



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

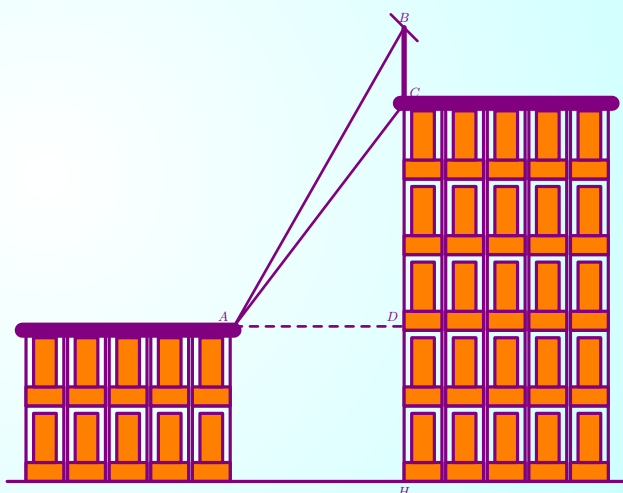
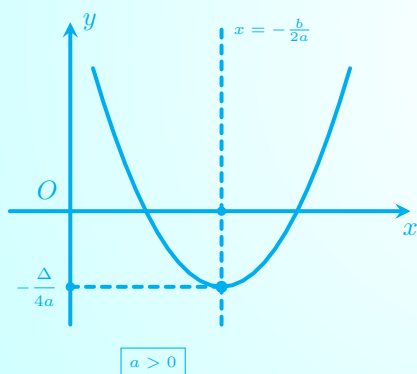
TH.S NGUYỄN THÀNH NHÂN

TOÁN

PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

11

TẬP MỘT



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC	1
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	4
1. Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn	4
2. Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles	5
3. Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác	5
4. Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác	6
5. Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức	6
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	9
Bài 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC	14
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	14
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	15
1. Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi	15
2. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng	15
3. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích	16
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	18
Bài 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	22
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	22
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	23
1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	23
2. Tính chẵn lẻ của hàm số	23
3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất	24
4. Đồ thị hàm số lượng giác	25
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	26
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	31
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	31
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	33

1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản.....	33
2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng.....	33
3. Vận dụng thực tiễn.....	34
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	36
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	40
A ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1.....	40
B ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2.....	40
C ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3.....	40
D ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4.....	40
Chương 2. Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân	42
Bài 1. Dãy số	42
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	42
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	43
1. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát.....	43
2. Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi.....	43
3. Xét sự tăng giảm của dãy số.....	44
4. Xét tính bị chặn của dãy số.....	44
5. Vận dụng thực tiễn.....	45
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	47
Bài 2. Cấp số cộng	50
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	50
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	51
1. Chứng minh dãy số là một cấp số cộng.....	51
2. Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng.....	51
3. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.....	52
4. Tính chất của cấp số cộng.....	52
5. Vận dụng, thực tiễn.....	53
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	55
Bài 3. Cấp số nhân	58
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	58
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	59
1. Chứng minh dãy số là một cấp số nhân.....	59

	2. Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát.....	59
	3. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.....	59
	4. Tính chất của cấp số nhân.....	60
	5. Vận dụng, thực tiễn.....	60
	C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	62
	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	65
	A ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1.....	65
	B ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2.....	65
	C ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3.....	65
Chương 3.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	66
	Bài 1. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	66
	A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	66
	B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	68
	1. Ghép nhóm mẫu số liệu.....	68
	2. Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.....	68
	3. Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm.....	69
	C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	69
	D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	70
	Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM	76
	A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	76
	B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	76
	1. Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	76
	2. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	77
	C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	78
	D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	80
Chương 4.	QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	87
	Bài 1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	87
	A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	87
	B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	90
	1. Các quan hệ cơ bản.....	90
	2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.....	90

3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.....	92
4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.....	92
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	93
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	94
Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	99
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	99
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	100
1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.....	100
2. Chứng minh hai đường thẳng song song.....	100
3. Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau.....	101
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	101
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	102
Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	106
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	106
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	107
1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.....	107
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau.....	108
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	109
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	110
Bài 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	114
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	114
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	116
1. Chứng minh hai mặt phẳng song song.....	116
2. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.....	117
3. Định lý Thales.....	117
4. Hình hộp, hình lăng trụ.....	117
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	118
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	119
Bài 5. PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG	122
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	122
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	123
1. Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song.....	123

	2. Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản.....	123
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	123
Chương 5.	GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	126
	Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	126
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	126
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	127
	1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$	127
	2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$	128
	3. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực.....	129
	4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.....	130
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	131
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	133
	Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	136
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	136
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	138
	1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$	138
	2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$	139
	3. Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn.....	139
	4. Vận dụng thực tiễn.....	140
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	140
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	142
	Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC	145
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	145
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	146
	1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.....	146
	2. Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định.....	147
	3. Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước. 147	
	4. Chứng minh phương trình có nghiệm.....	147
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	148
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	148

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC



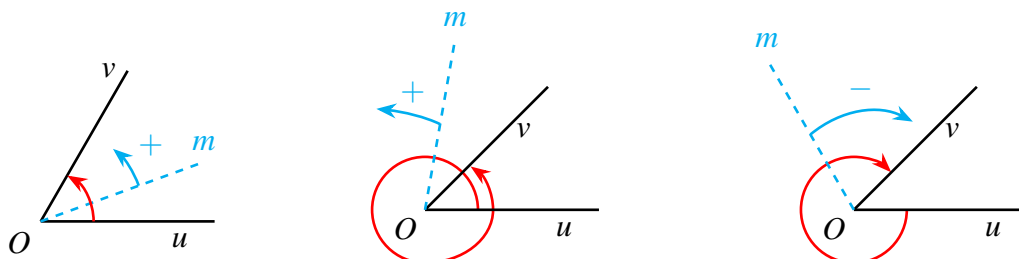
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 GÓC LƯỢNG GIÁC

Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác: Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou , Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

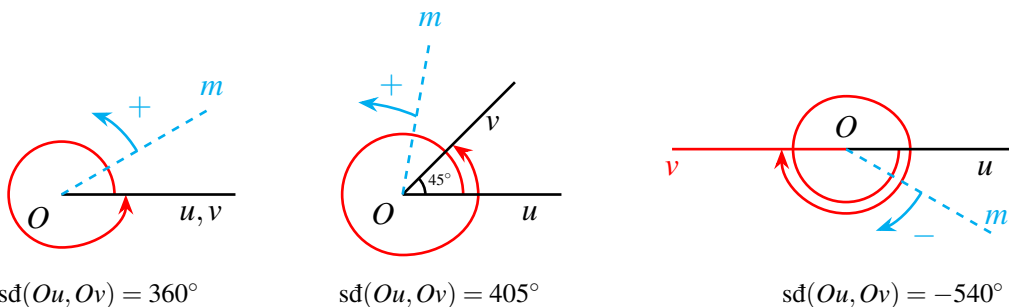
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α° , ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng α° , kí hiệu $\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo α° của nó.



- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

⚙ **Hệ thức Chasles:** Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2 ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

⚙ **Đơn vị đo góc:**

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1° .
- Đơn vị radian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

⚠ *Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.*

- Mối liên hệ giữa độ và radian:

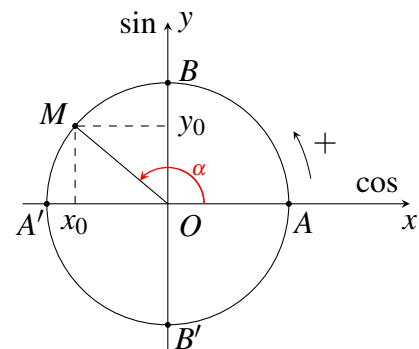
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

⚙ **Độ dài cung tròn:** Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

⚙ **Đường tròn lượng giác:**

- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α . Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



⚙ **Các giá trị lượng giác của góc lượng giác**

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thì

- ① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$, hay $\sin \alpha = y_0$.
- ② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$, hay $\cos \alpha = x_0$.
- ③ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, với $\cos \alpha \neq 0$.
- ④ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, với $\sin \alpha \neq 0$.

Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

- ① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
- ② $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
- ③ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

4 QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

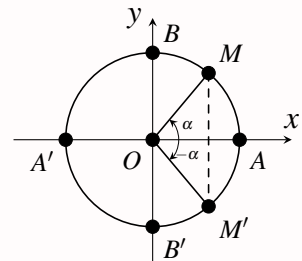
⚙ **Công thức lượng giác cơ bản:** Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

- ① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- ② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- ③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, với $\alpha \neq k\pi$.
- ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, với $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.

⚙ **Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:**

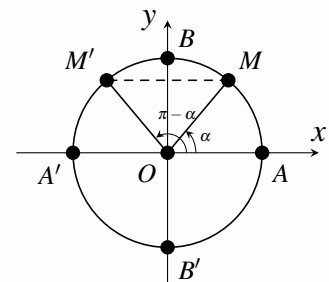
- ① Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$:

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



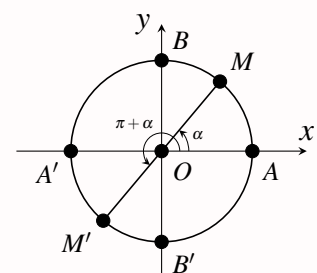
- ② Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



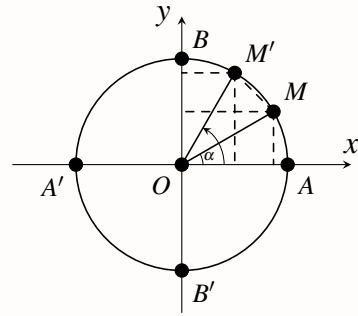
- ③ Hai góc hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



④ Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

☑ Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

a) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

b) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

☑ Xét đường tròn có bán kính R .

- Cung tròn có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) thì có độ dài là $l = R\alpha$.
- Cung tròn có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R$.

≡ Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian.

a) 72° ;

b) 600° ;

c) $-37^\circ 45' 30''$.

≡ Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

a) $\frac{5\pi}{18}$;

b) $\frac{3\pi}{5}$;

c) -4 .

≡ Bài 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng như sau:

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

≡ Bài 4. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

≡ Bài 5. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

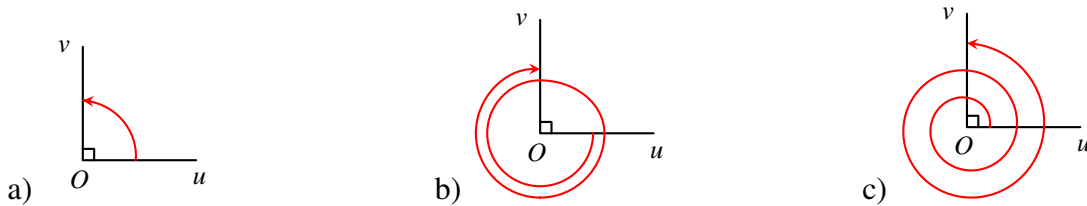
DT

2

Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles

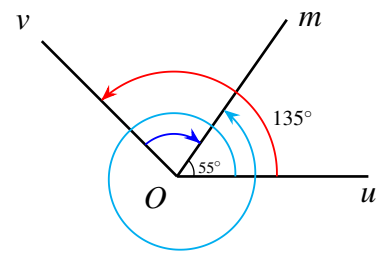
- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) .
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) . Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) - \text{sđ}(Ou, Ov) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 6. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



Bài 7.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



Bài 8. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow) .

DT

3

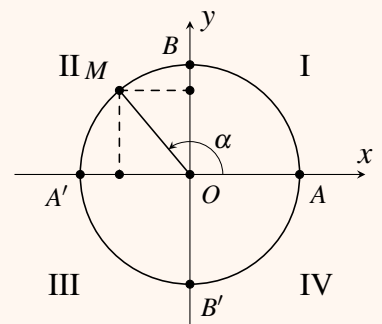
Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α , thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Bài 9. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Bài 10. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; b) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
 c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Bài 11. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; b) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 c) $\sin \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha < 0$. d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$.

DT

4

Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác

 **Hướng 1:**

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M .
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M , suy ra kết quả.

 **Hướng 2:**

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M , suy ra kết quả.

Bài 12. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng;
 c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

Bài 13. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

Bài 14. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Bài 15. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Bài 16. Biết $\sin x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \cos (2\pi - x) + \cos (3\pi + x)$.

DT

5

Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

Bài 17. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha;$

b) $B = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$

c) $C = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha};$

d) $D = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$

b) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$

c) $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2.$

d) $1 - \cot^4 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}.$

Bài 19. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C.$

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0.$

c) $\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B.$

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

b) $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$

c) $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$ và $-90^\circ < \alpha < 90^\circ;$

d) $\cot \alpha = -2,4$ và $-180^\circ < \alpha < 0^\circ.$

2 Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{3 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \tan \alpha};$

b) $B = \frac{\cot^2 \alpha - \sin \alpha}{\tan \alpha + 2 \cos \alpha}.$

3 Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

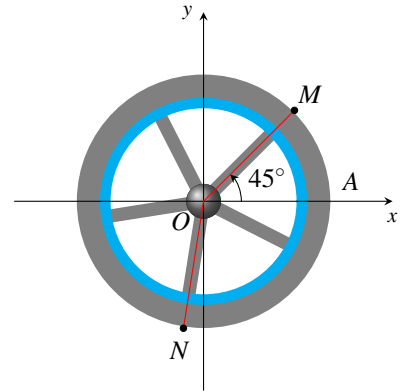
4 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

a) Đường tròn có bán kính $R = 5$ và cung có số đo 72° .

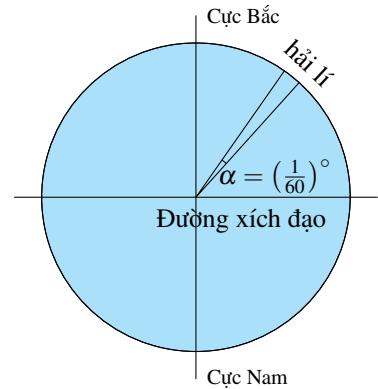
b) Đường tròn có bán kính $R = 18$ và cung có số đo 150° .

5 Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

- 6 Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



- 7 Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình bên). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



- 8 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha};$

b) $\frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha};$

c) $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \tan \beta;$

d) $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

e) $\frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2;$

f) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$

- 9 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\cot^2 x + 1)}.$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 25. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. B. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. D. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

Câu 2. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 3. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{7}{18}$. B. $\frac{7\pi}{18}$. C. $\frac{70}{\pi}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Câu 4. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ.

- A. 6° . B. 15° . C. 10° . D. 5° .

Câu 5. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. -286° . B. $286^\circ 28' 44''$. C. $-286^\circ 44' 28''$. D. $-286^\circ 28' 44''$.

Câu 6. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là cung

- A. có độ dài bằng nửa đường kính. B. có độ dài bằng đường kính.
C. có độ dài bằng 1. D. tương ứng với góc ở tâm 60° .

Câu 7. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

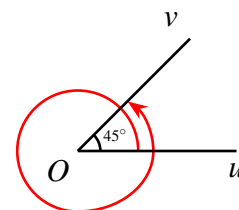
- A. $\ell = 2,94$ cm. B. $\ell = 3,39$ cm. C. $\ell = 1,49$ cm. D. $\ell = 3,93$ cm.

Câu 8. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

- A. 40 cm. B. 60 cm. C. 30 cm. D. 20 cm.

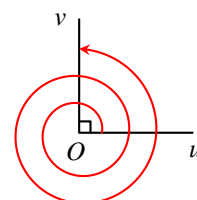
Câu 9. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 405° . B. 385° . C. -405° . D. 45° .



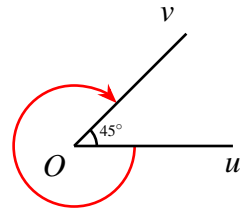
Câu 10. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 450° . B. -450° . C. 810° . D. 90° .



Câu 11. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 45° . B. -315° . C. 315° . D. 405° .

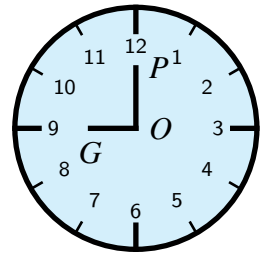


Câu 12. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 14. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

- A. $135^\circ + k360^\circ$. B. -45° .
C. 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một hình vuông?

- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $\frac{k\pi}{2}$. C. $\frac{k\pi}{3}$. D. $k\pi$.

Câu 16. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một tam giác đều?

- A. $\frac{k\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{2}$.

Câu 17. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Câu 18. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 19. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo $\frac{26\pi}{3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. M thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác.
B. M thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác.
C. M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác.
D. M thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác.

Câu 20. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Câu 21. Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- A. $-\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\sin \alpha$. D. $-\cos \alpha$.

Câu 22. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng.

- A. $\sin(A + C) = -\sin B$. B. $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Câu 23. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 24. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 25. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

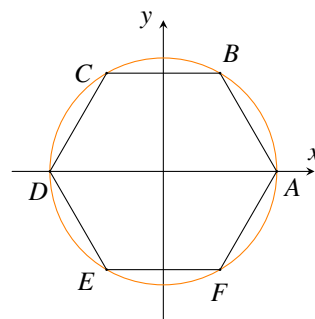
- A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = -\frac{4}{19}$. D. $P = \frac{4}{19}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn lượng giác (thứ tự đi từ A đến các đỉnh theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Các góc lượng giác (OA, OB) có số đo là $\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
b) Các góc lượng giác (OA, OC) có số đo là $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
c) Các góc lượng giác (OA, OE) có số đo là $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
d) Các góc lượng giác (OA, OF) có số đo là $\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 27. Cho biết $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. b) Nếu $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ thì $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
c) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. d) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

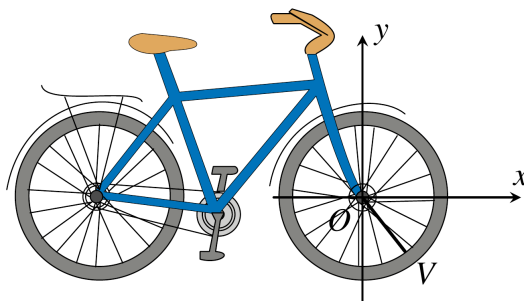
Câu 28. Cho biết $\cos \alpha = -0,8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\sin \alpha = 0,36$. b) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin \alpha = -0,36$.
c) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$. d) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = \frac{3}{4}$.

Câu 29. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thỏa $\cot \alpha = \frac{7}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\tan \alpha = \frac{3}{7}$. b) x_0 và y_0 cùng dấu. c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{58}$. d) $\cos^2 \alpha = \frac{49}{58}$.

Câu 30. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được 4 vòng.
- b) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được 225 vòng.
- c) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là 450π .
- d) Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là 494,8 m (làm tròn đến hàng phần chục).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 31 đến câu 35 vào ô kết quả.

Câu 31. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \tan \alpha}$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 32. Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ (kết quả tính bằng đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 33. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 8 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 2 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 700 mm (kết quả tính bằng m và làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 34. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu? (kết quả được tính bằng đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần trăm)

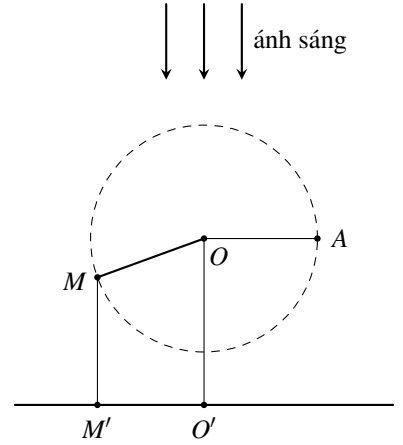
KQ:

Câu 35.

Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười.

KQ:

--	--	--	--



§2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2 Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3 Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích:

① $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

② $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

③ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

④ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

**PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****DT****1****Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi****≡ Bài 1.** Khai triển:

a) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right);$

b) $\cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right);$

c) $\sin (x + 60^\circ);$

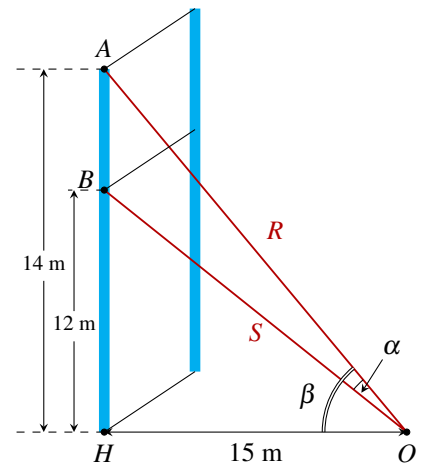
d) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right);$

e) $\tan \left(a + \frac{\pi}{3}\right);$

f) $\tan \left(\frac{\pi}{6} - 2a\right).$

≡ Bài 2. Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin \left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right)$.**≡ Bài 3.** Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\cos \left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ và $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.**≡ Bài 4.**

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).

a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).**DT****2****Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng****≡ Bài 5.** Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ.$

b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ.$

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ.$

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}.$

≡ Bài 6. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$.

b) $2\cos(a+b)\cos(a-b)$.

c) $\sin(a-b)\cos(b-a)$.

d) $2\sin(a+b)\sin(a-b)$.

DT

3

Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Bài 7. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích.

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$.

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Bài 8. Chứng minh

a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0$.

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

Bài 9. Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

Bài 10. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b), \sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}, 0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}, 90^\circ < b < 180^\circ$.

2 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

3 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$;

b) $\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha$;

$$\text{c) } \frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha;$$

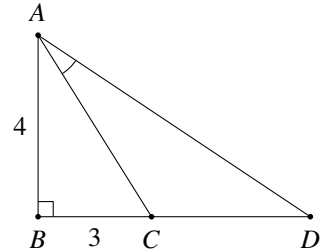
$$\text{d) } \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}.$$

4 Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right).$$

$$\text{b) } \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right).$$

5 Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (làm tròn đến hàng phần chục).



6 Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1 = 6 \cos 100\pi t$ (mm) và $x_2 = 6 \sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 0,25$ giây.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$ B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$
 C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$ D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$ B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$
 C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$ D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Câu 3. Cho các góc lượng giác a, b và $T = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$. Mệnh đề sau đây đúng?

- A. $T = \sin 2b.$ B. $T = \sin 2a.$ C. $T = \cos 2a.$ D. $T = \cos 2b.$

Câu 4. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, giá trị của $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$ C. $\sqrt{6} - \frac{1}{2}.$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 5. Biết $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $-\frac{3}{5}.$ B. $\frac{3}{5}.$ C. $\frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}.$ D. $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}.$

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

- A. $\frac{3 + \sqrt{21}}{8}.$ B. $\frac{3 - \sqrt{21}}{8}.$ C. $\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}.$ D. $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}.$

Câu 7. Biết $\sin a = \frac{5}{13}; \cos b = \frac{3}{5}; \frac{\pi}{2} < a < \pi; 0 < b < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin(a+b)$.

- A. $\frac{56}{65}.$ B. $\frac{63}{65}.$ C. $-\frac{33}{65}.$ D. 0.

Câu 8. Cho hai góc nhọn $a; b$ thỏa $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}.$ B. $-\frac{115}{144}.$ C. $-\frac{117}{144}.$ D. $-\frac{119}{144}.$

Câu 9. Cho $\tan \alpha = 3$. Khi đó giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $\frac{7}{17}.$ B. $\frac{17}{7}.$ C. -4. D. -2.

Câu 10. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\frac{2}{3}.$ B. $\frac{1}{3}.$ C. 1. D. $-\frac{1}{3}.$

Câu 11. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó $\cos 2\alpha$ bằng

A. $\frac{3}{8}$. B. $-\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $-\frac{31}{8}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó $\tan 2\alpha$ bằng

A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Câu 13. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Khi đó $\sin \alpha - \cos \alpha$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $-\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Khi đó $(1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$ bằng

A. 12. B. $\frac{21}{2}$. C. 6. D. 21.

Câu 16. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 17. Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Câu 18. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Câu 19. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). B. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1 = 2\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm) ; $x_2 = 2\cos(5\pi t)$ (cm). Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. 2. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. b) $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$.

c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$.

d) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{17}$.

Câu 22. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\sin \beta = \frac{25}{169}$.

c) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$.

d) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$.

Câu 23. Biết $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = \frac{9}{25}$.

b) $\sin \alpha = \frac{16}{25}$.

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

d) $\cot \alpha = \frac{4}{3}$.

Câu 24.

Trên một mảnh giấy hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC$, $DN = \frac{1}{3}DC$ (Hình bên).

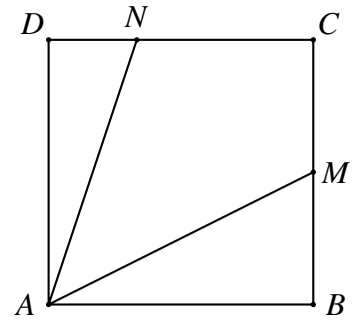
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\tan \widehat{BAM} = \frac{1}{2}$.

b) $\tan \widehat{DAN} = \frac{1}{3}$.

c) $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 60^\circ$.

d) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng 30° .



Câu 25. Phương trình dao động điều hòa của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$), $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động và ω là tần số góc. Xét hai dao động điều hòa có phương trình lần lượt là

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)} \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}.$$

Đặt $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ là phương trình tổng hợp của hai dao động này. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tần số góc của dao động tổng hợp là $\frac{\pi}{4}$.

b) Phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$.

c) Biên độ của dao động tổng hợp trên bằng 3.

d) Pha ban đầu của dao động tổng hợp trên là $\frac{\pi}{12}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

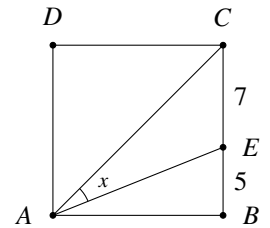
Câu 26. Cho hai góc a và b với $\tan a = \frac{1}{7}$ và $\tan b = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\tan(a + b)$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 27.

Cho hình vuông $ABCD$ như hình vẽ bên. Tính $\tan x$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:



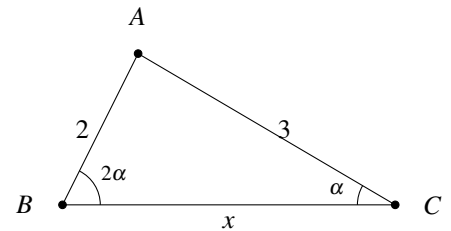
Câu 28. Biết $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = n \cdot \tan \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Giá trị n bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 29.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết $\widehat{B} = 2\widehat{C} = 2\alpha$, $AB = 2$, $AC = 3$. Tính độ dài cạnh BC .

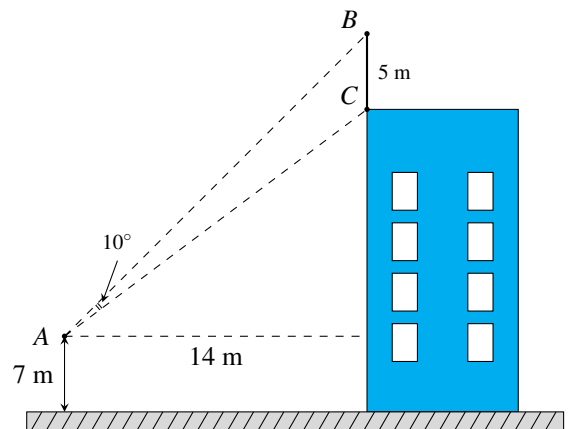
KQ:



Câu 30.

Trên nóc một tòa nhà thẳng đứng có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất và cách tòa nhà 14 m có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten với góc $\widehat{BAC} = 10^\circ$. Tính chiều cao của tòa nhà (tính bằng mét và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:



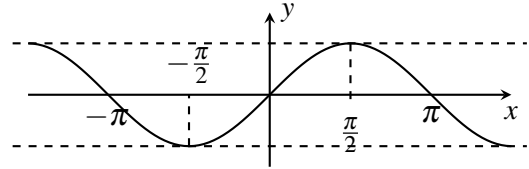
§3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

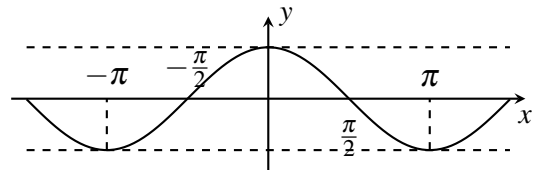
1 Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



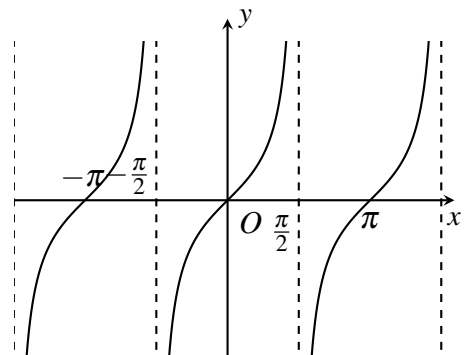
2 Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



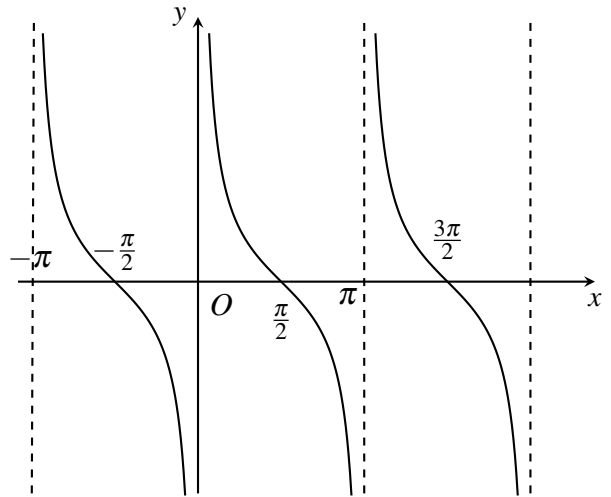
3 Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4 Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

**PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****DT****1****Tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

Ta chú ý một số điều kiện sau:

- a) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- b) $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- d) $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

≡ Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|--|---|---|
| a) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$ | b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ | c) $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$ |
| d) $y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$ | e) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$ | f) $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$ |
| g) $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$ | h) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$ | i) $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$. |

≡ Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|----------------------|-----------------------------|---|
| a) $y = 2\tan x + 3$ | b) $y = 2\tan 2x - 4\sin x$ | c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ |
|----------------------|-----------------------------|---|

DT**2****Tính chẵn lẻ của hàm số**

Ta thực hiện các bước sau:

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- ② Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.

- Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. | ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. |
| ③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. | ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ. |

Bài 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

- a) $y = \sin x \cdot \cos x$; b) $y = \tan x + \cot x$; c) $y = \sin^2 x$.

DT 3 **Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất**

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☒ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

- | | |
|--|--|
| ① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$; | ② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$; |
| ③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$; | ④ $0 \leq \sin x , \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. |

☒ Sử dụng điều kiện có nghiệm

- ① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.
 ② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.
 ③ $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☒ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) $y = 2 \sin x + 3$ | b) $y = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{3}$ | c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$ |
| d) $y = 4 \sin x \cos x + 1$; | e) $y = 4 - 3 \sin^2 2x$. | f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$ |

Bài 5. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 6. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

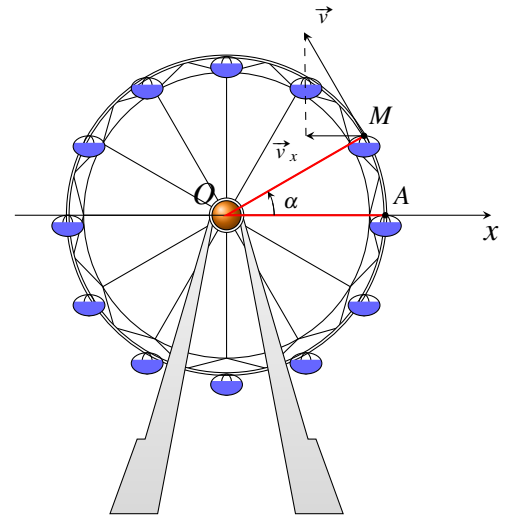
Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| a) $y = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$ | b) $y = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2$ | c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$ |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|

Bài 8.

Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình bên).

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
- Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



DT 4 Đồ thị hàm số lượng giác

Bài 9. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

- $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;
- $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Bài 10. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimet, $\omega > 0$. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong các trường hợp:

- $A = 3\text{cm}, \varphi = 0$;
- $A = 3\text{cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;
- $A = 3\text{cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty]$. D. $[-1; 1]$.

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $[0; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[0; 1]$.

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π . B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π . D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 4. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 6. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- A. $y = \sin^2 x$. B. $y = x \cos 2x$. C. $y = x \sin x$. D. $y = \cos x$.

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2, \max y = 4$.

B. $\min y = 2, \max y = 4$.

C. $\min y = -2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 4$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

A. $\min y = 1, \max y = 2$.

B. $\min y = 1, \max y = 3$.

C. $\min y = 2, \max y = 3$.

D. $\min y = -1, \max y = 3$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$.

B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.

C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$.

D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$.

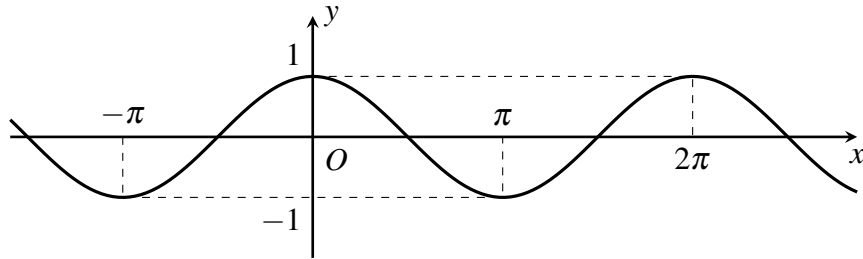
A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4$.

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3$.

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2$.

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4$.

Câu 18. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



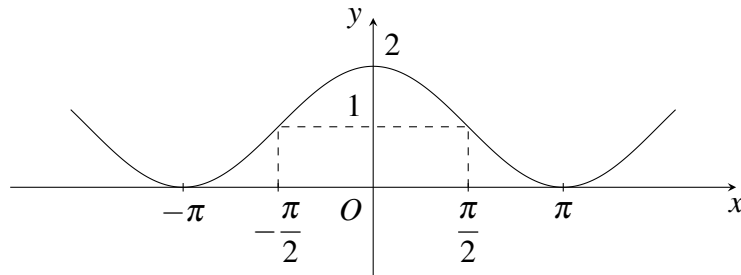
A. $y = 1 + \sin x$.

B. $y = 1 - \sin x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Câu 19. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



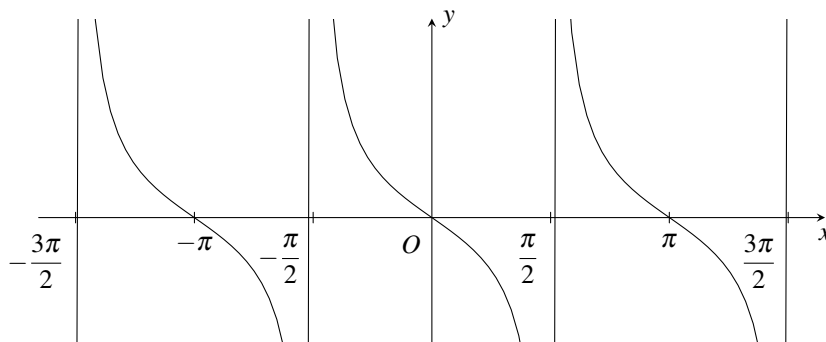
A. $y = \cos x + 1$.

B. $y = 2 - \sin x$.

C. $y = 2 \cos x$.

D. $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 20. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị ở hình vẽ dưới đây?



A. $y = -\tan x$.

B. $y = \cot x$.

C. $y = \tan x$.

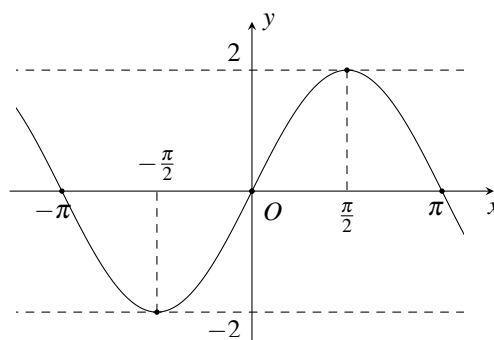
D. $y = -\cot x$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

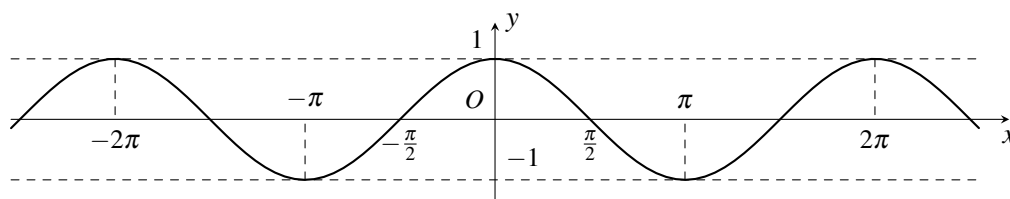
Câu 21.

Cho hàm số $y = 2 \sin x$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Tập giá trị của hàm số là $[-1; 1]$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt.



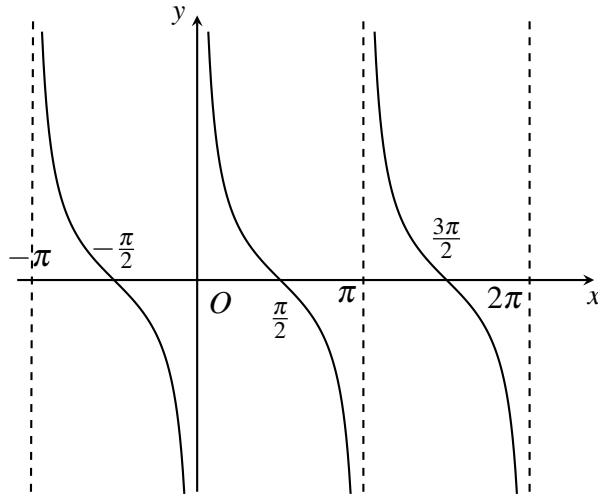
Câu 22. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như hình bên dưới



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; \pi)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$.
- c) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.
- d) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, có đúng 3 giá trị của x để hàm số nhận giá trị bằng 0.

Câu 23. Cho hàm số $y = \cot x$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$..
- b) Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; \pi)$.
- c) Trên $[-\pi; \pi]$ có đúng ba giá trị của x để $\cot x = 0$.
- d) Trên $[0; \pi]$, $\cot x < 1$ khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin^2 x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- b) Hàm số là một hàm số chẵn.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3 .

Câu 25. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{75}$.
- b) Thời điểm $t = 0$, huyết áp của người này là 120 mmHg.
- c) Huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) của người này là 135 mmHg.
- d) Huyết áp tâm trương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.

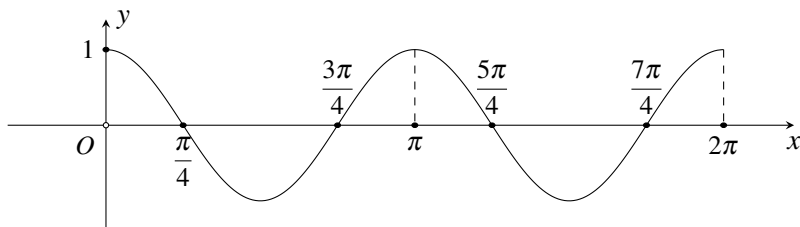
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}\cos 2x$. (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

KQ:

--	--	--	--

Câu 27. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên $[0; 2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $\cos 2x = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của T (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 28. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao 40 (m) in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tìm độ dài bóng của tòa nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng (làm tròn đến hàng phần chục).

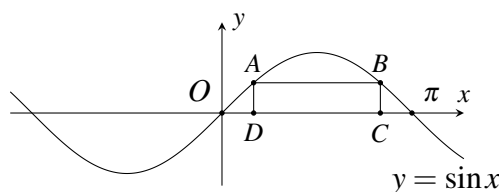
KQ:

Câu 29. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos \left(\frac{\pi}{10} t \right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao của sóng (cm) (là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng).

KQ:

Câu 30. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC .

KQ:



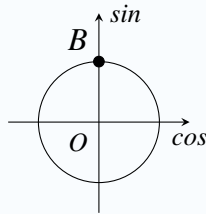
§4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



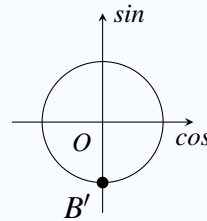
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$.

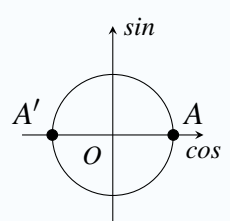
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

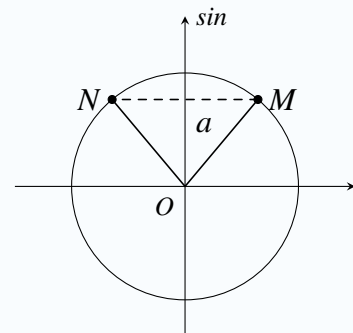
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

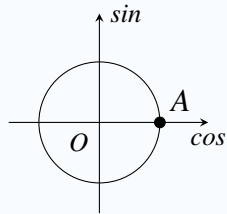
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

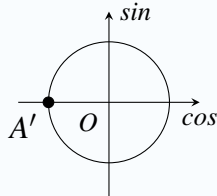
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$.

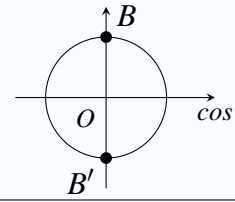
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

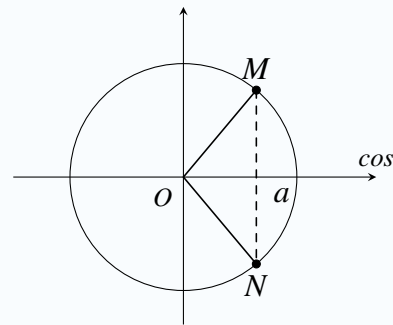
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$.

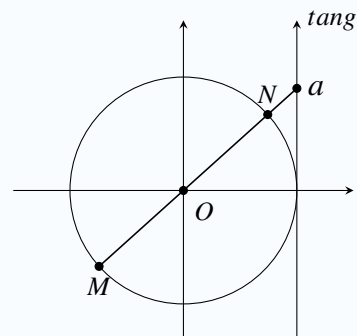
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4 Phương trình $\cot x = a$.

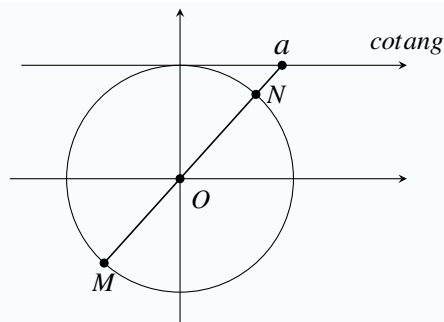
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** $\left[\frac{1}{a} \right]$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****DT****1****Giải các phương trình lượng giác cơ bản**

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

≡ **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \sin \left(\frac{\pi}{5} - x \right) = 1$

c) $2 \sin (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

e) $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$

f) $3 \cos x - 1 = 0$.

≡ **Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$

c) $\tan (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

f) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$.

≡ **Bài 3.** Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$.

b) $\sqrt{2} \sin(x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi)$.

d) $\tan(3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

DT**2****Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng**

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$ ② $\cos u = \cos v$ ③ $\tan u = \tan v$ ④ $\cot u = \cot v$

• Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x)$. ② $-\cos x = \cos(\pi - x)$.
 ③ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. ④ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin 2x - \sin x = 0$ c) $\sin 5x + \sin x = 0$
 d) $\cos 2x - \cos x = 0$ e) $\cos 8x + \cos x = 0$ f) $\cos 4x - \sin x = 0$

Bài 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

DT 3 Vận dụng thực tiễn

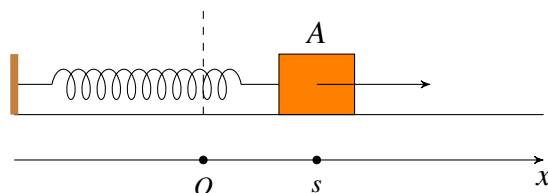
Bài 6. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
 b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
 c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Bài 7.

Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$.



Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?

Bài 8. Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức

$$v_1(t) = -4 \cos \left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ và } v_2(t) = 2 \sin \left(2t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó

- a) vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 (cm/s);
 b) vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Giải phương trình: $3 - \sqrt{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

2 Giải phương trình: $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

3 Giải các phương trình sau:

a) $\cos 3x = \sin 2x$

b) $\cos 3x - 2 \cos \frac{\pi}{4} = 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$

e) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

f) $2 \cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0$

g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$

h) $\cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1$

i) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$.

b) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7}$.

5 Giải phương trình

a) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

b) $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$.

6 Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

7 Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn đến hàng phần trăm.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{1}{2}$. B. $\tan x = \sqrt{3}$. C. $\sin x = 3$. D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.
C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

- A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π .

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

- A. $n = 8$. B. $n = 5$. C. $n = 6$. D. $n = 2$.

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

- A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$. B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$. C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$. D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 16145. B. 20181. C. 20179. D. 16144.

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

- A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. B. $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.
C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$. D. $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho phương trình $\cos 2x = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.
b) Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

- c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.
 d) Trên $(0; 2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Câu 22. Cho phương trình $\sin x = \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $x = \frac{3\pi}{4}$ là một nghiệm của phương trình.
 b) Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\tan x = 1$.
 d) Trên $(0; 2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Câu 23. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$$

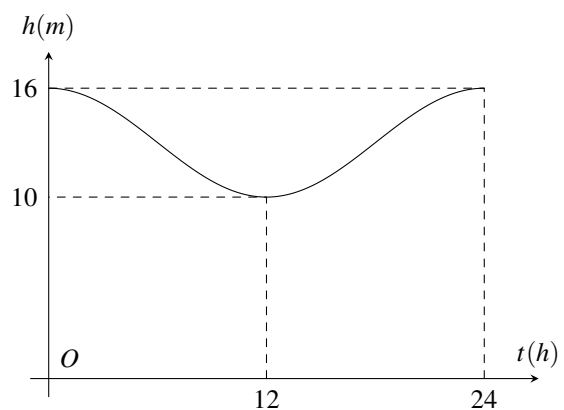
với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ ($0 \leq t < 24$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nhiệt độ ngoài trời cao nhất bằng 29°C .
 b) Nhiệt độ ngoài trời thấp nhất bằng 26°C .
 c) Nhiệt độ ngoài trời cao nhất vào thời điểm 12 giờ trưa.
 d) Nhiệt độ ngoài trời thấp nhất vào thời điểm 3 giờ sáng.

Câu 24. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao 40 (m) in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12}t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $0 \leq S(t) \leq 1$.
 b) Độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là 0 (m).
 c) Độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $40\sqrt{3}$ (m).
 d) Có đúng 2 thời điểm trong ngày mà độ dài bóng của tòa nhà bằng chiều cao của tòa nhà.

Câu 25. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở hình bên mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a \cos \left(\frac{\pi}{12}t \right)$ với m, a là các số thực dương cho trước. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Lúc 12 giờ trưa thì mực nước thấp nhất.
 b) Lúc 12 giờ khuya thì mực nước cao nhất.
 c) Hàm số h được xác định bởi $h = 13 + 3 \cos \left(\frac{\pi}{12}t \right)$.
 d) Tại thời điểm 8 giờ sáng hoặc 4 giờ chiều thì chiều cao của mực nước là 11,5 m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

Câu 26. Tìm nghiệm của phương trình $\cot x = 2$ trên khoảng $(0; \pi)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 27. Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 2x = -1$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

KQ:

Câu 28. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$. Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

KQ:

Câu 29. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

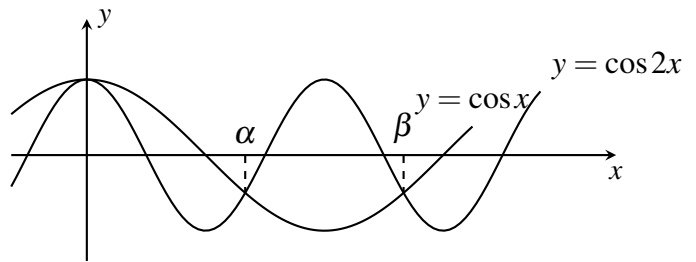
$$x = 2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

KQ:

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y = \cos 2x$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$ cắt nhau tại hai giao điểm có hoành độ $x = \alpha$ và $x = \beta$ như hình bên dưới. Tính giá trị $\sin(\beta - \alpha)$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

KQ:



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. B	2. C	3. B	4. B	5. D	6. A	7. D	8. C	9. A	10. C
11. B	12. C	13. D	14. D	15. B	16. C	17. A	18. A	19. B	20. C
21. B	22. B	23. D	24. B	25. D					

Câu 26. a Đ b Đ c S d S	Câu 27. a S b S c Đ d S
Câu 28. a S b S c Đ d S	Câu 29. a Đ b Đ c Đ d Đ
Câu 30. a S b Đ c Đ d Đ	

Câu 31. -2,1	Câu 32. 6,28	Câu 33. 495	Câu 34. 6,57	Câu 35. 7,5
--------------	--------------	-------------	--------------	-------------



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. B	2. B	3. C	4. B	5. C	6. B	7. C	8. D	9. D	10. B
11. B	12. C	13. B	14. A	15. D	16. B	17. B	18. A	19. B	20. C

Câu 21. a Đ b Đ c Đ d Đ	Câu 22. a S b S c Đ d Đ
Câu 23. a S b S c S d S	Câu 24. a Đ b Đ c S d S
Câu 25. a Đ b S c S d Đ	

Câu 26. 1	Câu 27. 0,41	Câu 28. 1	Câu 29. 2,5	Câu 30. 19
-----------	--------------	-----------	-------------	------------



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. D	2. C	3. B	4. C	5. B	6. B	7. A	8. B	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. A	15. B	16. A	17. A	18. D	19. A	20. A

Câu 21. a Đ b S c S d S	Câu 22. a S b Đ c Đ d Đ
Câu 23. a Đ b S c S d Đ	Câu 24. a S b Đ c Đ d S
Câu 25. a S b S c Đ d Đ	

Câu 26. 3,97	Câu 27. 12,6	Câu 28. 169,3	Câu 29. 180	Câu 30. 0,5
--------------	--------------	---------------	-------------	-------------



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4

1. C	2. D	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. D	9. C	10. D
11. D	12. C	13. C	14. A	15. B	16. A	17. A	18. A	19. B	20. B

Câu 21. ☐a S ☐b S ☐c Đ ☐d SCâu 22. ☐a S ☐b S ☐c Đ ☐d ĐCâu 23. ☐a S ☐b Đ ☐c S ☐d ĐCâu 24. ☐a S ☐b Đ ☐c Đ ☐d ĐCâu 25. ☐a Đ ☐b Đ ☐c Đ ☐d Đ

Câu 26. 0,46

Câu 27.
−0,8

Câu 28. 12,5

Câu 29. 9

Câu 30. 0,87

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. DÃY SỐ



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

⚙ **Định nghĩa dãy số:** Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

① Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) . Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó

- u_1 là số hạng đầu;
- u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

② Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

⚙ **Định nghĩa dãy số hữu hạn:**

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2 CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Ta thường gặp một trong các cách sau đây:

- ① Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ② Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát;
- ③ Dãy số cho bằng phương pháp mô tả;
- ④ Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
 - Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

3

- ① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4

- ① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

- ≡ **Bài 1.** Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

- ≡ **Bài 2.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

- ≡ Bài 3.** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.
- b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.
- c) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?
- d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

DT

- Bài 4.** Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

- ≡ Bài 5.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$$

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
b) Tính u_8 .

- ≡ **Bài 6.** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$ (dãy số Phi-bô-na-xi).

- a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.
b) Tính u_7 .

DT 3 Xét sự tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Bài 7. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với

- a) $u_n = n^2$. b) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. c) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$.
d) $u_n = \frac{n}{3^n}$. e) $u_n = (-1)^n$. f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

Bài 8. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

- a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.
b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

DT 4 Xét tính bị chặn của dãy số

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 ; dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Bài 9. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

a) $u_n = \frac{1}{2^n}.$

b) $u_n = 2 \sin n^2$

c) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}.$

d) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}.$

e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$

f) $u_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}.$

Bài 10. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Bài 11. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

DT

5

Vận dụng thực tiễn

Bài 12. Biết rằng năm 2016, dân số của Việt Nam là 93,422 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1,07% thì số dân P_n (triệu người) của Việt Nam sau n năm, kể từ năm 2016, được tính bằng công thức $P_n = 93,422(1 + 0,0107)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2026, dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

Bài 13. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.
- Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

1 Tìm 4 số hạng đầu tiên của các dãy số (u_n) biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}.$

b) $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}.$

c) $u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}.$

d) $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}.$

e) $u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{2n\pi}{3}.$

2 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$

a) Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

b) Số $\frac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n) ?

3 Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

a)
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

4 Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) , biết

a) $u_n = n^3 - 2n + 1$.

b) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

c) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

d) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

5 Việt Nam là quốc gia nằm ở phía Đông bán đảo Đông Dương thuộc khu vực Đông Nam Á. Với dân số ước tính 93,7 triệu dân vào đầu năm 2018, tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu?

6 Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

7 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $u_3 = -6$. B. $u_2 = 4$. C. $u_4 = -8$. D. $u_1 = -2$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$. Tìm u_5 .

- A. 11. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n) .

- A. $u_2 = 2$. B. $u_2 = \sqrt{10}$. C. $u_2 = 10$. D. $u_2 = \sqrt{2}$.

Câu 5. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$ Phần tử thứ 5 của dãy bằng

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 3.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$ Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

- A. $u_7 = 13$. B. $u_7 = 21$. C. $u_7 = 17$. D. $u_7 = 7$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-4}{2n+5}$. Số $\frac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

- A. 4. B. 7. C. 5. D. 6.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 8.

Câu 9. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

- A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. C. $-1; 3; 5; 3$. D. $2; 4; 6; 8$.

Câu 10. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

- A. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. B. $u_n = (-3)^n$. C. $u_n = 2020 - 3n$. D. $u_n = 2018 + 2n$.

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

- A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. B. $u_n = \sin n$. C. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. D. $(-1)^n (2^n + 1)$.

Câu 12. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A. $u_n = \frac{n}{n+1}$. B. $u_n = \sqrt{n^2+1}$. C. $u_n = 2^n + 1$. D. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $u_{n+2} = 2^2$. B. $u_{n+2} = 2^n + 2$. C. $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$. D. $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Câu 14. Cho dãy (u_n) là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát (u_n) là

- A. $\frac{n+1}{n}$. B. $\frac{n-1}{n}$. C. $\frac{n}{n+1}$. D. $\frac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 15. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = -2(n+1)$. B. $u_n = -2n$. C. $u_n = 2n - 4$. D. $u_n = n - 2$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 2^n$. B. $u_n = 2^{n+1}$. C. $u_n = 2$. D. $u_n = n^{n-1}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_3 + u_5 = \frac{104}{35}$. b) (u_n) có đúng một số hạng là số nguyên.
c) (u_n) là dãy số giảm. d) (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 2024^n$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\frac{u_2}{u_1} = 2024$. b) Số hạng thứ $n+1$ là $u_{n+1} = 2024^n + 1$.
c) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng. d) Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

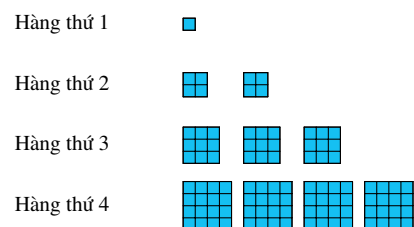
Câu 19. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{4} \right]$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng đầu tiên của dãy là $u_1 = 1$. b) Dãy (u_n) là dãy số tăng.
c) $u_{n+4} = u_n$, với mọi $n \geq 1$. d) Tổng 12 số hạng đầu của dãy số bằng 0.

Câu 20.

Gọi u_n là tổng diện tích của các hình vuông có ở hàng thứ n trong hình bên (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_1 = 1$. b) $u_2 = 4$.
c) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 100$. d) $u_n = n^2$ với $n \in \mathbb{N}^*$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25 vào ô kết quả.

Câu 21. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

KQ:

Câu 22. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \text{ (tỉ đồng)}.$$

Tìm giá trung bình (tỉ đồng) của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 23. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại (triệu đồng) của chiếc máy photocopy đó sau 5 năm kể từ khi mua (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 24. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

KQ:

Câu 25. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng. Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm (tính bằng triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2 Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

3 Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4 Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d . Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

hoặc

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Chứng minh dãy số là một cấp số cộng

Ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một số không đổi (công sai).

≡ Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10, -2, -14, -26, -38;$

b) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{7}{2};$

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5};$

d) $1, 4, 7, 10, 13.$

≡ Bài 2. Viết 5 số hạng đầu của mỗi dãy (u_n) sau và xem nó có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu dãy là một cấp số cộng, hãy tìm công sai.

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n + 2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

≡ Bài 3. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5.$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1.$

DT

2

Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng

≡ Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = 3$.

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

b) Số 832 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

≡ Bài 5. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

≡ Bài 6. Tìm số hạng đầu, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$

DT

3

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$\bullet S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

$$\bullet \text{ Vì } u_n = u_1 + (n-1)d \text{ nên công thức trên có thể viết lại là } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Bài 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Bài 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Bài 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$$

Bài 10. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

Bài 11. Tính các tổng sau

$$\text{a) } S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1). \quad \text{b) } S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

DT

4

Tính chất của cấp số cộng

① Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

② Lưu ý:

- Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a-d; \quad a; \quad a+d$$

- Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a-3d; \quad a-d; \quad a+d; \quad a+3d.$$

Bài 12. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Bài 13. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Bài 14. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Bài 15. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$$

- b) $2(a+b+c)^3 = 9[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)]$.
 c) $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

DT

5

Vận dụng, thực tiễn

Bài 16. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

Bài 17. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Bài 18. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Bài 19. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

- Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$, công sai $d = -2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.
- Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.
- Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.
- Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng $(u_n) : 10, 5, \dots$
- Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.
- Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng $2, 5, 8, \dots$ để được kết quả bằng 345?
- Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.
- Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

- 10 Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

- 11 Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

- 12 Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n - 1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

- 13 Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. 2; 8; 32.

B. 3; 7; 11; 16.

C. (u_n) với $u_n = 4 + 3n$.

D. (v_n) với $v_n = n^3$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) .

A. $d = 3$.

B. $d = -5$.

C. $d = -3$.

D. $d = 5$.

Câu 3. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A. $x = 2, y = 8$.

B. $x = 1, y = 7$.

C. $x = 2, y = 10$.

D. $x = -6, y = 2$.

Câu 4. Cho 9, $x, -1, y$ là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$.

Câu 5. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

A. -21 .

B. 23 .

C. -17 .

D. -19 .

Câu 6. Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

A. $n = 14$.

B. $n = 15$.

C. $n = 13$.

D. $n = 12$.

Câu 7. Cấp số cộng (u_n) có $u_6 = 12, u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1 .

A. $u_1 = 3$.

B. $u_1 = 2$.

C. $u_1 = 5$.

D. $u_1 = -3$.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2, d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 223.

B. 225.

C. 224.

D. 226.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geq 1$. Tìm u_{1000} .

A. 3900.

B. 4000.

C. 3999.

D. 4200.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

A. $u_2 = 9$.

B. $u_2 = 6$.

C. $u_2 = 3$.

D. $u_2 = 12$.

Câu 11. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$.

A. $u_1 = -36, d = 13$.

B. $u_1 = 36, d = 13$.

C. $u_1 = 36, d = -13$.

D. $u_1 = -36, d = -13$.

Câu 12. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4 . Tìm số hạng đầu.

A. $u_1 = -20$.

B. $u_1 = 36$.

C. $u_1 = 540$.

D. $u_1 = 64$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2017}$.

A. $S_{2017} = -4060211$.

B. $S_{2017} = -4060221$.

C. $S_{2017} = 4072323$.

D. $S_{2017} = 4073232$.

Câu 14. Tính tổng $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 397$ ta được kết quả

A. 19298.

B. 19090.

C. 19920.

D. 19900.

Câu 15. Ông X vay của công ty A một khoản tiền 72 triệu đồng và ông này trả nợ cho công ty A như sau: Ở quý thứ nhất ông trả 3 triệu đồng và kể từ quý thứ 2 mức trả sẽ tăng thêm 0,2 triệu đồng mỗi quý. Hỏi sau bao lâu thì ông X trả hết nợ?

- A. 5 năm. B. 6 năm. C. 3 năm. D. 4 năm.

Câu 16. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 6$. D. $n = 4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7n - 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) là $u_1 = 4$. b) Công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = -3$.
c) $u_{2012} = 14081$. d) $S_{100} = 697$.

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 5$ và $d = 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_{99} = 299$.
b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = 3n + 5$.
c) Số 1502 là số hạng thứ 500 của cấp số cộng (u_n) .
d) Tổng của 150 số hạng đầu bằng 34275.

Câu 19. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_4 = 22$, $u_1 \cdot u_5 = 21$ và công sai d dương. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng đầu là $u_1 = 1$. b) Công sai là $d = 4$.
c) $S_{100} = 24850$. d) $u_1 + u_5 + u_9 + \dots + u_{101} = 6520$.

Câu 20. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

- Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
- Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Theo phương án 1, tổng số tiền người lao động nhận được sau 3 năm là 414 triệu đồng.
b) Theo phương án 2, tổng số tiền người lao động nhận được sau 3 năm là 416 triệu đồng.
c) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm, thì phương án 2 có lợi hơn.
d) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm, thì phương án 1 có lợi hơn.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25 vào ô kết quả.

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 22. Bác Bình muốn trồng cây cà phê trên một ngọn đồi như sau: Từ trên đỉnh đồi trồng hàng thứ nhất 2 cây; đi xuống hàng thứ hai 5 cây; đi xuống hàng thứ ba 8 cây; ...; đi xuống hàng cuối cùng dưới chân đồi trồng 26 cây. Theo cách trồng như trên bác bình trồng được bao nhiêu cây cà phê?

KQ:

Câu 23. Một công ty trả lương cho anh A mức lương là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ 2 thì mức lương sẽ tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hỏi tổng số tiền (tính bằng triệu) sau 3 năm làm việc anh A nhận được là bao nhiêu?

KQ:

Câu 24. Bé An luyện tập khiêu vũ cho buổi dạ hội cuối khóa. Bé bắt đầu luyện tập trong 1 giờ vào ngày đầu tiên. Mỗi ngày tiếp theo, bé tăng thêm 5 phút luyện tập so với ngày trước đó. Hỏi sau một tuần, tổng thời gian bé An đã luyện tập là bao nhiêu phút?

KQ:

Câu 25. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước đó. Hỏi cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

KQ:

—HẾT—

§3. CẤP SỐ NHÂN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

2 Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

3 Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2$$

4 Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

- Nếu $q = 1$ thì

$$S_n = nu_1$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Chứng minh dãy số là một cấp số nhân

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

Bài 2. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$.

b) Dãy (v_n) với $v_n = \frac{5}{3^n}$.

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

DT

2

Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$.

a) Tính u_8 .

b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

Bài 5. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Bài 6. Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q và số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n) biết

a)
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$$

DT

3

Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Bài 7. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12 \cdot 2^{n-1}$.

a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q .

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

Bài 8. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 9. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

Bài 10. Tính tổng sau:

a) $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 128$

b) $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \dots + \frac{2^{12}}{3}$

c) $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$

d) $B = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}$

DT 4 Tính chất của cấp số nhân

Bài 11. Tìm a để ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 12. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 13. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Bài 14. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

Bài 15. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Bài 16. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

DT 5 Vận dụng, thực tiễn

Bài 17. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có khoảng bao nhiêu mét khối gỗ?

Bài 18. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là 1,2%. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

Bài 19. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Bài 20. Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

1 Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) 1; 4; 16; 64; 256.

b) 2; -2; 3; -3; 4; -4.

c) $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$.

- 2) Biết ba số $-\frac{1}{5}; b; -\frac{1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm b .
- 3) Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2, u_3 = 18$.
- a) Tìm công bội.
- b) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.
- 4) Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thoả mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.
- 5) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau:
- a) $u_2 = \frac{1}{4}$ và $u_5 = 16$.
- b)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$$
- 6) Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.
- 7) Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.
- 8) Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2 . Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.
- 9) Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền).
- 10) Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi khoảng bao nhiêu?
- 11) Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?
- 12) Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?
- 13) Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là 12288 m^2 , tính diện tích mặt trên cùng.
- 14) Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12% / năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; 32; 63. B. 1; -2; 4; -8; 16; -32.
C. 1; 3; 9; 27; 54; 162. D. 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$.

Câu 2. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = 2^n + 3$. D. $u_n = n + 2$.

Câu 3. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

- A. $q = 9$. B. $q = 2$. C. $q = 3$. D. $q = 6$.

Câu 4. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2 .

- A. $u_2 = 6$. B. $u_2 = 5$. C. $u_2 = -6$. D. $u_2 = 1$.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm u_7 .

- A. $u_7 = 192$. B. $u_7 = -9$. C. $u_7 = -192$. D. $u_7 = 384$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10} .

- A. $\frac{2}{3^8}$. B. $\frac{2}{3^{10}}$. C. $\frac{3}{2^9}$. D. $\frac{2}{3^9}$.

Câu 7. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

- A. $S_{10} = -1023$. B. $S_{10} = 1025$. C. $S_{10} = -1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Câu 8. Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -5$, $u_2 = 10$. Tổng của 15 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

- A. 2. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 0.

Câu 9. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{1023}{2048}$. C. $S = 2$. D. $\frac{1023}{512}$.

Câu 10. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$ bằng

- A. $S = \frac{3^{2019} - 1}{2}$. B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$. C. $S = \frac{3^{2020} - 1}{2}$. D. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = -5$. D. $q = 5$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Công bội q của cấp số nhân là

- A. $q = 2$. B. $q = -3$. C. $q = 3$. D. $q = -2$.

Câu 13. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3$, $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. u_5 . B. u_6 . C. u_7 . D. u_8 .

Câu 14. Xác định x để 3 số $2x - 1$; $2x$; $2x + 3$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = -\frac{3}{4}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = \frac{3}{4}$.

D. $x = \frac{4}{3}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A .

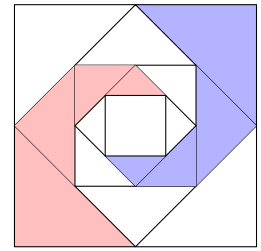
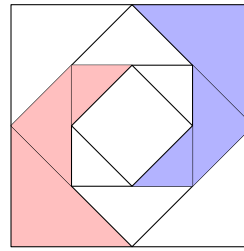
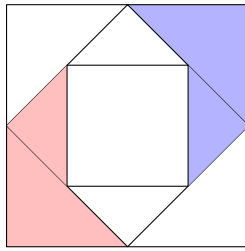
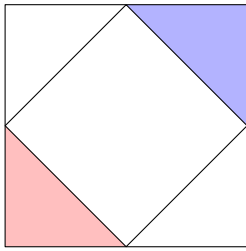
A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{7}$.

C. $\frac{2\pi}{7}$.

D. $\frac{4\pi}{7}$.

Câu 16. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí một hình vuông kích thước $4\text{ m} \times 4\text{ m}$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ đó hoàn thành trang trí hình vuông trên? Biết tiền nước sơn 1 m^2 là 60 000 đồng.



A. 575 000 đồng.

B. 387 500 đồng.

C. 465 000 đồng.

D. 232 500 đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $u_9 = 1280$.

b) $u_n = -5 \cdot 2^n$.

c) 160 là một số hạng của cấp số nhân trên.

d) Tổng của 10 số hạng đầu bằng -5115 .

Câu 18. Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công bội của cấp số nhân là $q = \pm 2$.

b) Số hạng thứ ba của cấp số nhân bằng 12.

c) $S_{12} = 12285$.

d) 3072 là một số hạng của cấp số nhân.

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 8$, $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = u_n - 3$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1 = 5$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = -3$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 + 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n = \frac{1 - 3^n}{2 \cdot 3^{n-2}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng thứ nhất của dãy là $u_1 = -3$.

b) Số hạng thứ hai của dãy là $u_2 = -4$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội là $-\frac{1}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25 vào ô kết quả.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị u_5 bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 22. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 23. Ba số phân biệt tạo thành một cấp số nhân có tổng bằng 78; đồng thời chúng là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ chín của một cấp số cộng. Tính tổng của ba số đó.

KQ:

Câu 24. Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao 10m rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

KQ:

Câu 25. Anh Dũng ký hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

KQ:

—HẾT—

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. C	2. A	3. C	4. B	5. C	6. A	7. D	8. A	9. D	10. D
11. A	12. A	13. D	14. B	15. C	16. A				

Câu 17. ☐a Đ ☐b Đ ☐c S ☐d Đ

Câu 18. ☐a Đ ☐b S ☐c Đ ☐d S

Câu 19. ☐a S ☐b S ☐c Đ ☐d Đ

Câu 20. ☐a Đ ☐b S ☐c Đ ☐d S

Câu 21. 19

Câu 22. 2,97

Câu 23. 11,9

Câu 24. 336

Câu 25. 10,8



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. C	2. B	3. B	4. A	5. C	6. D	7. D	8. B	9. C	10. A
11. C	12. B	13. B	14. D	15. D	16. D				

Câu 17. ☐a Đ ☐b S ☐c Đ ☐d S

Câu 18. ☐a Đ ☐b S ☐c Đ ☐d Đ

Câu 19. ☐a Đ ☐b S ☐c Đ ☐d S

Câu 20. ☐a S ☐b S ☐c S ☐d S

Câu 21. 11

Câu 22. 126

Câu 23. 73,8

Câu 24. 525

Câu 25. 2130



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. B	2. B	3. A	4. A	5. A	6. D	7. D	8. A	9. D	10. A
11. C	12. C	13. C	14. C	15. C	16. C				

Câu 17. ☐a S ☐b S ☐c S ☐d Đ

Câu 18. ☐a S ☐b Đ ☐c Đ ☐d Đ

Câu 19. ☐a S ☐b S ☐c S ☐d S

Câu 20. ☐a Đ ☐b S ☐c S ☐d S

Câu 21. 32

Câu 22. 765

Câu 23. 78

Câu 24. 65,5

Câu 25. 1912

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1. MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

⚙ **Định nghĩa:** Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng tần số ghép nhóm có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_1; u_2)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

⚙ **Chú ý:**

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định. Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$. Ta thường phân chia các nhóm có độ dài L bằng nhau và $L > \frac{R}{k}$, với R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

⚙ **Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu:** Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

2 SỐ TRUNG BÌNH

Cho mẫu số liệu ghép nhóm (**BẢNG 1**)

Nhóm	$[u_1; u_2)$	...	$[u_i; u_{i+1})$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	...	n_i	...	n_k

⚙ Công thức tính:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\bar{x}$ và

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + \dots + n_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = n_1 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \dots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[u_i; u_{i+1})$.

⚙ **Chú ý:** Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm để đưa về dạng Bảng 1 trước khi thực hiện tính toán các số đặc trưng bằng cách hiệu chỉnh nhóm $k_1 - k_2$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$. Chẳng hạn, với dữ liệu ghép nhóm điểm thi môn Toán trong bảng

Điểm thi	1 – 4	5 – 7	8 – 10
Số học sinh	5	20	10

sau khi hiệu chỉnh người ta được bảng:

Điểm thi	$[0,5; 4,5)$	$[4,5; 7,5)$	$[7,5; 10,5)$
Số học sinh	5	20	10

⚙ **Ý nghĩa:** Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng đại diện cho mẫu số liệu.

3 MỐT

⚙ **Công thức tính:** Để tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm (**BẢNG 1**), ta thực hiện theo các bước:

- **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một), giả sử là nhóm $m : [u_m; u_{m+1})$.

- **Bước 2:** Một được xác định là $M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot h$

Trong đó, n_m là tần số nhóm m (quy ước $n_0 = n_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

⚙ **Chú ý:** Người ta chỉ định nghĩa một cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có một hoặc có nhiều hơn một một.

⚙ **Ý nghĩa:** Một của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho một của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Ghép nhóm mẫu số liệu

Bài 1. Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3. Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

Bài 2. Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48
56 53 50 42 55 52 48 46 45 54 52 50
47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40; 45)$. Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

DT

2

Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Bài 3. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	$[69,2; 70)$	$[70; 70,8)$	$[70,8; 71,6)$	$[71,6; 72,4)$	$[72,4; 73,2)$
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Bài 4. Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong bảng sau:

Cân nặng	$[40,5; 45,5)$	$[45,5; 50,5)$	$[50,5; 55,5)$	$[55,5; 60,5)$	$[60,5; 65,5)$	$[65,5; 70,5)$
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Bài 5. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

DT**3****Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm**

Bài 6. Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính một của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

Bài 7. Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10
5 3 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng $[3; 5)$, $[5; 7)$, $[7; 9)$, $[9; 11)$.
b) Một của bảng số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30
40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41
38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 8 nhóm có độ dài bằng nhau.

- 2** Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

- a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.
b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

- 3 Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- 4 Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?
- 5 Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mẫu số liệu ghép nhóm đã cho có tất cả bao nhiêu nhóm?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 2. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

- A. 5. B. 12. C. 20. D. 42.

Câu 3. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

- A. 5. B. 12. C. 20. D. 42.

Câu 4. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Giá trị đại diện của nhóm [40; 60) là

- A. 0. B. 42. C. 50. D. 100.

Câu 5. Mức thưởng tết (triệu đồng) cho các nhân viên của một công ty được thống kê trong bảng sau

Mức thưởng tết	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số nhân viên	13	35	47	25	10

Giá trị đại diện của nhóm [15; 20) là

- A. 5. B. 17,5. C. 30. D. 130.

Câu 6. Khi thống kê chiều cao của học sinh khối lớp 12 trong một trường trung học, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Chiều cao (cm)	[150; 156)	[156; 162)	[162; 168)	[168; 174)	[174; 180)	[180; 186)
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

Độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

- A. 3. B. 6. C. 40. D. 100.

Câu 7. Khi thống kê chiều cao của học sinh khối 12 trong một trường trung học, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Chiều cao (cm)	[150; 156)	[156; 162)	[162; 168)	[168; 174)	[174; 180)	[180; 186)
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

Có bao học sinh khối 12 có chiều cao từ 162 cm đến dưới 168 cm?

- A. 3. B. 6. C. 40. D. 100.

Câu 8. Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Có bao nhiêu học sinh truy cập Internet mỗi buổi tối có thời gian từ 18,5 phút đến dưới 21,5 phút?

- A. 24. B. 15. C. 2. D. 20.

Câu 9. Công ty X trúng thầu may đồng phục cho học sinh trường Y và họ đã đưa ra cỡ quần tây dựa vào số đo vòng eo của học sinh nam như sau:

Vòng eo	[60; 64)	[64; 68)	[68; 72)	[72; 76)	[76; 80)
Cỡ quần	S	M	L	XL	XXL

Và nhà trường đã gửi số đo của 40 học sinh của một lớp để công ty ước lượng tỉ lệ các cỡ quần khi may cho học sinh lớp 11

64	67	74	71	60	64	73	79	66	69
63	65	67	75	78	77	71	71	63	60
61	65	71	71	66	73	63	77	65	63
74	71	62	67	67	72	71	71	79	66

Công ty may 700 quần áo đồng phục cho học sinh lớp 11 thì nên may số lượng quần áo cỡ S là bao nhiêu chiếc?

- A. 129. B. 137. C. 140. D. 153.

Câu 10. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Nhóm chứa một nửa của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. [20; 40). B. [40; 60). C. [60; 80). D. [80; 100).

Câu 11. Khi thống kê chiều cao của học sinh khối 12 trong một trường trung học, ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Chiều cao (cm)	[150; 156)	[156; 162)	[162; 168)	[168; 174)	[174; 180)	[180; 186)
Số học sinh	5	18	40	26	8	3

Nhóm chứa một nửa của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- A. [150; 156). B. [162; 168). C. [168; 174). D. [180; 186).

Câu 12. Cho mẫu số liệu với cỡ mẫu n được cho dưới bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình $\bar{x}$ của mẫu số liệu trên được tính bằng công thức nào sau đây

- A. $\bar{x} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k}{n}$. B. $\bar{x} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n}$.
C. $\bar{x} = \frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_k u_k}{n}$. D. $\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n}$.

Câu 13. Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau:

Cân nặng	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số học sinh	2	10	16	8	2	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

- A. 56. B. 50. C. 60. D. 55.

Câu 14. Thống kê về thời lượng mỗi trận đấu bi-a trong vòng tứ kết giải đấu European Open người ta được mẫu số liệu ghép nhóm như sau

Thời gian	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số trận	3	12	15	24	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây

- A. 17. B. 17,5. C. 18. D. 18,5.

Câu 15. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7; 9). B. [9; 11). C. [11; 13). D. [13; 15).

Câu 16. Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

Điểm	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Học viên	10	30	55	42	9

Số trung bình của mẫu số liệu thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [8; 10). B. [4; 6). C. [2; 4). D. [6; 8).

Câu 17. Khảo sát về số giờ mượn sách thư viện của học sinh khối 11 trường Y ta được một mẫu số liệu ghép nhóm như sau

Số giờ mượn	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
Số học sinh	54	78	120	45	12

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên gần nhất với giá trị nào sau đây

- A. 120. B. 12. C. 8. D. 9.

Câu 18. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Mốt của mẫu số liệu trên là

- A. 42. B. 52. C. 53. D. 54.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 19. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi và số người dự thi như sau:

Điểm thi	[2 ; 4)	[4 ; 6)	[6 ; 8)	[8 ; 10)	[10 ; 12)
Số người dự thi	4	20	9	16	15

- a) Độ dài mỗi nhóm của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 2.
 b) Cỡ mẫu của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 62.
 c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là 7,56 .
 d) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $\frac{140}{27}$.

Câu 20. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A, B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (gam)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Giá trị đại diện nhóm [150; 155) bằng 152,5.
- Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô A là 163,7 (gam).
- Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô B là 162,1 (gam).
- Theo số trung bình thì cam ở lô hàng B nặng hơn cam ở lô hàng A.

Câu 21. Số lượng người đi xem một bộ phim mới theo độ tuổi trong một rạp chiếu phim (sau 1 giờ đầu công chiếu) được ghi lại theo bảng phân phối ghép nhóm sau:

Độ tuổi	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số người	6	12	16	7	2

- Giá trị đại diện nhóm [50; 60) là 55.
- Độ tuổi được dự báo là ít xem phim đó nhất là thuộc nhóm [50; 60).
- Nhóm chứa một là nửa khoảng [30; 40).
- Độ tuổi được dự báo là thích xem phim đó nhiều nhất là 31 tuổi.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 22. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi và số người dự thi như sau:

Điểm thi	[0 ; 3,5)	[3,5 ; 7)	[7 ; 10,5)	[10,5 ; 14)	[14 ; 17,5)	[17,5 ; 21)
Số người dự thi	15	8	16	2	17	18

Tính điểm thi trung bình từ mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 23. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi và số người dự thi như sau:

Điểm thi	[0 ; 3)	[3 ; 6)	[6 ; 9)	[9 ; 12)	[12 ; 15)	[15 ; 18)
Số người dự thi	8	12	13	1	19	10

Tính điểm thi trung bình từ mẫu số liệu ghép nhóm trên.

KQ:

A. 7,95 .

B. 9,00 .

C. 6,00 .

D. 9,45 .

Câu 24. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về điểm số và số học sinh như hình dưới đây

Điểm số	[2 ; 4,5)	[4,5 ; 7)	[7 ; 9,5)	[9,5 ; 12)	[12 ; 14,5)	[14,5 ; 17)
Số học sinh	1	6	3	10	9	1

Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 25. Một công ty bất động sản khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua căn hộ ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau:

Mức giá (triệu đồng/ m^2)	[28; 32)	[32; 36)	[36; 40)	[40; 44)	[44; 48)
Số khách hàng	40	78	120	51	11

Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

KQ:

§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	...	$[u_m; u_{m+1})$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	...	n_m	...	n_k

1 Trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm

⚙ Công thức tính:

- ② Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- ③ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - (n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1})}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

⚙ **Ý nghĩa:** Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

2 Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi Q_r là tứ phân vị thứ r của mẫu số liệu ghép nhóm ($r = 1, 2, 3$);
- Nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ r và n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ r ;

Khi đó ta có công thức tính Q_r như sau:

$$Q_r = u_m + \frac{r \cdot \frac{n}{4} - (n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1})}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

CHÚ Ý

Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu gồm 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Bài 1. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Bài 2. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 3. Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

DT

2

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Bài 4. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 5. Bảng bên cho biết tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Tần số	2	10	16	8	2	2

Bài 6. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

- Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.
- Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Bài 7. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

- Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimet). Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	Tần số
[30; 40)	4
[40; 50)	10
[50; 60)	14
[60; 70)	6
[70; 80)	4
[80; 90)	2
	$n = 40$

- Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65
 51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5
 61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61
 49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

- Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$[40; 45)$, $[45; 50)$, $[50; 55)$, $[55; 60)$, $[60; 65)$, $[65; 70)$.

- Xác định số trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

- 5 Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

- a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

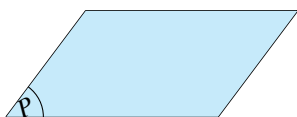
§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

⚙ **Mặt phẳng:** Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc



Kí hiệu (P) hoặc $mp(P)$

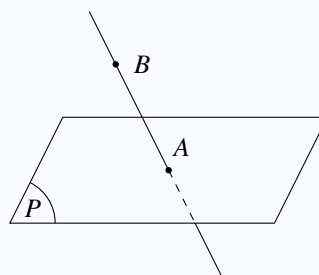


Kí hiệu (α) hoặc $mp(\alpha)$

⚙ **Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm A, B và mặt phẳng (α) .

- ① Khi A thuộc mặt phẳng (α) , ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.
- ② Khi B không thuộc mặt phẳng (α) , ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.

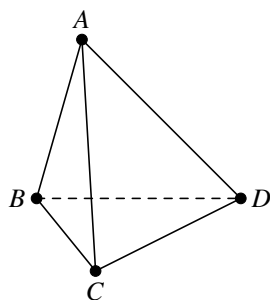
⚠ **Dấu hiệu nhận biết $A \in (\alpha)$ là điểm A thuộc một đường thẳng nằm trong (α)**



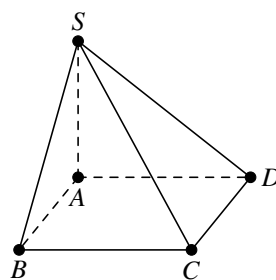
⚙ **Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:**

- ① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.
- ① Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là
 - Nếu hình thực tế điểm A thuộc đường thẳng Δ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.
 - Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

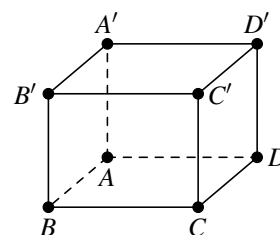
Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:



Hình tứ diện



Hình chóp tứ giác đáy hình bình hành



Hình lập phương, hộp chữ nhật

2 CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

⚙️ **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

⚙️ **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

⚙️ **Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là (ABC) . Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

⚙️ **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

① Khi d nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$. (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)

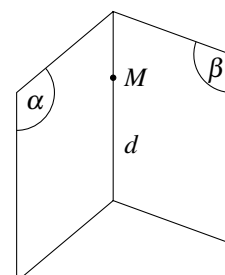
② Khi d không nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.

⚠️ Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên d có hai điểm phân biệt thuộc (α)

⚙️ **Tính chất 5:**

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.



⚙️ **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẶNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC) .
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d , kí hiệu (A, d) .
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b) .

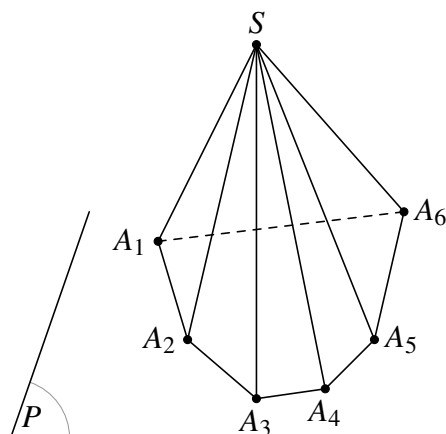
4 HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

⚙ Hình chóp:

✓ **Định nghĩa:** Cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3 \dots A_n$.

✓ Các tên gọi:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.

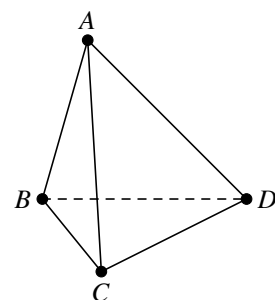


⚙ Hình tứ diện:

✓ **Định nghĩa:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

✓ Chú ý:

- Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
- Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.



Hình tứ diện



DT

1

Các quan hệ cơ bản

- ① Chứng minh điểm A thuộc (α) : Ta chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng Δ nằm trong α , nghĩa là

$$\begin{cases} A \in \Delta \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha).$$

- ② Chứng minh đường thẳng d nằm trong (α) : Ta chứng tỏ d có hai điểm phân biệt cùng thuộc (α) , nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \\ A, B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

- ③ Chứng minh A là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) : Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

hoặc

$$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

≡ Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC) . Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB (D, E khác S).

- Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?
- Giả sử DE cắt AB tại F . Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE) .

≡ Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- Chứng minh rằng O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

≡ Bài 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA .

- Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.

DT

2

Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

- ① Hai mặt phẳng (α) và (β) có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng

qua hai điểm chung đó.

② Hai mặt phẳng (α) và (β) thấy trước một điểm chung A :

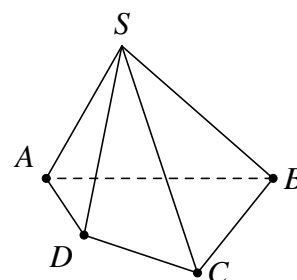
- A là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong (α) tìm một đường thẳng d_1 , trong (β) tìm một đường thẳng d_2 sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.

③ Hai mặt phẳng (α) và (β) chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

≡ Bài 4.

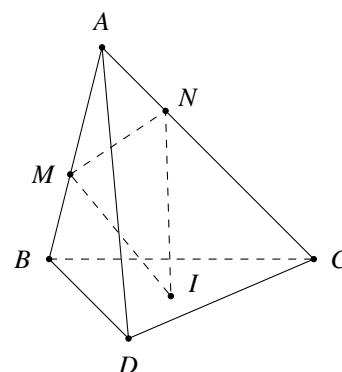
Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

- Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) .
- Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) .
- Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC) .



≡ Bài 5.

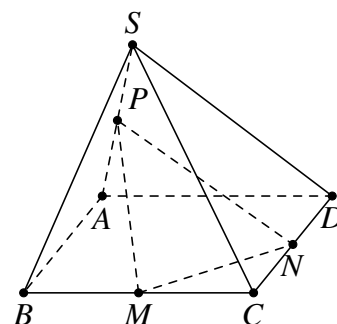
Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC . Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (ABD) , (ACD) .



≡ Bài 6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA . Tìm giao tuyến của

- (MNP) và (SAB) .
- (MNP) và (SBC) .
- (MNP) và (SAD) .
- (MNP) và (SCD) .



≡ Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC . N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng

- $(ABCD)$.
- (SAD) .
- (SCD) .

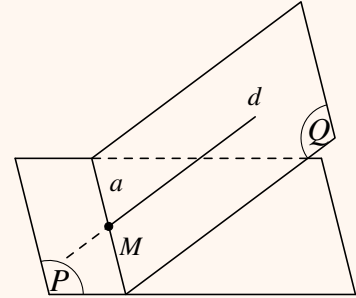
⚠ Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P) . Xét hai khả năng:

① Nếu đường thẳng a dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d . Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P) ;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.



≡ **Bài 8.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . K là điểm nằm trên BD sao cho $KD < KB$.

- Tìm giao điểm của CD với mặt phẳng (MNK) .
- Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK) .

≡ **Bài 9.** Cho tứ diện $ABCD$. trên cạnh AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho $AC = 3AM$ và $AN = \frac{2}{3}AD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác (BCD) .

- Tìm giao điểm của BC với (OMN) .
- Tìm giao điểm của BD với (OMN) .

≡ **Bài 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

≡ **Bài 11.** Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M , trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

- Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

⚠ Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) , nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.

- Ta có $A = a \cap b$, mà $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ nên

$$A \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (1)$$

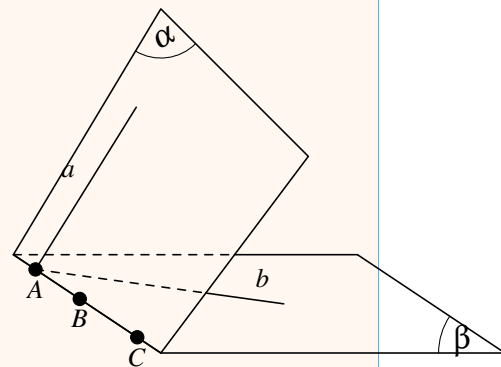
- Tương tự ta cũng tìm xem B và C tương ứng là giao của cặp đường thẳng nào nằm trong (α) và (β) . Từ đó, suy ra

$$B \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (2)$$

và

$$C \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra A, B, C cùng thuộc đường giao tuyến nên chúng thẳng hàng.



≡ Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD , Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP) .
- Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

≡ Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC . Gọi O là một điểm trong tam giác BCD .
 - Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD) .
 - Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN) .
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB song song với CD . O là giao điểm của hai đường chéo, M thuộc SB .
 - Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC) .
 - Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .
 - Tìm $I = AN \cap (SBD)$.
 - Tìm $K = MN \cap (SBD)$.
 - Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.
 - Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính $\frac{IB}{IK}$.

- 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB , N thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.
- Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$
 - Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$
 - Tìm $SA \cap (CMN)$
- 5 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB , K là trọng tâm của tam giác ACD .
- Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD) .
 - Tìm giao điểm H của MK và $mp(BCD)$. Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH .
 - Trên BC lấy điểm N . Tìm giao điểm P, Q của CD, AD với $mp(MNK)$.
- 6 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi M là trung điểm của SA .
- Xác định giao điểm K của đường thẳng CD với mặt phẳng (SAB) .
 - Xác định giao điểm E của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD) .
 - Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
 - Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) .
 - Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của MC và DE . Chứng minh rằng ba điểm S, I, O thẳng hàng.
- 7 Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là ba điểm trên ba cạnh SA, SB, SC sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K . Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.
- 8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD , M là trung điểm của SB .
- Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.
 - Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng và D là trung điểm của CN .
- 9 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC .
- Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD) .
 - Gọi N là trung điểm của BO . Xác định giao điểm I của (AMN) với SD . Chứng minh $\frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$.

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

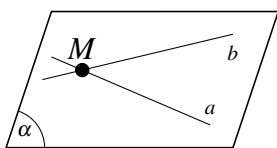
1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b .

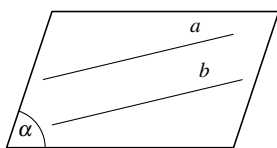


⚙️ Các trường hợp có thể xảy ra:

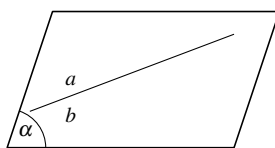
- Nếu a và b đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chứa được cả a và b) thì ta nói a và b chéo nhau.



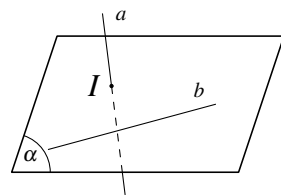
- * a cắt b
- * Kí hiệu $a \cap b = M$



- * a song song b
- * Kí hiệu $a \parallel b$



- * a trùng b
- * Kí hiệu $a \equiv b$



- * a chéo b
- * a, b không điểm chung

⚙️ Chú ý:

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt.

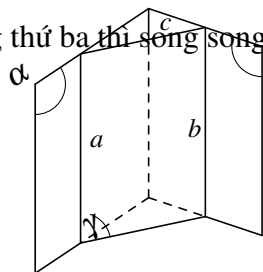
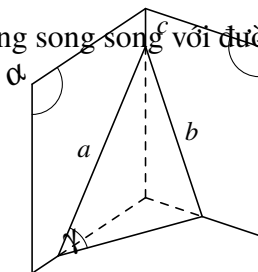
- Khi kiểm tra hai đường thẳng a và b **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi a và b không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

2 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

⚙️ **Định lý 1:** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

⚙️ **Định lý 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

⚙️ **Định lý 3:** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



⚠️ **Hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt. Xét vị trí tương đối của a với b , ta thực hiện các bước sau:



Bước 1: Kiểm tra xem hai đường thẳng a và b có đồng phẳng không?

- Nếu a và b không đồng phẳng thì a và b chéo nhau.
- Nếu a và b đồng phẳng chuyển sang bước 2.



Bước 2: Kiểm tra xem a và b có điểm chung hay không?

Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:

- ✔ **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- ✔ **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến d sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BD ; G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNG) .

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Tìm

- a) $(SAB) \cap (SCD)$. b) $(MBC) \cap (SAD)$. c) $(MEF) \cap (SAC)$.
d) $AD \cap (MEF)$. e) $SD \cap (MEF)$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh

a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$; b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.
- 2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD . Chứng minh

a) $IJ \parallel MN$; b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.
- 3 Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .

a) Chứng minh $EF \parallel CD$. b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$. c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.
- 4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của

a) (SBC) và (SAD) ; b) (SAB) và (SCD) ; c) (MNP) và $(ABCD)$.
- 5 Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB , G là một điểm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) (SAC) và (EFC) ; b) (SAC) và (EFG) .
- 6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , N là trung điểm SG . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SCD) .

- 7 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD ($QA \neq QD$) và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ) . Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.
- 8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS, NA = 2ND, PC = 2PB$.
- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) , (SAC) và (SBD) .
 - Xác định giao điểm Q của SB với (MNP) .
 - Gọi K là trung điểm của SD . Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.
- 9 Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .
- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
 - Tìm giao điểm I của SB và (CMN) , giao điểm J của SA và (ICD) .
 - Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO cắt nhau tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.
- 10 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .
- Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
 - Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.
 - Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

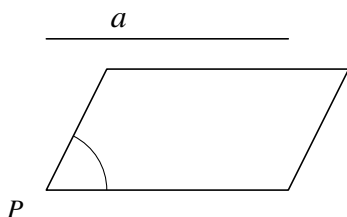
§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

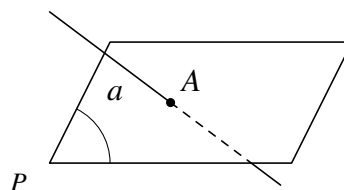
1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau:



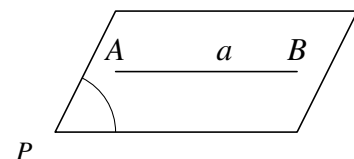
* a và (P) không có điểm chung.

* a song song (P) . Kí hiệu $a \parallel (P)$.



* a và (P) có đúng 1 điểm chung.

* a cắt (P) . Kí hiệu $a \cap (P) = A$.



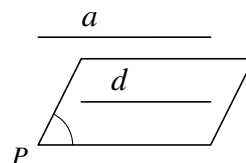
* a và (P) có vô số điểm chung.

* a nằm trong (P) . Kí hiệu $a \subset (P)$.

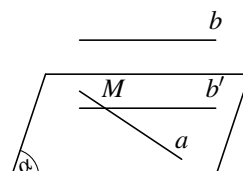
2 CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P) , hay

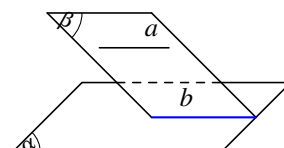
$$a \not\subset (P) \text{ và } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



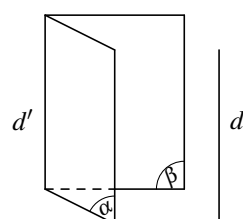
Định lý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Định lý 3: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



! Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

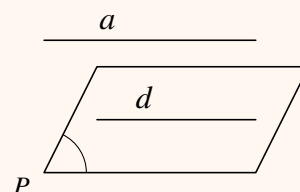
DT 1 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) , ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) . Suy ra $a \parallel (P)$.

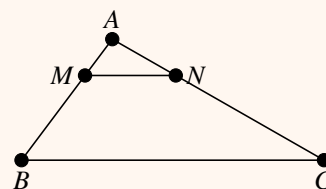
Tóm lại

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



Chú ý: Việc chứng minh $a \parallel b$, ta thường đi đến việc xét các yếu tố song song đã biết trong hình học phẳng như

- ① Cặp cạnh đối của hình bình hành;
- ② Đường trung bình trong tam giác;
- ③ Tỷ lệ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$ (hình bên). Đặc biệt cần chú ý tỷ lệ trọng tâm của tam giác.



≡ Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

≡ Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD) .

≡ Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- b) Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC) .

≡ Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- b) Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

≡ Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- a) Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

DT

2

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

⚙ Các phương pháp đã học ở hai bài trước:

- ① Tìm hai điểm chung phân biệt. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.
- ② Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

⚙ Ta xét thêm một trong hai cách sau:

- ① Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (\beta) = Mx \parallel a$$

- ② Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

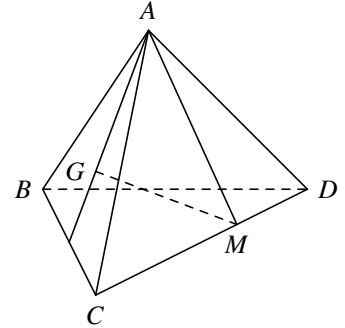


hay
$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a.$$

≡ Bài 6.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

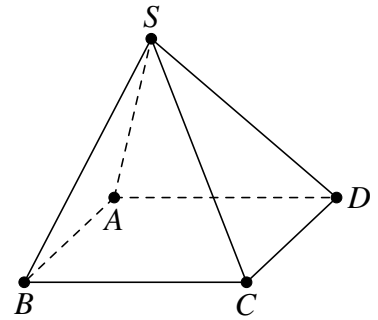
- Chứng minh MG song song với (ABD) .
- Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM) .



≡ Bài 7.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD .

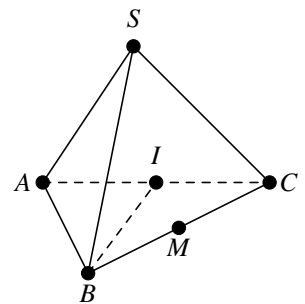
- Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC) , (SIK) và (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của SB . Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.
- Tìm giao điểm F của DM và (SIK) . Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$.



≡ Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I là trung điểm của SB . Gọi (P) là mặt phẳng qua I , song song với SD và AC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

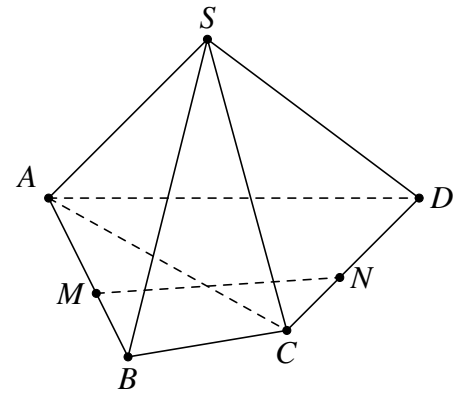
≡ Bài 9.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song với BI và SC . Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB . Tứ giác $MNKH$ là hình gì?



≡ Bài 10.

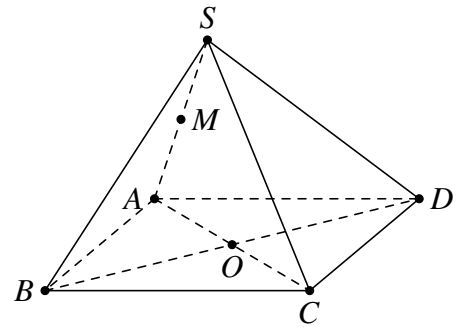
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



≡ Bài 11.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của SA .

- Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD) .
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC .
 - Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.
 - Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN) .
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:
 - $DI \parallel (SBC)$.
 - $GO \parallel (SCD)$.
 - $SB \parallel (ACE)$.
- Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD .
 - Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
 - Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?
- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .
 - Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

6 Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD , H là điểm đối xứng của G qua I .

a) Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD) . Tính tỉ số $\frac{GK}{GM}$.

7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm của SA . Gọi (P) là mặt phẳng qua O , song song với BM và SD . Tìm giao tuyến của (P) và (SAD) .

8 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng SB, SD . Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh AB, AD .

a) Chứng minh rằng $EM \parallel SB$ và $EN \parallel SD$.

b) Giả sử đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC, CD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt phẳng $(SBC), (SCD)$.

§4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

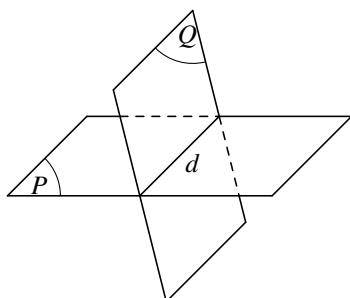
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Các trường hợp có thể xảy ra:

✓ **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.

✓ **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (**Hình 1**).

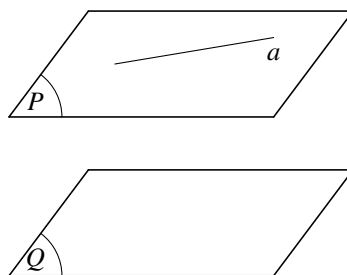
✓ **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (**Hình 2**).

- Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;
- Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

$(P), (Q)$ cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



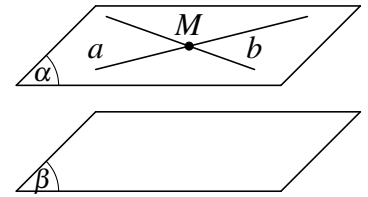
Hình 2.

$(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2 CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

⚙ Định lý 1:

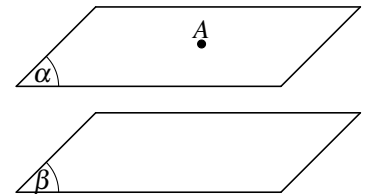
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



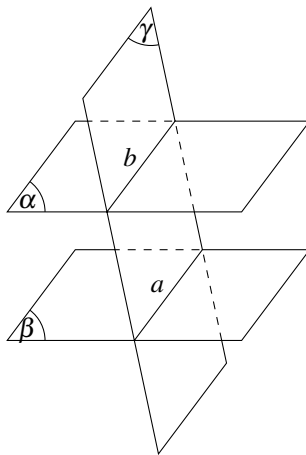
- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.

⚙ Định lý 2:

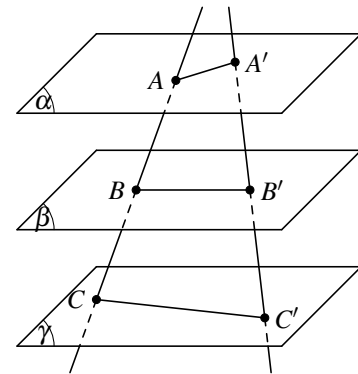
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



⚙ Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



⚙ Định lý 4: (Định lý Thales) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

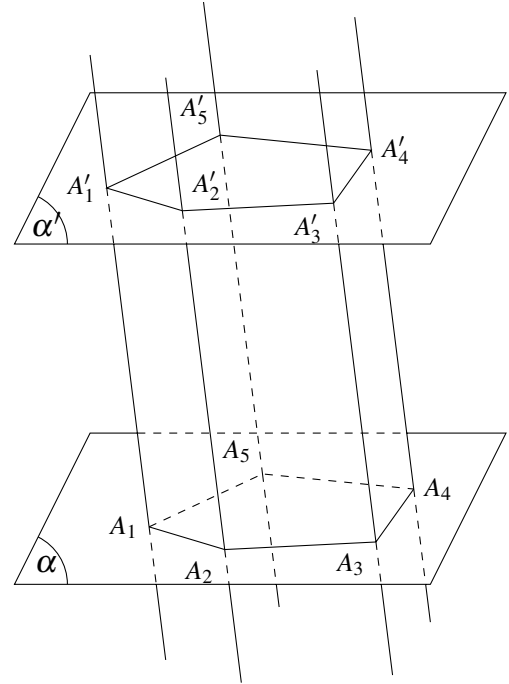


3 HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\alpha')$. Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



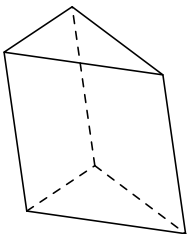
Tính chất:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

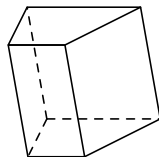
Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

- Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

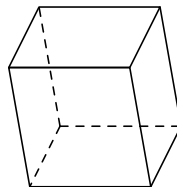
Minh họa vài mô hình thường gặp:



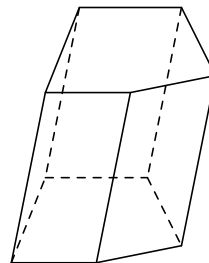
* Lăng trụ tam giác



* Lăng trụ tứ giác



* Hình hộp



* Lăng trụ ngũ giác



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

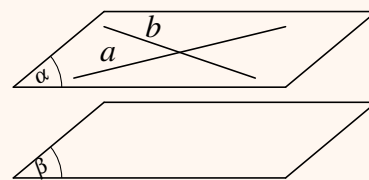
1

Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB .

- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

Bài 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF . Chứng minh

- $(ADF) \parallel (BCE)$.
- $(DIK) \parallel (JBE)$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Bài 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' .

- Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.
- Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

DT

2

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P) , ta thường sử dụng một trong hai cách sau

Cách 1: (Đã xét ở bài học trước) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) . Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD . Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3 . Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

- Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.
- Gọi I là trung điểm của SD , J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh IJ song song với (SAB) .

DT

3

Định lý Thales

Bài 8. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Tính tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$.

Bài 9. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $2AA_1 = 2A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1 = 2B_1B_2 = B_2S$ và $2CC_1 = 2C_1C_2 = C_2S$.

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9, SB = 12, SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4, MN = 3, NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự M', N' và cắt SC theo thứ tự M'', N'' . Tính độ dài các đoạn thẳng $SM', M'N', M''N'', N''C$.

DT

4

Hình hộp, hình lăng trụ

Bài 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

Bài 12. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại E, F, M, H . Hỏi hình tạo bởi các điểm E, F, M, H, D, D', C', C là hình gì?

Bài 13. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại M' , qua N vẽ đường thẳng song song với AB cắt AF tại N' .

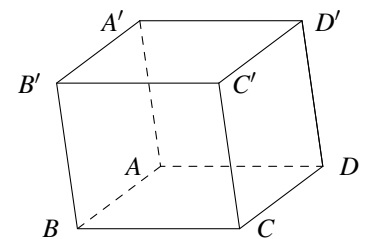
- Chứng minh rằng $(MNN') \parallel (CDE)$.
- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD) . Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng EF tại I . Tính $\frac{FI}{FE}$, biết $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$.



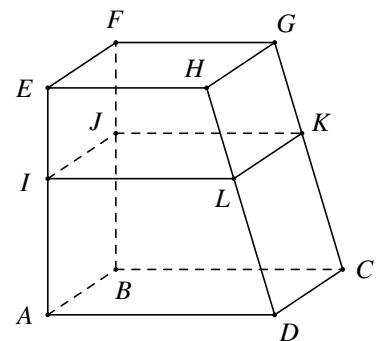
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.
- 2 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD . Gọi M là trung điểm của SD , E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M , SE cắt CD tại K . Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.
- 3 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.
- 4 Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.
 - a) Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.
 - b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua G . Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

- 5 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.



- 6 Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 81$ cm, $CG = 92$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (Hình bên). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).



§5. PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG



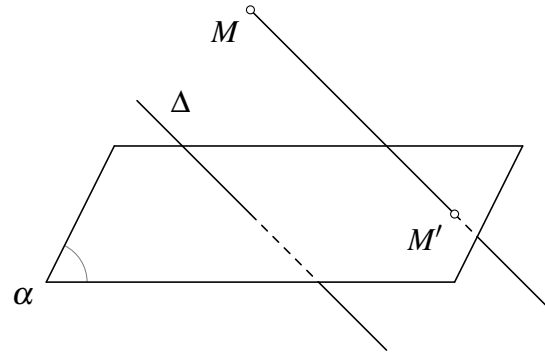
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:



- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α) .
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ .
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ .
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ .
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu**.



2 TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

- ① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
- ② Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- ③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- ④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3 HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

- ① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- ② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:
 - Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
 - Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thỏa mãn $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
 - Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

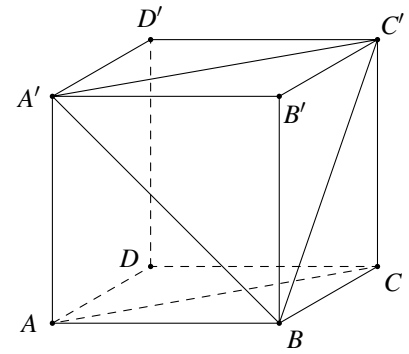
1

Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

≡ Bài 1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- Xác định hình chiếu của các điểm A' , B' , D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $D'C$.
- Xác định ảnh của tam giác $A'C'B$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương DD' .



≡ Bài 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

- Xác định hình chiếu M' của M qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương AA' .
- Chứng minh rằng $M'B' = 2M'C'$.

≡ Bài 3. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

≡ Bài 4. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

DT

2

Về hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

≡ Bài 5. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau:

- hình lục giác đều.
- hình ngũ giác đều.
- tam giác vuông nội tiếp một đường tròn.

≡ Bài 6. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD ; $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

§15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

⚙ **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

⚠ Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \rightarrow +\infty$)

⚙ **Một vài giới hạn đặc biệt:** (có thể xem như công thức)

- $\lim \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- $\lim \frac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim C = C$, $\forall C \in \mathbb{R}$;
- $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2 ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

⚙ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì ta có:

- $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$;
- $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$, với $b \neq 0$;
- $\lim |u_n| = |a|$;
- $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$;
- $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;
- $\lim (k \cdot u_n) = k \cdot a$ ($k \in \mathbb{R}$).

⚙ **Định lý "kẹp giữa":**

- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

3 TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

- Định nghĩa 1:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim u_n = +\infty$$

- Định nghĩa 2:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\lim u_n = -\infty$$

- Một số giới hạn đặc biệt:**

① $\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$.

② $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

- Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:**

- ① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- ② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Xét giới hạn: $\lim \frac{u_n}{v_n}$.



Phương pháp giải:

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞ " ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k , đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

 **Chú ý:** Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞ " có dạng a^n .

Bài 1. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{2n^2 + 3n - 1}{2 - 3n^2} & \text{b) } \lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4} & \text{c) } \lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1} \\ \text{d) } \lim \left(\frac{n+1}{n^2 + 2n} - \frac{1}{n-1} \right) & \text{e) } \lim \left(\frac{2n^2 + 3n}{n+1} - \frac{2n^3 - 3}{n^2 - 1} \right) & \text{f) } \lim n \left(1 - \frac{n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) \\ \text{g) } \lim \frac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2 - n + 5} & \text{h) } \lim \frac{n^4 - 2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)} & \text{i) } \lim \frac{(2n^4 + 1)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4} \end{array}$$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{1 + 3^n}{4 + 3^n} & \text{b) } \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n} & \text{c) } \lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n} \end{array}$$

Bài 3. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n} & \text{b) } \lim \frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}} & \text{c) } \lim \frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2} \\ \text{d) } \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n} & \text{e) } \lim \frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3} & \text{f) } \lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \end{array}$$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2} & \text{b) } \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] \\ \text{c) } \lim \left(\frac{2+4+8+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n - 1} \right) & \text{d) } \lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \dots \frac{1}{n(n+1)} \right) \end{array}$$

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$, với mọi $n \geq 1$.

- Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.
- Tính $\lim u_n$.

DT

2

Khử vô định dạng $\infty - \infty$

Xét các giới hạn dạng: $\lim (\sqrt{u_n} - v_n)$ hoặc $\lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$.

 **Phương pháp giải:**

- Nhân thêm lượng liên hợp:

$$\textcircled{1} \lim (\sqrt{u_n} - v_n) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - v_n)(\sqrt{u_n} + v_n)}{\sqrt{u_n} + v_n} = \lim \frac{u_n - v_n^2}{\sqrt{u_n} + v_n}$$

$$\textcircled{2} \lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) = \lim \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} = \lim \frac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$$

- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

 **Chú ý:** Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A} - B = \frac{(\sqrt[3]{A} - B)(\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2)}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2} = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2}$$

Bài 6. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ b) $\lim (2n - \sqrt{4n^2 + n})$ c) $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})$
d) $\lim n (\sqrt{n^2 + 2} - n)$ e) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)$ f) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 4}}$.

Bài 7. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - n)$ b) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$ c) $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + n})$

DT

3

Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

- $\textcircled{1}$ Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- $\textcircled{2}$ Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Bài 8. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim (2n^3 + 2n - 1)$ b) $\lim (n - 2n^3)$ c) $\lim \sqrt{n^2 + 2n + 7}$
d) $\lim (\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n + 2})$ e) $\lim (1 - \sqrt{1 + 3n^2})$ f) $\lim (3^n - 2 \cdot 5^n)$



≡ Bài 9. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$

b) $\lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n - 2 \cdot 6^n}$

c) $\lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 7^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

≡ Bài 10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$

b) $\lim \frac{2n^3 + n + 4}{5n - n^2}$

c) $\lim \frac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}$

d) $\lim \frac{2n+5}{\sqrt{n^2+1}-n}$

e) $\lim \frac{2n+5}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

f) $\lim \frac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}$

DT

4

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

⚙ Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.

⚙ Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , Xét $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$. Khi đó, ta có công thức tính

$$S = \frac{u_1}{1-q}$$

≡ Bài 11. Tính các tổng sau:

a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$

b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

≡ Bài 12. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

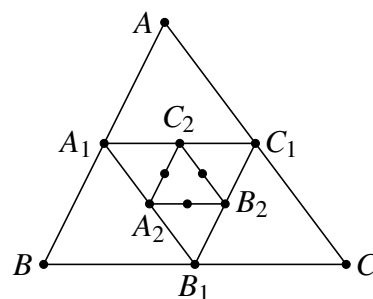
a) $A = 0,353535\dots$

b) $B = 5,231231\dots$

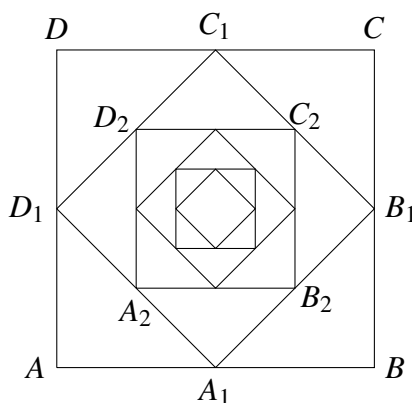
≡ Bài 13. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

≡ Bài 14.

Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.



≡ Bài 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2, \dots$, hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}, \dots$ (quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn)



Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3, \dots, A_nB_nC_nD_n, \dots$. Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim (u_n + v_n), \lim (u_n - v_n), \lim (u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$.

2 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim \frac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

d) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

3 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{7 \cdot 5^n - 2 \cdot 7^n}{5^n - 5 \cdot 7^n}$.

b) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$.

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2+2n}-n)$.

b) $\lim (\sqrt{n^3+2n}-n^2)$.

c) $\lim (\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$.

d) $\lim (\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

5 Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}$.

b) $\lim \frac{1 - \sin n\pi}{n+1}$.

6 Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

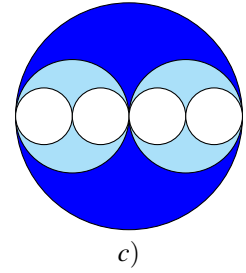
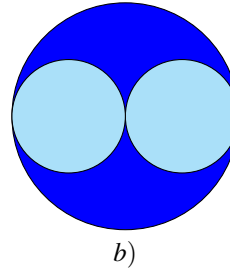
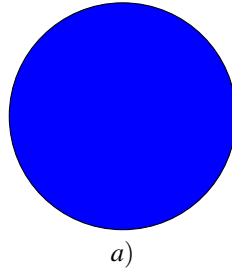
a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$.

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$.

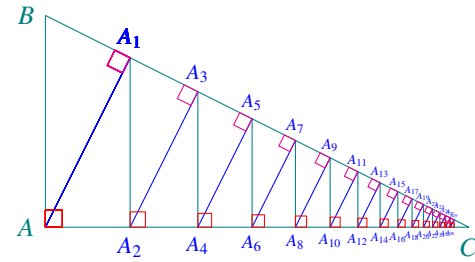
7 Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\dots$ dưới dạng một phân số.



- 8 Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a . Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b . Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c . Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



- 9 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .



§16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$



- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

⚙ Chú ý:

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

- Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

3 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

- Định nghĩa :** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

⚙ Một vài giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

⚙ Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.



DT

1

Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\frac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x - x_0$.

Phân tích $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

! Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.
- Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.

Bài 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 1}{x^2 + 2}$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{5 - x^2}}{x + 1}$.

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x+5} - 2}.$$

DT

2

Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

≡ Bài 4. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 1 \right).$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{(x+1)(2x^2 - 3)}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}.$$

≡ Bài 5. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{5x - 1}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}.$$

≡ Bài 6. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x}).$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

≡ Bài 7. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x}).$$

≡ Bài 8. Tính giới hạn của các hàm số sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3).$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2).$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2).$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x).$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 + x}).$$

≡ Bài 9. Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 3}{x + 1}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^2 + 3x - 3}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 - 15x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{2x - 7}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - x}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

DT

3

Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.



Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Bài 11. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - 2x + 6};$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 5}{x - 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + \sqrt{3-x}}{x-3};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}.$

DT

4

Vận dụng thực tiễn

Bài 12. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Bài 13. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3 . Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc $2 \text{ m}^3/\text{phút}$.

- Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Bài 14. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

3 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x - 5}{7x^2 + 5x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}.$

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - x - 2}{x^3 - 4x + 3}.$

5 Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x}.$

6 Cho hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

7 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x).$

8 Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

9 Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$). Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

10 Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

11 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3ax - 4a}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$.

- a) Tìm mối quan hệ giữa a và b .
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

§17. HÀM SỐ LIÊN TỤC



TÓM TẮT LÝ THUYẾT

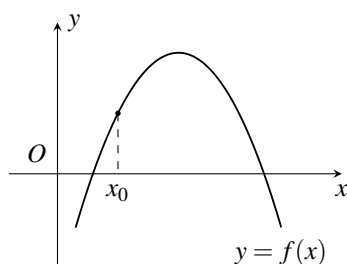
1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

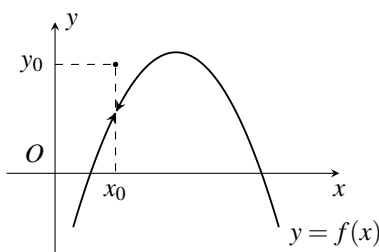
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

! Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0 .

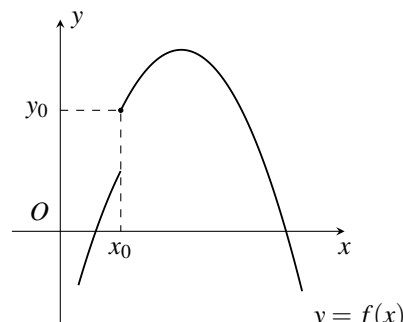
Minh họa đồ thị:



Hàm số liên tục tại x_0



Hàm số gián đoạn tại x_0



Hàm số gián đoạn tại x_0

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

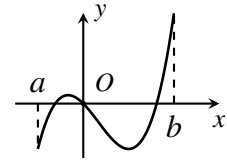
Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.



- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục trên $(a; b)$.
- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.



3 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

≡ Bài 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

≡ Bài 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

≡ Bài 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

DT

2

Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

⚙ Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

⚙ Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

≡ Bài 6. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

≡ Bài 7. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

≡ Bài 8. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

DT

3

Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

≡ Bài 9. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

≡ Bài 10. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$.

≡ Bài 11. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x_0 = 1$.

☀ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.

☀ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

Bài 12. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Bài 13. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Xét tính liên tục của hàm số:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 0.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 1.$$

2 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2. \end{cases}$ Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3 Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

4 Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

5 Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

6 Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

- 7 Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.
- 8 Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.
- 9 Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.