

Câu 1 (5.0 điểm). Cho (a_n) là dãy số được xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-1}(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)\cdots(a_1+1)}{a_n}$.

Câu 2 (5.0 điểm). Với số nguyên dương $n \geq 3$, đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ có các hệ số thực sao cho $a_{n-2} = 0, a_n \neq 0$ và $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n+1$. Giả sử đa thức $P(x)$ có n nghiệm thực.

Chứng minh rằng $P(x)$ có cả nghiệm dương, nghiệm âm và có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{n+1}\right)$.

Câu 3 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) cố định, nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm D di chuyển trên cạnh AB , khác A và B . Đường tròn (BCD) cắt cạnh AC tại điểm E khác C . Gọi P là giao điểm khác A của hai đường tròn (O) và (ADE) .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng PD luôn đi qua một điểm cố định.
b) Giả sử đường thẳng PD, PE cắt đường tròn (BCD) lần lượt tại điểm Q, R khác D, E . Gọi M là trung điểm của đoạn QR . Chứng minh rằng điểm M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

Câu 4 (5.0 điểm). Một câu lạc bộ có 99 thành viên, trong đó có một số cặp quen biết nhau (quan hệ quen biết có tính hai chiều). Giả sử số lượng người quen của mỗi thành viên trong câu lạc bộ đều từ 81 đến 90.

- a) Chứng minh rằng tồn tại 2 thành viên của câu lạc bộ có ít nhất 67 người quen chung.
b) Chứng minh rằng tồn tại 10 thành viên của câu lạc bộ cùng quen chung một người và có số lượng người quen bằng nhau.

----- Hết -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm)

Câu 5 (6.0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2(a+b+c)}.$$

Câu 6 (7.0 điểm). Xét dãy số nguyên dương (a_n) thỏa mãn $a_1 > 1$ và $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $a_n > 1$ và $g(a_{n+1}) > g(a_n)$, trong đó $g(k)$ là ước nguyên tố lớn nhất của số nguyên dương $k > 1$.

Câu 7 (7.0 điểm). Với số nguyên dương $n \geq 2$, một bảng ô vuông $n \times n$ được gọi là bảng "tốt" nếu trong mỗi ô vuông đơn vị chứa một số nguyên dương thỏa mãn:

- Các số nguyên dương đôi một phân biệt;
 - Nếu trên mỗi hàng, mỗi cột, ta tính ước chung lớn nhất của n số nguyên dương trong hàng, cột đó thì sau tất cả ta thu được $2n$ kết quả khác nhau.
- a) Chứng minh rằng trong mỗi bảng $n \times n$ "tốt", luôn có một ô vuông chứa số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng $2n^2$.
- b) Một bảng ô vuông $n \times n$ được gọi là "tốt tối thiểu" nếu tất cả các số nguyên dương trong bảng đều nhỏ hơn hoặc bằng $2n^2$. Chứng minh rằng không tồn tại bảng "tốt tối thiểu" với n là số lẻ.
- c) Xác định tất cả các giá trị $n \geq 2$ để tồn tại bảng $n \times n$ "tốt tối thiểu".

----- Hết -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm)

CHỌN ĐTQG HẢI PHÒNG 2026 – NGÀY 1

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P1)

Cho (a_n) là dãy số được xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n-1}(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1) \cdots (a_1 + 1)}{a_n}$.

 Lời giải.

Với mọi $n \geq 2$, ta có $a_n - 1 = 2a_{n-1}^2 - 2 = 2(a_{n-1} - 1)(a_{n-1} + 1)$.

Lập lại đẳng thức này, ta có

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= 2^{n-1}(a_1 - 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_{n-1} + 1) \\ &= 2^{n-1}(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1) \cdots (a_1 + 1). \end{aligned}$$

Mặt khác, $a_1 = 2$ và nếu $a_{n-1} \geq 2$ thì

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1}^2 - a_{n-1} - 1 = (2a_{n-1} + 1)(a_{n-1} - 1) \geq 1.$$

Do đó $a_n \rightarrow +\infty$. Vì vậy ta có được

$$\frac{2^{n-1}(a_{n-1} + 1)(a_{n-2} + 1) \cdots (a_1 + 1)}{a_n} = \frac{a_n - 1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_n} \rightarrow 1.$$

Vậy giới hạn cần tìm bằng 1.

Nhận xét.

Ta cũng có thể sử dụng công thức tổng quát $a_n = \frac{\alpha^{2^{n-1}} + \alpha^{-2^{n-1}}}{2}$ với $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ để giải quyết.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P2)

Với số nguyên dương $n \geq 3$, đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ có các hệ số thực sao cho $a_{n-2} = 0$, $a_n \neq 0$ và $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n + 1$. Giả sử đa thức $P(x)$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(x)$ có cả nghiệm dương, nghiệm âm và có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{n+1}\right)$.

 Lời giải.

Gọi $r_1, r_2, \dots, r_n$ là n nghiệm thực của đa thức $P(x)$. Vì $a_n \neq 0$ nên $r_i \neq 0$ với mọi i .

Theo định lý Viète, ta có $S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ và $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} = \frac{a_{n-2}}{a_n} = 0$, do đó

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^2} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} = S^2.$$

Mặt khác, từ giả thiết $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n + 1$ suy ra $S < -(n + 1)$.

① Trước hết, ta chứng minh $P(x)$ có cả nghiệm dương và nghiệm âm. Giả sử ngược lại rằng các nghiệm $r_1, r_2, \dots, r_n$ đều cùng dấu. Khi đó $\frac{1}{r_i r_j} > 0$ với mọi $1 \leq i < j \leq n$, suy ra $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} > 0$, mâu thuẫn với $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i r_j} = 0$. Vậy $P(x)$ có cả nghiệm dương và nghiệm âm.

② Ta chứng minh $P(x)$ có một nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{n+1}\right)$.

Giả sử ngược lại rằng không có nghiệm nào thuộc khoảng này.

Khi đó, với mỗi i , ta có hoặc $r_i \geq \frac{1}{n+1}$, hoặc $r_i \leq -\frac{1}{2}$.

Nếu $r_i \geq \frac{1}{n+1}$ thì $0 < \frac{1}{r_i} \leq n+1$; còn nếu $r_i \leq -\frac{1}{2}$ thì $-2 \leq \frac{1}{r_i} < 0$.

Do đó, trong mọi trường hợp ta đều có $-2 \leq \frac{1}{r_i} \leq n+1$.

Suy ra $\left(\frac{1}{r_i} + 2\right) \left(n+1 - \frac{1}{r_i}\right) \geq 0$, hay $2(n+1) + (n-1)\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i^2} \geq 0$.

Cộng các bất đẳng thức trên với $i = 1, 2, \dots, n$, ta được

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \left(2(n+1) + (n-1)\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i^2}\right) = 2n(n+1) + (n-1)S - S^2.$$

Vì vậy $(S-2n)(S+n+1) \leq 0$. Tuy nhiên, do $S < -(n+1)$ nên $S+n+1 < 0$.

Đồng thời $S-2n < -(n+1)-2n = -3n-1 < 0$. Vậy $(S-2n)(S+n+1) > 0$, mâu thuẫn với bất đẳng thức trên. Do đó $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{n+1}\right)$.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P3)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) cố định, nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm D di chuyển trên cạnh AB , khác A và B . Đường tròn (BCD) cắt cạnh AC tại điểm E khác C . Gọi P là giao điểm khác A của hai đường tròn (O) và (ADE) .

- ① Chứng minh rằng đường thẳng PD luôn đi qua một điểm cố định.
- ② Giả sử các đường thẳng PD, PE cắt đường tròn (BCD) lần lượt tại các điểm Q, R khác D, E . Gọi M là trung điểm của đoạn QR . Chứng minh rằng điểm M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

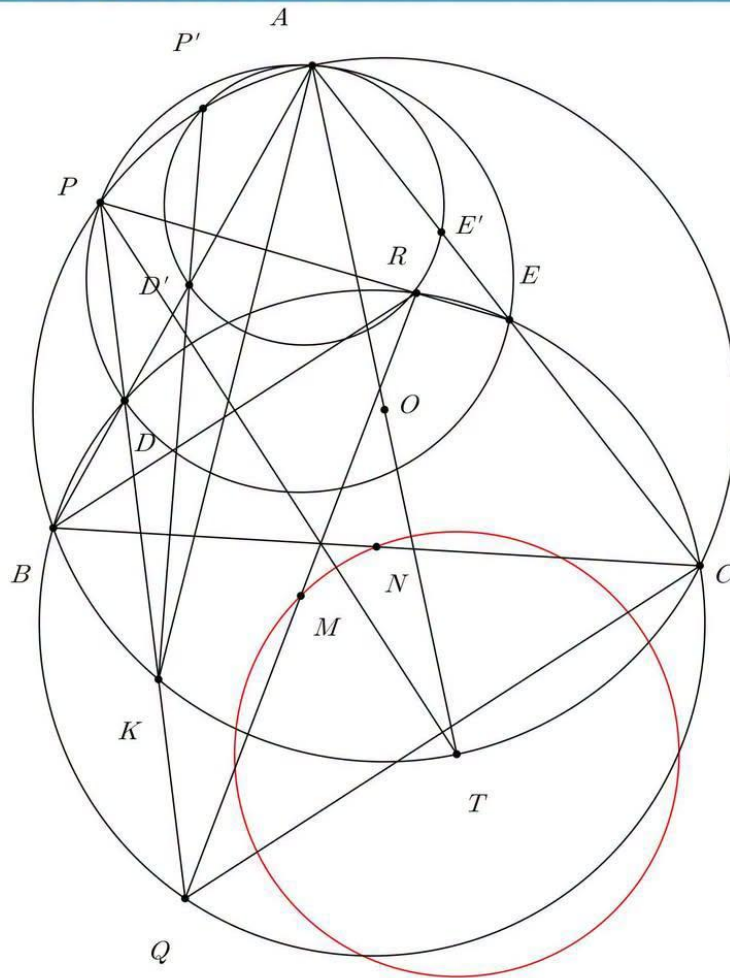
Lời giải.

① **Cách 1:** Gọi PD cắt (O) tại K . Ta có $\angle ACK = 180^\circ - \angle APD = 180^\circ - \angle DEC = \angle ABC = \angle AKC \Rightarrow AC = AK \Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow PD$ đi qua K cố định.

Cách 2: Ta xét thể hình trên, các thể hình khác ta chứng minh tương tự.

Gọi K là giao điểm thứ hai của PD với (O) . Do A, D, E, P và B, C, D, E cùng thuộc các đường tròn, ta có: $\angle ABK = \angle APK = \angle APD = \angle AED = 180^\circ - \angle CBA$.

Lấy $D' \neq D$ trên đoạn AB sao cho D' cố định, dựng E', P' tương ứng. Tương tự, ta có: $\angle AP'D' = \angle AE'D' = \angle CE'D' = \angle CBD' = \angle CBA = \angle ABK = \angle AP'K$. Suy ra P', D', K thẳng hàng. Vậy K cố định. Vậy khi cho D di động thì PD đi qua điểm K cố định.



② Lấy T đối xứng A qua O và N là trung điểm BC .

Do B, C, D, E, Q, R cùng thuộc một đường tròn và A, D, E, P cùng thuộc một đường tròn, ta có:
 $\angle DQC = \angle DBC = \angle DEA = \angle DPA \Rightarrow CQ \parallel AP$.

Tương tự: $\angle ERB = \angle EDB = \angle EDA = \angle EPA \Rightarrow BR \parallel AP$.

Mặt khác: $\angle PQC = \angle DBC = \angle ABC = \angle APC = \angle QCP \Rightarrow PQ = PC$.

Tương tự: $\angle PRB = \angle EDB = \angle ACB = \angle APB = \angle RBP \Rightarrow PR = PB$.

Vì AT là đường kính của (O) nên $PT \perp AP$. Kết hợp $CQ \parallel BR \parallel AP$ và $PQ = PC, PR = PB$, suy ra PT là đường trung trực của của CQ và BR . Do đó: $TM = TN$.

Vậy M luôn thuộc đường tròn cố định tâm T , bán kính TN .

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P4)

Một câu lạc bộ có 99 thành viên, trong đó có một số cặp quen biết nhau (quan hệ quen biết có tính hai chiều). Giả sử số lượng người quen của mỗi thành viên trong câu lạc bộ đều từ 81 đến 90.

- ① Chứng minh rằng tồn tại hai thành viên của câu lạc bộ có ít nhất 67 người quen chung.
- ② Chứng minh rằng tồn tại 10 thành viên của câu lạc bộ cùng quen chung một người và có số lượng người quen bằng nhau.

Lời giải.

Coi mỗi thành viên là một đỉnh và nối hai đỉnh khi hai thành viên tương ứng quen nhau. Ta thu được một đồ thị vô hướng đơn có tập đỉnh V , $|V| = 99$. Với $u \in V$, kí hiệu $N(u)$ là tập các đỉnh kề với u và $d(u) = |N(u)|$. Theo giả thiết, $81 \leq d(u) \leq 90$ với mọi $u \in V$.

- ① Ta sẽ đếm các bộ $(w, \{u, v\})$, trong đó u, v là hai đỉnh phân biệt cùng thuộc $N(w)$.

◇ Cố định w , ta có số bộ là $\sum_{u, v \in N(w)} C_{d(w)}^2 \geq 99C_{81}^2$.

◇ Mặt khác, với mỗi cặp $\{u, v\}$, số cách chọn w chính là $|N(u) \cap N(v)|$.

Vì có C_{99}^2 cặp đỉnh nên tồn tại một cặp $\{u, v\}$ có số người quen chung ít nhất bằng

$$\frac{99C_{81}^2}{C_{99}^2} = \frac{81 \cdot 80}{98} = 66 + \frac{6}{49} > 66.$$

Số người quen chung là một số nguyên, do đó cặp này có ít nhất 67 người quen chung.

- ② Giả sử ngược lại rằng không tồn tại 10 đỉnh có cùng bậc và có một đỉnh kề chung. Khi đó không thể có trường hợp mọi đỉnh đều có bậc 81, vì khi đó tổng các bậc bằng $99 \cdot 81$ là một số lẻ, trái với bổ đề bắt tay. Do đó tồn tại một đỉnh v có $d(v) > 81$.

Với mỗi $k \in \{81, 82, \dots, 89\}$, tập $N(v)$ chứa nhiều nhất 9 đỉnh bậc k ; nếu không, ta có ngay 10 đỉnh cùng bậc k và cùng kề với v . Vì

$$|N(v)| > 81 = 9 \cdot 9,$$

trong $N(v)$ phải có một đỉnh w bậc 90.

Xét tập $N(w)$ gồm 90 đỉnh. Với mỗi $k \in \{81, 82, \dots, 90\}$, tập này chứa nhiều nhất 9 đỉnh bậc k . Có đúng 10 giá trị có thể của k , nên $N(w)$ phải chứa đúng 9 đỉnh thuộc mỗi bậc $81, 82, \dots, 90$. Đặc biệt, $N(w)$ chứa 9 đỉnh bậc 90. Cùng với w , ta được một tập A gồm 10 đỉnh, tất cả đều có bậc 90.

Với mỗi $u \in A$, trong 99 đỉnh có đúng $99 - 90 = 9$ đỉnh không kề với u , kể cả u . Do đó có không quá $10 \cdot 9 = 90$ đỉnh không kề với ít nhất một đỉnh của A . Vì thế có ít nhất $99 - 90 = 9$ đỉnh kề với mọi đỉnh của A nên có 10 đỉnh của A có cùng bậc và có đỉnh kề chung, mâu thuẫn với phản chứng.

Vậy tồn tại 10 thành viên có cùng số lượng người quen và cùng quen chung một người.

CHỌN ĐTQG HẢI PHÒNG 2026 – NGÀY 2

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P5)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2(a+b+c)}.$$

 Lời giải.

Đặt $s = a + b + c$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có được

$$\sqrt{1+a^2} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{(a+b) + (a+c)}{2} = \frac{s+a}{2}.$$

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{s+a} = 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a(s+a)} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{\sum_{\text{cyc}} a(s+a)} = \frac{2s^2}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}.$$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = s^2 - 2(ab + bc + ca) = s^2 - 2$, nên

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \frac{s^2}{s^2 - 1}.$$

Lại có $s^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 3$, tức $s \geq \sqrt{3}$. Vì

$$2s^3 - 3\sqrt{3}s^2 + 3\sqrt{3} = (s - \sqrt{3})^2(2s + \sqrt{3}) \geq 0,$$

ta suy ra $\frac{s^2}{s^2 - 1} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2s} = \frac{3\sqrt{3}}{2(a+b+c)}$, điều phải chứng minh.

Bài toán 0.6. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P6)

Xét dãy số nguyên dương (a_n) thỏa mãn $a_1 > 1$ và $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $a_n > 1$ và $g(a_{n+1}) > g(a_n)$, trong đó $g(k)$ là ước nguyên tố lớn nhất của số nguyên dương $k > 1$.

 Lời giải.

Ta có thể viết lại bài toán thành như sau:

Cho các số nguyên dương x, y với $x > 1$ và $(2^x - 1)y$ là số chính phương. Chứng minh $y > 1$ và y có ước nguyên tố p lớn hơn ước nguyên tố lớn nhất của x .

Gọi q là ước nguyên tố lớn nhất của x và viết $x = q^t \cdot m$, $(m, q) = 1$.

Với mọi $a \in \mathbb{Z}, a > 1$, $2^a - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ nên nó không là số chính phương $\implies y > 1$.

Ta có $2^x - 1 = (2^{q^t} - 1) \cdot ((2^{q^t})^{m-1} + \dots + 1)$

Do $2^{q^t} - 1$ không là số chính phương nên nó có ước nguyên tố p mà $v_p(2^{q^t} - 1)$ lẻ.

Gọi $h = \text{ord}_p 2$, ta có $h \mid q^t$. Dễ thấy $h > 1$, do đó $h = q^{h_1}$ nào đó, suy ra $q \mid h$.

Mà $h \mid p - 1$ theo Fermat nên $p - 1 \geq q$, hay $p > q$.

Ta có $(2^{q^t})^{m-1} + \dots + 1 \equiv m \pmod{p}$, mà mọi ước nguyên tố của m nhỏ hơn $q < p$.

$\Rightarrow p \nmid (2^{q^t})^{m-1} + \dots + 1$. Do đó $v_p(2^x - 1) = v_p(2^{q^t} - 1)$ lẻ.

Do $y(2^x - 1)$ là số chính phương nên $p \mid y$, vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

Bài toán trên từng xuất hiện một phiên bản tương tự trong **RMM 2025**.

Bài toán 0.7. (Lim Olympic - Hải Phòng TST - P7)

Với số nguyên dương $n \geq 2$, một bảng ô vuông $n \times n$ được gọi là bảng **tốt** nếu trong mỗi ô vuông đơn vị chứa một số nguyên dương thỏa mãn:

- ◇ Các số nguyên dương đôi một phân biệt;
 - ◇ Nếu trên mỗi hàng, mỗi cột, ta tính ước chung lớn nhất của n số nguyên dương trong hàng, cột đó thì sau tất cả ta thu được $2n$ kết quả khác nhau.
- ① Chứng minh rằng trong mỗi bảng $n \times n$ **tốt**, luôn có một ô vuông chứa số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng $2n^2$.
 - ② Một bảng ô vuông $n \times n$ được gọi là **tốt tối thiểu** nếu tất cả các số nguyên dương trong bảng đều nhỏ hơn hoặc bằng $2n^2$. Chứng minh rằng không tồn tại bảng **tốt tối thiểu** với n là số lẻ.
 - ③ Xác định tất cả các giá trị $n \geq 2$ để tồn tại bảng $n \times n$ **tốt tối thiểu**.

Lời giải.

Với mỗi hàng hoặc cột L , đặt $d(L) = \gcd\{\text{các số nằm trên } L\}$ và gọi $d(L)$ là **chỉ số** của L .

Theo giả thiết, $2n$ chỉ số của n hàng và n cột đôi một khác nhau, ta có các nhận xét:

- ◇ Nếu L có chỉ số d , thì n số trên L là n bội dương phân biệt của d .

Vì thế số lớn nhất trên L không nhỏ hơn nd .

- ◇ Nếu một ô là giao của hàng có chỉ số a và cột có chỉ số b , thì số trong ô đó chia hết cho cả a và b , do đó chia hết cho $\text{lcm}(a, b)$.

- ① Có $2n$ chỉ số là $2n$ số nguyên dương đôi một khác nhau. Bởi vậy, trong các chỉ số ấy phải có một chỉ số $d \geq 2n$. Hàng hoặc cột có chỉ số d chứa n bội dương phân biệt của d .

Theo nhận xét trên, số lớn nhất trên hàng hoặc cột này không nhỏ hơn

$$nd \geq n \cdot 2n = 2n^2.$$

Vậy trong mọi bảng tốt luôn có một ô chứa số không nhỏ hơn $2n^2$.

- ② Giả sử tồn tại một bảng tốt tối thiểu. Nếu một hàng hoặc cột có chỉ số d , thì nó chứa một số không nhỏ hơn nd . Mặt khác, mọi số trong bảng đều không vượt quá $2n^2$, nên $nd \leq 2n^2$, suy ra $d \leq 2n$.

Như vậy, $2n$ chỉ số là $2n$ số nguyên dương phân biệt, đều không vượt quá $2n$.

Do đó tập hợp các chỉ số phải chính xác là

$$\{1, 2, \dots, 2n\}. \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát giả sử chỉ số $2n$ thuộc về một cột, kí hiệu cột đó là C_{2n} .

Các số trên C_{2n} là n bội dương phân biệt của $2n$, đồng thời không vượt quá $2n^2$.

Chỉ có đúng n bội như vậy, nên các số trên C_{2n} là

$$2n, 4n, 6n, \dots, 2n^2. \quad (2)$$

Ta tiếp tục chứng minh các chỉ số $2n - 1$ và $2n - 2$ cũng thuộc về các cột.

Nếu $2n - 1$ là chỉ số của một hàng, thì ô giao của hàng đó với C_{2n} phải chia hết cho

$$\text{lcm}(2n - 1, 2n) = 2n(2n - 1) > 2n^2,$$

mâu thuẫn với tính tối tiểu. Vậy $2n - 1$ là chỉ số của một cột, kí hiệu là C_{2n-1} .

Nếu $2n - 2$ là chỉ số của một hàng, thì tại giao điểm của hàng đó với C_{2n-1} , số trong ô phải chia hết cho $(2n - 2)(2n - 1)$ vì hai số này nguyên tố cùng nhau. Với $n \geq 3$,

$$(2n - 2)(2n - 1) - 2n^2 = 2n(n - 3) + 2 > 0.$$

Suy ra số trong ô lớn hơn $2n^2$, vô lí. Do đó $2n - 2$ cũng là chỉ số của một cột, kí hiệu là C_{2n-2} .

Bây giờ giả sử n lẻ. Khi đó $n \geq 3$. Xét hàng hoặc cột A có chỉ số n .

♦ **Trường hợp 1: A là một cột.**

Các số trên A đều là bội của n . Theo (2), tất cả các bội chẵn của n không vượt quá $2n^2$, tức là

$$2n, 4n, \dots, 2n^2,$$

đều đã nằm trên C_{2n} . Vì các số trong bảng đôi một khác nhau, cột A chỉ có thể chứa các bội lẻ của n :

$$n, 3n, 5n, \dots, (2n - 1)n.$$

Có đúng n số như vậy, nên đây chính là các số nằm trên A .

Vì n lẻ nên tất cả các số này đều lẻ. Mỗi hàng cắt A tại một số lẻ, do đó chỉ số của mỗi hàng, là ước của số ấy, cũng phải lẻ. Vậy n chỉ số của các hàng chính là n số lẻ trong tập (1):

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1.$$

Đặc biệt, $2n - 1$ phải là chỉ số của một hàng. Điều này mâu thuẫn với việc $2n - 1$ đã là chỉ số của cột C_{2n-1} nên trường hợp này không xảy ra.

♦ **Trường hợp 2: A là một hàng.**

Hàng A cắt C_{2n} tại một ô. Ngoài ô này, $n - 1$ ô còn lại trên A chứa các bội của n không nằm trên C_{2n} . Bởi (2), chúng phải là các bội lẻ của n , nên đều là số lẻ.

Do đó $n - 1$ cột khác C_{2n} đều có chỉ số lẻ. Như vậy, trong tất cả các cột, cột duy nhất có thể có chỉ số chẵn là C_{2n} . Nhưng C_{2n-2} cũng có chỉ số chẵn, mâu thuẫn.

Cả hai trường hợp đều vô lí. Vậy không tồn tại bảng tốt tối tiểu khi n lẻ.

③ Để ý ta chỉ cần xét n chẵn.

Giả sử $n \geq 8$ chẵn và tồn tại một bảng tốt tối tiểu. Ta đã biết rằng các chỉ số $2n$, $2n - 1$, $2n - 2$ đều thuộc về các cột. Với $n \geq 8$, ta có

$$(2n - 4)(2n - 3) - 2n^2 = 2(n - 1)(n - 6) > 0. \quad (3)$$

Nếu $2n - 3$ là chỉ số của một hàng, thì hàng đó cắt cột C_{2n-2} tại một số chia hết cho

$$(2n - 3)(2n - 2) > (2n - 4)(2n - 3) > 2n^2,$$

vô lí. Do đó $2n - 3$ là chỉ số của một cột. Tương tự, nếu $2n - 4$ là chỉ số của một hàng thì tại giao điểm với cột C_{2n-3} , số trong ô phải chia hết cho

$$(2n - 4)(2n - 3) > 2n^2$$

và theo (3), cũng sẽ vô lí. Vì vậy $2n - 4$ là chỉ số của một cột.

Xét cột C_{2n-2} . Số bội dương của $2n-2$ không vượt quá $2n^2$ là

$$\left\lfloor \frac{2n^2}{2n-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{n-1} \right\rfloor = n+1,$$

vì $n^2 = (n-1)(n+1) + 1$. Cột C_{2n-2} đã chứa n bội phân biệt của $2n-2$.

Vì vậy, trong toàn bộ phần còn lại của bảng, có nhiều nhất một số chia hết cho $2n-2$. (4)

Xét hàng hoặc cột A có chỉ số $n-1$. Vì n chẵn nên $n-1$ lẻ. Bởi vậy, một bội của $n-1$ là số chẵn khi và chỉ khi nó chia hết cho $2(n-1) = 2n-2$. (5)

♦ **Trường hợp 1: A là một cột.**

Theo (4) và (5), A chứa nhiều nhất một số chẵn. Do đó ít nhất $n-1$ hàng cắt A tại một số lẻ, nên ít nhất $n-1$ hàng có chỉ số lẻ.

Trong tập $\{1, 2, \dots, 2n\}$ chỉ có n số lẻ. Vì thế các cột có nhiều nhất một chỉ số lẻ. Nhưng $2n-1$ và $2n-3$ là hai chỉ số lẻ cùng thuộc về các cột, mâu thuẫn.

♦ **Trường hợp 2: A là một hàng.**

Ngoài cột C_{2n-2} , theo (4), hàng A có nhiều nhất một ô chứa số chẵn. Một cột có chỉ số chẵn thì mọi số trên cột ấy đều chẵn. Vì vậy, ngoài C_{2n-2} , có nhiều nhất một cột mang chỉ số chẵn.

Tuy nhiên, C_{2n} và C_{2n-4} là hai cột khác C_{2n-2} , đều có chỉ số chẵn. Lại mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại bảng tốt tối thiểu với $n \geq 8$ chẵn.

Khi $n = 6$, ta đã biết các chỉ số 12, 11, 10 thuộc về các cột.

Giả sử một trong các số 7, 8, 9 là chỉ số của một hàng. Hàng ấy cắt cột C_{11} tại một số chia hết lần lượt cho $7 \cdot 11 = 77$, $8 \cdot 11 = 88$ và $9 \cdot 11 = 99$.

Cả ba số đều lớn hơn $2n^2 = 72$. Do đó 7, 8, 9 đều phải là chỉ số của các cột.

Như vậy sáu cột có các chỉ số

7, 8, 9, 10, 11, 12.

Suy ra chỉ số 5 thuộc về một hàng, gọi là R_5 . Cột C_{10} chứa 6 bội phân biệt của 10.

Trong khi đó, chỉ có

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70

là các bội dương của 10 không vượt quá 72. Vì thế, ngoài C_{10} , toàn bảng chứa nhiều nhất một bội của 10. Các số trên R_5 đều là bội của 5. Một số như vậy chẵn khi và chỉ khi nó là bội của 10. Do đó, ngoài giao điểm với C_{10} , hàng R_5 có nhiều nhất một ô chứa số chẵn.

Suy ra trong năm cột khác C_{10} , nhiều nhất một cột có chỉ số chẵn. Nhưng C_8 và C_{12} đều là các cột có chỉ số chẵn và đều khác C_{10} , mâu thuẫn. Vậy $n = 6$ cũng không thỏa mãn.

Vậy $n = 2$ và $n = 4$ là tất cả giá trị thoả mãn yêu cầu bằng cách xét các bảng sau:

3	4
6	8

5	6	7	8
10	30	14	16
15	18	21	24
20	12	28	32