặt phẳng (P). Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(2;1;2)$. **B.** $(2;2;-1)$. **C.** $(3;0;1)$. **D.** $(4;-1;5)$.

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oxz) là

A. $y+z=0$. **B.** $x-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=0$.

Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Khoảng cách từ A đến (P) bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$. Khoảng cách từ A đến (Oxy) bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng song song và cách (Oyz) một đoạn bằng 2 là

A. $z\pm 2=0$. **B.** $y\pm 2=0$. **C.** $y+z\pm 2=0$. **D.** $x\pm 2=0$.

Câu 102. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với trục Oz và đi qua hai điểm $A=(2;0;1)$, $B=(-1;1;4)$. Mặt phẳng (P) cắt trục hoành Ox tại điểm có hoành độ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 103. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm có tọa độ là $A(3;0;0), B(0;-4;0), C(0;0;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $4x-3y+12z+12=0$. **B.** $4x+3y+12z-12=0$.
C. $4x-3y+12z-12=0$. **D.** $3x-4y+z-1=0$.

Câu 104. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với trục Ox và có phương trình tổng quát là $(\alpha)\colon (a-1)x+2y+z+a+3=0$. Mặt phẳng (α) cắt trục Oy tại điểm cách gốc tọa độ O một đoạn bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 105. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+2z-6=0$ và $(\beta)\colon 2x-4y+4z+6=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 106. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+2y+z-1=0$ và $(\beta)\colon 3x+y+2z-2=0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(30°;45°)$. **B.** $(45°;60°)$. **C.** $(60;80°)$. **D.** $(27°;30°)$.

Câu 107. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon ax+by+cz+a-3=0$. Biết rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng 2. Hãy tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 108. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+28=0$ là mặt phẳng cắt 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C sao cho $M(2;3;-1)$ là trực tâm tam giác ABC. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. -8. **B.** 13. **C.** -1. **D.** 4.

Câu 109. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+3=0$ là mặt phẳng cắt 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C. Trong đó a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn hệ thức $a+2b+3c=3$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 27.

Câu 110. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;2;2)$ và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C khác O. Khi thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 12. **B.** 15. **C.** 21. **D.** 16.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2020=0$. Số điểm nằm trên mặt phẳng (P) có tọa độ nguyên dương là

A. 2037171. **B.** C_{2021}^{4}. **C.** C_{2020}^{3}. **D.** C_{2019}^{3}.

Câu 112. Trong không gian $Oxyz$, gọi A, B, C lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2020=0$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc khối tứ diện $OABC$ là

A. C_{2019}^{2}. **B.** C_{2022}^{2}. **C.** C_{2021}^{3}. **D.** C_{2023}^{3}.

Câu 113. Trong không gian $Oxyz$, cho khối hộp chữ nhật (H) được giới hạn bởi các mặt phẳng có phương trình $x=1, x=3, y=-1, y=2, z=0, z=4$. Thể tích của khối hộp chữ nhật (H) bằng

A. 12. **B.** 36. **C.** 24. **D.** 6.

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;0), B(1;0;0), C(0;0;2), D(2;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D sao cho C, D cùng phía với (P). Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là

A. $2x+2y+z-2=0$. **B.** $x+y-1=0$.
C. $x+y+z-1=0$. **D.** $3x+3y-2z-3=0$.

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;1), B(0;-3;2), C(0;0;1), D(-3;0;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại điểm M có hoành độ lớn hơn -3. Hoành độ điểm M thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-\frac{5}{2})$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\frac{5}{2};-1)$.

Câu 116. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;2;0), B(1;1;-1), C(1;-1;1), D(3;0;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1), B(1;1;0), C(3;1;-2), D(3;-3;6)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 118. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;0;2)$, $D(m;n;0)$. Biết rằng có duy nhất một mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp $(m;n)$ thuộc số tự nhiên thỏa mãn bài toán?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 119. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(0;2;0)$, $D(m;n;2n\pm 3)$. Biết rằng tồn tại vô số mặt phẳng đi qua A, B và cách đều C, D. Giá trị của biểu thức $T=m+4n$ bằng

A. -6 hoặc -3. **B.** -6 hoặc -2. **C.** 1 hoặc -2. **D.** 0 hoặc -3.

Câu 120. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;2)$, $C(0;1;0)$, $D(2;-1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ D đến (P) và C, D cùng phía so với (P). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $-2x+4y+z+2=0$. **B.** $2y+z=0$.
C. $x+y-z+2=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

Câu 121. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(1;-1;0)$, $D(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ D đến (P) và C, D khác phía so với (P). Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $-x+2y+3z-7=0$. **B.** $x+y+z-6=0$.
C. $x+y-z+2=0$. **D.** $x-y-z+2=0$.

Câu 122. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(1;-1;0)$, $D(1;2;3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua A, B và khoảng cách từ C đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ D đến (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 1.

Câu 123. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$, $C(2;1;4)$, $D(4;3;-2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và cách đều ba điểm B, C, D?

A. 4. **B.** 1. **C.** vô số. **D.** 3.

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;0)$, $B(-2;1;1)$, $C(0;1;0)$, $D(3;0;-1)$. Tồn tại tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) cách đều cả 4 điểm A, B, C, D?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

Câu 125. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2), B(a;b;2a+2b-6)$. Khoảng cách AB nhỏ nhất bằng

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 126. Cho hai số thực a, b. Giá trị nhỏ nhất của $T=10a^2+2b^2-2a+4b+6ab+2021$ bằng

A. 2018. **B.** $\dfrac{24229}{12}$. **C.** $\dfrac{22177}{11}$. **D.** 2019.

Câu 127. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ $A(2;1;-3)$, $B(a;b+1;a+2b)$, $C(1;2b+1;2a-2)$. Gọi M là trung điểm của BC, khoảng cách nhỏ nhất từ A đến M tương ứng bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{39}{2\sqrt{94}}$. **C.** $\dfrac{41}{\sqrt{94}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 128. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ $A(a;0;c+2)$, $B(2;b;a-c)$, $C(0;b-1;c)$; trong đó a,b,c là ba số thực theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách nhỏ nhất từ gốc tọa độ O đến G bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2 Đường thẳng

Câu 129. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Ox là

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$.

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng Oy là

A. $\begin{cases}x=0\\y=3+t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=0\end{cases}$.

Câu 131. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3-3t\end{cases}$.

Vectơ nào dưới đây không phải là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(1;-2;3)$. **B.** $\vec{u}=(2;-4;6)$. **C.** $\vec{u}=(-1;2;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;-3)$.

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-1;2)$ và đi qua điểm $A(2;3;4)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ tương ứng là

A. $\Delta\colon 3x-y+2z-11=0$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

Câu 133. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc đường thẳng d?

A. $(3;1;-2)$. **B.** $(1;2;0)$. **C.** $(-1;3;-2)$. **D.** $(3;1;2)$.

Câu 134. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Điểm có hoành độ bằng 2 nằm trên đường thẳng d là

A. $(2;1;1)$. **B.** $(2;-1;-2)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(2;-3;-2)$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 135. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-4}{-2}$. Giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;1;4)$. **B.** $(6;7;0)$. **C.** $(4;1;0)$. **D.** $(3;2;0)$.

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$. Giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng tọa độ (Oyz) có tọa độ là

A. $(-7;-5;0)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(0;-1;-2)$. **D.** $(0;-5;1)$.

Câu 137. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. Giao của mặt phẳng (P) với đường thẳng d là điểm $A(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $(a+b+c)$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Câu 138. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;4;5)$ tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{5}$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+2}{5}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{2}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$.

Câu 139. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm O và A tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-3}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 140. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(-1;1;3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B tương ứng là

A. $\Delta\colon \dfrac{x+3}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\Delta\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\Delta\colon \dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\Delta\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 141. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;3;-2)$ đồng thời vuông góc với hai véc tơ $\vec{n_1}=(1;1;3)$, $\vec{n_2}=(-2;4;0)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

C. $d\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $d\colon \dfrac{x+1}{-12}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z+2}{6}$.

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(4;0;1)$ đồng thời vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-6=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d\colon \dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

Câu 143. Trong không gian giải tích $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;3;4)$ đồng thời song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$ và $(Q)\colon 3x+2y-z-1=0$. Phương trình tham số của d là

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $d\colon \begin{cases} x=-1+3t \\ y=3-4t \\ z=1+4t \end{cases}$. **B.** $d\colon \begin{cases} x=-1-3t \\ y=3-4t \\ z=4+t \end{cases}$. **C.** $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-4t \\ z=5+t \end{cases}$. **D.** $d\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=-4+3t \\ z=1+4t \end{cases}$.

Câu 144. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-1=0$ và mặt phẳng $(Q)\colon 2x-2y-z=0$. Đường thẳng Δ là giao điểm của hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình tham số là

A. $\Delta\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t \\ z=2 \end{cases}$. **B.** $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=-1+3t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{1}{3}+t \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases}$. **D.** $\Delta\colon \begin{cases} x=3-2t \\ y=-1+3t \\ z=2 \end{cases}$.

Câu 145. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng có phương trình $x-2y+3z-6=0$ và $2x+y-2z-4=0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+24}{8}=\dfrac{z+14}{5}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-3}$.
C. $d\colon \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{-8}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-7}{7}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 146. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d qua điểm $A(3;1;-2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+4z-5=0$ có phương trình chính tắc là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-4}{2}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$.
C. $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z+6}{4}$.

Câu 147. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+y-3z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$. Để đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m=5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Câu 148. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta)\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-3t \\ z=1+2t \end{cases}$ và $(d)\colon \dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$. Góc tạo bởi hai đường thẳng Δ và d nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(25°;31°)$. **B.** $(10°;24°)$. **C.** $(70°;75°)$. **D.** $(32°;68°)$.

Câu 149. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z=0$ và đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$. Góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(60°;70°)$. **B.** $(30°;36°)$. **C.** $(45°;60°)$. **D.** $(24°;30°)$.

Câu 150. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{m}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$. Để hai đường thẳng này vuông góc với nhau thì

A. $m\in\{9\}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=-1$.

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ và điểm $A(0;3;3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ là $H(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $(a+b+c)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 152. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(3;3;5)$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ tương ứng là

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 153. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ và điểm $A(0;3;3)$. Gọi điểm đối xứng với A qua đường thẳng Δ là $A'(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** -4. **C.** $\dfrac{11}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z-6=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Gọi điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P) là $A'(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** -2. **C.** -1. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 155. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1), B(1;3;-1)$. Đường thẳng d đi qua A, đường thẳng vuông góc với trục Oz và đồng thời khoảng cách từ B đến đường thẳng d lớn nhất. Phương trình tham số của đường thẳng d tương ứng là

A. $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$. **B.** $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $d\colon \begin{cases} x=2-3t \\ y=2-3t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 156. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-2=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{m}=\dfrac{y-3}{n}=\dfrac{z+1}{n-3}$. Để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì tích $m\cdot n$ bằng

A. 18. **B.** -8. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** 12.

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $\Delta_1\colon \dfrac{x+2}{m}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{m}=\dfrac{z-2}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của sin góc φ tạo bởi hai đường thẳng tương ứng là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** 0.

Câu 158. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\mathrm{d}\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-6=0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đường thẳng d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất. Khi đó dạng phương trình tổng quát của (α) có dạng $ax+by+z+d=0$. Khi đó giá trị của $a+b+d$ bằng

A. 6. **B.** -7. **C.** 5. **D.** -3.

Câu 159. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là đường thẳng có phương trình tham số tương ứng là

A. $d'\colon \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $d'\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $d'\colon \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3-2t \end{cases}$. **D.** $d'\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z0t \end{cases}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 160. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $d'\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{5}$.
B. $d'\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-4}$.
C. $d'\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-1}$.
D. $d'\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{5}$.

Câu 161. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-6=0$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $d'\colon \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.
B. $d'\colon \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$.
C. $d'\colon \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.
D. $d'\colon \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 162. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon mx+y+(m-1)z+1=0$ và điểm $A(2;1;0)$. Khoảng cách lớn nhất tính từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 163. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+1=0$ và điểm $A(4;1;2)$, biết mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Khoảng cách lớn nhất tính từ A đến mặt phẳng (P) bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 164. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+(2m-1)y+mz-2=0$ đi qua một đường thẳng d cố định. Biết rằng VTCP của đường thẳng d có dạng $\vec{u_d}=(a;2;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 0. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 6.

Câu 165. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;-2)$ và nằm trong mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2z-6=0$. Gọi M và m lần lượt là khoảng cách lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tính từ $B(2;1;0)$ đến đường thẳng d. Khi đó giá trị của biểu thức $(2M-3m)$ bằng

A. $2+\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+mt \\ y=2+nt \\ z=-2+(m-2n)t \end{cases}$. Gọi M và m lần lượt là khoảng cách lớn nhất và khoảng cách nhỏ nhất tính từ A đến đường thẳng d. Khi đó giá trị của biểu thức $(M+m\sqrt{6})$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 167. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;-1)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=a-at+1 \\ y=2-t \\ z=-b+bt \end{cases}$, với a và b là những tham số thực. Khi khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất thì biểu thức $T=a^2+b^2+4b-2a+2019$ đạt giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2020.

Câu 168. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-5y-3z-4=0$. Hoành độ giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng

A. 7. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 169. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon ax+by+z-12=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$. Biết $d\subset(\alpha)$, giá trị của biểu thức $T=2a-3b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 170. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 song song. **B.** d_1 và d_2 chéo nhau.
C. d_1 và d_2 cắt nhau. **D.** d_1 và d_2 trùng nhau.

Câu 171. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-2t\\ y=3t\\ z=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d\parallel(Oyz)$. **B.** $d\parallel(Oxy)$. **C.** $d\parallel(Oxz)$. **D.** $d\subset(Oxy)$.

Câu 172. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-3t\\ y=3-t\\ z=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x-y+z+1=0$. **B.** $x-2y-z+2=0$. **C.** $x+y+z+1=0$. **D.** $2x-y+z+3=0$.

Câu 173. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là

A. trùng nhau. **B.** song song. **C.** cắt nhau. **D.** chéo nhau.

Câu 174. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-a}{4}=\dfrac{y-b}{a}=\dfrac{z-1}{b}$. Biết d_1 và d_2 song song với nhau. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 175. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-1=0$ và $(\beta)\colon x+3y-6=0$. Giao điểm của d và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z-2=0$ có tung độ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** -3.

Câu 176. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm B và song song với hai mặt mặt phẳng (Oxy) và $(\alpha)\colon 2x-y-6z-5=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oyz). Phương trình của đường thẳng d' là

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=-1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 177. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Nhận xét đúng về vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

A. $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. **B.** Δ_1 cắt Δ_2. **C.** $\Delta_1 \equiv \Delta_2$. **D.** Δ_1 chéo Δ_2.

Câu 178. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-a}{m}=\dfrac{z-b}{n}$. Nếu hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trùng nhau thì ta có $(a+b+m+n)$ tương ứng bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** -12. **D.** -9.

Câu 179. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z-2}{n}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+m-1}{m}=\dfrac{y+8}{8}=\dfrac{z-4}{n-1}$. Để hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song (không tính trường hợp trùng nhau) thì số giá trị thực của tham số m thỏa mãn là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 180. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y+1}{b}=\dfrac{z-a}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-b+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Biết rằng hai đường thẳng này song song với nhau. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng tương ứng bằng

A. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 181. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$. Nhận xét đúng về vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

A. Hai đường thẳng cắt nhau tại $A(4;-1;-1)$. **B.** Hai đường thẳng cắt nhau tại $A(1;0;-3)$.
C. Hai đường thẳng chéo nhau. **D.** Hai đường thẳng song song với nhau.

Câu 182. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{26}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 183. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=2 \\ z=-2-t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng trên cắt mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y-23=0$ tại điểm $A(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $T=3a+2b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 184. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$. Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là $ax+by+cz-18=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 35. **B.** -36. **C.** -16. **D.** 27.

Câu 185. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Với a là tham số thực để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $I=(m;n;p)$. Giá trị của biểu thức $T=a+m+n+p$ bằng

A. 10. **B.** 11. **C.** 19. **D.** 8.

Câu 186. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $d_1\colon \dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Với a là tham số thực. Biết rằng tồn tại mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Giá trị của $T=a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** -7. **C.** -8. **D.** -10.

Câu 187. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và điểm $A(3;1;0)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và điểm A có vectơ pháp tuyến là

A. $(0;2;1)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $(1;0;3)$. **D.** $(-1;3;0)$.

Câu 188. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tổng quát là $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$. Giá trị biểu thức $(b+c+d)$ tương ứng bằng

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 189. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;2;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A, d cắt Δ và d vuông góc với Δ. Phương trình chính tắc của d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{2}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $d\colon \dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d\colon \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Câu 190. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(1;1;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-4}{2}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A, d cắt Δ và d vuông góc với $\overrightarrow{OB}$. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 4.

Câu 191. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-2;1)$ và hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. Biết rằng đường thẳng d đi qua A và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Phương trình chính tắc của đường thẳng d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 192. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;3;2)$ và hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Biết rằng đường thẳng d song song với $\vec{u}=(1;3;2)$ và cắt cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Phương trình chính tắc của d tương ứng là

A. $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-3}$.

C. $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. **D.** $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{z-1}{4}$.

Câu 193. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+11=0$. Biết rằng đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), d cắt và vuông góc với Δ. Điểm A nằm trên d và có hoành độ $x_A=-4$, tung độ của điểm A tương ứng là

A. 3. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -4.

Câu 194. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=-2+t\end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases}x=2-3t\\y=4\\z=-1+2t\end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases}x=1+t\\y=-2t\\z=3-t\end{cases}$, $d_4\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả bốn đường thẳng trên và có vectơ chỉ phương tương ứng là

A. $(2;-12;-11)$. **B.** $(4;-26;23)$. **C.** $(12;-21;11)$. **D.** $(-2;1;3)$.

Câu 195. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt d_1 : $\begin{cases}x=3-2t\\y=1+t\\z=-1+t\end{cases}$, d_2 : $\begin{cases}x=3-t\\y=3+t\\z=1+2t\end{cases}$, d_3 : $\begin{cases}x=4+2t\\y=3-t\\z=2-t\end{cases}$, d_4 : $\begin{cases}x=1+3t\\y=2\\z=1-2t\end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên có phương trình chính tắc tương ứng là

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{13}=\dfrac{z-3}{18}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{5}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. **D.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z}{-1}$.

Câu 196. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1\colon \begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=2t\end{cases}$, $d_2\colon \begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=-2+2t\end{cases}$, $d_3\colon \begin{cases}x=4+2t\\y=7+4t\\z=-3-t\end{cases}$, $d_4\colon \begin{cases}x=4+3t\\y=4+t\\z=1+t\end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng trên và cắt mặt phẳng tọa độ (Oyz) tại điểm có cao độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 197. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-1=0$ và điểm $A(-4;1;2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A cắt mặt phẳng (P) tại B, cắt trục Oy tại C sao cho B là trung điểm của AC. Phương trình tham số của đường thẳng d tương ứng là

A. $\begin{cases}x=-4+4t\\y=1+8t\\z=2-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2+t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}xx=-2+2t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=13+4t\\z=-1-t\end{cases}$.

Câu 198. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxz cho các điểm $A(4;1;3)$, $B(a;b;c)$ gọi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oxy) sao cho $AM=MB$. Giá trị của c bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 199. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;-3)$, $B(a;-1;2)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB Với mặt phẳng $(P)\colon x+3y-z-8=0$ sao cho $AB=3AM$. Tổng tất cả các giá trị thực của a thỏa mãn bài toán là

A. -13. **B.** 24. **C.** 6. **D.** -29.

Câu 200. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-3;-1), B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt à giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) sao cho $AM=MN=NP=PB$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng.

A. -2. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 201. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2,0,3)$, $B(a,b,c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy) sao cho $AM=2MN=3NP=PB$. Giá trị của biểu thức $T=3a+8b-11c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** -21. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 202. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1,0), B(a;b;c)$. Biết AB lần lượt cắt các mặt phẳng $(P)\colon x-2y-2=0, (Q)\colon y+z+2=0, (R)\colon x+y-2z-1=0$ tại M,N,P sao cho $AM=2MN=NP=PB$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** $-\dfrac{28}{5}$. **C.** $\dfrac{17}{5}$. **D.** $-\dfrac{31}{5}$.

Câu 203. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;a)$, $B(m;n;p)$. Gọi M,N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các trục tọa độ Ox, Oy sao cho $AM=MN=NB$. Giá trị của biểu thức $T=m+n+p$ tương ứng bằng.

A. $-\dfrac{11}{2}$. **B.** 2. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{9}{2}$.

3 Mặt cầu

Câu 204. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2my+2m^2-8m+8=0$. Số giá trị nguyên m để tồn tại mặt cầu (S) là

A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 205. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;0)$ và cắt mặt phẳng (Ozx) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. 2. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 206. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tiếp xúc với $(P)\colon x-y+z-6=0$ tại điểm $A(3;-2;1)$ và có bán kính bằng $3\sqrt{3}$. Hỏi (S) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;2;3)$. **B.** $N(3;-1;-1)$. **C.** $E(-2;0;4)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Câu 207. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-20=0$ và mặt $(P)\colon x-2y+2z-7=0$. Mặt phẳng (P) chia khối cầu (S) thành hai phần có thể tích V_1, V_2 $(V_1<V_2)$. Tỉ lệ $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{7}{236}$. **B.** $\dfrac{11}{360}$. **C.** $\dfrac{7}{243}$. **D.** $\dfrac{29}{3209}$.

Câu 208. Trong không gian hệ với trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-2z-11=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+m}{1}=\dfrac{z-2}{n}$. Biết rằng mọi mặt phẳng (P) đi qua d luôn cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính không đổi. Giá trị của biểu thức $T=2m+3n$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** -1.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 209. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=25$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-20=0$. Gọi điểm M nằm trên mặt cầu (S) và điểm N nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Giá trị MN nhỏ nhất bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 210. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z-18=0$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt cầu (S) và điểm N nằm trên mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 211. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-20=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+z^2=16$. Gọi d là đường thẳng có vectơ chỉ phương cùng phương với $\vec{u}=(2;1;1)$ cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N. Khoảng cách MN lớn nhất bằng

A. $12\sqrt{7}$. **B.** 12. **C.** $18\sqrt{6}$. **D.** $15\sqrt{3}$.

Câu 212. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+z-10=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+z^2=9$. Gọi d là đường thẳng song song với $\vec{u}=(1;2;-1)$ đồng thời cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N. Khoảng cách MN nhỏ nhất bằng

A. $4\sqrt{6}-6$. **B.** $2\sqrt{6}+1$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{3}-2$.

Câu 213. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-6=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=24$. Gọi d là đường thẳng song song với $\vec{u}=(1;2;1)$ đồng thời cắt (S) và (P) lần lượt tại M và N sao cho MN lớn nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a;b;c)$ thì giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 15. **B.** 21. **C.** -25. **D.** -39.

Câu 214. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-16=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=24$. Gọi d là đường thẳng song song với vectơ $\vec{u}=(1;2;1)$ đồng thời cắt mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) lần lượt tại M và N sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất. Nếu tọa độ điểm $N(a;b;c)$ thì giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

A. -11. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 0.

Câu 215. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N có tọa độ thỏa mãn hệ thức $x^3+x^2-4x+xy^2+xz^2+y^2+z^2-4=0$ và MN song song với đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$. Khoảng cách MN lớn nhất bằng

A. 4. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 216. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-18=0$, $(Q)\colon 3x+y+z-2=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$. Gọi M là một điểm thuộc mặt cầu (S) và N là một điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho MN vuông góc với mặt phẳng (Q). Lần lượt gọi α và β là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MN. Hỏi giá trị của $T=\alpha+2\beta$ bằng bao nhiêu?

A. $12\sqrt{10}$. **B.** $10\sqrt{10}$. **C.** $6\sqrt{10}$. **D.** $16\sqrt{5}$.

Câu 217. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z-16=0$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và vectơ $\vec{u}=(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng thay đổi cắt (S) tại hai điểm A và B sao cho $AB=6$, gọi A' và B' nằm trên mặt phẳng (P) sao cho AA' song song với BB'. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AA'+BB'$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 218. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $A(1;3;-1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz-5=0$ là mặt phẳng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** $\frac{17}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Câu 219. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$ và điểm $A(1;1;2)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz+4=0$ là mặt phẳng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng ngắn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. 1. **B.** -5. **C.** -2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 220. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A tiếp xúc với (S). Khoảng cách lớn nhất từ gốc O đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+\sqrt{3}$. **D.** $3-\sqrt{2}$.

Câu 221. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-3)^2+z^2=4$ và hai điểm $A(4;3;3)$, $B(2;1;0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A tiếp xúc với (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến (P) lần lượt là m và n. Khi đó $T=m+n$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(2;\frac{7}{2}\right)$.

Câu 222. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=9$; điểm $A(-3;1;-6)$ và đường thẳng $d\colon \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ A đến mặt phẳng (P) lần lượt là a và b. Giá trị của biểu thức $T=a+2b$ bằng

A. $9+\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}-2$. **C.** 9. **D.** $9-\sqrt{3}$.

Câu 223. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+z^2=4$; điểm $A(0;-2;-2)$; mặt phẳng $(P)\colon ax+by+(2a-3b)z+c=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ A đến mặt phẳng (P) lần lượt là α và β. Giá trị của $T=2\alpha+\beta$ bằng

A. $4+4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}+2$. **C.** $2\sqrt{6}+4$. **D.** 8.

Câu 224. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=1$; điểm $A(2;-2;-2)$; mặt phẳng $(P)\colon ax+by+(3a-b)z+c(-2-\sqrt{6})=0$ tiếp xúc với mặt cầu (S). Biết rằng a, b, c là những số nguyên dương. Khi khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 225. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon 2x+2y-z-5=0$ và $(Q)\colon 2x+2y-z+19=0$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời đi qua điểm $A(0;1;0)$. Quỹ tích tâm I của mặt cầu (S) là đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 226. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng là $(P)\colon x+2y-2z-9=0$ và hai điểm $A(-1;-1;2)$, $B(3;3;0)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) và đi qua B. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Quỹ tích điểm H là

A. mặt cầu có bán kính bằng 3. **B.** mặt cầu có bán kính bằng $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

C. đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{16}}{3}$. **D.** đường tròn có bán kính bằng 3.

Câu 227. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon mx+my-z-m+2=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P). Quỹ tích điểm H là

A. mặt cầu có bán kính bằng 2. **B.** mặt cầu có bán kính bằng $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

C. đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{38}}{4}$. **D.** đường tròn có bán kính bằng 2.

Câu 228. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A=(3;1;-1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;2;-3)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=-1 \end{cases}$. Gọi S là một điểm chạy trên đường thẳng d, gọi K là trực tâm của tam giác SBC. Quỹ tích điểm H là

A. mặt cầu có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** mặt cầu có bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. đường tròn có bán kính bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **D.** đường tròn có bán kính bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4 Kỹ năng phân giác toàn diện

Câu 229. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có tọa độ các điểm $A(-2;2;0)$, $B(1;-2;0)$, $C(2;0;4)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. $\frac{24}{11}$. **B.** $\frac{36}{11}$. **C.** $\frac{12}{11}$. **D.** $\frac{48}{11}$.

Câu 230. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(-1;1;3)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$. Giá trị của $T=a+b+c$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 231. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;0;-2)$, $C(0;0;-2)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC. Giá trị của $T=a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 232. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;-1;3)$, $C(1;-1;3)$. Bán kính đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 233. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(2;-2;2)$, $C(1;0;4)$. Phương trình chính tắc của đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ tương ứng bằng

A. $\triangle\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{5}$. **B.** $\triangle\colon \frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{-5}$.

C. $\triangle\colon \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-5}$. **D.** $\triangle\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{4}$.

Câu 234. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng là $\triangle_1\colon \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$ và đường thẳng $\triangle_2\colon \frac{x-2}{-22}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$. Phương trình tham số của đường phân giác góc nhọn tạo bởi $\triangle_1$, $\triangle_2$ là

A. $\begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3-2t \\ 2+t \\ 1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Câu 235. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 tương ứng là

A. $\begin{cases}x=3-t\\y=1+3t\\z=4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=1-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+3t\\z=4t\end{cases}$.

Câu 236. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{-4}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 tương ứng là

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=0-3t\\z=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=0+t\\z=2-4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+3t\\y=1+t\\z=-2-4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-3t\\z=-2\end{cases}$.

Câu 237. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2, điểm $B\in\Delta_1$ và $C\in\Delta_2$, điểm $D\in(Oxy)$ có tọa độ nguyên, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O bằng?

A. 20. **B.** $9\sqrt{2}$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 238. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ và đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$. Gọi A là giao điểm của Δ_1 và Δ_2, $B\in\Delta_1$ và $C\in\Delta_2$, điểm $D\in(\alpha)\colon 2x-y+4=0$, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi với $\widehat{BAC}>90^\circ$. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-8=0$ tại điểm E cách gốc O một đoạn OE bằng?

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{19}$.

Câu 239. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình chính tắc lần lượt là $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-6}{2}$. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2; hai điểm B và D lần lượt nằm trên đường thẳng d_1 và d_2; điểm $C(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-4=0$, sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi thỏa mãn $AC>BD$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng?

A. 16. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 17.

Câu 240. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-4=0$ và $(Q)\colon x+y-2z-3=0$. Quỹ tích những điểm cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng là hai mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-z-1=0$. **B.** $x-2y-z-4=0$ hoặc $3y-3z-1=0$.
C. $x-y-2z-7=0$ hoặc $y-3z+2=0$. **D.** $2x-y-z-7=0$ hoặc $3y-3z+1=0$.

Câu 241. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-1=0$ và $(Q)\colon x+y+z-2=0$. Mặt phân giác của góc nhị diện nhọn tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A. $2y+3=0$. **B.** $x+y+2z+1=0$. **C.** $2x+2z+1=0$. **D.** $3x-y-1=0$.

Câu 242. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-2=0$ và $(Q)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi (R) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tù tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q); nếu M là giao điểm của (R) với trục Ox thì hoành độ của điểm M tương ứng là

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. 2. **B.** -1. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 243. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3-t \\ y = -2+2t \\ z = -1+t \end{cases}$. Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng là hai mặt phẳng:

A. $(\alpha) : x+y-z = 0;\ (\beta) : 3x-3y-2z-6 = 0$.
B. $(\alpha) : x+y-2 = 0;\ (\beta) : 3x-3y-2z-6 = 0$.
C. $(\alpha) : 3x+y-1 = 0; (\beta) : 3x+3y-z-2 = 0$.
D. $(\alpha) : x+y-2 = 0; (\beta) : 2x-3y-2z-7 = 0$.

Câu 244. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{3}$, điểm $A(2;3;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 những góc bằng nhau, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d lớn nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ nguyên $(m;n;p)$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m+n+p$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** -3. **D.** 6.

Câu 245. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ và $d_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, điểm $A(1;1;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, tạo với hai đường thẳng d_1, d_2 những góc là α và β sao cho $\cos\alpha = 2\cos\beta$; khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d lớn nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm có tọa độ nguyên $(m;n;p)$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m+n+p$ bằng

A. 8. **B.** -3. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 246. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1), B(0;3;3)$; $C(-2;1;-3)$. Quỹ tích những điểm cách đều ba điểm A, B, C là đường thẳng $d : \dfrac{x-m}{1} = \dfrac{y+n}{a} = \dfrac{z-2}{b}$. Giá trị của biểu thức $T = a+b+m+n$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 247. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;3;2), B(1;2;-4)$; $C(2;1;3)$. Gọi d là đường thẳng chứa tất cả các điểm cách đều ba cạnh AB, BC, CA. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng d?

A. 1. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 248. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;2), B(0;1;3); C(4;1;3)$. Gọi $M = (a;b;c)$ và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên ba cạnh AB, BC, CA. Biết rằng H, I, K nằm trong đoạn AB, BC, CA và $MH = MI = MK$. Quỹ tích điểm M là đường thẳng $d : \begin{cases} x = m-at \\ y = n+2t \\ z = 1+bt. \end{cases}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = m+n+a+b$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** -1. **D.** -4.

Câu 249. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng là $(P) : x+2y-2z-8 = 0, (Q) : 3x+y+z-1 = 0, (R) : mx+ny+pz-1 = 0$. Biết rằng tồn tại đúng hai đường thẳng cách đều ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = m^2+2n^2+6p+20$ bằng

A. $\dfrac{211}{11}$. **B.** 16. **C.** 15. **D.** $\dfrac{201}{11}$.

5 Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Câu 250. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$ có phương trình tương ứng là

A. $(S):x^2+y^2+(z-2\sqrt{2})^2=6$.
B. $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2\sqrt{2}$.
C. $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$.
D. $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=8$.

Câu 251. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(1;3;0)$, $B(5;-1;2)$ có phương trình tương ứng là

A. $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. **B.** $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=36$.
C. $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 252. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $R=10$. **B.** có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.
C. có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$. **D.** có tâm $I(2;1;3)$ và bán kính $R=10$.

Câu 253. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z=16$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R=4$. **B.** có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R=16$.
C. có tâm $I(1;-2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{37}$. **D.** có tâm $I(-2;4;8)$ và bán kính $R=5$.

Câu 254. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):2x^2+2y^2+2z^2-4x-4y+12z-10=0$. Phát biểu đúng về mặt cầu (S) là

A. có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=4$. **B.** có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=5$.
C. có tâm $I(1;1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$. **D.** có tâm $I(-1;-1;3)$ và bán kính $R=8$.

Câu 255. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$ và điểm $M(2;-3;1)$. Phát biểu đúng là

A. Điểm M nằm trên mặt cầu (S).
B. Điểm M nằm trong hình cầu giới hạn bởi (S).
C. Điểm M nằm ngoài hình cầu (S).
D. Không xác định được vị trí tương đối của điểm M đối với (S).

Câu 256. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$ và $M(m;m-1;2)$. Để M thuộc mặt cầu (S) thì giá trị thực lớn hơn 1 của m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

Câu 257. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$. Điểm $A(3;1;m)$ và $B(n;p;-1)$ là một đường kính của mặt cầu (S). Tính $T=m+n+p$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 258. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên trục Ox và đi qua hai điểm $A(3;1;3)$, $B(-2;3;4)$ có bán kính R tương ứng bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 4.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 259. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên $d: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$ và đi qua hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(4;1;1)$ có phương trình tương ứng là

A. $(S): (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$.
B. $(S): (x+2)^2+y^2+(z-1)^2=9$.
C. $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=16$.
D. $(S): x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25$.

Câu 260. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên $(P): x-2y-z-6=0$ và đi qua ba điểm $A(1;2;1)$, $B(-1;-2;1)$, $C(3;2;1)$ có phương trình tương ứng

A. $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=19$.
B. $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=19$.
C. $(S): x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=25$.
D. $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$.

Câu 261. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm có tọa độ $A(3;0;0)$, $B(0;1;2)$, $C(2;0;-1)$, $D(-2;1;3)$ có phương trình là

A. (S): $x^2+y^2+2z^2-2x+6y-16=0$.
B. (S): $x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z-16=0$.
C. (S): $3x^2+3y^2+3z^2+5x+61y-17z-42=0$.
D. (S): $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.

Câu 262. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;0)$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

A. (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=4$.
B. (S): $(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=1$.
C. (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=3$.
D. (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=1$.

Câu 263. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-3;1;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. (S): $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.
B. (S): $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.
C. (S): $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$.
D. (S): $(x+3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$.

Câu 264. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng (α): $2x-y-2z+m=0$. Để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) thì giá trị dương của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(10;12)$.
B. $(7;10)$.
C. $(12;15)$.
D. $(15;18)$.

Câu 265. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α): $2x+2y-z+6=0$ có phương trình là

A. (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+1=0$.
B. (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4z+1=0$.
C. (S): $x^2+y^2+z^2-4x-2z+1=0$.
D. (S): $x^2+y^2+z^2-6x-4z-9=0$.

Câu 266. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng (α): $2x-y-2z-18=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).
B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).
C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.
D. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường thẳng.

Câu 267. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng (P): $2x-y-2z+m=0$. Để (S) giao với (P) tại đúng một điểm thì giá trị thực dương của m bằng

A. $m=13$.
B. $m=2$.
C. $m=3$.
D. $m=5$.

Câu 268. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S): $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng (α): $x+y-z+22=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. Mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).
B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).
C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 1.
D. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 269. Trong không gian $Oxyz$, cho hệ thức $x^2+y^2+z^2-2x+2my-6m+2m^2+1=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ thức trên là một phương trình mặt cầu?

A. 4. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 5.

Câu 270. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$ và điểm $A(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách AM lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=2a+b+c$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 19. **D.** 17.

Câu 271. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và điểm $A(1;-2;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách AM nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 13.

Câu 272. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z-6=0$. Phát biểu đúng về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) là

A. mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).
B. mặt phẳng (α) không cắt mặt cầu (S).
C. chúng cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 4 và tâm $H(2;2;2)$.
D. chúng cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 và tâm $H(1;1;-2)$.

Câu 273. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+2y-2z-10=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I=(2;1;3)$ cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 2. Phương trình mặt cầu (S) tương ứng là

A. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=20$.
B. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=12$.
C. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=12$.
D. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 274. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=16$. Phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại điểm $A(4;1;-2)$ có dạng $ax+by+cz+2=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 6. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 275. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y-z-6=0$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với (P) tại điểm $A(2;2;0)$ và đi qua điểm $B(1;3;-2)$. Bán kính của (S) bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 276. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=25$. Cho mặt phẳng $(\alpha):2x-2y-z+2019=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Biết rằng mặt phẳng (β) cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ tại điểm $A(a;b;c)$ có các tọa độ nguyên. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 277. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. Gọi $(\alpha):ax+by+cz+6=0$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=2a+b+c$ bằng

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** -13.

Câu 278. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 3 và tiếp xúc với (Oxy) đồng thời đi qua ba điểm $A(2\,;\,1\,;\,2), B(0\,;\,3\,;\,2), C(0\,;\,1\,;\,4)$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 279. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 3 và tiếp xúc với hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) đồng thời đi qua hai điểm $A(-1\,;\,1\,;\,3), B(-4\,;\,0\,;\,1)$. Bán kính R của (S) có giá trị R bằng

A. $4+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{7}$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 280. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi (S) là mặt cầu có bán kính lớn hơn 4 và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ đồng thời đi qua điểm $A(5\,;\,1\,;\,-2)$. Biết bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 281. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua $A(2\,;\,1\,;\,0)$ có bán kính $R>3$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $x=3\,;\,y=-1\,;\,z=4$. Bán kính của mặt cầu (S) tương ứng là

A. $\dfrac{7+\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{6+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 282. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, , cho mặt cầu (S) đi qua $A(5\,;\,-2\,;\,3)$ có bán kính $R<3$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $x=2\,;\,y=-3\,;\,z=1$. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** $1+\sqrt{2}$. **C.** $3-\sqrt{2}$. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Câu 283. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon ax-4y+cz+d=0$ với d là số nguyên. Biết mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(7;-1;1), B(11;2;0)$ và đồng thời (α) tiếp xúc với mặt cầu (S). Giá trị của biểu thức $T=(a+c+d)$ tương ứng bằng

A. 12. **B.** -15. **C.** -18. **D.** -22.

Câu 284. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-6y-3=0$ và điểm $A(1;2;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) cắt trục Oz tại điểm cách gốc O một đoàn bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 285. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$ và hai điểm $A(1;1;-2), B(2;-1;1)$. Gọi $(P)\colon ax+by+cz+2=0$ là mặt phẳng đi qua mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất. Giá trị của biểu thức $T=a+b+2c$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 286. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=36$ và hai điểm $A(3;2;2), B(4;4;3)$. Gọi $(P)\colon 2x+by+cz+d=0$ là mặt phẳng đi qua mặt phẳng đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức $T=b+c+d$ bằng

A. -9. **B.** 11. **C.** -12. **D.** -6.

Câu 287. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại hai điểm M và N. Độ dài dây cung MN có giá trị bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 288. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=25$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(7;0;1), B(-1;-6;2)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm có hoành độ dương tương ứng là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 289. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=4 \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+y^2+z^2=10$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) lần lượt tại hai điểm M và N. Phương trình đường thẳng MN đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(1;-2;4)$. **B.** $(1;1;2)$. **C.** $(3;-1;2)$. **D.** $(0;0;4)$.

Câu 290. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S). Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q). Giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 291. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và điểm $A(-3;1;0)$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt đi qua A, tiếp xúc với mặt cầu (S) tại hai điểm M và N. Hãy tìm giá trị lớn nhất của MN

A. 3. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{24}{5}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 292. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y-z+6=0$, mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=4$ và điểm $A(1;-1;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với (α). Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại hai điểm M và N. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của MN

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 293. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $(P)\colon 2x+y-2z-3=0$ và $(Q)\colon 2x+y-2z+9=0$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời đi qua hai điểm $A(1;1;2), B(3;-1;2)$. Biết tâm mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$ có các thành phần a,b,c là những số nguyên. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -4.

6 Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Câu 294. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2;1;3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với trục hoành Ox có phương trình tương ứng là

A. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14$.
C. $(S)\colon (x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=10$. **D.** $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=10$.

Câu 295. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=36$. Số giao điểm của mặt cầu (S) với trục Ox là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** vô số.

Câu 296. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-4)$ và tiếp xúc với trục Oz có phương trình tương ứng là

A. $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$. **B.** $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=20$.
C. $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$. **D.** $(S)\colon (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=13$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 297. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{x+2}{-2}$ có phương trình tương ứng là

A. $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=19$.
B. $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$.
C. $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.
D. $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=18$.

Câu 298. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và cắt trục Oy tại hai điểm cách nhau một đoạn bằng 6. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. $\sqrt{22}$.
B. 5.
C. $2+2\sqrt{2}$.
D. $\sqrt{14}$.

Câu 299. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z-m)^2=25$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Ox. Tích tất cả các phần tử của tập hợp X là

A. 25.
B. -6.
C. -25.
D. 12.

Câu 300. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-m)^2=16$. Gọi X là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Tổng tất cả các phần tử của tập X là

A. $-\dfrac{48}{13}$.
B. $\dfrac{13}{48}$.
C. $\dfrac{48}{13}$.
D. $-\dfrac{13}{48}$.

Câu 301. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng d tại $A(-2;0;-1)$ và đi qua hai điểm $B(2;0;-1)$, $C(0;4;-1)$. Bán kính của (S) là

A. $2\sqrt{2}$.
B. $3\sqrt{2}$.
C. $\sqrt{6}$.
D. 3.

Câu 302. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R=3$. Biết rằng (S) tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm $A(3;-1;0)$ và đi qua điểm $B(2;3;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+c$.

A. -3.
B. 3.
C. 5.
D. 4.

Câu 303. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu (S) có tâm $I(1;b;c)$ và bán kính bằng 3 tiếp xúc với hai trục Ox và Oy?

A. 4.
B. 1.
C. 3.
D. 8.

Câu 304. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a,b;c)$ và bán kính R (với $R>2$), tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm $A(2;1;-3)$. Bán kính R bằng

A. $6\sqrt{2}$.
B. $2+4\sqrt{3}$.
C. $6\sqrt{2}+2\sqrt{11}$.
D. $2+2\sqrt{2}$.

Câu 305. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R (với $R<2$), tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm $A=(-3;2;2)$. Giá trị $T=b+c-a$ bằng

A. $7-4\sqrt{2}$.
B. $21-12\sqrt{2}$.
C. $6-3\sqrt{2}$.
D. $18-9\sqrt{3}$.

Câu 306. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A=(3;-1;1)$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A cắt (S) theo một dây cung có độ dài lớn nhất tương ứng là

A. $\begin{cases} x=6+3t \\ y=-2-t \\ z=4+3t \end{cases}$.
B. $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=-2-3. \end{cases}$.
D. $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Câu 307. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-6=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-4)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=25$, điểm $A(2;2;0)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) đi qua A và cắt (S) theo dây cung MN. Giá trị lớn nhất của MN bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{21}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 308. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-8=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$, điểm $A=(4;1;1)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong măt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây cung dài nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(5;2;2)$. **B.** $(6;1;0)$. **C.** $(1;-2;-2)$. **D.** $(3;0;2)$.

Câu 309. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+2z-8=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$, điểm $A=(4;1;1)$. Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A sẽ cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Câu 310. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -2x+2y+z-5=0$ và mặ cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+z^2=25$, điểm $A=(0,3,-1)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Nếu $\vec{u}=(a;b;3)$ là một vectơ chỉ phương của d thì giá trị của biểu thức $T=2a+3b$ bằng

A. 27. **B.** 33. **C.** 17. **D.** 39.

Câu 311. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+6=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25$, điểm $A=(1;2;-3)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Nếu phương trình của d là $\dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y-m}{b}=\dfrac{z-n}{2}$ thì giá trị của biểu thức $T=a+b+m+n$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -4. **D.** -2.

Câu 312. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25$ và điểm $A=(2;1;-1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Khi đó đường thẳng d sẽ luôn nằm trên một mặt phẳng cố định có phương trình $ax+y+cz+d=0$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -3.

Câu 313. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=9$ và hai điểm $A=(1;-1;1)$, $B=(3;0;-2)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo một dây cung nhỏ nhất. Khoảng cách nhỏ nhất từ B đến d có bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 314. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$ và hai điểm $A=(2;3;2)$, $B=(4;1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất. Gọi khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất từ điểm B đến đường thẳng d lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $T=13\alpha+\sqrt{13}\beta$ bằng

A. 14. **B.** $10\sqrt{13}$. **C.** 13. **D.** 26.

Câu 315. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=25$ và hai điểm $A=(1;2;0)$. Gọi $d\colon \begin{cases} x=m+at \\ y=n+3t \\ z=3+ct \end{cases}$ là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất đồng thời song song với mặt phẳng (Oyz). Giá trị của biểu thức $T=a+c+m+n$ bằng

A. -5. **B.** -7. **C.** 11. **D.** -3.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 316. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=40$ và hai điểm $A=(1;-2;0)$, $B=(-1;2;0)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và cắt (S) theo dây một dây cung nhỏ nhất đồng thời khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $(3;-6;0)$. **B.** $(-1;3;2)$. **C.** $(4;-4;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 317. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I tiếp xúc đồng thời với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$ và trục hoành Ox. Hỏi quỹ tích tâm I là mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x+y-2=0$. **B.** $y-2=0$. **C.** $y-1=0$. **D.** $x+z-1=0$.

Câu 318. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;2a+b-1)$ tiếp xúc đồng thời với đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ và trục tung Oy . Khi bán kính mặt cầu (S) nhỏ nhất thì giá trị của biểu thức $T=3a-b$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Câu 319. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Quỹ tích tâm I là mặt phẳng

A. $(P)\colon 35x-16y-13z-30=0$. **B.** $(P)\colon 12x-21y-10z-13=0$.
C. $(P)\colon x+3y-z-11=0$. **D.** $(P)\colon 4x-3y+z-6=0$.

Câu 320. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 321. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Quỹ tích tâm I là hai mặt phẳng có phương trình là

A. $(P_1)\colon 3x+2y-z-8=0$, $(P_2)\colon x+3z-2=0$.
B. $(P_1)\colon x+3y-2z-1=0$, $(P_2)\colon x+3z-2=0$.
C. $(P_1)\colon 3x+y-z-7=0$, $(P_2)\colon 2x+y+1=0$.
D. $(P_1)\colon x+2y-z=0$, $(P_2)\colon 2x+z-3=0$.

Câu 322. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2. Khoảng cách OI nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 323. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(a;b;a+b-2)$ và bán kính

R; (S) tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N sao cho $\widehat{MAN}$ nhọn, với $A(3;2;1)$. Bán kính R đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 324. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình là $d_1\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_3\colon \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và bán kính R, biết rằng (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3. Tính R.

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{63}$.

Câu 325. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng có phương trình là $d_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$, $d_2: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d_3: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I=(a;2b;a+b-3)$ và bán kính R, biết rằng (S) tiếp xúc với cả ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3. Giá trị của biểu thức $T=3a+2b$ bằng

A. 11. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 326. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;2;2)$; $B(2;0;4)$; $C(2;4;4)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC tại những tiếp điểm nằm trong các cạnh AB, BC, CA. Hỏi tâm I chạy trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}+2t \\ y=1 \\ z=\dfrac{4}{3}-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=\dfrac{9}{5}+2t \\ y=2 \\ z=\dfrac{16}{5}-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 327. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;0;-3)$; $B(1;1;2)$; $C(2;1;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Biết rằng I nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-8=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu (S) thỏa mãn?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 328. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm có tọa độ lần lượt là $A(1;2;-1)$; $B(2;0;1)$; $C(2;4;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

PHẦN III

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

12 TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12

Chương 6

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 6

§1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 18 Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của A với điều kiện B và kí hiệu là $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Cho hai biến cố A và B bất kì, với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$.

2 Công thức nhân xác suất

Định nghĩa 19 Với hai biến cố A và B bất kì, ta có

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B).$$

⚠ *Vì $AB = BA$ nên với hai biến cố A và B bất kì, ta cũng có*

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A).$$

⚠ *Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì*

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Tính xác suất có điều kiện theo định nghĩa

- Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố B khi biến cố A đã xảy ra được gọi là **xác suất của B với điều kiện A**, kí hiệu là $\mathrm{P}(B \mid A)$.
- Sử dụng định nghĩa để tính xác suất có điều kiện (áp dụng với các bài có thể tìm được số phần tử của các biến cố).

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Mức độ 1). Một hộp có 5 viên bi cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi và không hoàn lại. Tính xác suất để lấy được

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

viên bi thứ hai có màu xanh, biết rằng viên bi thứ nhất có màu đỏ.

Ví dụ 2 (Mức độ 2). Câu lạc bộ cờ của nhà trường gồm 35 thành viên, mỗi thành viên biết chơi ít nhất một trong hai môn cờ vua hoặc cờ tướng. Biết rằng có 25 thành viên biết chơi cờ vua và 20 thành viên biết chơi cờ tướng. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của câu lạc bộ. Tính xác suất thành viên được chọn biết chơi cờ vua, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ tướng.

A. 0,3. **B.** 0,4. **C.** 0,5. **D.** 0,6.

Ví dụ 3. Một hộp chứa ba tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 3. Bạn Hà lấy ra một cách ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, bỏ thẻ đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một thẻ nữa. Xét các biến cố A: "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1"; B: "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 2"; C : "Thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ".

Phát biểu	Đ	S
a) Không gian mẫu của phép thử có số kết quả là 6.		
b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A, B, C lần lượt là $\{(1;2);(1;3)\}$; $\{(2;1);(2;3)\}$; $\{(3;1);(1;3);(2;3)\}$.		
c) Xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1 là $\frac{1}{3}$.		
d) Xác suất để thẻ lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ, biết rằng thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 2 là 1.		

Ví dụ 4 (Mức độ 1). Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Biết rằng $\mathrm{P}(A \mid B)$ sau khi *làm tròn đến hàng phần trăm* có dạng $0,\overline{ab}$. Hãy tính $a+b$.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 1. Có hai hộp chứa các thẻ được đánh số. Hộp thứ nhất có các thẻ được đánh số từ 1 đến 4, hộp thứ hai có các thẻ được đánh số từ 5 đến 6. Các thẻ có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Phương lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai. Sau đó bạn lại lấy ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai. Liệt kê các kết quả của phép thử biết lần thứ nhất bạn Phương lấy được một thẻ đánh số chẵn.

Bài 2. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi trong hộp, không trả lại. Sau đó Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Tùng lấy được bút bi xanh nếu biết rằng Sơn đã lấy được bút bi đen.

Bài 3. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Bài 4. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$.

Bài 5. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đỏ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi xanh.

Bài 6. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đỏ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi đỏ.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1 (Mức độ 1). Từ một hộp có 4 tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Tiên lấy ra một cách ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, bỏ thẻ đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một thẻ nữa. Xét biến cố A là "Thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1". Số các kết quả thuận lợi của biến cố A là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2 (Mức độ 1). Từ một hộp có 4 viên bi xanh cùng kích thước và khối lượng được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Phúc lấy ra một cách ngẫu nhiên một viên bi từ hộp, bỏ viên bi đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một viên bi nữa. Xét biến cố A là "Viên bi lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ". Số các kết quả thuận lợi của biến cố A là

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 3 (Mức độ 2). Hộp thứ nhất chứa 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đỏ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi xanh.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 4 (Mức độ 2). Hộp thứ nhất chứa 6 viên bi đánh số từ 1 đến 6. Hộp thứ hai chứa 8 viên bi đánh số từ 7 đến 11. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Phong lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đánh số lẻ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi đánh số chẵn.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 5 (Mức độ 3). Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 bạn học sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 14 bạn học sinh đạt điểm giỏi môn Lý và 4 bạn học sinh không đạt điểm giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp học này. Xác suất để học sinh được chọn giỏi môn Toán, biết rằng học sinh đó giỏi môn Lý là

A. $\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{14}{37}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 6. Một lớp có 35 học sinh trong đó có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Đầu tiên giáo viên chủ nhiệm chọn một học sinh để phụ giáo viên đem các đề cương cho các bạn học sinh, tuy nhiên vì số lượng đề cương quá nhiều nên giáo viên lại gọi tiếp một bạn học sinh nữa. Gọi A: "Bạn học sinh thứ nhất được chọn là một học sinh nam"; B: "Bạn học sinh thứ hai được chọn là một bạn học sinh nam".

Phát biểu	Đ	S
a) Không gian mẫu của phép thử có số kết quả là 1190.		

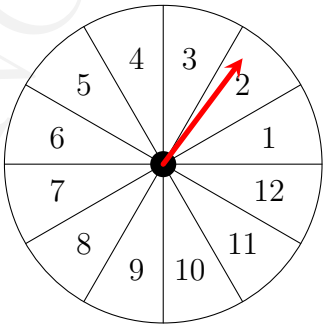
TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
b) Số kết quả thuận lợi của biến cố B là 19.		
c) Xác suất để bạn học sinh thứ hai là một học sinh nam, biết bạn học sinh thứ nhất cũng là một học sinh nam là $\frac{19}{34}$.		
d) Xác suất để bạn học sinh thứ nhất là một học sinh nữ, biết bạn học sinh thứ hai là một học sinh nam là $\frac{1}{2}$.		

Câu 7.

Một vòng quay được chia thành 12 phần bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 12 như hình vẽ bên. Xét phép thử An và Bình lần lượt quay vòng quay trên. Gọi A là biến cố "An quay được số chia hết cho 3"; B là biến cố "An quay được số chia hết cho 5"; C là biến cố "Bình quay được số chẵn".



Phát biểu	Đ	S
a) Không gian mẫu của phép thử có số kết quả là 24.		
b) Số kết quả thuận lợi cho biến cố A, B, C lần lượt là 48, 24, 72.		
c) Xác suất để Bình quay được số chẵn, biết An quay được số chia hết cho 3 là $\frac{1}{6}$.		
d) Xác suất để An quay được số chia hết cho 5, biết Bình quay được số lẻ là $\frac{1}{12}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 8 (Mức độ 1). Một hộp chứa 2 bi xanh và 3 bi đỏ có cùng cân nặng và kích thước. Xét phép thử bốc 2 lần liên tiếp, lần thứ nhất bốc một viên bi, ghi lại màu sắc sau đó bỏ lại viên bi đã chọn vào hộp và bốc lần thứ hai. Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất bốc được viên bi xanh". Tìm số kết quả thuận lợi của biến cố A. KQ: | | | | |

Câu 9 (Mức độ 2). Một hộp chứa 6 bi xanh và 8 bi đỏ có cùng cân nặng và kích thước. Xét phép thử bốc 2 lần liên tiếp, lần thứ nhất bốc một viên bi, ghi lại màu sắc sau đó bỏ lại viên bi đã chọn vào hộp và bốc lần thứ hai. Tính theo phần trăm xác suất để lần thứ hai bốc được bi đỏ, biết lần thứ nhất bốc được bi xanh *(làm tròn đến hàng đơn vị)*. KQ: | | | | |

Câu 10 (Mức độ 2). Một hộp chứa 7 bi xanh và 5 bi đỏ có cùng cân nặng và kích thước. Xét phép thử bốc 2 lần liên tiếp không hoàn lại. Tính theo phần trăm xác suất để lần thứ hai bốc được bi xanh, biết lần thứ nhất bốc được bi đỏ *(làm tròn đến hàng đơn vị)*. KQ: | | | | |

Câu 11 (Mức độ 2). Một hộp chứa 6 bi xanh và 10 bi đỏ có cùng cân nặng và kích thước. Xét phép thử bốc 2 lần liên tiếp không hoàn lại. Tính theo phần trăm xác suất để lần thứ hai bốc được bi xanh, biết lần thứ nhất bốc được bi xanh *(làm tròn đến hàng đơn vị)*. KQ: | | | | |

Câu 12 (Mức độ 2). Lớp 10A có 35 học sinh. Mỗi học sinh đều biết chơi cờ vua hoặc cờ tướng với 25 em biết chơi cờ vua và 17 em biết chơi cờ tướng. Chọn một học sinh bất kỳ trong lớp, xác suất để học sinh được chọn biết chơi cờ tướng, biết rằng học sinh đó biết chơi cờ vua bằng $\frac{14}{a}$ với $a \in \mathbb{N}$. Tìm a.

KQ: | | | | |

DẠNG 2 Xác suất có điều kiện, sơ đồ hình cây

- Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì xác suất của biến cố A với điều kiện B được xác định bởi công thức

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

- Trên sơ đồ hình cây:
  - Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.
  - Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 5. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ ở trên.

Ví dụ 6. Chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $\mathrm{P}(\overline{A} \mid B) = \mathrm{P}(\overline{A})$ và $\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = \mathrm{P}(A)$.

Ví dụ 7 (Bảng dữ liệu thống kê 2×2). Một viện nghiên cứu về an toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Giả sử viện đã xem xét 577 006 vụ tai nạn giao thông ô tô và việc thắt dây an toàn của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Kết quả cho thấy:

- Trong số những người lái xe có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong và 412 368 người sống sót;
- Trong số những người lái xe không thắt dây an toàn, có 1 601 người tử vong và 162 527 người sống sót.

Kết quả trên được trình bày dưới dạng bảng gồm 2 dòng và 2 cột như dưới đây, được gọi là bảng dữ liệu thống kê 2×2:

Thắt dây an toàn \ Kết quả	Tử vong	Sống sót
Không	1 601	162 527
Có	510	412 368

Chọn ngẫu nhiên một người lái xe trong số 577 006 người bị tai nạn giao thông

a) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp có thắt dây an toàn.

c) So sánh hai xác suất ở câu a và câu b rồi rút ra kết luận.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 8. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$ bằng định nghĩa và bằng công thức.

Ví dụ 9.

a) Từ công thức tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ ở trên, chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập với $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$ và $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$.

b) Từ định nghĩa xác suất có điều kiện và định nghĩa về tính độc lập của hai biến cố, hãy chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$ và $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B)$.

Ví dụ 10.

Một công ty dược phẩm muốn so sánh tác dụng điều trị bệnh X của hai loại thuốc M và N. Công ty đã tiến hành thử nghiệm với 4 000 bệnh nhân mắc bệnh X trong đó 2 400 bệnh nhân dùng thuốc M, 1 600 bệnh nhân còn lại dùng thuốc N. Kết quả được cho trong bảng dữ liệu thống kê 2×2 như hình bên.

Kết quả \ Thuốc	M	N
Khỏi bệnh	1 600	1 200
Không khỏi bệnh	800	400

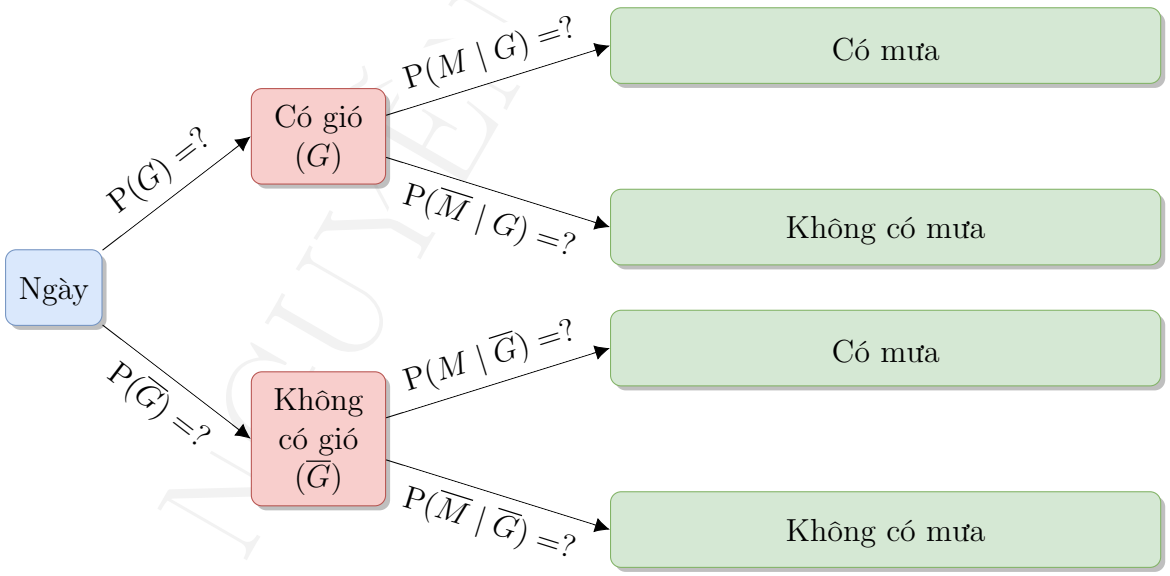
Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong số 4 000 bệnh nhân thử nghiệm sau khi uống thuốc. Tính xác suất để bệnh nhân đó

a) uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh;

b) uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh.

Ví dụ 11. Theo kết quả từ trạm nghiên cứu khí hậu tại địa phương T, xác suất để một ngày có gió là 0,6; nếu ngày có gió thì xác suất có mưa là 0,4; nếu ngày không có gió thì xác suất có mưa là 0,2. Gọi G là biến cố "Ngày có gió" và M là biến cố Ngày có mưa".

a) Vẽ lại sơ đồ hình cây sau và điền vào dấu ? các giá trị xác suất tương ứng.



b) Tính xác suất $\mathrm{P}(GM)$ và $\mathrm{P}(G\overline{M})$. Nêu ý nghĩa của các xác suất này.

Ví dụ 12 (Mức độ 2). Một hộp có 8 bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra, có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Ví dụ 13 (Mức độ 2). Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lí kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lí có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lí không chứa hàng cấm. Tỉ lệ các kiện hành lí có chứa hàng cấm là 1%. Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lí để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố M: "Kiện hành lí có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo "; N : "Kiện hành lí không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo".

Ví dụ 14. Trong cuộc khảo sát trên một nhóm học sinh gồm các bạn thích trà sữa hoặc kem, người ta có được kết quả sau: Có 56% số học sinh thích kem, 68% số học sinh thích trà sữa, 24% số học sinh thích cả trà sữa và kem. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trong nhóm được khảo sát này. Tính xác suất để chọn được học sinh thích kem, biết rằng học sinh đó thích trà sữa.

Ví dụ 15. Xét phép thử gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất hai lần, quan sát số chấm xuất hiện trong mỗi lần gieo.
Tính xác suất để tổng số chấm trong hai lần gieo là 7, biết rằng lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt 5 chấm.

Ví dụ 16. Một công ty vừa ra mắt sản phẩm X và tổ chức ngày trải nghiệm sản phẩm. Họ thống kê được trong 200 người đến tham quan ngày trải nghiệm có 60 người là nam giới và 140 người là nữ giới. Trong số những người được thống kê này, có 120 người mua sản phẩm X, gồm 40 khách hàng nam và 80 khách hàng nữ, còn lại là không mua sản phẩm X. Chọn ngẫu nhiên một người trong số 200 người được thống kê. Tính xác suất để người này mua sản phẩm X, biết rằng người được chọn là nữ giới (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Ví dụ 17. Công ty nước giải khát X tổ chức một chương trình khuyến mại như sau: Trong mỗi thùng 24 chai nước giải khát đều có hai chai trúng thưởng (giải thưởng được viết ở dưới nắp chai), người tham gia chương trình được mở nắp một cách ngẫu nhiên lần lượt hai chai trong một thùng. Tính xác suất để một người tham gia chương trình mở được cả hai chai đều trúng thưởng.

Ví dụ 18 (Mức độ 1). Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A) = 0,4$; $\mathrm{P}(B) = 0,6$; $\mathrm{P}(AB) = 0,2$. Tính các xác suất $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(B \mid A)$.

Ví dụ 19 (Mức độ 1). Cho hai biến độc lập A, B với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$. Khi đó $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng

A. 0,2. **B.** 0,8. **C.** 0,25. **D.** 0,75.

Ví dụ 20 (Mức độ 2). Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

- Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Gọi A là biến cố "Bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn" và B là biến cố "Bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn".

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu là 0,144.		
b) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách và bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 0,65.		
c) Xác suất để khi gặp tai nạn, bệnh nhân không đội mũ bảo hiểm đúng cách biết bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu là 0,82.		

Phát biểu	Đ	S
d) Việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng chấn thương vùng đầu xuống khoảng 4,6 lần.		

Ví dụ 21 (Mức độ 2). Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp là $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Hãy tính $2a+b$.

KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 7. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A: "An lấy được viên bi trắng"; B: "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $P(A \mid B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $P(A \mid B)$ ở trên.

Bài 8. Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A: "An lấy được viên bi trắng"; B: "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $P(A \mid \overline{B})$ bằng định nghĩa và bằng công thức.

Bài 9.

a) Từ công thức tính $P(A \mid B)$, chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập với $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = P(A)$ và $P(B \mid A) = P(B)$.

b) Từ định nghĩa xác suất có điều kiện và định nghĩa về tính độc lập của hai biến cố, hãy chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A \mid B) = P(A)$ và $P(B \mid A) = P(B)$.

Bài 10. Một công ty dược phẩm muốn so sánh tác dụng điều trị bệnh X của hai loại thuốc M và N. Công ty đã tiến hành thử nghiệm với 4 000 bệnh nhân mắc bệnh X trong đó 2 400 bệnh nhân dùng thuốc M, 1 600 bệnh nhân còn lại dùng thuốc N. Kết quả được cho trong bảng dữ liệu thống kê 2×2 như sau:

Thuốc / Kết quả	M	N
Khỏi bệnh	1 600	1 200
Không khỏi bệnh	800	400

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân trong số 4 000 bệnh nhân thử nghiệm sau khi uống thuốc. Tính xác suất để bệnh nhân đó

a) uống thuốc M, biết rằng bệnh nhân đó khỏi bệnh;

b) uống thuốc N, biết rằng bệnh nhân đó không khỏi bệnh.

Bài 11. Một xí nghiệp dệt may có những dải của một loại vải đang sản xuất theo một quy trình đặc biệt. Những dải này có thể bị lỗi theo hai hướng: lỗi chiều dài và lỗi kết cấu. Thông qua đợt kiểm tra quy trình sản xuất, người ta thấy rằng có 10% dải không đạt yêu cầu về chiều dài, 5% dải không đạt yêu cầu và kết cấu và chỉ có 0,8% dải không đạt yêu cầu về cả chiều dài và kết cấu.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

a) Nếu chọn ngẫu nhiên một dải từ quy trình này thì xác suất không đạt yêu cầu về kết cấu là bao nhiêu?

b) Nếu một dải được chọn ngẫu nhiên từ quy trình này và phép đo nhanh xác định dải đó không đạt yêu cầu về chiều dài, tính xác suất để dải đó không đạt yêu cầu về kết cấu.

Bài 12. Một phòng nghiên cứu dược học cho 500 người bị bệnh H dùng hai loại thuốc X, Y để điều trị. Một số người được điều trị bằng thuốc X và số người còn lại được điều trị bằng thuốc Y. Kết quả nghiên cứu được trình bày ở bảng 6.2.

Tình trạng \ Loại thuốc	X	Y
Khỏi bệnh	180	190
Không khỏi bệnh	60	70

Chọn ngẫu nhiên một người trong số này. Gọi A là biến cố "Người được chọn khỏi bệnh", B là biến cố "Người được chọn điều trị bằng thuốc X", C là biến cố "Người được chọn điều trị bằng thuốc Y".

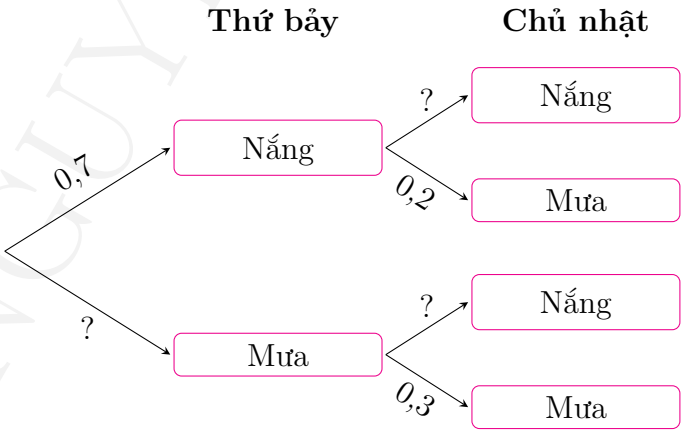
a) Tính và giải thích ý nghĩa của $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(A \mid C)$.

b) Có thể nói loại thuốc nào có hiệu quả hơn trong việc điều trị bệnh H?

Bài 13. Trong cuộc khảo sát 300 gia đình ở một khu vực, người ta nhận thấy rằng có 90% gia đình có tivi và 60% gia đình có máy tính bàn. Mỗi gia đình đều có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình. Tính xác suất gia đình có máy tính bàn trong nhóm các gia đình có tivi.

Bài 14. Trong một lọ có chứa bi đen và bi trắng cùng kích thước và khối lượng, lấy ngẫu nhiên lần lượt hai viên bi ra ngoài và không bỏ vào lại. Biết rằng xác suất để lần đầu lấy được bi đen là 0,47; xác suất để lần đầu lấy được bi đen và lần thứ hai lấy được bi trắng là $0,34$. Tính xác suất để lấy được bi trắng ở lần thứ hai với điều kiện lần đầu lấy được bi đen.

Bài 15. Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7. Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào ? ở sơ đồ hình cây sau:



Bài 16. Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố A : "Viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có màu xanh và viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ"; B : "Hai viên bi lấy ra có cùng màu".

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Bài 17. Một trường đại học tiến hành khảo sát tình trạng việc làm sau khi tốt nghiệp của sinh viên. Kết quả khảo sát cho thấy tỉ lệ người tìm được việc làm đúng chuyên ngành là 85% đối với sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và 70% đối với sinh viên tốt nghiệp loại khác. Tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp loại giỏi là 30%. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên đã tốt nghiệp của trường. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố C: "Sinh viên tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành"; D : "Sinh viên không tốt nghiệp loại giỏi và tìm được việc làm đúng chuyên ngành".

Bài 18. Một nhóm 50 học sinh có 23 bạn biết chơi cầu lông mà không biết chơi bóng đá và 21 bạn biết chơi bóng đá mà không biết chơi cầu lông. Biết rằng mỗi học sinh trong nhóm này biết chơi bóng đá hoặc cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất học sinh này biết chơi bóng đá, biết rằng bạn ấy biết chơi cầu lông.

Bài 19. Một xí nghiệp dệt may có những dải của một loại vải đang sản xuất theo một quy trình đặc biệt. Những dải này có thể bị lỗi theo hai hướng: lỗi chiều dài và lỗi kết cấu. Thông qua đợt kiểm tra quy trình sản xuất, người ta thấy rằng có 10% dải không đạt yêu cầu về chiều dài, 5% dải không đạt yêu cầu và kết cấu và chỉ có 0,8% dải không đạt yêu cầu về cả chiều dài và kết cấu.

a) Nếu chọn ngẫu nhiên một dải từ quy trình này thì xác suất không đạt yêu cầu về kết cấu là bao nhiêu?

b) Nếu một dải được chọn ngẫu nhiên từ quy trình này và phép đo nhanh xác định dải đó không đạt yêu cầu về chiều dài, tính xác suất để dải đó không đạt yêu cầu về kết cấu.

Bài 20. Trong một lọ có chứa bi đen và bi trắng cùng kích thước và khối lượng, lấy ngẫu nhiên lần lượt hai viên bi ra ngoài và không bỏ vào lại. Biết rằng xác suất để lần đầu lấy được bi đen là 0,47; xác suất để lần đầu lấy được bi đen và lần thứ hai lấy được bi trắng là $0,34$. Tính xác suất để lấy được bi trắng ở lần thứ hai với điều kiện lần đầu lấy được bi đen.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 13. Cho A, B là các biến cố của một phép thử T. Biết rằng $\mathrm{P}(B) > 0$, xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.
B. $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(AB)}$.
C. $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$.
D. $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)}$.

Câu 14. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(AB) = 0{,}2$. Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,4. **B.** 0,5. **C.** 0,25. **D.** 0,625.

Câu 15. Cho $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{5}$; $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của $\mathrm{P}(AB)$ là

A. $\dfrac{2}{15}$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{15}$.

Câu 16. Cho $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{5}$; $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{1}{4}$. Giá trị của $\mathrm{P}\left(B\overline{A}\right)$ là

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{4}{19}$. **C.** $\dfrac{4}{21}$. **D.** $\dfrac{3}{20}$.

Câu 17. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(AB) = 0{,}2$. Xác suất biến cố B không xảy ra với điều kiện biến cố A xảy ra là

A. 0,6. **B.** 0,5. **C.** 0,75. **D.** 0,25.

Câu 18. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(AB) = 0{,}2$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)} - \dfrac{\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}$ là

A. $-0{,}5$. **B.** 0. **C.** $0{,}5$. **D.** 1.

Câu 19 (Mức độ 2). Một nhóm 50 học sinh có 23 bạn biết chơi cầu lông mà không biết chơi bóng đá và 21 bạn biết chơi bóng đá mà không biết chơi cầu lông. Biết rằng mỗi học sinh trong nhóm này biết chơi bóng đá hoặc cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất học sinh này biết chơi bóng đá, biết rằng bạn ấy biết chơi cầu lông.

A. $\dfrac{7}{29}$. **B.** $\dfrac{6}{29}$. **C.** $\dfrac{8}{29}$. **D.** $\dfrac{5}{29}$.

Câu 20 (Mức độ 3). Trong một khu phố có 100 nhà, tại đó có 60 nhà gắn biển số chẵn và 40 nhà gắn biển số lẻ. Bên cạnh đó, có 50 nhà gắn biển số chẵn và 20 nhà gắn biển số lẻ đều có ô tô. Chọn ngẫu nhiên một nhà trong khu phố đó. Tính xác suất nhà được chọn có ô tô, biết rằng nhà đó có gắn biển số chẵn.

A. $\dfrac{7}{10}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 21 (Mức độ 3). Trong một khu phố có 100 nhà, tại đó có 60 nhà gắn biển số chẵn và 40 nhà gắn biển số lẻ. Bên cạnh đó, có 50 nhà gắn biển số chẵn và 20 nhà gắn biển số lẻ đều có ô tô. Chọn ngẫu nhiên một nhà trong khu phố đó. Tính xác suất nhà được chọn gắn biển số lẻ, biết rằng nhà đó có ô tô.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{4}{7}$.

Câu 22 (Mức độ 3). Một phòng học môn Tin học có 40 máy tính được đánh số từ 1 đến 40, các máy cùng loại và cùng màu, mỗi máy được đánh một số khác nhau. Trong phòng học đó, xác suất chọn được một máy tính đã cài đặt phần mềm lập trình Python được đánh số chẵn và được đánh số lẻ lần lượt là 0,375 và 0,45. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên một máy tính trong phòng đó. Tính xác suất bạn Nam chọn được máy tính đã cài đặt phần mềm lập trình Python, biết rằng máy tính đó được đánh số lẻ.

A. $\dfrac{6}{11}$. **B.** $\dfrac{4}{7}$. **C.** $\dfrac{9}{10}$. **D.** $\dfrac{9}{20}$.

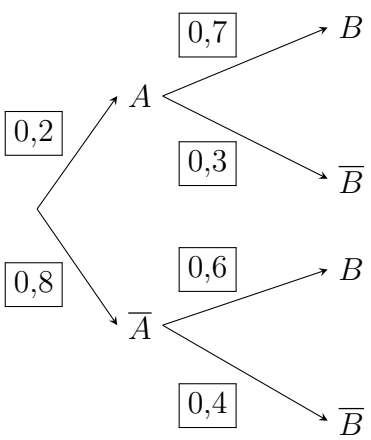
Câu 23 (Mức độ 3). Một phòng học môn Tin học có 40 máy tính được đánh số từ 1 đến 40, các máy cùng loại và cùng màu, mỗi máy được đánh một số khác nhau. Trong phòng học đó, xác suất chọn được một máy tính đã cài đặt phần mềm lập trình Python được đánh số chẵn và được đánh số lẻ lần lượt là 0,375 và 0,45. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên một máy tính trong phòng đó. Tính xác suất bạn Nam chọn được máy tính đánh số chẵn, biết rằng máy tính đó đã cài đặt phần mềm lập trình Python.

A. $\dfrac{11}{20}$. **B.** $\dfrac{5}{11}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Câu 24.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố cả A và B đều không xảy ra là

A. $0{,}32$. **B.** $0{,}4$. **C.** $0{,}8$. **D.** $0{,}92$.



TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

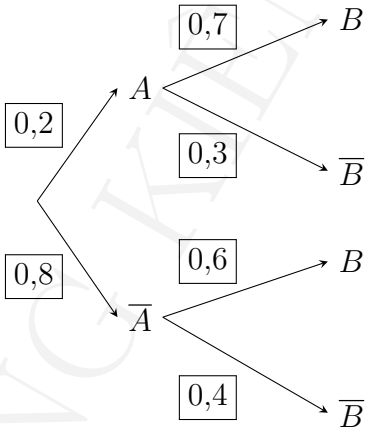
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 25.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất của biến cố B là

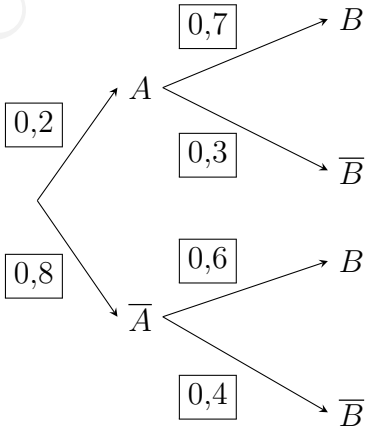
A. 0,42. **B.** 0,62. **C.** 0,28. **D.** 0,48.



Câu 26.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xác suất điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$ là

A. $\dfrac{7}{31}$. **B.** 0,7. **C.** $\dfrac{7}{50}$. **D.** 0,48.



Câu 27. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Kết quả khảo sát / Khảo sát công nhân	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố "Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I" và B là biến cố "Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng". Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

A. 0,37. **B.** 0,5. **C.** $\dfrac{37}{50}$. **D.** $\dfrac{5}{14}$.

Câu 28. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Kết quả khảo sát / Khảo sát công nhân	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố "Công nhân đó làm việc tại phân xưởng

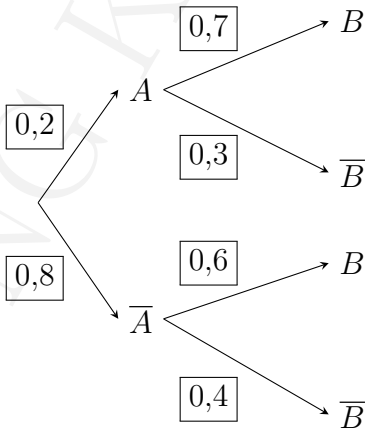
Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

I ” và B là biến cố “Công nhân đó hài lòng với điều kiện làm việc tại phân xưởng”. Xác suất của biến cố B với điều kiện A không xảy ra là

A. $\frac{2}{7}$. **B.** 0,9. **C.** 0,7. **D.** $\frac{9}{20}$.

Câu 29.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(\overline{A} \mid B)}{\mathrm{P}(\overline{A})}$ là



A. 0,48. **B.** 0,3. **C.** 0,5. **D.** 0,6.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 30.

Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh mất ngủ của hai loại thuốc X và Y, người ta tiến hành thử nghiệm trên 4000 người bệnh tình nguyện. Kết quả được cho trong bảng thống kê bên. Chọn ngẫu nhiên 1 người bệnh tham gia tình nguyện thử nghiệm thuốc. Gọi A là biến cố “Người được chọn khỏi bệnh”; B là biến cố “Người được chọn uống thuốc X”; C là biến cố “Người được chọn uống thuốc Y”.

Kết quả \ Dùng thuốc	X	Y
Khỏi bệnh	1600	1200
Không khỏi bệnh	800	400

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất người được chọn khỏi bệnh là $\frac{3}{5}$.		
b) Xác suất để người được chọn khỏi bệnh biết người đó uống thuốc X là $\frac{2}{3}$.		
c) Số người uống thuốc Y và khỏi bệnh là 1200.		
d) Xác suất người được chọn uống thuốc Y biết người đó khỏi bệnh là $\frac{3}{7}$.		

Câu 31. Một nhóm có 25 học sinh, trong đó 14 học sinh học khá môn Toán, 16 học sinh học khá môn Vật lí, 1 em không học khá cả hai môn Toán và Vật lí. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Xác suất để học sinh đó

Phát biểu	Đ	S
a) học khá môn Toán, đồng thời học khá môn Vật lí là $\frac{6}{25}$.		
b) học khá môn Toán, nhưng không học khá môn Vật lí $\frac{14}{25}$.		
c) học khá môn Toán, biết rằng học sinh đó học khá môn Vật lí là $\frac{3}{8}$.		
d) học khá môn Vật lí, biết rằng học sinh đó không học khá môn Toán là $\frac{2}{5}$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 32. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7"; B là biến cố "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm".

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để biến cố B xảy ra là $\frac{1}{3}$.		
b) Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm là $\frac{1}{6}$.		
c) Số kết quả thuận lợi của biến cố A là 6.		
d) Xác suất để có ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 là $\frac{1}{18}$.		

Câu 33 (Bảng dữ liệu thống kê 2×2). Một viện nghiên cứu về an toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Giả sử viện đã xem xét 577 006 vụ tai nạn giao thông ô tô và việc thắt dây an toàn của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Kết quả cho thấy:

- Trong số những người lái xe có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong và 412 368 người sống sót;
- Trong số những người lái xe không thắt dây an toàn, có 1 601 người tử vong và 162 527 người sống sót.

Kết quả trên được trình bày dưới dạng bảng gồm 2 dòng và 2 cột như dưới đây, được gọi là bảng dữ liệu thống kê 2×2:

Thắt dây an toàn \ Kết quả	Tử vong	Sống sót
Không	1 601	162 527
Có	510	412 368

Chọn ngẫu nhiên một người lái xe trong số 577 006 người bị tai nạn giao thông. Gọi A là biến cố "Người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông"; B là biến cố "Người lái xe đó không thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để biến cố B xảy ra là $\frac{164128}{577006}$.		
b) Xác suất người lái xe đó tử vong khi xảy ra tại nạn giao thông trong trường hợp không thắt dây an toàn là $\frac{85}{68728}$.		
c) Xác suất người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp có thắt dây an toàn là 6.		
d) Không thắt dây an toàn có nguy cơ bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông cao hơn khoảng 7 lần so với có thắt dây an toàn..		

THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 34 (Mức độ 1). Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A)=0{,}6; \mathrm{P}(AB)=0{,}4$. Kết quả của $\mathrm{P}(B \mid A)$ có dạng $\frac{a}{b}\left(a,\ b \in \mathbb{N},\ \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}\right)$. Tính $a-b$. KQ: | | | | |

Câu 35 (Mức độ 2). Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A)=0{,}6; \mathrm{P}(B)=0{,}7; \mathrm{P}(AB)=0{,}4$. Kết quả của $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$ có dạng $\frac{a}{b}\left(a,\ b \in \mathbb{N},\ \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản}\right)$. Tính a^2+2b. KQ: | | | | |

Câu 36 (Mức độ 2). Cho hai biến cố ngẫu nhiên A và B. Biết rằng $\mathrm{P}(A \mid B)=2\mathrm{P}(B \mid A)$ và $\mathrm{P}(AB) \neq 0$. Tính tỉ số $\dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$. KQ: | | | | |

Câu 37 (Mức độ 2). Một công ty bảo hiểm nhận thấy có 48% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ và có 36% số người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ trên 45 tuổi. Biết một người mua bảo hiểm ô tô là phụ nữ, tính xác suất người đó trên 45 tuổi. KQ: | | | | |

Câu 38 (Mức độ 2). Trong cuộc khảo sát 300 gia đình ở một khu vực, người ta nhận thấy rằng có 90% gia đình có tivi và 60% gia đình có máy tính bàn. Mỗi gia đình đều có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình. Tính dưới dạng phần trăm xác suất gia đình có máy tính bàn trong nhóm các gia đình có tivi *(làm tròn đến hàng phần chục)*. KQ: | | | | |

Câu 39 (Mức độ 2). Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó. Gọi A là biến cố "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố "Bình lấy được viên bi trắng". Tính $\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$ ở dạng thập phân và *làm tròn đến hàng phần trăm.*

KQ: | | | | |

DẠNG 3 Công thức nhân xác suất

Với hai biến cố A và B bất kì, ta có $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A \mid B)$.

a) Cho hai biến cố độc lập A và B, với $0<\mathrm{P}(A)<1;\ 0<\mathrm{P}(B)<1$.

- $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$
- $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)$

b)

- $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=1$
- $\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}\left(\overline{A} \mid B\right)=1$
- $\mathrm{P}(A \cap B)+\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right)=\mathrm{P}(A)$
- $\mathrm{P}(A \cap B)+\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)=\mathrm{P}(B)$

Cách ghi $\mathrm{P}(A \cap B)$ với $\mathrm{P}(AB)$ là hoàn toàn như nhau.

c)

- *Xác suất của một biến cố có thể phụ thuộc vào nhiều yếu tố, điều kiện khác nhau nào đó mà có thể được nói ra hoặc không nói ra. Để chỉ ra một cách cụ thể hơn về việc xác suất của một sự kiện A nào đó phụ thuộc vào một điều kiện B nào đó ra sao, ta sử dụng xác suất có điều kiện.*
- *Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta cần lưu ý đến sự độc lập của biến cố để vận dụng công thức đúng.*

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 22. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Sơn lấy được bút bi đen và Tùng lấy được bút bi xanh.

Ví dụ 23. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để:

a) Sơn lấy được bút bi xanh và Tùng lấy được bút bi đen;

b) Hai chiếc bút lấy ra có cùng màu.

Ví dụ 24. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}3; \mathrm{P}(B)=0{,}5$ và $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}4$. Tính $\mathrm{P}(\overline{A}B)$ và $\mathrm{P}(\overline{A} \mid B)$.

Ví dụ 25. Ô cửa bí mật (Let's Make a Deal) là một trò chơi trên truyền hình nổi tiếng ở Mỹ, đã được mua bản quyền và phát sóng ở nhiều nước trên thế giới. Nội dung trò chơi như sau:

- Người chơi được mời lên sân khấu và đứng trước ba cánh cửa đóng kín. Sau một cánh cửa có chiếc ô tô, sau mỗi cánh cửa còn lại là một con lừa. Người chơi được yêu cầu chọn ngẫu nhiên một cánh cửa, nhưng không được mở ra.
- Tiếp đó người quản trò tuyên bố sẽ mở ngẫu nhiên một trong hai cánh cửa người chơi không chọn mà sau cửa đó là con lừa. Người quản trò hỏi người chơi muốn giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu của mình hay muốn chuyển sang cửa chưa mở còn lại.

Giả sử người chơi chọn cửa số 1 và người quản trò mở cửa số 3. Kí hiệu E_1; E_2; E_3 tương ứng là các biến cố "Sau ở cửa số 1 có ô tô"; "Sau ở cửa số 2 có ô tô"; "Sau ở cửa số 3 có ô tô" và H là biến cố "Người quản trò mở ở cửa số 3 thấy con lừa". Sau khi người quản trò mở cánh cửa số 3 thấy con lừa, tức là khi H xảy ra. Để quyết định thay đổi lựa chọn hay không, người chơi cần so sánh hai xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(E_1 \mid H)$ và $\mathrm{P}(E_2 \mid H)$

a) Chứng minh rằng:

1. $\mathrm{P}(E_1)=\mathrm{P}(E_2)=\mathrm{P}(E_3)=\dfrac{1}{3}$;
2. $\mathrm{P}(H \mid E_1)=\dfrac{1}{2}$ và $\mathrm{P}(H \mid E_2)=1$.

b) Sử dụng công thức tính xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất, chứng minh rằng:

$$\mathrm{P}(E_1 \mid H)=\frac{\mathrm{P}(E_1)\cdot \mathrm{P}(H \mid E_1)}{\mathrm{P}(H)}.$$

c) Từ các kết quả trên hãy suy ra $\mathrm{P}(E_2 \mid H)=2\mathrm{P}(E_1 \mid H)$. Từ đó hãy đưa ra lời khuyên cho người chơi: Nên giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu hay chuyển sang cửa chưa mở còn lại?

Ví dụ 26. Một nhóm 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất 1 bạn nam được chọn.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 27. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Mỗi phát biểu dưới dưới đây đúng hay sai?

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất bạn Sơn lấy được bút bi xanh là $\frac{7}{12}$.		
b) Xác suất bạn Tùng lấy được bút bi đen là $\frac{5}{12}$.		
c) Xác suất Sơn lấy được bút bi xanh và Tùng lấy được bút bi đen là $\frac{35}{144}$.		
d) Xác suất lấy được hai bút bi cùng màu là $\frac{31}{66}$.		

2 Bài tập tự luận

Bài 21. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Sơn lấy được bút bi đen và Tùng lấy được bút bi xanh.

Bài 22. Ô cửa bí mật (Let's Make a Deal) là một trò chơi trên truyền hình nổi tiếng ở Mỹ, đã được mua bản quyền và phát sóng ở nhiều nước trên thế giới. Nội dung trò chơi như sau:

- Người chơi được mời lên sân khấu và đứng trước ba cánh cửa đóng kín. Sau một cánh cửa có chiếc ô tô, sau mỗi cánh cửa còn lại là một con lừa. Người chơi được yêu cầu chọn ngẫu nhiên một cánh cửa, nhưng không được mở ra.
- Tiếp đó người quản trò tuyên bố sẽ mở ngẫu nhiên một trong hai cánh cửa người chơi không chọn mà sau cửa đó là con lừa. Người quản trò hỏi người chơi muốn giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu của mình hay muốn chuyển sang cửa chưa mở còn lại.

Giả sử người chơi chọn cửa số 1 và người quản trò mở cửa số 3. Kí hiệu E_1; E_2; E_3 tương ứng là các biến cố: "Sau ở cửa số 1 có ô tô"; "Sau ở cửa số 2 có ô tô"; "Sau ở cửa số 3 có ô tô" và H là biến cố: "Người quản trò mở ở cửa số 3 thấy con lừa". Sau khi người quản trò mở cánh cửa số 3 thấy con lừa, tức là khi H xảy ra. Để quyết định thay đổi lựa chọn hay không, người chơi cần so sánh hai xác suất có điều kiện: $P(E_1 \mid H)$ và $P(E_2 \mid H)$

a) Chứng minh rằng:

- $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$;
- $P(H \mid E_1) = \frac{1}{2}$ và $P(H \mid E_2) = 1$.

b) Sử dụng công thức tính xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất, chứng minh rằng:

- $P(E_1 \mid H) = \frac{P(E_1) \cdot P(H \mid E_1)}{P(H)}$;

c) Từ các kết quả trên hãy suy ra:

$$P(E_2 \mid H) = 2P(E_1 \mid H)$$

Từ đó hãy đưa ra lời khuyên cho người chơi: Nên giữ nguyên sự lựa chọn ban đầu hay chuyển sang cửa chưa mở còn lại?

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 23. Một hộp kín đựng 20 tấm thẻ giống hệt nhau đánh số từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ từ trong hộp. Người đó được thông báo rằng thẻ rút ra mang số chẵn. Tính xác suất để người đó rút được thẻ số 10.

Bài 24. Cho $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}51; P(B \mid A) = 0{,}8$. Tính $P(A \mid B)$.

Bài 25. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm;

b) Có ít nhất có một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7.

Bài 26. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đó không nhỏ hơn 10 nếu biết rằng có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm.

Bài 27. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

Bài 28. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0.4; P(B) = 0.8$ và $P(A|B) = 0.5$. Tính $P(A\overline{B})$ và $P(A|B)$.

Bài 29. Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0.6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0.7. Lớp của Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố A:"Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật".
B:"Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh".

Bài 30. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}4; \mathrm{P}(B) = 0{,}8$ và $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}5$. Tính $\mathrm{P}(A\overline{B})$ và $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Bài 31.

Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như hình bên. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất 0,02. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện, máy tính sẽ bị hỏng với xác suất 0,1; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng.



a) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều không bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

b) Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.

Bài 32. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

Bài 33. Một hộp kín đựng 20 tấm thẻ giống hệt nhau đánh số từ 1 đến 20. Một người rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ từ trong hộp. Người đó được thông báo rằng thẻ rút ra mang số chẵn. Tính xác suất để người đó rút được thẻ số 10.

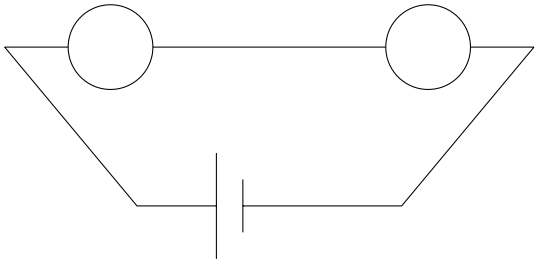
Bài 34. Gieo hai con xúc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc bằng 7 nếu biết rằng ít nhất có một con xúc sắc xuất hiện mặt 5 chấm;

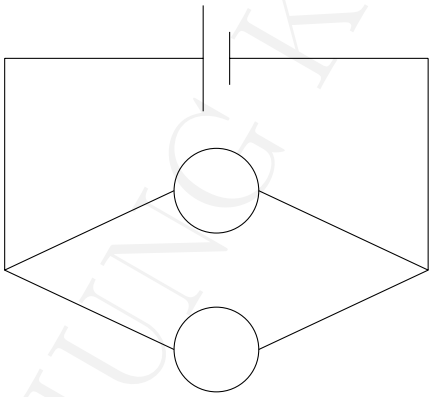
b) Có ít nhất có một con xúc sắc xuất hiện mặt 5 chấm nếu biết rằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc bằng 7.

Bài 35. Gieo hai con xúc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc đó không nhỏ hơn 10 nếu biết rằng có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt 5 chấm.

Bài 36. Có 2 linh kiện điện tử, xác suất để mỗi linh kiện hỏng trong một thời điểm bất kì lần lượt là 0,01; 0,02. Hai linh kiện đó được lắp vào một mạch điện theo sơ đồ ở *Hình a, b*. Trong mỗi trường hợp, hãy tính xác suất để trong mạch điện có dòng điện chạy qua



Hình a



Hình b

Bài 37. Cho $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}51$; $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}8$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Bài 38. Bạn An phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,4. Tính xác suất để:

a) Cả hai thí nghiệm đều thành công;

b) Cả hai thí nghiệm đều không thành công;

c) Thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công.

Bài 39. Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 cái kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên một cái kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm một cái kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai cái kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu cái kẹo?

Bài 40. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

Bài 41. Mỗi bạn học sinh trong lớp của Minh lựa chọn một trong hai ngoại ngữ là tiếng Anh hoặc tiếng Nhật. Xác suất chọn tiếng Anh của mỗi bạn học sinh nữ là 0,6 và của mỗi bạn học sinh nam là 0,7. Lớp của Minh có 25 bạn nữ và 20 bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố A: "Bạn được chọn là nam và học tiếng Nhật"; B: "Bạn được chọn là nữ và học tiếng Anh".

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 40. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$ và $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}5$. Giá trị của $\mathrm{P}(AB)$ là

A. 0.3. **B.** 0.4. **C.** 0.5. **D.** 0.2.

Câu 41. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$ và $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}5$. Giá trị của $\mathrm{P}(\overline{A}B)$ là

A. 0.3. **B.** 0.4. **C.** 0.5. **D.** 0.2.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 42. Bạn Nam chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 10%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 40%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7. Xác suất trời mưa cả hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật là

A. 0,03. **B.** 0,06. **C.** 0,12. **D.** 0,18.

Câu 43. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 0,98. **B.** 0,95. **C.** 0,93. **D.** 0,94.

Câu 44. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}2024$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2025$. Khi đó $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng

A. 0,7976. **B.** 0,7975. **C.** 0,2025. **D.** 0,2024.

Câu 45. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}2024$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2025$. Khi đó $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)$ bằng

A. 0,7976. **B.** 0,7975. **C.** 0,2025. **D.** 0,2024.

Câu 46. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Khi đó $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 47. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Khi đó $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right)$ bằng

A. $\frac{3}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 48. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}3$. Khi đó $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$ bằng

A. $\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 49. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}65$, $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}55$. Khi đó $\mathrm{P}(A \cap B)$ bằng

A. 0,25. **B.** 0,1. **C.** 0,15. **D.** 0,35.

Câu 50. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}65$, $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}55$. Khi đó $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$ bằng

A. 0,25. **B.** 0,4. **C.** 0,3. **D.** 0,35.

Câu 51. Gieo lần lượt hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc bằng 6. Biết rằng con xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

A. $\frac{2}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 52. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất cũng là màu đỏ là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 53. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất là màu trắng là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 54. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là

A. 0,28. **B.** 0,7. **C.** 0,46. **D.** 0,18.

Câu 55. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 đó là

A. 0,6. **B.** 0,7. **C.** 0,46. **D.** 0,3.

Câu 56. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là

A. 0,4. **B.** 0,7. **C.** 0,28. **D.** 0,6.

Câu 57. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7. Tìm xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án.

A. 0,28. **B.** 0,7. **C.** 0,46. **D.** 0,18.

Câu 58. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là $0,6$ và dự án 2 là $0,7$. Biết công ty thắng thầu dự án 1, tìm xác suất công ty thắng thầu dự án 2.

A. $0,6$. **B.** $0,7$. **C.** $0,46$. **D.** $0,3$.

Câu 59. Cho một hộp kín có 6 thẻ ATM của BIDV và 4 thẻ ATM của Vietcombank. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 thẻ (lấy không hoàn lại). Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được thẻ ATM của Vietcombank nếu biết lần thứ nhất đã lấy được thẻ ATM của BIDV.

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 60. Một bình đựng 9 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Lần lượt lấy ngẫu nhiên ra 2 bi, mỗi lần lấy 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất để bi thứ 2 màu xanh nếu biết bi thứ nhất màu đỏ?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{9}{17}$. **D.** $\frac{21}{80}$.

Câu 61. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{1}{19}$. **C.** $\frac{1}{190}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Câu 62. Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

A. $\frac{95}{98}$. **B.** $\frac{931}{1000}$. **C.** $\frac{95}{100}$. **D.** $\frac{98}{100}$.

Câu 63. Lớp Toán Sư Phạm có 95 Sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

TS. LƯU HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{11}{23}$. **C.** $\frac{12}{23}$. **D.** $\frac{11}{19}$.

Câu 64. Một bình đựng 5 viên bi kích thước và chất liệu giống nhau, chỉ khác nhau về màu sắc. Trong đó có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ bình ra một viên bi ta được viên bi màu xanh, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được viên bi đỏ ở lần thứ hai.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 65. Một gia đình có 2 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Hỏi xác suất 2 đứa trẻ đều là con gái là bao nhiêu? Cho biết xác suất để một đứa trẻ là trai hoặc gái là bằng nhau.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{9}{16}$. **C.** $\frac{9}{17}$. **D.** $\frac{21}{80}$.

Câu 66. Một hộp chứa 8 bi trắng, 2 bi đỏ. Lần lượt bốc từng bi. Giả sử lần đầu tiên bốc được bi trắng. Xác định xác suất lần thứ 2 bốc được bi đỏ.

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 67.

Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như hình vẽ. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất $0,02$. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện, máy tính sẽ bị hỏng với xác suất $0,1$; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng. Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.



A. 0,98. **B.** 0,02. **C.** 0,89. **D.** 0,002.

Câu 68. Một nhà máy thực hiện khảo sát toàn bộ công nhân về sự hài lòng của họ về điều kiện làm việc tại phân xưởng. Kết quả khảo sát như sau:

Khảo sát công nhân \ Kết quả khảo sát	Hài lòng	Không hài lòng
Số công nhân phân xưởng I	37	13
Số công nhân phân xưởng II	63	27

Gặp ngẫu nhiên một công nhân của nhà máy. Gọi A là biến cố "Công nhân đó làm việc tại phân xưởng I ". Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{37}{140}$. **B.** $\frac{37}{50}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 69. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0,3$ và $\mathrm{P}(B \mid A)=0,7$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(\overline{A})=0,7$.		
b) $\mathrm{P}(A\overline{B})=1-\mathrm{P}(AB)$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(BA)=0,12$.		
d) $\mathrm{P}(A\overline{B})=0,18$.		

Câu 70. Cho hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc sắc trong hai xúc sắc đó.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{4}{6}$.		
b) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc sắc bằng 6 là $\frac{1}{6}$.		
c) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc sắc bằng 6, biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{1}{36}$.		
d) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc sắc là số chẵn, biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{1}{12}$.		

Câu 71. Một loại bệnh di truyền có xác suất mắc phải là 0,05%. Nếu mẹ mắc bệnh thì xác suất di truyền sang con là 90%. Nếu mẹ không mắc bệnh thì xác suất con bị bệnh chỉ là 1%.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để cả hai mẹ con đều mắc bệnh là 45%.		
b) Xác suất để cả hai mẹ con đều không mắc bệnh là 99%.		
c) Xác suất nếu mẹ mắc bệnh nhưng con không mắc bệnh là 0,005%.		
d) xác suất nệu mẹ không mắc bệnh nhưng con mắc bệnh là 1%.		

Câu 72. Bạn An phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là 0,7. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là 0,9. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là 0,4.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để cả hai thí nghiệm đều thành công là 0,63.		
b) Xác suất để cả hai thí nghiệm đều không thành công là 0,12.		
c) Xác suất để thí nghiệm thứ nhất thành công và thí nghiệm thứ hai không thành công là 0,07.		
d) Xác suất để thí nghiệm thứ nhất không thành công và thí nghiệm thứ hai thành công là 0,18.		

Câu 73. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $\mathrm{P}(A)=0,7$, $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=0,6$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}\left(A \mid B\right)=0,6$.		
b) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=0,4$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=0,4$.		
d) $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)=0,6$.		

Câu 74. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=0,4$, $\mathrm{P}(B)=0,8$, $\mathrm{P}\left(A \cap B\right)=0,4$.

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A)=0,6$ và $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=0,2$.		
b) $\mathrm{P}\left(A \mid B\right)=\frac{1}{2}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right)=\frac{2}{3}$.		
d) $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)=\frac{3}{5}$.		

Câu 75. Một công ty truyền thông đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,5 và dự

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

án 2 là 0,6. Khả năng thắng thầu của 2 dự án là 0,4. Gọi A, B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

Phát biểu	Đ	S
a) A và B là hai biến độc lập.		
b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,3.		
c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,4.		
d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án là 0,8.		

Câu 76. Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để có tên Hiền là $\frac{1}{10}$.		
b) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó là nữ là $\frac{3}{17}$.		
c) Xác suất để có tên Hiền, nhưng với điều kiện là bạn đó là nam là $\frac{2}{13}$.		
d) Nếu thầy giáo gọi 1 bạn tên Hiền lên bảng thì xác xuất để bạn đó là bạn nữ là $\frac{3}{17}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 77. Kết quả khảo sát những bệnh nhân bị tai nạn xe máy về mối liên hệ giữa việc đội mũ bảo hiểm và khả năng bị chấn thương vùng đầu cho thấy:

- Tỉ lệ bệnh nhân bị chấn thương vùng đầu khi gặp tai nạn là 80%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách khi gặp tai nạn là 90%;
- Tỉ lệ bệnh nhân đội mũ bảo hiểm đúng cách bị chấn thương vùng đầu là 18%.

Hỏi theo kết quả điều tra trên, việc đội mũ bảo hiểm đúng cách sẽ làm giảm khả năng bị chấn thương vùng đầu bao nhiêu lần *(làm tròn đến hàng phần mười)*? KQ: | | | | |

Câu 78. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất"; B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai". Tính $\mathrm{P}(A \cap B)$, *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 79. Một bình đựng 50 viên bi kích thước, chất liệu như nhau, trong đó có 30 viên bi xanh và 20 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được một viên bi xanh ở lần thứ nhất và một viên bi trắng ở lần thứ hai *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 80. Có 40 phiếu thi Toán 12, mỗi phiếu chỉ có một câu hỏi, trong đó có 13 câu hỏi lý thuyết (gồm 5 câu hỏi khó và 8 câu hỏi dễ) và 27 câu hỏi bài tập (gồm 12 câu hỏi khó và 15 câu hỏi dễ). Lấy ngẫu nhiên ra một phiếu. Tìm xác suất rút được câu hỏi lý thuyết khó *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Câu 81. Gieo hai con xúc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc lớn hơn hoặc bằng 10, nếu biết rằng có ít nhất một con đã ra mặt 5 chấm *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 82. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 83. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học.

KQ: | | | | |

Câu 84.

Máy tính và thiết bị lưu điện (UPS) được kết nối như hình vẽ. Khi xảy ra sự cố điện, UPS bị hỏng với xác suất $0,02$. Nếu UPS bị hỏng khi xảy ra sự cố điện, máy tính sẽ bị hỏng với xác suất $0,1$; ngược lại, nếu UPS không bị hỏng, máy tính sẽ không bị hỏng. Tính xác suất để cả UPS và máy tính đều không bị hỏng khi xảy ra sự cố điện.



KQ: | | | | |

ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 6

§2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Công thức xác suất toàn phần

Định nghĩa 20 Cho hai biến cố A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A|\overline{B}).$$

Công thức trên được gọi là công thức xác suất toàn phần.

2 Công thức Bayes

Định nghĩa 21 Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(A) > 0$. Khi đó

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Công thức Bayes còn được viết dưới dạng $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A \mid \overline{B})}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Tính xác suất theo công thức xác suất toàn phần

Với hai biến cố A và B tùy ý thì

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(A \mid \overline{B}).$$

Công thức xác suất toàn phần được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra. Khi áp dụng giải toán, biến cố cần tìm xác suất chi phối bởi hệ đầy đủ biến cố trước đó. Vì vậy, để giải toán xác suất này, ta cần:

- *Phân tích kỹ đề bài, linh hoạt liên tưởng vào thực tế.*
- *Xác định được nhóm biến cố đầy đủ ở giai đoạn đầu của sự việc mà bài toán đã đưa ra.*
- *Gọi tên biến cố xảy ra ở giai đoạn sau liên quan đến nhóm biến cố đầy đủ được xác định trước đó.*
- *Xác định xác suất của từng biến cố ở hệ đầy đủ, các xác suất có điều kiện của biến cố ở giai đoạn sau với từng biến cố trong hệ đầy đủ.*
- *Áp dụng công thức xác suất toàn phần nếu biến cố cần tìm xác suất là biến cố xảy ra ở giai đoạn sau.*

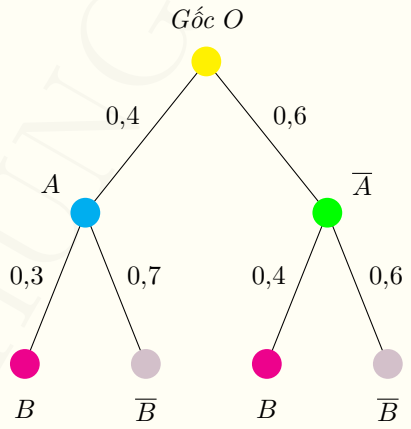
TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Mô tả trực quan công thức xác suất toàn phần bằng sơ đồ hình cây.

Xét bài toán: *Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là* 0,4. *Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là* 0,7. *Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy. Kí hiệu A là biến cố "Thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy"; B là biến cố "Thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy".*

Ta vẽ sơ đồ hình cây như hình bên. Trên nhánh cây OA và $O\overline{A}$ tương ứng ghi $\mathrm{P}(A)$ *và* $\mathrm{P}(\overline{A})$;
Trên nhánh cây AB và $A\overline{B}$ tương ứng ghi $\mathrm{P}(B \mid A)$ *và* $\mathrm{P}(\overline{B} \mid A)$;
Trên nhánh cây $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$ tương ứng ghi $\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$ *và* $\mathrm{P}(\overline{B} \mid \overline{A})$.
Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và $O\overline{A}B$. Vậy:

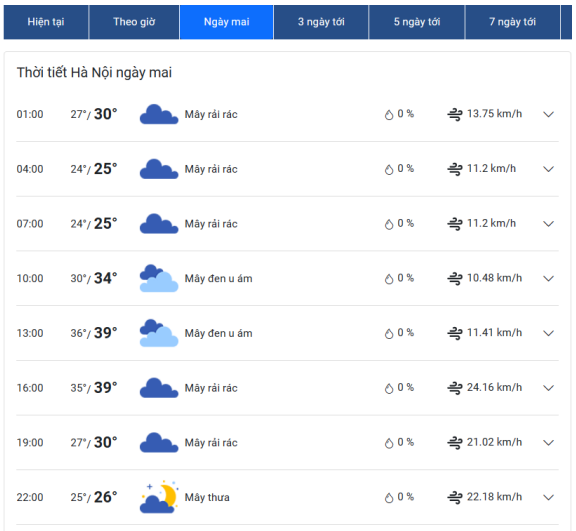
$$\mathrm{P}(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}36.$$



1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Mức độ 2).

Số khán giả đến xem buổi biểu diễn ca nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,9; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé chỉ là 0,4. Dự báo thời tiết cho thấy xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,75. Nhà tổ chức sự kiện quan tâm đến xác suất để bán được hết vé là bao nhiêu. Gọi A là biến cố "Trời mưa" và B là biến cố "Bán hết vé" trong tình huống.



a) Tính $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(\overline{A}), \mathrm{P}(B \mid A), \mathrm{P}(B \mid \overline{A})$.

b) Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Ví dụ 2 (Mức độ 2). Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Tính xác suất để học sinh đó đỗ đại học.

Ví dụ 3 (Mức độ 3). Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 12A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chưa phiếu có thưởng. Bạn Bình hái bông hoa đầu tiên, sau đó bạn An hái bông hoa thứ hai.

a) Vẽ sơ đồ cây biểu thị tình huống trên.

b) Từ đó, tính xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Ví dụ 4 (Mức độ 3). Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không có dán nhãn.

a) Chọn số thích hợp cho $\boxed{?}$ trong bảng (đơn vị: viên bi).

Dán nhãn / Màu bi	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
Xanh	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$

b) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Ví dụ 5. Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy.

Ví dụ 6. Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh tại trường X. Nhóm này có 60% học sinh là nam. Kết quả khảo sát cho thấy có 20% học sinh nam và 15% học sinh nữ biết chơi ít nhất một nhạc cụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm này. Tính xác suất để chọn được học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ.

Ví dụ 7. Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ.

Ví dụ 8. Một hộp có 5 quả cầu trắng và 10 quả cầu đen cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu (không hoàn lại) từ hộp. Tính xác suất để lần thứ hai lấy được quả cầu trắng.

Ví dụ 9. Ở một địa phương, tỉ lệ nam và nữ là 2 : 3. Số người mắc bệnh bạch tạng của địa phương này chiếm tỉ lệ 0,45% dân cư. Tính tỉ lệ nam giới mắc bệnh bạch tạng của địa phương đó, biết tỉ lệ này ở nữ là 0,35%.

Ví dụ 10 (Mức độ 2). Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.
Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên là

A. 0,888. **B.** 0,808. **C.** 0,96. **D.** 0,8.

Ví dụ 11 (Mức độ 3). Một hộp có 5 quả cầu trắng và 10 quả cầu đen cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu (không hoàn lại) từ hộp. Xác suất để lần thứ hai lấy được quả cầu trắng là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Ví dụ 12 (Mức độ 3). Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con

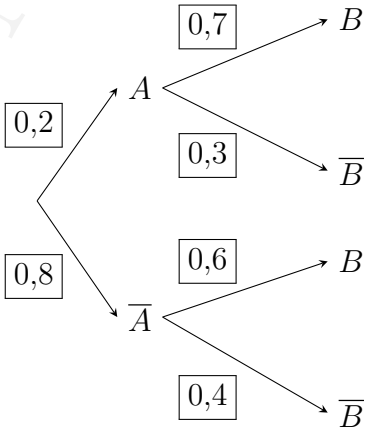
lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là 0,5.		
b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là 0,5.		
c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là 0,6.		
d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là 0,49 .		

Ví dụ 13 (Mức độ 2).

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(B\mid\overline{A})$.		
b) $\mathrm{P}(B\mid A)=0{,}6$.		
c) $\mathrm{P}(B)=0{,}62$.		
d) $\mathrm{P}(\overline{B})=0{,}4$.		



Ví dụ 14 (Mức độ 2). Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố H, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là 0,7 và 0,2. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là 0,1. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)* KQ: | | | | |

Ví dụ 15 (Mức độ 2). Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

Ví dụ 16 (Mức độ 2). Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 64% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước.

(*Nguồn: F.M Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics - Understanding why and how, Springer, 2005*)

Hỏi rằng, trong năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là thừa cân bằng bao nhiêu phần trăm? KQ: | | | | |

2 Bài tập tự luận

Bài 1 (Mức độ 1). Cho hai biến cố A, B: $\mathrm{P}(A)=0{,}6$; $\mathrm{P}(B)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B\mid\overline{A})=0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(B\mid A)$.

Bài 2. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen; hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 3 (Mức độ 2). Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh liện từ lô hàng đó. Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

Bài 4 (Mức độ 2). Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Gặp ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp. Tính xác suất nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ.

Bài 5 (Mức độ 2). Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;

Bài 6 (Mức độ 3). Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng I, nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà. Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái.

Bài 7 (Mức độ 3). Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường.

a) Tính xác suất để linh kiện điện tử đó được đóng dấu OTK.

b) Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất để linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Bài 8 (Mức độ 3). Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.

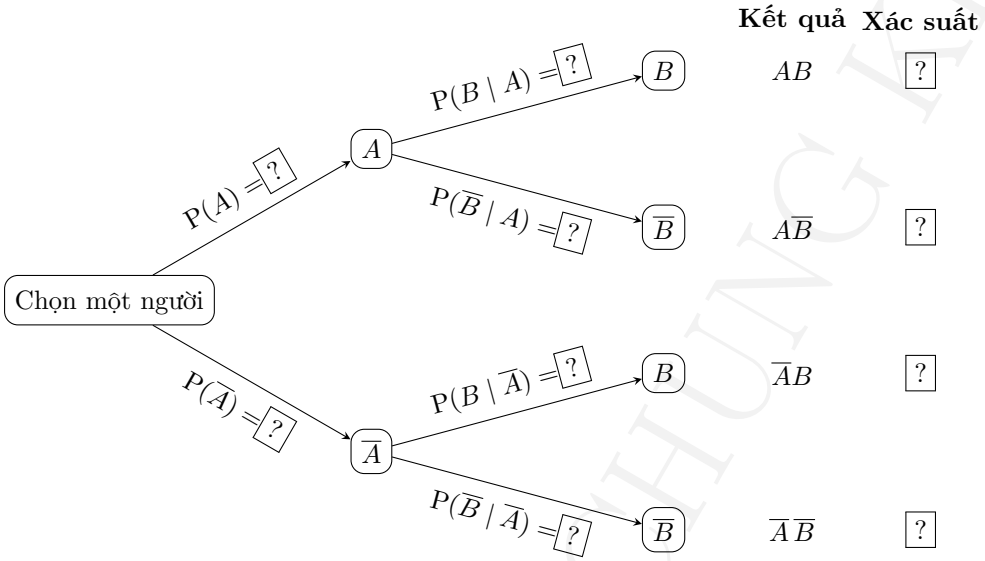
Bài 9. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.
Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa.
Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên.

Bài 10 (Mức độ 3). Trong một cuộc khảo sát tình trạng công việc trên 900 người đã có bằng tốt nghiệp trung học phổ thông ở một địa phương cho cả nam lẫn nữ, người ta thu được số liệu thống kê trong bảng sau.

Tình trạng / Giới tính	Có việc làm	Thất nghiệp
Nam	460	40
Nữ	140	260

Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm này. Gọi A là biến cố "Người được chọn là nữ", B là biến cố "Người được chọn có việc làm".

a) Vẽ lại sơ đồ hình cây sau đây và hoàn thành kết quả ở các ô $\boxed{?}$.



A: nữ; $\overline{A}$: nam; B: có việc; $\overline{B}$: thất nghiệp.

b) Tính xác suất để chọn được một người có việc làm.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 1. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$ và $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right) = 0{,}4$. Khi đó, $\mathrm{P}(A)$ bằng

A. 0,7. **B.** 0,4. **C.** 0,58. **D.** 0,52.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}45$. Tính $\mathrm{P}(A)$.

A. 0,25. **B.** 0,65. **C.** 0,55. **D.** 0,5.

Câu 3 (Mức độ 1). Cho $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{5}$; $\mathrm{P}\left(B \mid A\right) = \dfrac{1}{3}$; $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{1}{4}$. Giá trị của $\mathrm{P}(B)$ là

A. $\dfrac{19}{60}$. **B.** $\dfrac{17}{60}$. **C.** $\dfrac{9}{20}$. **D.** $\dfrac{7}{30}$.

Câu 4 (Mức độ 2). Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = 0{,}35$, $\mathrm{P}(A) = 0{,}25$, $\mathrm{P}\left(B \mid A\right) = 0{,}8$. Giá trị của $\mathrm{P}(B)$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{7}{15}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 5 (Mức độ 2). Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Xác suất người đó mắc bệnh A là

A. 0,0325. **B.** 0,018. **C.** 0,092. **D.** 0,0525.

Câu 6 (Mức độ 2). Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%. Tỉ lệ gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp là bao nhiêu phần trăm?

A. 26%. **B.** 12%. **C.** 68%. **D.** 24%.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
Thầy NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 7 (Mức độ 2). Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phần xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là

A. 0,02. **B.** 0,6. **C.** 0,014. **D.** 0,01.

Câu 8 (Mức độ 2). Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỉ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiêu từ hai phòng khám. Tính xác suất để người bệnh được chọn người này là nam là

A. 0,6. **B.** 0,5. **C.** 0,4. **D.** 0,3.

Câu 9 (Mức độ 3). Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi xanh là

A. $\dfrac{4}{55}$. **B.** $\dfrac{51}{55}$. **C.** $\dfrac{3}{55}$. **D.** $\dfrac{6}{55}$.

Câu 10 (Mức độ 3). Ở một địa phương X, xác suất để một người lớn trên 40 tuổi mắc bệnh ung thư là 0,05. Xác suất bác sĩ chẩn đoán đúng một người mắc bệnh ung thư là 0,78 và chẩn đoán sai (không bị ung thư nhưng được chẩn đoán mắc bệnh) là 0,06. Xác suất để một người nhận được kết quả chẩn đoán không bị ung thư bằng

A. 0,40625. **B.** 0,096. **C.** 0,904. **D.** 0,59375.

Câu 11 (Mức độ 3). Trung tâm kiểm soát và phòng ngừa dịch bệnh Hoa Kỳ (Centers for Disease Control and Prevention, viết tắt là (CDC) thống kê vào thời điểm năm 2020 – 2021 về số lượng sốc phản vệ sau khi tiêm vaccine ở một số nơi tại Hoa Kỳ và châu Âu như sau: Trong 360,19 triệu liều vaccine P được sử dụng có 581 ca sốc phản vệ (có khả năng gây tử vong) và 4 259 ca phản ứng phụ (không sốc phản vệ, không gây tử vong); trong 67,72 triệu liều vaccine A được sử dụng có 195 ca sốc phản vệ và 1 118 ca phản ứng phụ.

(Nguồn: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8626274/)

Xét ngẫu nhiên một người trong số được thống kê ở trên. Tính xác suất để người đó thuộc trường hợp sốc phản vệ (có khả năng gây tử vong).

A. $1{,}9 \cdot 10^{-6}$. **B.** $2{,}8 \cdot 10^{-6}$. **C.** $1{,}81 \cdot 10^{-6}$. **D.** $2{,}81 \cdot 10^{-6}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 12. Người ta đánh giá tính hiệu quả của một quy trình sàng lọc bằng cách tính xác suất xảy ra âm tính giả hoặc dương tính giả. Xét các kí hiệu sau đây

- T^+: Kết quả xét nghiệm dương tính (và cho thấy người đó mắc bệnh này).
- T^-: Kết quả xét nghiệm âm tính (và cho thấy người đó không mắc bệnh này).
- D^c: Người đó thực sự không có bệnh.
- D: Người thực sự mắc bệnh.

Người ta thấy rằng độ nhạy của phép kiểm tra có xác suất có điều kiện như sau

$$\mathrm{P}\left(T^+ \mid D\right) = 0{,}98 \quad \text{và} \quad \mathrm{P}\left(T^- \mid D^c\right) = 0{,}99.$$

Biết rằng tỉ lệ nhiễm bệnh của cộng đồng là 2 trên 1 triệu người, khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính biết rằng người đó thực sự không có bệnh là 0,02.		
b) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính biết rằng người đó thực sự mắc bệnh là 0,02.		
c) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm âm tính là 0,98999806.		
d) Xác suất nhận được kết quả xét nghiệm dương tính là 0,02000192.		

Câu 13. Một lô hàng có 80 chính phẩm và 20 phế phẩm. Trong quá trình vận chuyển về kho thì bị mất 1 sản phẩm. Về đến kho, người ta chọn ngẫu nhiên một sản phẩm để kiểm tra chất lượng. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,8.		
b) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là chính phẩm là 0,2.		
c) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm nếu biết rằng sản phẩm bị mất là phế phẩm là 0,2.		
d) Xác suất sản phẩm được kiểm tra là phế phẩm là 0,2.		

Câu 14 (Mức độ 2). Trong một kì sát hạch lái xe có 65% thí sinh nam. Biết rằng 80% thí sinh nam và 70% thí sinh nữ đỗ kì sát hạch này. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Tỉ lệ chọn được một thí sinh nữ là 35%.		
b) Tỉ lệ chọn được một thí sinh nam đỗ sát hạch là 70%.		
c) Tỉ lệ chọn được một thí sinh nữ không đỗ sát hạch là 70%.		
d) Tỉ lệ chọn được một thí sinh đỗ kì sát hạch là 76,5% .		

Câu 15. Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Số viên bi màu đỏ có đánh số là 30.		
b) Số viên bi màu vàng không đánh số là 15.		
c) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $\frac{3}{5}$.		
d) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xác suất để viên bi được lấy ra không có đánh số $\frac{7}{16}$.		

Câu 16. Một chiếc hộp có 100 viên bi, trong đó có 70 viên bi có tô màu và 30 viên bi không tô màu; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Nam lấy ra viên bi đầu tiên, sau đó bạn Việt lấy ra viên bi thứ 2. Khi đó

TÀI LIỆU ÔN TẬP HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 TOÁN 12 – ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để bạn Nam lấy ra viên bi có tô màu là $\frac{3}{7}$.		
b) Sơ đồ cây biểu thị tình huống trên là.		
c) Xác suất để bạn Việt lấy ra viên bi có tô màu là $\frac{191}{330}$.		
d) Xác suất để bạn Việt lấy ra viên bi không có tô màu là $\frac{139}{330}$.		

Câu 17 (Mức độ 3). An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen lần thứ nhất là $\frac{3}{5}$.		
b) Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen lần thứ hai khi đã nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen ở lần thứ nhất là $\frac{5}{9}$.		
c) Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la đen là $\frac{1}{4}$.		
d) Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen ở lần thứ hai là $\frac{3}{5}$.		

Câu 18 (Mức độ 3). Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7. Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để thứ Ba trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy là 0,4.		
b) Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe máy là 0,4.		
c) Xác suất để thứ Tư, ông An đi làm bằng xe máy nếu thứ Ba, ông An đi làm bằng xe buýt là 0,4 .		
d) Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy là 0,36 .		

Câu 19 (Mức độ 3). Bạn Nam tham gia một gian hàng trò chơi dân gian trong hội xuân của trường. Trò chơi có hai lượt chơi. Xác suất để Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất là 0,6. Nếu Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất Nam thắng ở lượt chơi thứ hai là 0,8. Ngược lại, nếu Nam thua ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất Nam thắng ở lượt chơi thứ hai là 0,3. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất anh Nam thua ở lượt chơi thứ nhất là 0,4.		
b) Nếu Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất anh Nam thua ở lượt chơi thứ hai là 0,4.		
c) Nếu Nam thua ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất anh Nam thua ở lượt chơi thứ hai là 0,7.		
d) Xác suất anh Nam thắng ở lượt chơi thứ hai là 0,4.		

Câu 20 (Mức độ 3). Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bi đỏ là $\frac{1}{2}$.		
b) Nếu viên bi được lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bi đỏ thì xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ là $\frac{6}{11}$.		
c) Nếu viên bi được lấy ra từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai là bi xanh thì xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ là $\frac{7}{11}$.		
d) Xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là viên bi đỏ là $\frac{13}{22}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21 (Mức độ 2). Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là 0,9 nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là 0,05 nếu đó là mục tiêu giả. Có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Tính xác suất để radar phát hiện cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

Câu 22 (Mức độ 2). Theo thống kê, tỉ lệ khách hàng thân thiết của một siêu thị là 35%. Trong nhóm khách hàng thân thiết này, có 74% khách hàng mua rau sạch. Trong nhóm khách hàng còn lại, tỉ lệ mua rau sạch là 28%. Tính tỉ lệ khách hàng mua rau sạch của siêu thị đó là bao nhiêu phần trăm. *(Làm tròn đến hàng phần mười)*

KQ: | | | | |

Câu 23 (Mức độ 2). Một loại vaccine được tiêm ở địa phương X. Người có bệnh nền thì với xác suất 0,35 có phản ứng phụ sau tiêm, người không có bệnh nền thì chỉ có phản ứng phụ sau tiêm với xác suất 0,16. Chọn ngẫu nhiên một người được tiêm vaccine. Tính xác suất người này có phản ứng phụ, biết rằng tỉ lệ người có bệnh nền ở địa phương X là 18%. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

Câu 24 (Mức độ 2). Một nhà máy có hai phân xưởng cùng sản xuất một loại sản phẩm. Phân xưởng thứ nhất sản xuất 60% và phân xưởng thứ hai sản xuất 40% tổng số sản phẩm của cả nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của từng phân xưởng lần lượt là 16% và 20%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho hàng của nhà máy. Tính xác suất để lấy được phế phẩm. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)* KQ: | | | | |

Câu 25 (Mức độ 3). Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

Câu 26 (Mức độ 3). Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Tính xác suất của biến cố B. *(Làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

DẠNG 2 Công thức Bayes

- Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $\mathrm{P}(A)>0$ và $0<\mathrm{P}(B)<1$. Khi đó

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)}{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A\mid \overline{B})}$$

gọi là ***công thức Bayes***.

- Với $\mathrm{P}(A)>0$, công thức $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)}{\mathrm{P}(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

- Các công thức cần nhớ:
  - $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A})=1$;
  - $\mathrm{P}(A\mid B)+\mathrm{P}(\overline{A}\mid B)=1$;
  - $\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap \overline{B})=\mathrm{P}(A)$;
  - $\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)=\mathrm{P}(B)$.

Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra. Khi áp dụng giải toán, biến cố cần tìm xác suất chi phối bởi hệ đầy đủ biến cố trước đó. Vì vậy, để giải toán xác suất này, ta cần:

- *Phân tích kỹ đề bài, linh hoạt liên tưởng vào thực tế.*
- *Xác định được nhóm biến cố đầy đủ ở giai đoạn đầu của sự việc mà bài toán đã đưa ra.*
- *Gọi tên biến cố xảy ra ở giai đoạn sau liên quan đến nhóm biến cố đầy đủ được xác định trước đó.*
- *Xác định xác suất của từng biến cố ở hệ đầy đủ, các xác suất có điều kiện của biến cố ở giai đoạn sau với từng biến cố trong hệ đầy đủ.*
- *Nếu biết biến cố xảy ra trong giai đoạn sau, để xác định xác suất của một biến cố nào đó ở giai đoạn trước liên quan đến biến cố ở giai đoạn sau như thế nào ta sử dụng* ***Công thức Bayes***.

Ý nghĩa của công thức Bayes: *Một nhà nghiên cứu quan tâm đến xác suất xảy ra của biến cố A. Theo tính toán ban đầu A có xác suất là $\mathrm{P}(A)=p$. Sau đó, nhà nghiên cứu có được thông tin rằng: "Biến cố B đã xảy ra". Với thông tin mới này, nhà nghiên cứu sẽ cập nhật lại hiểu biết của mình về khả năng xảy ra biến cố A, bằng cách tính $\mathrm{P}(A\mid B)$, xác suất của A khi biết B đã xảy ra. Công thức Bayes cho ta tính $\mathrm{P}(A\mid B)$.*

1 Ví dụ mẫu

Ví dụ 17. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%. Giả sử ta gặp một cư dân của xã, gọi A là biến cố "Người đó có hút thuốc lá" và B là biến cố "Người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp".

a) Vẽ sơ đồ hình cây.

b) Nếu ta gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp là bao nhiêu?

c) Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp thì xác

suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

Ví dụ 18. Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính).

a) Vẽ sơ đồ cây biểu thị tình huống trên.

b) Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Ví dụ 19. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1%.

a) Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và tính xác suất để sản phẩm đó bị lỗi.

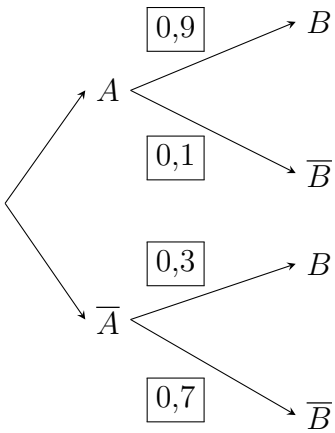
b) Biết rằng sản phẩm được chọn bị lỗi. Hỏi xác suất sản phẩm đó do phân xưởng nào sản xuất cao hơn?

Ví dụ 20. Trở lại tình huống mở đầu Mục 2. Tính xác suất để ông M mắc bệnh hiểm nghèo X nếu kết quả xét nghiệm cho kết quả dương tính.

Ví dụ 21 (Mức độ 2).

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

A. $\dfrac{6}{11}$. **B.** $\dfrac{7}{11}$. **C.** $\dfrac{8}{11}$. **D.** $\dfrac{9}{11}$.



Ví dụ 22. Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả là âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm là dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính.
a) Trước khi tiến hành xét nghiệm xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?
b) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

Ví dụ 23. Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai (giả sử viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ). Tính xác suất viên bi đỏ đó là của hộp thứ nhất.

Ví dụ 24. Một nghiên cứu đã chỉ ra rằng tỉ lệ người bị lao phổi trong nhóm X những người mắc phải hội chứng suy giảm miễn dịch H là 15,2%. Kết quả nghiên cứu về một số triệu chứng lâm sàng như có ho trong vòng bốn tuần, hoặc có bị sốt trong vòng bốn tuần, hoặc ra mồ hôi ban đêm từ ba tuần trở lên của nhóm X cho thấy.

- Trong số những người mắc bệnh lao phổi, có 93,2% trường hợp có ít nhất một triệu chứng;

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Trong số những người không mắc bệnh lao phổi, có 35,8% trường hợp không có triệu chứng nào.

Nếu bác sĩ gặp một bệnh nhân thuộc nhóm X và bệnh nhân đó có ít nhất một triệu chứng trên thì xác suất bệnh nhân này mắc bệnh lao phổi là bao nhiêu?

Ví dụ 25 (Mức độ 1). Cho $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$; $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$; $\mathrm{P}\left(B\mid \overline{A}\right)=\dfrac{1}{4}$. Giá trị của $\mathrm{P}(A\mid B)$ là

A. $\dfrac{7}{17}$. **B.** $\dfrac{8}{17}$. **C.** $\dfrac{5}{17}$. **D.** $\dfrac{9}{17}$.

Ví dụ 26. Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả là âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm là dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính.

Phát biểu	Đ	S
a) Trước khi tiến hành xét nghiệm xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 0,005.		
b) Xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N không bị bệnh Y là 0,97.		
c) Xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y là 0,94.		
d) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 0,997.		

Ví dụ 27. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00. *(Làm tròn hai chữ số thập phân)*

KQ: | | | | |

Ví dụ 28.

Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus.

(Nguồn: https:// tapchiyhocvietnam.vn)

Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Một người làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Tính xác suất người đó thực sự nhiễm virus *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |



2 Bài tập tự luận

Bài 11. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00.

Bài 12. Trong một kho rượu có 30% là rượu loại I. Chọn ngẫu nhiên một chai rượu đưa cho ông Tùng, một người sành rượu, để nếm thử. Biết rằng, một chai rượu loại I có xác suất 0,9 để ông Tùng xác nhận là loại I; một chai rượu không phải loại I có xác suất 0,95 để ông Tùng xác nhận đây không phải là loại I. Sau khi nếm, ông Tùng xác nhận đây là rượu loại I. Tính xác suất để chai rượu đúng là rượu loại I.

Bài 13. Trở lại tình huống mở đầu Mục 2. Tính xác suất để ông M mắc bệnh hiểm nghèo X nếu kết quả xét nghiệm cho kết quả dương tính.

Bài 14. Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả là âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,94 xét nghiệm là dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính.

a) Trước khi tiến hành xét nghiệm xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

b) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là bao nhiêu?

Bài 15. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.
Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa.
Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên.

Bài 16. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng.

Bài 17. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;

b) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Bài 18. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

b) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.

c) Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

Bài 19. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh liện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao nhất?

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Bài 20. Một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, trong đó có 2 chiếc thẻ màu xanh và 18 chiếc thẻ màu trắng. Bạn Châu rút thẻ hai lần một cách ngẫu nhiên, mỗi lần rút một thẻ và thẻ được rút ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Châu đều rút được thẻ màu xanh.

Bài 21. Bạn Nam tham gia một gian hàng trò chơi dân gian trong hội xuân của trường. Trò chơi có hai lượt chơi. Xác suất để Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất là 0,6. Nếu Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất Nam thắng ở lượt chơi thứ hai là 0,8. Ngược lại, nếu Nam thua ở lượt chơi thứ nhất thì xác suất Nam thắng ở lượt chơi thứ hai là 0,3.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các khả năng xảy ra và xác suất tương ứng khi Nam tham gia trò chơi này.

b) Biết Nam đã thắng ở lượt chơi thứ hai, tính xác suất Nam thắng ở lượt chơi thứ nhất.

Bài 22. Trong một kì sát hạch lái xe có 65% thí sinh nam. Biết rằng 80% thí sinh nam và 70% thí sinh nữ đỗ kì sát hạch này.

a) Tính tỉ lệ thí sinh đỗ kì sát hạch này.

b) Chọn ngẫu nhiên một thí sinh đã đỗ kì sát hạch. Tính xác suất thí sinh đó là nữ.

Bài 23. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A cho kết quả như sau: khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70% còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con.

(Nguồn: F. M. Dekking et al., Amodern introduction to probability and statistics Understanding why and how, Springer, 2005)

Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

Bài 24.

Khi phát hiện một vật thể bay, xác suất một hệ thống radar phát cảnh báo là $0,9$ nếu vật thể bay đó là mục tiêu thật và là $0,05$ nếu đó là mục tiêu giả. Có 99% các vật thể bay là mục tiêu giả. Biết rằng hệ thống radar đang phát cảnh báo khi phát hiện một vật thể bay. Tính xác suất vật thể đó là mục tiêu thật.



Bài 25. Trong một kho rượu có 30% là rượu loại I. Chọn ngẫu nhiên một chai rượu đưa cho ông Tùng, một người sành rượu, để nếm thử. Biết rằng, một chai rượu loại I có xác suất 0,9 để ông Tùng xác nhận là loại I; một chai rượu không phải loại I có xác suất 0,95 để ông Tùng xác nhận đây không phải là loại I. Sau khi nếm, ông Tùng xác nhận đây là rượu loại I. Tính xác suất để chai rượu đúng là rượu loại I.

Bài 26 (Mức độ 3). Có hai hộp đựng các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp thứ hai chứa 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi từ hộp thứ hai (giả sử viên bi được lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ). Tính xác suất viên bi đỏ đó là của hộp thứ nhất.

Bài 27. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;

b) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Bài 28. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

b) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.

c) Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

Bài 29. Giả sử có khoảng 40% thư điện tử (email) gửi đến một địa chỉ là thư rác. Người ta sử dụng một thuật toán để phân loại thư rác, biết rằng thuật toán này có thể phân loại đến 99% thư rác và tỉ lệ sai sót khi phân loại thư bình thường thành thư rác là 5%. Tính xác suất một thư điện tử là thư bình thường nếu thư này đã được phân loại đúng.

3 Bài tập trắc nghiệm bốn phương án lựa chọn

Câu 27. Cho hai biến cố A và B, với $\mathrm{P}(B)=0{,}8$, $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}7$, $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=0{,}45$. Tính $\mathrm{P}(B\mid A)$.

A. 0,25. **B.** 0,65. **C.** $\dfrac{56}{65}$. **D.** 0,5.

Câu 28 (Mức độ 1). Theo công thức Bayes ta có

A. $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(B\mid A)}{\mathrm{P}(A)}$. **B.** $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B\mid A)}{\mathrm{P}(B)}$.

C. $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B\mid A)}{\mathrm{P}(B)}$. **D.** $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A\mid B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Câu 29 (Mức độ 1). Theo công thức Bayes ta có

A. $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=\dfrac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(B\mid \overline{A})}$.

B. $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=\dfrac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(B\mid \overline{A})}$.

C. $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=\dfrac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(B\mid \overline{A})}$.

D. $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=\dfrac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid A)}{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid A)+\mathrm{P}(\overline{A})\cdot\mathrm{P}(\overline{B}\mid \overline{A})}$.

Câu 30 (Mức độ 2). Cho $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{5}$; $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{2}{3}$; $\mathrm{P}\left(B\mid \overline{A}\right)=\dfrac{1}{4}$. Giá trị của $\mathrm{P}(A\mid B)$ là

A. $\dfrac{33}{35}$. **B.** $\dfrac{32}{35}$. **C.** $\dfrac{9}{35}$. **D.** $\dfrac{26}{35}$.

Câu 31 (Mức độ 2). Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $\mathrm{P}(\overline{A}.\overline{B})=0{,}35$, $\mathrm{P}(A)=0{,}25$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$. Giá trị của $\mathrm{P}(A\mid B)$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{15}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

TS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 32. Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Khánh Hòa nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Khánh Hòa thì khả năng mà người đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

A. 15%. **B.** 29%. **C.** 31%. **D.** 26%.

Câu 33. Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Khánh Hòa nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

A. $\dfrac{7}{13}$. **B.** $\dfrac{6}{13}$. **C.** $\dfrac{4}{13}$. **D.** $\dfrac{9}{13}$.

Câu 34. Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15. do có nhiễu trên đường truyền nên $\dfrac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín hiệu B còn $\dfrac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo cà thu được như A. Xác suất thu được tín hiệu A là

A. $\dfrac{963}{1120}$. **B.** $\dfrac{283}{1120}$. **C.** $\dfrac{837}{1120}$. **D.** $\dfrac{157}{1120}$.

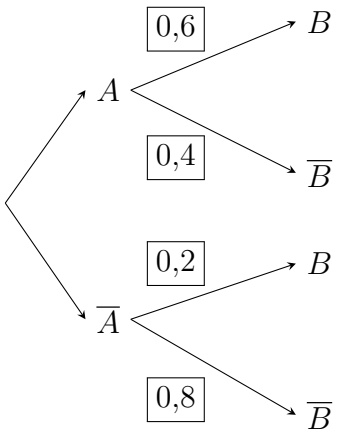
Câu 35. Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15. Do có nhiễu trên đường truyền nên $\dfrac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín hiệu B còn $\dfrac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo cà thu được như A. Tìm xác suất thu được đúng tín hiệu lúc phát.

A. $\dfrac{272}{1120}$. **B.** $\dfrac{373}{279}$. **C.** $\dfrac{173}{279}$. **D.** $\dfrac{272}{279}$.

Câu 36 (Mức độ 2).

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}48$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ là

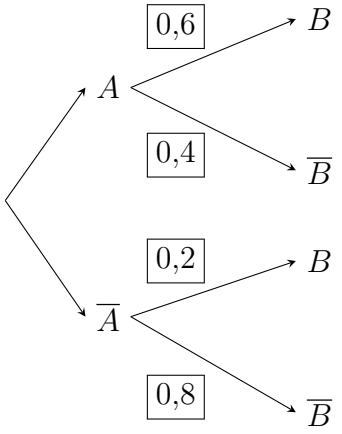
A. $\dfrac{26}{49}$. **B.** $\dfrac{36}{49}$. **C.** $\dfrac{15}{39}$. **D.** $\dfrac{36}{59}$.



Câu 37 (Mức độ 2).

Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $\mathrm{P}(A) = 0{,}72$. Tính $\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$ là

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{16}{25}$. **C.** $\dfrac{9}{25}$. **D.** $\dfrac{3}{16}$.



Câu 38. Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ

lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh) thì xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

A. 0,4. **B.** 0,35. **C.** 0,5. **D.** 0,65.

Câu 39 (Mức độ 3). Một bệnh viện đang xét nghiệm cho một số bệnh nhân để xác định liệu họ có nhiễm virus X hay không. Xác suất để một bệnh nhân bị nhiễm virus X là 0,05. Khi xét nghiệm, nếu một bệnh nhân bị nhiễm thì xác suất để kết quả xét nghiệm dương tính là 0,95. Nếu một bệnh nhân không bị nhiễm thì xác suất để kết quả xét nghiệm âm tính là 0,98. Một bệnh nhân được chọn ngẫu nhiên và có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để bệnh nhân đó thực sự bị nhiễm virus X là

A. $\dfrac{133}{2000}$. **B.** $\dfrac{19}{400}$. **C.** $\dfrac{5}{7}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

4 Bài tập trắc nghiệm đúng sai

Câu 40 (Mức độ 1). Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên với $0 < \mathrm{P}(A) < 1$ và $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B \mid \overline{A})}$.		
b) $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(\overline{A})}$.		
c) $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(\overline{A} \mid B)}{\mathrm{P}(\overline{A})}$.		
d) $\mathrm{P}(\overline{A} \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B \mid \overline{A})}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B \mid \overline{A})}$.		

Câu 41 (Mức độ 2). Trong Y học, để chẩn đoán bệnh X nào đó, người ta thường dùng một xét nghiệm. Xét nghiệm dương tính, tức là xét nghiệm đó kết luận một người mắc bệnh X. Xét nghiệm âm tính, tức là xét nghiệm đó kết luận một người không mắc bệnh X. Vì không có một xét nghiệm nào tuyệt đối đúng nên trên thực tế có thể xảy ra hai sai lầm sau:

- Xét nghiệm dương tính nhưng thực tế người xét nghiệm không mắc bệnh. Ta gọi đây là dương tính giả.
- Xét nghiệm âm tính nhưng thực tế người xét nghiệm lại mắc bệnh. Ta gọi đây là âm tính giả.

Ông M đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo X. Biết rằng, nếu một người mắc bệnh X thì với xác suất 0,95 xét nghiệm cho dương tính; nếu một người không bị bệnh X thì với xác suất 0,01 xét nghiệm cho dương tính.

Xét nghiệm của ông M cho kết quả dương tính. Ông M hoảng hốt khi nghĩ rằng mình có xác suất 0,95 mắc bệnh hiểm nghèo X. Gọi A là biến cố "Ông M mắc bệnh hiểm nghèo X"; B là biến cố "Xét nghiệm cho kết quả dương tính". Thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo X là 0,2%.

Phát biểu	Đ	S
a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là $0,2$.		
b) Xác suất xét nghiệm cho kết quả dương tính khi ông M mắc bệnh hiểm nghèo X là 0,95.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 LƯU HÀNH NỘI BỘ

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Phát biểu	Đ	S
c) Xác suất xét nghiệm cho kết quả dương tính khi ông M không mắc bệnh hiểm nghèo X là 0,05.		
d) Sau khi xét nghiệm cho kết quả dương tính, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo X của ông M là $\frac{95}{594}$.		

Câu 42. Một thống kê cho thất tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là $0,5\%$. Bà N đi xét nghiệm bệnh hiểm nghèo Y và nhận được kết quả âm tính. Biết rằng, nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất $0,94$ xét nghiệm dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 0,97 xét nghiệm là âm tính. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 0,995.		
b) Xác suất để bà N có xét nghiệm là âm tính nếu bà N bị bệnh Y là 0,03.		
c) Xác suất để bà N có xét nghiệm âm tính là 0,9 .		
d) Sau khi xét nghiệm cho kết quả âm tính, xác suất không mắc bệnh hiểm nghèo Y của bà N là 99,97%.		

Câu 43. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá là 70% và 15%. Giả sử ta gặp một cư dân của xã, khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó không hút thuốc lá là 80%.		
b) Nếu ta gặp một cư dân của xã không gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 20%.		
c) Xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là 26%.		
d) Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 54%.		

Câu 44 (Mức độ 2). Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường.

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất học sinh đó tham gia câu lạc bộ nghệ thuật nếu là học sinh nữ là 0,18.		
b) Xác suất học sinh đó tham gia câu lạc bộ nghệ thuật nếu là học sinh nam là 0,15.		
c) Xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật là 0,1656.		
d) Biết rằng học sinh có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Xác suất học sinh đó là nam là $\frac{13}{23}$.		

Câu 45 (Mức độ 3). Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

Xét biến cố A: "Thư đó là thư rác". Xét biến cố B: "Thư đó bị chặn".

Phát biểu	Đ	S
a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Xác suất để đó là thư rác là $\mathrm{P}(A \mid B)$.		
b) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Xác suất để đó là thư rác là $\dfrac{282}{385}$.		
c) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Xác suất để đó là thư đúng là $\dfrac{3201}{3206}$.		
d) Trong số các thư không bị chặn, có khoảng 2,56% là thư rác.		

Câu 46 (Mức độ 4). Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai.
Gọi A là biến cố "Viên bi được chuyển từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai là viên bi xanh" và B là biến cố "Hai viên bi được lấy ngẫu nhiên đồng thời từ hộp thứ hai là bi xanh". Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{6}{55}$.		
b) Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi xanh là $\dfrac{4}{55}$.		
c) Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi xanh, xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi xanh là $\dfrac{1}{3}$.		
d) Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai luôn có bi đỏ, xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất là bi đỏ là $\dfrac{49}{153}$.		

5 Bài tập trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 47. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I. *(làm tròn hai chữ số thập phân)* KQ: | | | | |

Câu 48.

Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 2% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Trong các vụ tai nạn ở địa phương đó, người ta nhận thấy có 10% là do tài xế có sử dụng điện thoại khi lái xe gây ra. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần? KQ: | | | | |



Câu 49. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh X ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh X là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh X là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Biết rằng người đó mắc bệnh X. Khi đó xác suất người đó không tiêm vắc xin phòng bệnh X có dạng $\dfrac{a}{b}$. Tính $b - a$? KQ: | | | | |

Câu 50. Phòng công nghệ của một công ty có 4 kĩ sư và 6 kĩ thuật viên. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 người từ phòng. Tính xác suất để cả 3 người được chọn đều là kĩ sư, biết rằng trong 3 người được chọn có ít nhất 2 kĩ sư. KQ: | | | | |

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026 THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 51. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố"Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật. *(Làm tròn hai chữ số thập phân)*

KQ: | | | | |

Câu 52. Một khu dân cư có 85% các hộ gia đình sử dụng điện để đun nấu. Hơn nữa, có 21% các hộ gia đình sử dụng bếp từ để đun nấu. Chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình, tính xác suất hộ đó sử dụng bếp từ để đun nấu, biết hộ đó sử dụng điện để đun nấu. KQ: | | | | |

Câu 53. Có hai cái hộp giống nhau, hộp thứ nhất chứa 5 quả bóng bàn màu trắng và 3 quả bóng bàn màu vàng, hộp thứ hai chứa 4 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng. Minh lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp thứ nhất. Nếu quả bóng đó là bóng vàng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 quả bóng từ hộp thứ hai, còn nếu quả bóng đó màu trắng thì Minh lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 quả bóng từ hộp thứ hai. Biết rằng các quả bóng lấy ra từ hộp thứ hai đều có màu trắng. Tính xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp thứ nhất có màu vàng *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 54. Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*. KQ: | | | | |

Câu 55. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Gặp ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp. Tính xác suất nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 56. Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Gặp ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp. Biết rằng nhân viên đó có mua bảo hiểm nhân thọ. Tính xác suất nhân viên đó là nam *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 57. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó.
Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 58. Có hai chuồng thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 7 con thỏ đen và 3 con thỏ trắng. Trước tiên, từ chuồng II lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ rồi cho vào chuồng I. Sau đó, từ chuồng I lấy ra ngẫu nhiên 1 con thỏ. Tính xác suất để con thỏ được lấy ra là con thỏ trắng *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)*.

KQ: | | | | |

Câu 59. Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó

có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường. Tính xác suất để linh kiện điện tử đó được đóng dấu OTK *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 60. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 61. Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 62. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

KQ: | | | | |

Câu 63. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để đó là thư đúng.

KQ: | | | | |

Câu 64. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Trong số các thư bị chặn, có $a\%$ là thư đúng. Trong số các thư không bị chặn, có $b\%$ là thư rác. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 65. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 66. Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Biết rằng học sinh có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 67. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Tính xác suất người đó mắc bệnh A (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 68. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Biết rằng người đó mắc bệnh A. Tính xác suất người đó không tiêm vắc xin phòng bệnh A *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 69. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Tính xác suất của các biến cố A và B *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

Câu 70. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại nói thật với xác suất 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật *(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).*

KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH
ThS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TOÁN THPT: DẠY THẬT - HỌC THẬT - GIÁ TRỊ THẬT

K12 – CHƯƠNG 6

§3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1.

Để thử nghiệm tác dụng điều trị bệnh mất ngủ của hai loại thuốc X và Y, người ta tiến hành thử nghiệm trên 4 000 người bệnh tình nguyện. Kết quả được cho trong bảng thống kê bên. Chọn ngẫu nhiên 1 người bệnh tham gia tình nguyện thử nghiệm thuốc.

Kết quả \ Dùng thuốc	X	Y
Khỏi bệnh	1600	1200
Không khỏi bệnh	800	400

a) Tính xác suất để người đó khỏi bệnh nếu biết người đó uống thuốc X.

b) Tính xác suất để người bệnh đó uống thuốc Y, biết rằng người đó khỏi bệnh.

Bài 2. Một nhóm có 25 học sinh, trong đó 14 học sinh học khá môn Toán, 16 học sinh học khá môn Vật lí, 1 em không học khá cả hai môn Toán và Vật lí. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong số đó, tính xác suất để học sinh đó

a) Học khá môn Toán, đồng thời học khá môn Vật lí.

b) Học khá môn Toán, nhưng không học khá môn Vật lí.

c) Học khá môn Toán, biết rằng học sinh đó học khá môn Vật lí.

Bài 3. Chuồng I có 5 con gà mái, 2 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái, 5 con gà trống. Bác Mai bắt một con gà trong số đó theo cách sau: Bác tung một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Nếu số chấm chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng I, nếu số chấm không chia hết cho 3 thì bác chọn chuồng II. Sau đó, từ chuồng đã chọn bác bắt ngẫu nhiên một con gà. Tính xác suất để bác Mai bắt được con gà mái.

Bài 4. Ông Hải rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ bộ bài tây 52 lá. Gọi A là biến cố "Lá bài được chọn là lá K" và B là biến cố "Lá bài được chọn là chất cơ". Tính $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$.

Bài 5. Một xạ thủ lần lượt bắn 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng bia của viên thứ nhất là 0,7; của viên thứ hai là 0,8 và của cả 2 viên là 0,6. Gọi A là biến cố "Viên đạn thứ nhất trúng bia", B là biến cố "Viên đạn thứ hai trúng bia".

a) Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(B \mid A)$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập không, tại sao?

Bài 6. Một vận động viên bóng bàn thắng 60% các séc đấu anh ta được ra bóng trước và 45% các séc đấu anh ta không được ra bóng trước. Trong một séc đấu, trọng tài gieo một đồng xu cân đối để xác định ai là người ra bóng trước. Tính xác suất vận động viên đó thắng séc đấu.

Bài 7. Một doanh nghiệp có 30% số nhân viên trên 40 tuổi. Tỉ lệ nhân viên trên 40 tuổi có bằng đại học là 40%. Tỉ lệ nhân viên không quá 40 tuổi có bằng đại học là 60%. Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên của doanh nghiệp.

a) Tính xác suất nhân viên được chọn có bằng đại học.

b) Biết nhân viên đó có bằng đại học, tính xác suất để nhân viên đó trên 40 tuổi.

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Bài 8. Hai máy X và Y cùng sản xuất một sản phẩm. Tỉ lệ sản phẩm đạt chuẩn của máy X và máy Y lần lượt là 95% và 90%. Một hộp chứa 1 sản phẩm do máy X sản xuất và 9 sản phẩm do máy Y sản xuất. Chọn ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ hộp.

a) Tính xác suất cả 2 sản phẩm được chọn đều đạt chuẩn.

b) Biết rằng cả 2 sản phẩm lấy ra đều đạt chuẩn, tính xác suất chúng do máy Y sản xuất.

Bài 9. Người ta quan sát một nhóm người trưởng thành trong 5 năm. Ở thời điểm bắt đầu quan sát, có 30% số người được quan sát thường xuyên hút thuốc. Sau 5 năm, người ta nhận thấy tỉ lệ tử vong trong số những người thường xuyên hút thuốc cao gấp 3 lần tỉ lệ này trong nhóm những người còn lại. Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm và thấy người này tử vong trong 5 năm quan sát, tính xác suất người đó thường xuyên hút thuốc.

Bài 10. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi đỏ. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp thứ nhất và bỏ vào hộp thứ hai, rồi từ hộp thứ hai chọn ra ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Tính xác suất của biến cố 2 viên bi lấy ra ở hộp thứ hai có cùng màu.

b) Biết 2 viên bi lấy ra ở hộp thứ hai có cùng màu, tính xác suất 3 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng có cùng màu.

Bài 11. Một cửa hàng kinh doanh tổ chức rút thăm trúng thưởng cho hai loại sản phẩm. Tỉ lệ trúng thưởng của các loại sản phẩm I, II lần lượt là 6%; 4%. Trong một hộp kín gồm các thăm cùng loại, người ta để lẫn lộn 200 chiếc thăm cho sản phẩm loại I và 300 chiếc thăm cho sản phẩm loại II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên 1 chiếc thăm từ chiếc hộp đó.

a) Tính xác suất để chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng.

b) Giả sử chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng. Xác suất chiếc thăm đó thuộc loại sản phẩm nào là cao nhất?

Bài 12. Một xạ thủ bắn vào bia số 1 và bia số 2. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, bia số 2 lần lượt là 0,8; 0,9. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng cả hai bia là 0,8. Xét hai biến cố A: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 1"; B: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 2".

a) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

b) Biết xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

c) Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

Bài 13. Một chiếc hộp có 40 viên bi, trong đó có 12 viên bi màu đỏ và 28 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân lấy ngẫu nhiên viên bi từ chiếc hộp đó hai lần, mỗi lần lấy ra một viên bi và viên bi được lấy ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Ngân đều lấy ra được viên bi màu vàng.

Bài 14. Giả sử trong một nhóm người có 2 người nhiễm bệnh, 58 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 85% nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất để bị xét nghiệm có phản ứng dương tính là 7%.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Giả sử X là một người trong nhóm bị xét nghiệm có kết quả dương tính. Tính xác suất để X là người nhiễm bệnh.

Bài 15. Trong một cuộc khảo sát trên một nhóm gồm 50 học sinh chơi cầu lông có cả các bạn nam và các bạn nữ, số liệu thống kê các bạn thuận tay trái và thuận tay phải được cho như *Bảng* 6.3.

Bảng 6.3

Giới tính \ Tay thuận	Tay trái	Tay phải
Nam	5	32
Nữ	2	11

Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trong nhóm này. Gọi A là biến cố "Người được chọn là bạn nam", B là biến cố "Chọn được người thuận tay trái", C là biến cố "Chọn được người thuận tay phải."
Tính và giải thích ý nghĩa của $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(A \mid C)$

Bài 16. Một hãng hàng không sau khi nghiên cứu các chuyến bay cho kết quả như sau: Xác suất để một chuyến bay khởi hành đúng giờ là $0,83$; xác suất để một chuyến bay đến nơi đúng giờ là $0,82$; xác suất để chuyến bay khởi hành đúng giờ và đến nơi đúng giờ là $0,78$. Gọi A là biến cố "Chuyến bay khởi hành đúng giờ" và B là biến cố "Chuyến bay đến nơi đúng giờ".

a) Tính và giải thích ý nghĩa của $\mathrm{P}(A \mid B)$.

b) Tính và giải thích ý nghĩa của $\mathrm{P}(B \mid A)$.

c) Tính $\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$ và cho biết xác suất chuyến bay đến nơi đúng giờ là tăng hay giảm khi có thêm thông tin chuyến bay khở hành không đúng giờ.

Bài 17. Theo thống kê, tỉ lệ khách hàng thân thiết của một siêu thị là 35%. Trong nhóm khách hàng thân thiết này, có 74% khách hàng mua rau sạch. Trong nhóm khách hàng còn lại, tỉ lệ mua rau sạch là 28%

a) Tính tỉ lệ khách hàng mua rau sạch của siêu thị đó.

b) Trong một dịp đặc biệt, người ta đã chọn được một khách hàng mua rau sạch. Tính xác suất người này là khách hàng thân thiết.

Bài 18. Trung tâm kiểm soát và phòng ngừa dịch bệnh Hoa Kỳ (Centers for Disease Control and Prevention, viết tắt là (CDC) thống kê vào thời điểm năm 2020 – 2021 về số lượng sốc phản vệ sau khi tiêm vaccine ở một số nơi tại Hoa Kỳ và châu Âu như sau: Trong 360,19 triệu liều vaccine P được sử dụng có 581 ca sốc phản vệ (có khả năng gây tử vong) và 4 259 ca phản ứng phụ (không sốc phản vệ, không gây tử vong); trong 67,72 triệu liều vaccine A được sử dụng có 195 ca sốc phản vệ và 1 118 ca phản ứng phụ.

(Nguồn: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8626274/)

a) Xét ngẫu nhiên một người trong số được thống kê ở trên. Tính xác suất để người đó thuộc trường hợp sốc phản vệ (có khả năng gây tử vong).

b) Nếu gặp một người có biểu hiện sốc phản vệ (có khả năng gây tử vong) trong số này thì có thể nói khả năng cao là người đó đã tiêm vaccine P hay A ?

Bài 19. Một nhà máy có hai phân xưởng cùng sản xuất một loại sản phẩm. Phân xưởng thứ nhất sản xuất 60% và phân xưởng thứ hai sản xuất 40% tổng số sản phẩm của cả nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của từng phân xưởng lần lượt là 16% và 20%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho hàng của nhà máy.

a) Tính xác suất để lấy được phế phẩm.

b) Giả sử đã lấy được phế phẩm, tính xác suất phế phẩm đó do phân xưởng thứ nhất sản xuất.

c) Nếu lấy được sản phẩm tốt, khả năng sản phẩm đó do phân xưởng nào sản xuất là cao hơn?

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM BỐN PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}8$; $\mathrm{P}(B)=0{,}5$ và $\mathrm{P}(AB)=0{,}2$.Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{\mathrm{P}(A\mid B)}{\mathrm{P}(A)}-\dfrac{\mathrm{P}(B\mid A)}{\mathrm{P}(B)}$.

A. $-0{,}5$. **B.** 0. **C.** $0{,}5$. **D.** 1.

Câu 2. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $\mathrm{P}(A)=0{,}2$; $\mathrm{P}(B)=0{,}4$. Khi đó, $\mathrm{P}(A\mid B)$ bằng

A. $0{,}5$. **B.** $0{,}2$. **C.** $0{,}4$. **D.** 0.

Câu 3. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ và $\mathrm{P}(A|B)=0{,}25$. Xác suất của biến cố A giao B là

A. $0{,}1$. **B.** $0{,}2$. **C.** $0{,}25$. **D.** $0{,}4$.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ và $\mathrm{P}(A|B)=0{,}25$. Xác suất của B với điều kiện A là

A. $0{,}2$. **B.** $0{,}25$. **C.** $0{,}5$. **D.** $0{,}75$.

Câu 5. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ và $\mathrm{P}(A|B)=0{,}25$. Xác suất của biến cố A với điều kiện $A\cup B$ là

A. $0{,}4$. **B.** $0{,}5$. **C.** $0{,}8$. **D.** 1.

Câu 6. Người ta nhập hai lô hàng vào kho. Lô thứ nhất chứa 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Lô thứ hai có 4 phế phẩm và 8 sản phẩm tốt. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Xác suất chọn được một sản phẩm tốt là

A. $\dfrac{15}{22}$. **B.** $\dfrac{7}{15}$. **C.** $\dfrac{7}{22}$. **D.** $\dfrac{83}{242}$.

Câu 7. Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỉ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiêu từ hai phòng khám và biết người này là nam, xác suất để người bệnh được chọn đến từ phòng A là

A. $0{,}6$. **B.** $0{,}5$. **C.** $0{,}4$. **D.** $0{,}3$.

Câu 8. Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $\mathrm{P}(\overline{AB})=0{,}35$, $\mathrm{P}(A)=0{,}25$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$. Giá trị của $\mathrm{P}(A\mid B)$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{15}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 9.

Toàn thể nhân viên của một công ty được hỏi ý kiến về một dự thảo chính sách phúc lợi mới. Kết quả được ghi lại ở bảng bên. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty. Gọi A là biến cố "Nhân viên đó là nam giới" và B là biến cố "Nhân viên đó ủng hộ dự thảo chính sách phúc lợi mới". Xác suất của biến cố A với điều kiện B là

	Ủng hộ	Không ủng hộ
Nhân viên nam	45	12
Nhân viên nữ	35	8

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{15}{19}$. **C.** $\dfrac{21}{50}$. **D.** $\dfrac{7}{16}$.

Câu 10.

Toàn thể nhân viên của một công ty được hỏi ý kiến về một dự thảo chính sách phúc lợi mới. Kết quả được ghi lại ở bảng bên. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của công ty. Gọi A là biến cố "Nhân viên đó là nam giới" và B là biến cố "Nhân viên đó ủng hộ dự thảo chính sách phúc lợi mới". Xác suất xảy ra ít nhất một trong hai biến cố A và B là

	Ủng hộ	Không ủng hộ
Nhân viên nam	45	12
Nhân viên nữ	35	8

A. 0,45. **B.** 0,67. **C.** 0,8. **D.** 0,92.

Câu 11. Bạn Lan có 2 con xúc xắc cân đối, 1 con có màu xanh và 1 con có màu đỏ. Lan gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Xác suất của biến cố con xúc xắc màu xanh xuất hiện mặt 1 chấm, biết rằng tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng 5 là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 12. Bạn Lan có 2 con xúc xắc cân đối, 1 con có màu xanh và 1 con có màu đỏ. Lan gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Xác suất của biến cố con xúc xắc màu đỏ xuất hiện mặt 6 chấm, biết rằng có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm là

A. $\frac{13}{36}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{6}{11}$.

Câu 13. An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la đen là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Câu 14. An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la trắng là

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{2}{15}$. **C.** $\frac{3}{16}$. **D.** $\frac{4}{17}$.

Câu 15. An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được chiếc kẹo sô-cô-la đen ở lần thứ nhất và chiếc kẹo sô-cô-la trắng ở lần thứ hai là

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{16}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{4}{17}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 16. Ông Khải lần lượt rút ra một cách ngẫu nhiên 2 lá bài từ bộ bài tây 52 lá. Lá bài rút ra không được trả lại. Gọi A: "Lá bài đầu tiên rút ra là chất cơ" và B: "Lá bài thứ hai rút ra là lá Q".

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất của biến cố A là 0,25.		
b) Xác suất của biến cố A giao B là 0,25.		
c) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là 0,25.		
d) A và B là hai biến cố độc lập.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 17. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố

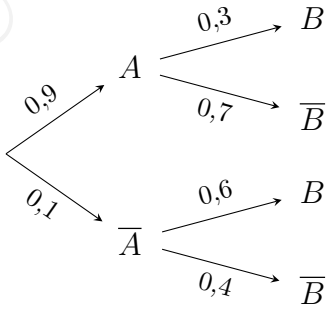
- A: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh";
- B: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Toán".

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$.		
b) $\mathrm{P}(B) = 0{,}625$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}75$.		
d) $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}48$.		

Câu 18.

Cho sơ đồ hình cây như hình bên



Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất của biến cố B với điều kiện A không xảy ra là 0,6.		
b) Xác suất cả hai biến cố A và B đều xảy ra là 0,3.		
c) Xác suất của biến cố B là 0,9.		
d) Xác suất của biến cố A với điều kiện B là $\frac{1}{19}$.		

Câu 19. Một cửa hàng có hai loại bóng đèn Led, trong đó có 65% bóng đèn Led là màu trắng và 35% bóng đèn Led là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn Led màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn Led màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn Led từ cửa hàng. Xét các biến cố

- A: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led màu trắng";
- B: "Khách hàng chọn được bóng đèn Led không hỏng".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}65$.		
b) $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}02$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(B \mid \overline{A}) = 0{,}3$.		
d) $\mathrm{P}(B) = 0{,}9\,765$.		

Câu 20. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$; $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}4$. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất của biến cố AB là 0,02.		
b) Xác suất của biến cố $A\overline{B}$ là 0,2.		

Phát biểu	Đ	S
c) Xác suất của biến cố A là 0,8.		
d) A và B là hai biến cố độc lập.		

Câu 21. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố

- A "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh";
- B "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Toán".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$.		
b) $\mathrm{P}(B) = 0{,}625$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}75$.		
d) $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}48$.		

Câu 22. Lớp $12B$ có 45 học sinh, trong đó có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ Thể thao, 18 học sinh tham gia câu lạc bộ Văn học, 10 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Thể thao vừa tham gia câu lạc bộ Văn học. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố

- A: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Thể thao";
- B: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Văn học".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$.		
b) $\mathrm{P}(B) = 0{,}55$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(A\|B) = 0{,}56$.		
d) $\mathrm{P}(B\|A) = 0{,}36$.		

Câu 23. Cho hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{4}{6}$.		
b) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc sắc bằng 6 là $\frac{1}{6}$.		
c) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 6, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{1}{36}$.		
d) Xác suất tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc là số chẵn, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm là $\frac{1}{12}$.		

Câu 24. Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ, còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền là $\frac{1}{10}$.		
b) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nữ là $\frac{3}{17}$.		
c) Xác suất để bạn lên bảng có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nam là $\frac{2}{13}$.		
d) Nếu thầy giáo gọi một bạn nữ lên bảng, thì xác suất để bạn đó có tên là Hiền là $\frac{1}{17}$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THẦY NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT — PHÚ THỌ HÒA — TP HỒ CHÍ MINH

Câu 25. Một công ty truyền thông đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,5 và dự án 2 là 0,6. Khả năng thắng thầu của cả 2 dự án là 0,4. Gọi A, B lần lượt là biến cố thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

Phát biểu	Đ	S
a) A và B là hai biến cố độc lập.		
b) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,3.		
c) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,4.		
d) Biết công ty không thắng thầu dự án 1, xác suất công ty thắng thầu dự án 2 là 0,8.		

Câu 26. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy lần thứ nhất là màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ". Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}7$.		
b) $\mathrm{P}(\overline{A}B) = \dfrac{7}{15}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$.		
d) $\mathrm{P}(A\overline{B}) = \dfrac{10}{21}$.		

Câu 27. Khảo sát thị lực 100 học sinh gồm 60 học sinh nam và 40 học sinh nữ. Trong đó học sinh nam có tật khúc xạ là 18 học sinh, học sinh nữ có tật khúc xạ là 12 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 100 học sinh trên. Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Xác xuất học sinh được chọn là nữ bằng 0,4.		
b) Xác xuất học sinh được chọn bị tật khúc xạ bằng 0,3.		
c) Biết rằng bạn đó là nữ, xác xuất để học sinh đó bị tật khúc xạ bằng 0,4.		
d) Biết rằng bạn đó bị tật khúc xạ, xác xuất để học sinh đó là nam bằng 0,6.		

Câu 28. Một xạ thủ bắn vào bia số 1 và bia số 2. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, bia số 2 lần lượt là 0,8; 0,9. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng cả hai bia là 0,8. Xét hai biến cố

- A: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 1";
- B: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 2".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) Hai biến cố A và B có độc lập.		
b) Biết xạ thủ đó bắn trúng bia số 1 thì xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2 là 0,72.		
c) Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1, thì xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2 bằng 0,9.		
d) Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1 thì xác suất xạ thủ đó bắn không trúng bia số 2 bằng 0,9.		

Câu 29. Một lô linh kiện có chứa 40% linh kiện do nhà máy I sản xuất và 60% linh kiện do nhà máy II sản xuất. Biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I, II lần lượt là 3%, 4%. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Gọi

- A: "Linh kiện được lấy ra là linh kiện chính phẩm".
- B: "Linh kiện được lấy ra do nhà máy I sản xuất".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{5}$.		
b) $\mathrm{P}(A \mid B)=\dfrac{24}{25}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)=\dfrac{97}{100}$.		
d) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{241}{250}$.		

Câu 30. Một xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid – 19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Gọi các biến cố

- A: "Người đó bị nhiễm Virus".
- B: "Người đó cho kết quả dương tính".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A)=0{,}01$.		
b) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=0{,}2$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(B)=0{,}207$.		
d) $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}05$.		

Câu 31. Tỷ lệ người nghiện thuốc lá tại một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%. Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy không bị viêm họng. Gọi các biến cố

- A: "Người này bị nghiện thuốc lá".
- B: "Người này không bị viêm họng".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A)=0{,}3$.		
b) $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)=0{,}6$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=0{,}54$.		
d) $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}3$.		

Câu 32. Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Gọi các biến cố

- A: "Chọn được người không bị bệnh tiểu đường".

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

- B: "Chọn được người cao tuổi là nam".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B) = 0{,}52$.		
b) $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}6$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right) = 0{,}4$.		
d) $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$.		

Câu 33. Có hai hộp bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Gọi các biến cố

- A: "Lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai".
- B: "Lấy được 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất, trong đó có 1 quả bóng bàn màu vàng".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = \dfrac{3}{5}$.		
b) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{3}{7}$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right) = \dfrac{5}{14}$.		
d) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{5}$.		

Câu 34. Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Nam Hà tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Gặp ngẫu nhiên một người tại tỉnh này. Gọi các biến cố

- A: "Gặp người nghiện thuốc lá".
- B: "Gặp người bị bệnh ung thư".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$.		
b) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}15$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$.		
d) $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}5$.		

Câu 35. Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Gọi các biến cố

- A: là biến cố "Xạ thủ được chọn là nữ".
- B: là biến cố "Xạ thủ được chọn bắn trúng".

Khi đó

Tác giả: NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A)=0{,}2$.		
b) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=0{,}8$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}(B)=0{,}82$.		
d) $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}4$.		

Câu 36. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Gọi các biến cố

- A: "Bóng đèn đạt chuẩn sau khi qua kiểm tra chất lượng".
- B: "Bóng đèn đạt tiêu chuẩn".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B)=0{,}8$.		
b) $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}9$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)=0{,}1$.		
d) $\mathrm{P}(A)=0{,}73$.		

Câu 37. Số khán giả đến xem buổi biểu diễn âm nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,85; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,45. Dự báo thời tiết cho thấy nếu xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,6. Gọi các biến cố

- A: "Nhà tổ chức sự kiện bán hết vé".
- B: "Trời mưa vào buổi biểu diễn".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(B)=0{,}6$.		
b) $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}45$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)=0{,}85$.		
d) $\mathrm{P}(A)=0{,}65$.		

Câu 38. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh cúm ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh cúm là 5%; trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh cúm là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Gọi các biến cố

- A: "Người dân được tiêm phòng bệnh cúm".
- B: "Người dân mắc bệnh cúm".

Khi đó

Phát biểu	Đ	S
a) $\mathrm{P}(A)=0{,}65$.		
b) $\mathrm{P}(B \mid A)=0{,}5$.		

Phát biểu	Đ	S
c) $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=0{,}17$.		
d) $\mathrm{P}(B)=0{,}05$.		

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 12 – HKII NĂM HỌC 2025 – 2026
THS. NGUYỄN HỮU CHUNG KIÊN

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 39. Bạn Minh làm hai bài tập kế tiếp. Xác suất Minh làm đúng bài thứ nhất là 0,7. Nếu Minh làm đúng bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,8 nhưng nếu Minh làm sai bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,2. Tính xác suất để Minh làm đúng bài thứ nhất biết rằng Minh làm đúng bài thứ hai (*làm tròn kết quả đến hàng phần chục*) KQ: | | | | |

Câu 40. Một lớp có 16 học sinh nữ, còn lại là học sinh nam. Trong giờ giáo dục thể chất thầy giáo khảo sát kết quả rèn luyện thể lực của học sinh bằng cách bốc thăm trong danh sách lớp để chọn hai bạn chạy tiếp sức. Biết xác suất để chọn được hai bạn tham gia khảo sát đều là nữ bằng $\frac{15}{62}$. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh? KQ: | | | | |

Câu 41. Một kỳ thi có hai vòng. Thí sinh đỗ nếu vượt qua được cả hai vòng. Bạn An tham dự kỳ thi này. Xác suất để An qua được vòng 1 là 0,8. Nếu qua được vòng 1 thì xác suất để An qua được vòng 2 là 0,7. An được thông báo là bị loại. Tính xác suất để An qua được vòng 1 nhưng không qua được vòng 2. (*Làm tròn tới hàng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 42. Câu lạc bộ cờ của nhà trường gồm 35 thành viên, mỗi thành viên biết chơi ít nhất một trong hai môn cờ vua hoặc cờ tướng. Biết rằng có 25 thành viên biết chơi cờ vua và 20 thành viên biết chơi cờ tướng. Chọn ngẫu nhiên một thành viên của câu lạc bộ. Tính xác suất thành viên được chọn biết chơi cờ vua, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ tướng. KQ: | | | | |

Câu 43. Trong danh sách đạt giải môn toán cấp thành phố của thành phố Hà Nội có 30% là học sinh nữ và 24% học sinh đạt giải là học sinh nữ lớp 12. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong danh sách. Biết học sinh đó là nữ, tính xác suất để học sinh đó không phải lớp 12. KQ: | | | | |

Câu 44. Một thư viện có 35% tổng số sách là sách khoa học, 14% tổng số sách là sách khoa học tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên một quyển sách của thư viện. Tính xác suất để quyển sách được chọn là sách khoa học tự nhiên, biết rằng đó là quyển sách về khoa học. KQ: | | | | |

Câu 45. Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ để kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về báo cáo kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 8 000, trong số đó có 1 200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và 6 800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Nhưng khi kiểm tra lại bằng dụng cụ của công ty, trong 1 200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Trong 6 800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Xác suất mà một bệnh nhân với kết quả kiểm tra dương tính là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết bằng bao nhiêu? (*viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 46. Một gia đình có 2 đứa con. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Tính xác suất để cả 2 đứa trẻ đều là con gái (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 47. Một xạ thủ bắn hai viên đạn vào một bia. Xác suất bắn viên thứ nhất trúng là 0,7. Nếu bắn trúng viên thứ nhất thì khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,8, nhưng nếu bắn trượt viên thứ nhất khả năng bắn trúng viên thứ hai là 0,2. Tính xác suất bắn trúng viên thứ nhất biết rằng viên thứ hai bắn trúng. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần chục*) KQ: | | | | |

Câu 48. Trong một ngày bất kì, xác suất để bạn Nam ăn bữa trưa (được chuẩn bị sẵn) là 0,5 và em gái của bạn Nam ăn bữa trưa là 0,6. Biết rằng xác suất em gái Nam ăn bữa trưa khi Nam ăn bữa trưa là 0,9. Tính xác suất để ít nhất một trong hai người ăn bữa trưa. (*Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 49. Trong một cộng đồng X có tỉ lệ mắc ung thư là 0,02. Biết rằng xác suất xét nghiệm dương tính là 0,95 nếu người đó mắc ung thư và 0,03 nếu người đó không mắc ung thư. Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên một người trong cộng đồng X bị ung thư nếu người này cho kết quả xét nghiệm dương tính. (*Kết quả tính biểu diễn dưới dạng phần trăm, làm tròn đến chữ số hàng chục sau dấu thập phân*)

KQ: | | | | |

Câu 50. Một bình đựng 50 viên bi kích thước, chất liệu như nhau, trong đó có 30 viên bi xanh và 20 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra một viên bi nữa. Tính xác suất để lấy được một viên bi xanh ở lần thứ nhất và một viên bi trắng ở lần thứ hai (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 51. Tỉ lệ người nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết tỉ lệ viêm họng trong số người nghiện thuốc lá là a% còn người không nghiện là 40%. Gặp ngẫu nhiên một người trong vùng thì xác suất để người đó nghiện thuốc và bị viêm họng bằng 0,21; xác suất để người đó không nghiện thuốc và bị viêm họng là b%. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

Câu 52. Ba cầu thủ sút phạt đền 11 (m), mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là a; b và 0,7 (với $0<b<a<1$). Biết xác suất ghi bàn để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,982 và xác suất để ba cầu thủ ghi bàn là 0,392. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 53. Trong cộng đồng, tỉ lệ tự nhiên của các nhóm máu O, A, B, AB lần lượt là 33,7%; 37,5%; 20,9% và 7,9%. Lấy ngẫu nhiên một người cần máu và 1 người hiến máu. Hỏi xác suất có thể thực hiện truyền máu là bao nhiêu? (*Làm tròn đến hàng phần mười*)

KQ: | | | | |

Câu 54. Một lô linh kiện có chứa 40% linh kiện do nhà máy I sản xuất và 60% linh kiện do nhà máy II sản xuất. Biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I, II lần lượt là 3% và 4%. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt (*kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

Câu 55. Một xét nghiệm Covid–19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid–19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus có dạng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

Câu 56. Tỷ lệ người nghiện thuốc lá tại một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%. Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy không bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá. (*Làm tròn kết quả tới hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 57. Có hai hộp bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai.

KQ: | | | | |

Câu 58. Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)?

KQ: | | | | |

TRUNG TÂM THIÊN AN 134 THỐNG NHẤT – PHÚ THỌ HÒA – TP HỒ CHÍ MINH

Câu 59. Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất (*làm tròn đến hàng phần trăm*) để xạ thủ đó là nữ? KQ: | | | | |

Câu 60. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng. KQ: | | | | |

Câu 61. Số khán giả đến xem buổi biểu diễn âm nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,85; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,45. Dự báo thời tiết cho thấy nếu xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,6. Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 62. Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu? (*Làm tròn kết quả đến chữ số hàng -phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 63. Một loại linh kiện do hai nhà máy I, II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I, II lần lượt là 0,04; 0,03. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện của lô hàng đó. Giả sử linh kiện được chọn là phế phẩm. Tính xác suất linh kiện này thuộc nhà máy I (*làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 64. Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,7. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn trúng đích, tính xác suất để xạ thủ đó là xạ thủ loại I. KQ: | | | | |

Câu 65. Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5%; trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Tính xác suất người được chọn mắc bệnh A. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 66. Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại luôn tự nhận mình nói thật nhưng xác suất để mỗi chú này nói thật là 0,5. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 67. Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y. Để phòng thủ, các bệ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y. Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Xét phương án tác chiến sau: Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa. Biết rằng xác xuất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bệ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa. Tính xác suất bắn hạ máy bay đối phương trong phương án tác chiến nêu trên. KQ: | | | | |

Câu 68. Tại nhà máy X sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 được đóng dấu OTK; nếu một linh kiện điện tử không đạt tiêu chuẩn thì nó có xác

suất 0,95 không được đóng dấu OTK. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy X trên thị trường. Tính xác suất để linh kiện điện tử đó được đóng dấu OTK. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần chục*) KQ: | | | | |

Câu 69. Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 70. Một chuỗi của hàng sơn kinh doanh sơn mủ và sơn nước. dựa trên doanh số bán hàng trong một thời gian dài, xác suất để khách hàng sẽ mua sơn mủ là 0,75. Trong số những người mua sơn mủ, 60% cũng mua con lăn. Nhưng chỉ có 30% người mua sơn nước mua con lăn. Một người vào cửa hàng đó để mua hàng. Tính xác suất người đó mua con lăn. (*Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*)

KQ: | | | | |

Câu 71. Một kho hàng do hai nhà máy sản xuất. Biết tỉ lệ sản phẩm đóng góp của nhà máy một bằng $\frac{1}{3}$ sản phẩm đóng góp của nhà máy hai và tỉ lệ phế phẩm do nhà máy một, nhà máy hai sản xuất lần lượt là 0,1% và 0,2%. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm thì thấy nó là phế phẩm. Biết xác suất để phế phẩm đó do nhà máy hai sản xuất là $\frac{a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$. KQ: | | | | |

Câu 72. Một nhà máy lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 65% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 35% chi tiết. Khoảng 80% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ nhà máy một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 73. Có hai lô sản phẩm gồm các loại sản phẩm tốt và xấu. Lô 1 có 50 sản phẩm trong đó có 20 sản phẩm xấu, lô 2 có 40 sản phẩm trong đó có 15 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên một lô và từ đó lấy ra một sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 74. Một loại xét nghiệm nhạnh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus.

(Nguồn: https://tapchiyhocvietnam.vn)

Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Hãy tính xác suất người làm xét nghiệm có kết quả dương tính (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 75. Giả sử tỷ lệ người dân của tỉnh M nghiện thuốc lá là 20%, tỷ lệ người dân bị bệnh phổi là 26%, trong số người bị bệnh phổi thì tỷ lệ nghiện thuốc lá là 70%. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi (*làm tròn đến chữ số hàng phần trăm*). KQ: | | | | |

Câu 76. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật) hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn luôn có cùng giới tính. Các cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất là 0,5. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi là trai, 30% cặp sinh đôi là gái và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau. Tính tỷ lệ cặp sinh đôi thật trong số các cặp sinh đôi có cùng giới tính. (*Làm tròn đến hàng phần trăm*) KQ: | | | | |

Câu 77. Dây chuyền lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 60% chi tiết, còn lại là của máy thứ hai. Khoảng 90% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất đạt tiêu chuẩn, còn 85% chi tiết do máy thứ 2 sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tính xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất (*làm tròn đến hàng phần trăm*). KQ: | | | | |