

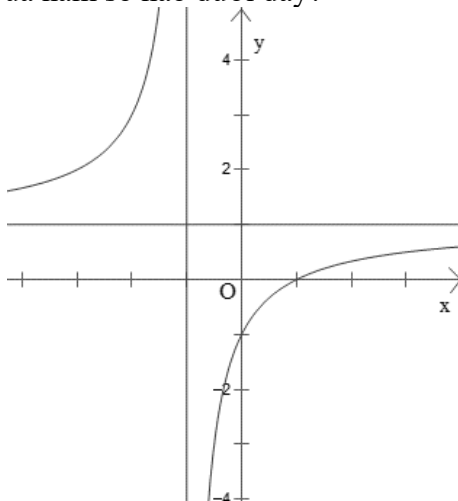
Họ và tên:

Số báo danh:

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là:

- A. $\ln|5x+4| + C$. B. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$. C. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$. D. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$.

Câu 2. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$. B. $y = \frac{x-1}{x+1}$. C. $y = x^4 - 3x^2$. D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

- A. $\vec{u}_4 = (2; 1; 2)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 0; -1)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 0; 2)$. D. $\vec{u}_1 = (-1; 1; 2)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 5y + z - 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm M và song song với (α) .

- A. $2x - 5y + z + 12 = 0$. B. $2x + 5y - z - 12 = 0$. C. $2x - 5y + z - 12 = 0$. D. $2x - 5y - z - 12 = 0$.

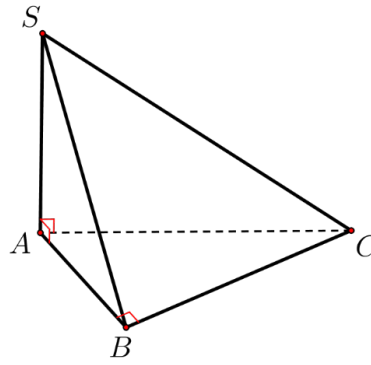
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$. D. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$.

Câu 6. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93 671 600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

- A. 108311100. B. 108374700. C. 109256100. D. 107500500.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
				$ $		
		$-$	0	$+$	$-$	0

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $I(1; -2; 3), R = 2$. B. $I(-1; 2; -3), R = 2$. C. $I(1; -2; 3), R = 4$. D. $I(-1; 2; -3), R = 4$.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- A. $|z_1 + z_2| = 1$. B. $|z_1 + z_2| = 5$. C. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. D. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

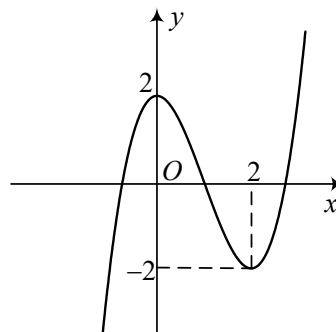
Câu 11. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó $x > 0$ (miligam) là liều thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm thuốc cho bệnh nhân một liều lượng bằng:

- A. 15 mg. B. 20 mg. C. 10 mg. D. 30 mg.

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. $u_n = 7 \cdot 3^n$. B. $u_n = 3n$. C. $u_n = 7 - 3^n$. D. $u_n = 7 - 3n$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



- A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$
		$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$
		0		0	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 15. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^3b = 36$. B. $a^3 + b = 64$. C. $a^3 + b = 36$. D. $a^3b = 64$.

Câu 16. Một khối cầu có bán kính $2R$ thì có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. B. $V = \frac{24\pi R^3}{3}$. C. $V = 4\pi R^2$. D. $V = \frac{32\pi R^3}{3}$.

Câu 17. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

- A. $I = 36$ B. $I = 6$ C. $I = 5$ D. $I = 4$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 3z + 5 = 0$ có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$. B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}$. C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$. D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Câu 19. Công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử là:

- A. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. B. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. C. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. D. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Câu 20. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 21. Điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 2 - 3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

- A. $Q(-2; -3)$. B. $N(2; -3)$. C. $P(2; 3)$. D. $M(-2; 3)$.

Câu 22. Thể tích của khối trụ có bán kính đáy $R = a$ và chiều cao $h = 2a$ bằng:

- A. $2\pi a^3$. B. $\frac{2}{3}\pi a^3$. C. $4\pi a^3$. D. $2a^3$.

Câu 23. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{\pi}{2}$. C. -1. D. 0.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 25. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Xác suất để sau hai lần gieo kết quả như nhau là:

- A. $\frac{5}{36}$. B. 1. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 26. Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = 3c$ B. $a - b = -3c$ C. $a - b = -c$ D. $a + b = c$

Câu 27. Cho biểu thức $P = \sqrt[6]{x \cdot \sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{47}{48}}$. B. $P = x^{\frac{15}{16}}$. C. $P = x^{\frac{5}{42}}$. D. $P = x^{\frac{7}{16}}$.

Câu 28. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$.

- A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.
B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
D. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+ 0 -			+
y	0 $\nearrow$ 2 $\searrow$ $-\infty$			3 $\nearrow$ 5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, biết rằng $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ với $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

- A. $\vec{a} = (1; -3; 2)$. B. $\vec{a} = (1; 2; -3)$. C. $\vec{a} = (2; 1; -3)$. D. $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

Câu 31. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -8 B. 12 C. -3 D. 1

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z = 5 + 7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $z = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. B. $z = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$. C. $z = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$. D. $z = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i$.

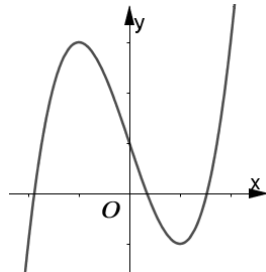
Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, cạnh bên $SD = a\sqrt{6}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .

Câu 34. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) = \log_3(2x + 3)$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 35. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^4 - x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 3x + 1$. D. $y = -x^2 + x - 1$.

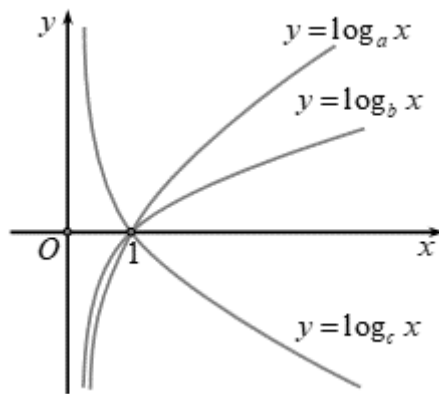
Câu 36. Tính $F(x) = \int e^x dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

- A. $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$. B. $F(x) = 2ex + C$. C. $F(x) = e^2x + C$. D. $F(x) = \frac{e^2x^2}{2} + C$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $6a^2$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $2a^2$. B. $6a^2$. C. $6a^3$. D. $2a^3$.

Câu 38. Cho a, b, c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $c < a < b$.

B. $b < c < a$.

C. $c < b < a$.

D. $a < b < c$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và

$\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d: \begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=4+t \end{cases}$ và cắt hai đường thẳng

$\Delta_1; \Delta_2$ là

A. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3-t \\ z=-3-t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3+t \\ z=3+t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3+t \\ z=-3+t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 40. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

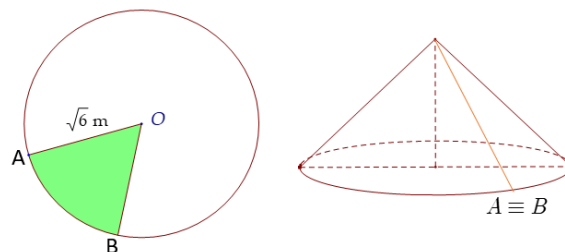
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 41. Từ một chiếc đĩa tròn bằng thép có bán kính $R = \sqrt{6}m$, một người thợ làm cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của chiếc đĩa này và ghép phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón tạo thành có thể tích lớn nhất?



A. $\approx 294^\circ$

B. $\approx 12,56^\circ$

C. $\approx 2,8^\circ$

D. $\approx 66^\circ$

Câu 42. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4.

B. 6.

C. 2.

D. 8.

Câu 43. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2024$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 4034.

B. 2021.

C. 4042.

D. 2017×2024 .

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$

A. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $m \leq 3$.

C. $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

D. $m < 3$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 50$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên dương, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

- A. 29. B. 28. C. 33. D. 12.

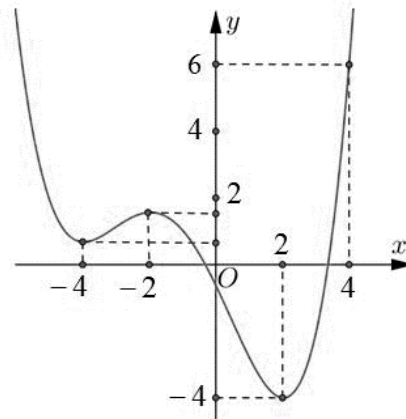
Câu 46. Cho số phức z, w thỏa mãn $|z-5+3i|=3$, $|iw+4+2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|3iz+2w|$.

- A. $\sqrt{554}+13$. B. $\sqrt{578}+11$. C. $\sqrt{554}+11$. D. $\sqrt{578}+3$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2(7x^2+7) \geq \log_2(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. 5 B. 0 C. 3 D. 4

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



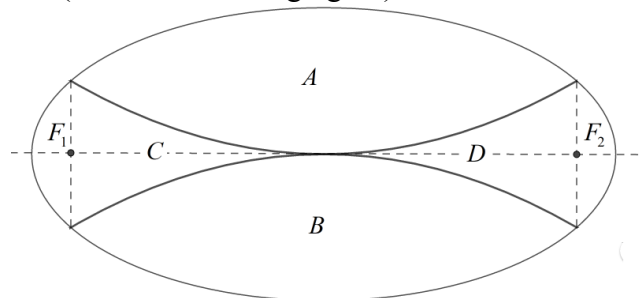
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2024?

- A. 4031. B. 4039. C. 4035. D. 4058.

Câu 49. Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a + b$ bằng

- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{5}{9}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 50. Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên dưới. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250000 đ và 150000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



- A. 5455000 đ. B. 5676000 đ. C. 4656000 đ. D. 4766000 đ.

----- HẾT -----

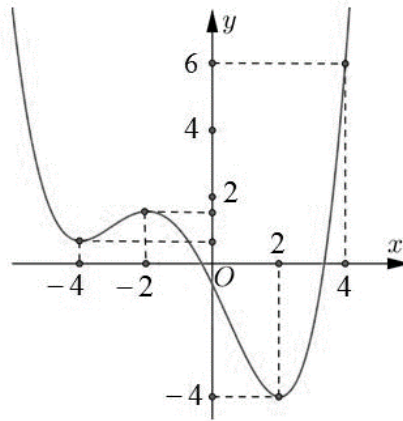
Đề/câu	101	102	103	104	105	106	107	108
1	C	B	D	A	A	C	A	B
2	B	A	A	C	B	B	A	B
3	B	C	D	A	A	A	A	C
4	C	A	D	B	D	D	D	B
5	C	D	D	A	D	B	A	D
6	B	D	C	B	C	B	C	A
7	A	C	C	B	B	D	C	D
8	B	B	C	C	B	B	A	C
9	A	A	C	A	C	A	C	D
10	D	A	A	B	D	C	B	C
11	B	D	C	B	D	A	B	C
12	A	A	A	A	C	C	B	C
13	C	B	D	C	A	C	C	D
14	A	C	A	C	C	B	D	B
15	D	C	B	A	C	C	A	C
16	D	A	D	C	B	B	D	A
17	D	C	A	B	A	C	C	D
18	D	C	D	A	A	D	B	A
19	D	A	A	A	C	C	C	B
20	D	A	B	B	B	C	B	D
21	B	D	D	A	B	B	C	C
22	A	D	C	D	A	A	D	C
23	A	D	D	C	D	C	B	D
24	C	B	A	A	C	A	A	B
25	C	B	D	B	B	B	B	C
26	C	A	D	D	C	A	C	D
27	D	D	C	B	B	C	D	A
28	A	D	D	B	C	A	C	A
29	B	C	C	D	B	C	A	A
30	D	D	B	A	C	B	A	D
31	A	C	C	A	B	D	A	D
32	B	A	B	A	C	A	D	C
33	B	B	C	C	A	C	D	D
34	B	A	A	A	B	D	B	A
35	C	B	B	A	D	A	D	C
36	C	A	B	B	C	D	D	A
37	C	D	D	B	D	B	A	C
38	A	A	A	B	B	A	C	D
39	D	A	A	A	D	C	A	C
40	C	C	A	A	A	D	A	B
41	D	A	B	B	A	B	C	A
42	A	C	B	B	C	A	D	D
43	C	D	C	D	D	C	B	C
44	C	C	D	C	A	A	C	C
45	D	D	D	C	B	D	B	A
46	C	D	B	C	D	A	B	B

47	C	A	D	C	C	D	C	B
48	B	D	A	A	D	B	A	B
49	C	C	A	B	A	D	C	B
50	B	D	A	D	C	A	A	A

Xem thêm: **ĐỀ THI THỬ MÔN TOÁN**
<https://toanmath.com/de-thi-thu-mon-toan>

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC CÂU VDC

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 2024?

A. 4031.

B. 4035.

C. 4039.

D. 4058.

Lời giải

Đặt $t = \frac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t' = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
t'	$-$	0	$+$	0	$-$
t	0	-4	4	0	

$$\Rightarrow t \in [-4; 4].$$

Hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + m - 1 \right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + m - 1|, t \in [-4; 4]$.

Đặt $h(t) = f(t) + m - 1, t \in [-4; 4]$, ta có: $h'(t) = f'(t)$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \in [-4; 4] \\ t = -2 \in [-4; 4] \\ t = 2 \in [-4; 4] \end{cases}$$

Ta có: $h(-4) \approx 0,8 + m - 1 = m - 0,2$; $h(4) = 6 + m - 1 = m + 5$;

$h(-2) \approx 1,6 + m - 1 = m + 0,6$; $h(2) = -4 + m - 1 = m - 5$.

$$\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-4;4]} |h(t)| = \max \{|m+5|; |m-5|\}.$$

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m+5| \leq 2024 \\ |m-5| \leq 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2024 \leq m+5 \leq 2024 \\ -2024 \leq m-5 \leq 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2029 \leq m \leq 2019 \\ -2019 \leq m \leq 2029 \end{cases} \Leftrightarrow -2019 \leq m \leq 2019.$$

Vậy có tất cả 4039 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2024$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 2021.

B. 4042.

C. 4034.

D. 2017×2024 .

Lời giải

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2024 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2024 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{BPT cho có dạng } (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0 \quad (*).$$

+ Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi

$x > 3$ vì $-(x-3) < 0$, $\log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0$, $3(x+4) > 0$, $\log_3 \frac{2}{3} < 0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2021 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2024, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2024, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2021 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4042 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Cho số phức z, w thỏa mãn $|z-5+3i|=3$, $|iw+4+2i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |3iz+2w|$.

A. $\sqrt{554}+13$.

B. $\sqrt{578}+11$.

C. $\sqrt{578}+3$.

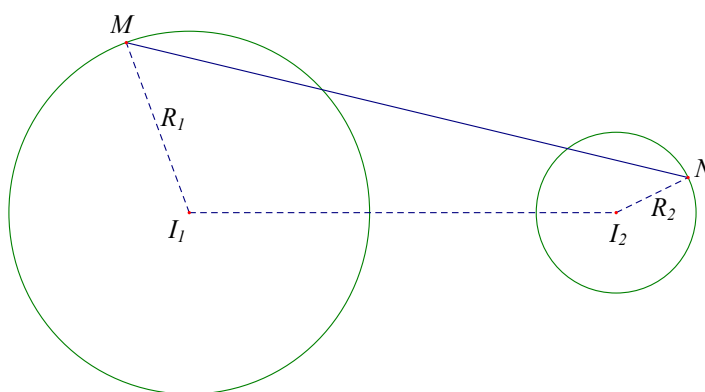
D. $\sqrt{554}+11$.

Lời giải

Dựa vào biểu thức của T ta làm xuất hiện hai điểm M, N . Trong đó M biểu diễn số phức $3iz$ và điểm N biểu diễn $-2w$. Khi đó biểu thức $T = |3iz - (-2w)|$ chính là độ dài đoạn MN .

Từ $|z-5+3i|=3 \Leftrightarrow |3iz-9-15i|=9$ (nhận $3i$ vào 2 vế rồi lấy modun hai vế). Suy ra M biểu diễn số phức $3iz$ thuộc đường tròn tâm $I_1(9;15)$ và bán kính $R_1=9$

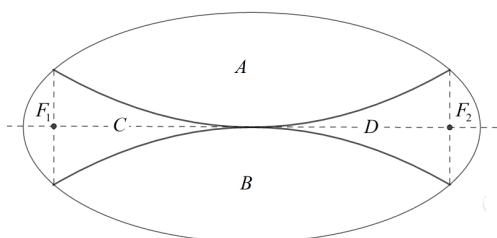
Tương tự $|iw + 4 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |-2w - 4 + 8i| = 2$ (nhân $-\frac{2}{i}$ vào 2 vế và lấy modun hai vế). Suy ra N biểu diễn $-2w$ thuộc đường tròn $I_2(4; -8)$ bán kính $R_2 = 2$.



Ta có $I_1I_2 = \sqrt{554}$ nên độ dài dài nhất của đoạn MN là $MN_{\max} = I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{554} + 11$

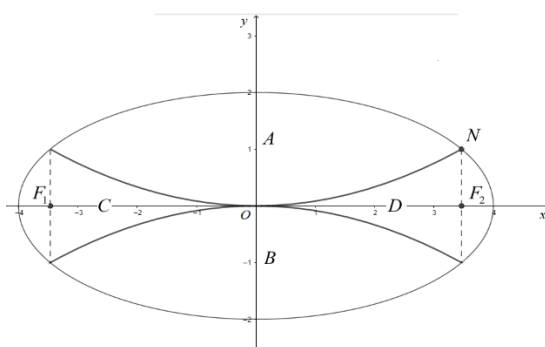
Câu 36: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên dưới. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m; F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250000 đ và 150000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

- A.** 5676000 đ. **B.** 4766000 đ. **C.** 4656000 đ. **D.** 5455000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, độ dài trục nhỏ $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Suy ra $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow F_2(2\sqrt{3}; 0)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N(2\sqrt{3}; 1)$.

Gọi $(P): y = kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox .

Do $N \in (P)$ ta có $1 = k(2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$. Suy ra $(P): y = \frac{1}{12}x^2$.

Diện tích phần A là $S_A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2 \right) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2 \right) dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx - \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx$.

* Xét $I_1 = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx$. Đặt $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{3}$

Khi đó $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 8 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

* Ta có $I_2 = \frac{1}{6} \int_0^{2\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{1}{18} x^3 \Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A = I_1 - I_2 = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_A + S_B = 2S_A = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C, D là: $S_C + S_D = S_{(E)} - (S_A + S_B) = \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là: $\frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} \cdot 250000 + \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3} \cdot 150000 \approx 5676000$ đ.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 50$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên dương, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

A. 29.

B. 33.

C. 28.

D. 12.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -3; -6), R = 5\sqrt{2}$.

Ta có: $M \in Ox \Rightarrow M(a; 0; 0)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S) . Khi đó (P) đi qua $M(a; 0; 0)$, vuông góc với đường thẳng d , phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-a) + 4y - z = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z - 2a = 0$

Ta có: M là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra: $IM > R \Leftrightarrow (a-4)^2 + 9 + 36 > 50 \Leftrightarrow (a-4)^2 > 5$ (1)

$$d(I, (P)) < R \Leftrightarrow \frac{|8-12+6-2a|}{\sqrt{21}} < 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |2-2a| < 5\sqrt{42} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } \begin{cases} (a-4)^2 > 5 \\ |2-2a| < 5\sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 11 > 0 \\ a^2 - 2a + 1 < \frac{350}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 7 \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 \leq a \leq 1 \\ 7 \leq a \leq 17 \end{cases}$$

(do a nguyên dương) $a \in \{1, 7, 8, \dots, 17\}$

Vậy có 12 điểm M thoả mãn.