



KẾT NỐI TRI THỨC  
VỚI CUỘC SỐNG

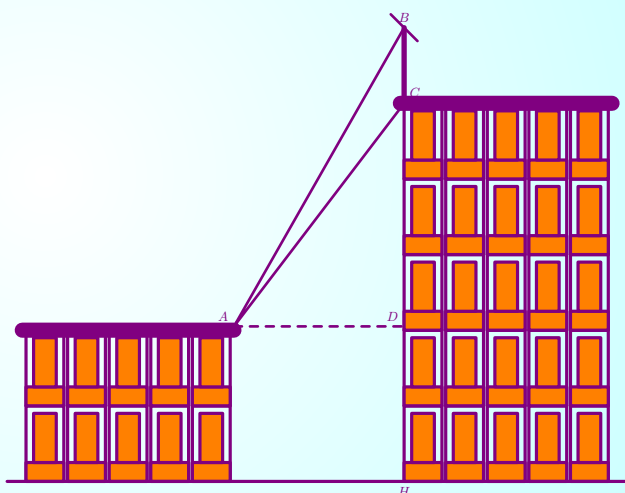
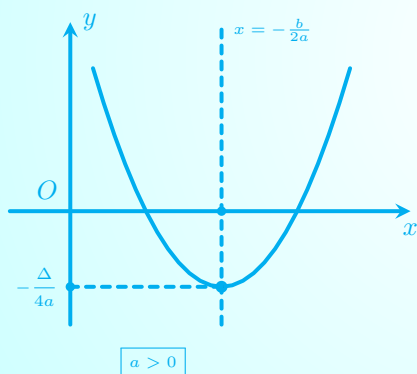
TH.S NGUYỄN THÀNH NHÂN

# TOÁN

## PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

# 12

TẬP MỘT



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

# Mục lục

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ</b>                 | <b>1</b>  |
| <b>Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số</b>                                 | <b>1</b>  |
| (A) Lý thuyết cần nhớ.....                                                        | 1         |
| (B) Phân loại và phương pháp giải toán.....                                       | 2         |
| Dạng 1: Bài toán khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước.....             | 2         |
| Dạng 2: Bài toán thực tiễn liên quan.....                                         | 3         |
| (C) Bài tập trắc nghiệm cuối bài.....                                             | 12        |
| <b>Bài 2. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số</b>                               | <b>17</b> |
| (A) Lý thuyết cần nhớ.....                                                        | 17        |
| (B) Phân loại và phương pháp giải toán.....                                       | 17        |
| Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$ ..... | 17        |
| Dạng 2: Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min.....                | 25        |
| (C) Bài tập trắc nghiệm cuối bài.....                                             | 36        |
| <b>Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số</b>                                    | <b>41</b> |
| (A) Lý thuyết cần nhớ.....                                                        | 41        |
| (B) Phân loại và phương pháp giải toán.....                                       | 42        |
| Dạng 1: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.....                | 42        |
| Dạng 2: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.....                 | 47        |
| (C) Bài tập trắc nghiệm cuối bài.....                                             | 50        |
| <b>Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số</b>                          | <b>55</b> |
| (A) Lý thuyết cần nhớ.....                                                        | 55        |
| (B) Phân loại và phương pháp giải toán.....                                       | 56        |
| Dạng 1: Đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .....                     | 56        |
| Dạng 2: Đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ .....          | 60        |
| Dạng 3: Đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ .....   | 66        |
| Dạng 4: Sự tương giao của hai đồ thị.....                                         | 69        |
| (C) Bài tập trắc nghiệm cuối bài.....                                             | 73        |

## **Bài 5. Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn** 79

- (A)** Lý thuyết cần nhớ.....79
- (B)** Phân loại và phương pháp giải toán.....80
  - Dạng 1: Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc.....80
  - Dạng 2: Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận.....81
  - Dạng 3: Bài toán tối ưu hoá trong hình học.....81
  - Dạng 4: Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng.....83
- (C)** Bài tập trắc nghiệm cuối bài.....91

## **Chương 2. VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN** 96

### **Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN** 96

- (A)** LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....96
- (B)** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....99
  - Dạng 1: Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ, độ dài véc tơ.....99
  - Dạng 2: Xác định góc và tích vô hướng của hai véc tơ.....108
- (C)** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI.....117

### **Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN** 122

- (A)** LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....122
- (B)** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....123
  - Dạng 1: Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ.....123
  - Dạng 2: Tọa độ hóa một số hình không gian.....127
- (C)** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI.....134

### **Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ** 138

- (A)** LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....138
- (B)** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....139
  - Dạng 1: Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng.....139
  - Dạng 2: Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng.....149

## **Chương 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM** 157

### **Bài 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỬ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM** 157

|               |                                                                         |            |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| Ⓐ             | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                  | 157        |
| Ⓑ             | PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....                                 | 158        |
|               | Dạng 1: Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.....            | 158        |
|               | Dạng 2: Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....            | 159        |
| <b>Bài 2.</b> | <b>PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM</b>            | <b>165</b> |
| Ⓐ             | LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....                                                  | 165        |
| Ⓑ             | PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....                                 | 166        |
|               | Dạng 1: Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm.....             | 166        |
|               | Dạng 2: Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm..... | 167        |



# Chương 1

## ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### Bài



### TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

#### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

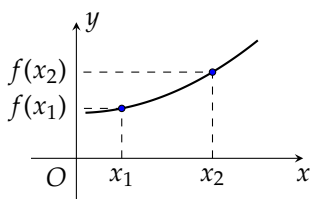
##### 1 Tính đơn điệu của hàm số

⚙ **Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$  ( $K$  là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

###### Ghi nhớ 1

Hàm số đồng biến trên  $K$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

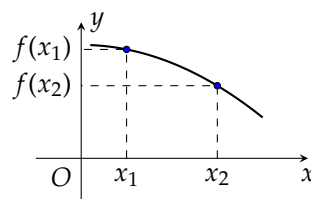


Trên  $K$ , đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.

###### Ghi nhớ 2

Hàm số nghịch biến trên  $K$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên  $K$ , đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.

⚙ **Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ .

- Nếu  $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$  và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(a; b)$ .
- Nếu  $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$  và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(a; b)$ .

##### 2 Cực trị của hàm số

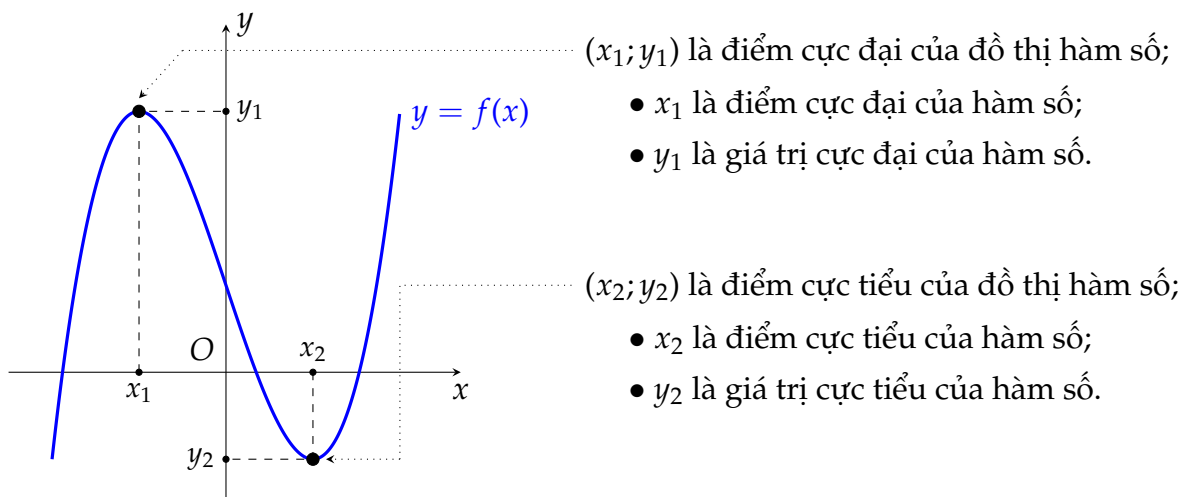
⚙ **Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$ .
- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$ .

**Định lý:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên các khoảng  $(a; x_0)$  và  $(x_0; b)$ . Khi đó:

- Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ .
- Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

**Các tên gọi:**



## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

### Bài toán khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = f(x)$ .
- ② Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  thuộc  $\mathcal{D}$  mà tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần, xét dấu  $y'$  và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

- |                          |                           |                                |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| a) $y = -x^2 + 4x - 3$ ; | b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ; | c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ; |
| d) $y = -2x^4 + 4x^2$ ;  | e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$ ; | f) $y = -16x^4 + x - 1$ .      |

**Bài 2.** Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

- |                           |                            |                               |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $y = \sqrt{9 - x^2}$ ; | b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ; | c) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ . |
|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|

**Bài 3.** Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a)  $y = \frac{2x+1}{x+1};$

b)  $y = \frac{3x+1}{x-1};$

c)  $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1};$

d)  $y = \frac{x^2-x+4}{x-1};$

e)  $y = x + \frac{4}{x};$

f)  $y = x - 2 + \frac{9}{x-1}.$

**Bài 4.** Khảo sát sự biến thiên và tìm cực trị của các hàm số sau:

a)  $y = x \ln x;$

b)  $y = (x^2 - 3)e^x;$

c)  $y = (x^2 - 3)e^{-x};$

d)  $y = \frac{\ln x}{x};$

e)  $y = \ln(x^2 - 2x + 2);$

f)  $y = x^2 - 4 \ln(1 - x).$

**DẠNG TOÁN**  
**2**

### Bài toán thực tiễn liên quan

**Bài 5.** Sau khi một hóa chất bị tràn xuống hồ, nồng độ của hóa chất đó trong nước C (đơn vị: ppm) đo được sau  $t$  giờ (kể từ lúc bắt đầu sự cố) tuân theo mô hình:

$$C(t) = -t^3 + 12t^2 + 60t \quad (0 \leq t \leq 15)$$

- a) Hãy cho biết nồng độ hóa chất trong hồ tăng hay giảm trong khoảng thời gian từ giờ thứ 12 đến giờ thứ 15?
- b) Sau bao nhiêu giờ kể từ lúc sự cố xảy ra thì nồng độ hóa chất trong hồ đạt mức cao nhất? Mức nồng độ cao nhất đó là bao nhiêu ppm?

**Bài 6.** Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian  $t$  (giờ) cho bởi công thức  $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$ . Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời lúc mấy giờ trong ngày (tính theo 24 giờ)? Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

**Bài 7.** Nồng độ  $C$  (tính bằng mg/L) của một loại thuốc trong máu bệnh nhân sau khi tiêm  $t$  (giờ) được mô hình hóa bởi hàm số:

$$C(t) = 15t \cdot e^{-0.2t} \quad (t \geq 0)$$

- a) Lập bảng biến thiên thể hiện sự thay đổi nồng độ thuốc trong máu theo thời gian.
- b) Sau bao lâu kể từ lúc tiêm thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân đạt mức cao nhất?

**Bài 8.** Sau khi một dịch bệnh bùng phát, bộ phận y tế dự phòng ước tính số lượng người nhiễm bệnh  $N$  (đơn vị: trăm người) sau  $t$  ngày (kể từ lúc phát hiện ca bệnh đầu tiên) được cho bởi hàm số:

$$N(t) = \frac{300t}{t^2 + 9} \quad (t \geq 0)$$

- Xét chiều biến thiên của hàm số  $N(t)$  để cho biết khoảng thời gian nào số người mắc bệnh tăng, khoảng thời gian nào số người mắc bệnh giảm.
- Vào ngày thứ mấy kể từ lúc bùng phát thì số lượng người mắc bệnh là cao nhất? Số lượng cao nhất ước tính là bao nhiêu người?

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định với mọi  $x \neq 4$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

|         |           |      |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $4$ | $9$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $-$ | $0$       | $+$ |

- A.**  $(-\infty; -1)$ .      **B.**  $(-2; 10)$ .      **C.**  $(-1; +\infty)$ .      **D.**  $(-\infty; 9)$ .

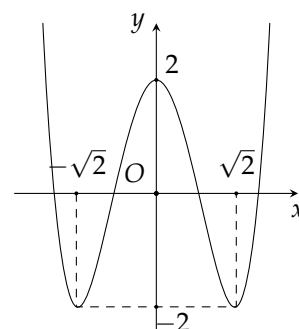
**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định với mọi  $x \neq 4$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $4$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $-$ | $-$       |

- A.**  $(0; +\infty)$ .      **B.**  $(-\infty; +\infty)$ .      **C.**  $(-\infty; 2)$ .      **D.**  $(-\infty; 5)$ .

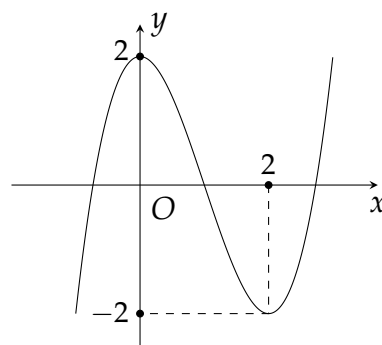
**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(\sqrt{2}; +\infty)$ .      **B.**  $(-2; 2)$ .  
**C.**  $(-\infty; 0)$ .      **D.**  $(0; \sqrt{2})$ .



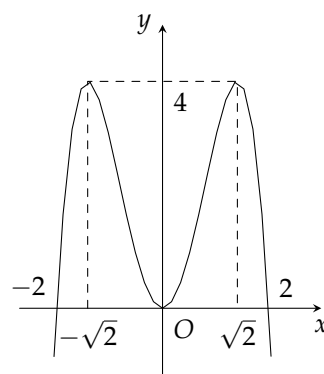
**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng  $-2$ .
- C. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên  $(0; 2)$ .



**Câu 5.** Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A.  $x = 2$ .
- B.  $x = 0$ .
- C.  $x = -2$ .
- D.  $x = 4$ .



**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .
- C. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 3$ .
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $3$  | $0$ | $+\infty$ |     |

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $(-2; -4)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

|         |           |      |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $-4$ | $+\infty$ | $4$ | $+\infty$ |     |

**Câu 8.** Gọi  $x_1$  là điểm cực đại  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$ . Tính  $x_1 + 2x_2$ .

- A. 2.
- B. 1.
- C. -1.
- D. 0.

**Câu 9.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  bằng

A.  $2\sqrt{5}$ .

B.  $2\sqrt{2}$ .

C. 2.

D. 4.

Câu 10. Hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-1; 0)$ .

B.  $(-1; +\infty)$ .

C.  $(-3; 8)$ .

D.  $(-\infty; -1)$ .

Câu 11. Cho hàm số  $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -3$ .

B. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

C. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .

D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

Câu 12. Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-2}$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

D. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Câu 13. Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+3}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(-3; +\infty)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(-3; +\infty)$ .

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 4}$ . Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

**A.**  $x = 8$ .

**B.**  $x = 6$ .

**C.**  $x = -3$ .

**D.**  $x = 2$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ . Gọi  $y_{\text{CD}}$ ,  $y_{\text{CT}}$  lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số. Giá trị của biểu thức  $y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2$  bằng

**A.** 8.

**B.** 7.

**C.** 9.

**D.** 6.

**Câu 16.** Tìm điểm cực tiểu của hàm số  $f(x) = (x - 3)e^x$ .

**A.**  $x = 3$ .

**B.**  $x = 0$ .

**C.**  $x = 2$ .

**D.**  $x = 1$ .

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = x^2 + 4 \ln(3 - x)$ . Tìm giá trị cực đại  $y_{\text{CD}}$  của hàm số đã cho.

**A.**  $y_{\text{CD}} = 2$ .

**B.**  $y_{\text{CD}} = 4$ .

**C.**  $y_{\text{CD}} = 1 + 4 \ln 2$ .

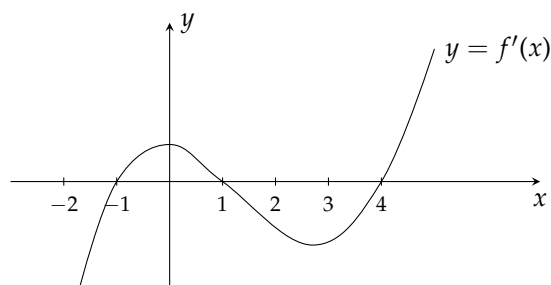
**D.**  $y_{\text{CD}} = 1$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x(x - 1)^2(x - 2)^3$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

- A. 1.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 3.

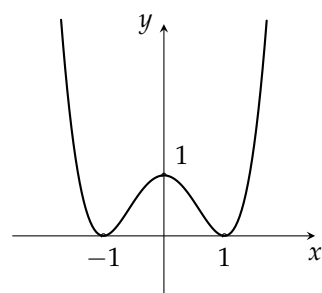
**Câu 19.** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$ . Biết  $f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
 B. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .  
 C. Hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực tiểu.  
 D. Hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực đại.



**Câu 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $f(x)$  không có cực trị.  
 B. Đồ thị hàm số  $f(x)$  có đúng 2 điểm cực tiểu.  
 C. Đồ thị hàm số  $f(x)$  có đúng một cực đại.  
 D. Hàm số  $f(x)$  có 3 cực trị.



**Câu 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- |      |           |     |     |     |           |     |
|------|-----------|-----|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$ | $-$ | $+$ | $0$       | $+$ |

a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .  
b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .  
c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là  $2x + y - 4 = 0$ .  
d) Diện tích của tam giác  $OAB$  bằng 4, với  $O$  là gốc toạ độ.

a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .  
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .  
c) Tọa độ điểm  $A(-2; -2)$ ,  $B(0; 2)$ .  
d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là  $AB = 2\sqrt{5}$ .

**Câu 24.** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t)$ ;  $v'(t)$  là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $a(t)$ .

- a) Phương trình hàm vận tốc là  $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ .
- b) Phương trình hàm gia tốc là  $a(t) = 6t - 12$ .
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi  $t \in (0; 1)$  hoặc  $t \in (3; +\infty)$ .
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi  $t \in (1; 3)$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời các câu hỏi sau vào ô kết quả.

**Câu 25.** Cho hàm số  $y = f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 2$  có giá trị cực tiểu bằng  $y_1$  và giá trị cực đại bằng  $y_2$ . Tính  $P = 4y_1 + 4y_2$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 26.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2 + 12x + 8}{x + 6}$  có giá trị cực tiểu bằng  $y_1$  và giá trị cực đại bằng  $y_2$ . Tính  $P = -y_1 + 2y_2$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Câu 27.** Chỉ số ô nhiễm bụi mịn PM2.5 tại một thành phố trong những tuần đầu năm được đo đạc và xấp xỉ bằng hàm số  $I(t) = -2t^3 + 33t^2 + 72t + 50$ , trong đó  $t$  là số tuần lễ tính từ đầu năm ( $t \geq 0$ ). Sau bao nhiêu tuần lễ kể từ đầu năm thì chỉ số ô nhiễm tại thành phố này đạt mức cao nhất?

KQ:

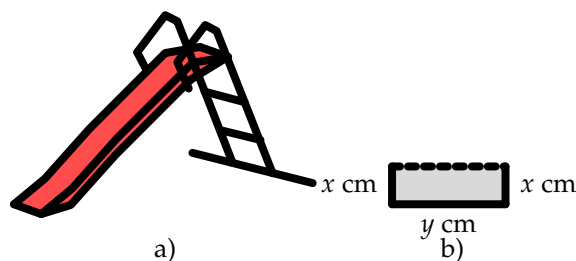
**Câu 28.** Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau  $x$  phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ . Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

KQ:

**Câu 29.** Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số  $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$ , trong đó  $P(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  giờ sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

KQ:

**Câu 30.** Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở hình bên. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Với  $x$  đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?



KQ:

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; 1)$ .      B.  $(2; +\infty)$ .  
C.  $(1; +\infty)$ .      D.  $(-1; 1)$ .

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $1$ | $4$ | $-\infty$ |

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số nghịch biến với mọi  $x \neq 2$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên tập  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

|         |                     |   |                     |
|---------|---------------------|---|---------------------|
| $x$     | $-\infty$           | 2 | $+\infty$           |
| $f'(x)$ | —                   |   | —                   |
| $f(x)$  | 1<br>↘<br>$-\infty$ |   | $+\infty$<br>↘<br>1 |

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại

- A.  $x = 10$ .
- B.  $x = 8$ .
- C.  $x = 12$ .
- D.  $x = 17$ .

|      |           |            |      |            |     |            |           |
|------|-----------|------------|------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 10         | 12   | $+\infty$  |     |            |           |
| $y'$ |           | +          | 0    | -          | 0   | +          |           |
| $y$  |           |            | $-3$ |            | $3$ |            | $-\infty$ |
|      | $-\infty$ | $\nearrow$ |      | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |           |

**Câu 4.** Hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.  $(2; +\infty)$ .
- B.  $(-\infty; 0)$ .
- C.  $(-\infty; +\infty)$ .
- D.  $(0; 2)$ .

**Câu 5.** Trong 8 phút kể từ khi xuất phát, độ cao  $h$  (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm  $t$  phút được cho bởi công thức  $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$ . Hỏi độ cao của khinh khí cầu giảm trong khoảng thời gian nào?

- A. Từ phút thứ 2 đến phút thứ 6.
- B. Từ phút thứ 3 đến phút thứ 6.
- C. Từ phút thứ 4 đến phút thứ 8.
- D. Từ phút thứ 6 đến phút thứ 8.

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x-9}$ . Hàm số nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.  $(-\infty; 10)$ .
- B.  $(13; +\infty)$ .
- C.  $(8; +\infty)$ .
- D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{-x-9}{2x+10}$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

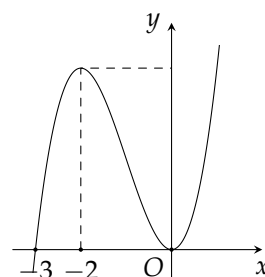
- A.  $(-\infty; -4)$ .
- B.  $(-\infty; +\infty)$ .
- C.  $(-9; +\infty)$ .
- D.  $(-2; +\infty)$ .

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 10x + 2}{x - 5}$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.  $(-\infty; 0)$ .
- B.  $(4; +\infty)$ .
- C.  $(-\infty; 6)$ .
- D.  $(4; 6)$ .

**Câu 9.** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; 0)$ .
- B.  $(-3; +\infty)$ .
- C.  $(-\infty; 4)$ .
- D.  $(-4; 0)$ .



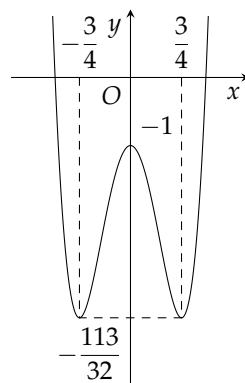
**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định  $[-8; 8] \setminus \{2\}$  và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

|      |    |    |           |   |           |           |
|------|----|----|-----------|---|-----------|-----------|
| $x$  | -8 | -1 | 2         | 4 | 8         |           |
| $y'$ | +  | 0  | +         | + | 0         | -         |
| $y$  | -2 | 1  | $+\infty$ | 3 | $-\infty$ | $-\infty$ |

- A. Điểm cực tiểu của đồ thị là  $(-8; -2)$ .  
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-8; 2)$ .  
 C. Hàm số đạt cực trị tại  $x = -1$ .  
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 4)$ .

**Câu 11.** Cho hàm số có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào **sai**?

- A. Hàm số có một cực tiểu tại  $x = \frac{3}{4}$  và đạt cực đại tại  $x = 0$ .  
 B. Giá trị cực đại  $y = -1$  và giá trị cực tiểu  $y = -\frac{113}{32}$ .  
 C. Hàm số có một cực tiểu tại  $x = -\frac{3}{4}$ .  
 D. Hàm số có một cực đại tại  $x = -\frac{3}{4}$ .



**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = x^2(x-1)^3(3-x)(x-5)$ . Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = 7x^3 + 9x^2 - 3x - 4$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Giá trị cực đại  $y = 1$ .  
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = \frac{1}{7}$ .  
 C. Giá trị cực tiểu  $y = \frac{1}{7}$ .  
 D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = -1$ .

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 17x + 9}{x + 17}$ . Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A.  $x = -13$ . B.  $x = -14$ . C.  $x = -23$ . D.  $x = -20$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2 - 2x + 50}{x - 1}$ . Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A. 22. B. 6. C. -4. D. -18.

**Câu 16.** Đồ thị hàm số  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x$  có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

- A.  $E(1; -22)$ . B.  $H(1; -10)$ . C.  $K(0; 6)$ . D.  $G(3; 54)$ .

**Câu 17.** Giá trị cực tiểu của hàm số  $y = (x^2 - x + 1)e^x$  bằng

- A. 1. B.  $\frac{3}{e}$ . C. 0. D. -1.

**Câu 18.** Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số  $y = x - \ln(x^2 - x + 1)$ . Giá trị của biểu thức  $S = x_1 + 2x_2$  bằng

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

**Câu 19.** Sự thay đổi dân số của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 2025 được ước tính bởi mô hình hàm số  $P(t) = \frac{20t}{t^2 + 16}$  (nghìn người) với  $t \geq 0$ . Theo mô hình này, vào năm nào thì dân số của thị trấn đạt mức cao nhất?

A. Năm 2029.

B. Năm 2033.

C. Năm 2027.

D. Năm 2031.

**Câu 20.** Một nhà sản xuất bán một loại sản phẩm với giá  $p(x) = 1200 - 2x$  (nghìn đồng/sản phẩm), trong đó  $x$  là số lượng sản phẩm bán ra. Chi phí để sản xuất  $x$  sản phẩm là  $C(x) = 200x + 10000$  (nghìn đồng). Để đạt được tổng lợi nhuận lớn nhất, nhà sản xuất cần sản xuất và bán ra bao nhiêu sản phẩm?

A. 250 sản phẩm.

B. 200 sản phẩm.

C. 300 sản phẩm.

D. 400 sản phẩm.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = 3x^3 - 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

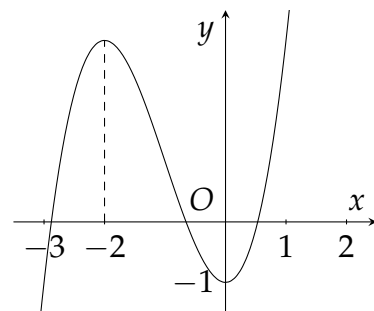
d) Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đã cho đạt cực đại tại  $x = 0$ .b) Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại  $x = -3$ .c) Hàm số đã cho có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là  $-4, -3$ .d) Đồ thị hàm số  $g(x) = f(x) + 3$  có điểm cực đại là  $(0; 0)$ .

**Câu 3.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-2, 0)$ .b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .d) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

**Câu 4.** Số lượng vi khuẩn  $N(t)$  (đơn vị: nghìn con) trong một mẫu nuôi cấy sau  $t$  (giờ) được tính theo công thức  $N(t) = 1000 + \frac{400t}{t^2 + 4}$  với  $t \geq 0$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tốc độ phát triển của vi khuẩn luôn mang giá trị dương trong 3 giờ đầu tiên.

b) Số lượng vi khuẩn tăng dần trong 2 giờ đầu kể từ lúc bắt đầu quan sát.

c) Quần thể vi khuẩn đạt số lượng lớn nhất tại thời điểm  $t = 2$  giờ.

d) Số lượng vi khuẩn lớn nhất trong quá trình nuôi cấy là 1100 nghìn con.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 20x - 3$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = x_1$  và đạt cực đại tại điểm  $x = x_2$ . Tính  $P = 2x_1 + 2x_2$ .

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 2.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$  bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2 - 42x + 18}{x - 21}$  có giá trị cực tiểu bằng  $y_1$  và giá trị cực đại bằng  $y_2$ . Tính  $P = -y_1 - 4y_2$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 10$  có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích S của tam giác ABC.

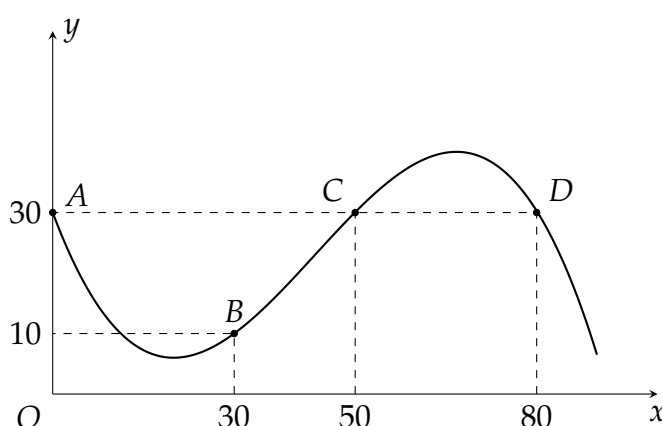
KQ:

**Câu 5.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$  có điểm cực tiểu A(2; -2). Khi đó  $a + b$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 6.** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình bên. Biết đường chạy của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , với  $0 \leq x \leq 90$ , đơn vị mỗi trục là mét. Biết tàu lượn xuất phát từ điểm A đồng thời đi qua các điểm B, C, D (như hình vẽ). Hãy tính độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được so với mặt đất (xem Ox là mặt đất, tính theo đơn vị mét và kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:



—HẾT—

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

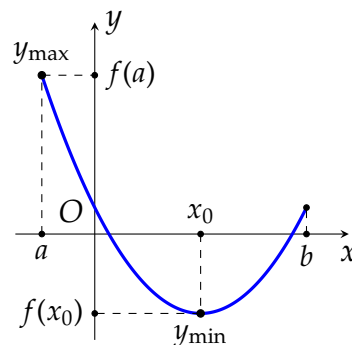
Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathcal{D}$ . Ta có

- ①  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số nếu  $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu  $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ②  $n$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu  $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu  $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

Bài toán tìm max, min của hàm số  $y = f(x)$  trên miền  $\mathcal{D}$

### ⚙ Phương pháp giải:

- ① Tính  $y'$ . Giải phương trình  $y' = 0$  tìm các nghiệm  $x_i \in \mathcal{D}$  và tìm các điểm  $x_j \in \mathcal{D}$  mà tại đó  $y'$  không xác định.
- ② Lập bảng biến thiên của hàm số trên  $\mathcal{D}$ .
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
  - Điểm ở vị trí cao nhất  $\rightarrow$  Kết luận max;
  - Điểm ở vị trí thấp nhất  $\rightarrow$  Kết luận min.

⚙ **Lưu ý:** Nếu  $\mathcal{D}$  là đoạn  $[a; b]$  và hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì ta có thể làm như sau:

- ① Giải  $f'(x) = 0$  tìm các nghiệm  $x_0 \in (a; b)$ ;
- ② Tìm các điểm  $x_i \in (a; b)$  mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- ③ Tính toán  $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$  (\*)
- ④ Gọi  $M, n$  lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (\*) thì  $M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$

✔ Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$  và  $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ .

✔ Nếu hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$  và  $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$ .

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau:

- a)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  trên  $[-3; 2]$ .      b)  $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$  trên  $[0; 2]$   
c)  $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$ .      d)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ ;  
e)  $f(x) = \frac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$  trên  $\mathbb{R}$ .      f)  $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$  trên miền xác định.

**Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

- a)  $y = x - \sin 2x$  trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$       b)  $y = e^{x^3-3x+3}$  trên  $[0; 2]$   
c)  $y = e^x(x^2 - 3)$  trên  $[-2; 2]$       d)  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  trên  $[1; e^5]$

**Bài 3.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau:

- a)  $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .      b)  $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ .

**Bài 4.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để

- a) giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$  trên  $[-1; 1]$  bằng 0.  
b) giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$  trên  $[1; 2]$  bằng 4.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 12x + 1$  trên đoạn  $[-2; 3]$  lần lượt là

- A. 17, -15.      B. 10, -26.      C. -15, 17.      D. 6, -26.

**Câu 2.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  trên  $[-4; 4]$ . Tính tổng  $M + m$ .

- A. 12.      B. 98.      C. 17.      D. 73.

**Câu 3.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng

A. 33.

B. 37.

C. 12.

D. 1.

**Câu 4.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 3]$  là

A.  $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$ .

B.  $\min_{[0;3]} y = -3$ .

C.  $\min_{[0;3]} y = 1$ .

D.  $\min_{[0;3]} y = -1$ .

**Câu 5.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$  là

A. 2.

B.  $\frac{7}{5}$ .

C. 3.

D.  $\frac{11}{5}$ .

**Câu 6.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$  trên đoạn  $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$  bằng

A. 4.

B. -3.

C.  $-\frac{7}{2}$ .

D.  $-\frac{13}{3}$ .

**Câu 7.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4 - x^2}$  là

- A.  $M = -2$ .      B.  $M = 2$ .      C.  $M = 4$ .      D.  $M = 0$ .

**Câu 8.** Tính giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x - \ln x$  trên  $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ .

- A.  $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ .      B.  $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$ .  
C.  $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e$ .      D.  $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$ .

**Câu 9.** Gọi  $M, N$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 - 4 \ln(1 - x)$  trên đoạn  $[-2; 0]$ . Tính  $M - N$ .

- A.  $M - N = 4 \ln 2$ .      B.  $M - N = -1$ .  
C.  $M - N = 4 \ln 2 - 1$ .      D.  $M - N = 4 \ln 3 - 4$ .

**Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = e^{3x^2-2x^3} - f(x)$  trên đoạn  $[0; 1]$  bằng

- A.**  $e - f(1)$ .      **B.**  $f(1)$ .      **C.**  $f(0)$ .      **D.**  $1 - f(0)$ .

**Câu 11.** Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có bảng biến thiên như sau. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.**  $M = f(0)$ .      **B.**  $M = f(-1)$ .  
**C.**  $M = f(3)$ .      **D.**  $M = f(2)$ .

|      |    |   |   |   |   |   |
|------|----|---|---|---|---|---|
| $x$  | -1 | 0 | 2 | 3 |   |   |
| $y'$ |    | + | 0 | - | 0 | + |
| $y$  |    |   | 5 |   | 4 |   |
|      | 0  |   |   | 1 |   |   |

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên đoạn  $[-2; 3]$  như hình bên dưới.

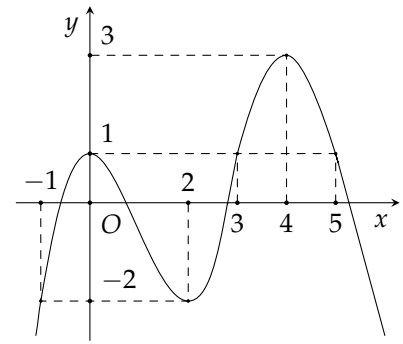
|         |           |    |    |    |   |           |
|---------|-----------|----|----|----|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | -2 | -1 | 1  | 3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           |    | +  | 0  | - | +         |
| $f(x)$  |           | 0  | 1  | -2 | 5 |           |

Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của biểu thức  $M - m$  là

- A.** 5.      **B.** 7.      **C.** -1.      **D.** 3.

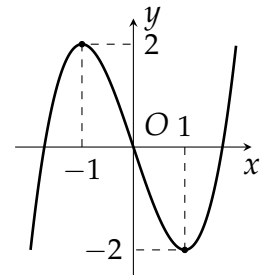
**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 5]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[-1; 5]$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

- A. 5.      B. 6.      C. 3.      D. 1.



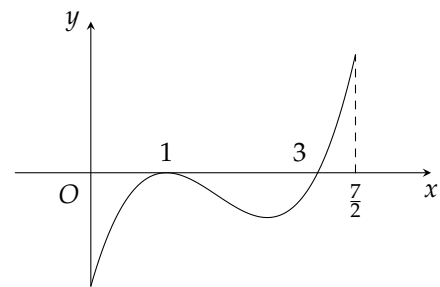
**Câu 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$ .

- A.  $m = 2$ .      B.  $m = -2$ .  
C.  $m = 1$ .      D.  $m = -1$ .



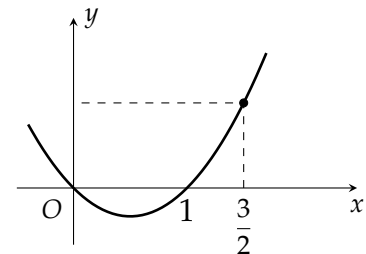
**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ , có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hỏi hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  tại điểm  $x_0$  nào dưới đây?

- A.  $x_0 = 3$ .      B.  $x_0 = 2$ .      C.  $x_0 = 1$ .      D.  $x_0 = 0$ .

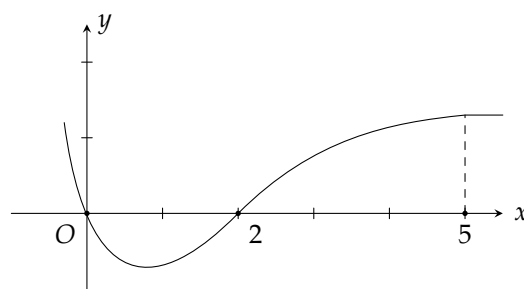


**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  tại điểm nào sau đây?

- A.  $x = \frac{3}{2}$ .      B.  $x = \frac{1}{2}$ .  
C.  $x = 1$ .      D.  $x = 0$ .

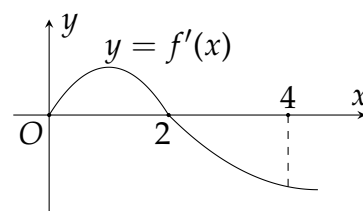


**Câu 17.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ. Biết rằng  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .
- c)  $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$  và  $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ .
- d)  $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$  và  $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Biết  $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$ , giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$  là



- A.  $m = f(4), M = f(1)$ .
- B.  $m = f(4), M = f(2)$ .
- C.  $m = f(1), M = f(2)$ .
- D.  $m = f(0), M = f(2)$ .

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$  thoả mãn  $\min_{[0;5]} f(x) = 5$ . Khi đó giá trị của  $m$  bằng

- A. 10.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 7.

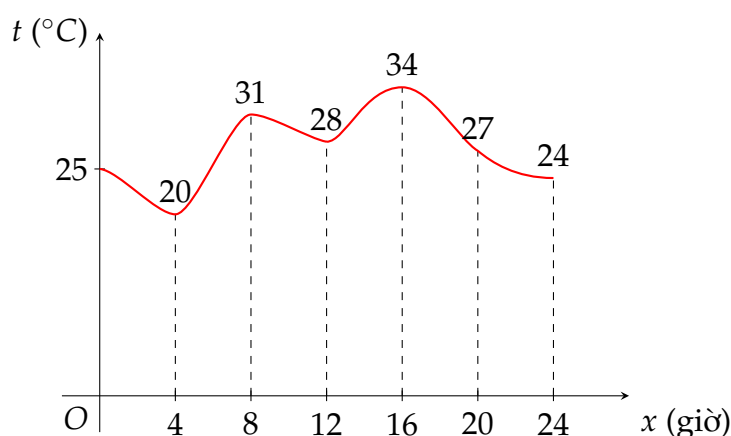
**Câu 20.** Hàm số  $y = \frac{x-m}{x+2}$  thỏa mãn  $\min_{x \in [0;3]} y + \max_{x \in [0;3]} y = \frac{7}{6}$ . Hỏi giá trị  $m$  thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.  $(2; +\infty)$ .      B.  $(0; 2)$ .      C.  $(-\infty; -1)$ .      D.  $(-1; 0)$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là  $28^\circ\text{C}$ .  
b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là  $20^\circ\text{C}$ .  
c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.  
d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.



**Câu 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $4$  | $3$ | $4$ | $-\infty$ |

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Cực đại của hàm số là 4.      b) Cực tiểu của hàm số là 3.  
c)  $\max_{\mathbb{R}} y = 4$ .      d)  $\min_{\mathbb{R}} y = 3$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-4}{x-6}$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là  $(6; +\infty)$ .      b)  $y(0) = \frac{2}{3}$ .  
 c)  $y' > 0$  với mọi  $x \neq 6$ .      d)  $\min_{[0;2]} y = -\frac{1}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 24.** Cho hàm số  $y = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

- a)  $y' = -x^2 - 4x$ .      b)  $y' = 0$  khi  $x = -2, x = 0$ .  
 c)  $y(0) = 3$ .      d)  $\min_{[-6;4]} y = -\frac{103}{3}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**DẠNG TOÁN**  
**2**

### Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min

#### ⚙ Bài toán chuyển động:

- Gọi  $s(t)$  là hàm quãng đường;  $v(t)$  là hàm vận tốc;  $a(t)$  là hàm gia tốc;
- Khi đó  $s'(t) = v(t)$ ;  $v'(t) = a(t)$ .

#### ⚙ Bài toán thực tế – tối ưu:

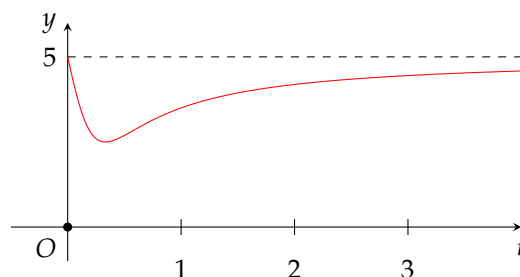
- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm  $f(t)$ .
- Khảo sát hàm  $f(t)$  trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Bài 5.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$



Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

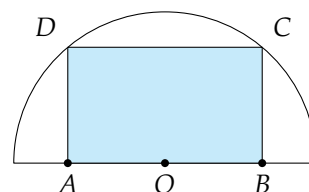


**Bài 6.** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời  $v(t)$  phụ thuộc vào thời gian  $t$  theo hàm số  $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$  (m/s). Trong khoảng thời gian từ  $t = 0$  (s) đến  $t = 5$  (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?



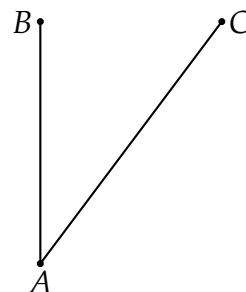
### Bài 7.

Tính diện tích lớn nhất  $S_{\max}$  của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính  $R = 6$  cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



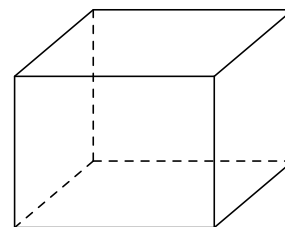
### Bài 8.

Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh  $AB = 4$  m,  $AC = 5$  m sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  (tham khảo hình vẽ). Để tăng hiệu ứng các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ  $B$  xuống  $A$  với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ  $A$  đến  $C$  với vận tốc 10 m/phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao giây từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?



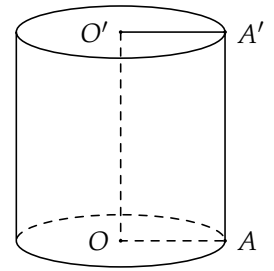
### Bài 9.

Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $288 \text{ dm}^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/  $\text{m}^2$ . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



### Bài 10.

Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích  $1000 \text{ cm}^3$ . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá  $1,2$  nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá  $0,75$  nghìn đồng/ $\text{cm}^2$ . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



**Bài 11.** Một công ty tiến hành khai thác 12 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 133 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 12 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hàng ngày sẽ giảm 4 thùng. Để công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất đạt lớn nhất.

**Bài 12.** (Minh họa -2025). Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 500$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$  đồng, trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$  (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Một chất điểm chuyển động với quãng đường  $s(t)$  cho bởi công thức  $s(t) = 6t^2 - t^3$ ,  $t$  (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t$  (giây) bằng bao nhiêu?

- A.  $t = 3 \text{ s}$ . B.  $t = 4 \text{ s}$ . C.  $t = 2 \text{ s}$ . D.  $t = 6 \text{ s}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 2.** Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

- A.  $13 \text{ m/s}$ . B.  $10 \text{ m/s}$ . C.  $9 \text{ m/s}$ . D.  $12 \text{ m/s}$ .

.....

.....

.....

**Câu 3.** Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)}.$$

trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

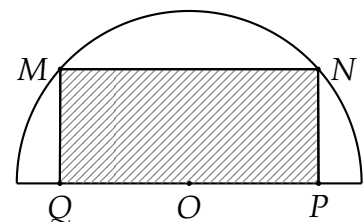
- A.** 1 008 con.      **B.** 1 012 con.      **C.** 1 005 con.      **D.** 1 020 con.

**Câu 4.** Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

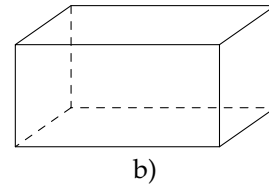
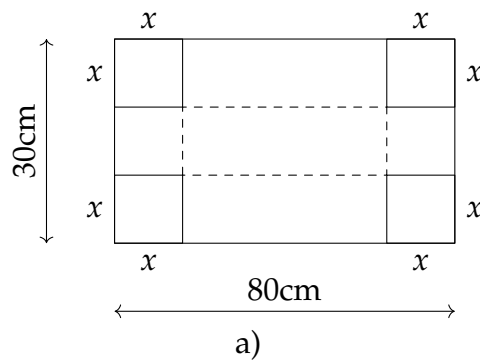
- A.**  $25 \text{ cm}^2$ .      **B.**  $\frac{25}{4} \text{ cm}^2$ .      **C.**  $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$ .      **D.**  $125 \text{ cm}^2$ .

**Câu 5.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 3$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- A.**  $\frac{9}{2}$ .      **B.**  $6\sqrt{2}$ .      **C.** 9.      **D.**  $9\sqrt{2}$ .



**Câu 6.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  (cm) với  $5 \leq x \leq 10$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm  $x$  để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



**A.**  $x = \frac{20}{3}$  cm.

**B.**  $x = \frac{20}{7}$  cm.

**C.**  $x = \frac{25}{3}$  cm.

**D.**  $x = \frac{25}{7}$  cm.

**Câu 7.** Ông Bình dự định sử dụng hết  $5,5 \text{ m}^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

**A.**  $1,01 \text{ m}^3$ .

**B.**  $1,17 \text{ m}^3$ .

**C.**  $1,51 \text{ m}^3$ .

**D.**  $1,40 \text{ m}^3$ .

**Câu 8.** Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $\frac{500}{3} \text{ m}^3$ . Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là  $700.000 \text{ đồng/m}^2$ . Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

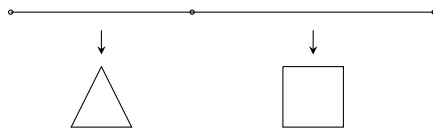
**A.** 120 triệu đồng.

**B.** 105 triệu đồng.

**C.** 115 triệu đồng.

**D.** 110 triệu đồng.

**Câu 9.** Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



**A.**  $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$  m.

**B.**  $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$  m.

**C.**  $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$  m.

**D.**  $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$  m.

**Câu 10.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng

nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

- A.** 30 triệu đồng.      **B.** 30,5 triệu đồng.      **C.** 29,5 triệu đồng.      **D.** 32 triệu đồng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 11.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích  $V$  (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

Gọi  $V'(t)$  là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  với  $0 \leq t \leq 0,5$ .

- a) Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít.  
 b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.  
 c)  $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$ , với  $0 \leq t \leq 0,5$ .  
 d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Câu 12.** Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất  $x$  ( $\text{m}^3$ ) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và  $0,001x^2$  triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa  $100 \text{ m}^3$  sản phẩm. Gọi  $C(x)$  là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất  $x$  ( $\text{m}^3$ ) sản phẩm trong một ngày và  $\bar{C}$  là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- a)  $C = 0,2x + 0,001x^2$  với  $0 \leq x \leq 100$ .
- b) Tổng chi phí khi sản xuất  $100 \text{ m}^3$  sản phẩm là 34 triệu đồng.
- c)  $\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$  với  $0 < x \leq 100$ .
- d)  $\bar{C}$  có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân).

**Câu 13.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là  $P(x) = 45 - 0,001x^2$  (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = 100 + 30x$  (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán  $x$  tấn sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho B là  $-0,001x^3 + 15x - 100$ .
- d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**Câu 14.** Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là  $V = 2,16 \text{ m}^3$ . Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/ $\text{m}^2$  và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/ $\text{m}^2$ . Gọi độ dài cạnh đáy là  $x$  (m) và chiều cao là  $h$  (m). Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

- a) Thể tích khối hộp được tính bởi công thức  $V = x \cdot h$ .
- b) Mối liên hệ giữa  $x$  và  $h$  là  $h = \frac{2,16}{x}$ .

- c) Để chi phí làm chiếc thùng đó thấp nhất thì độ dài cạnh đáy là 1,2 m.  
 d) Số tiền 345 600 đồng là chi phí thấp nhất có thể làm chiếc thùng.

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

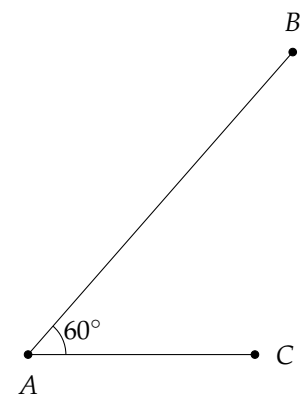
**Câu 15.** Một nhà máy sản xuất xe đạp cho thị trường châu Âu theo đơn giá 120 euro. Chi phí mỗi ngày của nhà máy được cho bởi hàm số  $K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 172x + 2400$ , trong đó  $x$  là số lượng xe đạp sản xuất được trong ngày hôm đó. Mỗi ngày có thể sản xuất tối đa 130 xe đạp. Giả sử số xe đạp sản xuất được trong mỗi ngày đều được bán hết vào cuối ngày đó. Gọi  $G(x)$  là hàm số biểu diễn lợi nhuận hàng ngày của nhà máy. Hỏi số lượng xe mỗi ngày cần sản xuất là bao nhiêu để nhà máy có lợi nhuận lớn nhất?

KQ:

**Câu 16.** Các nhà tổ chức các buổi hòa nhạc gây quỹ cần phải cân nhắc kỹ lưỡng giữa lợi nhuận và thua lỗ, đặc biệt khi xác định giá vé cho các buổi phát sóng truyền hình tại các rạp chiếu địa phương. Qua việc lưu trữ hồ sơ, một rạp chiếu phim nhận thấy rằng với mức giá vé là 260 nghìn đồng, họ trung bình có 1 000 người tham dự. Với mỗi lần giảm 10 nghìn đồng giá vé, số lượng khách sẽ tăng thêm 50 người. Mỗi khách hàng chi tiêu trung bình 40 nghìn đồng cho các món đồ ăn và thức uống. Vậy rạp chiếu phim nên thu giá vé vào cửa bao nhiêu để tối đa hóa tổng doanh thu (đơn vị nghìn đồng)?

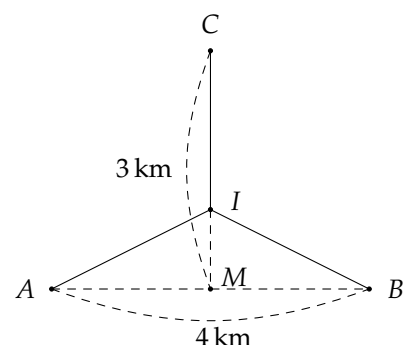
KQ:

**Câu 17.** Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm  $A$  và đi đến điểm  $C$  với vận tốc là  $60$  (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm  $B$  với vận tốc là  $30$  (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc  $60^\circ$  như hình vẽ dưới đây. Cho biết  $AB = 42$  (km) và vào lúc  $a$  giờ  $b$  phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cự li gần nhất để vẫy tay chào nhau ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ). Tính  $a + b$ ? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



KQ:

**Câu 18.** Hai nhà máy được đặt tại các vị trí  $A$  và  $B$  cách nhau  $4$  km. Nhà máy xử lí nước thải được đặt ở vị trí  $C$  trên đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ , cách trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  một khoảng là  $3$  km. Người ta muốn làm đường ống dẫn nước thải từ hai nhà máy  $A, B$  đến nhà máy xử lí nước thải  $C$  gồm các đoạn thẳng  $AI, BI$  và  $IC$ , với  $I$  là vị trí nằm giữa  $M$  và  $C$  (Hình bên). Cần chọn vị trí điểm  $I$  cách điểm  $M$  bao nhiêu km để tổng độ dài đường ống nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

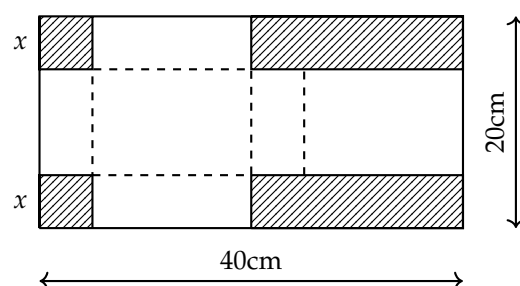


KQ:

**Câu 19.** Để làm một cái hộp đựng quà tặng bạn, từ một tấm bài hình chữ nhật với kích thước  $40\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ , bạn Hoa cắt bỏ hai hình vuông cạnh là  $x\text{ (cm)}$  và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc như hình bên) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp kín có dạng hình hộp chữ nhật. Hỏi có thể tạo được cái hộp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả tính theo đơn vị  $\text{cm}^3$  và làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ: 

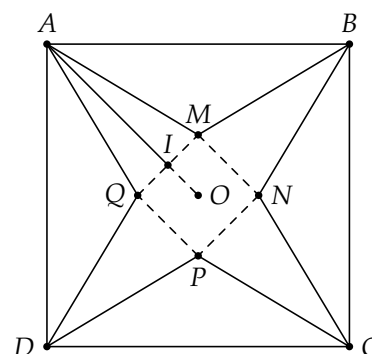
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Câu 20.** Từ một tấm bìa hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $5\text{ dm}$ , người ta cắt bỏ bốn tam giác bằng nhau là  $AMB$ ,  $BNC$ ,  $CPD$  và  $DQA$ . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Hỏi cạnh đáy của khối chóp bằng bao nhiêu  $\text{dm}$  để thể tích của nó là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-3; 2]$  và có bảng biến thiên như sau. Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 2]$ . Giá trị của  $M + 2m$  bằng

|         |    |    |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$     | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 |   |   |   |   |
| $f'(x)$ |    | +  | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 |
| $f(x)$  |    |    |   |   |   |   |   |   |   |

- A. 6.      B. 8.      C. 3.      D. 7.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biên thiên như hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$ .

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $0$       | $2$ | $-3$      |

- A. 2.      B. 0.  
C. -3.      D. Không tồn tại.

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

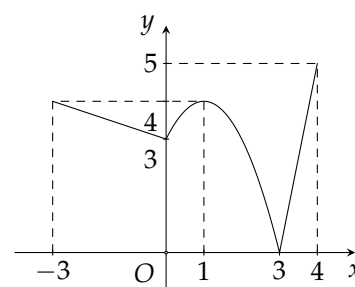
|      |           |      |     |     |           |     |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y'$ | $-$       | $  $ | $-$ | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$ .      B.  $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$ .  
C.  $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$ .      D.  $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-3; 4]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-3; 4]$ . Tính  $M + m$ .

- A. 5.      B. 1.      C. 8.      D. 7.



**Câu 5.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng

- A.  $\frac{6}{7}$ .      B.  $\frac{5}{6}$ .      C.  $\frac{4}{5}$ .      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 6.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^2 + 2x$  bằng

- A. 5. B. 1. C. 3. D. 2.

**Câu 7.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (x + 5)^{2024} - 10$ .

- A. -10. B. 10. C. -5. D. 5.

**Câu 8.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 5 - 3(x - 4)^{2026}$ .

- A. 5. B. 2026. C. -3. D. -4.

**Câu 9.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -9 \sin 2x + 10$ .

- A. -11. B. 19. C. 12. D. 1.

**Câu 10.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 8 \cos 5x - 10$ .

- A. -18. B. -2. C. 19. D. -16.

**Câu 11.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$  trên đoạn  $[-4; 4]$ . Tính  $T = M + 2m$ .

- A.  $T = -41$ . B.  $T = -44$ . C.  $T = -43$ . D.  $T = -42$ .

**Câu 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4x + \frac{5}{x}$  trên khoảng  $(-\infty; -1)$  bằng

- A.  $4\sqrt{5}$ . B.  $-4\sqrt{5} - 1$ . C.  $3 + 4\sqrt{5}$ . D.  $-4\sqrt{5}$ .

**Câu 13.** Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A.  $m = -1$ . B.  $m = -4$ . C.  $m = 7$ . D.  $m = -3$ .

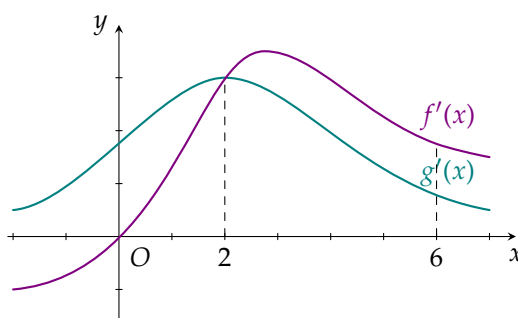
**Câu 14.** Gọi  $m$  và  $M$  lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{2x + 19}{x^2 + 16x + 68}$ . Tính tích  $mM$ .

- A.  $mM = -0.20$ . B.  $mM = -0.25$ . C.  $mM = -0.15$ . D.  $mM = -0.30$ .

**Câu 15.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (x^2 - 3x + 3)e^x$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

- A.  $e$ . B. 3. C.  $e^2$ . D.  $2e$ .

**Câu 16.** Cho hai hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  và  $g'(x)$  được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng  $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$ . Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $h(x) = f(x) - g(x)$  trên đoạn  $[0; 6]$  lần lượt là

- A.  $h(2)$ ,  $h(6)$ . B.  $h(6)$ ,  $h(2)$ . C.  $h(0)$ ,  $h(2)$ . D.  $h(2)$ ,  $h(0)$ .

**Câu 17.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos x - 6}$  là

- A.  $y_{\max} = \frac{1}{5}$ ;  $y_{\min} = -\frac{9}{7}$ . B.  $y_{\max} = 13$ ;  $y_{\min} = 4$ .

C.  $y_{\max} = 1; y_{\min} = -\frac{9}{7}$ .

D.  $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -1$ .

**Câu 18.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 2m$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để  $\max_{x \in [0;5]} y \in (0;10)$ .

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 9.

**Câu 19.** Cho hàm số  $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$  với  $m$  là tham số thực. Nếu  $\min_{[0;3]} f(x) = f(2)$  thì  $\max_{[0;3]} f(x)$  bằng

A.  $-\frac{13}{3}$ .

B. 4.

C.  $-\frac{14}{3}$ .

D. 1.

**Câu 20.** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$  (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 3 giờ.

C. 1 giờ.

D. 2 giờ.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1;3]$  và có bảng biến thiên như sau.

|      |    |   |   |   |   |   |
|------|----|---|---|---|---|---|
| $x$  | -1 | 0 | 2 | 3 |   |   |
| $y'$ |    | + | 0 | - | 0 | + |
| $y$  |    |   | 5 |   | 1 | 4 |

Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số trên  $[-1;3]$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $m = f(2)$ .

b)  $M = f(4)$ .

c)  $m = f(-1)$ .

d)  $M = f(0)$ .

**Câu 2.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích  $V$  (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4,5 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

Gọi  $V'(t)$  là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  với  $0 \leq t \leq 0,5$ . Biết 1 lít xăng có giá là 21 000 đồng.

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1,5 lít.

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787 500 đồng.

c) Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.

d) Phương trình  $V'(t) = 0$  có hai nghiệm phân biệt trên đoạn  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

**Câu 3.** Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí  $\text{CO}_2$  cho thấy: nồng độ khí  $\text{CO}_2$  trong phòng thay đổi theo thời gian  $t$  (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số  $f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2+5}$  ppm, với  $t \geq 0$  (Khi nói nồng độ khí  $\text{CO}_2$  trong không khí là 400 ppm, điều đó có nghĩa là: Trong một triệu phần thể tích của không khí, có 400 phần thể tích là khí  $\text{CO}_2$ ).

- a) Nồng độ khí CO<sub>2</sub> trong phòng tại thời điểm  $t = 0$  là 400 ppm.
- b)  $f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2}$  với  $t \geq 0$ .
- c) Nghiệm của phương trình  $f'(t) = 0$  là  $t = 2$ .
- d) Nồng độ khí CO<sub>2</sub> cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 ppm.

**Câu 4.** Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là  $V = 2,16 \text{ m}^3$ . Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/m<sup>2</sup> và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/m<sup>2</sup>. Gọi độ dài cạnh đáy là  $x$  (m) và chiều cao là  $h$  (m).

- a) Thể tích khối hộp được tính bởi công thức  $V = x \cdot h$ .
- b) Mối liên hệ giữa  $x$  và  $h$  là  $h = \frac{2,16}{x}$ .
- c) Để chi phí làm chiếc thùng đó thấp nhất thì độ dài cạnh đáy là 1,2 m.
- d) Số tiền 345 600 đồng là chi phí thấp nhất có thể làm chiếc thùng.

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 - 21x$  trên đoạn  $[2; 19]$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**Câu 2.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc (m/s) lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 3.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 500$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = -x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$  (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là  $G(x) = \frac{200000x}{3x+2}$  (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là  $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$  (đồng), nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 2% cho 180 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 3% cho các sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ:

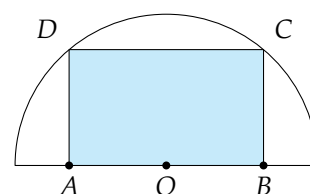
**Câu 4.** Để sản xuất một mặt hàng phục vụ ngày tết, một doanh nghiệp có kế hoạch vay ngắn hạn số tiền 150 triệu đồng trong vòng 1 tháng, với lãi suất là 4%/tháng. Tổng chi phí để sản xuất và kinh doanh  $x$  sản phẩm là  $V(x) = 1,4x - 600 + \frac{50000}{x}$  (đơn vị: triệu đồng), với  $x$  là số nguyên dương. Biết rằng, giá bán một sản phẩm là 1,2 triệu đồng, doanh nghiệp chịu thuế thu nhập là 17% tính trên tổng lợi nhuận thu được sau khi sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm. Hỏi sau 1 tháng sản xuất và kinh doanh như trên, doanh nghiệp trả hết phần nợ vay ngân hàng thì còn số tiền lợi nhuận nhiều nhất là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

KQ:

**Câu 5.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 5$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

KQ: 

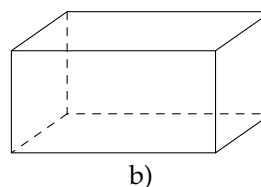
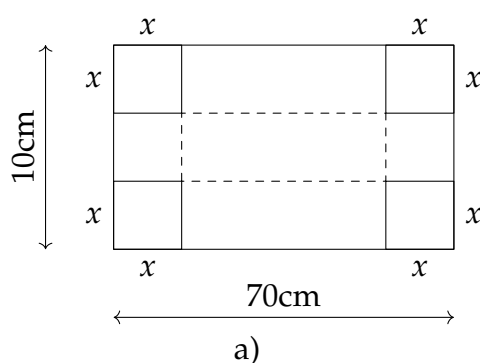
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Câu 6.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 10cm và chiều dài 70 cm như hình a, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  với  $1 \leq x \leq 5$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình b. Tìm  $x$  để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



—HẾT—

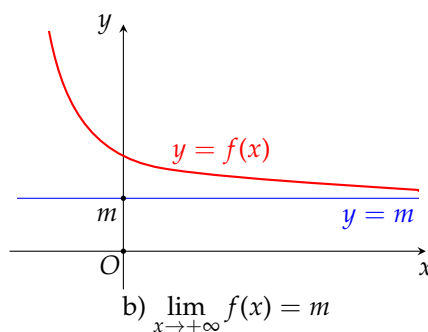
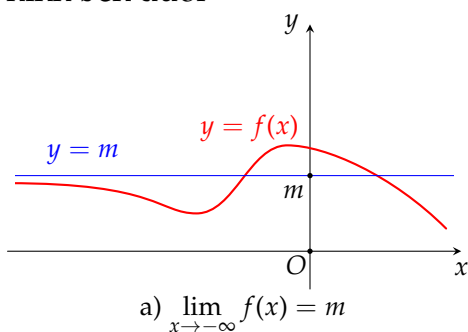
## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Đường tiệm cận ngang (TCN):

**Định nghĩa:** Đường thẳng  $y = m$  được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng  $y = m$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình bên dưới



**Các bước tìm TCN:**

① Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

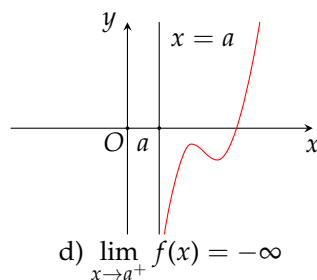
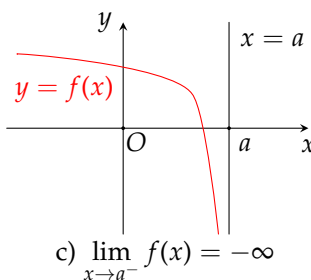
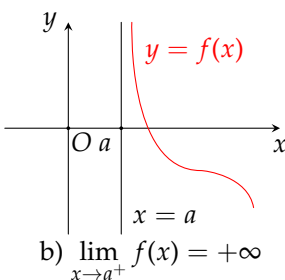
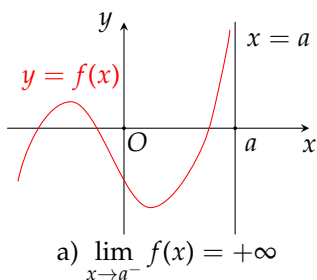
② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

### 2 Đường tiệm cận đứng (TCD)

**Định nghĩa:** Đường thẳng  $x = a$  được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng  $x = a$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình bên dưới.



**Các bước tìm TCD:**

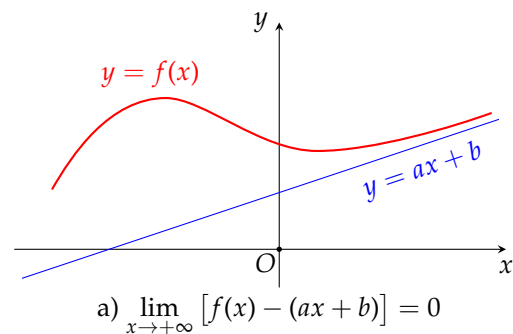
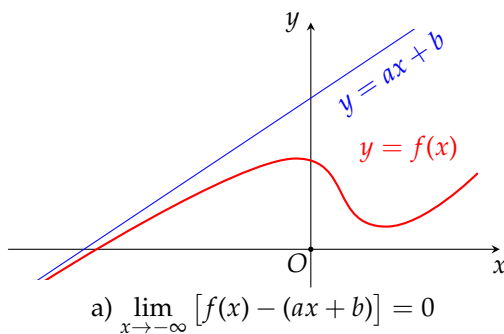
- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- ② Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

### 3 Đường tiệm cận xiên

⚙ **Định nghĩa:** Đường thẳng  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình bên dưới:



⚙ **Các bước tìm TCX  $y = ax + b$ :** Ta xác định hệ số của  $a$  và  $b$  trong 2 trường hợp sau:

- ① Tính  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ .
- ② Tính  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

### Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

#### ✓ Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- ② Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

#### ✓ Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

**Lưu ý:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  luôn có TCD  $x = -\frac{d}{c}$  và TCN:  $y = \frac{a}{c}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a)  $y = \frac{2x-1}{x+1};$

b)  $y = \frac{2x-3}{1-2x};$

c)  $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1};$

d)  $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2};$

e)  $y = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x-1}$

f)  $y = \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-3x}}$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+2}$  là

A.  $y = 2.$

B.  $x = 2.$

C.  $x = -2.$

D.  $y = -2.$

**Câu 2.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}.$

A.  $y = -2.$

B.  $x = -2.$

C.  $y = 2.$

D.  $x = 1.$

**Câu 3.** Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng  $x = 2$  làm đường tiệm cận đứng?

A.  $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}.$

B.  $y = \frac{1}{x+1}.$

C.  $y = \frac{2}{x+2}.$

D.  $y = \frac{5x}{2-x}.$

**Câu 4.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-2}$  là đường thẳng

A.  $x = -2.$

B.  $x = 2.$

C.  $y = 3.$

D.  $y = -\frac{1}{2}.$

**Câu 5.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$  có phương trình là

A.  $x = -1.$

B.  $y = 1; y = -5.$

C.  $x = 1; x = -5.$

D.  $x = \pm 5.$

.....  
.....  
.....  
.....  
**Câu 6.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ .

- A.** 1.                                      **B.** 0.                                      **C.** 2.                                      **D.** 3.
- .....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
**Câu 7.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{x-2}$  là

- A.** 1.                                      **B.** 2.                                      **C.** 0.                                      **D.** 3.
- .....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của (C).  
**B.** Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của (C).  
**C.** Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận ngang của (C).  
**D.** Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của (C).
- .....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
**Câu 9.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$  là

- A.** 3.                                      **B.** 2.                                      **C.** 0.                                      **D.** 1.
- .....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

|      |                       |      |                                       |                       |           |
|------|-----------------------|------|---------------------------------------|-----------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$             | $-1$ | $0$                                   | $1$                   | $+\infty$ |
| $y'$ | -                     |      | -   0   +                             | +                     |           |
| $y$  | $-2 \searrow -\infty$ |      | $+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow -2$ |           |

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.  
 B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.  
 C. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.  
 D. Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

|      |                                                                                                          |     |                                                                                                                                                                                                       |           |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                                                                                                | $0$ | $1$                                                                                                                                                                                                   | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$                                                                                                      |     | $+$ $0$ $-$                                                                                                                                                                                           |           |
| $y$  | $+\infty$<br><br>$-1$ |     | $-\infty$<br> $2$ <br>$-\infty$ |           |

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2.      B. 3.      C. 4.      D. 1.

|      |           |      |                      |                |
|------|-----------|------|----------------------|----------------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$                  | $+\infty$      |
| $y'$ |           |      | +                    | -              |
| $y$  |           |      | $-\infty \nearrow 2$ | $1 \searrow 0$ |

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 13.** Cho hàm  $y = \frac{5-6x}{6x+1}$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{6}^-} y = +\infty$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$ .  
 c)  $x = \frac{1}{6}$  là đường tiệm cận đứng.      d)  $y = -1$  là đường tiệm cận ngang.

**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$  có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định

sau:

- Hàm số không có cực trị.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = -3$ .
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang  $y = -2$ .
- Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên.

|      |                     |                     |                |           |
|------|---------------------|---------------------|----------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$           | 0                   | 2              | $+\infty$ |
| $y'$ | —                   | — 0 +               |                |           |
| $y$  | 2<br>↘<br>$-\infty$ | $+\infty$<br>↘<br>2 | ↗<br>$+\infty$ |           |

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $f(-5) < f(4)$ .
- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 0$ .
- Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau.

|      |                      |             |        |           |
|------|----------------------|-------------|--------|-----------|
| $x$  | $-\infty$            | -2          | -1     | $+\infty$ |
| $y'$ | —                    | — 0 +       |        |           |
| $y$  | 10<br>↘<br>$-\infty$ | 7<br>↘<br>5 | ↗<br>9 |           |

- Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tiệm cận đứng là  $x = -2$ .
- Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $y = 5$  làm một tiệm cận ngang.

c) Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có đúng bốn đường tiệm cận.

d) Đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{f(x) - 6}$  có đúng một đường tiệm cận đứng.

DẠNG TOÁN

2

### Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

✓ **Các bước tìm TCX  $y = ax + b$ :** Ta xác định hệ số của  $a$  và  $b$  trong 2 trường hợp sau:

① Tính  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$

② Tính  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$

✓ **Lưu ý:**

① Nếu  $a = 0$  thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đường thẳng  $y = ax + b$ , với  $a \neq 0$  có đúng một đường tiệm cận xiên là chính nó.

③ Đối với hàm số phân thức  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ , ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra  $y = a'x + b'$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN



**Bài 2.** Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4};$

b)  $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2};$

c)  $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}.$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đường tiệm cận xiên là  $y = 2 - 2x$ . Tìm khẳng định đúng?

**A.**  $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) - 2x + 2] = -\infty$ .

**B.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x - 2] = -2$ .

**C.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x - 2] = -2$ .

**D.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x - 2] = 0$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x + 4] = 0$ . Tìm khẳng định đúng.

**A.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $y = -x - 4$ .

**B.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $y = -4$ .

**C.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $y = 4 - x$ .

**D.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $x = -1$ .

**Câu 3.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$  có phương trình là

**A.**  $y = x + 1$ .

**B.**  $y = 2x - 1$ .

**C.**  $y = x - 1$ .

**D.**  $y = 2x + 1$ .

**Câu 4.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$  có phương trình là

**A.**  $y = 2x + 1$ .

**B.**  $y = x - 3$ .

**C.**  $y = x + 3$ .

**D.**  $y = 2x - 1$ .

**Câu 5.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$ .

**A.**  $y = 2x - 5$ .

**B.**  $y = x - 2$ .

**C.**  $y = x + 5$ .

**D.**  $y = x - 5$ .

**Câu 6.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$  là

**A.**  $y = -2$ .

**B.**  $y = 1$ .

**C.**  $y = x + 2$ .

**D.**  $y = x$ .

.....  
.....  
**Câu 7.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ .

**A.**  $y = x + 1$ .

**B.**  $y = -3x + 1$ .

**C.**  $y = x - 2$ .

**D.**  $y = x - 1$ .

.....  
.....  
.....

**Câu 8.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$  đi qua điểm nào sau đây?

**A.** (5; 3).

**B.** (-4; -5).

**C.** (6; -1).

**D.** (2; -10).

.....  
.....  
.....

**Câu 9.** Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$  có tọa độ là

**A.** (1; 2).

**B.** (1; 1).

**C.** (1; -1).

**D.** (1; 0).

.....  
.....  
.....

**Câu 10.** Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{x - 4}$  có tọa độ là

**A.**  $\left(-4; \frac{25}{8}\right)$ .

**B.** (2; -18).

**C.** (4; -22).

**D.** (4; -18).

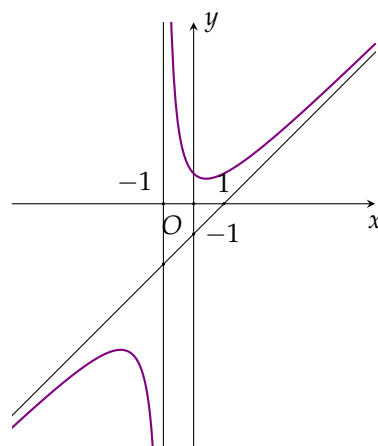
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 11.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  có đồ thị như hình bên.

- Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$ .
- Hàm số có hai điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = 0$ .
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là  $y = x + 1$ .

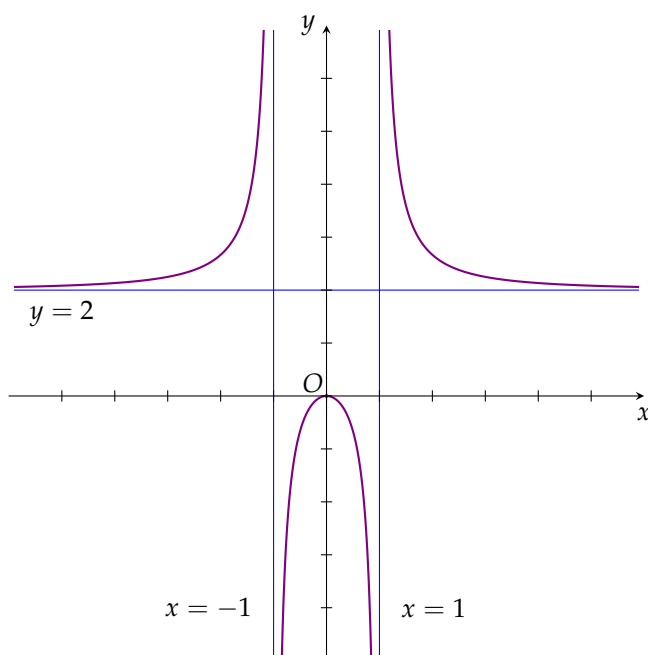


## Câu 12.

Cho đồ thị của hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ .

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .
- Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang  $y = 2$  và  $y = 0$ .



## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một**

**phương án.**

**Câu 1.** Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-3}{x-1}$  là

- A.  $y = 5$ . B.  $y = 0$ . C.  $x = 1$ . D.  $y = 1$ .

**Câu 2.** Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  là

- A.  $x = -1$ . B.  $x = 2$ . C.  $y = -1$ . D.  $y = 2$ .

**Câu 3.** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x}{x+2}$ ?

- A.  $x = 2$ . B.  $x = 0$ . C.  $x = -2$ . D.  $x = 1$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{2x-2}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x = \frac{1}{2}$ .  
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y = -\frac{1}{2}$ .  
 C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y = \frac{1}{2}$ .  
 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x = 2$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.  
 B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.  
 C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng  $x = -2$  và  $x = 2$ .  
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng  $y = -2$  và  $y = 2$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{2017}{x-2}$  có đồ thị  $(H)$ . Số đường tiệm cận của  $(H)$  là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1.  
 C. 3. D. 2.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           | +         |
| $y$  | 2         | $+\infty$ | 5         |

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 0. B. 2.  
 C. 3. D. 1.

|      |           |           |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1         | 3         | $+\infty$ |           |
| $y'$ | +         |           | +         | 0         | -         |
| $y$  |           | $+\infty$ |           | 2         |           |
|      | $-1$      |           | $-\infty$ |           | $-\infty$ |

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$  và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $f(x)$  là

- A. 4.                      B. 2.  
C. 1.                      D. 3.

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | -2        | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         | -         |
| $f(x)$  |           | $+\infty$ | 1         |
|         | $-\infty$ |           | 0         |

**Câu 10.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$  là

- A. 3.                      B. 2.                      C. 0.                      D. 1.

**Câu 11.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ .

- A. 1.                      B. 0.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 12.** Khoảng cách giữa hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+3x}{x}$  bằng bao nhiêu?

- A. 5.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 2.

**Câu 13.** Đường thẳng  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu

- A.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ .  
B.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax + b) = 0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax + b) = 0$ .  
C.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - ax + b) = +\infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - ax + b) = -\infty$ .  
D.  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - ax - b) = -\infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - ax - b) = +\infty$ .

**Câu 14.** Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$  là

- A.  $y = x - 1$ .                      B.  $y = 2x + 1$ .                      C.  $y = 2x + 3$ .                      D.  $y = x + 1$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = 2x - 1 + \frac{3}{x+3}$  có đồ thị (C). Khoảng cách từ điểm  $M(2; -1)$  đến tiệm cận xiên của đồ thị (C) là

- A.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .                      B.  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ .                      C. 2.                      D. 4.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{3-2x}{x+1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là  $x = -1$ .  
c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 3$ .  
d) Hai đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình phẳng có diện tích bằng 3.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(-\infty; 2) \setminus \{-2\}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

|      |           |      |           |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$       | $2$       | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |      | -         | 0         | +         |
| $y$  | $-2$      | $3$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng  $-2$ .
- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng  $3$ .
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là  $x = -2$  và  $x = 2$ .
- Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là  $y = -2$  và  $y = 3$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{5x^2 + 9x + 9}{x - 4}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ .
- Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là  $x = 4$ .
- Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là  $y = 5x + 29$ .
- Giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số có tọa độ là  $(4; 29)$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là  $x = 1$ .
- Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là  $y = x - 3$ .
- Giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số có tọa độ là  $(1; -2)$ .
- Diện tích tam giác tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số và hai trục tọa độ là  $\frac{9}{4}$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$ . Gọi  $x = m$  và  $y = n$  lần lượt là đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{2m - 1}{n + 3}$ .

KQ:

**Câu 2.** Cho đồ thị (C):  $y = \frac{x - 3}{x + 2}$  có hai đường tiệm cận cắt nhau tại  $I$ . Với  $O$  là gốc tọa độ, hãy tính độ dài đoạn thẳng  $OI$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + m}{mx - 1}$ . Tìm  $m > 0$  để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 2.

KQ:

**Câu 4.** Gọi  $d$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = mx + 4 - 3m + \frac{3}{x + 2}$ ,  $m$  là tham số. Đường thẳng  $d$  luôn qua điểm cố định  $M$ . Tính độ dài đoạn  $OM$ , với  $O$  là gốc tọa độ.

KQ:

**Câu 5.** Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được  $x$  kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$y = C(x) = \frac{50x + 2000}{x}$$

Đồ thị hàm số  $C(x)$  có một đường tiệm cận ngang (khi  $x \rightarrow +\infty$ ) là  $y = y_0$ . Giá trị  $y_0$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 6.** Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian  $t$  cho bởi công thức  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ , với  $y$  được tính theo mg/l và  $t$  được tính theo giờ,  $t \geq 0$ . Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = y(t)$  khi  $t \rightarrow +\infty$  có dạng  $y = a$ . Giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?

KQ: 

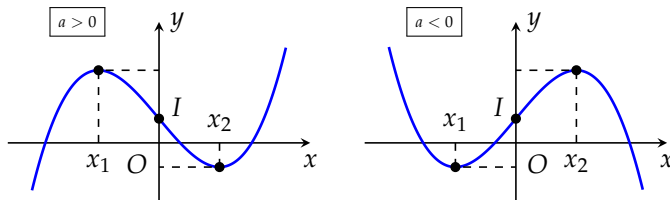
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

—HẾT—

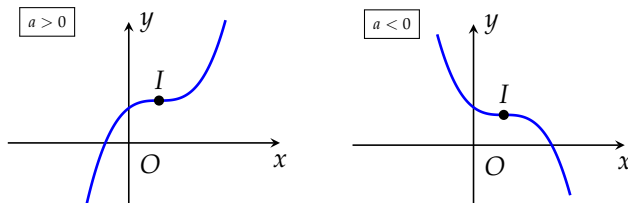
## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

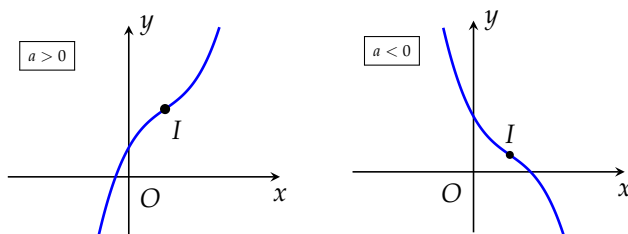
- ✓ **TH1.**  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị  $x = x_1$  và  $x = x_2$ .



- ✓ **TH2.**  $y' = 0$  có nghiệm kép  $x_0$ . Khi đó, hàm số không có cực trị.



- ✓ **TH3.**  $y' = 0$  vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



#### GHI NHỚ

- ① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0$$

- ② Hàm số có hai điểm cực trị

$$b^2 - 3ac > 0$$

- ③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

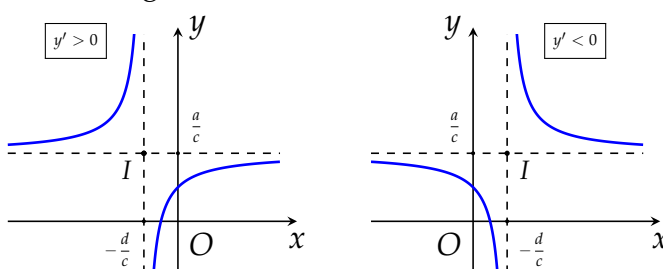
- ④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị có hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$ .

### 2 Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ )

- ✓ Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ .

- ✓ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

- ✓ Hình dạng đồ thị:



#### GHI NHỚ

- ① Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ .

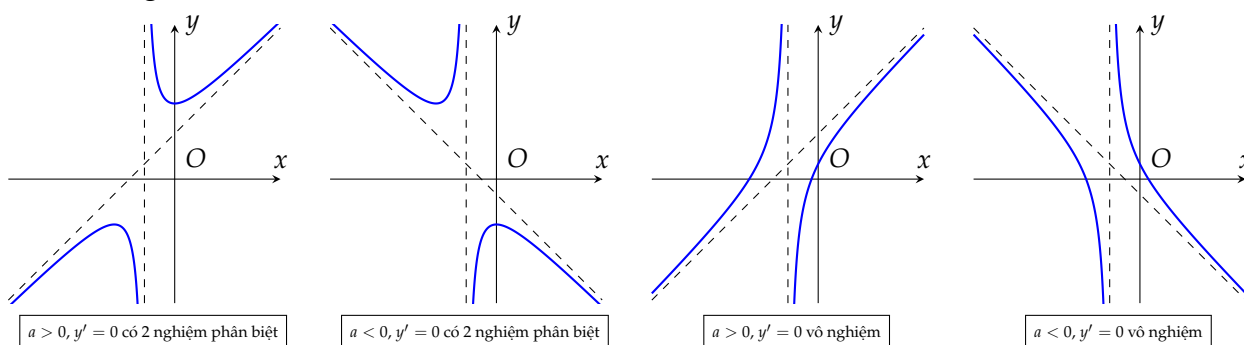
- ② Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .

- ③ Giao với  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .

- ④ Giao với  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ .

### 3 Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ( $a \neq 0, m \neq 0$ ) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- ✓ Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$ .
- ✓ Hàm số 2 điểm cực trị khi  $y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi  $y' = 0$  vô nghiệm.
- ✓ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- ✓ Hình dạng đồ thị:



## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

Đồ thị hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- ✓ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm  $y'$ . Giải  $y' = 0$ , tìm nghiệm.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực.
  - Lập bảng biến thiên; Kết luận chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✓ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- b)  $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- c)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ;
- d)  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = -x^3 - 2x^2 + 5$ .    **B.**  $y = x^3 - 3x^2 + 5$ .  
**C.**  $y = -x^3 - 3x + 5$ .    **D.**  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

|         |           |   |   |           |   |
|---------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ | +         | 0 | - | 0         | + |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 5 | 1 | $+\infty$ |   |

**Câu 2.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = -x^3 + 3x^2$ .    **B.**  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
**C.**  $y = x^4 + 2x^2 + 1$ .    **D.**  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

|      |           |   |    |           |   |   |
|------|-----------|---|----|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0 | 2  | $+\infty$ |   |   |
| $y'$ |           | - | 0  | +         | 0 | - |
| $y$  | $+\infty$ |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   |    |           |   |   |
|      |           |   | </ |           |   |   |

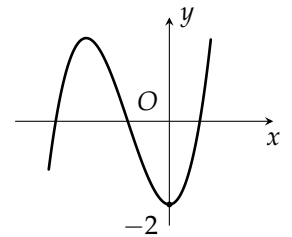
**Câu 3.** Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ .    **B.**  $y = x^3 - 3x + 4$ .  
**C.**  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ .    **D.**  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

|      |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | +         |
| $y$  | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |

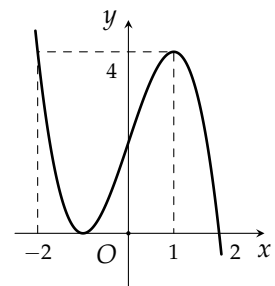
**Câu 4.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = -x^3 + x^2 - 2$ .    **B.**  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .  
**C.**  $y = x^3 - 3x + 2$ .    **D.**  $y = x^2 - 3x - 2$ .



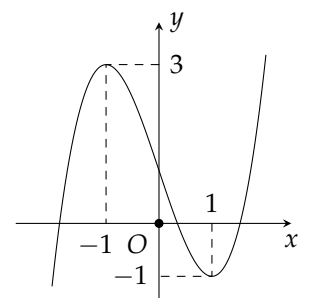
**Câu 5.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = x^3 + 3x - 2$ .    **B.**  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
**C.**  $y = -x^3 + 3x + 2$ .    **D.**  $y = -x^3 - 3x - 2$ .



**Câu 6.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.**  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .    **B.**  $y = -x^2 - 3x - 1$ .  
**C.**  $y = x^4 + 2x^2 - 1$ .    **D.**  $y = x^3 - 3x + 1$ .



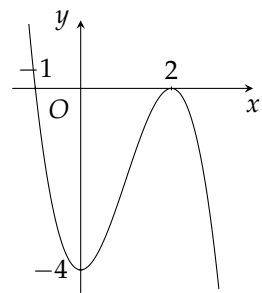
**Câu 7.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A.**  $y = x^3 - 3x^2 - 4$ .

**B.**  $y = -x^3 - 4$ .

**C.**  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .

**D.**  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .



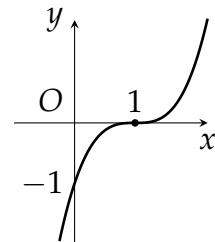
**Câu 8.** Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A.**  $y = x^3 - 1$ .

**B.**  $y = (x + 1)^3$ .

**C.**  $y = (x - 1)^3$ .

**D.**  $y = x^3 + 1$ .



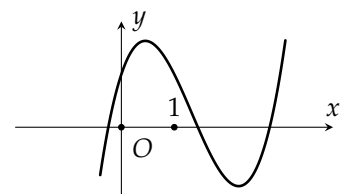
**Câu 9.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.**  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

**B.**  $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .

**C.**  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

**D.**  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



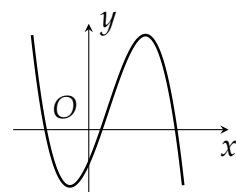
**Câu 10.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

**B.**  $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .

**C.**  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .

**D.**  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



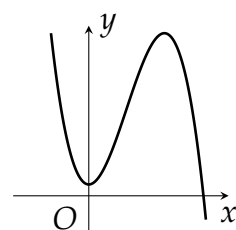
**Câu 11.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

**B.**  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .

**C.**  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .

**D.**  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



**Câu 12.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số  $a, b, c$  và  $d$  có bao nhiêu số âm?

**A.** 2.

**B.** 1.

**C.** 4.

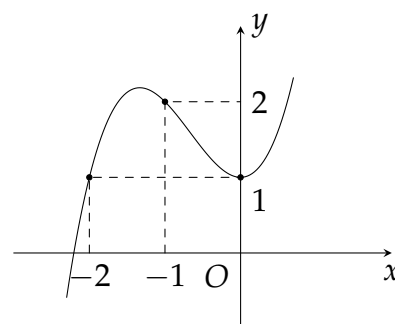
**D.** 3.

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |
| $f(x)$  |           |      |     |           |     |     |

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

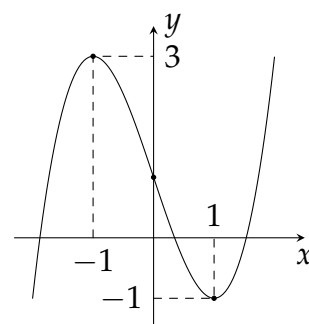
**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .
- b) Đồ thị hàm số cắt trục  $Oy$  tại điểm  $(0; 1)$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- d)  $2a + 3b + c = 9$ .



**Câu 14.** Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm  $(0; 1)$ .
- b) Đường thẳng đi qua điểm  $(0; 1)$  luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
- c)  $a - b + c + d = -1$ .
- d) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(3; 18)$ .



**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên.

- Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.
- Đường thẳng  $y = 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại 3 điểm phân biệt.
- Trong bốn hệ số  $a, b, c, d$  có đúng hai số âm.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(-4; 20)$ .

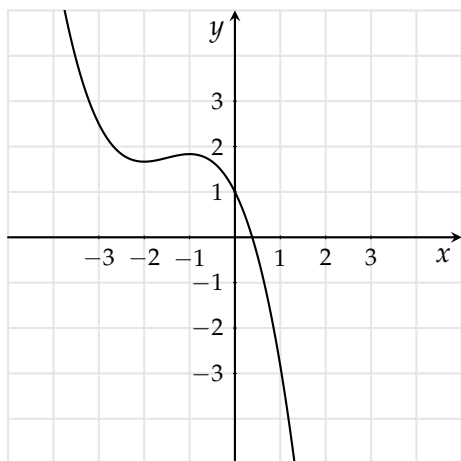
|      |           |      |     |           |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |      | $4$ |           | $-\infty$ |

**Câu 16.** Cho hàm số  $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - 1$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau.

- Hàm số có đạo hàm là  $y' = x^2 + 3x + 4$ .
- $y' > 0$  khi  $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$ .
- Hàm số có bảng biến thiên là

|      |           |                |                 |           |     |
|------|-----------|----------------|-----------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$           | $-1$            | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$            | $-$             | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{11}{6}$ | $+\infty$ |     |

- Hàm số có đồ thị là



DẠNG TOÁN

2

**Đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$**

❖ **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ .

✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên của hàm số.

✓ **Bước 3.** Vẽ hai đường tiệm cận; cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ;

b)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ;

c)  $y = \frac{5+x}{2-x}$ .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

A.  $y = \frac{2x-1}{x+3}$ .

B.  $y = \frac{4x-6}{x-2}$ .

C.  $y = \frac{3-x}{2-x}$ .

D.  $y = \frac{x-2}{x+5}$ .

|      |              |           |                      |
|------|--------------|-----------|----------------------|
| $x$  | $-\infty$    | 2         | $+\infty$            |
| $y'$ | -            |           | -                    |
| $y$  | 1 $\searrow$ |           | $+\infty \searrow$ 1 |
|      |              | $-\infty$ |                      |

**Câu 2.** Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

A.  $y = \frac{x-1}{x-3}$ .

B.  $y = \frac{x-1}{-x-3}$ .

C.  $y = \frac{x+5}{-x+3}$ .

D.  $y = \frac{1}{x-3}$ .

|      |               |           |                       |
|------|---------------|-----------|-----------------------|
| $x$  | $-\infty$     | 3         | $+\infty$             |
| $y'$ | +             |           | +                     |
| $y$  | -1 $\nearrow$ |           | $+\infty \nearrow$ -1 |
|      |               | $-\infty$ |                       |

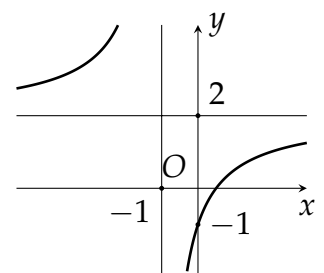
**Câu 3.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{1-2x}{x+1}$ .

C.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

D.  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .



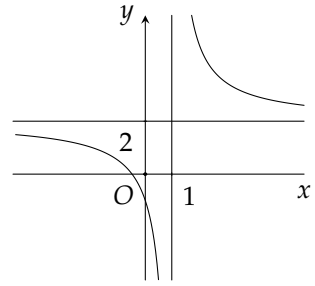
**Câu 4.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x-1}{x-2}$ .

B.  $y = x + 2$ .

C.  $y = x^4 - 3x^2 + 1$ .

D.  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .



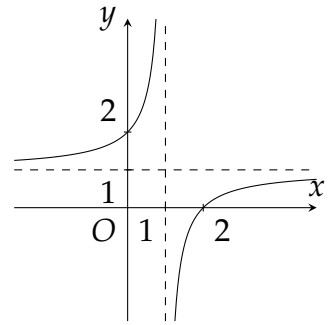
**Câu 5.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

A.  $y = \frac{x-2}{x+1}$ .

B.  $y = \frac{x+2}{x-2}$ .

C.  $y = \frac{x-2}{x-1}$ .

D.  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .



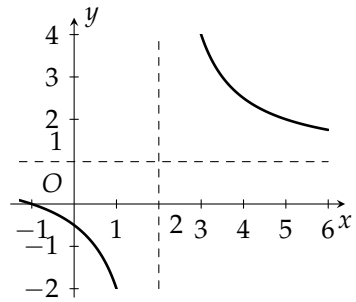
**Câu 6.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính  $T = a + b$

A.  $T = 2$ .

B.  $T = 0$ .

C.  $T = -1$ .

D.  $T = 3$ .



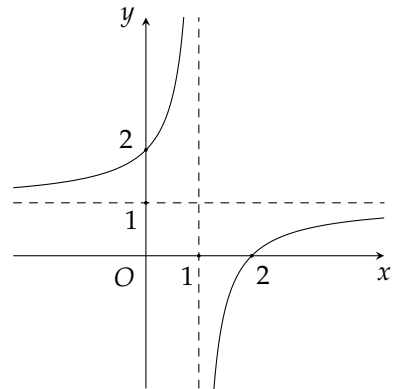
**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{x+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $2a + b - 3c$  bằng

A.  $-3$ .

B.  $4$ .

C.  $7$ .

D.  $-5$ .



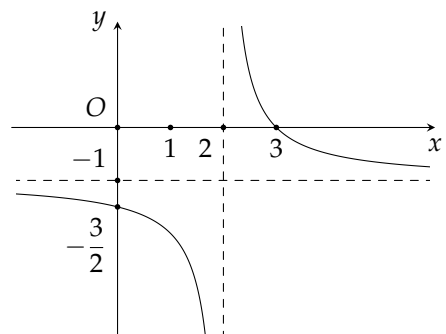
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{cx+2}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $a + b + c$  bằng

A.  $-3$ .

B.  $5$ .

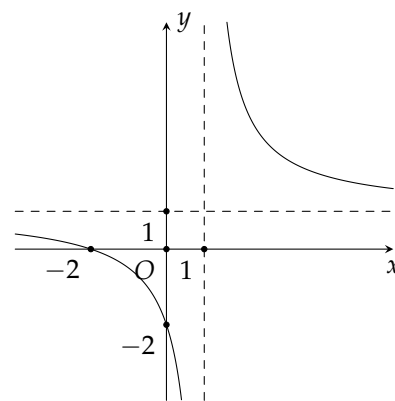
C.  $-4$ .

D.  $3$ .



**Câu 9.** Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{ax - b}{x - 1}$  như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- A.**  $a < 0, b < 0$ . **B.**  $0 < b < a$ .  
**C.**  $b < 0 < a$ . **D.**  $a < b < 0$ .



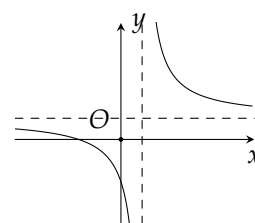
**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau. Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số dương?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

| $x$     | $-\infty$              | 1 | $+\infty$              |
|---------|------------------------|---|------------------------|
| $f'(x)$ | +                      |   | +                      |
| $f(x)$  | 3 $\nearrow$ $+\infty$ |   | $-\infty$ $\nearrow$ 3 |

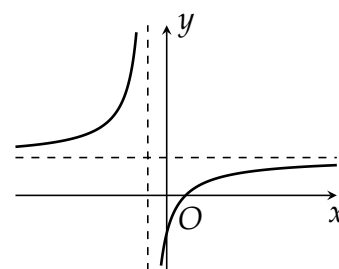
**Câu 11.** Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  với  $a > 0$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $b < 0, c < 0, d < 0$ . **B.**  $b > 0, c < 0, d < 0$ .  
**C.**  $b < 0, c > 0, d < 0$ . **D.**  $b > 0, c > 0, d < 0$ .



**Câu 12.** Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.**  $ab > 0, bd < 0$ . **B.**  $ab < 0, ad > 0$ .  
**C.**  $ab < 0, ad < 0$ . **D.**  $bd > 0, ad > 0$ .



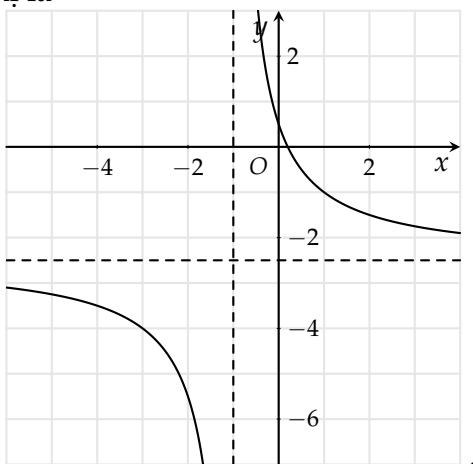
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = \frac{5x - 1}{-2x - 2}$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau.

- a) Hàm số có  $y' = \frac{-12}{(-2x - 2)^2}$ .
- b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .
- c) Hàm số có bảng biến thiên là

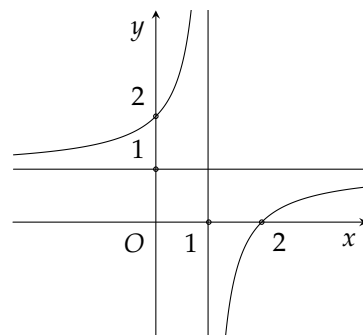
| $x$  | $-\infty$     | $-1$      | $+\infty$ |
|------|---------------|-----------|-----------|
| $y'$ | +             |           | +         |
| $y$  | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

- d) Hàm số có đồ thị là



**Câu 14.** Cho hàm số  $y = \frac{x + a}{bx + c}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ .

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$ .
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang  $y = 0$ .
- c) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- d)  $a - 3b - 2c = -3$ .

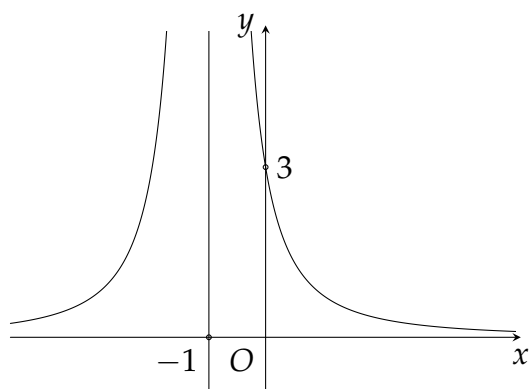


**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau.

|         |                                          |     |                                          |
|---------|------------------------------------------|-----|------------------------------------------|
| $x$     | $-\infty$                                | $3$ | $+\infty$                                |
| $f'(x)$ | $-$                                      |     | $-$                                      |
| $f(x)$  | $\frac{1}{2}$<br>$\searrow$<br>$-\infty$ |     | $+\infty$<br>$\searrow$<br>$\frac{1}{2}$ |

- Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty, \frac{1}{2})$ .
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = \frac{1}{2}$ .
- Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
- $b > \frac{2}{3}$  hoặc  $b < 0$ .

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nhận  $x = -1$  làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-3; -2]$  bằng 8.



- $f'(0) = 3$ .
- Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .
- Giá trị của  $f(-3)$  bằng 8.
- Giá trị của  $f(2)$  bằng 4.

## Đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

✓ **Bước 1.** Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$ .

✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

• Tính đạo hàm  $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$ ;

Giải  $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$ , tìm nghiệm.

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

✓ **Bước 3.** Vẽ tiệm cận đứng và tiệm cận xiên; Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 3.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ ;

b)  $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$ ;

c)  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ . B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$ .  
C.  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$ . D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$ .

|      |           |       |      |     |           |
|------|-----------|-------|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-10$ | $-4$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$   | $0$  | $+$ | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |       | $24$ | $0$ | $-\infty$ |

**Câu 2.** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ . B.  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$ .  
C.  $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$ . D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$ .

|      |           |     |      |      |           |
|------|-----------|-----|------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$ | $3$  | $5$  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$ | $0$  | $+$  | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ |     | $-1$ | $-9$ | $-\infty$ |

**Câu 3.** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$ . B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$ .  
C.  $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$ . D.  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ .

|      |                                                                        |      |      |                                                                      |           |
|------|------------------------------------------------------------------------|------|------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                                                              | $-9$ | $-4$ | $1$                                                                  | $+\infty$ |
| $y'$ | + 0 -                                                                  |      |      | - 0 +                                                                |           |
| $y$  | $-\infty \nearrow \begin{matrix} -20 \\ \searrow \end{matrix} -\infty$ |      |      | $+\infty \searrow \begin{matrix} 0 \\ \nearrow \end{matrix} +\infty$ |           |

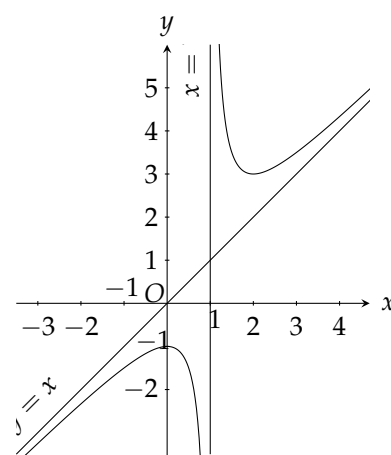
**Câu 4.** Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ . B.  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ .  
C.  $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ . D.  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ .

|      |                            |     |                            |
|------|----------------------------|-----|----------------------------|
| $x$  | $-\infty$                  | $2$ | $+\infty$                  |
| $y'$ | +                          |     | +                          |
| $y$  | $-\infty \nearrow +\infty$ |     | $-\infty \nearrow +\infty$ |

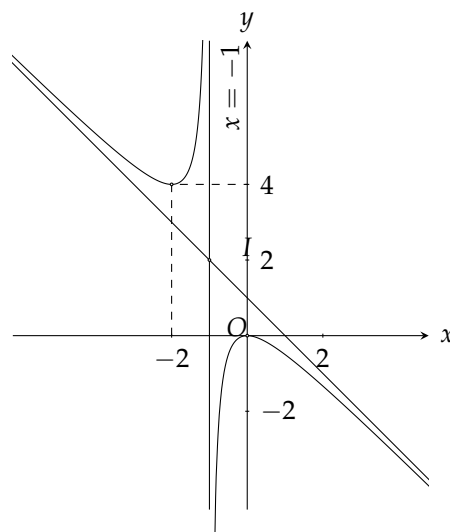
**Câu 5.** Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ . B.  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .  
C.  $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$ . D.  $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$ .



**Câu 6.** Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ . B.  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .  
C.  $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$ . D.  $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ .



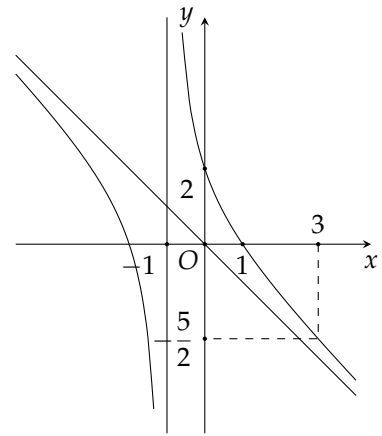
**Câu 7.** Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ .

C.  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$ .

D.  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ .



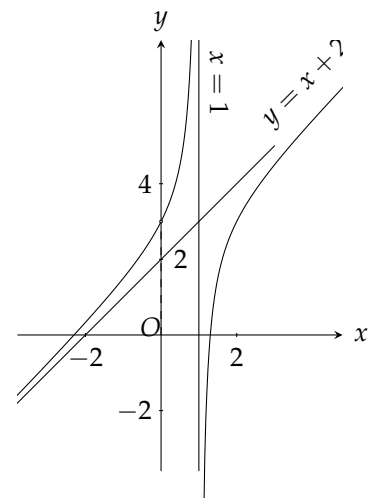
**Câu 8.** Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ .

C.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$ .

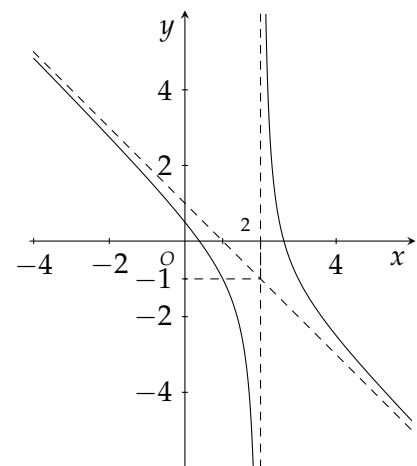
D.  $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$ .



**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

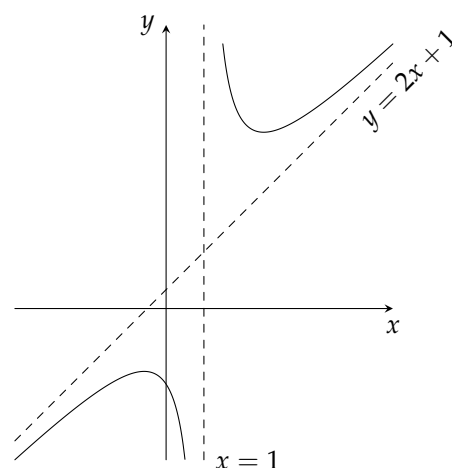
**Câu 9.** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  có đồ thị như hình bên.

- a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .
- c) Điểm  $I(2; 1)$  là tâm đối xứng của đồ thị.
- d) Hệ số  $a$  và  $m$  trái dấu.



**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$  có đồ thị như hình bên.

- Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- Điểm  $I(1; 2)$  là tâm đối xứng của đồ thị.
- $a + 2b = 4$ .
- Đồ thị qua điểm  $(2; 10)$  khi  $c = 4$ .



DẠNG TOÁN

4

### Sự tương giao của hai đồ thị

✓ **Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ :**

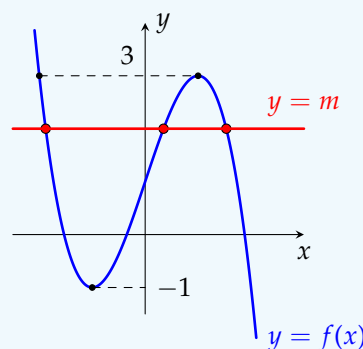
- Giải phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ , tìm các nghiệm  $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ .
- Với  $x_0$  vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm  $y_0$ .
- Kết luận giao điểm  $(x_0; y_0)$ .

✓ **Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:**

- (a) Xét phương trình  $f(x) = m$ , với  $m$  là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  (cố định) với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).

- (b) Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình  $f(x) = m$ , ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 4.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

- a)  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  và  $y = 1 - 2x$ ;      b)  $y = \frac{x + 8}{x - 2}$  và  $y = x + 2$ .

**Bài 5.** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**Bài 6.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x + 2 - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- A.  $-3$ .                      B.  $2$ .                      C.  $0$ .                      D.  $-1$ .

**Câu 2.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$  và trục hoành là

- A.  $0$ .                      B.  $1$ .                      C.  $2$ .                      D.  $3$ .

**Câu 3.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài  $AB$ .

- A.  $AB = 3$ .                      B.  $AB = 2\sqrt{2}$ .                      C.  $AB = 2$ .                      D.  $AB = 1$ .

**Câu 4.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Khi đó diện tích của tam giác  $OAB$  (với  $O$  là gốc tọa độ) bằng

- A.  $1$ .                      B.  $\frac{1}{4}$ .                      C.  $2$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 5.** Biết đường thẳng  $y = x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

- A.  $\frac{2}{3}$ .                      B.  $2$ .                      C.  $\frac{4}{3}$ .                      D.  $4$ .

**Câu 6.** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ . Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

**A.**  $x = -1$ .

**B.**  $x = 1$ .

**C.**  $x = -2$ .

**D.**  $x = 2$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x + 1}$  có đồ thị (C). Gọi  $A, B$  là giao điểm của đường thẳng  $d : y = x$  với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn  $AB$ .

**A.**  $AB = \sqrt{2}$ .

**B.**  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**C.**  $AB = 1$ .

**D.**  $AB = 2$ .

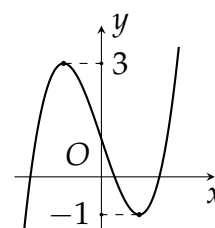
**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

**A.** 2.

**B.** 1.

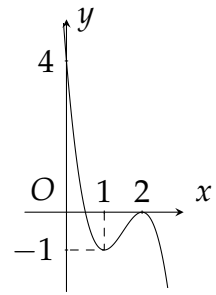
**C.** 0.

**D.** 3.



**Câu 9.** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $d \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 1 = 0$  bằng

- A. 0. B. 1.  
C. 2. D. 3.



**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục hoành là

- A. 1. B. 0.  
C. 2. D. 3.

|      |           |      |   |           |
|------|-----------|------|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0    | 1 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | -    | 0 | +         |
| $y$  | $+\infty$ | $-1$ | 3 | $-\infty$ |

**Câu 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(-\infty; +\infty)$  và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $2|f(x)| = 7$  bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 2.

|      |           |   |   |           |
|------|-----------|---|---|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $y'$ |           | + | 0 | -         |
| $y$  | $-\infty$ | 5 | 4 | $+\infty$ |

**Câu 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình  $3|f(x)| - 10 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 nghiệm. B. 4 nghiệm.  
C. 3 nghiệm. D. 1 nghiệm.

|         |           |           |   |           |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | 2         | $+\infty$ | 3 | $+\infty$ |

**Câu 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$  là

- A. 2. B. 3.  
C. 6. D. 0.

|      |           |    |               |           |
|------|-----------|----|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | -1 | 1             | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +  | 0             | -         |
| $y$  | 1         | 3  | $\frac{1}{3}$ | 1         |

**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m + 1$  có ba nghiệm thực phân biệt.

- A.  $-3 \leq m \leq 3$ . B.  $-2 \leq m \leq 4$ .  
C.  $-2 < m < 4$ . D.  $-3 < m < 3$ .

|      |           |    |    |           |
|------|-----------|----|----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | -1 | 3  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | +  | 0  | -         |
| $y$  | $-\infty$ | 4  | -2 | $+\infty$ |

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình  $f(4x - x^2) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2.      B. 6.      C. 0.      D. 4.

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $4$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ | $-1$ | $3$ | $-\infty$ |     |

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.**

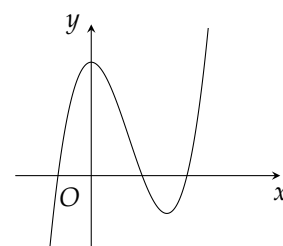
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -x^3 - 3x - 2$ .      B.  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .      D.  $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ .

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $2$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-1$ | $-5$ | $+\infty$ |     |

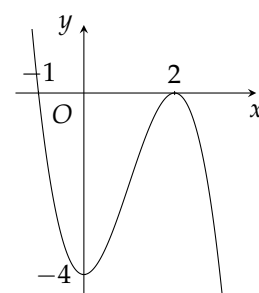
**Câu 2.** Đồ thị như hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = x^3 - x^2 + x + 1$ .      B.  $y = x^3 - 3x^2 + 3$ .  
C.  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ .      D.  $y = x^2 + 2x + 1$ .



**Câu 3.** Đồ thị như hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

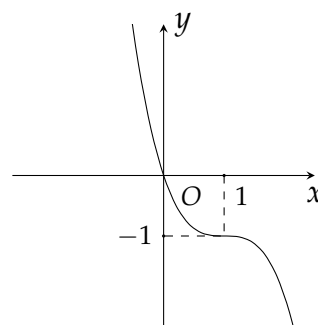
- A.  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .      B.  $y = -x^3 - 4$ .  
C.  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .      D.  $y = x^3 - 3x^2 - 4$ .



**Câu 4.**

Đồ thị như hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.  $y = -2x^3 + 3x^2 - 3x$ .      B.  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ .  
C.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ .      D.  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$ .



**Câu 5.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{-x+2}$  có tâm đối xứng là điểm nào sau đây?

- A.  $I(2; -1)$ .      B.  $I(-2; 1)$ .      C.  $I(2; 1)$ .      D.  $I(-2; -1)$ .

### Câu 6.

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

B.  $y = \frac{x-2}{x-1}$ .

C.  $y = \frac{x+1}{1-x}$ .

D.  $y = \frac{2x+1}{2x+3}$ .

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| $y'$ | -         |           | -         |
| $y$  | 1         | $+\infty$ | 1         |

### Câu 7.

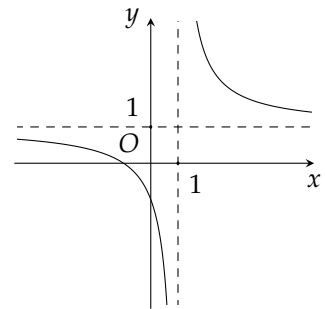
Đồ thị như hình vẽ là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x-1}{-x-1}$ .

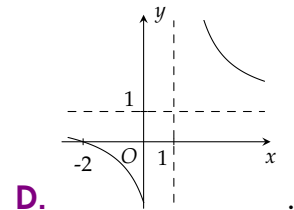
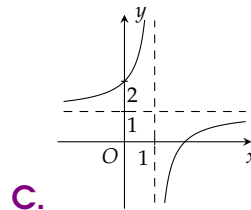
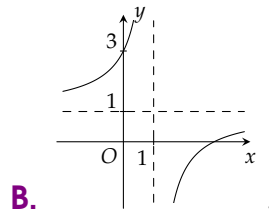
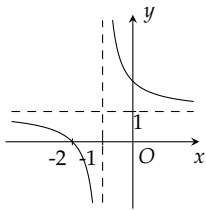
B.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

C.  $y = \frac{x+1}{-x+1}$ .

D.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .



Câu 8. Hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$  có đồ thị là hình vẽ nào sau đây?



### Câu 9.

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$ .

B.  $y = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$ .

C.  $y = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ .

D.  $y = \frac{x^2-4x+3}{x-2}$ .

|      |           |           |    |   |           |           |
|------|-----------|-----------|----|---|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0         | 2  | 4 | $+\infty$ |           |
| $y'$ | +         | 0         | -  | - | 0         | +         |
| $y$  | $-\infty$ | $-\infty$ | -2 | 6 | $+\infty$ | $+\infty$ |

### Câu 10.

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$ .

B.  $y = \frac{-x^2+3x}{x-2}$ .

C.  $y = x+3 + \frac{1}{x-2}$ .

D.  $y = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$ .

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 2         | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           | +         |
| $y$  | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

### Câu 11.

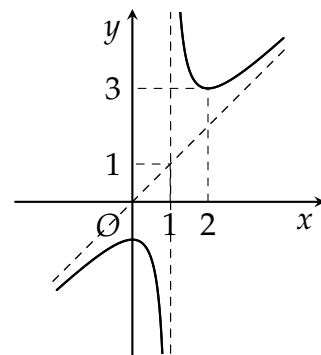
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ .

C.  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ .

D.  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ .



### Câu 12.

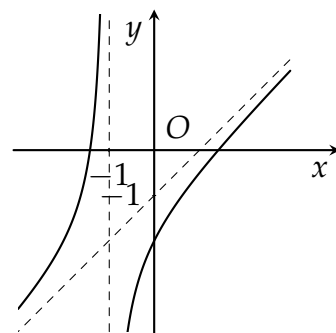
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A.  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ .

B.  $y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ .

C.  $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$ .

D.  $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ .



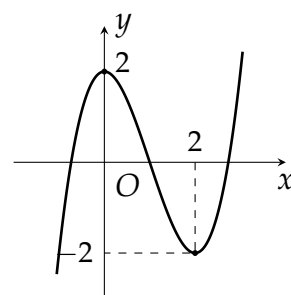
**Câu 13.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng  $S = a + b + c + d$ .

A.  $S = 0$ .

B.  $S = 6$ .

C.  $S = -4$ .

D.  $S = 2$ .



### Câu 14.

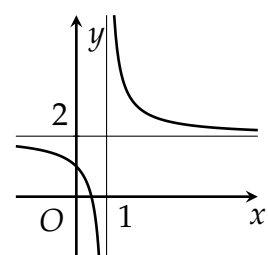
Xác định các hệ số  $a, b, c$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{ax - 1}{bx + c}$  có đồ thị hàm số như hình vẽ bên:

A.  $a = 2, b = 2, c = -1$ .

B.  $a = 2, b = -1, c = 1$ .

C.  $a = 2, b = 1, c = 1$ .

D.  $a = 2, b = 1, c = -1$ .



### Câu 15.

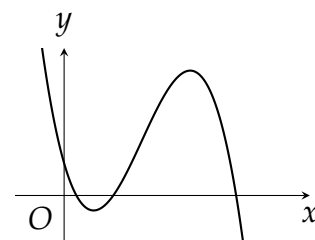
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Cho hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $M(2; 3)$ .

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là  $y = 2$ .

c) Bảng biến thiên của hàm số như hình bên dưới

|      |                             |     |                             |
|------|-----------------------------|-----|-----------------------------|
| $x$  | $-\infty$                   | $1$ | $+\infty$                   |
| $y'$ | $-$                         |     | $-$                         |
| $y$  | $+\infty$<br>↘<br>$-\infty$ |     | $+\infty$<br>↘<br>$-\infty$ |

d) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

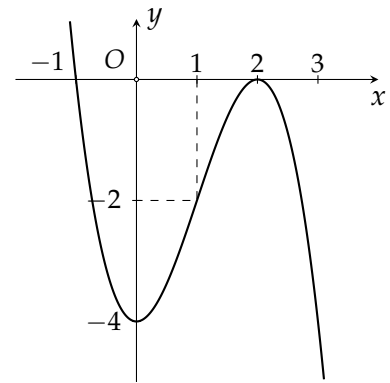
## Câu 2.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Hàm số có hai điểm cực trị.
- Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-4; 2)$ .
- Bảng biến thiên của hàm số như hình bên dưới

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $0$  | $2$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ |      | $2$ |           |     |
|      |           | $-4$ |     | $-\infty$ |     |

d) Đồ thị hình bên là của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .



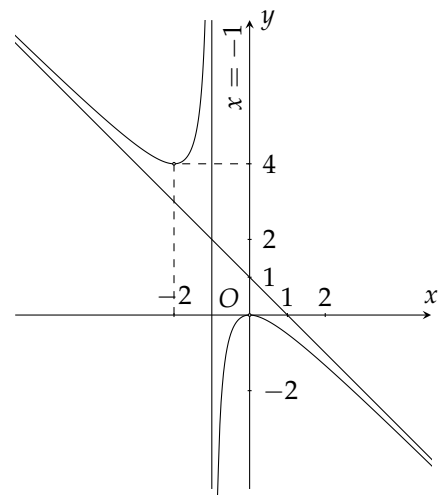
## Câu 3.

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  có đồ thị như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

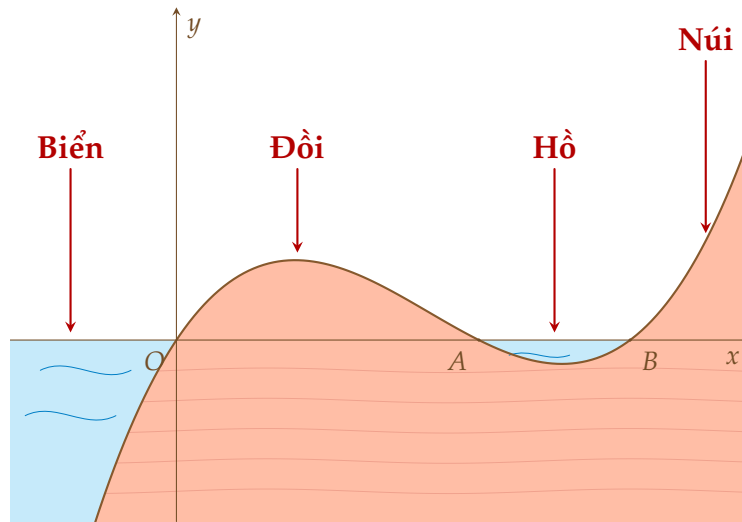
- Hàm số có hai điểm cực trị.
- Bảng biến thiên của hàm số như hình bên dưới

|      |           |      |           |           |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$       | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$       | $+$       | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ |      | $+\infty$ | $0$       |           |     |
|      |           | $4$  |           | $-\infty$ | $-\infty$ |     |

- Phương trình đường tiệm cận xiên là  $y = x + 1$ .
- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là  $I(-1, 2)$ .



**Câu 4.** Hình vẽ sau mô phỏng một mặt cắt ngang của một phần hòn đảo X, trên hòn đảo X có một lớp đất cạnh một bờ biển, phần nhô lên cao là đỉnh của một quả đồi và phần trũng tạo thành một hồ nước tự nhiên. Trên hệ tọa độ  $Oxy$ , đường cong  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  (với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) mô phỏng độ cao của lớp đất bên cạnh bờ biển với trục  $Ox$  là mực nước biển, đơn vị trên các hệ trục là một kilômét. Biết khoảng cách giữa hai bên chân đồi là  $OA = 2$  km, chiều dài của hồ là  $AB = 1$  km và ngọn đồi cao 528 m.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- Phương trình  $f(x) = 0$  có 3 nghiệm  $x = 0, x = 1, x = 3$ .
- Hàm số  $f(x)$  có dạng  $f(x) = ax(x - 2)(x - 3)$ .
- Giá trị của  $a = 0,25$  (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ 142 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho đồ thị hàm số  $y = 5x - 1 + \frac{8}{x - 1}$  có tâm đối xứng  $I(a; b)$ . Giá trị của biểu thức  $C = a + 3b$  bằng

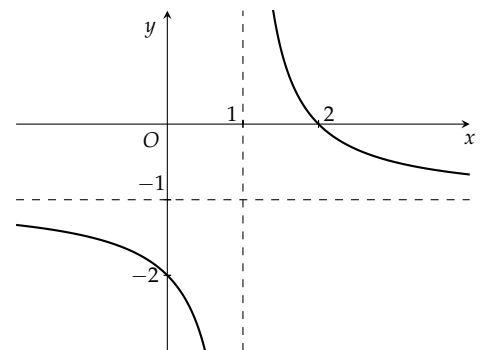
KQ:

#### Câu 2.

Hình bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{x + c}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó  $ab - c$  bằng bao nhiêu?

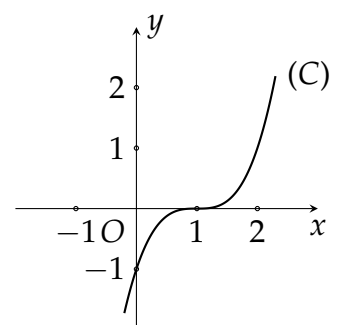
KQ:



#### Câu 3.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị (C) như hình vẽ. Biết  $f'(1) = 0$ , tính  $f(5)$ .

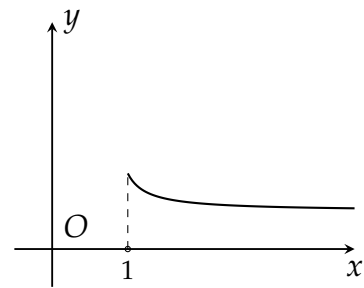
KQ:



#### Câu 4.

Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(a; b)$  để hàm số  $y = \frac{2x - a}{4x - b}$  có đồ thị trên  $(1; +\infty)$  như hình vẽ bên?

KQ:

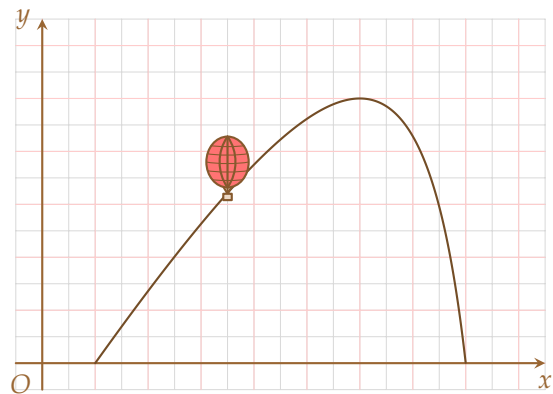


**Câu 5.** Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số bậc ba  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các hệ số. Trong đó,  $x$  ( $0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$ ) là số tháng kể từ đầu năm học và  $f(x)$  là điểm trong tháng thứ  $x$ . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức thấp nhất trong ba năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Dựa vào mô hình trên, hãy tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

KQ:

**Câu 6.** Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một phần của đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là  $(1; 0)$  và  $(8; 0)$  với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 km. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm  $(6; 5)$ . Hỏi khi khinh khí cầu đã đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 m thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu km?

KQ:



—HẾT—

# Bài 5 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm  $f'(a)$  là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng  $y = f(x)$  đối với  $x$  tại điểm  $x = a$ . Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu  $s = s(t)$  là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì  $v = s'(t)$  biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu  $C = C(t)$  là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm  $t$ , thì  $C'(t)$  là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm  $t$ .
- Nếu  $P = P(t)$  là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm  $t$ , thì  $P'(t)$  biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm  $t$ .
- Nếu  $C = C(x)$  là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất  $x$  đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời  $C'(x)$  của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên  $C'(x)$  xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ  $x + 1$  (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

### 2 Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí. Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ✓ **Bước 1.** Xác định đại lượng  $Q$  mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✓ **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là  $x$ , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo  $x$ . Khi đó, đại lượng  $Q$  sẽ là hàm số của một biến  $x$ . Tìm tập xác định của hàm số  $Q = Q(x)$ .
- ✓ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số  $Q = Q(x)$  bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG TOÁN

1

#### Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc

- ① Nếu phương trình chuyển động của vật là  $s = f(t)$  thì  $v = f'(t)$  là vận tốc tức thời và  $a = v'(t)$  là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t$ .
- ② Trong chuyển động thẳng đều thì  $s = v \cdot t$ .

**Bài 1.** Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

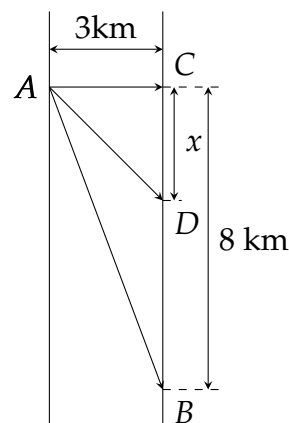
trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

**Bài 2.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$  (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

**Bài 3.**

Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình bên). Anh An chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm D cách B bao nhiêu km để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



**Bài 4.** Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h?

- ✓ Nếu  $C(x)$  là tổng chi phí mà công ty (doanh nghiệp) phải trả để sản xuất  $x$  đơn vị hàng hóa thì  $C(x)$  được gọi là **hàm chi phí**.
- ✓ Gọi  $p(x)$  là giá bán mỗi đơn vị hàng hóa khi giao dịch  $x$  đơn vị hàng hóa. Khi đó  $p(x)$  được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và hàm số này được kì vọng là giảm theo biến  $x$ .
- ✓ Nếu  $x$  đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị  $p(x)$ , thì **hàm doanh thu**, kí hiệu là  $R(x)$ , được tính bởi công thức  $R(x) = x \cdot p(x)$ .
- ✓ Nếu  $x$  đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị là  $p(x)$ , thì **hàm lợi nhuận**, kí hiệu là  $P(x)$ , được tính bởi công thức

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x).$$

 **Bài 5.** Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất  $x$  ( $m^3$ ) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,4 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và  $0,005x^2$  triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa  $45 m^3$  sản phẩm. Tìm chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất mà xí nghiệp cần bỏ ra (làm tròn đến hàng phần trăm).

 **Bài 6.** Giả sử một loại hàng hoá có hàm cầu được mô hình hoá bởi  $p(x) = 100 - 0,5x$  và hàm chi phí được mô hình hoá bởi  $C(x) = 40x + 37,5$ , trong đó  $p$  (nghìn đồng) là giá của một đơn vị hàng hoá đó. Hỏi khi lợi nhuận là lớn nhất, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là bao nhiêu nghìn đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

 **Bài 7.** Một công ty sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm ( $0 < x \leq 1000$ ), tổng số tiền công ty thu được là  $f(x) = 1000x - x^2$  (nghìn đồng), chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $g(x) = x + \frac{30}{x} + 680$  (nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là  $t$  (nghìn đồng) ( $0 < t < 200$ ). Tìm mức thuế phụ thu  $t$  (nghìn đồng) trên một sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và công ty cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó.

- ① Thể tích khối hộp chữ nhật  $V = \text{dài} \times \text{rộng} \times \text{cao}$ ;
- ② Thể tích khối lập phương  $V = (\text{cạnh})^3$ ;
- ③ Thể tích khối chóp  $V = \frac{1}{3} \times S_{\text{đáy}} \times \text{cao}$ ;
- ④ Khối nón:
  - Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \pi rl$ .

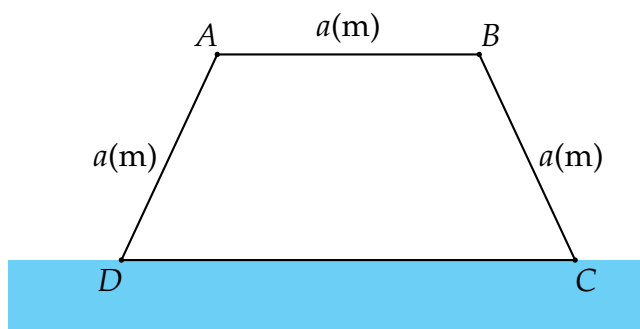
- Thể tích:  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

⑤ Khối trụ:

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 2\pi r l$ .
- Thể tích:  $V = \pi r^2 h$ .

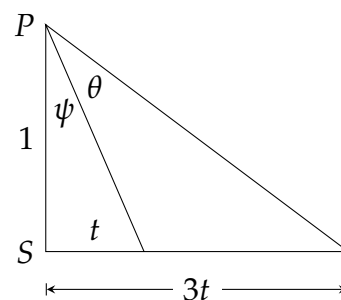
### Bài 8.

Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài  $a$  (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng  $CD$  không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



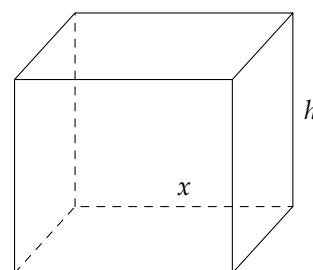
### Bài 9.

Một người quan sát đứng tại điểm  $P$ , cách xa đường đua một đơn vị độ dài. Hai vận động viên xuất phát từ điểm  $S$  và chạy dọc đường đua (như hình vẽ). Biết vận động viên thứ nhất chạy nhanh gấp ba lần vận động viên thứ hai, hãy tìm góc quan sát  $\theta$  lớn nhất giữa hai vận động viên mà người quan sát đứng ở  $P$  nhìn thấy được.



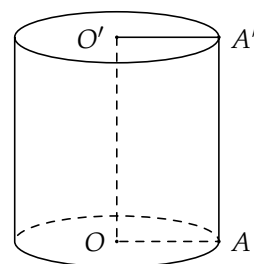
### Bài 10.

Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đáy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được  $220500 \text{ cm}^3$  nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá (tính bằng  $\text{cm}^2$ ) để tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.



### Bài 11.

Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $1 \text{ dm}^3$  và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu dm? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



**Bài 12.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

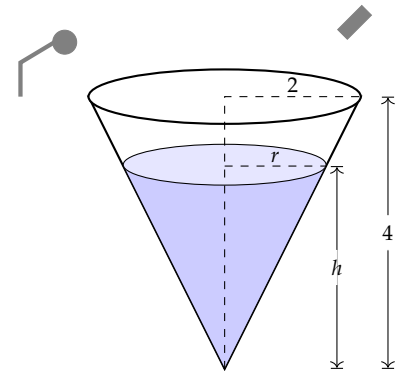
trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

**Bài 13.** Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic  $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$ , trong đó thời gian  $x$  được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tới đa vào năm nào?

**Bài 14.** Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của  $a$  và  $b$ . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

**Bài 15.**

Một bể nước có dạng hình nón ngược với bán kính đáy bằng 2 m và chiều cao bằng 4 m (tham khảo hình vẽ dưới đây). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là  $2 \text{ m}^3/\text{phút}$ . Hỏi tốc độ dâng lên của mực nước (đơn vị m/phút) bằng bao nhiêu khi mực nước trong bể đạt độ sâu bằng 3 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 144 m/s.

B. 24 m/s.

C. 180 m/s.

D. 36 m/s.

**Câu 2.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu? (kết quả tính bằng m/s)

- A. 54 m/s.                      B. 36 m/s.                      C. 27 m/s.                      D. 45 m/s.

**Câu 3.** Để tăng nhiệt độ trong phòng từ  $18^\circ\text{C}$  người ta sử dụng một cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi  $T$  (đơn vị  $^\circ\text{C}$ ) là nhiệt độ của phòng ở phút thứ  $t$  được cho bởi công thức  $T = -0,009t^3 + 0,15t^2 + 18$  với  $t \in [1; 12]$ . Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động.

- A. 28.                              B. 22.                              C. 24.                              D. 23.

**Câu 4.** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số  $f$  biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/năm?

- A. 2025.                              B. 2020.                              C. 2015.                              D. 2018.

**Câu 5.** Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày đầu tiên xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$  với  $t = 0, 1, 2, \dots, 30$ . Nếu  $f$  xác định trên  $[0; 30]$  thì  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất.

- A.** Ngày thứ 15.      **B.** Ngày thứ 18.      **C.** Ngày thứ 20.      **D.** Ngày thứ 30.

**Câu 6.** Doanh số bán hệ thống âm thanh trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic  $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$ , trong đó thời gian  $x$  được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm thứ mấy kể từ khi mở bán?

- A.** Năm thứ 3.      **B.** Năm thứ 2.      **C.** Năm thứ 4.      **D.** Năm thứ 1.

**Câu 7.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức  $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng an toàn thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp được tính bằng mg. Liều lượng an toàn của thuốc cần tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất là

- A.** 30 mg.      **B.** 0,5 mg.      **C.** 15 mg.      **D.** 20 mg.

**Câu 8.** Một cuốn tạp chí bán giá 20 ngàn đồng, chi phí xuất bản cho  $x$  cuốn là

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000 \text{ (đơn vị 10000 đồng)}.$$

Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4 ngàn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí cộng 90 triệu đồng tiền quảng cáo. Tìm số lượng cuốn tạp chí cần xuất bản để có mức lãi cao nhất. (giả thiết rằng số cuốn tạp chí in ra được bán hết)

- A.** 90000 cuốn.      **B.** 9000 cuốn.      **C.** 10000 cuốn.      **D.** 18000 cuốn.

**Câu 9.** Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này?

- A. 10 nghìn đồng.      B. 8 nghìn đồng.      C. 5 nghìn đồng.      D. 12 nghìn đồng.

**Câu 10.** Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ với dung tích 5 lít. Giá sản xuất mặt xung quanh là 100 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, giá sản xuất mặt đáy là 120 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Hỏi công ty có thể sản xuất được tối đa bao nhiêu thùng sơn? (Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

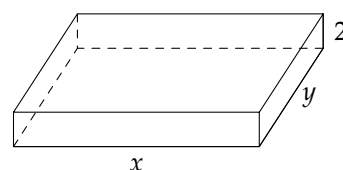
- A. 56453 thùng sơn.      B. 58136 thùng sơn.      C. 57169 thùng sơn.      D. 59025 thùng sơn.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 11.** Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình  $s(t) = 7t^2 - 3t + 10$ , trong đó  $s$  tính bằng mét và  $t$  tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Quãng đường vật đi được sau 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động là 550 m. .
- b) Gia tốc chuyển động của vật tại thời điểm  $t = 2$  là  $20 \text{ m/s}^2$  .
- c) Vận tốc chuyển động của vật tại thời điểm  $t = 4$  là  $59 \text{ m/s}$  .
- d) Vận tốc nhỏ nhất vật đạt được trong khoảng thời gian từ  $t = 3$  đến  $t = 6$  là  $39 \text{ m/s}$  .

**Câu 12.** Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích  $1\,800\text{ m}^3$  và chiều sâu  $2\text{ m}$  (hình bên). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi  $x$  (m) và  $y$  (m) là hai kích thước của mặt đáy. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:



- Thể tích bể bơi được tính theo công thức  $V = 2x^2y$ .
- Mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  là  $y = \frac{900}{x}$ .
- Tổng diện tích mặt bên của bể tính theo  $x, y$  là  $S = 4(x + y)$ .
- Để tổng chi phí xây dựng (bao gồm mặt đáy và mặt bên) nhỏ nhất thì cần chọn chiều dài là  $40\text{ m}$ .

**Câu 13.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa  $100$  tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là  $P(x) = 45 - 0,001x^2$  (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = 100 + 30x$  (triệu đồng) (gồm  $100$  triệu đồng chi phí cố định và  $30$  triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- Chi phí để A sản xuất  $10$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $400$  triệu đồng.
- Số tiền A thu được khi bán  $10$  tấn sản phẩm cho B là  $600$  triệu đồng.
- Lợi nhuận mà A thu được khi bán  $x$  tấn sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho B là  $-0,001x^3 + 15x - 100$ .
- A bán cho B khoảng  $70,7$  tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

**Câu 14.** Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi  $p = 400 - 2Q$  và hàm chi phí trung bình  $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$  trong đó  $Q$  là số đơn vị sản phẩm ( $p$  và  $\bar{C}$  được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm). Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a)  $Q = 90$  là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.
- b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$.
- c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$.
- d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa.

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 15.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?(kết quả tính bằng m/s)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 16.** Tại một xưởng sản xuất sản phẩm từ bê tông, chi phí để sản xuất  $x(m^3)$  sản phẩm mỗi tháng là  $C(x) = 2 + 0,5x + 0,007x^2$  (triệu đồng) với  $0 \leq x \leq 27$ . Chi phí trung bình là  $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu mét khối sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất là thấp nhất (làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 17.** Cơ sở A chuyên cung cấp một loại sản phẩm nông nghiệp X cho nhà phân phối B. Hai bên thoả thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng  $x$  tạ sản phẩm X thì giá bán mỗi tạ sản phẩm là  $P(x) = 5 - 0,0005x^2$  (triệu đồng) ( $x \leq 40$ ). Chi phí A phải bỏ ra cho  $x$  tạ sản phẩm X trong một tháng là  $C(x) = 10 + 3,5x$  (triệu đồng). Hỏi trong một tháng B đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm X từ A thì A nhận được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

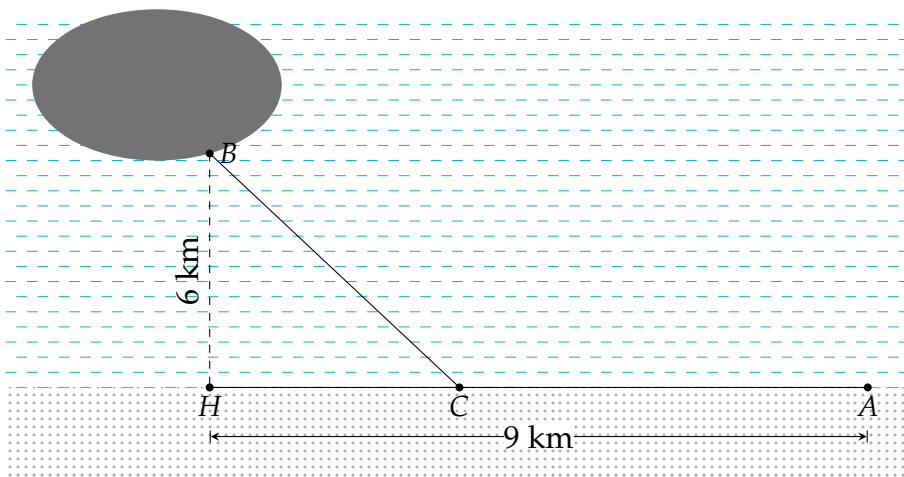
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 18.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là  $BH = 6$  km (Hình bên dưới). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130 000 USD mỗi kilômét, biết rằng  $AH = 9$  km. Xác định vị trí điểm C cách vị trí A một khoảng bao nhiêu km để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

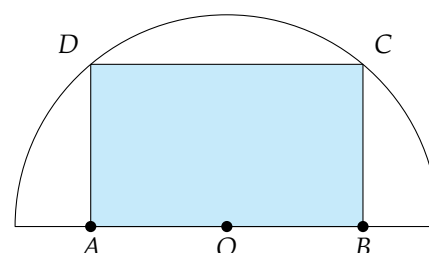
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



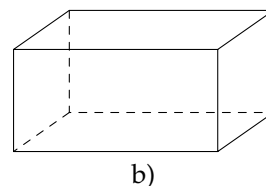
**Câu 19.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 7$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

KQ:



**Câu 20.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 10cm và chiều dài 80 cm như hình a, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  với  $1 \leq x \leq 4$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình b. Tìm  $x$  để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:



vi khuẩn), trong đó  $t$  là thời gian (đơn vị giây). Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên lớn nhất?

- A. 0.                      B. 1.                      C. -10.                      D. 10.

**Câu 4.** Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số  $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$ , trong đó  $P(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  giờ sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

- A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố.                      B. Sau 0,5 giờ.  
C. Sau 2 giờ.                      D. Sau 1 giờ.

**Câu 5.** Số lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau  $t$  giờ được mô hình hóa bởi hàm số  $N(t) = -t^3 + 12t^2 + 100$  (với  $0 \leq t \leq 12$ ). Tốc độ sinh trưởng của mẻ vi khuẩn đạt giá trị lớn nhất vào giờ thứ mấy?

- A. 2.                      B. 4.                      C. 6.                      D. 8.

**Câu 6.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$  (m). Tìm thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó tốc độ  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- A.  $t = 2,5$ .                      B.  $t = 1$ .                      C.  $t = 2$ .                      D.  $t = 0,5$ .

**Câu 7.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 109 (m/s).                      B. 89 (m/s).                      C.  $\frac{25}{3}$  (m/s).                      D. 71 (m/s).

**Câu 8.** Một xí nghiệp sản xuất một loại sản phẩm với hàm chi phí  $C(x) = 20x + 1000$  (nghìn đồng), trong đó  $x$  là số lượng sản phẩm. Hàm cầu của thị trường đối với sản phẩm này là  $p(x) = 100 - 0,1x$  (nghìn đồng). Số lượng sản phẩm  $x$  cần sản xuất để xí nghiệp đạt mức lợi nhuận lớn nhất là

- A. 200.                      B. 300.                      C. 400.                      D. 500.

**Câu 9.** Một rạp chiếu phim bán được 300 vé mỗi ngày với giá 100 nghìn đồng/vé. Một khảo sát thị trường chỉ ra rằng, nếu cứ giảm giá vé 5 nghìn đồng thì số lượng vé bán ra sẽ tăng thêm 30 vé mỗi ngày. Tìm giá bán mới cho mỗi vé là bao nhiêu để thu được doanh thu lớn nhất?

- A. 80 nghìn đồng.                      B. 75 nghìn đồng.                      C. 70 nghìn đồng.                      D. 85 nghìn đồng.

**Câu 10.** Một cơ sở sản xuất bánh ngọt mỗi ngày làm ra 500 chiếc bánh để phân phối cho các đại lý. Nếu giá bán sỉ là 40 nghìn đồng/chiếc thì sẽ bán hết sạch, nếu giá bán cứ tăng thêm 2 nghìn đồng/chiếc thì số bánh thừa lại cuối ngày sẽ tăng thêm 10 chiếc. Số bánh thừa này sẽ được bán thanh lý cho các trang trại chăn nuôi với giá 10 nghìn đồng/chiếc. Mức tăng giá bán sỉ là bao nhiêu để tổng doanh thu mỗi ngày của cơ sở là lớn nhất?

- A. 30 nghìn đồng.                      B. 40 nghìn đồng.                      C. 45 nghìn đồng.                      D. 35 nghìn đồng.

**Câu 11.** Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 000 đồng. Chi phí in ấn của  $n$  máy chạy trong một giờ là  $20(3n + 5)$  nghìn đồng. Hỏi nếu in 50 000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

- A. 4 máy.                      B. 7 máy.                      C. 6 máy.                      D. 5 máy.

**Câu 12.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng  $Q(n) =$

480 – 20n (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 12. B. 14. C. 10. D. 18.

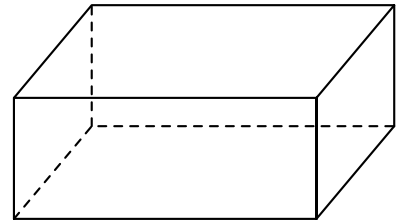
**Câu 13.** Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

- A. 36. B. 24. C. 48. D. 72.

**Câu 14.**

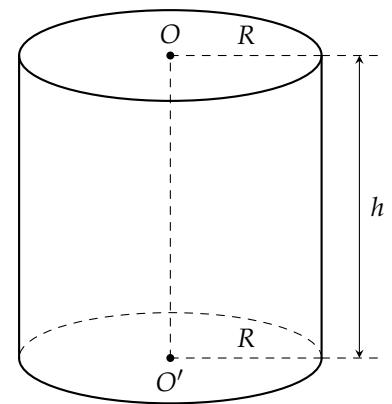
Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng  $3\sqrt{2}$  dm và chỉ được sử dụng vừa đủ  $18 \text{ dm}^2$  tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng

- A.  $8 \text{ dm}^3$ . B.  $2\sqrt{2} \text{ dm}^3$ . C.  $6 \text{ dm}^3$ . D.  $4 \text{ dm}^3$ .



**Câu 15.** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nhiên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng  $V$  và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì nhà thiết kế phải thiết kế hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu?

- A.  $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ . B.  $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ . C.  $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ . D.  $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ .



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm tính theo công thức  $V(t) = \frac{1}{200} \left( 40t^3 - \frac{t^4}{4} \right) (\text{m}^3)$  ( $0 \leq t \leq 120$ ). Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  được tính bởi công thức  $f(t) = V'(t)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Thể tích nước của bể bơi sau 20 phút bơm là  $1400 (\text{m}^3)$ .
- b) Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  là  $f(t) = 120t^2 - t^3$ .
- c) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 45 đến phút thứ 75.
- d) Tốc độ bơm lớn nhất tại thời điểm  $t = 80$  (phút).

**Câu 2.** Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi  $p = 400 - 2Q$  và hàm chi phí trung bình  $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$  trong đó  $Q$  là số đơn vị sản phẩm ( $p$  và  $\bar{C}$  được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau

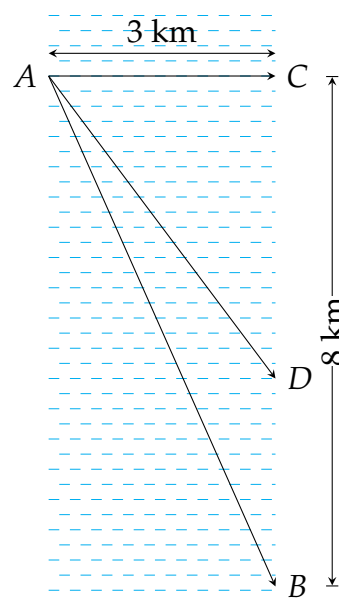
- a)  $Q = 90$  là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.
- b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$.
- c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$.
- d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa.

**Câu 3.** Một nhà sản xuất trung bình bán được 1 000 laptop mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng

laptop bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hàng tuần là  $C(x) = 12\,000 - 3x$  (triệu đồng), trong đó  $x$  là số laptop bán ra trong tuần. Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau

- Hàm cầu là  $p = -\frac{1}{200}x + 19$ , trong đó  $p$  (triệu đồng) là giá của mỗi laptop.
- Doanh thu đạt được lớn nhất thì nên giảm giá bán laptop là 5 triệu đồng/chiếc.
- Để công ty không bị lỗ vốn thì mỗi tuần cần bán được ít nhất 600 chiếc laptop.
- Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là 12 200 (triệu đồng).

**Câu 4.** Một người chèo thuyền từ điểm  $A$  trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm  $B$ , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt( Hình bên dưới). Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm  $C$  rồi chạy bộ đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến  $B$ , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm  $D$  nào đó giữa  $C$  và  $B$  rồi chạy bộ đến  $B$ . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Biết tốc độ dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi  $x$  (km) là độ dài quãng đường  $CD$ . Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau



- $8 - x$  (km) là độ dài quãng đường  $BD$ .
- Thời gian chèo thuyền trên quãng đường  $AD$  là  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$  (giờ).
- Tổng thời gian di chuyển từ  $A$  đến  $B$  là  $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{8 - x}{8}$ .
- 1 giờ 30 phút là khoảng thời gian ngắn nhất người này có thể đi từ  $A$  đến  $B$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Dân số của một quốc gia sau  $t$  (năm) kể từ năm 2024 được ước tính bởi công thức  $N(t) = 100e^{0,012t}$  ( $N(t)$  được tính bằng triệu người,  $0 \leq t \leq 50$ ). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

KQ:

**Câu 2.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là  $p(x) = 90 - 0,01x^2$  (đơn vị: triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = \frac{1}{2}(200 + 27x)$  (đơn vị: triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để thu được lợi nhuận (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng) cao nhất?

KQ:

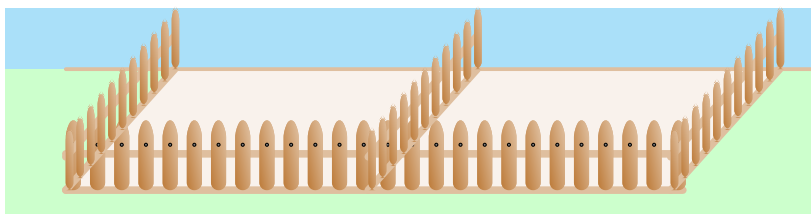
**Câu 3.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất  $x$  sản phẩm trong một tháng ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = -30x^2 + 2200x - 14980$  (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là  $G(x) = \frac{20}{x} + 100$  (nghìn đồng). Nếu muốn lợi nhuận đạt trên 15 triệu đồng một tháng thì doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm?

KQ:

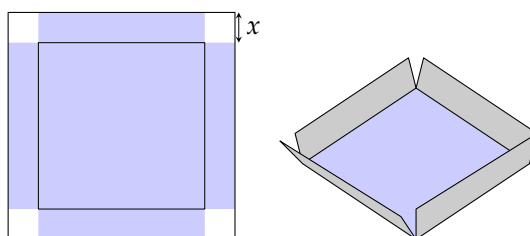
**Câu 4.** Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với một hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



**Câu 5.** Ông Anh muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 cm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa.

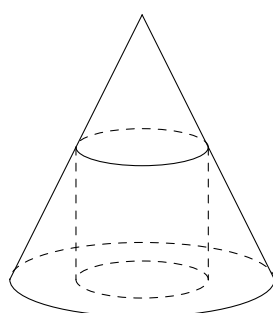


Độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

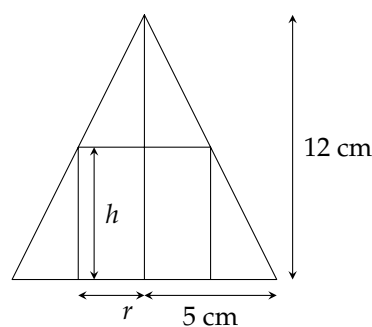
KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Câu 6.** Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình 1). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Tìm  $h$  để khối trụ có thể tích lớn nhất.

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

—HẾT—

# Chương 2

## VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

### Bài



### VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

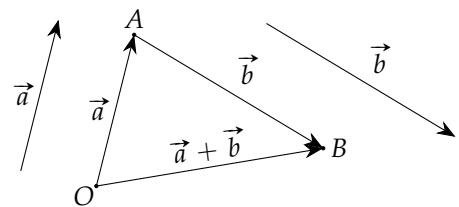
#### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

##### 1 Tổng của hai véc tơ

###### ⚙ Định nghĩa:

Trong không gian, cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy ba điểm  $O, A, B$  sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{OB}$  là **tổng của hai véc tơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ký hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ .

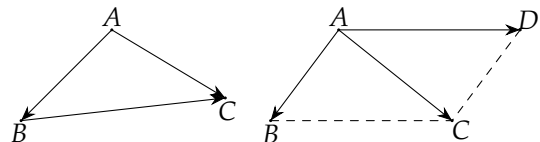
Phép lấy tổng của hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **phép cộng véc tơ**.



###### ⚙ Các quy tắc cần nhớ:

- ① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm  $A, B, C$ , ta có

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



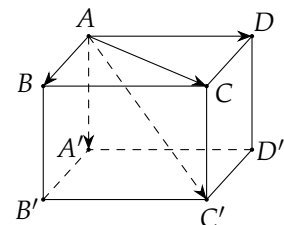
- ② Quy tắc hình bình hành: Cho  $ABCD$  là hình bình hành, ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

- ③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$$

⚠ Hệ thức tương tự:  $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$ .



###### ⚙ Tính chất:

- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- Với mọi véc tơ  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .
- Tổng của ba véc tơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .

## 2 Hiệu của hai véc tơ

### ⚙ Vectơ đối:

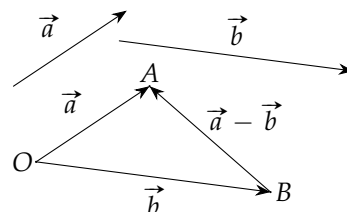
- ① Vectơ đối của  $\vec{a}$  kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- ② Vectơ đối của  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}$ , nghĩa là  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$  (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- ③ Vectơ  $\vec{0}$  được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙ **Định nghĩa hiệu của hai vectơ:** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{a} + (-\vec{b})$  là **hiệu của hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ký hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.

### ⚙ Các quy tắc cần nhớ:

- ① Với ba điểm  $A, B, C$  ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ .
- ② Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đối nhau thì  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .



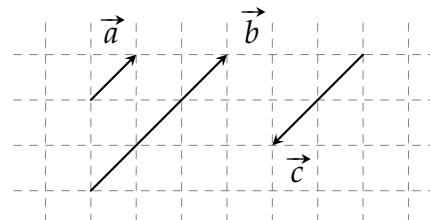
## 3 Tích của một số với một véc-tơ

⚙ **Định nghĩa:** Cho số thực  $k \neq 0$  và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của một số  $k$  với vectơ  $\vec{a}$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ .
- Có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

⚠  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

**Ví dụ:** Theo hình vẽ bên, thì  $\vec{b} = 3\vec{a}$ ;  $\vec{c} = -2\vec{a}$ ;  $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$ .



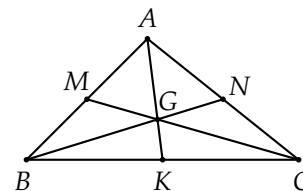
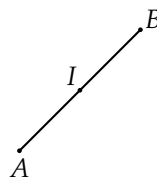
### ⚙ Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

- ①  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ ;  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ;

- ②  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ;
- $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ ;  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$ ;



### ⚙ Nhận xét:

- ① Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kỳ, với mọi số  $h$  và  $k$ , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;

$$\bullet (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a};$$

$$\bullet k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}.$$

② Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

③ Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k \neq 0$  để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

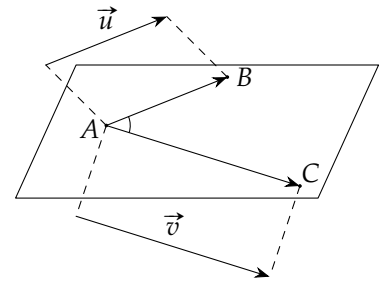
#### 4 Tích vô hướng của hai véc-tơ

##### ⚙ Góc giữa hai vectơ:

Trong không gian, cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai vectơ khác  $\vec{0}$ . Lấy một điểm  $A$  bất kỳ, gọi  $B$  và  $C$  là hai điểm sao cho  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ . Khi đó, ta gọi  $\widehat{BAC}$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , ký hiệu  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

⚠  $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ .

- Nếu  $\vec{u}$  cùng hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  ngược hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .



⚙ **Định nghĩa tích vô hướng của hai véc-tơ:** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, kí hiệu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

#### CHÚ Ý

- ① Trong trường hợp  $\vec{u} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{v} = \vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- ②  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$ ;  $\vec{u}^2 \geq 0$ ;  $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .
- ③ Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ④ Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

⚙ **Tính chất:** Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và số thực  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

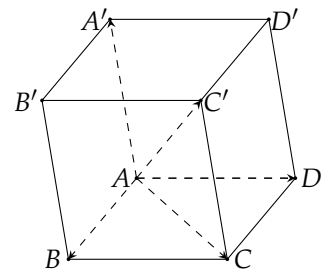
- ✓ Chú ý các quy tắc như: ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp...;
- ✓ Độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  là độ dài đoạn  $AB$ ;
- ✓ Độ dài đường cao trong tam giác đều = cạnh  $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; Độ dài đường chéo hình vuông = cạnh  $\times \sqrt{2}$ ; Độ dài đường chéo hình lập phương = cạnh  $\times \sqrt{3}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

#### Bài 1.

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Hãy xác định các véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  thỏa

- |                                            |                                         |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|
| a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ ; | b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$ ; |
| c) bằng với $\overrightarrow{AD}$ ;        | d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$ ;    |
| e) đối với $\overrightarrow{CD'}$ ;        | f) đối với $\overrightarrow{B'C}$ .     |



**Bài 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, O$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $AC$ . Chứng minh rằng

- |                                                                                                                     |                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ND}$ ;                        | b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ ; |
| c) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ ; | d) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$ . |

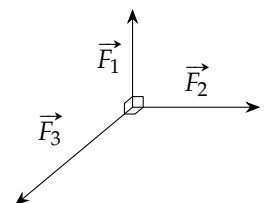
**Bài 3.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Chứng minh:

- |                                                                                                  |                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CA'}$ . | b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .     |
| c) $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$ .   | d) $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$ . |
| e) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}  = a\sqrt{2}$ .                                 | f) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}  = a\sqrt{3}$ .            |

#### Bài 4.

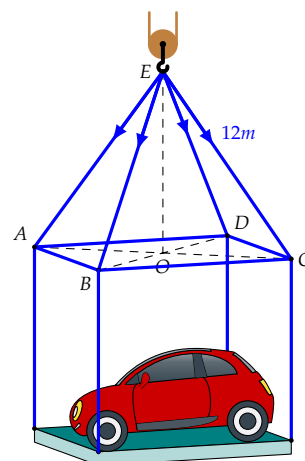
Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

- Tính độ lớn hợp lực của  $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ .
- Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



### Bài 5.

Tính độ lớn của các lực căng trên mỗi sợi dây cáp trong Hình. Cho biết khối lượng xe là 1900 kg, gia tốc là  $10 \text{ m/s}^2$ , khung nâng có khối lượng 100 kg và có dạng hình chóp  $S.ABCD$  với đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$ ,  $AB = 8 \text{ m}$ ,  $BC = 12 \text{ m}$ ,  $SC = 12 \text{ m}$  và  $SO$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của Newton.



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

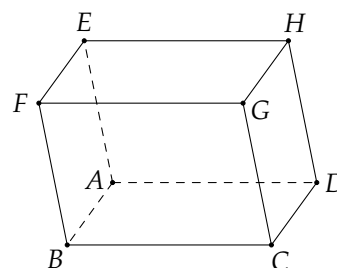
**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.EFGH$ . Véc-tơ nào sau đây cùng phương với  $\overrightarrow{AD}$ ?

- A.  $\overrightarrow{AC}$ .      B.  $\overrightarrow{FE}$ .      C.  $\overrightarrow{BD}$ .      D.  $\overrightarrow{EH}$ .

**Câu 2.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  là các véc-tơ nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$ .      B.  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$ .  
C.  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}$ .      D.  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}$ .



**Câu 3.** Trong không gian, cho các điểm  $P, G, H$ . Tìm khẳng định đúng.

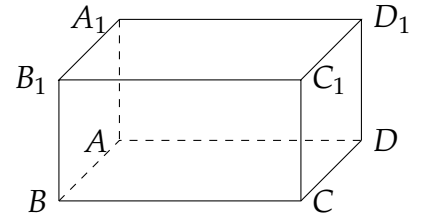
- A.  $\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{PG}$ .      B.  $\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GP}$ .      C.  $\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{HG}$ .      D.  $\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{GH}$ .

**Câu 4.** Trong không gian, cho các điểm  $I, Q, C$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $\overrightarrow{IQ} - \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{IC}$ .      B.  $\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{IQ}$ .      C.  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{IQ}$ .      D.  $\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{QC}$ .

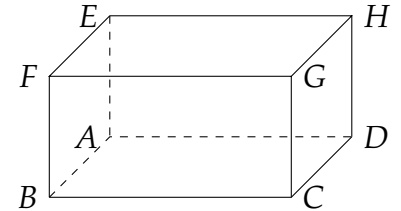
**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA_1}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1C_1}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C_1A_1}$ .



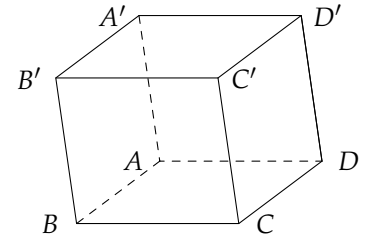
**Câu 6.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ .      B.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GE}$ .      D.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG}$ .



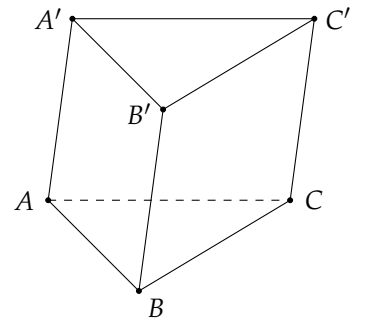
**Câu 7.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$ .



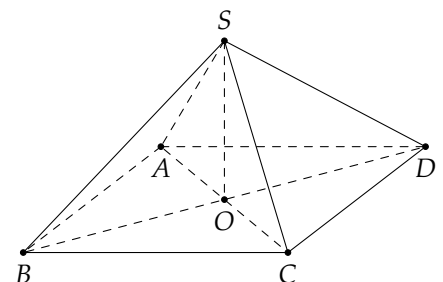
**Câu 8.** (TN.2025) Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  (xem hình dưới). Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A}$ .      B.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC'}$ .      D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{C'B'}$ .



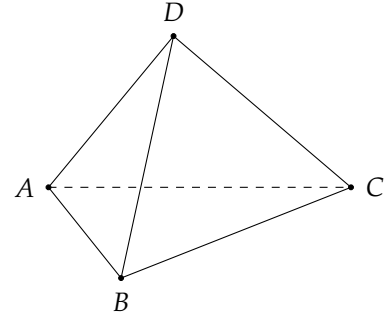
**Câu 9.** (TN.2025) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  (xem hình bên). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ .  
 B.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ .  
 C.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO}$ .  
 D.  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$ .



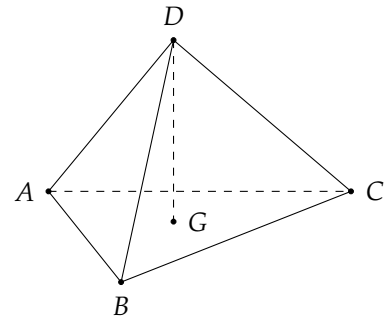
**Câu 10.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$ .      B.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$ .  
C.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$ .



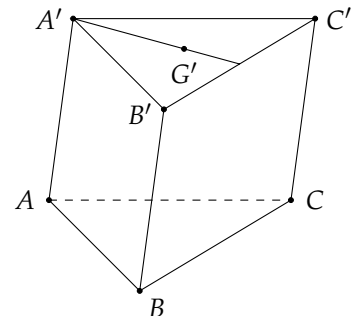
**Câu 11.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm  $k$  thỏa đẳng thức vectơ  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{DG}$ .

- A.  $k = 1$ .      B.  $k = \frac{1}{2}$ .  
C.  $k = 2$ .      D.  $k = 3$ .



**Câu 12.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AG'}$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$ .      B.  $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .  
C.  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$ .      D.  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .



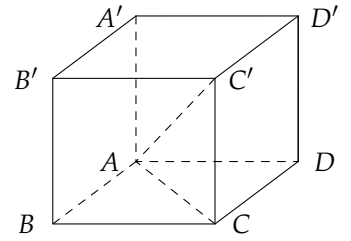
**Câu 13.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.**  $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ .

**B.**  $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$ .

**C.**  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$ .

**D.**  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$ .



**Câu 14.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$  theo  $a$ .

**A.**  $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$ .

**B.**  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$ .

**C.**  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$ .

**D.**  $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$ .

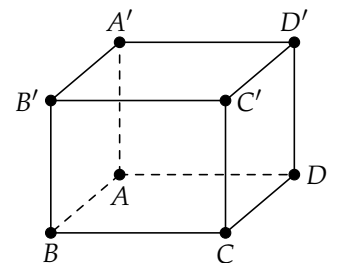
**Câu 15.** Hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$  theo  $a$ .

**A.**  $a\sqrt{2}$ .

**B.**  $(1 + \sqrt{3})a$ .

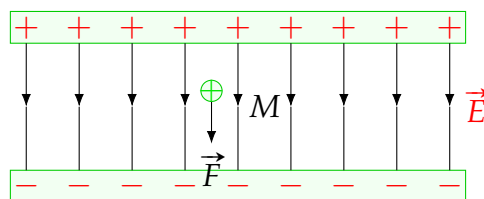
**C.**  $a\sqrt{6}$ .

**D.**  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .



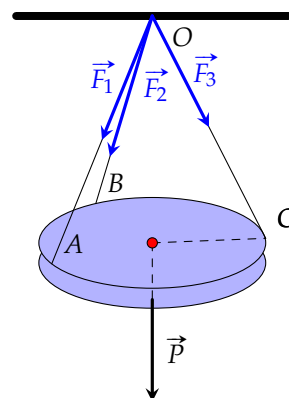
**Câu 16.** Trong điện trường đều, lực tĩnh điện  $\vec{F}$  (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích  $q$  (đơn vị: C) được tính theo công thức  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ , trong đó  $\vec{E}$  là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi  $q = 10^{-9} \text{ C}$  và độ lớn điện trường  $E = 10^5 \text{ N/C}$ .

- A.  $10^{-3} \text{ N}$ .                      B.  $10^4 \text{ N}$ .  
C.  $10^{-14} \text{ N}$ .                      D.  $10^{-4} \text{ N}$ .

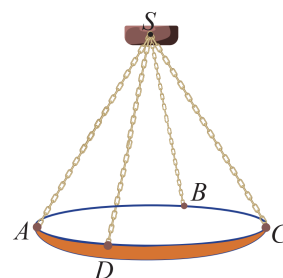


**Câu 17.** Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$ . Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

- A.  $14\sqrt{3} \text{ (N)}$ .                      B.  $15\sqrt{3} \text{ (N)}$ .  
C.  $17\sqrt{3} \text{ (N)}$ .                      D.  $16\sqrt{3} \text{ (N)}$ .



**Câu 18.** Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5 \text{ kg}$  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 60^\circ$ . Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



A.  $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

B.  $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

C.  $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

D.  $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N.}$

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 19.**

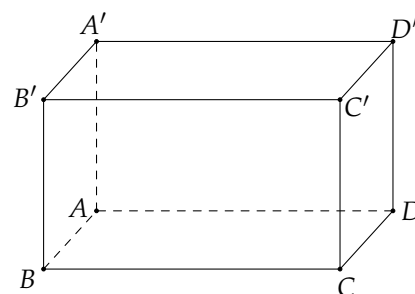
Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{3}$ ;  $AA' = 2a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$ .

b)  $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$ .

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$ .

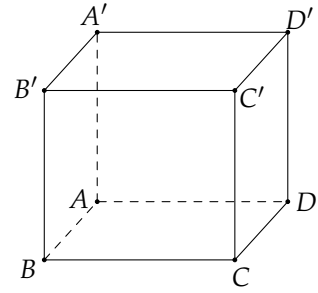
d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$ .



**Câu 20.**

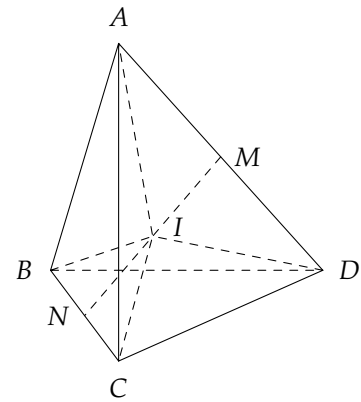
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$ .      b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$ .  
 c)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$ .      d)  $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$ .



**Câu 21.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $BC$ ,  $I$  là trung điểm  $MN$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

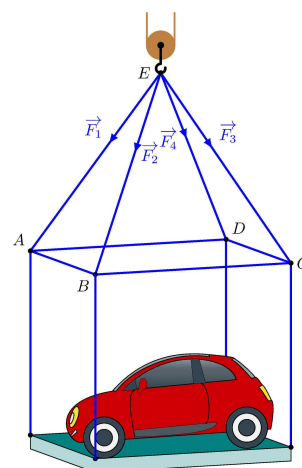
- a)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ .      b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .  
 c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$ .      d)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .



## Câu 22.

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ .
- b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ .
- c)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$  (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



## 2

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

a) Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau:  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{B'D'}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ;  $\overrightarrow{AD'}$  và  $\overrightarrow{BD}$ .  
 b) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$ ;  $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$ ;  
 c) Chứng minh  $\overrightarrow{AC'}$  vuông góc với  $\overrightarrow{BD}$ .

a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ .

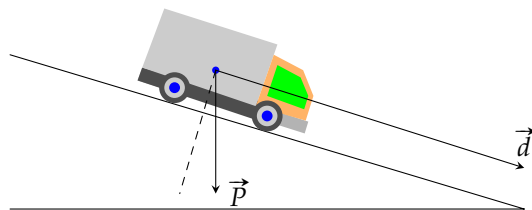
b) Tính góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

108



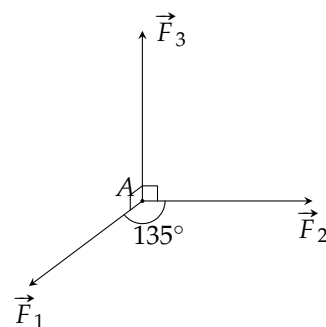
Cho biết công  $A$  (đơn vị:  $J$ ) sinh bởi lực  $\vec{F}$  tác dụng lên một vật được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , trong đó  $\vec{d}$  là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của  $|\vec{d}|$  là m) khi chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$ .

Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng  $5^\circ$  so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực  $\vec{P}$  được xác định bởi công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$ , với  $m$  (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



#### Bài 4.

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang ( $\alpha$ ), chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trong ( $\alpha$ ) và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với ( $\alpha$ ) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .

C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 2.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

A.  $\alpha = 0^\circ$ .

B.  $\alpha = 45^\circ$ .

C.  $\alpha = 90^\circ$ .

D.  $\alpha = 180^\circ$ .

**Câu 3.** Cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{u}| = 8, |\vec{b}| = 2$  và  $\vec{u} \cdot \vec{b} = 8$ . Góc giữa hai vectơ đã cho là

A.  $30^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

C.  $135^\circ$ .

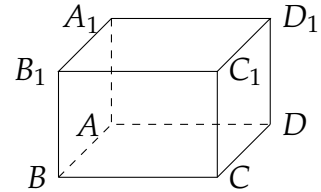
D.  $120^\circ$ .

**Câu 4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7\sqrt{2}$ . Góc giữa hai vectơ đã cho là

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $180^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

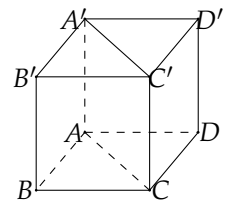
**Câu 5.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{B_1C_1}$  và  $\vec{BD}$  bằng

- A.  $135^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $120^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .



**Câu 6.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A.  $(\vec{A'C'}, \vec{AD}) = 45^\circ$ .                      B.  $(\vec{A'C'}, \vec{B'B}) = 90^\circ$ .  
C.  $(\vec{A'A}, \vec{CB'}) = 45^\circ$ .                      D.  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$ .

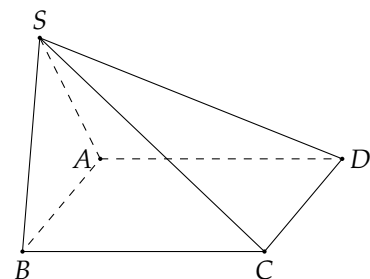


**Câu 7.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ , Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$ . Hãy tính góc giữa hai vectơ  $\vec{MN}$  và  $\vec{BD}$ .

- A.  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 150^\circ$ .                      B.  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 120^\circ$ .  
C.  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 30^\circ$ .                      D.  $(\vec{MN}, \vec{BD}) = 60^\circ$ .

**Câu 8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và mặt bên  $SAB$  là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{DC}$  và  $\vec{BS}$ .

- A.  $(\vec{DC}, \vec{BS}) = 120^\circ$ .                      B.  $(\vec{DC}, \vec{BS}) = 60^\circ$ .  
C.  $(\vec{DC}, \vec{BS}) = 90^\circ$ .                      D.  $(\vec{DC}, \vec{BS}) = 150^\circ$ .

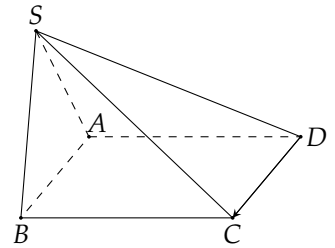


**Câu 9.** Cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  thỏa mãn  $|\vec{u}| = 8, |\vec{v}| = 8$  và góc giữa hai vectơ bằng  $60^\circ$ . Tính tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- A. 32.                      B.  $32\sqrt{3}$ .                      C.  $64\sqrt{3}$ .                      D. 64.

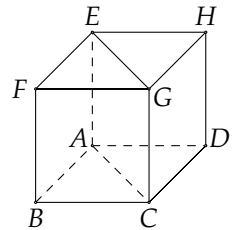
**Câu 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Mặt bên  $ASB$  là tam giác vuông cân tại  $S$  và có cạnh  $AB = a$ . Tính  $\vec{DC} \cdot \vec{AS}$ .

- A.  $\frac{a^2}{4}$ .                      B.  $-\frac{a^2}{4}$ .  
C.  $-\frac{a^2}{2}$ .                      D.  $\frac{a^2}{2}$ .



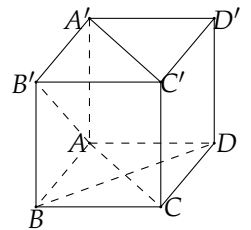
**Câu 11.** Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{EG}$ .

- A.  $a^2\sqrt{2}$ .                      B.  $a^2$ .  
C.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $a^2\sqrt{3}$ .



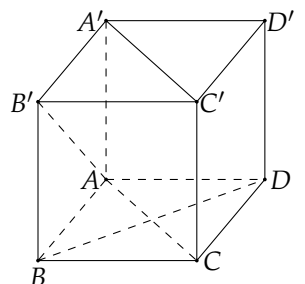
**Câu 12.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\vec{AB'} \cdot \vec{A'C'}$ .

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $-a^2$ .  
C.  $a^2$ .                      D.  $-\frac{a^2}{2}$ .



**Câu 13.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\vec{AB'} \cdot \vec{BD}$ .

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .                      B.  $-a^2$ .  
C.  $a^2$ .                      D.  $-\frac{a^2}{2}$ .



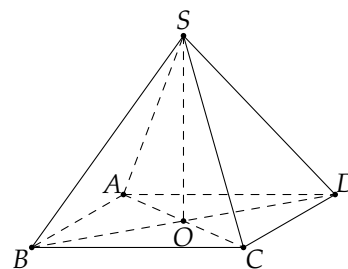
**Câu 14.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\vec{AS} \cdot \vec{BC}$ .

A.  $-\frac{a^2}{4}$ .

B.  $\frac{a^2}{2}$ .

C.  $-\frac{a^2}{2}$ .

D.  $\frac{a^2}{4}$ .



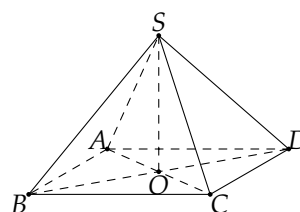
**Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\vec{AS} \cdot \vec{AC}$ .

A.  $-a^2$ .

B.  $\frac{a^2}{2}$ .

C.  $-\frac{a^2}{2}$ .

D.  $a^2$ .



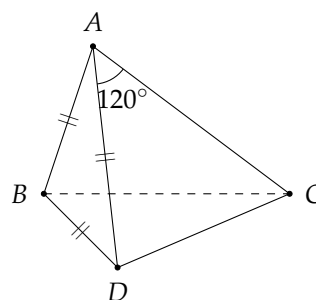
**Câu 16.** Cho tứ diện  $ABCD$  biết  $AB = AD = BD = a$ ,  $AC = 2a$  và  $\widehat{CAD} = 120^\circ$ . Tính  $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$ .

A.  $-\frac{3}{2}a^2$ .

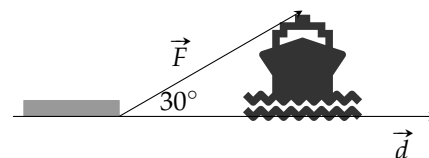
B.  $\frac{3}{2}a^2$ .

C.  $\frac{1}{2}a^2$ .

D.  $-\frac{1}{2}a^2$ .

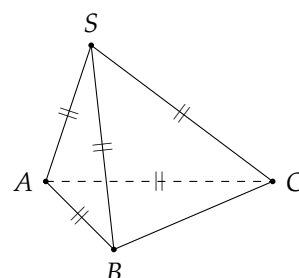


**Câu 17.** Một tàu kéo một xà lan trên biển di chuyển được 3 km với một lực kéo có cường độ 2 000 N và có phương hợp với phương dịch chuyển một góc  $30^\circ$ . Tính công thực hiện bởi lực kéo nói trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của Jun).



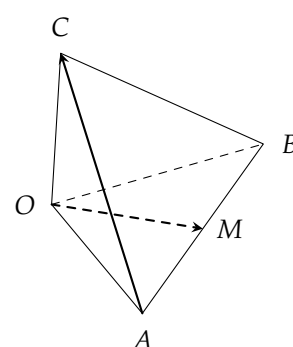
- A. 5 327 148 (J).                      B. 4 217 150 (J).  
C. 5 196 152 (J).                      D. 4 179 561 (J).

**Câu 18.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa các vectơ  $\vec{SC}$  và  $\vec{AB}$ .



- A.  $60^\circ$ .                                      B.  $90^\circ$ .  
C.  $120^\circ$ .                                      D.  $150^\circ$ .

**Câu 19.** Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{OM}$  và  $\vec{AC}$ .



- A.  $90^\circ$ .                                      B.  $120^\circ$ .  
C.  $60^\circ$ .                                      D.  $30^\circ$ .

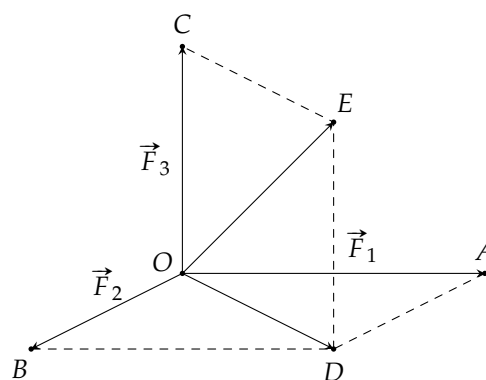
**Câu 20.** Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc  $110^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 30 N, 25 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn là 10 N. Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

A. 30,6 N.

B. 33,3 N.

C. 32,7 N.

D. 35,2 N.



**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Trong không gian, cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là  $45^\circ$ .

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

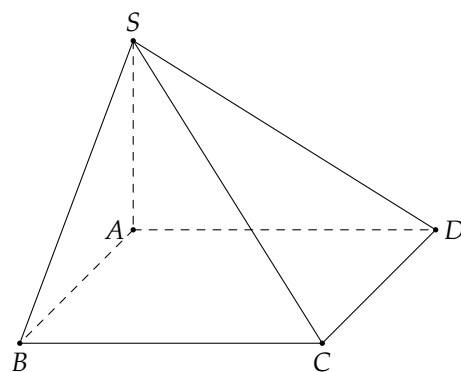
b)  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

c)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$ .

d)  $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$ .

**Câu 22.**

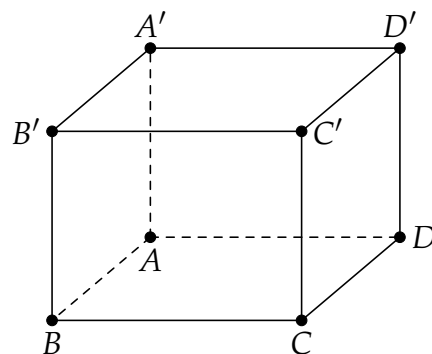
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $2a$ . Biết  $SA = 2a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ .  $M$  là trung điểm  $SB$ .



- Tích vô hướng của hai véc-tơ  $\overrightarrow{SD}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là  $-1$ .
- Độ dài của véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  là  $a\sqrt{2}$ .
- Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{CD}$  bằng  $45^\circ$ .
- Tích vô hướng của hai véc-tơ  $\overrightarrow{SC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  là  $4a^2$ .

**Câu 23.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

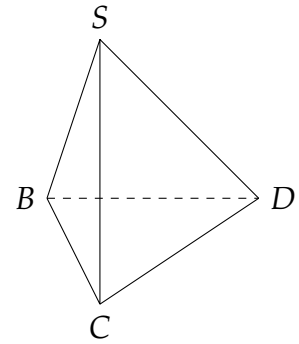


- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{A'M}$  bằng  $\frac{3a}{2}$ .
- $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .
- $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$ .
- Góc giữa véc-tơ  $\overrightarrow{BA'}$  và véc-tơ  $\overrightarrow{A'C'}$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 24.**

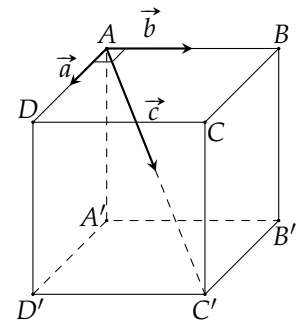
Cho tứ diện đều  $SBCD$  có cạnh bằng  $5a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau.

- a)  $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{CH}) = 120^\circ$ .      b)  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .  
 c)  $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$ .      d)  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CS} = -\frac{25a^2}{2}$ .

**Câu 25.**

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  như hình vẽ. Độ lớn của các lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

- a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .  
 b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$  (N).  
 c)  $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$ .  
 d)  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$  (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Trong không gian, gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ không. Khẳng định nào sau đây đúng?

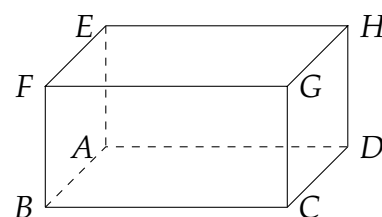
- A.  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ .      B.  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .      C.  $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ .      D.  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

**Câu 2.** Hai véc-tơ trong không gian được gọi là bằng nhau nếu chúng

- A. Cùng phương và cùng độ dài.      B. Cùng hướng và cùng độ dài.  
C. Cùng hướng.      D. Có độ dài bằng nhau.

**Câu 3.** Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ  $\vec{GB}$  là các vectơ nào sau đây?

- A.  $\vec{HA}$ .      B.  $\vec{HE}$ .      C.  $\vec{EH}$ .      D.  $\vec{DE}$ .

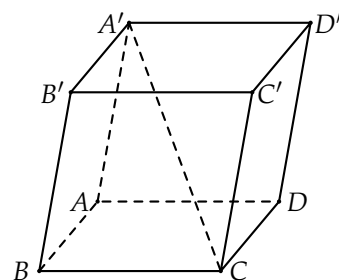


**Câu 4.** Trong không gian, cho các điểm  $M, B, L$ . Tìm khẳng định đúng.

- A.  $\vec{MB} + \vec{ML} = \vec{BL}$ .      B.  $\vec{MB} - \vec{LB} = \vec{ML}$ .      C.  $\vec{ML} + \vec{BL} = \vec{MB}$ .      D.  $\vec{LM} - \vec{BL} = \vec{MB}$ .

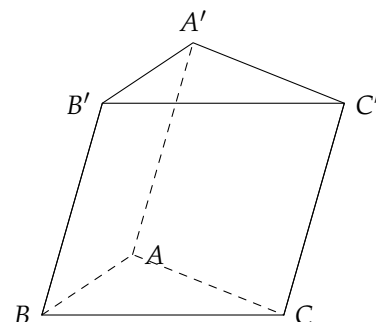
**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A.  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ .      B.  $\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$ .  
C.  $\vec{CB} + \vec{CD} + \vec{DD'} = \vec{CA'}$ .      D.  $\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AA'} = \vec{A'C}$ .



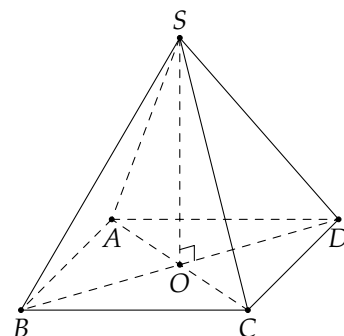
**Câu 6.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  (xem hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\vec{BA} + \vec{A'C'} = \vec{BC'}$ .      B.  $\vec{BA} + \vec{A'C'} = \vec{C'B'}$ .  
C.  $\vec{BA} + \vec{A'C'} = \vec{BC}$ .      D.  $\vec{BA} + \vec{A'C'} = \vec{A'A}$ .



**Câu 7.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  (xem hình dưới). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ .  
B.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$ .  
C.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$ .  
D.  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{SO}$ .



**Câu 8.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$  và góc giữa hai vectơ bằng  $120^\circ$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

- A.  $-6$ .                      B.  $6\sqrt{3}$ .                      C.  $-12\sqrt{3}$ .                      D.  $12$ .

**Câu 9.** Cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{u}| = 2, |\vec{b}| = 5$  và  $\vec{u} \cdot \vec{b} = -10$ . Góc giữa hai vectơ đã cho là

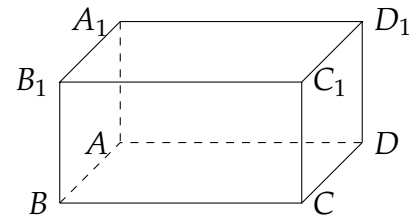
- A.  $120^\circ$ .                      B.  $180^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 10.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai véc-tơ  $\vec{AC}$  và  $\vec{A'B}$  bằng

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

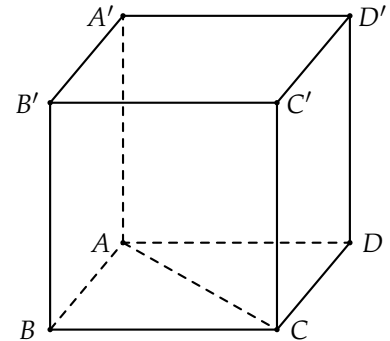
**Câu 11.** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có độ dài cạnh bằng  $5a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \vec{AB_1} + \vec{AD_1}$  theo  $a$ .

- A.  $40a$ .                      B.  $5\sqrt{6}a$ .                      C.  $5\sqrt{3}a$ .                      D.  $5\sqrt{2}a$ .



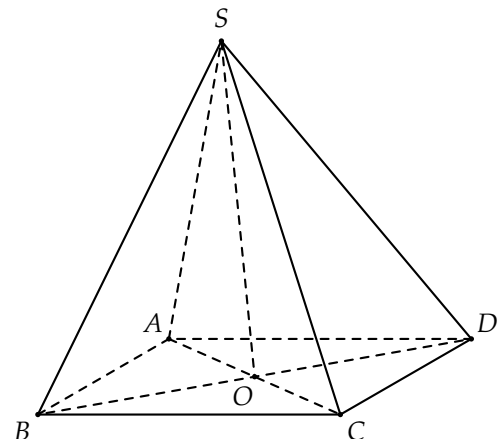
**Câu 12.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích  $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'}$ .

- A.  $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ .                      B.  $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = a^2$ .  
C.  $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = \sqrt{2}a^2$ .                      D.  $\vec{AC} \cdot \vec{B'C'} = 2a^2$ .



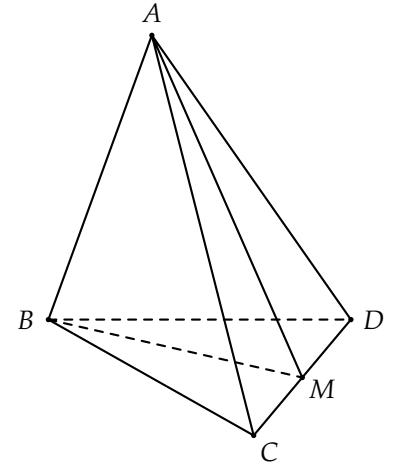
**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $AB = 6, AD = 4, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -12$ . Tính  $(\vec{SC} - \vec{SA})^2$ .

- A.  $76$ .                      B.  $28$ .                      C.  $52$ .                      D.  $40$ .



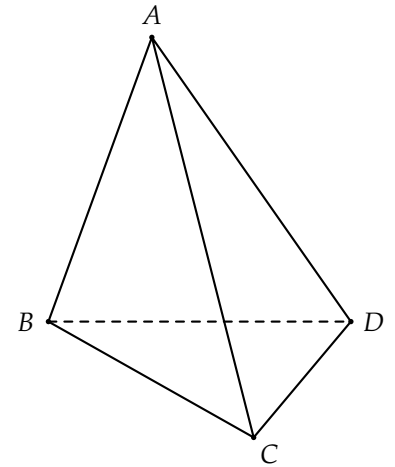
**Câu 14.** Cho tứ diện  $ABCD$  có tam giác  $BCD$  đều và  $AD = AC$ . Giá trị của  $\cos(\vec{AB}, \vec{CD})$  là

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B. 0.      C.  $-\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



**Câu 15.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Biết  $\vec{MN} = k(\vec{AD} + \vec{BC})$ . Giá trị  $k$  là

- A. 3.      B. 2.      C.  $\frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

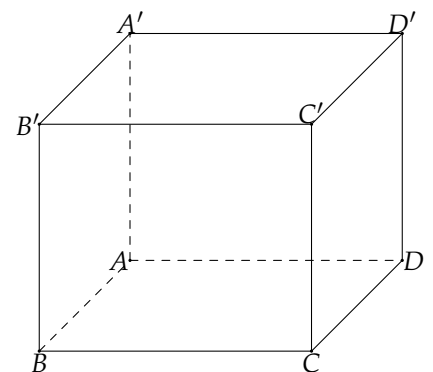
**Câu 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong không gian thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$  và góc giữa chúng bằng  $60^\circ$ . Khi đó, xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ .  
 b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ .  
 c)  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = -17$ .  
 d) Véc-tơ  $\vec{u} = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{a}$ .

**Câu 2.**

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  (xem hình bên)

- a)  $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD'} = \vec{DB}$ .  
 b) Véc-tơ đối với véc-tơ  $\vec{AB'}$  là  $\vec{C'D}$ .  
 c)  $\vec{AA'} + \vec{AD} = \vec{BC'}$ .  
 d) Các véc-tơ bằng với véc-tơ  $\vec{BC}$  là  $\vec{C'B'}$  và  $\vec{A'D'}$ .



**Câu 3.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Khi đó, xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{2}$ .

b) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  bằng  $60^\circ$ .

d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

**Câu 4.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ .

a)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , khi đó  $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{CM}$ .

c)  $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

d) Góc giữa vectơ  $\overrightarrow{AB'}$  và  $\overrightarrow{BC'}$  bằng  $60^\circ$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Biết  $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{OM}$ . Giá trị  $k$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 2.** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ  $\vec{a} + 2\vec{b}$  bằng  $6\sqrt{3}$ . Biết số đo góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $x$  độ. Giá trị của  $x$  là bao nhiêu?

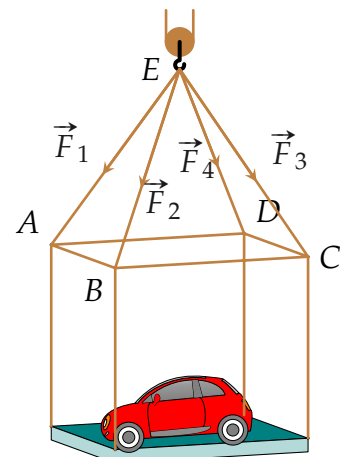
KQ:

**Câu 3.** Trong không gian, cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và góc giữa hai véc-tơ đó bằng  $60^\circ$ . Tính  $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ .

KQ:

**Câu 4.**

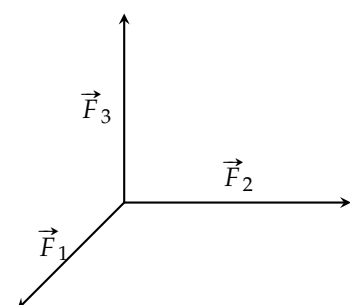
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được đặt vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA$ ;  $EB$ ;  $EC$ ;  $ED$  bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $\alpha$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết các lực căng  $\vec{F}_1$ ;  $\vec{F}_2$ ;  $\vec{F}_3$ ;  $\vec{F}_4$  đều có cường độ là 4800 N, trọng lượng của cả khung sắt chứa xe ô tô là  $7200\sqrt{6}$  N. Tính  $\sin \alpha$ . (làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).



KQ:

**Câu 5.** Ba lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N. Hợp lực của ba lực đã cho có độ lớn bao nhiêu Niu-tơn (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân)?

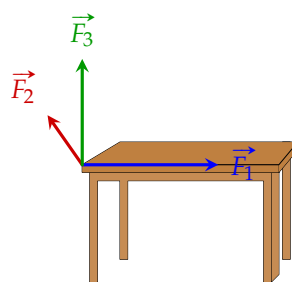
KQ:



**Câu 6.** Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trên mặt phẳng chứa mặt bàn, tạo với nhau một góc  $110^\circ$  và có độ lớn lần lượt là 9 (N), 4 (N), lực  $\vec{F}_3$  vuông góc với mặt bàn và có độ lớn 7 (N). Độ lớn hợp lực của ba lực trên là  $a$  (N), tìm giá trị của  $a$  (kết quả quy tròn về số nguyên).

KQ: 

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



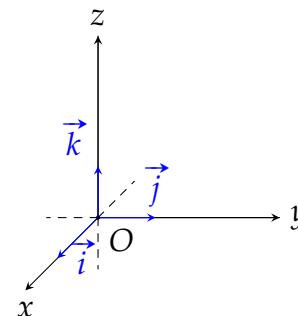
—HẾT—

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  đôi một vuông góc với nhau tại gốc  $O$  của mỗi trục. Gọi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$ , hay đơn giản là hệ tọa độ  $Oxyz$ . Điểm  $O$  được gọi là gốc tọa độ.
- Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$  và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

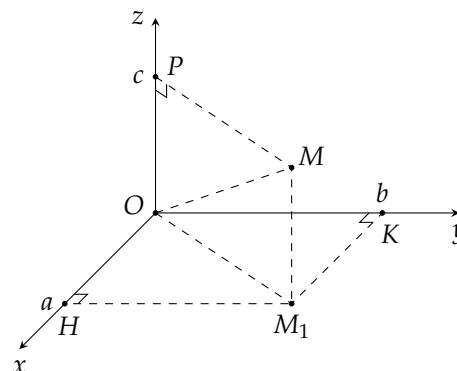


### 2 Tọa độ của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M$ . Tọa độ điểm  $M$  được xác định như sau:

- Xác định hình chiếu  $M_1$  của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxy$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm hoành độ  $a$ , tung độ  $b$  của điểm  $M_1$ .
- Xác định hình chiếu  $P$  của điểm  $M$  trên trục cao  $Oz$ , điểm  $P$  ứng với số  $c$  trên trục  $Oz$ . Số  $c$  là cao độ của điểm  $M$ .

Bộ số  $(a; b; c)$  là tọa độ của điểm  $M$  trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , kí hiệu là  $M(a; b; c)$ .



### 3 Tọa độ của véc-tơ

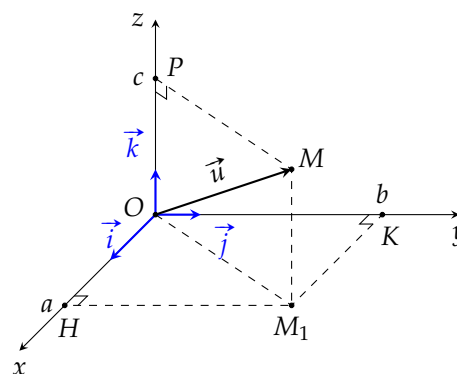
Trong không gian  $Oxyz$ :

- Tọa độ của điểm  $M$  là tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$ .
- Cho  $\vec{u}$ . Dựng điểm  $M(a; b; c)$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  thì tọa độ của điểm  $M$  là tọa độ của  $\vec{u}$ . Ta có

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



**!** Tọa độ các véc-tơ đơn vị lần lượt là:  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ vec tơ ta chú ý các kết quả sau:

- ①  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$       ②  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- ③  $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$  thì  $M(a; b; c).$       ④  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$
- ⑤ Chiếu điểm  $M(a; b; c)$  lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn:  $M(1; 2; 3)$  chiếu lên  $(Oxy)$  thì  $z = 0$ . Suy ra hình chiếu là  $M_1(1; 2; 0).$       ⑥ Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(3; -2; -1)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ . Tìm tọa độ của các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**Bài 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-2; 3; 4)$ . Gọi  $H, K, P$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tìm tọa độ của các điểm  $H, K, P$ .

**Bài 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$  và  $C(-1; -2; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của vec tơ  $\overrightarrow{AB}$ .
- b) Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

**Bài 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D'(2; 0; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ . Tọa độ của vec-tơ  $\vec{a}$  là

- A.  $(2; -3; -5).$       B.  $(2; 3; -5).$       C.  $(-2; 3; 5).$       D.  $(2; 3; 5).$

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{u}$  là

- A.  $(3; -1; 4)$ . B.  $(3; 4; -1)$ . C.  $(4; -1; 3)$ . D.  $(4; 3; -1)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc trục  $Oz$ ?

- A.  $M(1; 0; 0)$ . B.  $M(1; 0; 2)$ . C.  $M(1; 2; 0)$ . D.  $M(0; 0; -2)$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa  $\vec{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Tọa độ điểm  $M$  là

- A.  $M(0; 2; 1)$ . B.  $M(1; 2; 0)$ . C.  $M(2; 0; 1)$ . D.  $M(2; 1; 0)$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tọa độ điểm  $A$  là

- A.  $(1; 0; -2)$ . B.  $(0; 1; -2)$ . C.  $(0; -1; 2)$ . D.  $(1; -2; 0)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia  $Ox$  và  $OA = 2$ .

- A.  $A(0; 0; 2)$ . B.  $A(2; 2; 0)$ . C.  $A(0; 2; 0)$ . D.  $A(2; 0; 0)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia đối của tia  $Oy$  và  $OA = 3$ .

- A.  $A(0; 3; 0)$ . B.  $A(0; -3; 0)$ . C.  $A(0; -9; 0)$ . D.  $A(3; -3; 0)$ .

**Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; -2; 4)$ . Véc-tơ  $\vec{AB}$  có tọa độ là

- A.  $(2; 5; 6)$ . B.  $(4; 1; 2)$ . C.  $(2; -5; 6)$ . D.  $(-2; 5; 6)$ .

**Câu 9.** Cho hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $\vec{OA} = (2; -1; 3)$  và  $\vec{OB} = (5; 2; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{AB}$ .

- A.  $\vec{AB} = (2; -1; 3)$ . B.  $\vec{AB} = (3; 3; -4)$ . C.  $\vec{AB} = (7; 1; 2)$ . D.  $\vec{AB} = (3; -3; 4)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M$  và  $N$  biết  $M(2; 1; -1)$  và  $\vec{MN} = (-1; 2; -3)$ . Tọa độ  $N$  là

- A.  $N(1; -3; -4)$ . B.  $N(1; 3; -4)$ . C.  $N(-1; 3; -4)$ . D.  $N(1; 3; 4)$ .

**Câu 11.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; -4; 5)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm

- A.  $M(3; 0; 0)$ . B.  $M(0; -4; 5)$ . C.  $M(0; 0; 5)$ . D.  $M(3; 0; 5)$ .

**Câu 12.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1; 2; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm

- A.**  $M(0; 0; 3)$ .      **B.**  $N(1; 2; 0)$ .      **C.**  $Q(0; 2; 0)$ .      **D.**  $P(1; 0; 0)$ .

**Câu 13.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- A.**  $(2; 0; 0)$ .      **B.**  $(2; 1; 0)$ .      **C.**  $(0; 1; -3)$ .      **D.**  $(2; 0; -3)$ .

**Câu 14.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 2; 1)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

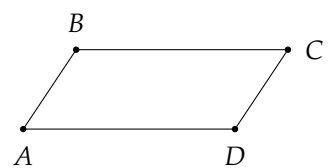
- A.**  $(0; 2; 1)$ .      **B.**  $(0; 2; 0)$ .      **C.**  $(3; 0; 0)$ .      **D.**  $(0; 0; 1)$ .

**Câu 15.** Hình chiếu của điểm  $M(2; 3; -2)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

- A.**  $(2; 0; 0)$ .      **B.**  $(0; 3; 0)$ .      **C.**  $(0; 0; -2)$ .      **D.**  $(2; 0; -2)$ .

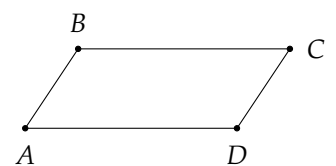
**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(6; 5; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

- A.**  $D(11; 2; 2)$ .      **B.**  $D(1; 8; 2)$ .  
**C.**  $D(11; 2; -2)$ .      **D.**  $D(1; 8; -2)$ .



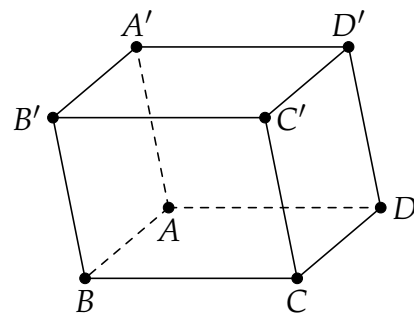
**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.**  $D(4; 2; 9)$ .      **B.**  $D(-2; 4; -5)$ .  
**C.**  $D(6; 2; -3)$ .      **D.**  $(-4; -2; 9)$ .



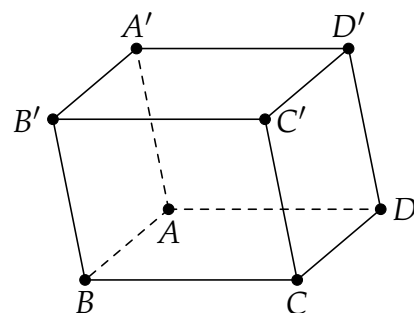
**Câu 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết rằng  $A(-3;0;0)$ ,  $B(0;2;0)$ ,  $D(0;0;1)$ ,  $A'(1;2;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $C'$ .

- A.  $(-13;4;4)$ . B.  $(13;4;4)$ .  
C.  $(7;4;4)$ . D.  $(10;4;4)$ .



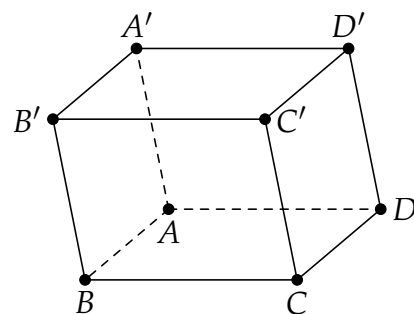
**Câu 19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  với các đỉnh  $A(-1;1;2)$ ,  $B(-3;2;1)$ ,  $D(0;-1;2)$ ,  $A'(2;1;2)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C'$ .

- A.  $C'(-3;1;3)$ . B.  $C'(0;1;0)$ .  
C.  $C'(1;0;1)$ . D.  $C'(-1;3;1)$ .



**Câu 20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  biết  $A(1;2;3)$ ,  $B'(2;0;-1)$ ,  $C(3;0;-3)$  và  $D'(-2;4;-3)$ . Tọa độ đỉnh  $B$  của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  là

- A.  $B(4;-1;1)$ . B.  $B(2;-1;2)$ .  
C.  $B(0;1;-3)$ . D.  $B(4;1;-1)$ .



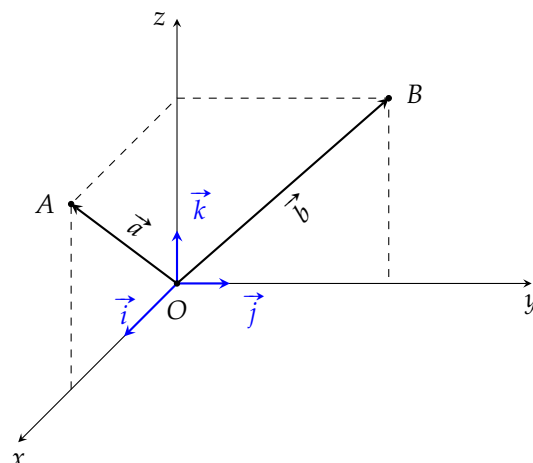
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$  và  $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$ , với  $m, n$  là tham số.

- a) Tọa độ  $\vec{a} = (1;3;-4)$ .  
b) Dựng điểm  $A$  thỏa  $\vec{OA} = \vec{a}$  thì  $A(1;-4;3)$ .  
c) Tồn tại giá trị của  $m$  và  $n$  để  $\vec{b} = \vec{0}$ .  
d) Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì  $m + n = 9$ .

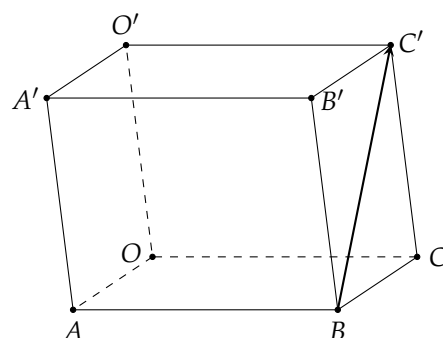
**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 0; 2)$ ,  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Đặt  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

- $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ .
- Toạ độ  $\vec{b} = (0; 2; 2)$ .
- Toạ độ  $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$ .
- Góc  $\widehat{AOB} = 45^\circ$ .



**Câu 23.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ .

- Toạ độ điểm  $C'$  là  $(2; -3; 6)$ .
- Toạ độ điểm  $O'$  là  $(3; -5; 5)$ .
- Toạ độ véc tơ  $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$ .
- Toạ độ véc tơ  $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$ .



DẠNG TOÁN

2

## Toạ độ hóa một số hình không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng toạ độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Toạ độ các điểm đặc biệt:

- $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$ .
- $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$ .
- $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$ .
- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$ .
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$ .
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$ .

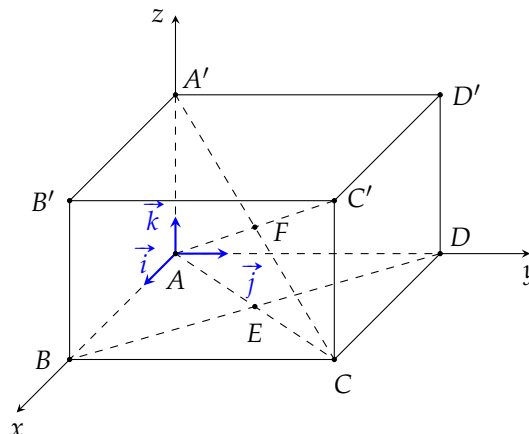
### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = 4$ ,  $OB = 6$ ,  $OC = 8$ .

- a) Xác định một hệ tọa độ với  $O$  là gốc tọa độ và các vectơ đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  theo thứ tự cùng hướng với  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ .
- b) Trong hệ tọa độ thiết lập ở câu a), tìm tọa độ các điểm  $A, B, C$  và điểm  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

## Bài 2.

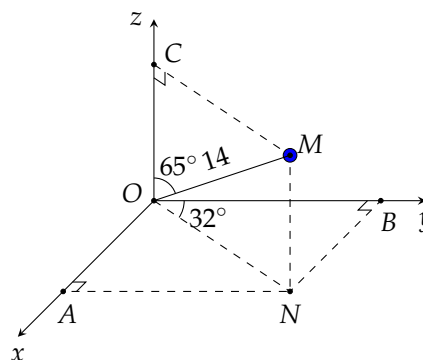
Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = AA' = 2, AD = 4$ . Gọi  $E$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $F$  là trung điểm  $AC'$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với  $A$ ), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm  $E, F$ .



 **Bài 3.** Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí  $A$  cách vị trí điều khiển 130 m về phía nam và 170 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 55 m. Flycam II ở vị trí  $B$  cách vị trí điều khiển 170 m về phía bắc và 216 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  là vị trí người điều khiển, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất, trục  $Ox$  có hướng trùng với hướng nam, trục  $Oy$  trùng với hướng đông, trục  $Oz$  vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam (làm tròn đến hàng đơn vị của mét) bằng bao nhiêu?

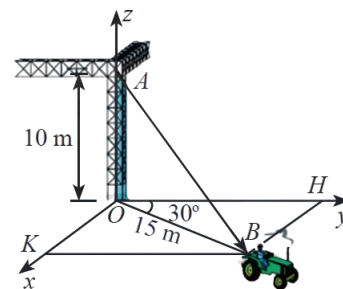
## Bài 4.

Một máy bay  $M$  đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như Hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay với  $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .



## Bài 5.

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp  $AB$  trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ  $Oxyz$  như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1(m). Tìm tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

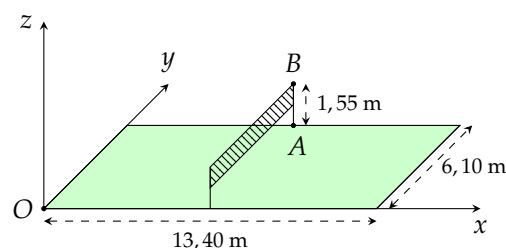


## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

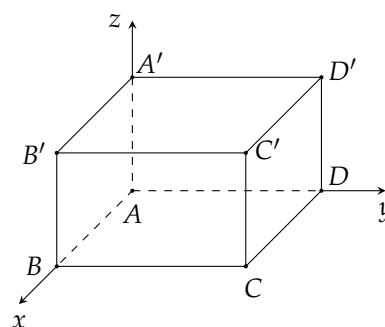
**Câu 1.** Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của  $B$ .

- A.  $(6, 1; 6, 7; 1, 55)$ .      B.  $(6, 7; 6, 1; 1, 55)$ .  
C.  $(6, 1; 0; 1, 55)$ .      D.  $(0; 6, 7; 1, 55)$ .



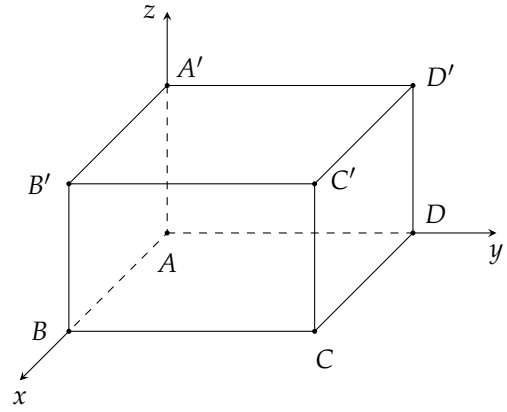
**Câu 2.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $B'$  là

- A.  $B'(0; 2; 0)$ .      B.  $B'(2; 2; 2)$ .  
C.  $B'(2; 2; 0)$ .      D.  $B'(2; 0; 2)$ .



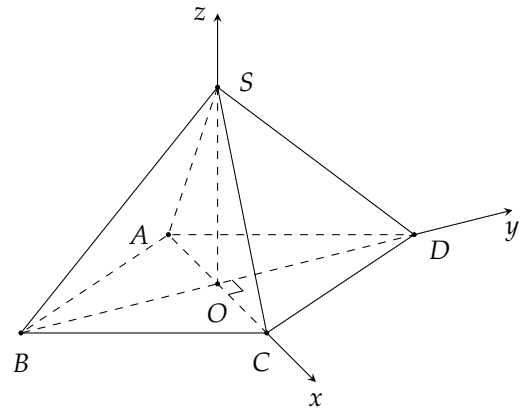
**Câu 3.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $C'$  là

- A.  $C'(2; 2; 0)$ . B.  $C'(2; 2; 2)$ .  
C.  $C'(0; 2; 0)$ . D.  $C'(2; 0; 2)$ .



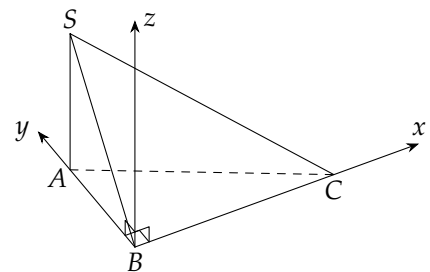
**Câu 4.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a\sqrt{2}$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{5}$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), tọa độ  $\vec{SC}$  là

- A.  $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$ . B.  $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$ .  
C.  $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$ . D.  $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$ .



**Câu 5.** Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $B$ ), tìm khẳng định sai.

- A.  $A(0; 2; 0)$ . B.  $B(0; 0; 0)$ .  
C.  $C(3; 0; 0)$ . D.  $S(-2; 2; 2)$ .



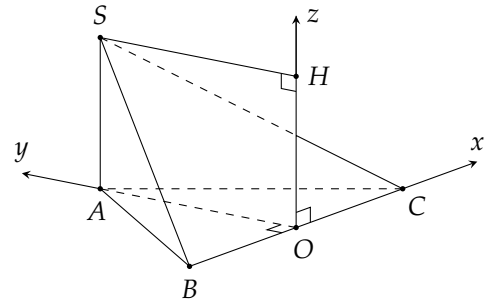
**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy tìm tọa độ điểm  $S$ .

A.  $S(0; 1; 1)$ .

B.  $S(0; 2; 1)$ .

C.  $S(0; 2\sqrt{3}; 1)$ .

D.  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .



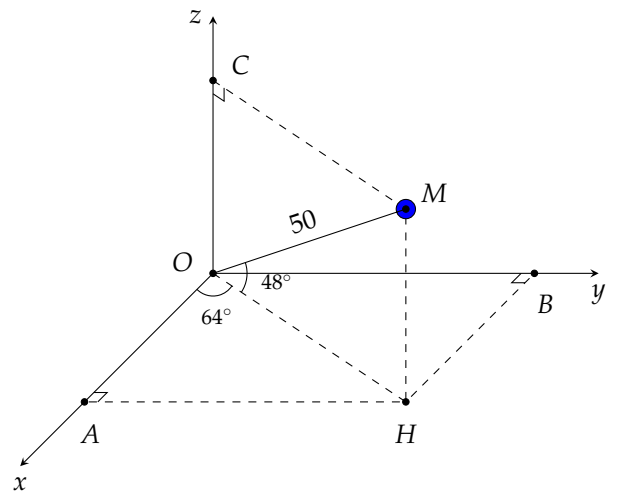
**Câu 7.** Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$  (làm tròn đến hàng phần chục).

A.  $M(13,8; 25,1; 37,2)$ .

B.  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .

C.  $M(14,7; 30,1; 27,2)$ .

D.  $M(13,8; 30,1; 32,2)$ .



**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 8.**

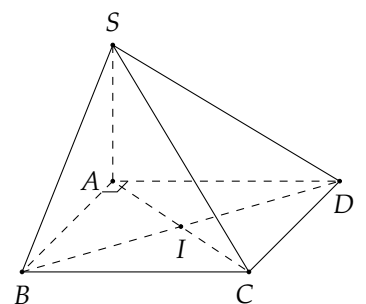
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $SA = 3$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như sau: Gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ , các véc tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ  $D(0; 2; 0)$ .

b) Tọa độ  $C(1; 2; 3)$ .

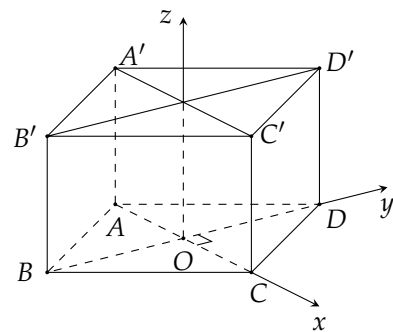
c) Tọa độ  $S(2; 0; 0)$ .

d) Tọa độ  $I(1; 1; 0)$ .



**Câu 9.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

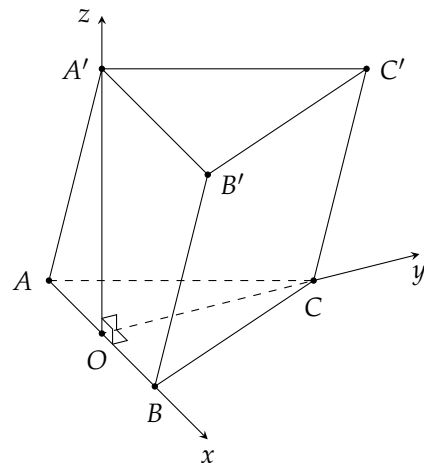
- a) Tọa độ  $A(-1;0;0)$ .      b)  $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$ .  
 c) Tọa độ  $D'(0;\sqrt{2};2)$ .      d)  $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$ .



**Câu 10.**

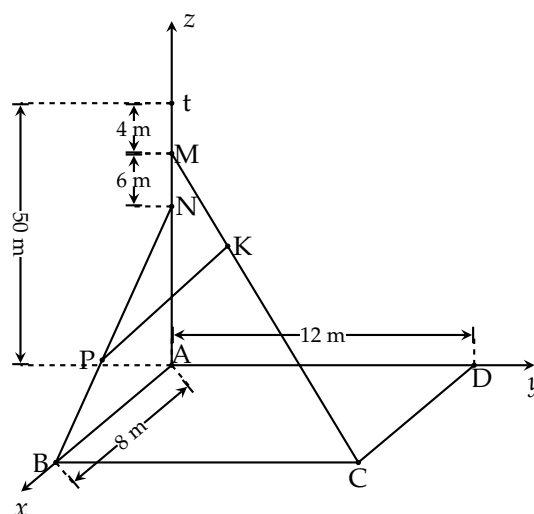
Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên  $(ABC)$  trùng với trung điểm cạnh  $AB$ , góc  $\widehat{A'AO} = 60^\circ$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm  $A(-1;0;0)$ .  
 b) Tọa độ điểm  $C(0;\sqrt{3};0)$ .  
 c) Tọa độ điểm  $A'(0;-1;\sqrt{3})$ .  
 d) Tọa độ điểm  $C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$ .



### Câu 11.

Một tháp phát sóng cao 50 m đặt ở góc  $A$  của sân hình chữ nhật  $ABCD$ . Để giữ cho tháp không bị đổ, người ta có cột rất nhiều dây cáp quanh tháp và cố định tại các vị trí trên mặt đất. Hai chú kiến vàng và kiến đen bắt đầu leo lên hai dây cáp  $CM$  và  $BN$  (từ  $C$  và  $B$ ) với vận tốc lần lượt là 3 m/phút và 2,5 m/phút (được mô hình hóa trong hệ trục tọa độ  $Axyz$  như hình vẽ bên). Xét trong thời gian 10 phút.



- a) Tọa độ của điểm  $N$  là  $(0; 0; 40)$ .
- b) Sau 10 phút, kiến vàng ở vị trí  $K$  với  $CK = 30$  m.
- c) Sau 10 phút, kiến đen ở vị trí  $P$  với  $BP = 24$  m.
- d) Sau 10 phút, kiến vàng và kiến đen cách nhau khoảng 6,93 m.

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{i} - 4\vec{k}$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{u}$  là

- A.  $(3; -2; 4)$ .      B.  $(-3; 2; -4)$ .      C.  $(2; -3; -4)$ .      D.  $(-3; 2; 4)$ .

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 3; -1)$  và  $B(-4; 1; 9)$ . Tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là

- A.  $(-1; 2; 4)$ .      B.  $(-6; -2; 10)$ .      C.  $(1; -2; -4)$ .      D.  $(6; 2; -10)$ .

**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; -1)$  và  $B(2; 3; 2)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- A.  $(3; 5; 1)$ .      B.  $(-1; -2; 3)$ .      C.  $(1; 2; 3)$ .      D.  $(3; 4; 1)$ .

**Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\overrightarrow{OA} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Tìm tọa độ điểm  $A$ .

- A.  $A(-2; 3; 0)$ .      B.  $A(0; -2; 3)$ .      C.  $A(-2; 0; 3)$ .      D.  $A(0; 2; -3)$ .

**Câu 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\overrightarrow{OM} = -\vec{j} + 5\vec{k}$ . Khi đó tọa độ điểm  $M$  là

- A.  $M(0; 1; -5)$ .      B.  $M(-1; -5; 0)$ .      C.  $M(0; -1; 5)$ .      D.  $M(-1; 0; 5)$ .

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $E(7; -7; -6)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $E$  lên trục  $Oz$ . Tọa độ điểm  $H$  là

- A.  $H(7; -7; 0)$ .      B.  $H(0; 0; -6)$ .      C.  $H(7; 0; -6)$ .      D.  $H(0; -7; -6)$ .

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(1; -1; 2)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  có tọa độ là

- A.  $(1; -1; 0)$ .      B.  $(0; 0; 2)$ .      C.  $(1; 0; 2)$ .      D.  $(0; -1; 0)$ .

**Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $B(8; 1; -9)$ . Tìm tọa độ hình chiếu của điểm  $B$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$ .

- A.  $(0; 1; -9)$ .      B.  $(8; 0; -9)$ .      C.  $(8; 0; 0)$ .      D.  $(8; 1; 0)$ .

**Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-2; 3; 1)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên trục  $Ox$  là điểm nào trong các điểm dưới đây?

- A.  $M_2(0; 3; 0)$ .      B.  $M_1(-2; 0; 0)$ .      C.  $M_4(2; -3; -1)$ .      D.  $M_3(0; 0; 1)$ .

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{u} = (4; 2; -1)$  và điểm  $A$ . Biết  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ . Tọa độ của điểm  $A$  là

- A.  $(4; 1; 2)$ .      B.  $(4; 2; 1)$ .      C.  $(4; 2; -1)$ .      D.  $(-4; 2; 1)$ .

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 4; 1)$  và  $B(4; 5; 2)$ . Điểm  $C$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$  có tọa độ là

- A.  $(2; 9; 3)$ .      B.  $(-2; -9; -3)$ .      C.  $(-6; -1; -1)$ .      D.  $(6; 1; 1)$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(6; 5; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

- A.  $D(11; 2; 2)$ .      B.  $D(1; 8; 2)$ .      C.  $D(1; 8; -2)$ .      D.  $D(11; 2; -2)$ .

**Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $E(-14; 1; -3)$ ,  $F(-9; -10; 5)$  và  $G(-9; 7; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $EFGD$  là hình bình hành.

- A.  $(-14; -16; 4)$ .      B.  $(4; 4; -6)$ .      C.  $(-14; 18; -10)$ .      D.  $(-32; -2; 0)$ .

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  với các đỉnh  $A(-1;1;2)$ ,  $B(-3;2;1)$ ,  $D(0;-1;2)$ ,  $A'(2;1;2)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C'$ .

A.  $C'(0;1;0)$ .

B.  $C'(-1;3;1)$ .

C.  $C'(1;0;1)$ .

D.  $C'(-3;1;3)$ .

**Câu 15.**

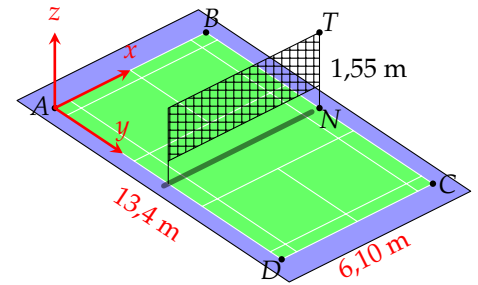
Sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế có chiều dài 13,4 mét, chiều rộng 6,10 mét, chiều cao lưới 1,55 mét. Ta chọn hệ trục  $Oxyz$  cho sân đó như hình bên dưới (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử  $NT$  là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{NT}$ .

A.  $\overrightarrow{NT} = (0;0;-1,55)$ .

B.  $\overrightarrow{NT} = (1;0;1,55)$ .

C.  $\overrightarrow{NT} = (0;0;1,55)$ .

D.  $\overrightarrow{NT} = (1;0;-1,55)$ .



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(4;2;1)$ ,  $B(2;0;m)$  ( $m$  là tham số) và  $\vec{u} = -2\vec{i} - 2\vec{k} + 3\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{u} = (-2;-2;3)$ .

b)  $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .

c) Khi  $m = 0$  thì điểm  $B$  thuộc trục hoành.

d) Khi  $m = 4$  thì  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

**Câu 2.**

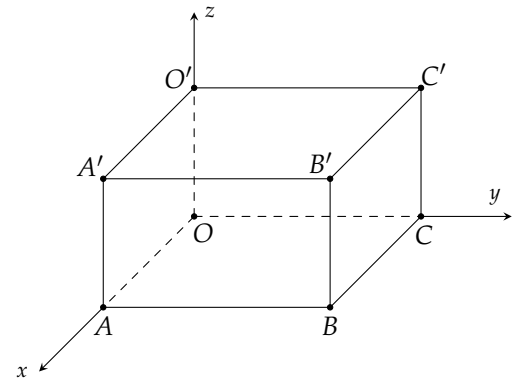
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $OABC.O'A'B'C'$  có ba đỉnh  $A$ ,  $C$ ,  $O'$  lần lượt nằm trên ba tia  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  và có ba cạnh  $OA = 6$ ,  $OB = 10$ ,  $OO' = 5$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $B(6;10;0)$ .

b)  $B'(8;6;5)$ .

c)  $\overrightarrow{OC'} = (6;8;5)$ .

d)  $\overrightarrow{BC'} = (-6;0;5)$ .



**Câu 3.**

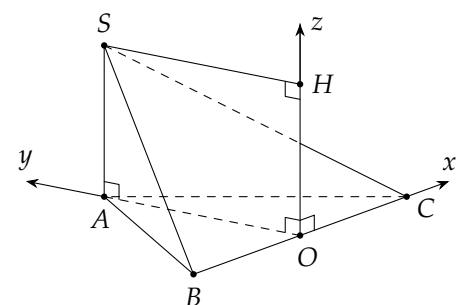
Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên dưới. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $C(2;0;0)$ .

b)  $\overrightarrow{OB} = (-1;0;0)$ .

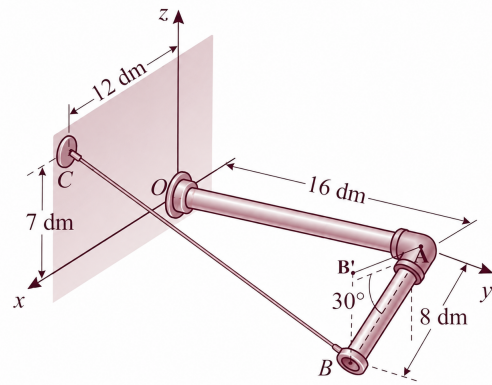
c)  $\overrightarrow{HS} = (1;\sqrt{3};0)$ .

d)  $S(0;\sqrt{3};1)$ .



**Câu 4.**

Một ống dẫn nước  $OAB$  được cố định vào một bức tường đồng thời được đặt trong hệ tọa độ  $Oxyz$  và có các kích thước như hình vẽ bên. Trong đó  $AB = 8$  dm, vuông góc với  $OA$  và nghiêng xuống dưới so với mặt phẳng ( $Oxy$ ) một góc  $30^\circ$ . Đầu  $B$  được giữ bằng dây  $BC$ , biết đơn vị mỗi trục là dm. Khi đó:



- Tọa độ điểm  $A$  là  $A(0; 16; 0)$ .
- Tọa độ điểm  $C$  là  $C(7; 0; 12)$ .
- Hình chiếu của điểm  $B$  trên mặt phẳng ( $Oxy$ ) là  $B'(4\sqrt{3}; 16; 0)$ .
- Độ dài dây  $BC$  là 22,63 (dm) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(2; 5; 4)$ . Điểm  $M'(a; b; c)$  đối xứng với  $M$  qua mặt phẳng ( $Oyz$ ). Giá trị  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(4; 2; -1)$ ,  $C(5; -2; 0)$ . Biết  $D(a; b; c)$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình bình hành, khi đó  $2a + b + c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

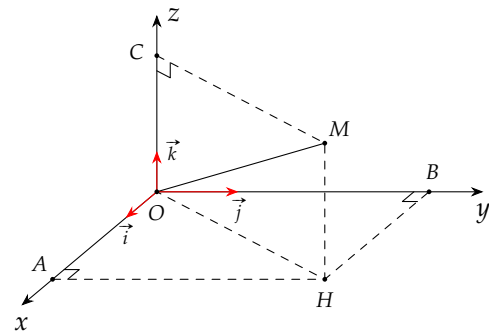
**Câu 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tọa độ các điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $C(3; -4; 1)$ ,  $B'(2; -1; 3)$ ,  $D'(0; 3; 5)$ . Giả sử tọa độ điểm  $A'(x; y; z)$ . Tính  $x + y + z$ .

KQ:

#### Câu 4.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng ( $Oxy$ ). Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Gọi tọa độ của điểm là  $M(a; b; c)$ , tính  $a + b + c$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

KQ:

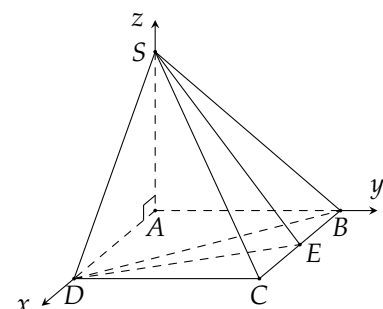


#### Câu 5.

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Góc giữa  $SC$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ . Đặt hình vào hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ, tọa độ trọng tâm tứ diện  $SCDE$  là  $G(x; y; z)$ . Tính

$$16^2 \cdot \frac{xyz^2}{a^4}.$$

KQ:

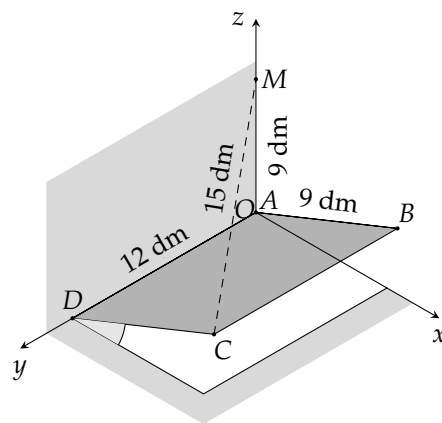


**Câu 6.** Một nắp bể nước hình chữ nhật  $ABCD$  nằm cạnh bờ tường có kích thước  $9\text{ dm} \times 12\text{ dm}$  được kéo ra từ mặt sàn. Do tác dụng của trọng lực nên nắp bể không thể mở ra được nếu không có người giữ. Người ta dùng một sợi dây xích dài  $15\text{ dm}$  và kéo căng nối đỉnh  $C$  của hình chữ nhật với điểm  $M$  nằm phía trên bờ tường sao cho  $AM = 9\text{ dm}$  và  $AM$  vuông góc với mặt sàn. Chọn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ, khi đó nắp bể mở ra với mặt sàn một góc  $\alpha$  (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng  $\text{dm}$ ). Bỏ qua độ dày của nắp bể. Tính số đo góc  $\alpha$  (tính theo đơn vị độ và làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

KQ:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

—HẾT—



# Bài 3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và số  $k$ . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

**!** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho 
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

### 2 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

#### CHÚ Ý

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ (với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

### 3 Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**!**  $\textcircled{1}$  Véc-tơ  $\vec{w}$  xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

② Quy ước  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  thì

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

③  $\vec{a}$  không cùng phương với  $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ .

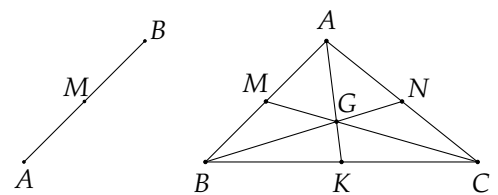
#### 4 Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, độ dài đoạn thẳng

① Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

② Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$



③ Độ dài đoạn  $AB$ :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 3)$ . Tìm tọa độ và tính độ dài của mỗi vectơ sau:

a)  $3\vec{a}$ ;

b)  $2\vec{a} - \vec{b}$ ;

c)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ .

**Bài 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ ,  $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$ .

a) Chứng minh  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

b) Tìm giá trị của  $m$  và  $n$  để véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{w}$  cùng phương.

**Bài 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(4; -2; 1)$ .

- a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $D$  biết  $ABCD$  là hình bình hành.
- c) Tìm tọa độ giao điểm  $E$  của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ .

**Bài 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(4; 2; -1)$ ,  $B(1; -1; 2)$  và  $C(0; -2; 3)$ .

- a) Tìm tọa độ của véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ .
- c) Tìm tọa độ điểm  $N$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$ , sao cho  $A, B, N$  thẳng hàng.

**Bài 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(5; -3; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(4; 1; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $N$  sao cho  $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$ .

**Bài 6.** Cho ba điểm  $A(0; 1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(1; -2; -5)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $BC$  sao cho  $MB = 3MC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian  $Oxyz$ .

**Câu 1.** Cho  $\vec{a} = (1; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; -4; 6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} = 2\vec{b}$ .      B.  $\vec{b} = 2\vec{a}$ .      C.  $\vec{b} = -2\vec{a}$ .      D.  $\vec{a} = -2\vec{b}$ .

**Câu 2.** Cho hai véc-tơ  $\vec{x} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{y} = (1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$ .

- A.  $\vec{a}(4; 1; -5)$ .      B.  $\vec{a}(4; 1; -1)$ .      C.  $\vec{a}(3; 1; -4)$ .      D.  $\vec{a}(0; 1; -1)$ .

**Câu 3.** Cho  $\vec{a} = (1; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

- A.  $\vec{u} = (-4; -2; 9)$ .      B.  $\vec{u} = (4; 2; -9)$ .      C.  $\vec{u} = (-4; -5; 9)$ .      D.  $\vec{u} = (1; 3; -11)$ .

**Câu 4.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{b}$  thỏa mãn biểu thức  $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$ .

- A.  $\vec{b} = (-2; 1; -1)$ .    B.  $\vec{b} = (-1; 2; -1)$ .    C.  $\vec{b} = (5; 2; 1)$ .    D.  $\vec{b} = (1; -2; 1)$ .

**Câu 5.** Cho vectơ  $\vec{a} = (1; -3; 4)$ . Vectơ nào sau đây cùng phương với  $\vec{a}$ ?

- A.  $\vec{b} = (-2; -6; 8)$ .    B.  $\vec{c} = (-2; 6; -8)$ .    C.  $\vec{d} = (-2; 6; 8)$ .    D.  $\vec{m} = (2; -6; -8)$ .

**Câu 6.** Cho hai điểm  $A(2; 3; 1)$  và  $B(3; 1; 5)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $AB = \sqrt{21}$ .    B.  $AB = 2\sqrt{3}$ .    C.  $AB = 2\sqrt{5}$ .    D.  $AB = \sqrt{13}$ .

**Câu 7.** Cho hai điểm  $M(3; -2; 1)$  và  $N(0; 1; -1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

- A.  $MN = \sqrt{17}$ .    B.  $MN = 22$ .    C.  $MN = \sqrt{22}$ .    D.  $MN = \sqrt{19}$ .

**Câu 8.** Cho hai điểm  $A(-1; 1; 2)$  và  $B(3; -5; 0)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $(1; -2; 1)$ .    B.  $(4; -6; 2)$ .    C.  $(2; -3; -1)$ .    D.  $(2; -4; 2)$ .

**Câu 9.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ . Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn  $AC$  là

- A.  $C(5; -3; 4)$ .    B.  $C(4; -3; 5)$ .    C.  $C(-1; 3; -2)$ .    D.  $C(2; 0; 1)$ .

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; -1; 3)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A.  $(1; 0; 1)$ .    B.  $(-1; 0; 1)$ .    C.  $(0; 1; 1)$ .    D.  $(1; 1; 0)$ .

**Câu 11.** Cho  $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ , điểm  $B(3; -4; 1)$  và  $C(2; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A.  $(1; -2; 3)$ .    B.  $(-1; 2; -3)$ .    C.  $(2; -2; 1)$ .    D.  $(-2; 2; -1)$ .

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Biết  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $G(1; 1; 1)$ . Khi đó điểm  $C$  có tọa độ là

- A.**  $(2; 2; 4)$ .      **B.**  $(-2; 0; 2)$ .      **C.**  $(-2; -3; -2)$ .      **D.**  $(2; 2; 0)$ .

**Câu 13.** Cho bốn điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(-1; 3; -4)$ ,  $D(2; 6; 0)$  tạo thành một hình tứ diện. Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$ . Tìm tọa độ trung điểm  $G$  của đoạn  $MN$ .

- A.**  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$ .      **B.**  $G(2; 4; 0)$ .      **C.**  $G(1; 2; 0)$ .      **D.**  $G(4; 8; 0)$ .

**Câu 14.** Cho hai điểm  $B(1; 2; -3)$ ,  $C(7; 4; -2)$ . Nếu  $E$  là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

- A.**  $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .      **B.**  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$ .      **C.**  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .      **D.**  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .

**Câu 15.** Cho các điểm  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(2; 1; 3)$  và  $M$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó điểm  $M$  có tọa độ là

- A.**  $(3; 2; 3)$ .      **B.**  $(3; -2; -3)$ .      **C.**  $(3; -2; 3)$ .      **D.**  $(3; 2; -3)$ .

**Câu 16.** Cho tọa độ các điểm  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; -2)$  và  $C(m; 1)$ . Tìm  $m$  để 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- A.**  $m = \frac{2}{5}$ .      **B.**  $m = \frac{1}{5}$ .      **C.**  $m = -\frac{1}{3}$ .      **D.**  $m = -\frac{1}{5}$ .

**Câu 17.** Cho ba điểm  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(0; 1; -1)$ ,  $C(x+2; y; -2)$  thẳng hàng. Tổng  $x+y$  bằng

A.  $\frac{7}{3}$ .

B.  $-\frac{8}{3}$ .

C.  $-\frac{2}{3}$ .

D.  $-\frac{1}{3}$ .

**Câu 18.** Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, biết  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

A.  $(0; -2; 0)$ .

B.  $(2; 2; 2)$ .

C.  $(2; 0; 2)$ .

D.  $(2; -2; 2)$ .

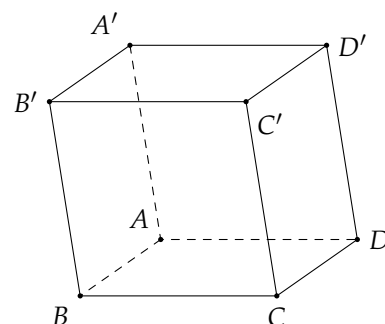
**Câu 19.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ,  $D(0; 2a; 0)$ ,  $A'(0; 0; 2a)$ ,  $a \neq 0$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AC'$ .

A.  $|a|$ .

B.  $2|a|$ .

C.  $3|a|$ .

D.  $\frac{3|a|}{2}$ .



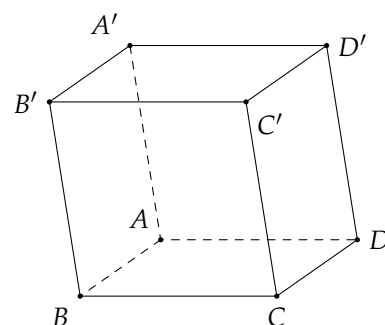
**Câu 20.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 1)$ ,  $B'(1; 0; 0)$ ,  $C'(1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$ .

A.  $D(0; -1; 1)$ .

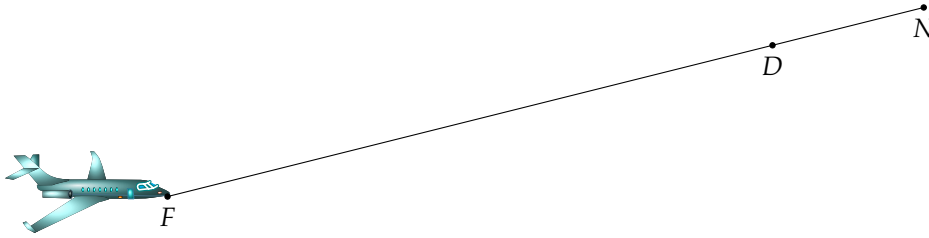
B.  $D(0; 1; 1)$ .

C.  $D(0; 1; 0)$ .

D.  $D(1; 1; 1)$ .



**Câu 21.** Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $F(186; 59; 7)$  đến điểm  $D(265; 282; 7)$  trong 36 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay sau 6 phút tiếp theo thì tọa độ của máy bay lúc này là  $N(a; b; c)$ . Kết quả của phép tính  $\frac{a+b+c}{2025}$  (làm tròn đến hàng phần mười) bằng bao nhiêu?



A. 0,4.

B. 0,5.

C. 0,3.

D. 0,6.

**Câu 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm  $A(-2; 1; 5)$  và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (0; -2; 6)$  với tốc độ là  $4 \text{ m/s}$  (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Giả sử sau  $5 \text{ (s)}$  kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm  $M$ . Gọi toạ độ  $M(a; b; c)$ . Tính  $a + 3b + c$ .

A. 8.

B.  $2\sqrt{10}$ .

C. 6.

D.  $6 - 12\sqrt{10}$ .



**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 23.** Cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

a)  $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$ .

b)  $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$ .

c)  $\vec{AB} = 3\vec{AC}$ .

d) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

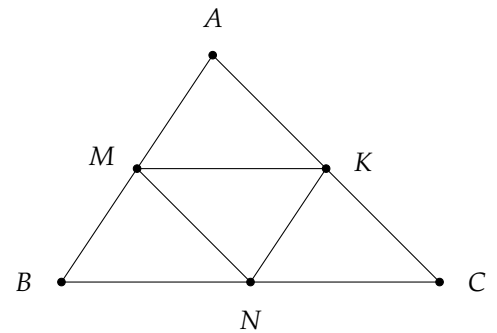
**Câu 24.** Cho các điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 2; 0)$ ,  $C(3; -2; -1)$ .

- a) Điểm  $B$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$ .
- b) Các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.
- c) Hình chiếu của điểm  $A$  trên trục  $Oz$  là  $A'(0; 2; 3)$ .
- d) Nếu vectơ  $\vec{u} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (-10; 8; 9)$  thì  $x + 2y + z = 1$ .

### Câu 25.

Cho ba điểm  $A(3; 3; -6)$ ,  $B(1; 3; 2)$  và  $C(-1; -3; 1)$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ .

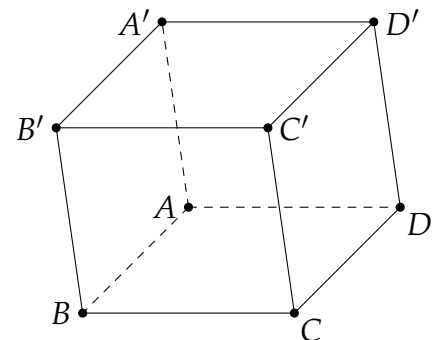
- a) Tọa độ  $M(2; 3; 2)$ .
- b) Với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $GC = 2\sqrt{5}$ .
- c) Trọng tâm tam giác  $MNK$  là  $E(1; 1; -1)$ .
- d) Với  $D(-3; -3; 9)$  thì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.



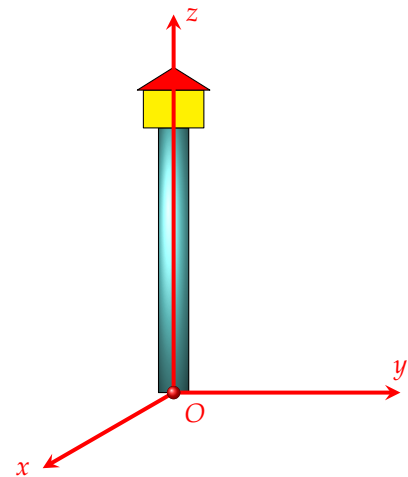
### Câu 26.

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết điểm  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D'(-1; 3; 5)$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là tâm của các hình bình hành  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$ .

- a) Tọa độ  $D(0; 2; 0)$ .
- b) Tọa độ  $A'(-1; 1; 5)$ .
- c) Tọa độ  $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$ .
- d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$ .



**Câu 27.** Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 69 m sử dụng radar có phạm vi theo dõi 320 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất sao cho trục  $Ox$  hướng về phía tây, trục  $Oy$  hướng về phía nam, trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên phía trên (Hình bên) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí  $C$  cách mặt đất 16 km, cách 200 km về phía đông và 208 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:



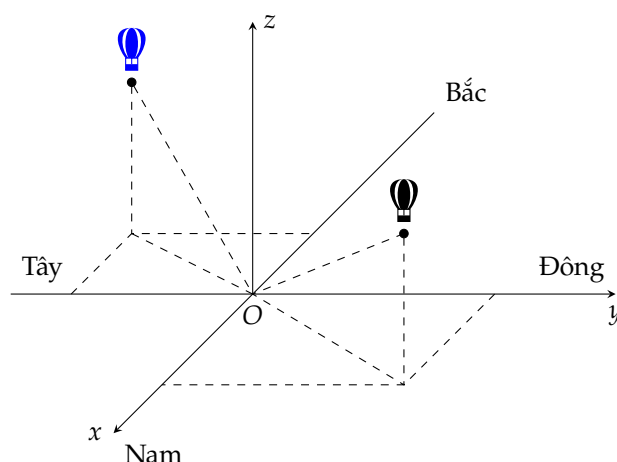
- Vị trí  $C$  có tọa độ  $(-200; -208; -16)$ .
- Vị trí của radar có tọa độ là  $(0; 0; 0,069)$ .
- Khoảng cách từ máy bay đến radar xấp xỉ bằng 293,38 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Radar của trung tâm kiểm soát không lưu phát hiện được máy bay tại vị trí  $C$ .

**Câu 28.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; 4; -5)$ ,  $C(2; 0; 0)$ :

- Góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ .
- Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1; -3; 2)$ .
- Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  $G\left(2; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .
- Tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

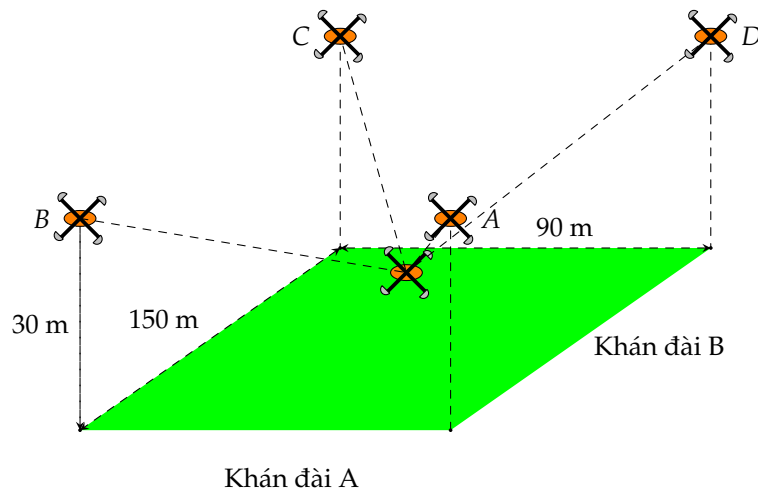
**Câu 29.** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (hình bên), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là  $(2; 1; 0,5)$ .
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là  $(-1,5; -1; 0,8)$ .
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng  $\sqrt{21}$  km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Câu 30.** Một sân vận động hình chữ nhật có chiều dài 150 m, chiều rộng 90 m. Để ghi hình một trận đấu, người ta lắp đặt một hệ thống flycam gồm 4 flycam, ban đầu đặt tại bốn điểm  $A, B, C, D$  nằm trên 4 đường thẳng vuông góc với sân tại 4 góc sân vận động và cách đều mặt đất 30 m, (tham khảo hình vẽ).



Biết bốn flycam này có thể di chuyển đến các vị trí bất kỳ và được kết nối với một thiết bị điều khiển trung tâm đặt tại điểm  $O$  cách tâm của sân vận động theo phương thẳng đứng là 15 m. Xây dựng hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , đơn vị độ dài trên mỗi trục tính bằng mét, trong đó

- Gốc tọa độ  $O$  trùng với thiết bị điều khiển.
- Trục  $Ox$  song song với chiều dài sân, chiều dương hướng về phía khác đài  $A$ .
- Trục  $Oy$  song song với chiều rộng sân, chiều dương hướng về phía khác đài  $B$ .
- Trục  $Oz$  theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên.

a)  $A(75; 45; 15)$ ,  $B(75; -45; 15)$ ,  $C(-75; -45; 15)$ ,  $D(-75; 45; 15)$ .

b) Giả sử ban đầu flycam 1 được điều khiển đến vị trí  $I(40; 30; 25)$ . Khoảng cách từ flycam 1 đến thiết bị điều khiển trung tâm  $O$  bằng  $5\sqrt{71}$ .

c) Từ điểm  $I$ , flycam 1 tiếp tục di chuyển theo hướng vector  $\vec{u} = (-1; 2; -1)$  với quãng đường là 9 m đến vị trí  $K$  để quay một tình huống trên sân. Tọa độ điểm  $K(37; 34; 19)$ .

d) Một cầu thủ đang đứng trong sân tại điểm  $G$  cách đường biên dọc (chiều dài của sân) của hướng đối diện với khán đài  $B$  sân vận động một khoảng bằng  $\frac{1}{5}$  chiều rộng sân và tạo với flycam 1 (đang ở vị trí  $K$ ) một góc  $45^\circ$  so với mặt sân. Tọa độ điểm  $G(37 - \sqrt{578}; -18; -15)$ .

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{d} = (1; 7; -3)$ .

- Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ .
- Tính  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Chứng minh  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

**Bài 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (-4; 3; m)$ .

- Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .

**Bài 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 3)$  và  $C(-2; 1; 2)$ .

- Chỉ ra tọa độ một vec-tơ (khác  $\vec{0}$ ) vuông góc với hai vec-tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ .
- Tính chu vi tam giác  $ABC$ .
- Tính  $\cos \widehat{BAC}$ .
- Tìm độ dài đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(0; 1; -2)$ ;  $B(3; 0; 0)$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Oz$ . Biết  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

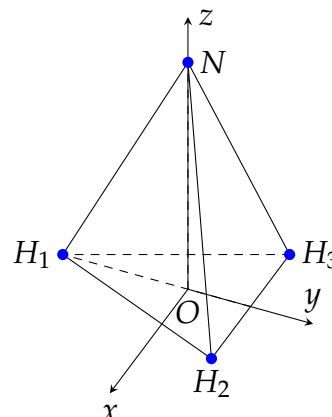
**Bài 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m-1; 2)$ . Với những giá trị nào của  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ ?

**Bài 6.** Cho hai điểm  $A(2, -1, 1); B(3, -2, -1)$ . Tìm điểm  $N$  trên trục  $Ox$  cách đều  $A$  và  $B$ .

**Bài 7.**

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac ( $\text{NH}_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen ( $N$ ) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen ( $H$ ). Góc tạo bởi liên kết  $H - N - H$ , có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối  $N$  với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $\text{NH}_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

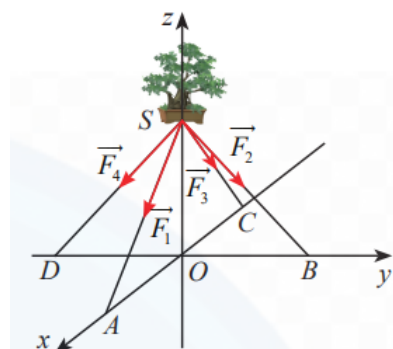
Trong không gian  $Oxyz$ , cho một phân tử  $\text{NH}_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$  (Hình bên).



- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

**Bài 8.**

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20; 0; 0), B(0; 20; 0), C(-20; 0; 0), D(0; -20; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn  $40(\text{N})$  và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm toạ độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (3; 0; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; 0)$  là

- A. 0.                      B. 6.                      C. 8.                      D. -6.

**Câu 2.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  và  $\vec{v} = (0; 1; -2)$  bằng

- A. -4.                      B. 0.                      C. 4.                      D. -2.

**Câu 3.** Cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 2; 1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ .

- A.  $-1$ . B.  $-2$ . C.  $2$ . D.  $1$ .

**Câu 4.** Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .

- A. 480 (J). B. 530 (J). C. 510 (J). D. 500 (J).

**Câu 5.** Góc giữa hai véc-tơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  bằng

- A.  $60^\circ$ . B.  $120^\circ$ . C.  $150^\circ$ . D.  $30^\circ$ .

**Câu 6.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (0; -1; 0)$ . Góc hợp bởi hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng

- A.  $60^\circ$ . B.  $45^\circ$ . C.  $135^\circ$ . D.  $120^\circ$ .

**Câu 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}(-2; -3; 1)$  và  $\vec{b}(1; 0; 1)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

- A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ . B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ .  
C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$ . D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ .

**Câu 8.** Cho  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 2; -4)$ . Giá trị của  $|\vec{a} - \vec{b}|$  bằng

- A.  $5\sqrt{2}$ . B. 50. C.  $2\sqrt{5}$ . D. 3.

**Câu 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 0; 2)$  và  $\vec{v} = (x; -2; 1)$ . Biết rằng  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ . Khi đó  $|\vec{v}|$  bằng

- A.  $\sqrt{21}$ . B. 2. C. 3. D. 5.

**Câu 10.** Tìm  $x$  để hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$  và  $\vec{b} = (x; 1; -2)$  vuông góc với nhau.

**A.**  $x = 3$ .

**B.**  $x = 1$ .

**C.**  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ .

**D.**  $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ .

**Câu 11.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ?

**A.**  $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$ .

**B.**  $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$ .

**C.**  $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$ .

**D.**  $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$ .

**Câu 12.** Tích có hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (-1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (0; 4; -3)$  có tọa độ là

**A.**  $(-6; 3; -4)$ .

**B.**  $(6; -3; 4)$ .

**C.**  $(6; 3; 4)$ .

**D.**  $(-6; -3; -4)$ .

**Câu 13.** Cho  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(-2; 2; -6)$ ,  $C(6; 0; -1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

**A.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$ .

**B.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$ .

**C.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$ .

**D.**  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$ .

**Câu 14.** Cho  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(2; -4; 1)$ ,  $C(2; 0; 2)$ , khi đó tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  bằng

**A.** 4.

**B.** -1.

**C.** 7.

**D.** -5.

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(8; 9; 2)$ ,  $B(3; 5; 1)$ ,  $C(11; 10; 4)$ . Số đo góc  $A$  của tam giác  $ABC$  là

- A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $150^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

**Câu 16.** Cho điểm  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(m; 2; 7)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để độ dài đoạn  $AB = 7$ .

- A.**  $m = 3$  hoặc  $m = -3$ .                      **B.**  $m = 9$  hoặc  $m = -3$ .  
**C.**  $m = -3$  hoặc  $m = -9$ .                      **D.**  $m = 9$  hoặc  $m = 3$ .

**Câu 17.** Cho ba điểm  $A(3; 2; 8)$ ,  $B(0; 1; 3)$  và  $C(2; m; 4)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

- A.**  $m = 4$ .                      **B.**  $m = -10$ .                      **C.**  $m = 25$ .                      **D.**  $m = -1$ .

**Câu 18.** Cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m - 1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

- A.**  $m = 0$ .                      **B.**  $m = -4$ .                      **C.**  $m = 2$ .                      **D.**  $m = -6$ .

**Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- A.**  $H(3; 4; 6)$ .                      **B.**  $H(-3; 4; 7)$ .                      **C.**  $H(2; 4; 1)$ .                      **D.**  $H(2; -4; 3)$ .

**Câu 20.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Gọi  $M(0; 0; z)$  là điểm thuộc trục  $Oz$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.**  $z \in (0; 1]$ .      **B.**  $z \in (1; 2]$ .      **C.**  $z \in (-1; 0]$ .      **D.**  $z \in (-2; -1]$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

- a)**  $|\vec{a}| = 2$ .      **b)**  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .      **c)**  $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .      **d)**  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .

**Câu 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-1; 3; 0)$ ,  $B(1; 2; -1)$ ,  $C(1; 1; -2)$ .

- a)**  $\vec{AB} = (2; -1; -1)$ .      **b)**  $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

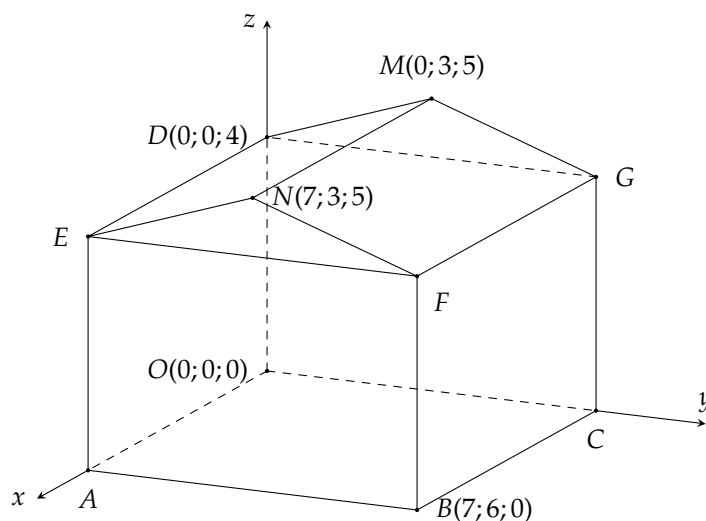
- c) Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng  $2\sqrt{2}$ .      d) Tọa độ của điểm  $D$  là  $(-1; 2; -1)$ .

**Câu 23.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; 4; -5)$ ,  $C(2; 0; 0)$ :

- a) Góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ .  
b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1; -3; 2)$ .  
c) Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  $G\left(2; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .  
d) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

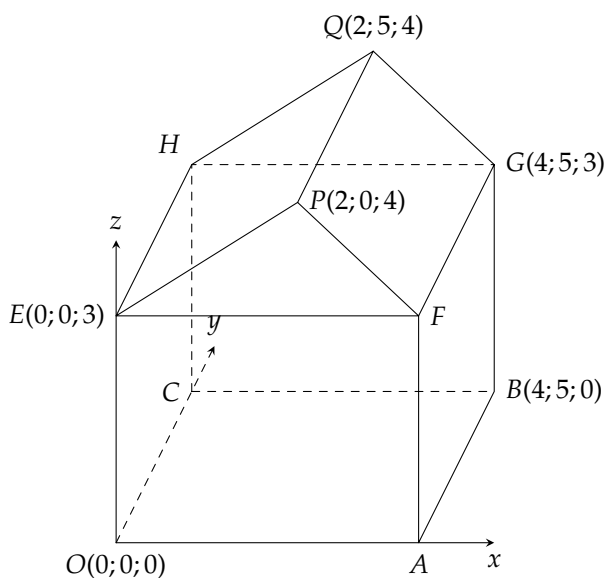
**Câu 24.** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó  $OABC.DEFG$  là hình hộp chữ nhật,  $EFN.DGM$  là hình lăng trụ đứng và các điểm có tọa độ như hình vẽ.

- a) Điểm  $F$  có tọa độ là  $(7; 6; 4)$ .  
b) Độ dài  $FN = \sqrt{10}$ .  
c) Tích vô hướng  $\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{FE} = -18$ .  
d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGMN)$  và  $(FGDE)$  bằng  $20,4^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



**Câu 25.** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- Tọa độ của các điểm  $A(5;0;0)$ .
- Tọa độ của các điểm  $H(0;5;3)$ .
- Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng  $26,6^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
- Chiều cao của ngôi nhà là 4.



# Chương 3

## CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

### Bài



## KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TƯ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Khoảng biến thiên

⚙ **Định nghĩa:** Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

|        |              |              |         |                  |         |                  |
|--------|--------------|--------------|---------|------------------|---------|------------------|
| Nhóm   | $[u_1; u_2)$ | $[u_1; u_2)$ | $\dots$ | $[u_p; u_{p+1})$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
| Tần số | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_p$            | $\dots$ | $n_k$            |

Nếu  $n_1$  và  $n_k$  cùng khác 0 thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$R = u_{k+1} - u_1$$

⚙ **Ý nghĩa:** Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

#### 2 Khoảng tứ phân vị

Nhắc lại công thức tính tứ phân vị thứ  $r$ :

$$Q_r = u_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1})}{u_p} (u_{p+1} - u_p)$$

Trong đó  $[u_p; u_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$ , với  $r = 1, 2, 3$ .

⚙ **Định nghĩa:** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $\Delta_Q$ , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  và tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

### Ý nghĩa:

- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- ✓ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị  $x$  trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu  $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$  hoặc  $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$ .
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

### Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- ① Xác định  $u_1$  là giá trị đầu mút trái của nhóm đầu tiên và  $u_{k+1}$  là giá trị đầu mút phải của nhóm cuối cùng có chứa dữ liệu (tần số khác 0).

- ② Khoảng biến thiên

$$R = u_{k+1} - u_1$$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Bảng sau thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

| Thời gian (phút)         | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày tập của bác Bình | 5        | 12       | 8        | 3        | 2        |
| Số ngày tập của bác An   | 0        | 25       | 5        | 7        | 0        |

- Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.
- Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết bác nào có thời gian tập phân tán hơn.

**Bài 2.** Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như bảng sau:

| Thời gian sử dụng (phút) | [0; 10) | [10; 30) | [30; 60) | [60; 90) |
|--------------------------|---------|----------|----------|----------|
| Số học sinh Tổ 1         | 2       | 4        | 3        | 1        |
| Số học sinh Tổ 2         | 5       | 1        | 3        | 0        |

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh. Căn cứ vào đó,

nhận xét thời gian sử dụng mạng xã hội của các bạn Tổ nào phân tán hơn.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau:

|             |         |          |          |          |           |
|-------------|---------|----------|----------|----------|-----------|
| Thời gian   | [0; 20) | [20; 40) | [40; 60) | [60; 80) | [80; 100) |
| Số học sinh | 5       | 9        | 12       | 10       | 6         |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 80.                      B. 60.                      C. 100.                      D. 12.

**Câu 2.** Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau:

|                |         |          |          |          |          |
|----------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Mức thưởng tết | [5; 10) | [10; 15) | [15; 20) | [20; 25) | [25; 30) |
| Số nhân viên   | 13      | 35       | 47       | 25       | 10       |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 20.                      B. 25.                      C. 47.                      D. 23.

**Câu 3.** Thời gian truy cập Internet mỗi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

|                  |             |              |              |              |              |
|------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Thời gian (phút) | [9,5; 12,5) | [12,5; 15,5) | [15,5; 18,5) | [18,5; 21,5) | [21,5; 24,5) |
| Số học sinh      | 0           | 12           | 15           | 24           | 26           |

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 26.                      B. 14.                      C. 15.                      D. 12.

DẠNG TOÁN

2

### Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

① Tìm tứ phân vị  $Q_1$  và  $Q_3$  theo công thức:

$$Q_r = u_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (n_1 + \dots + n_{p-1})}{n_p} \cdot (u_{p+1} - u_p),$$

trong đó  $[u_p; u_{p+1})$  là nhóm chứa tứ phân vị thứ  $r$  với  $r = 1, 3$ ;  $n$  là cỡ mẫu.

② Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là  $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 1.** Cho bảng số liệu ghép nhóm về cân nặng của 50 quả xoài:

|              |            |            |            |            |            |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Cân nặng (g) | [250; 290) | [290; 330) | [330; 370) | [370; 410) | [410; 450) |
| Số quả xoài  | 3          | 13         | 18         | 11         | 5          |

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

**Bài 2.** Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

| Chiều cao (cm)          | [145; 150) | [150; 155) | [155; 160) | [160; 165) | [165; 170) | [170; 175) |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số học sinh của lớp 12A | 1          | 0          | 15         | 12         | 10         | 5          |
| Số học sinh của lớp 12B | 0          | 0          | 17         | 10         | 9          | 6          |

- Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh lớp 12A, 12B.
- Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

**Bài 3.** Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

| Thời gian(phút) | [15; 18) | [18; 21) | [21; 24) | [24; 27) | [27; 30) | [30; 33) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số lần          | 22       | 38       | 27       | 8        | 4        | 1        |

- Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)
- Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết 32 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

**Bài 4.**

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười nếu cần).

**!** Tần số tích lũy của nhóm thứ  $m$  chính bằng  $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ . Trong đó,  $n_1, n_2, \dots, n_m$  lần lượt là tần số của nhóm thứ 1, thứ 2, ..., thứ  $m$ .

| Nhóm     | Tần số   | Tần số tích lũy |
|----------|----------|-----------------|
| [40; 45) | 5        | 5               |
| [45; 50) | 10       | 15              |
| [50; 55) | 7        | 22              |
| [55; 60) | 9        | 31              |
| [60; 65) | 7        | 38              |
| [65; 70) | 4        | 42              |
|          | $n = 42$ |                 |

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho bảng số liệu ghép nhóm về cân nặng của các học sinh:

| Cân nặng    | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số học sinh | 2        | 10       | 16       | 8        | 2        | 2        |

Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu ghép nhóm trên là

- A. 17.                      B. 14.5.                      C. 14.                      D. 17.5.

**Câu 2.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

|           |        |        |         |          |          |
|-----------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Doanh thu | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) | [11; 13) | [13; 15) |
| Số ngày   | 2      | 7      | 7       | 3        | 1        |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

**A.**  $\frac{25}{7}$ .

**B.**  $\frac{13}{7}$ .

**C.**  $\frac{20}{7}$ .

**D.**  $\frac{55}{7}$ .

**Câu 3.** Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

|          |        |        |        |        |         |
|----------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Điểm     | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
| Học viên | 10     | 30     | 55     | 42     | 9       |

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là (làm tròn đến hàng phần trăm)

**A.** 2,92.

**B.** 2,93.

**C.** 3,93.

**D.** 3,92.

**Câu 4.** Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

|                           |        |        |        |        |         |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Thời gian luyện tập (giờ) | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
| Số vận động viên          | 3      | 8      | 12     | 12     | 4       |

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

**A.** 4,52.

**B.** 3,35.

**C.** 2,85.

**D.** 3,36.

**Câu 5.** Ở một phòng điều trị nội trú của bệnh viện, dữ liệu thống kê thời gian ngủ hằng đêm của một bệnh nhân trong suốt một tháng được tổng hợp bởi bảng dưới đây

| Thời gian (phút) | Tần số | Tần số tích lũy |
|------------------|--------|-----------------|
| [180; 240)       | 2      | 2               |
| [240; 300)       | 9      | 11              |
| [300; 360)       | 12     | 23              |
| [360; 420)       | 5      | 28              |
| [420; 480)       | 2      | 30              |

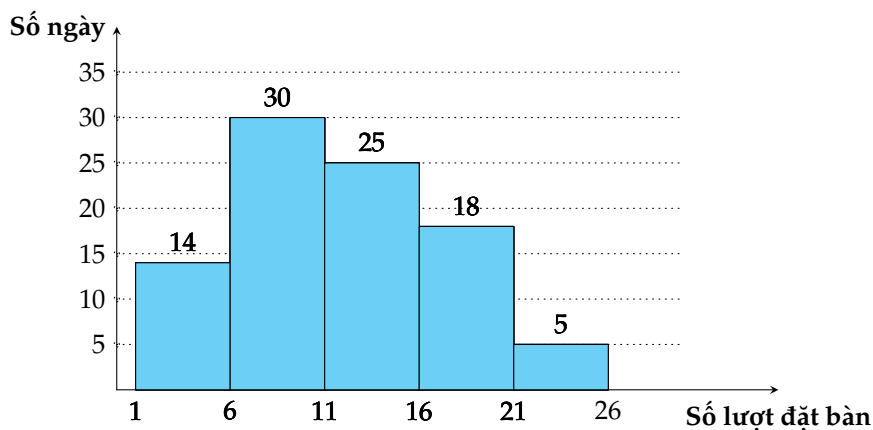
A. 75,53.

B. 84,83.

C. 80,83.

D. 72,53.

**Câu 6.** Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

A. 9,5.

B. 8,5.

C. 10,5.

D. 7,5.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 7.** Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

|               |            |            |            |            |            |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Chiều cao (m) | [8,4; 8,6) | [8,6; 8,8) | [8,8; 9,0) | [9,0; 9,2) | [9,2; 9,4) |
| Số cây        | 5          | 12         | 25         | 44         | 14         |

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là  $R = 1$ .

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là  $Q_1 = 8$ .

- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là  $\Delta Q = 0,286$ .
- d) Biết rằng trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Chiều cao của cây keo này là giá trị ngoại lệ.

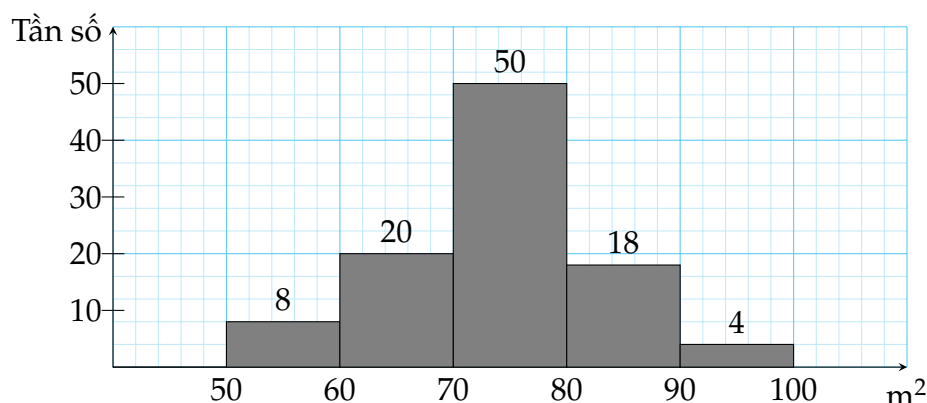
### Câu 8.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

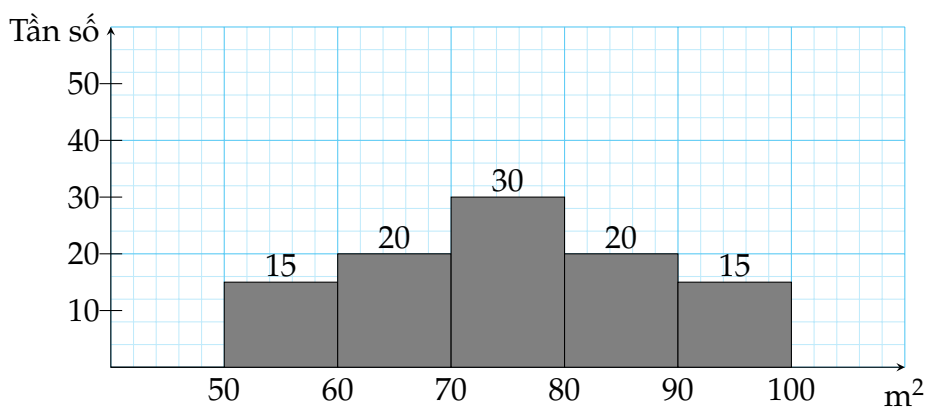
- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là  $R = 25$ .
- b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là  $Q_1 = 15$ .
- c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là  $Q_3 = 27$ .
- d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là  $\Delta Q = 12$ .

| Nhóm     | Tần số   |
|----------|----------|
| [10; 15) | 15       |
| [15; 20) | 18       |
| [20; 25) | 10       |
| [25; 30) | 10       |
| [30; 35) | 5        |
| [35; 40) | 2        |
|          | $n = 60$ |

**Câu 9.** Điều tra một số hộ gia đình thu nhập ở mức trung bình sinh sống trên hai địa bàn A, B, người ta thấy diện tích nhà ở của họ đều nhỏ hơn  $100 \text{ m}^2$ . Hai biểu đồ dưới biểu diễn kết quả thống kê.



Hình 3.3a. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn A



Hình 3.3b. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn B

- Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu này bằng nhau.
- Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương A là 10,9.
- Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương B là 8,5..
- Số liệu về diện tích nhà ở của cư dân thuộc địa bàn A phân tán hơn địa bàn B.

**Câu 10.** Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

| Nhóm (Tuổi thọ) | Giới tính |    |
|-----------------|-----------|----|
|                 | Nam       | Nữ |
| [50; 55)        | 4         | 3  |
| [55; 60)        | 7         | 4  |
| [60; 65)        | 4         | 5  |
| [65; 70)        | 6         | 3  |
| [70; 75)        | 15        | 7  |
| [75; 80)        | 12        | 14 |
| [80; 85)        | 2         | 13 |
| [85; 90)        | 0         | 1  |

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 50.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 14,75.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nữ giới là 15.
- Dựa vào khoảng tứ phân vị thì tuổi thọ trung bình của nam giới đều hơn tuổi thọ trung bình của nữ giới.

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | $\dots$ | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|---------|------------------|
| Giá trị đại diện | $c_1$        | $c_2$        | $\dots$ | $c_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | $\dots$ | $n_k$            |

### 1 Phương sai

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S^2$ , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2]$$

Trong đó:

- ✓  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  là cỡ mẫu;
- ✓  $\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k)$  là số trung bình.

### 2 Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $S$ , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là  $S = \sqrt{S^2}$ .

### 3 Ý nghĩa

- ✓ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- ✓ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.



a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1 c_1^2 + n_2 c_2^2 + \dots + n_k c_k^2) - \bar{x}^2.$$

b) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} [n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2].$$

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG TOÁN

1

### Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

| Nhóm             | $[u_1; u_2)$ | $[u_2; u_3)$ | ... | $[u_k; u_{k+1})$ |
|------------------|--------------|--------------|-----|------------------|
| Giá trị đại diện | $c_1$        | $c_2$        | ... | $c_k$            |
| Tần số           | $n_1$        | $n_2$        | ... | $n_k$            |

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên được tính bằng công thức

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k)$$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

| Cân nặng (g)           | $[150; 155)$ | $[155; 160)$ | $[160; 165)$ | $[165; 170)$ | $[170; 175)$ |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Số quả cam ở lô hàng A | 2            | 6            | 12           | 4            | 1            |
| Số quả cam ở lô hàng B | 1            | 3            | 7            | 10           | 4            |

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau:

|             |          |          |          |          |          |          |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Cân nặng    | [30; 40) | [40; 50) | [50; 60) | [60; 70) | [70; 80) | [80; 90) |
| Số học sinh | 2        | 10       | 16       | 8        | 2        | 2        |

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

- A.** 56.                      **B.** 50.                      **C.** 60.                      **D.** 55.

**Câu 2.** Thống kê về thời lượng mỗi trận đấu bi-a trong vòng tứ kết giải đấu European Open người ta được mẫu số liệu ghép nhóm như sau

|           |             |              |              |              |              |
|-----------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Thời gian | [9,5; 12,5) | [12,5; 15,5) | [15,5; 18,5) | [18,5; 21,5) | [21,5; 24,5) |
| Số trận   | 3           | 12           | 15           | 24           | 2            |

Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây

- A.** 17.                      **B.** 17,5.                      **C.** 18.                      **D.** 18,5.

**Câu 3.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

|           |        |        |         |          |          |
|-----------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Doanh thu | [5; 7) | [7; 9) | [9; 11) | [11; 13) | [13; 15) |
| Số ngày   | 2      | 7      | 7       | 3        | 1        |

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.** [7; 9).                      **B.** [9; 11).                      **C.** [11; 13).                      **D.** [13; 15).

**Câu 4.** Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

|          |        |        |        |        |         |
|----------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Điểm     | [0; 2) | [2; 4) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) |
| Học viên | 10     | 30     | 55     | 42     | 9       |

Số trung bình của mẫu số liệu thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.** [8; 10).                      **B.** [4; 6).                      **C.** [2; 4).                      **D.** [6; 8).

**DẠNG TOÁN**

**2**

**Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm**

- ① Xác định cỡ của mẫu số liệu;
- ② Tính số trung bình của mẫu số liệu;
- ③ Áp dụng công thức tính phương sai và độ lệch chuẩn.

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

| Cân nặng (kg) | [4; 6) | [6; 8) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) |
|---------------|--------|--------|---------|----------|----------|
| Số quả mít    | 6      | 12     | 19      | 9        | 4        |

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần trăm.)

**Bài 2.** Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6 134,9 130,3 134,2 140,9 109,3 154,4 156,3 116,1 96,7  
105,2 80,8 80,8 110 109 139 145 161 126 114

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là  $[80; 98)$  và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

**Bài 3.** Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

| Điểm trung bình     | [5; 6) | [6; 7) | [7; 8) | [8; 9) | [9; 10) |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Số học sinh lớp 11A | 1      | 0      | 11     | 22     | 6       |
| Số học sinh lớp 11B | 0      | 6      | 8      | 14     | 12      |

- Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

**Bài 4.** Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa                     | [120; 122) | [122; 124) | [124; 126) | [126; 128) | [128; 130) |
|----------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày giao dịch của cổ phiếu A | 8          | 9          | 12         | 10         | 11         |
| Số ngày giao dịch của cổ phiếu B | 16         | 4          | 3          | 6          | 21         |

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Phương sai luôn luôn là số không âm.
- B. Phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn.
- C. Phương sai càng lớn thì độ phân tán của các giá trị quanh số trung bình càng lớn.
- D. Phương sai luôn luôn lớn hơn độ lệch chuẩn.

**Câu 2.** Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng?

- A. Khoảng biến thiên.
- B. Khoảng tứ phân vị.
- C. Phương sai.
- D. Độ lệch chuẩn.

**Câu 3.** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 3,39.
- B. 11,62.
- C. 0,1314.
- D. 0,36.

**Câu 4.** Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

| Thời gian (phút) | [20; 25) | [25; 30) | [30; 35) | [35; 40) | [40; 45) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày          | 6        | 6        | 4        | 1        | 1        |

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 31,77.
- B. 32.
- C. 31.
- D. 31,44.

**Câu 5.** Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

| Quãng đường (km) | [2,7; 3,0) | [3,0; 3,3) | [3,3; 3,6) | [3,6; 3,9) | [3,9; 4,2) |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Số ngày          | 3          | 6          | 5          | 4          | 2          |

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 3,41.
- B. 11,62.
- C. 0,017.
- D. 0,36.

**Câu 6.** Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik  $3 \times 3$ , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

| Thời gian giải rubik (giây) | [8; 10) | [10; 12) | [12; 14) | [14; 16) | [16; 18) |
|-----------------------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Số ngày                     | 4       | 6        | 8        | 4        | 3        |

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 5,98.

B. 6.

C. 2,44.

D. 2,5.
- 
- 

**Câu 7.** Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

| Thời gian (giờ)              | [5; 5,5) | [5,5; 6) | [6; 6,5) | [6,5; 7) | [7; 7,5) |
|------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số chiếc điện thoại (tần số) | 2        | 8        | 15       | 10       | 5        |

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến 4 chữ số thập phân).

- A. 0,4252.

B. 0,5314.

C. 0,6214.

D. 0,5268.
- 
- 

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 8.** Một trang trại phân 1 000 quả trứng thành 5 loại, tùy theo khối lượng (đã được làm tròn) của chúng được thống kê bởi bảng dưới đây:

| Khối lượng (gam) | [30; 36) | [36; 42) | [42; 48) | [48; 54) | [54; 60) |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Số trứng         | 45       | 190      | 500      | 250      | 15       |

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 30.

b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 6,48.

c) Khối lượng trung bình của 100 quả trứng là 45 gam.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là  $\frac{6\sqrt{17}}{5}$ .
- 
- 
- 
- 
- 
- 





- c) Độ lệch chuẩn của chiều cao các cây được chăm sóc theo phương án A là 12, 65 (cm).
- d) Dựa vào độ lệch chuẩn thì chiều cao của các loại cây được chăm sóc theo phương án B ít bị chênh lệch hơn so với phương án A..

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....