



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 03

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN *Oxyz*

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





⌘ Chủ đề 01. TỌA ĐỘ

A. Lý thuyết chung

1. Vectơ	4
2. Điểm	5
3. Hình chiếu vuông góc	8
4. Đối xứng	8
5. Góc	9
6. Khoảng cách	9

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1.1. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước	10
➤ Dạng 1.2. Tìm tọa độ điểm đặc biệt	12
➤ Dạng 1.3. Tìm tọa độ vectơ thỏa điều kiện cho trước	17
➤ Dạng 1.4. Liên quan độ dài	18
➤ Dạng 1.5. Sự cùng phương	20
➤ Dạng 1.6. Sự đồng phẳng	21
➤ Dạng 1.7. Ứng dụng tích có hướng	23
➤ Dạng 1.8. Liên quan góc	26
➤ Dạng 1.9. Tâm tỷ cự	28
➤ Dạng 1.10. Tọa độ hóa	30
⌘ Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian	31

⌘ Chủ đề 02. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	37
2. Vị trí tương đối	37

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 2.1. Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu	39
➤ Dạng 2.2. Phương trình mặt cầu có tâm và đi qua một điểm	41
➤ Dạng 2.3. Phương trình mặt cầu nhận hai điểm làm đường kính	42
➤ Dạng 2.4. Phương trình mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng	43

➤ Dạng 2.5. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc (P) và qua ba điểm	44
➤ Dạng 2.6. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc d và qua hai điểm	45
➤ Dạng 2.7. Phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng – đường thẳng.....	46
➤ Dạng 2.8. Phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng – đường thẳng	48

⌘ Chủ đề 03. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	50
2. Vị trí tương đối hai mặt phẳng	50

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 3.1. Xác định vecto pháp tuyến	51
➤ Dạng 3.2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đồng phẳng.....	52
➤ Dạng 3.3. Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và chứa vectơ	54
➤ Dạng 3.4. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng	55
➤ Dạng 3.5. Phương trình mặt phẳng qua 2 điểm, vuông góc mặt phẳng.....	56
➤ Dạng 3.6. Phương trình mặt phẳng qua điểm, vuông góc 2 mặt phẳng.....	57
➤ Dạng 3.7. Phương trình mặt phẳng song song mặt phẳng khác	58
➤ Dạng 3.8. Phương trình mặt phẳng qua điểm, song song/vuông góc đường thẳng	60
➤ Dạng 3.9. Phương trình mặt phẳng qua điểm, chứa đường thẳng	61
➤ Dạng 3.10. Phương trình mặt phẳng chứa d,d' và d cắt d'	62
➤ Dạng 3.11. Phương trình mặt phẳng chứa d, d' và d song song d'	63
➤ Dạng 3.12. Phương trình mặt phẳng chứa d và song song d'	64
➤ Dạng 3.13. Phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc mặt khác	65
➤ Dạng 3.14. Phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng	66
➤ Dạng 3.15. Phương trình mặt phẳng liên quan mặt cầu	67

⌘ Chủ đề 04. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	69
2. Vị trí tương đối hai đường thẳng.....	69
3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng	70
4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu.....	70
5. Khoảng cách liên quan đến đường thẳng	70

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 4.1. Xác định vecto chỉ phương	71
➤ Dạng 4.2. Phương trình đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP	72
➤ Dạng 4.3. Phương trình đường thẳng qua hai điểm	73
➤ Dạng 4.4. Phương trình đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng	74

▮ Dạng 4.5. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song d	76
▮ Dạng 4.6. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc mặt.....	77
▮ Dạng 4.7. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d,d'	78
▮ Dạng 4.8. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) vuông góc d.....	79
▮ Dạng 4.9. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, cắt d'	80
▮ Dạng 4.10. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc & cắt d.....	82
▮ Dạng 4.11. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) & cắt d.....	83
▮ Dạng 4.12. Phương trình đường thẳng qua điểm & cắt d ₁ , d ₂	84
▮ Dạng 4.13. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & cắt d ₁ d ₂	86
▮ Dạng 4.14. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & vuông góc d.....	87
▮ Dạng 4.15. Phương trình đường thẳng qua điểm và // d' cắt d ₁ , d ₂	89
▮ Dạng 4.16. Phương trình đường thẳng là đường vuông góc chung	90
▮ Dạng 4.17. Phương trình đường thẳng là đường phân giác	91
▮ Dạng 4.18. Liên quan hình chiếu	92
▮ Dạng 4.19. Liên quan đối xứng	95

⌘ Chủ đề 05. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

A. Lý thuyết chung

1. Điểm và mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng	97
2. Mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng.....	98
3. Mặt phẳng và mặt phẳng, đường thẳng	98
4. Đường thẳng và đường thẳng.....	99

B. Các dạng bài tập

▮ Dạng 5.1. Vị trí tương đối với mặt cầu	100
▮ Dạng 5.2. Vị trí tương đối với mặt phẳng.....	102
▮ Dạng 5.3. Vị trí tương đối với đường thẳng	104
▮ Dạng 5.4. Góc.....	107
▮ Dạng 5.5. Khoảng cách	109

Hình học

Chủ đề 01

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

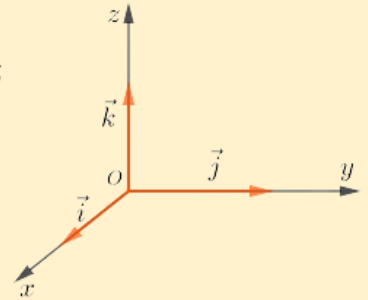


Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, trục $Ox; Oy; Oz$ đôi một vuông góc với nhau như hình. Các vectơ đơn vị trên từng trục $Ox; Oy; Oz$

lần lượt là $\vec{i} = (1; 0; 0); \vec{j} = (0; 1; 0); \vec{k} = (0; 0; 1)$.

→ Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.



1. Vectơ

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

(2) Cộng – Trừ vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

(3) Tích của một số với vectơ: $k.\vec{a} \pm \vec{b} = (k.a_1; k.a_2; k.a_3)$.

(4) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.

(5) Tích vô hướng hai vectơ: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \end{cases}$

→ Góc giữa 2 vectơ: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$.

Chú ý: Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(6) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

(7) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

(8) Vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

(9) ABCD là hình bình hành $\vec{AB} = \vec{DC}$.

(10) Tích có hướng của hai vectơ $[\vec{a}; \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Qui tắc: Che từ trước ra sau – ở giữa đổi dấu

Hoặc $[\vec{a}; \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$

(11) Diện tích tam giác ABC $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}; \vec{AC}]|$

(12) Thể tích tứ diện $ABCD$ $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

(13) Thể tích hộp $ABCD.A'B'C'D'$ $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}; \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$

2. Điểm

Xét hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

(1) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

(2) Độ dài vectơ $\vec{AB}$: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) M thuộc các trục tọa độ: $\begin{cases} M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0) \\ M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0) \\ M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z) \end{cases}$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(4) M thuộc các mặt phẳng tọa độ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0) \\ M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z) \\ M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z) \end{cases}$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(5) I là trung điểm AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

$\rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

(6) G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

$\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

(7) G là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

$\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

(8) Nếu điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$) thì ta có:

$$\begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = k(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \\ z_M = \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k}; \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}; \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k}\right) \text{ với } k \neq 1.$$

(9) Ứng dụng tâm tỉ cự của n điểm:



Cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết:

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| |\overrightarrow{MI}|$$

Bước 3: Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?



Ví dụ 1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1); B(3;1;0)$ và mặt phẳng (P) . Tìm M trên mặt phẳng (P) để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Để thỏa được điều này ta thấy I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{Khi đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{MI}|.$$

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .



Cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết:

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Thấy rằng $MA_1^2 = |\overrightarrow{MA_1}|^2 = (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 = (\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2 \right] + \dots + k_n \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + (\overrightarrow{IA_n})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n)MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + \dots + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}} \right) \\
 &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n)MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2)
 \end{aligned}$$

Bước 3: Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

► **Chú ý:** Cho đa giác $A_1A_2\dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.



Ví dụ 2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm điểm M nằm trên mặt phẳng (P) chứa $\triangle ABC$ sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

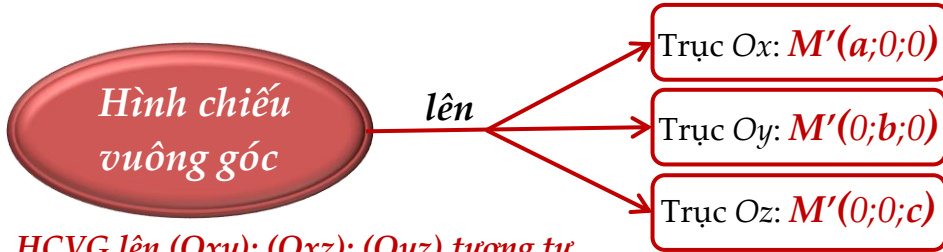
Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Với mọi điểm M ta có:

$$\begin{aligned}
 MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2 \\
 &= 6MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2) + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}} \right) \\
 &= 6MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2)
 \end{aligned}$$

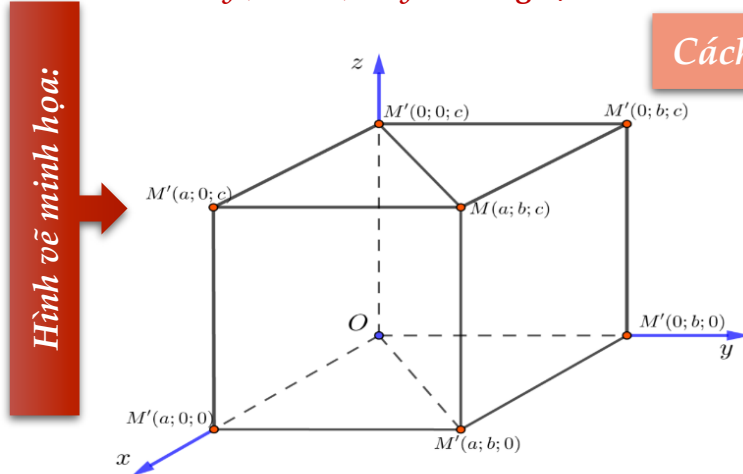
Vậy $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = 0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$

3. Hình chiếu vuông góc

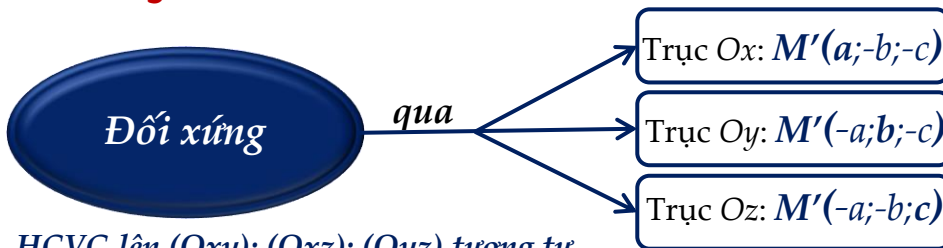


HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự

Cách nhớ: Chiếu lên cái gì cái đó có.

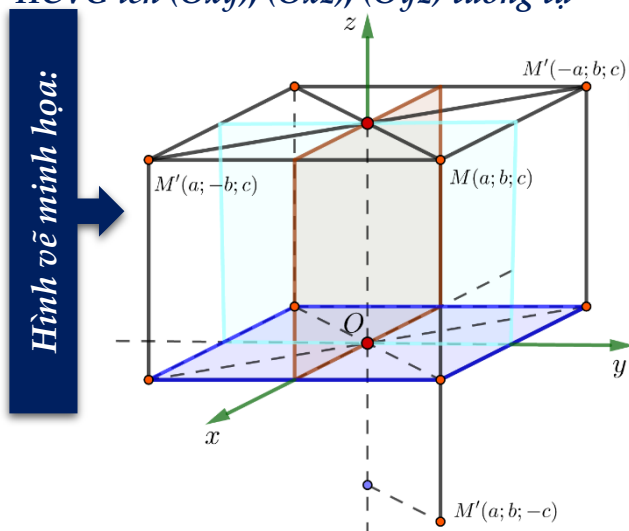


4. Đối xứng



HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự

Cách nhớ: Đối xứng qua cái gì cái đó giữ. Còn lại đổi (tức thêm dấu trừ).



5. Góc

Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

→ Góc giữa:

(1) Hai đường thẳng $d_1; d_2$: $\left| \cos(d_1; d_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

(2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1); (\alpha_2)$: $\left| \cos((\alpha_1); (\alpha_2)) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

(3) Đường thẳng d và mặt phẳng (α) : $\left| \sin(d; (\alpha)) \right| = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{u}_d|}$.

6. Khoảng cách

(1) Hai điểm $A; B$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(2) Điểm M_0 và Δ : $d(M_0; \Delta) = \frac{|\vec{u}; \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{u}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\Delta' // \Delta \\ M_0 \in \Delta'}]{\Delta'} d(\Delta'; \Delta) = d(M_0; \Delta)$$

(3) Hai đường $\Delta_1; \Delta_2$ ($M \in \Delta_1; N \in \Delta_2$): $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{u}_1; \vec{u}_2| \cdot |\overrightarrow{MN}|}{|\vec{u}_1; \vec{u}_2|}$.

$$\xrightarrow[\substack{AB \& CD \\ \text{chéo nhau}}]{AB \& CD} d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{AB}; \vec{CD}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{|\vec{AB}; \vec{CD}|}$$

(4) Điểm M_0 và mặt $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$: $d(M_0; (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{(\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta)}]{\substack{(\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta)}} d(M_0; (\alpha)) = d((\beta); (\alpha)) = d(\Delta; (\alpha))$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1.1. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước

► Công thức liên quan thường dùng:

Cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$

• Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Khi đó $\vec{OM} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{OM} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(m_1; m_2; m_3)$.

Khi đó $\vec{MO} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{MO} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(-m_1; -m_2; -m_3)$.

(1) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

(2) Độ dài vectơ $\vec{AB}$: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) M thuộc các trục tọa độ:
 $M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0)$
 $M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0)$
 $M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z)$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(4) M thuộc các mặt phẳng tọa độ:
 $M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0)$
 $M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z)$
 $M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z)$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(5) I là trung điểm AB: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 $\rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

(6) G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

(7) G là trọng tâm chóp ABCD: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

(8) Nếu điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\vec{MA} = k\vec{MB}$) thì ta có:

$$\begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = k(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k.x_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - k.y_B}{1-k} \\ z_M = \frac{z_A - k.z_B}{1-k} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x_A - k.x_B}{1-k}; \frac{y_A - k.y_B}{1-k}; \frac{z_A - k.z_B}{1-k}\right) \text{ với } k \neq 1.$$

☞ Ví dụ 1.1.1

Trong không gian Oxyz, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ của điểm M là

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(2; 0; 1)$. C. $M(2; 1; 0)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.2

Trong không gian $Oxyz$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) thì

- A. $x_M = 0$. B. $y_M = 0$. C. $z_M = 0$. D. $z_M = 1$.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.3

Trong không gian $Oxyz$, M' là hình chiếu vuông góc của $M(3,2,1)$ trên Ox . M' có tọa độ là

- A. $(0;0;1)$. B. $(3;0;0)$. C. $(-3;0;0)$. D. $(0;2;0)$.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.4

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I(1;-1;2)$. B. $I(1;1;0)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1;1;1)$.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $B(1;3;-1)$, $\overrightarrow{OC} = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

- A. Điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 1\right)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$.
 B. $AB = \sqrt{2}BC$.
 C. $AC < BC$.
 D. Điểm $M\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AB .

Lời giải

➤ Dạng 1.2. Tìm tọa độ điểm đặc biệt

01	Chân đường cao	• Định nghĩa đường cao: là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến cạnh đáy thì gọi là đường cao của tam giác đó. • Chân đường cao: là giao điểm của đường cao và cạnh đáy. • Bài toán: Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A trong $\triangle ABC$. Bước 1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BH}; \overrightarrow{BC}$. Bước 2: Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ Do $H \in BC \rightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\rightarrow \overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ Bước 3: Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \frac{x_{\overrightarrow{BH}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{BH}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{z_{\overrightarrow{BH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = k \rightarrow H(?) \end{cases}$
02	Trực tâm	• Định nghĩa trực tâm: là giao điểm của ba đường cao. • Bài toán: Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$. Bước 1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BH}; \overrightarrow{CH}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}$. Bước 2: Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ Tương tự ta được $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$. Bước 3: Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow H(?) \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$
03	Chân đường phân giác trong	• Định nghĩa đường phân giác: là đường thẳng chia góc đó thành 2 góc bằng nhau. • Chân đường phân giác: là giao điểm của đường phân giác và cạnh đáy. • Bài toán: Tìm tọa độ chân đường phân giác trong D kẻ từ đỉnh A trong $\triangle ABC$. Bước 1: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$. Do $D \in AC \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{BA}{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$. Tính tỷ số $\frac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra. Bước 2: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ D.

04

Tâm
đường
tròn
nội
tiếp

• Định nghĩa tâm đường tròn nội tiếp tam giác:

là giao điểm của 3 đường phân giác trong.

• Bài toán: Tìm tọa độ chân tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

► Cách 1. Áp dụng tính chất:

“Cho $\triangle ABC$, I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $BC \cdot \vec{IA} + AC \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IC} = \vec{0} (*)$ ”

Bước 1: Tính AC ; AB ; BC ta được các hằng số.

Bước 2: Tính $\vec{IA}$; $\vec{IB}$; $\vec{IC}$.

Bước 3: Thay vào $(*)$ và thu gọn $\rightarrow I(?)$.

► Cách 2. Áp dụng tính chất giao điểm 3 đường phân giác (2 lần):

Lần 1: Xét $\triangle ABC$, gọi D là chân đường phân giác góc A

Bước 1: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$.

Do $D \in AC \Rightarrow \vec{DA} = \frac{BA}{BC} \cdot \vec{DC}$.

Tính tỷ số $\frac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.

Bước 2: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ D .

Lần 2: Xét $\triangle ABD$, gọi I là chân đường phân giác góc B

Bước 3: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA}$.

Do $I \in AD \Rightarrow \vec{ID} = -\frac{BD}{BC} \cdot \vec{IA}$.

Tính tỷ số $\frac{BD}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.

Bước 4: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ I .

☞ Ví dụ 1.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(2;3;1)$; $B(0;-1;2)$ và $C(1;0;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ đỉnh A của $\triangle ABC$.

A. $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. B. $H(2;0;1)$. C. $H\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$. D. $H(0;1;2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

👉 Ví dụ 1.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tổng $a+b+c$ bằng

- A.** -4 . **B.** -2 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Lời giải

👉 Ví dụ 1.2.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-4;7;5)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong của góc B .

- A.** $D(-2;2;-1)$. **B.** $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ **C.** $D(2;3;-1)$ **D.** $D(3;-11;1)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 1.3. Tìm tọa độ vectơ thỏa điều kiện cho trước

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- (1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- (2) Cộng – Trừ vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
- (3) Tích của một số với vectơ: $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$.
- (4) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.
- (5) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3 \end{cases}$.
- (6) ABCD là hình bình hành $\vec{AB} = \vec{DC}$.

☞ Ví dụ 1.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(1; -1; 2), C(1; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(2; 0; 1)$. C. $M(-2; -6; 4)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

.....

☞ Ví dụ 1.3.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

- A. $D(-4; 8; -3)$. B. $D(2; 1; 2)$. C. $D(1; 1; 4)$. D. $D(2; 1; 1)$.

Lời giải

.....

☞ Ví dụ 1.3.3

Cho $\triangle ABC$ biết $A(2; 4; -3)$ có trọng tâm $G(2; 1; 0)$. Khi đó $\vec{AB} + \vec{AC}$ có tọa độ là

- A. $(0; -9; 9)$. B. $(0; 9; -9)$. C. $(0; 4; -4)$. D. $(0; -4; 4)$.

Lời giải

.....

➤ Dạng 1.4. Liên quan độ dài

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

(1) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.

..... $\rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$

(2) Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) Tích vô hướng hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

(4) Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

► Bài toán liên quan thường gặp:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m; |\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α . Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

Bước 1: Biến đổi $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

Bước 2: Áp dụng: $\begin{cases} \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \end{cases}$

Để biến đổi:

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \quad (*)$$

Bước 3: Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = ?$

☞ Ví dụ 1.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -2; 2)$. Tìm chu vi của ABC .

A. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 5)$ và $B(3; m-2; 4m), m \in \mathbb{R}$. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để đoạn thẳng $AB = 3$.

A. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

.....

☞ Ví dụ 1.4.3

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM .

A. 2.

B. $\sqrt{29}$.

C. $2\sqrt{7}$.

D. 3.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.4.4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

A. 7.

B. $\sqrt{39}$.

C. $\sqrt{19}$.

D. -5.

Lời giải

☞ Ví dụ 1.4.5

Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$ là

A. $A = \sqrt{50}$.

B. $A = 50$.

C. $A = 2\sqrt{6}$.

D. $A = \sqrt{37} + \sqrt{13}$.

Lời giải

➤ Dạng 1.5. Sự cùng phương

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

(2) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

☞ Ví dụ 1.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$. Tính $S = m + n$ khi các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương

- A. $S = -6$. B. $S = -1$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.

Lời giải

.....

.....

☞ Ví dụ 1.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x , y thì A, B, M thẳng hàng.

- A. $x = 4; y = 7$. B. $x = -4; y = -7$. C. $x = 4; y = -7$. D. $x = -4; y = 7$.

Lời giải

.....

.....

☞ Ví dụ 1.5.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{4}$. D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 1.6. Sự đồng phẳng

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- (1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$
 $= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$
- (2) Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0.$
- (3) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0.$

☞ Ví dụ 1.6.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$. Tìm vectơ đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các vectơ sau:

- A. $\vec{c} = (-2; 1; 1)$. B. $\vec{d} = (1; -1; 1)$. C. $\vec{m} = (3; 1; 1)$. D. $\vec{n} = (2; 4; 2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(1; 1; -1)$. Trong các điểm sau, điểm nào nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

- A. $M(2; 0; -1)$ B. $E(1; 2; 3)$ C. $N(-1; 2; 1)$ D. $F(-2; 3; 1)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.6.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 0; 4)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 4; 0)$ và $D(a; b; 0)$. Điều kiện cần và đủ của a, b để hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng

- A. $3a + b = 7$. B. $3a - 5b = 0$. C. $4a + 3b = 2$. D. $a - 2b = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.6.4

Trong không gian $Oxyz$, cho các véctơ $\vec{a} = (-2; 0; 3)$, $\vec{b} = (0; 4; -1)$ và $\vec{c} = (m-2; m^2; 5)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng.

A. $\begin{cases} m = -2 \\ m = -4 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.6.5

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$ và $D(0; m; p)$. Hệ thức giữa $B(a; b; c) \in (S)$ và p để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

A. $2m + p = 0$.

B. $m + p = 1$.

C. $m + 2p = 3$.

D. $2m - 3p = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 1.7. Ứng dụng tích có hướng

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện: $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

$\Leftrightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng

(2) Diện tích ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.

$\Rightarrow$ Đường cao ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{\left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|}{\left| \vec{BC} \right|}$

(3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.

(4) Thể tích tứ diện $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$.

$\Rightarrow$ Đường cao chóp $ABCD$:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A, (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|}{\left| [\vec{BC}, \vec{BD}] \right|}$

► Bài toán tính diện tích tam giác:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...), B(...), C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Bước 2: Tìm tọa độ của vectơ $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.

Bước 3: Sử dụng $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$ để tính diện tích ΔABC .

Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:

Bước 4: Sử dụng $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AH \cdot OB \Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH .

► Bài toán tính thể tích tứ diện:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...), B(...), C(...), D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Bước 2: Tính $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}$.

Bước 3: Sử dụng $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:

Bước 4: Sử dụng $V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A, (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

☞ Ví dụ 1.7.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $\frac{\sqrt{29}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{78}}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.7.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB .

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{29}}{13}$

C. $\frac{\sqrt{29}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{377}}{13}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. 6

B. 8

C. 12

D. 4

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.7.4

Cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1), D(1;1;1)$ Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

A. $DH=3$

B. $DH=2$

C. $DH=\frac{5}{3}$

D. $DH=\frac{9}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.7.5

Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0), C(0;4;0), D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

A. $m=8$

B. $m=4$

C. $m=12$

D. $m=6$

Lời giải

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 1.8. Liên quan góc

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Tích vô hướng hai vectơ:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{cases}$$

→ Góc giữa 2 vectơ: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$.

Chú ý: Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(2) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$

☞ Ví dụ 1.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Tính cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $-\frac{3}{13}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.8.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc BAC bằng

A. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$

B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$

C. $\frac{9}{\sqrt{35}}$

D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.8.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Tất cả giá trị của m để hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau là

A. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$

C. $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$

D. $\frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.8.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có tọa độ các đỉnh $A(-4;9;-9)$, $B(2;12;-2)$ và $C(-m-2;1-m;m+5)$. Tìm m để $\triangle ABC$ vuông tại B .

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = -4$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.8.5

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$

B. $m = 2 - \sqrt{6}$

C. $m = 2 + \sqrt{6}$

D. $m = 2 \pm \sqrt{6}$

Lời giải

.....

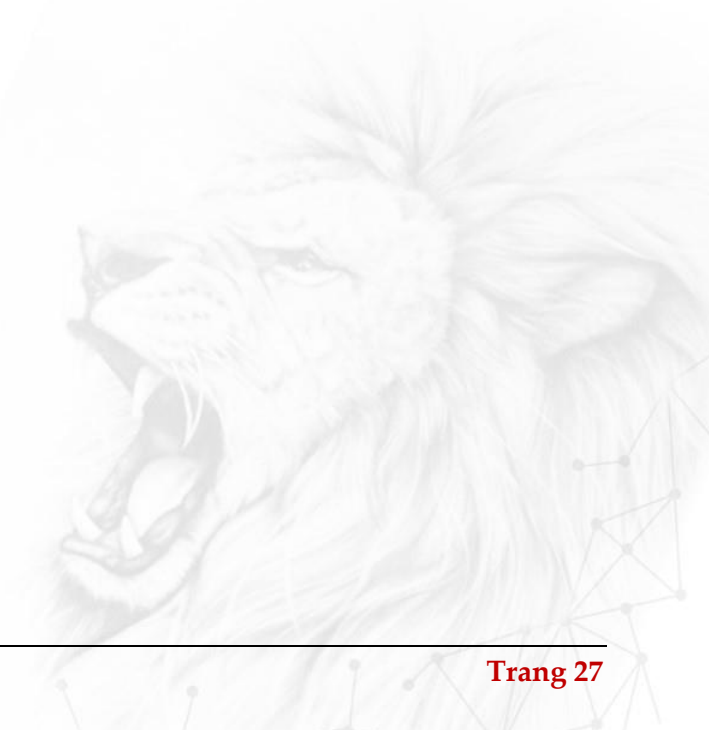
.....

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 1.9. Tâm tứ cự

► Bài toán cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| |\overrightarrow{MI}|$$

Bước 3: Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

► Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Thấy rằng $MA_1^2 = |\overrightarrow{MA_1}|^2 = (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 = (\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2 \right] + \dots + k_n \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + (\overrightarrow{IA_n})^2 \right] \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + \dots + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}} \right) \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) \end{aligned}$$

Bước 3: Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

► **Chú ý:** Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

☞ Ví dụ 1.9.1

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7), B(0; 4; 1), C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$.

Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ điểm M là

- A. $M(0; 1; -2)$ B. $M(0; 1; 4)$ C. $M(0; 1; -4)$ D. $M(2; 1; 0)$

Lời giải

➤ Dạng 1.10. Tọa độ hóa

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$:
$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

(2) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$:
$$[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0} \text{ hoặc } \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}.$$

(3) Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng:
$$[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0.$$

(4) Diện tích ΔABC :
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|.$$

(5) Thể tích tứ diện $ABCD$:
$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|.$$

(6) Thể tích khối hộp $ABCD$:
$$V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|.$$

(7) Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$:
$$V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|.$$

(8) Góc:

• Giữa hai mặt phẳng:
$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

• Giữa hai đường thẳng:
$$\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{a}') = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}'|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|}$$

• Giữa đường thẳng và mặt phẳng:
$$\sin \varphi = \left| \sin(\vec{a}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$$

Mẹo nhớ công thức về góc trong hình học Oxyz :

- **Cùng** loại dùng Cos (Góc giữa đường với đường , mặt phẳng với mặt phẳng).
- **Khác** loại dùng Sin (Góc giữa đường và mặt).

(9) Khoảng cách

• Từ điểm đến mặt phẳng :
$$d(M_o, (\alpha)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• Từ điểm đến đường thẳng:
$$d(M, \Delta) = \frac{|[\vec{M_oM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

• Hai đường thẳng chéo nhau:
$$d(d, d') = \frac{|[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \vec{MM}'|}{|[\vec{a}, \vec{a}']|} = \frac{V_{hop}}{V_{day}}$$

► Cách “gắn” trục:

• Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz

- Xác định ba đường đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều ...),
- Dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

• Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

- Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. *Tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu bài toán.*

• Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

- Lập các phương trình đường, mặt liên quan.
- Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

• Bước 4: Giải quyết bài toán.

- Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

⌘ Cách chọn hệ trục tọa độ một số hình không gian.

A. Hộp.

□ Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

• Với hình lập phương.

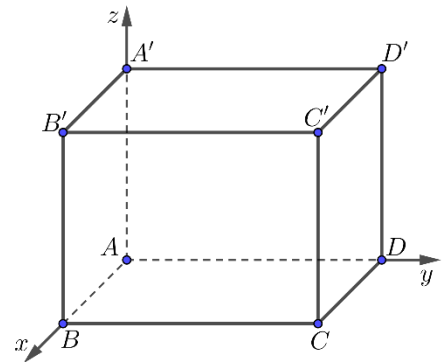
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), \\ A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$$

• Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0), \\ A'(0;0;c), B'(a;0;c), C'(a;b;c), D'(0;b;c)$$



► **Chú ý:** Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

□ Hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

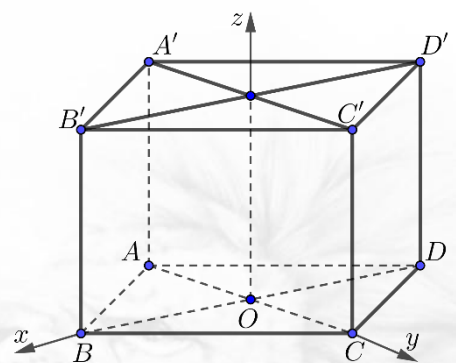
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$.

» Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

» Đặt $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì

$$A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), D\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right), \\ A'\left(0; -\frac{a}{2}; c\right), B'\left(\frac{b}{2}; 0; c\right), C'\left(0; \frac{a}{2}; c\right), D'\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right).$$



► **Chú ý:** Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC , $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh AC, AC' .

B. Chóp.

□ Hình chóp đều

(1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a, SH = h$.

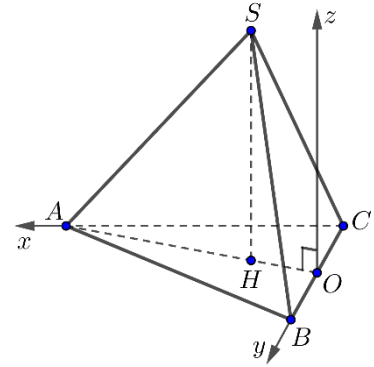
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với O là trung điểm BC

» $A \in Ox$.

» $B \in Oy$

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; h\right)$



(2) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AB = a, SH = h$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

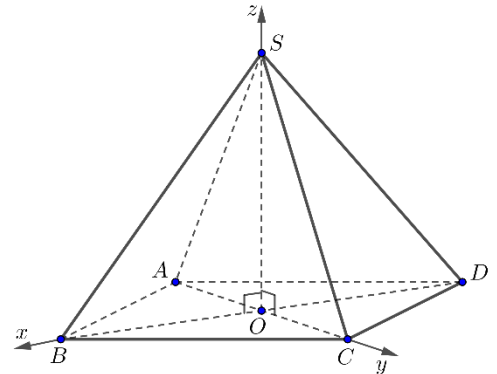
» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

» $B \in Ox$.

» $C \in Oy$.

» $S \in Oz$.

Khi đó: $A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,
 $D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S(0; 0; h)$.



► **Chú ý:** Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.

Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục Oy đi qua H và song song với BC .

□ Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = h$

Nếu đáy là hình chữ nhật.

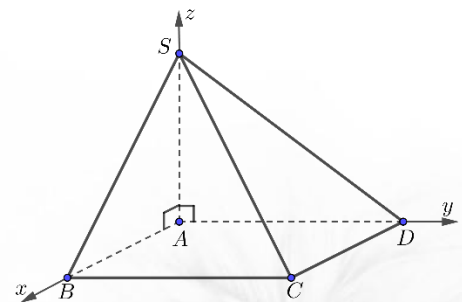
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $A \equiv O$

» $B \in Ox$.

» $D \in Oy$.

» $S \in Oz$.



Nếu đáy là hình thoi.

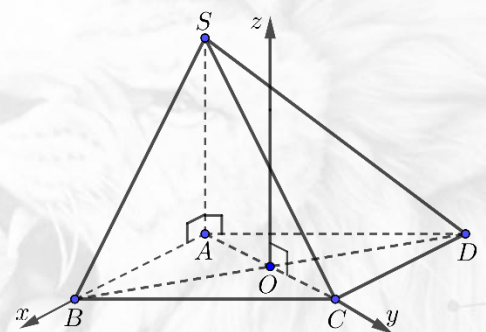
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

» $B \in Ox$.

» $C \in Oy$.

» $Oz \parallel SA$.



► **Chú ý:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, nếu đáy ABC là:

- Tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.
- Tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC .

□ Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABCD)$

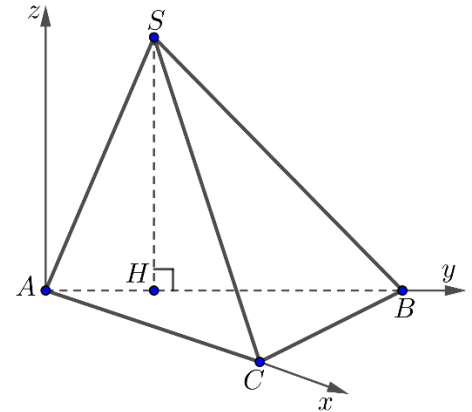
Đường cao $SH=h$ của $\triangle SAB$ là đường cao của hình chóp.

Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB=a$, $AC=b$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- » Gốc tọa độ trùng với $A \equiv O$
- » $B \in Oy$.
- » $C \in Oz$.
- » $Oz // SH$.

Khi đó $A(0;0;0), B(0;a;0), C(b;0;0), AH=c \Rightarrow H(0;c;0),$

$$S(0; c; h)$$


► **Chú ý:** Cho hình chóp có $SA \perp (ABC)$, nếu đáy ABC là:

- Tam giác vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.
- $\triangle ASB$ cân tại S , $\triangle ABC$ cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$

👉 Ví dụ 1.10.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

- A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

[illegible]

☞ Ví dụ 1.10.2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60° . Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 90°

B. 30°

C. 60°

D. 45°

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.10.3

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của SA và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC$, $\angle HBC = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và (SHC)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Hình học

Chủ đề 02

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

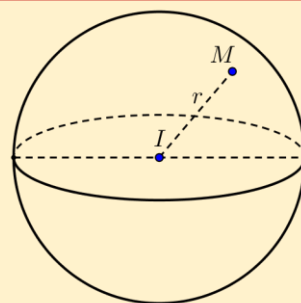
A. LÝ THUYẾT CHUNG.



Định nghĩa:

Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính r có phương trình là.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



1. Phương trình

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

2. Vị trí tương đối

Trong không gian Oxyz, ta có 3 đối tượng để xét vị trí tương đối với mặt cầu:

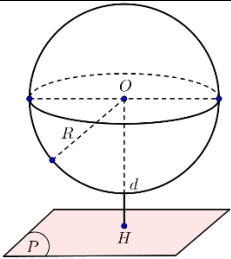
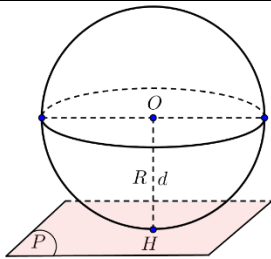
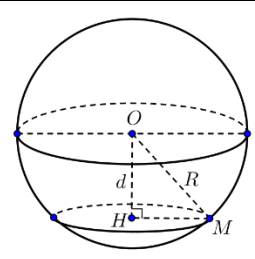
(1) Điểm $M(a;b;c)$.

Trong không gian Oxyz, cho điểm M và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

		Điểm		
		Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	Nằm trên $\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	Nằm trong $\Leftrightarrow IM \cap (S) = \emptyset$
		$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$
Mặt cầu				

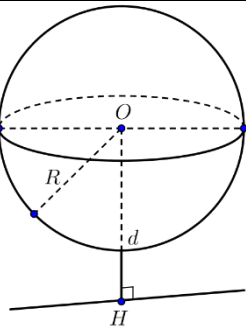
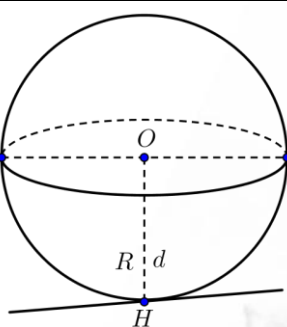
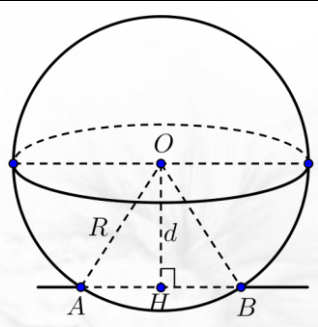
(2) Mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

Mặt phẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \{M\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = C(I'; r)$
	$d(I; (\alpha)) > R$	$d(I; (\alpha)) = R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M .	$d(I; (\alpha)) < R$ $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r . $R = \sqrt{r^2 + d^2(I; (\alpha))}$.
			

(3) Đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

Đường thẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$	Cắt tại hai điểm A; B $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$
	$d(I; \Delta) > R$	$d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$.
			

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ **Dạng 2.1. Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu**

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x, y, z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2, y^2, z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

➤ **Ví dụ 2.1.1**

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S) ?

- A. $(1; -2; 3)$. B. $(2; 0; 1)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(-2; 4; -6)$.

Lời giải

➤ **Ví dụ 2.1.2**

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tọa độ tâm là

- A. $I(1; -2; 0)$. B. $I(-1; 2; 0)$. C. $I(1; 2; 0)$. D. $I(-1; -2; 0)$.

Lời giải

➤ **Ví dụ 2.1.3**

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có phương trình nào sau đây có tọa độ tâm là $I(-1; 1; 0)$?

- A. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Lời giải

☞ Ví dụ 2.1.4

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$.

D. $(x + y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 6(m-1)y - 2z - m + 3 = 0$. Tìm giá trị của m để được (S) là phương trình mặt cầu

A. $\begin{cases} m < \frac{7}{10} \\ m > 1 \end{cases}$

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > 1 \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2.2. Phương trình mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R .	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R . Phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.	» Bán kính mặt cầu $R = IM = \overrightarrow{IM} = \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2}$. » Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IM$.

Ví dụ 2.2.1

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là:

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Lời giải

Ví dụ 2.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4. Phương trình của mặt cầu là

- A. $x^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 2$. B. $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 16$.
C. $x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$. D. $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Ví dụ 2.2.3

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải

➤ Dạng 2.3. Phương trình mặt cầu nhận hai điểm làm đường kính

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ làm đường kính	» Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right)$. » Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = IM$.

☞ Ví dụ 2.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 6 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.
- C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO} = (-1; -2; 3)$ và $\overrightarrow{BO} = (-7; -4; -5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 104$. B. $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$.
- C. $(x+4)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 26$. D. $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 104$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 2.4. Phương trình mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng	» Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. » Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

☞ Ví dụ 2.4.1

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2), N(4; 0; 2), P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là

A. $(1; 2; 1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(-1; -1; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$.
Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $(1; 2; 1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(-1; -1; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Dạng 2.5. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc (P) và qua ba điểm**

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in (P)$ và đi qua $A; B; C$. Với $(P): \alpha.x + \beta.y + \gamma.z + \delta = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in (P) \Rightarrow \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \quad (1)$. » Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A; B; C$ $\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \quad (2) \\ IA^2 = IC^2 \quad (3) \end{cases}$ » Từ $(1); (2)$ và $(3) \Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases} \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

➤ **Ví dụ 2.5.1**

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2; 3; 3), B(-1; 1; 2), C(4; 2; 2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

A. $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = \sqrt{209}$.

B. $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

C. $x^2 + (y+9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

D. $x^2 + (y+9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2.6. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc d và qua hai điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in d$ và đi qua $A; B$. Với $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục $Ox; Oy; Oz$. Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. » Viết $\vec{IA}; \vec{IB}$ theo t và tính độ dài $\vec{IA} ; \vec{IB}$ » Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \vec{IA} = \vec{IB} \Rightarrow t = ?$. » Từ $t = ? \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

Ví dụ 2.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$, và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) ?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 29$.

B. $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

C. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 29$.

D. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.5.2

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

A. $R = 7$.

B. $R = \sqrt{3}$.

C. $R = 2\sqrt{5}$.

D. $R = 8$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 2.7. Phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng - đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{Tiếp xúc } (\alpha) \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxy) \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxz) \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oyz) \end{cases}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \overrightarrow{MI} }{ \vec{u} } & \text{Tiếp xúc } \Delta \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Ox \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oy \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oz \end{cases}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$.

☞ Ví dụ 2.7.1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với (Oxy) .

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$ D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 0$

Lời giải

☞ Ví dụ 2.7.2

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

- A. $I\left(-\frac{2}{5}; 1; 1\right)$ B. $I\left(\frac{5}{2}; 3; -2\right)$ C. $I(3;1;1)$ D. $I(2;4;2)$.

Lời giải

☞ Ví dụ 2.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC .

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{5}{2}$

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{25}{4}$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{2}{5}$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{4}{25}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.7.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9), C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$

D. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 25$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

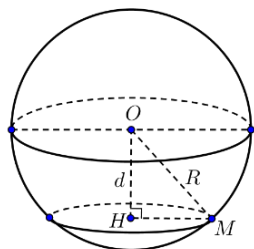
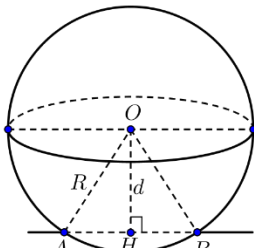
.....

.....



Dạng 2.8. Phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng - đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r. Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Tính $d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ » Bán kính: $R^2 = d^2(I;(\alpha)) + r^2 = OH^2 + HM^2$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. 
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Tính $d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \overrightarrow{MI} }{ \vec{u} }$ » Bán kính: $R^2 = d^2(I;(\alpha)) + AH^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$. 

Ví dụ 2.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\sqrt{21}$

B. 3

C. 6

D. 8

Lời giải

Ví dụ 2.8.2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 4$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 3$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.8.3

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho $\triangle ABC$ vuông.

A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$

B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 82$

C. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 58$

D. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 90$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.8.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB=10$. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 31$

B. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 31$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$

D. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

-----Hết-----

Hình học

Chủ đề 03

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Phương trình

- Phương trình mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẪNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O .	$(\alpha): Ax + By + Cz = 0$	$D = 0$
(α) song song/chứa Ox .	$(\alpha): By + Cz + D = 0$	$A = 0$
(α) song song/chứa Oy .	$(\alpha): Ax + Cz + D = 0$	$B = 0$
(α) song song/chứa Oz .	$(\alpha): Ax + By + D = 0$	$C = 0$
(α) song song/trùng (Oxy) .	$(\alpha): Cz + D = 0$	$A = B = 0$
(α) song song/trùng (Oxz) .	$(\alpha): By + D = 0$	$A = C = 0$
(α) song song/trùng (Oyz) .	$(\alpha): Ax + D = 0$	$B = C = 0$

» **Nhận xét:** Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa mặt phẳng đó.

2. Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Cho mặt $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$; $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Khi đó có các trường hợp sau:

Trường hợp	$(\alpha) \cap (\beta) = d$	$(\alpha) // (\beta)$	$(\alpha) \equiv (\beta)$	$(\alpha) \perp (\beta)$
Hình vẽ				
Xảy ra khi & chỉ khi	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Xác định vectơ pháp tuyến

- » Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- » Mặt phẳng trong không gian đều có phương trình dạng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
- » Nhận xét:
 - Khi lấy hệ số, lưu ý lấy đúng thứ tự hệ số trước $x-y-z$.
 - Thêm/bớt, phải thêm/bớt cả hoành – tung – cao độ

➤ Ví dụ 3.1.1

Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

- A. $\vec{i} = (1; 0; 0)$. B. $\vec{m} = (1; 1; 1)$. C. $\vec{j} = (0; 1; 0)$. D. $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Lời giải

➤ Ví dụ 3.1.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$. B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.

Lời giải

➤ Ví dụ 3.1.3

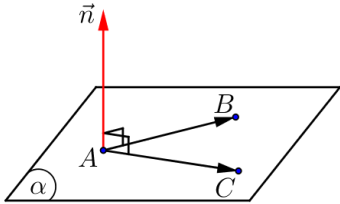
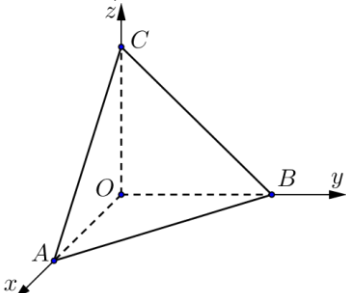
Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y + x + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. B. $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. D. $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

Lời giải

Dạng 3.2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đồng phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Đi qua $A; B; C$ không thẳng hàng. 	» Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. » Vectơ pháp tuyến của (α): $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$.
(2) Đi qua $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. (Phương trình đoạn chắn) 	» Phương trình (P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Lưu ý: - Với phương trình đoạn chắn thì vế phải = 1 - Bài toán có thể "gài" như sau: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$

Ví dụ 3.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $x - 5y - z + 4 = 0$.

B. $x - 5y + z - 2 = 0$.

C. $x + 5y + z - 2 = 0$.

D. $x + 5y - z + 4 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$, $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.2.3

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$; $B(0;4;0)$ và $C(0;0;-2)$ là:

A. $4x - 3y + 6z + 12 = 0$.

B. $4x + 3y + 6z + 12 = 0$.

C. $4x + 3y - 6z + 12 = 0$.

D. $4x - 3y + 6z - 12 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.2.4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$

A. $(P): 3x + y + 2z - 6 = 0$.

B. $(P): 2x + 3y - z - 4 = 0$.

C. $(P): 2x + y + z - 4 = 0$.

D. $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

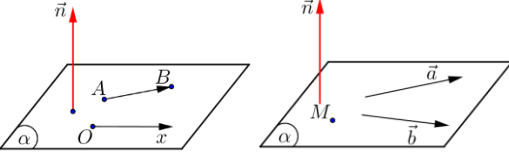
.....

.....



Dạng 3.3. Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và chứa vectơ

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $A; B$ và chứa $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc chứa/song song trục tọa độ. 	» Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có sẵn vectơ $\vec{a}$. » Vectơ pháp tuyến của (α): $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{a}]$.

Ví dụ 3.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và chứa trục Oy là:

- A. $x - z + 4 = 0$. B. $x + z = 0$. C. $x - 1 = 0$. D. $x - y - z - 4 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.3.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(3;0;0), B(0;0;4)$ và song song trục Oy có phương trình

- A. $4x + 3z - 12 = 0$. B. $3x + 4z - 12 = 0$.
C. $4x + 3z + 12 = 0$. D. $4x + 3z = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.3.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;6;3), B(2;0;6), C(1;2;-1), D(2;4;0)$. Phương trình mặt phẳng qua AB và song song với CD là:

- A. $x - z + 4 = 0$. B. $x + z + 4 = 0$.
C. $x + y - z + 4 = 0$. D. $x - y - z - 4 = 0$.

Lời giải

.....

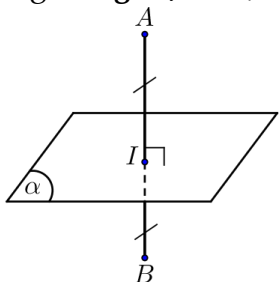
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.4. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Là mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB 	» Véc tơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. » Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB. » Mặt phẳng (α) qua điểm I.

☞ Ví dụ 3.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x - y - z = 0$.

B. $3x + y + z - 6 = 0$.

C. $x + y + 2z - 6 = 0$.

D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) , và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN .

A. $x + y + z - 3 = 0$

B. $2x - y + z - 2 = 0$

C. $2x - y + z + 2 = 0$

D. $4x + 4y - 2z + 21 = 0$.

Lời giải

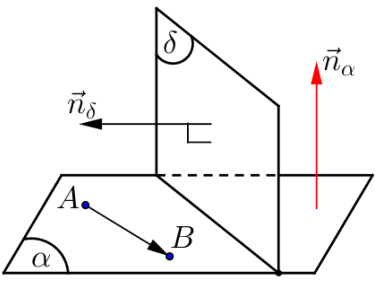
.....

.....

.....

Dạng 3.5. Phương trình mặt phẳng qua 2 điểm, vuông góc mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua điểm $A; B$ và vuông góc $(\delta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm cặp véctor $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Véctor pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Ví dụ 3.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

A. $2y + 3z - 11 = 0$

B. $2x - 3y - 11 = 0$

C. $x - 3y + 2z - 5 = 0$

D. $3y + 2z - 11 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.5.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0), B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$ có phương trình là

A. $4x - 3y + 2z + 3 = 0$

B. $4x - 3y - 2z + 3 = 0$

C. $2x + y - 3z - 1 = 0$

D. $4x + y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

.....

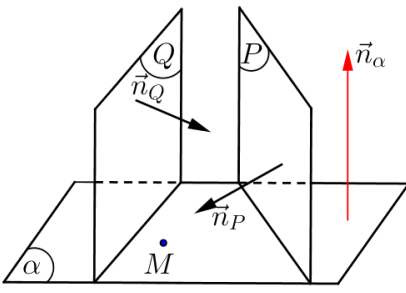
.....

.....

.....

Dạng 3.6. Phương trình mặt phẳng qua điểm, vuông góc 2 mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. 	» Tìm cặp vectơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hoặc bài toán sẽ gặp: “Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax + By + Cz + D = 0$; $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$”

Ví dụ 3.6.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$,
 $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời
 vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x - y - 2z = 0$.

B. $2x - y + 2z = 0$.

C. $2x + y - 2z = 0$.

D. $2x + y - 2z + 1 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$.
 Phương trình (P) qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc với (α) và (β) là:

A. $2x + y - 2z + 1 = 0$

B. $2x + y - 2z = 0$

C. $x - y - 2z = 0$

D. $2x - y + 2z = 0$.

Lời giải

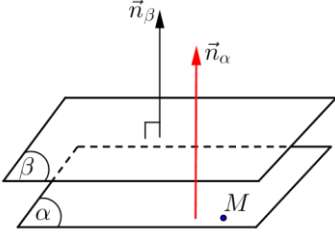
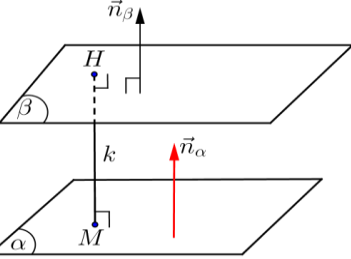
.....

.....

.....

Dạng 3.7. Phương trình mặt phẳng song song mặt phẳng khác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	⌘ Cách 1: » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$. » Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ Cách 2: » Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$) » Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	» Vì $(\alpha) \parallel (P) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$). » Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha); (P)) = k \xLeftrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (P)) = k$ $\Leftrightarrow \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$ » Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Ví dụ 3.7.1

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1; 1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $2x - 2y + z + 2 = 0$

B. $2x - 2y + z = 0$

C. $2x - 2y + z - 6 = 0$

D. $2x - 2y + z - 2 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 3.7.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P) không qua O , song song mặt phẳng (Q) và $d((P); (Q)) = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x + 2y + 2z + 3 = 0$

B. $x + 2y + 2z = 0$

C. $x + 2y + 2z + 1 = 0$

D. $x + 2y + 2z - 6 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x - y + z - 2 = 0, (\alpha_2): x + 4y - 5 = 0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x + 21y - z + 7 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng P .

A. $(Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$

B. $2x + 21y - z - 23 = 0$

C. $(Q): 2x - 2y + z - 19 = 0$

D. $(Q): 2x - 2y + z - 8 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.7.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $(Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$

B. $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$

C. $(Q): 2x - 2y + z - 19 = 0$

D. $(Q): 2x - 2y + z - 8 = 0$

Lời giải

.....

.....

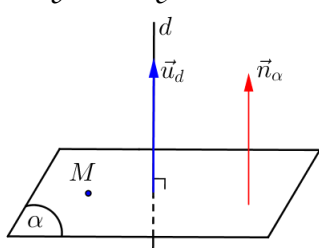
.....

.....

.....

Dạng 3.8. Phương trình mặt phẳng qua điểm, song song/vuông góc đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$. 	» Tìm vectơ $\vec{u}_d = (a; b; c)$. » Vì $(\alpha) \perp d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \vec{u}_d$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.
Qua $M(x_0; y_0; z_0), N(x'_0; y'_0; z'_0)$ và song song $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$.	» Tìm vectơ $\vec{u}_d = (a; b; c); \overrightarrow{MN}$. » Vì $(\alpha) // d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến (α): $\vec{n} = [\vec{u}_d; \overrightarrow{MN}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Ví dụ 3.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Phương trình mặt phẳng chứa điểm A và vuông góc đường thẳng d là

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$

B. $2x + y + z = 0$

C. $2x + 2y + z - 9 = 0$

D. $x + y + z - 1 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.8.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 2; 2)$ và song song với trục Ox có phương trình là

A. $x + y - z = 0$

B. $x + 2z - 3 = 0$

C. $2y - z + 1 = 0$

D. $y - 2z + 2 = 0$

Lời giải

.....

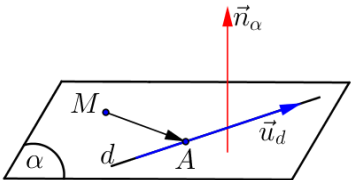
.....

.....

.....

Dạng 3.9. Phương trình mặt phẳng qua điểm, chứa đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$. 	» Lấy A tùy ý thuộc d, dễ nhất ta lấy $A(X; Y; Z)$. » Tìm vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Ví dụ 3.9.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z+3$.

Phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d là

A. $23x + 17y + z - 60 = 0$

B. $23x - 17y + z - 14 = 0$

C. $23x - 17y - z + 14 = 0$

D. $23x + 17y - z + 14 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.9.2

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -4; 7)$ và chứa trục Oz .

A. $(P): 4x + 3y = 0$

B. $(P): 3x + 4y = 0$

C. $(P): 4y + 3z = 0$

D. $(P): 3x + 4z = 0$

Lời giải

.....

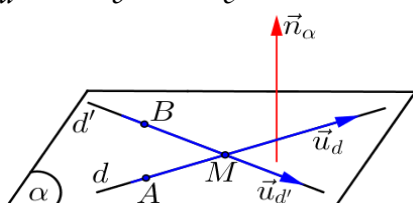
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.10. Phương trình mặt phẳng chứa d, d' và d cắt d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$, d, d' cắt nhau 	» Tìm vectơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_{d'}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$ hoặc $B \in d'$.

☞ Ví dụ 3.10.1

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3} \text{ và } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3} \text{ có phương trình là}$$

A. $-2x - y + 9z - 36 = 0$

B. $2x - y - z = 0$

C. $6x + 9y + z + 8 = 0$

D. $6x + 9y + z - 8 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.10.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ và

$$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ mặt phẳng chứa hai đường thẳng đã cho có phương trình là}$$

A. $x + y - z + 3 = 0$

B. $-x + y - z + 31 = 0$

C. $x + 2y - 2z + 3 = 0$

D. $x + 2y - 2z + 12 = 0$

Lời giải

.....

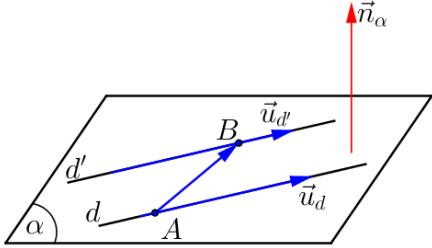
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.11. Phương trình mặt phẳng chứa d , d' và d song song d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$, $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$ và d song song d'. 	» Tìm $A \in d$ và $B \in d'$ » Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_d]$ hoặc $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_{d'}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$ hoặc $B \in d'$

➤ Ví dụ 3.11.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Khi đó mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng trên có phương trình là

A. $5x + 3y + 7z + 4 = 0$

B. $5x + 3y - 7z + 4 = 0$

C. $7x + 3y - 5z - 4 = 0$

D. $7x + 3y - 5z + 4 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

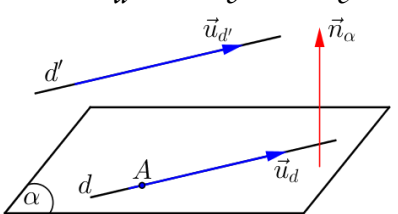
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.12. Phương trình mặt phẳng chứa d và song song d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và song song với $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$. 	» Tìm $A \in d$, do $d \subset (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha)$. » Tìm vectơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$.

☞ Ví dụ 3.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -2-t \\ z = 1+2t \end{cases}$, gọi d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2 .

A. $(\alpha): 5x - 13y - 4z + 7 = 0$

B. $(\alpha): 5x - 13y + 4z + 7 = 0$

C. $(\alpha): 5x + 13y + 4z - 7 = 0$

D. $(\alpha): 5x + 13y + 4z + 7 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

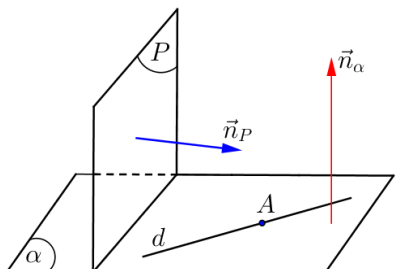
.....

.....

.....

Dạng 3.13. Phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc mặt khác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và vuông góc $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm $A \in d \Rightarrow A \in (P)$. » Tìm vectơ $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_{(P)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$.

Ví dụ 3.13.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

A. $2y + 3z - 11 = 0$

B. $2y - z + 6 = 0$

C. $2y - 3z + 6 = 0$

D. $2y - 3z - 6 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.13.2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0$. là:

A. $x + 2y + z = 0$

B. $x + 2y - 1 = 0$

C. $x - 2y + z = 0$

D. $x - 2y - 1 = 0$

Lời giải

.....

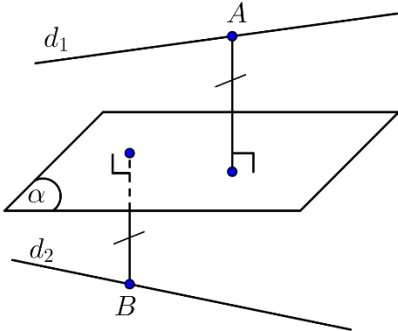
.....

.....

.....

Dạng 3.14. Phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Cách đều hai đường thẳng $d_1; d_2$ 	» Kiểm tra $d_1; d_2$ chéo nhau nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$. » Do (α) cách đều $d_1; d_2$ nên $d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$. Tìm D. » Viết phương trình mặt phẳng (α).

Ví dụ 3.14.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$; $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều $d_1; d_2$ là:

A. $7x - 2y - 4z = 0$ B. $7x - 2y - 4z + 3 = 0$
 C. $2x + y + 3z + 3 = 0$ D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.14.2

Trong không gian $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$ B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$
 C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$ D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải

.....

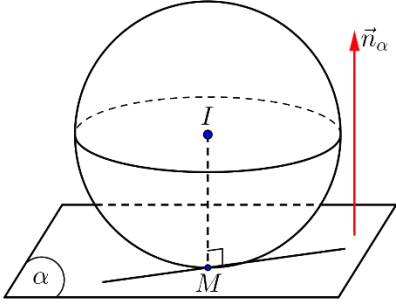
.....

.....

.....

➤ Dạng 3.15. Phương trình mặt phẳng liên quan mặt cầu

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua A và tiếp xúc mặt cầu (S) tại M 	» Tìm tâm I và tính bán kính (S). » (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì (α) đi qua điểm M. » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{MI}$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M \in (S)$. ❑ Lưu ý: Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được $\vec{n}$ của (α) và (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết). Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I, (\alpha)) = R$ để tìm D.

☞ Ví dụ 3.15.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81$. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $P(-5; -4; 6)$.

A. $x + y - z + 1 = 0$

B. $x + 2y - 2z + 1 = 0$

C. $2x + y + 2 = 0$

D. $2x + y - z + 1 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.15.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tiếp xúc với (S) .

A. $3x - 4y = 0$

B. $3x + 2y - z = 0$

C. $2x + 3y + 1 = 0$

D. $3x - 4y - 2 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.15.3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình (P) song song với $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$

A. $\begin{cases} x + 2y - 2z - 10 = 0 \\ x + 2y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$

B. $x + 2y - z + 12 = 0$

C. $2x + y - 3z + 2 = 0$

D. $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

-----Hết-----



Hình học

Chủ đề 04

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Phương trình

- Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ Véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

- Phương trình chính tắc đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ Véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

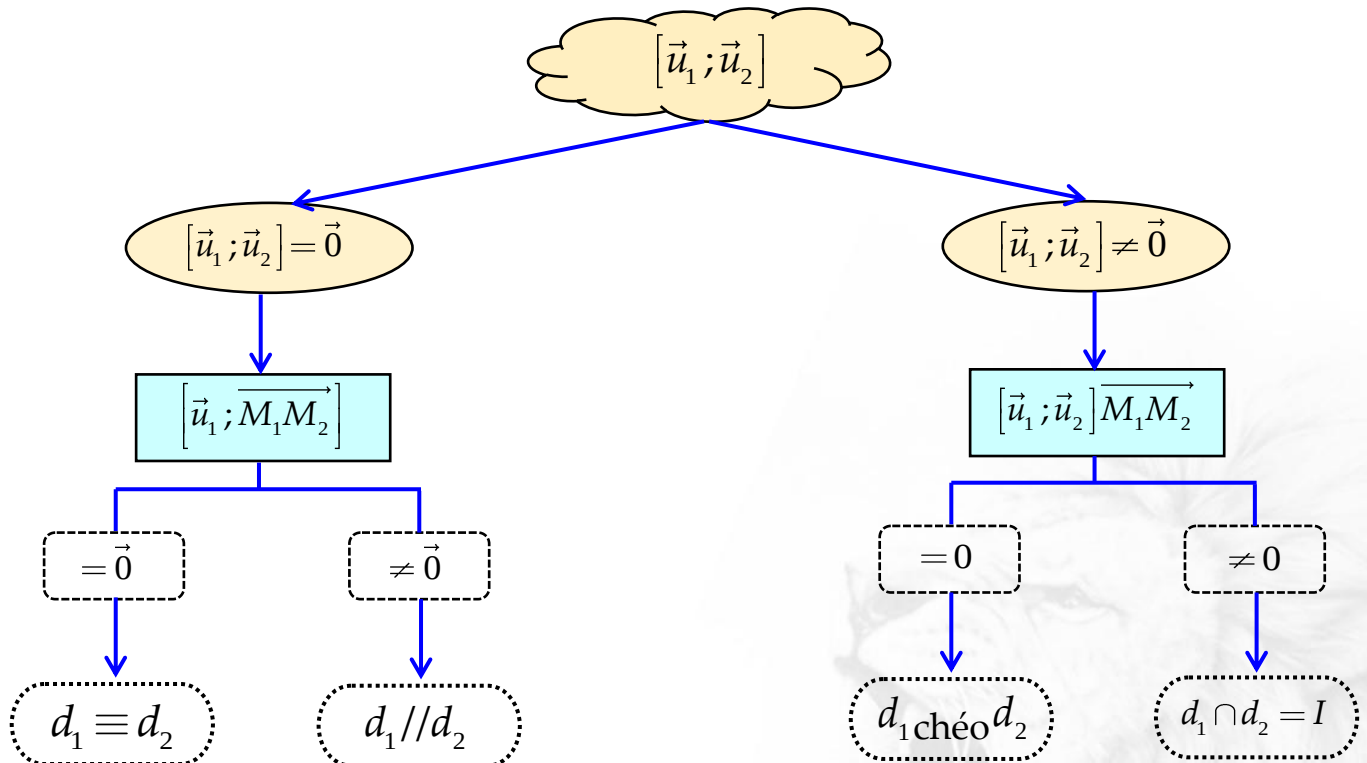
» Giao tuyến hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\gamma): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ cắt nhau.

Gọi Δ là giao tuyến của chúng. Khi đó, đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{n}_{(\beta)}]$.

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ và các điểm $M_1; M_2$ nằm trên $d_1; d_2$.



3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

» Trong không gian $Oxyz$,

cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Ta viết lại phương trình Δ dưới dạng tham số: $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ thay $x; y; z$ vào mặt phẳng (α) .

Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$.

Đặt $f(t) = A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D$.

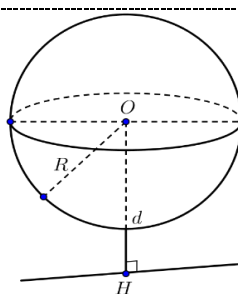
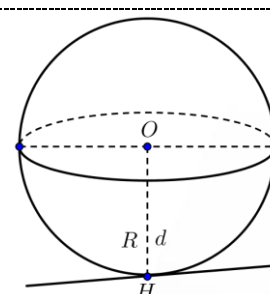
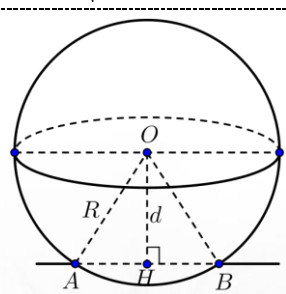
Khi đó: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$

Ta có các trường hợp sau:

Nếu	$f(t) = 0$ vô nghiệm	$f(t) = 0$ có 1 nghiệm	$f(t) = 0$ vô số nghiệm
Thì	Đường thẳng $\Delta // (\alpha)$.	Đường thẳng $\Delta \cap (\alpha) = I$.	Đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$.

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

	Đường thẳng		
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$ $d(I; \Delta) > R$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$ $d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	Cắt tại hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$ $d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$
			

5. Khoảng cách liên quan đến đường thẳng

	Phương pháp 1	Phương pháp 2
Khoảng cách từ M đến Δ .	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \perp \Delta \end{cases}$ » Tìm tọa độ $H = (\alpha) \cap \Delta$. » Khi đó, $d(M; \Delta) = MH$.	$d(M; \Delta) = \frac{ \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u} }{ \vec{u} }$
Khoảng cách Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \supset \Delta_1 \\ // \Delta_2 \end{cases}$ » Khi đó $d(\Delta_1; \Delta_2) = d(N; (\alpha))$	$d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{ \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{MN} }{ \begin{bmatrix} \vec{u}_1; \vec{u}_2 \end{bmatrix} }$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 4.1. Xác định vectơ chỉ phương

» Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

» Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

» Phương trình chính tắc $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

» **Nhận xét:**

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t .
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số

➤ Ví dụ 4.1.1

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

➤ Ví dụ 4.1.2

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2; 2; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 2; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 1; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

➤ Ví dụ 4.1.3

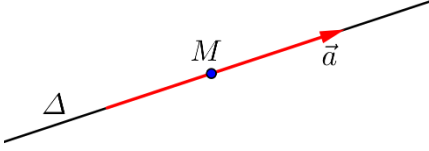
Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận vectơ $\vec{u} = (a; 2; b)$ làm vectơ chỉ phương. Tính $a+b$.

A. -8. B. 8. C. 4. D. -4.

Lời giải

➤ Dạng 4.2. Phương trình đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua M, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$ 	» Phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a; b; c\} \neq 0$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.2.1

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

A. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.2.2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

Lời giải

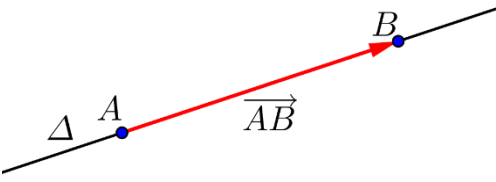
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.3. Phương trình đường thẳng qua hai điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua hai điểm A và B. 	» Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. » Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

☞ Ví dụ 4.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.3.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(-1; 3; 2)$, $B(2; 0; 5)$, $C(0; -2; 1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của ΔABC

A. $AM: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$.

B. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

C. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{-1}$.

D. $AM: \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

Lời giải

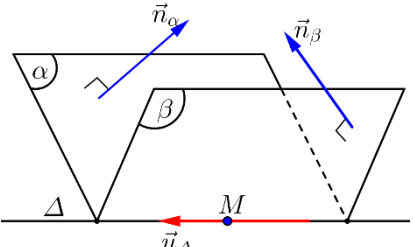
.....

.....

.....

Dạng 4.4. Phương trình đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ 	» Cho 1 trong 3 ẩn $x; y; z = 0$ để tìm 2 ẩn còn lại $x = 0 \longrightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$ » Vecto chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vecto chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. B. $\vec{u} = (2; 1; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 3; 5)$. D. $\vec{u} = (-1; 3; -5)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 4.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta): x + y + z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình chính tắc là

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$. B. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$.
- C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$. D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.4.3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 5z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) . Giao tuyến d' của (Q) và (P) đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(1;0;1)$. B. $N(-4;0;0)$. C. $P(4;2;2)$. D. $P(-3;-1;0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

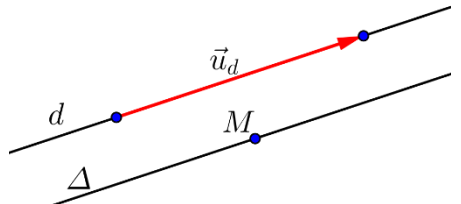
.....

.....

.....

Dạng 4.5. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với d. 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » Do $\Delta // d \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

A. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $x - 2y + z = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 4.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

Lời giải

.....

.....

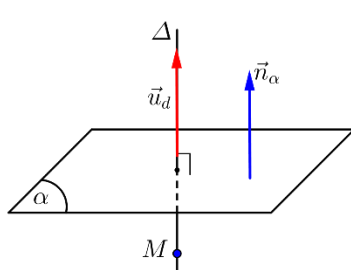
.....

.....

.....

Dạng 4.6. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc mặt

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » Do $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)}$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.6.1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 4.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2), B(1;2;1), C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$
B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$
D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

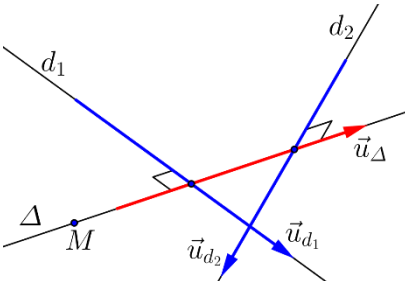
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.7. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc hai đường d_1 và d_2. 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » VTCP: $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.7.1

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

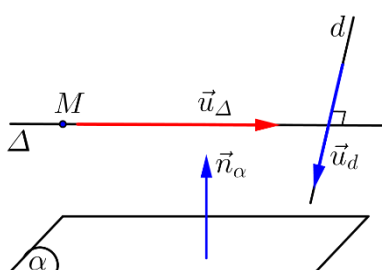
.....

.....

.....

Dạng 4.8. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) vuông góc d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và vuông góc d 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » VTCP: $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_\alpha; \vec{n}_{(\alpha)}]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

👉 Ví dụ 4.9.2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng:
 $d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.

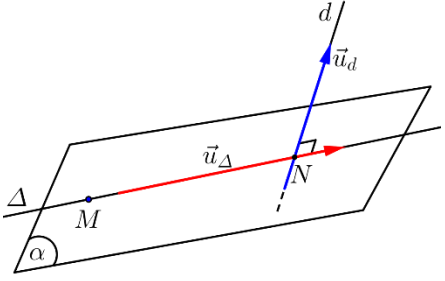
D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Lời giải

[illegible]

➤ Dạng 4.10. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc & cắt d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc và d. 	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \perp d \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_d \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$ » Gọi $N = d \cap (\alpha) \rightarrow$ giải hệ theo $t \rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

➤ Ví dụ 4.10.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

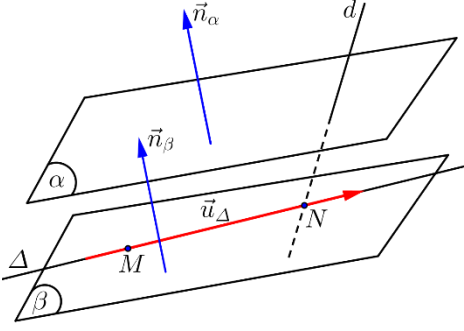
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.11. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) & cắt d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và cắt d. 	» Lập $(\beta): \begin{cases} \text{song song } (\alpha) \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\beta)} = \vec{n}_{(\alpha)} \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$. » Gọi $N = d \cap (\beta) \rightarrow$ giải hệ theo $t \rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.11.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A , song song (P) và cắt đường thẳng d ?

- A. $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 54t \\ y = 2 + 11t \\ z = -4 - 47t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 + 47t \\ y = 2 + 54t \\ z = -4 + 11t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 - 11t \\ y = 2 - 47t \\ z = -4 + 54t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

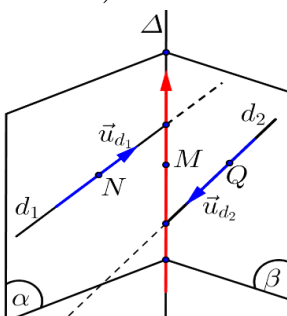
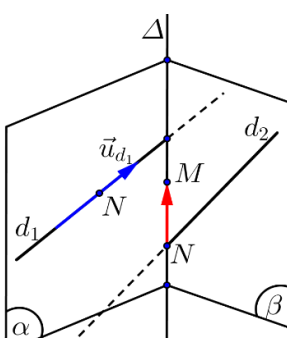
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.12. Phương trình đường thẳng qua điểm & cắt d_1, d_2

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và cắt d_1 và d_2. 	► Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$, lấy $N \in d_1$ bất kỳ. » Viết $(\beta): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\beta)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in d_2$ bất kỳ. » Khi đó đường thẳng $\Delta = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến.
	► Cách 2: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset \Delta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in \Delta_1$ bất kỳ. » Gọi $N = (\alpha) \cap \Delta_2 \rightarrow$ giải hệ theo $t \Rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.

► **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(0; 2; -4)$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $I(1;1;2)$, $d_1: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Phương trình đường thẳng Δ qua I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là

- A. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.12.3

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$ và $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình

- A. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1+2t \\ z = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1-2t \\ z = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-2t \\ z = 1 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

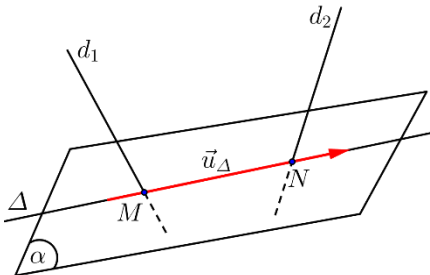
.....

.....

.....

Dạng 4.13. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & cắt d_1, d_2

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Nằm trong (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và cắt d_1 và d_2. 	» Gọi $\begin{cases} M = d_1 \cap (\alpha) \\ N = d_2 \cap (\alpha) \end{cases}$. » Khi đó đường thẳng Δ: $\begin{cases} qua \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

👉 Ví dụ 4.13.1

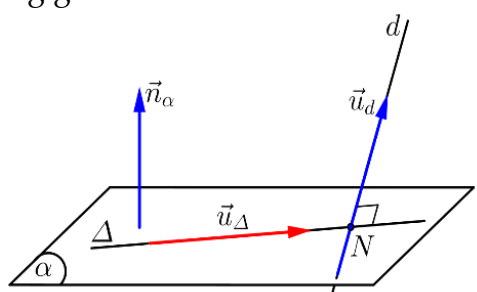
Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x - 3y + 11z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ và $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 đồng thời đường thẳng d nằm trong (P) .

A. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 7t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - 1t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 7t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Lời giải

➤ Dạng 4.14. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & vuông góc d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Nằm trong (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và vuông góc d. 	» Gọi $N = d \cap (\alpha)$. » Khi đó đường thẳng Δ: $\begin{cases} \text{qua } N \\ \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{u}_d] \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.14.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{3}$.

B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+1}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-1}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 4.14.2

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

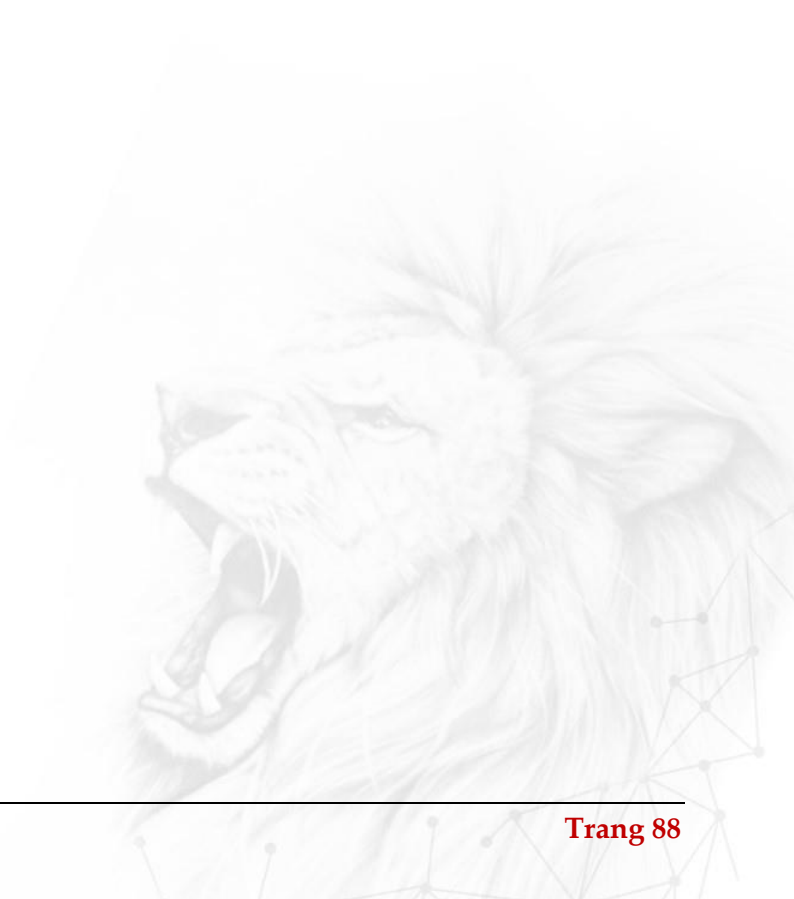
.....

.....

.....

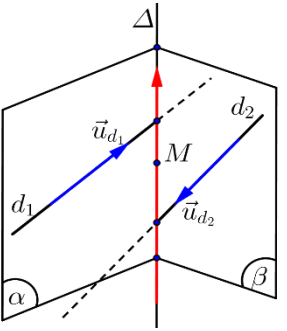
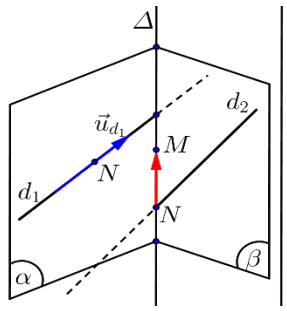
.....

.....



Dạng 4.15. Phương trình đường thẳng qua điểm và // d' cắt d₁, d₂

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và //d' và cắt d_1 và d_2 	► Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_{d_1}] \end{cases}$ » Viết $(\beta): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\beta)} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$ » Khi đó đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến.
	► Cách 2: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_{d'} \end{cases}$, lấy $M \in d_1$ bất kỳ. » Gọi $N = (\alpha) \cap d_2 \rightarrow$ giải hệ theo $t \Rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } N \\ \vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} \end{cases}$.

► **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

Ví dụ 4.15.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

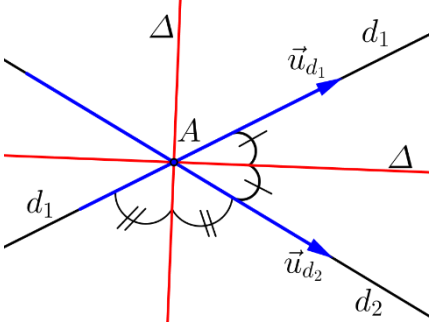
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.17. Phương trình đường thẳng là đường phân giác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Đường phân giác góc trong, Đường phân giác góc ngoài tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2. 	Xét 2 đường thẳng d_1 và d_2. có 2 vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1); \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ thỏa mãn $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$. - Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0$ thì vectơ chỉ phương của phân giác trong $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, phân giác ngoài $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. - Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 < 0$ thì vectơ chỉ phương của phân giác trong $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, phân giác ngoài $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. » Điểm đi qua thỏa $A = d_1 \cap d_2$.

➤ Ví dụ 4.17.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

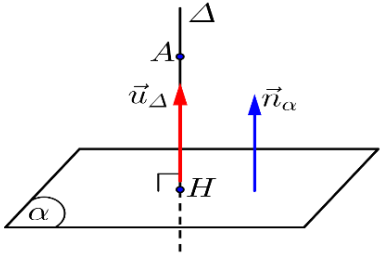
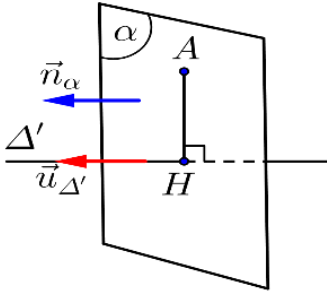
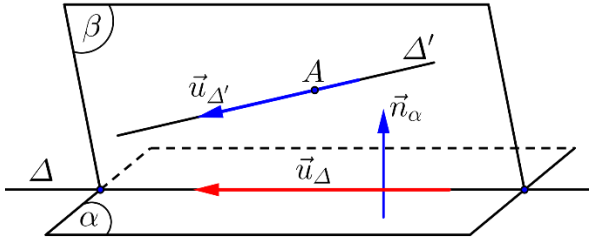
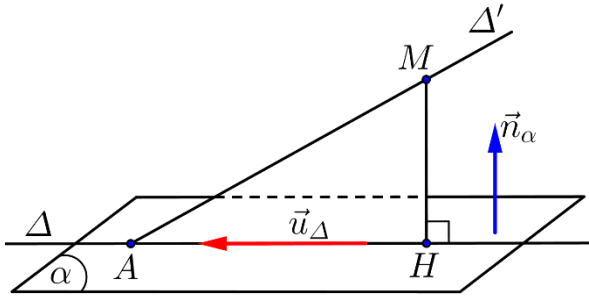
.....

.....

.....

➤ Dạng 4.18. Liên quan hình chiếu

➤ Trong không gian $Oxyz$, tìm

Loại	Phương pháp
(1) Hình chiếu vuông góc $A(x_A; y_A; z_A)$ lên $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Viết $\Delta: \begin{cases} \text{qua } A \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của A lên $(\alpha) \Rightarrow H = d \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. ❖ CT nhanh: $H(x_M - At; y_M - Bt; z_M - Ct)$ với $t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.
(2) Hình chiếu vuông góc $A(x_A; y_A; z_A)$ lên $\Delta': \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. 	Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } A \\ \perp \Delta' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_{\Delta'} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của A lên $\Delta' \Rightarrow H = \Delta' \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. Cách 2: » Tham số hóa $H \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (?t)$. » H là hình chiếu của A thì $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow t = ?$ » Tọa độ H.
(3) Hình chiếu vuông góc của Δ' lên $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Cách 1.  Cách 2. 	Cách 1: » Viết $(\beta): \begin{cases} \supset \Delta' \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{n}_{(\beta)} = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{u}_{\Delta'}] \end{cases}$. » Δ là hình chiếu vuông góc của Δ' lên $(\alpha) \Rightarrow \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến. Cách 2: » Tìm $A = (\alpha) \cap d \rightarrow$ giải hệ tìm $t \Rightarrow A(?)$. » Lấy $M \in d (M \neq A)$. » Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (α) » Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (α) $\rightarrow \Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AH} \end{cases}$.

❖ CT nhanh:

$$\Delta': \begin{cases} x = x_0 - at + (a(B^2 + C^2) - A(b.B + c.C))k \\ y = y_0 - bt + (b(A^2 + C^2) - B(a.A + c.C))k \\ z = z_0 - ct + (c(A^2 + B^2) - C(a.A + b.B))k \end{cases} \text{ với}$$

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A.a + B.b + C.c}.$$

» Điểm chiếu lên mặt

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$ và điểm $A(2; 5; 1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P) .

- A. $H(4; -2; 3)$. B. $H(-4; 2; 3)$. C. $H(4; 2; 3)$. D. $H(4; 2; -3)$.

Lời giải

» Điểm chiếu lên đường

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là:

- A. $N(2; 2; 3)$. B. $P(6; 6; 3)$. C. $M(2; 1; -3)$. D. $Q(1; 1; 4)$.

Lời giải

» Đường chiếu lên mặt

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) .

- A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

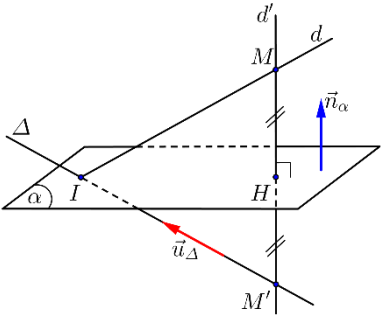
.....

.....



📌 Dạng 4.19. Liên quan đối xứng

► Trong không gian $Oxyz$, tìm

Loại	Phương pháp
(1) M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. ❖ CT nhanh: $M' \begin{cases} (x_M + 2At; y_M + 2Bt; z_M + 2Ct) \\ t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}.$	» Viết $\Delta: \begin{cases} qua M \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của M lên (α) $\Rightarrow H = d \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$.
(2) M' là điểm đối xứng của M qua $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. ❖ CT nhanh: $M' \begin{cases} (2x_0 - x_M + 2at; 2y_0 - y_M + 2bt; 2z_0 - z_M + 2ct) \\ t = \frac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$	» Viết $(\alpha): \begin{cases} qua M \\ \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_\Delta \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của M lên Δ $\Rightarrow H = \Delta \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$.
(3) Δ là đường thẳng đối xứng d qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm giao điểm $I = d \cap (\alpha)$ và lấy $M \in d$ (bất kỳ). » Viết $d': \begin{cases} qua M \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{u}_{d'} = \vec{n}_\alpha \end{cases}$ » Tìm giao điểm $H = d' \cap (\alpha)$ » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$. » Hình chiếu của d là $\Delta: \begin{cases} qua M' \\ qua I \end{cases}$.

» Điểm đối xứng điểm qua mặt

📌 Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$.

Tìm tọa độ của điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (P) .

- A. $N(2;1;1)$. B. $N(-1;-1;4)$. C. $N(2;1;0)$. D. $N(1;2;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

» Điểm đối xứng điểm qua đường

☞ Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(3;2;0)$ $B(1;0;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng của điểm A qua d .

- A. $A'(-1;0;4)$. B. $A'(-2;0;1)$. C. $A'(1;1;1)$. D. $A'(3;2;1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

» Đường đối xứng đường qua mặt

☞ Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{7}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{7}$.
- C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{7}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{7}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

-----Hết-----

Hình học

Chủ đề 05

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Điểm và mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng

Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ với:

» Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ tâm I , bán kính R .

» Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_p$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Điểm	
Mặt cầu	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM > R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM = R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM < R$	Điểm M nằm trong mặt cầu
Mặt phẳng	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $(P): Ax + By + Cz + D = 0$	
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$	Điểm M nằm trong mặt phẳng
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$	Điểm M nằm ngoài mặt phẳng
Đường thẳng	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$	
	$\frac{x_0 - X_0}{a} = \frac{y_0 - Y_0}{b} = \frac{z_0 - Z_0}{c}$	Điểm M nằm trên đường thẳng
	$\frac{x_0 - X_0}{a} \neq \frac{y_0 - Y_0}{b} \neq \frac{z_0 - Z_0}{c}$	Điểm M nằm ngoài đường thẳng
	1 trong 3 phân số $\neq$ nhau	
	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $d: \begin{cases} x = X_0 + at \\ y = Y_0 + bt \\ z = Z_0 + ct \end{cases}$	
	$\begin{cases} x_0 = X_0 + at \\ y_0 = Y_0 + bt \\ z_0 = Z_0 + ct \end{cases} \rightarrow$ cho cùng giá trị t	Điểm M nằm trên đường thẳng
	$\begin{cases} x_0 = X_0 + at \\ y_0 = Y_0 + bt \\ z_0 = Z_0 + ct \end{cases} \rightarrow$ không cho cùng giá trị t	Điểm M nằm ngoài đường thẳng

2. Mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ tâm I , bán kính R , với:

» Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;(P)) > R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;(P)) = R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d(I;(P)) < R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu (*)
Đường thẳng	Tính $d(I;(d))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;d) > R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d) = R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d) < R$	Đường thẳng cắt mặt cầu (**)

(*): Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r .

$$\text{Biểu thức liên hệ } R = \sqrt{r^2 + d^2(I;(P))}$$

(**): Đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm $A; B$.

$$\text{Biểu thức liên hệ } R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I;\Delta)}$$

3. Mặt phẳng và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

» Mặt phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

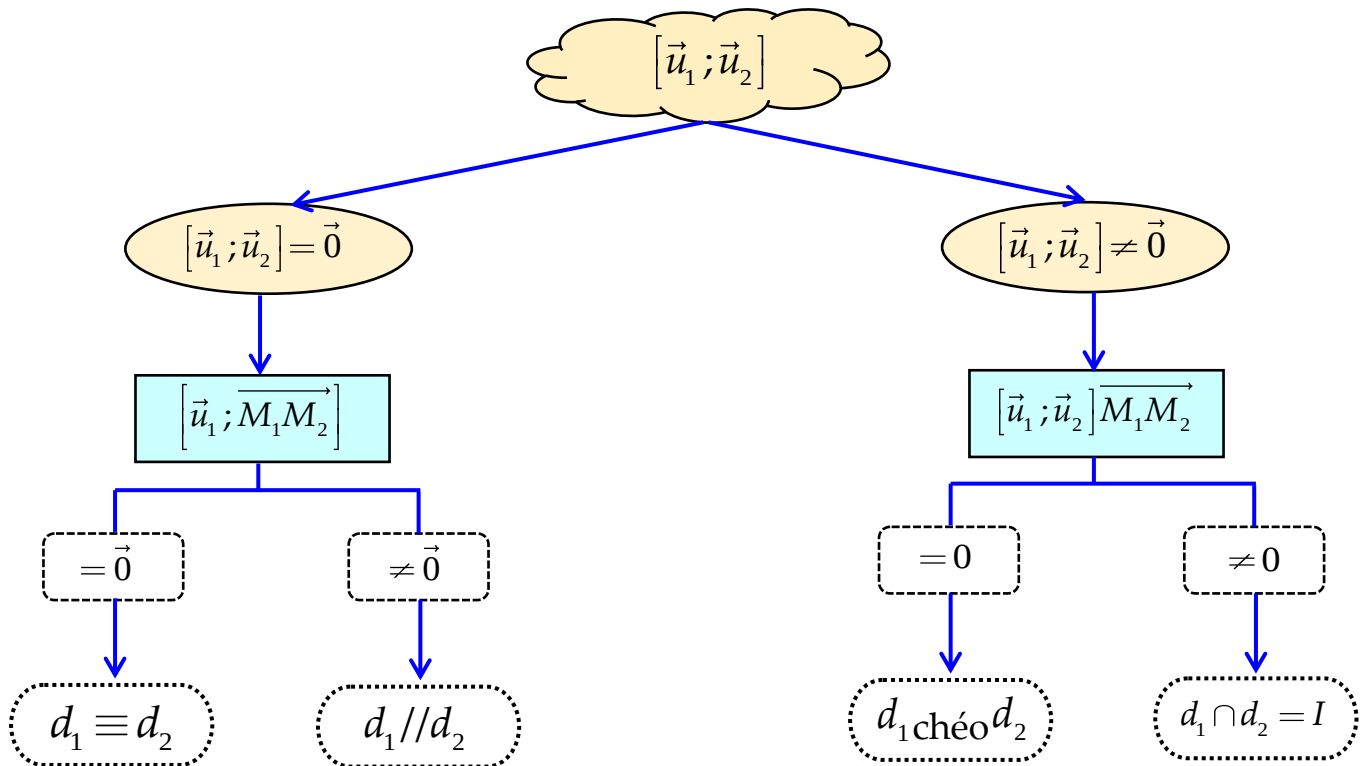
Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)	
Mặt phẳng (Q)	Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng	
	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$	Mặt (P) vuông góc mặt (Q)
Đường thẳng	Tham số hóa $H \in d \Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng (P)	
	Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.	

$f(t) = 0$ vô nghiệm	Đường thẳng song song mặt (P)
$f(t) = 0$ có 1 nghiệm	Đường thẳng cắt mặt (P)
$f(t) = 0$ vô số nghiệm	Đường thẳng nằm trong mặt (P)
Xét tích vô hướng vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P)	
$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \notin (P)$	Đường thẳng song song mặt (P)
$A.a + B.b + C.c \neq 0$	Đường thẳng cắt mặt (P)
$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \in (P)$	Đường thẳng nằm trong mặt (P)

4. Đường thẳng và đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ và các điểm $M_1; M_2$ nằm trên $d_1; d_2$.



Hoặc ta có thể xét như sau:

Đường thẳng d_2	
Đường thẳng d_1	Xét $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ ($k \neq 0$)
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \in d_2$ d_1 trùng d_2
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$ d_1 song song d_2
	Và xét hệ tương giao $(I): \begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) có nghiệm duy nhất d_1 cắt d_2
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) vô nghiệm d_1 chéo d_2

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 5.1. Vị trí tương đối với mặt cầu

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;(P)) > R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;(P)) = R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d(I;(P)) < R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d(I;(d))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;d) > R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d) = R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d) < R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM > R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM = R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM < R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

➤ Ví dụ 5.1.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) . B. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .
C. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) . D. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.1.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x + y - 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y + 2z - 1 = 0$.
C. $2x - y - 2z + 1 = 0$. D. $2x - 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.1.3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.1.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$, $2x + 2y + z + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S) ?

A. 1. B. 4. C. 0. D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+mt \\ z = -t \end{cases}$. Giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S) là:

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$. C. $-1 < m < 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.2. Vị trí tương đối với mặt phẳng

	Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng
	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$ Mặt (P) vuông góc mặt (Q)
Đường thẳng	Tham số hóa $H \in d \Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng (P)
	Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.
	$f(t) = 0$ vô nghiệm Đường thẳng song song mặt (P)
	$f(t) = 0$ có 1 nghiệm Đường thẳng cắt mặt (P)
	$f(t) = 0$ vô số nghiệm Đường thẳng nằm trong mặt (P)
	Xét tích vô hướng vecto chỉ phương của d và vecto pháp tuyến của (P)
	$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \notin (P)$ Đường thẳng song song mặt (P)
	$A.a + B.b + C.c \neq 0$ Đường thẳng cắt mặt (P)
Điểm	$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \in (P)$ Đường thẳng nằm trong mặt (P)
	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào (P): $Ax + By + Cz + D = 0$
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ Điểm M nằm trong mặt phẳng
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ Điểm M nằm ngoài mặt phẳng

➤ Ví dụ 5.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0, (\beta): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\alpha) // (\beta)$ B. $(\alpha) \equiv (\beta)$ C. $(\alpha) \perp (\beta)$ D. $(\alpha) \cap (\beta)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt (P) B. $d // (P)$ C. $d \subset (P)$ D. $d \perp (P)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.2.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + y + mz + 1 = 0$ (với m là tham số) và $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) song song với d .

A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.2.4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi

A. $|m| = \sqrt{3}$ B. $|m| = 1$ C. $|m| = \sqrt{2}$ D. $|m| = 2$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.2.5

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ và $(Q): 4x + (m - 3)y + (m^2 + 1)z - 7 = 0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

A. $m = 3$ B. $m = \pm 3$ C. $m = -3$ D. $m = 0$

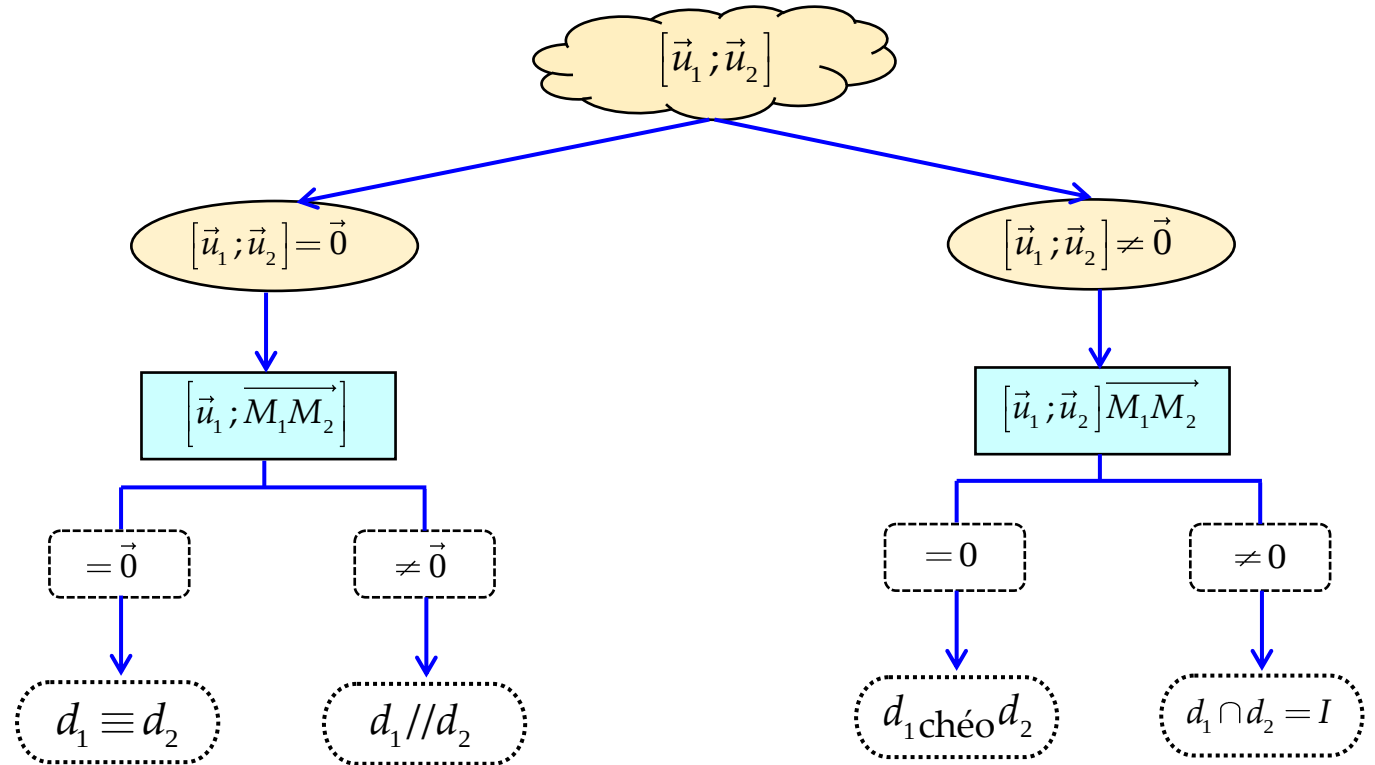
Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.3. Vị trí tương đối với đường thẳng



Hoặc ta có thể xét như sau:

	Đường thẳng d_2	
Đường thẳng d_1	Xét $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ ($k \neq 0$)	
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \in d_2$	d_1 trùng d_2
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$	d_1 song song d_2
	Và xét hệ tương giao (I): $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$	
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) có nghiệm duy nhất	d_1 cắt d_2
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) vô nghiệm	d_1 chéo d_2

➤ Ví dụ 5.3.1

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm của $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$ là

A. $(8; -13; 23)$ B. $(0; -3; 2)$ C. $(-7; -8; -2)$ D. $(3; 7; 18)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.3.2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = -3-t \\ z = 0 \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d_1 và d_2 đồng phẳng
B. d_1 cắt và vuông góc với d_2
C. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau
D. $d_1 // d_2$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.3.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+at \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$ ($t; t' \in \mathbb{R}$). Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

- A. $a = 2$
B. $a = 1$
C. $a = -1$
D. $a = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.3.4

Trong không gian $Oxyz$, giá trị nào của tham số m thì đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{m}$ song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 2+2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) là

- A. 1
B. 4
C. 2
D. 3

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.3.5

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{m} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{m}$ ($m \neq 0$) và đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 3+2t \\ z = 3-t \end{cases}$. Tìm giá trị của số thực m để d và Δ cắt nhau

A. $m=1$

B. $m = \frac{3}{2}$

C. $m=2$

D. $m = \frac{1}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 5.4. Góc

(1) Hai đường thẳng $d_1; d_2$: $|\cos(d_1; d_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

(2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1); (\alpha_2)$: $|\cos((\alpha_1); (\alpha_2))| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

(3) Đường thẳng d và mặt phẳng (α) : $|\sin(d; (\alpha))| = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{u}_d|}$.

Chú ý: $0^\circ \leq ((\alpha), (\beta)) \leq 90^\circ$

➤ Ví dụ 5.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$, mặt phẳng $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. 45° B. 15° C. 30° D. 120°

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.4.2

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$.

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.4.3

Trong không gian $Oxyz$, tìm m để số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=-3+\sqrt{2}t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2+mt \\ y=3+t \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$ bằng 60° .

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.4.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$?

A. $\begin{cases} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.4.5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$

B. $(8;11)$

C. $(3;5)$

D. $(0;3)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.5. Khoảng cách

(1) Hai điểm $A; B$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(2) Điểm M_0 và Δ : $d(M_0; \Delta) = \frac{|\left[\vec{u}; \overrightarrow{MM_0} \right]|}{|\vec{u}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\Delta' // \Delta \\ M_0 \in \Delta'}]{\Delta'} d(\Delta'; \Delta) = d(M_0; \Delta)$$

(3) Hai đường $\Delta_1; \Delta_2$ ($M \in \Delta_1; N \in \Delta_2$): $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{MN}|}{\left| \left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \right|}$.

$$\xrightarrow[\substack{AB \& CD \\ \text{chéo nhau}}]{AB \& CD} d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right] \cdot \overrightarrow{BD}|}{\left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right] \right|}$$

(4) Điểm M_0 và mặt $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$: $d(M_0; (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\left\{ \begin{array}{l} (\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta) \end{array} \right\}}]{\substack{(\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta)}} d(M_0; (\alpha)) = d((\beta); (\alpha)) = d(\Delta; (\alpha))$$

➤ Ví dụ 5.5.1

Trong không gian $Oxyz$ cho $(P): 3x + 4y + 2z + 5 = 0$, điểm $A(2; -1; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

A. $d = \frac{13}{9}$

B. $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$

C. $d = \frac{13}{29}$

D. $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; -1; -2)$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

C. $\sqrt{7}$

D. $\frac{2}{7}$

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.5.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;-2;1)$. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng AB .

A. 2

B. $\sqrt{13}$

C. $3\sqrt{2}$

D. 12

☞ Ví dụ 5.5.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y - 2z + 5 = 0$ và $(Q): -2x - y + 2z + 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

A. 1

B. $\frac{2}{3}$

C. 2

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

☞ Ví dụ 5.5.5

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x - 2y - z + 1 = 0$ và $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Khoảng cách giữa Δ và (P) bằng

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C. 0

D. 2

Lời giải

☞ Ví dụ 5.5.6

Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' .

A. $h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$

B. $h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$

C. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$

D. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$

Lời giải

-----Hết-----



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 03

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN *Oxyz*

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





⌘ Chủ đề 01. TỌA ĐỘ

A. Lý thuyết chung

1. Vectơ	4
2. Điểm	5
3. Hình chiếu vuông góc	8
4. Đối xứng	8
5. Góc	9
6. Khoảng cách	9

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 1.1. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước	10
➤ Dạng 1.2. Tìm tọa độ điểm đặc biệt	12
➤ Dạng 1.3. Tìm tọa độ vectơ thỏa điều kiện cho trước	17
➤ Dạng 1.4. Liên quan độ dài	18
➤ Dạng 1.5. Sự cùng phương	20
➤ Dạng 1.6. Sự đồng phẳng	21
➤ Dạng 1.7. Ứng dụng tích có hướng	23
➤ Dạng 1.8. Liên quan góc	26
➤ Dạng 1.9. Tâm tỷ cự	28
➤ Dạng 1.10. Tọa độ hóa	30
⌘ Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian	31

⌘ Chủ đề 02. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	38
2. Vị trí tương đối	38

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 2.1. Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu	40
➤ Dạng 2.2. Phương trình mặt cầu có tâm và đi qua một điểm	42
➤ Dạng 2.3. Phương trình mặt cầu nhận hai điểm làm đường kính	43
➤ Dạng 2.4. Phương trình mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng	44

➤ Dạng 2.5. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc (P) và qua ba điểm	45
➤ Dạng 2.6. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc d và qua hai điểm	46
➤ Dạng 2.7. Phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng – đường thẳng.....	47
➤ Dạng 2.8. Phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng – đường thẳng	49

⌘ Chủ đề 03. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	51
2. Vị trí tương đối hai mặt phẳng	51

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 3.1. Xác định vecto pháp tuyến.....	52
➤ Dạng 3.2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đồng phẳng.....	53
➤ Dạng 3.3. Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và chứa vectơ.....	55
➤ Dạng 3.4. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng	56
➤ Dạng 3.5. Phương trình mặt phẳng qua 2 điểm, vuông góc mặt phẳng.....	57
➤ Dạng 3.6. Phương trình mặt phẳng qua điểm, vuông góc 2 mặt phẳng.....	58
➤ Dạng 3.7. Phương trình mặt phẳng song song mặt phẳng khác	59
➤ Dạng 3.8. Phương trình mặt phẳng qua điểm, song song/vuông góc đường thẳng	61
➤ Dạng 3.9. Phương trình mặt phẳng qua điểm, chứa đường thẳng	62
➤ Dạng 3.10. Phương trình mặt phẳng chứa d,d' và d cắt d'	63
➤ Dạng 3.11. Phương trình mặt phẳng chứa d, d' và d song song d'.....	64
➤ Dạng 3.12. Phương trình mặt phẳng chứa d và song song d'	65
➤ Dạng 3.13. Phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc mặt khác	66
➤ Dạng 3.14. Phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng	67
➤ Dạng 3.15. Phương trình mặt phẳng liên quan mặt cầu.....	68

⌘ Chủ đề 04. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. Lý thuyết chung

1. Phương trình	70
2. Vị trí tương đối hai đường thẳng.....	70
3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng	71
4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu.....	71
5. Khoảng cách liên quan đến đường thẳng	71

B. Các dạng bài tập

➤ Dạng 4.1. Xác định vecto chỉ phương.....	72
➤ Dạng 4.2. Phương trình đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP	73
➤ Dạng 4.3. Phương trình đường thẳng qua hai điểm	74
➤ Dạng 4.4. Phương trình đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng	75

▮ Dạng 4.5. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song d	77
▮ Dạng 4.6. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc mặt.....	78
▮ Dạng 4.7. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, d'	79
▮ Dạng 4.8. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) vuông góc d	80
▮ Dạng 4.9. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d , cắt d'	81
▮ Dạng 4.10. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc & cắt d	83
▮ Dạng 4.11. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) & cắt d	84
▮ Dạng 4.12. Phương trình đường thẳng qua điểm & cắt d_1, d_2	86
▮ Dạng 4.13. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & cắt d_1, d_2	88
▮ Dạng 4.14. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & vuông góc d	89
▮ Dạng 4.15. Phương trình đường thẳng qua điểm và // d' cắt d_1, d_2	91
▮ Dạng 4.16. Phương trình đường thẳng là đường vuông góc chung	92
▮ Dạng 4.17. Phương trình đường thẳng là đường phân giác	93
▮ Dạng 4.18. Liên quan hình chiếu	94
▮ Dạng 4.19. Liên quan đối xứng	97

⌘ Chủ đề 05. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

A. Lý thuyết chung

1. Điểm và mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng	100
2. Mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng.....	101
3. Mặt phẳng và mặt phẳng, đường thẳng	101
4. Đường thẳng và đường thẳng.....	102

B. Các dạng bài tập

▮ Dạng 5.1. Vị trí tương đối với mặt cầu	103
▮ Dạng 5.2. Vị trí tương đối với mặt phẳng.....	105
▮ Dạng 5.3. Vị trí tương đối với đường thẳng	107
▮ Dạng 5.4. Góc.....	110
▮ Dạng 5.5. Khoảng cách	112

Hình học

Chủ đề 01

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

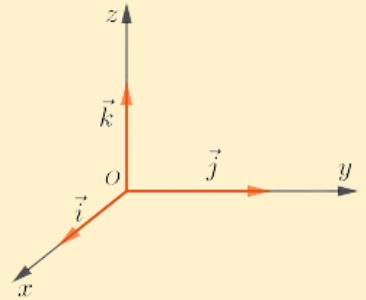


Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, trục $Ox; Oy; Oz$ đôi một vuông góc với nhau như hình. Các vectơ đơn vị trên từng trục $Ox; Oy; Oz$

lần lượt là $\vec{i} = (1; 0; 0); \vec{j} = (0; 1; 0); \vec{k} = (0; 0; 1)$.

→ Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.



1. Vectơ

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

(2) Cộng – Trừ vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

(3) Tích của một số với vectơ: $k.\vec{a} \pm \vec{b} = (k.a_1; k.a_2; k.a_3)$.

(4) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.

(5) Tích vô hướng hai vectơ: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \end{cases}$

→ Góc giữa 2 vectơ: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$.

Chú ý: Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(6) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

(7) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

(8) Vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

(9) ABCD là hình bình hành $\vec{AB} = \vec{DC}$.

(10) Tích có hướng của hai vectơ $[\vec{a}; \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Qui tắc: Che từ trước ra sau – ở giữa đổi dấu

Hoặc $[\vec{a}; \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$

(11) Diện tích tam giác ABC $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}; \vec{AC}]|$

(12) Thể tích tứ diện $ABCD$ $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

(13) Thể tích hộp $ABCD.A'B'C'D'$ $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}; \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$

2. Điểm

Xét hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

(1) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

(2) Độ dài vectơ $\vec{AB}$: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) M thuộc các trục tọa độ: $\begin{cases} M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0) \\ M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0) \\ M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z) \end{cases}$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(4) M thuộc các mặt phẳng tọa độ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0) \\ M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z) \\ M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z) \end{cases}$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(5) I là trung điểm AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 $\rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

(6) G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

(7) G là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

(8) Nếu điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$) thì ta có:

$$\begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = k(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \\ z_M = \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k}; \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}; \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k}\right) \text{ với } k \neq 1.$$

(9) Ứng dụng tâm tỉ cự của n điểm:



Cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết:

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| |\overrightarrow{MI}|$$

Bước 3: Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?



Ví dụ 1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1); B(3;1;0)$ và mặt phẳng (P) . Tìm M trên mặt phẳng (P) để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Để thỏa được điều này ta thấy I là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{Khi đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2|\overrightarrow{MI}|.$$

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .



Cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết:

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Thấy rằng $MA_1^2 = |\overrightarrow{MA_1}|^2 = (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 = (\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2 \right] + \dots + k_n \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + (\overrightarrow{IA_n})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n)MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + \dots + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}} \right) \\
 &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n)MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2)
 \end{aligned}$$

Bước 3: Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

► **Chú ý:** Cho đa giác $A_1A_2\dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.



Ví dụ 2.

Trong không gian $Oxyz$, tìm điểm M nằm trên mặt phẳng (P) chứa $\triangle ABC$ sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

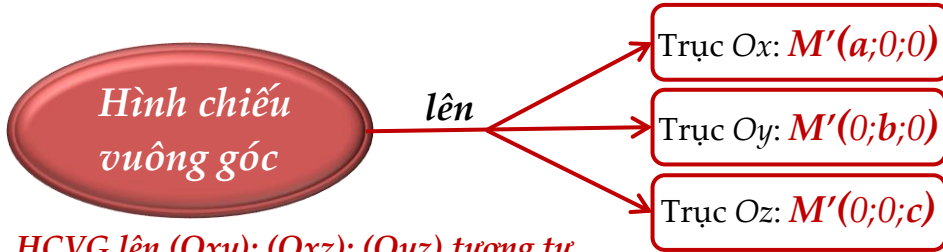
Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Với mọi điểm M ta có:

$$\begin{aligned}
 MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2 \\
 &= 6MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2) + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}} \right) \\
 &= 6MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2)
 \end{aligned}$$

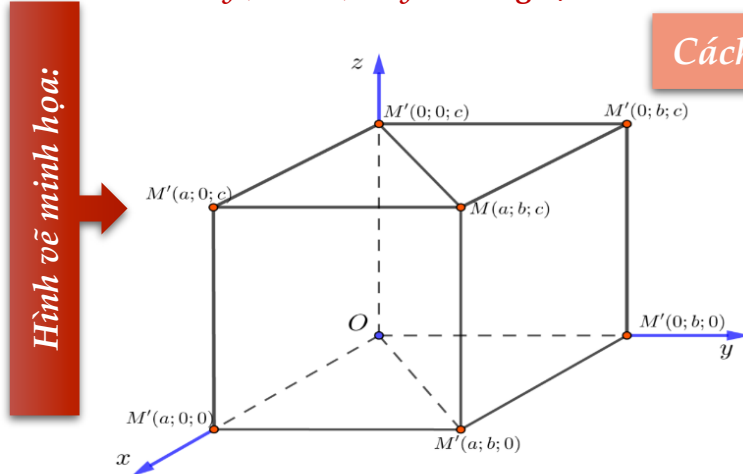
Vậy $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = 0$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$

3. Hình chiếu vuông góc

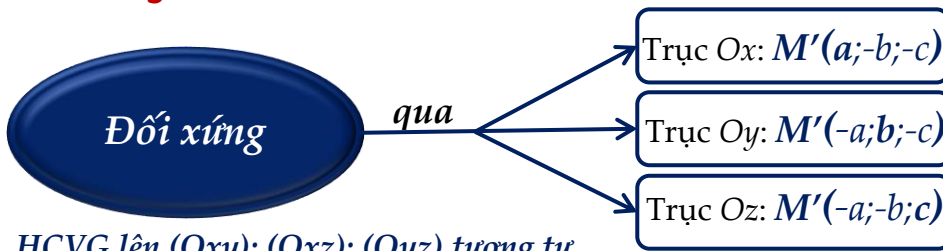


HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự

Cách nhớ: Chiếu lên cái gì cái đó có.

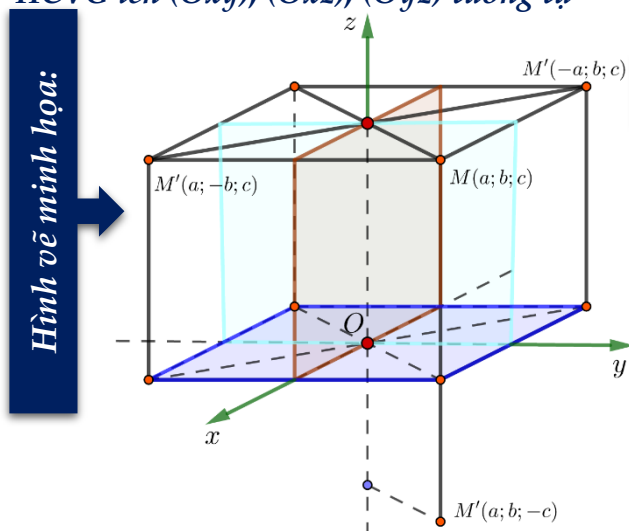


4. Đối xứng



HCVG lên (Oxy); (Oxz); (Oyz) tương tự

Cách nhớ: Đối xứng qua cái gì cái đó giữ. Còn lại đổi (tức thêm dấu trừ).



5. Góc

Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

→ Góc giữa:

(1) Hai đường thẳng $d_1; d_2$: $\dots\dots\dots |\cos(d_1; d_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

(2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1); (\alpha_2)$: $\dots\dots\dots |\cos((\alpha_1); (\alpha_2))| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

(3) Đường thẳng d và mặt phẳng (α) : $\dots\dots\dots |\sin(d; (\alpha))| = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{u}_d|}$.

6. Khoảng cách

(1) Hai điểm $A; B$: $\dots\dots\dots |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(2) Điểm M_0 và Δ : $\dots\dots\dots d(M_0; \Delta) = \frac{|\vec{u}; \overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{u}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\Delta' // \Delta \\ M_0 \in \Delta'}]{\Delta'} d(\Delta'; \Delta) = d(M_0; \Delta)$$

(3) Hai đường $\Delta_1; \Delta_2$ ($M \in \Delta_1; N \in \Delta_2$): $\dots\dots\dots d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{u}_1; \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{u}_1; \vec{u}_2|}$.

$$\xrightarrow[\substack{AB \& CD \\ \text{chéo nhau}}]{AB \& CD} d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{AB}; \vec{CD} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\vec{AB}; \vec{CD}|}$$

(4) Điểm M_0 và mặt $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$: $\dots\dots\dots d(M_0; (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{(\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta)}]{\substack{(\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in \Delta}} d(M_0; (\alpha)) = d((\beta); (\alpha)) = d(\Delta; (\alpha))$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1.1. Tìm tọa độ điểm thỏa điều kiện cho trước

► Công thức liên quan thường dùng:

Cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$

• Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Khi đó $\vec{OM} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{OM} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(m_1; m_2; m_3)$.

Khi đó $\vec{MO} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ thì $\vec{MO} = (m_1; m_2; m_3) \Rightarrow M(-m_1; -m_2; -m_3)$.

(1) Tọa độ vectơ $\vec{AB}$: $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

(2) Độ dài vectơ $\vec{AB}$: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) M thuộc các trục tọa độ:
 $M \in Ox \rightarrow M(x; 0; 0)$
 $M \in Oy \rightarrow M(0; y; 0)$
 $M \in Oz \rightarrow M(0; 0; z)$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(4) M thuộc các mặt phẳng tọa độ:
 $M \in (Oxy) \rightarrow M(x; y; 0)$
 $M \in (Oxz) \rightarrow M(x; 0; z)$
 $M \in (Oyz) \rightarrow M(0; y; z)$

Cách nhớ: Thuộc cái gì $\rightarrow$ cái đó có.

(5) I là trung điểm AB: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 $\rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

(6) G là trọng tâm $\triangle ABC$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

(7) G là trọng tâm chóp ABCD: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$
 $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MG}$

(8) Nếu điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\vec{MA} = k\vec{MB}$) thì ta có:

$$\begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = k(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - k.x_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - k.y_B}{1-k} \\ z_M = \frac{z_A - k.z_B}{1-k} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x_A - k.x_B}{1-k}; \frac{y_A - k.y_B}{1-k}; \frac{z_A - k.z_B}{1-k}\right) \text{ với } k \neq 1.$$

☞ Ví dụ 1.1.1

Trong không gian Oxyz, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ của điểm M là

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(2; 0; 1)$. C. $M(2; 1; 0)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 1; 0) \Rightarrow M(2; 1; 0)$.

Ví dụ 1.1.2

Trong không gian $Oxyz$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) thì

- A. $x_M = 0$. B. $y_M = 0$. C. $z_M = 0$. D. $z_M = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ lên mặt phẳng (Oxy) là $M'(x_0; y_0; 0)$

Ví dụ 1.1.3

Trong không gian $Oxyz$, M' là hình chiếu vuông góc của $M(3, 2, 1)$ trên Ox . M' có tọa độ là

- A. $(0; 0; 1)$. B. $(3; 0; 0)$. C. $(-3; 0; 0)$. D. $(0; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ trên Ox là $M'(x_0; 0; 0)$

Ví dụ 1.1.4

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I(1; -1; 2)$. B. $I(1; 1; 0)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1; 1; 1)$.

Lời giải

Ta có $M(1; 1; 0)$, $N(1; 1; 2)$. Suy ra tọa độ trung điểm $I(1; 1; 1)$.

Ví dụ 1.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $B(1; 3; -1)$, $\overrightarrow{OC} = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

- A. Điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 1\right)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$.
 B. $AB = \sqrt{2}BC$.
 C. $AC < BC$.
 D. Điểm $M\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AB .

Lời giải

Chọn C

Từ $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{k} \rightarrow A(-1; 0; 2) \\ \overrightarrow{OC} = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \rightarrow C(2; 2; 2) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (3; 2; 0) \\ \overrightarrow{BC} = (1; -1; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13} \\ BC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow AC > BC$ nên chọn C.

➤ Dạng 1.2. Tìm tọa độ điểm đặc biệt

01	Chân đường cao	• Định nghĩa đường cao: là đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến cạnh đáy thì gọi là đường cao của tam giác đó. • Chân đường cao: là giao điểm của đường cao và cạnh đáy. • Bài toán: Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A trong $\triangle ABC$. Bước 1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BH}; \overrightarrow{BC}$. Bước 2: Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ Do $H \in BC \rightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\rightarrow \overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ Bước 3: Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \frac{x_{\overrightarrow{BH}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{BH}}}{y_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{z_{\overrightarrow{BH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = k \rightarrow H(?) \end{cases}$
02	Trực tâm	• Định nghĩa trực tâm: là giao điểm của ba đường cao. • Bài toán: Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$. Bước 1: Tìm tọa độ $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BH}; \overrightarrow{CH}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}$. Bước 2: Do $\begin{cases} H \in AH \\ AH \perp BC \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ Tương tự ta được $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$. Bước 3: Từ các yếu tố trên ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow H(?) \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$
03	Chân đường phân giác trong	• Định nghĩa đường phân giác: là đường thẳng chia góc đó thành 2 góc bằng nhau. • Chân đường phân giác: là giao điểm của đường phân giác và cạnh đáy. • Bài toán: Tìm tọa độ chân đường phân giác trong D kẻ từ đỉnh A trong $\triangle ABC$. Bước 1: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$. Do $D \in AC \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \frac{BA}{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$. Tính tỷ số $\frac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra. Bước 2: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ D.

04

Tâm
đường
tròn
nội
tiếp

• Định nghĩa tâm đường tròn nội tiếp tam giác:

là giao điểm của 3 đường phân giác trong.

• Bài toán: Tìm tọa độ chân tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

► Cách 1. Áp dụng tính chất:

“Cho $\triangle ABC$, I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $BC \cdot \vec{IA} + AC \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IC} = \vec{0} (*)$ ”

Bước 1: Tính AC ; AB ; BC ta được các hằng số.

Bước 2: Tính $\vec{IA}$; $\vec{IB}$; $\vec{IC}$.

Bước 3: Thay vào $(*)$ và thu gọn $\rightarrow I(?)$.

► Cách 2. Áp dụng tính chất giao điểm 3 đường phân giác (2 lần):

Lần 1: Xét $\triangle ABC$, gọi D là chân đường phân giác góc A

Bước 1: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$.

Do $D \in AC \Rightarrow \vec{DA} = \frac{BA}{BC} \cdot \vec{DC}$.

Tính tỷ số $\frac{BA}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.

Bước 2: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ D .

Lần 2: Xét $\triangle ABD$, gọi I là chân đường phân giác góc B

Bước 3: Theo tính chất đường phân giác: $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA}$.

Do $I \in AD \Rightarrow \vec{ID} = -\frac{BD}{BC} \cdot \vec{IA}$.

Tính tỷ số $\frac{BD}{BC}$ bằng các tọa độ điểm mà đề ra.

Bước 4: Áp dụng $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = k \cdot x_b \\ y_a = k \cdot y_b \\ z_a = k \cdot z_b \end{cases}$. Để tìm tọa độ I .

☞ Ví dụ 1.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(2;3;1)$; $B(0;-1;2)$ và $C(1;0;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao H hạ từ đỉnh A của $\triangle ABC$.

A. $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. B. $H(2;0;1)$. C. $H\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$. D. $H(0;1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A của $\triangle ABC$

Ta có: $\vec{AH} = (x-2; y-3; z-1)$, $\vec{BH} = (x; y+1; z-2)$, $\vec{BC} = (1;1;1)$.

H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC

$\Leftrightarrow \vec{AH} \perp \vec{BC}$ và $\vec{BH}, \vec{BC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2+y-3+z-1=0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y=1 \\ x-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=\frac{11}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } H\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

Ví dụ 1.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tổng $a+b+c$ bằng

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a-1; b-2; c+1) \\ \overrightarrow{BH} = (a-2; b-1; c-1) \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -1; 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-2; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -5; -2).$

Do H là trực tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ H \in (ABC) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-1) + (c+1) = 0 \\ -1(a-2) - 1(b-1) + 3(c-1) = 0 \\ -1(a-1) - 5(b-2) - 2(c+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + c = -3 \\ -a - b + 3c = 0 \\ -a - 5b - 2c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=4$.

Ví dụ 1.2.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-4;7;5)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong của góc B .

A. $D(-2;2;-1)$. **B.** $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ **C.** $D(2;3;-1)$ **D.** $D(3;-11;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26} \\ BC = |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26} \end{cases} \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}} = \frac{1}{2}.$

Theo tính chất phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Gọi $D(x;y;z)$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y-2; z+1) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 5; 6) \end{cases}.$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -\frac{5}{3} \\ y-2 = \frac{5}{3} \\ z+1 = \frac{6}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

Ví dụ 1.2.4

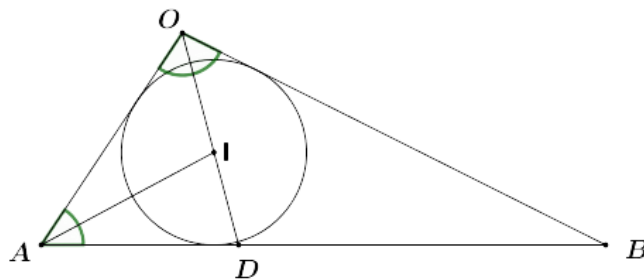
Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = -1$. B. $S = 2$ C. $S = 1$ D. $S = 0$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Ta có: $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc AOB và D thuộc đoạn AB .

Theo tính chất của phân giác trong: $\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow D\left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(-2; -\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle OAB \Rightarrow I$ thuộc đoạn OD .

Theo tính chất của phân giác trong $\triangle OAD$: $\frac{ID}{IO} = \frac{AD}{AO} = \frac{15}{21} \Rightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{15}{21} \overrightarrow{IO} \Rightarrow I(0; 1; 1)$

Vậy $S = a + b + c = 2$.

Cách 2:

Áp dụng: "Cho $\triangle OAB$, I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $AB \cdot \overrightarrow{IO} + OB \cdot \overrightarrow{IA} + OA \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0} (*)$ "

Ta có: $OA = 3$, $OB = 4$, $AB = 5$.

$$\text{Và } \begin{cases} \overrightarrow{IO} = (-a; -b; -c) \rightarrow 5 \cdot \overrightarrow{IO} = (-5a; -5b; -5c) \\ \overrightarrow{IA} = (2-a; 2-b; 1-c) \rightarrow 4 \cdot \overrightarrow{IA} = (8-4a; 8-4b; 4-4c) \\ \overrightarrow{IB} = \left(-\frac{8}{3}-a; \frac{4}{3}-b; \frac{8}{3}-c\right) \rightarrow 3 \cdot \overrightarrow{IB} = (-8-3a; 4-3b; 8-3c) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow 5 \cdot \overrightarrow{IO} + 4 \cdot \overrightarrow{IA} + 3 \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + 8 - 4a - 8 - 3a = 0 \\ -5b + 8 - 4b + 4 - 3b = 0 \\ -5c + 4 - 4c + 8 - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12a = 0 \\ -12b + 12 = 0 \\ -12c + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 1.2.5

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1); C(4;2;0); B'(-2;1;1); D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

A. $S = -1$.

B. $S = 2$

C. $S = 1$

D. $S = 0$

Lời giải

Chọn B

Gọi $A'(x_1; y_1; z_1); C'(x_2; y_2; z_2)$

Tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$ là $I\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$

Vì I là trung điểm $A'C'$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 6 \\ z_1 + z_2 = 5 \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{AC}(7; 0; -1); \overrightarrow{A'C'}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên $\begin{cases} x_2 - x_1 = 7 \\ y_2 - y_1 = 0 \\ z_2 - z_1 = -1 \end{cases}$

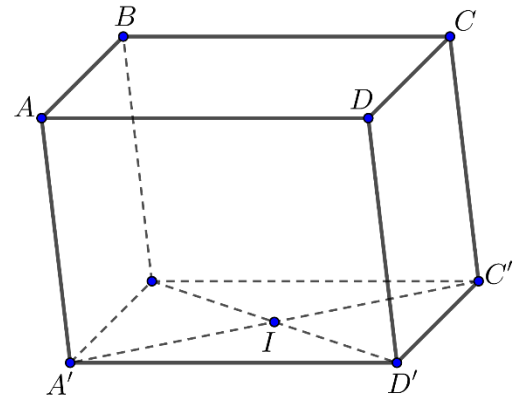
Xét các hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 6 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ z_2 - z_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy $A'(-3; 3; 3)$



Dạng 1.3. Tìm tọa độ vectơ thỏa điều kiện cho trước

Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- (1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- (2) Cộng – Trừ vectơ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
- (3) Tích của một số với vectơ: $k \cdot \vec{a} \pm \vec{b} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$.
- (4) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.
- (5) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 \\ a_2 = k \cdot b_2 \\ a_3 = k \cdot b_3 \end{cases}$.
- (6) ABCD là hình bình hành $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Ví dụ 1.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(1; -1; 2), C(1; 2; -1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.

- A. $M(0; 2; 1)$. B. $M(2; 0; 1)$. C. $M(-2; -6; 4)$. D. $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} \vec{AB} = (-2; -3; 1) \Rightarrow 2\vec{AB} = (-4; -6; 2) \\ \vec{AC} = (-2; 0; -2) \Rightarrow -\vec{AC} = (2; 0; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC} = (-2; -6; 4) \Rightarrow M(-2; -6; 4).$$

Ví dụ 1.3.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

- A. $D(-4; 8; -3)$. B. $D(2; 1; 2)$. C. $D(1; 1; 4)$. D. $D(2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow (x_D - 1; y_D - 2; z_D + 1) = (-5; 6; -2) \Rightarrow D(-4; 8; -3).$$

Ví dụ 1.3.3

Cho $\triangle ABC$ biết $A(2; 4; -3)$ có trọng tâm $G(2; 1; 0)$. Khi đó $\vec{AB} + \vec{AC}$ có tọa độ là

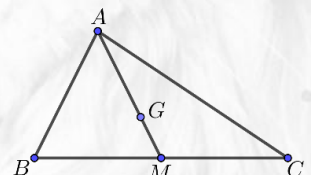
- A. $(0; -9; 9)$. B. $(0; 9; -9)$. C. $(0; 4; -4)$. D. $(0; -4; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm đoạn BC, G là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\text{Ta có } \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \vec{AG} = 3\vec{AG} = 3(0; -3; 3) = (0; -9; 9).$$



➤ Dạng 1.4. Liên quan độ dài

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ ta có:

(1) Độ dài vectơ $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.

..... $\rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$

(2) Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(3) Tích vô hướng hai vectơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

(4) Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

► Bài toán liên quan thường gặp:

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}| = m; |\vec{v}| = n$ và tạo với nhau một góc α . Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$ hoặc $|\vec{u} - \vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

Bước 1: Biến đổi $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

Bước 2: Áp dụng: $\begin{cases} \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \end{cases}$

Để biến đổi:

$$\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \quad (*)$$

Bước 3: Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = ?$

☞ Ví dụ 1.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -2; 2)$. Tìm chu vi của ABC .

A. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức tính độ dài ta được

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{10};$$

$$AC = \sqrt{0+4+16} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Chu vi của } ABC: \sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}.$$

☞ Ví dụ 1.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 5)$ và $B(3; m-2; 4m), m \in \mathbb{R}$. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để đoạn thẳng $AB = 3$.

A. $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức tính độ dài ta được:

$$AB = \sqrt{2^2 + (m+1)^2 + (4m-5)^2} = \sqrt{17m^2 - 38m + 30}.$$

$$AB = 3 \Leftrightarrow \sqrt{17m^2 - 38m + 30} = 3 \Leftrightarrow 17m^2 - 38m + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{21}{17} \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

Ví dụ 1.4.3

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm độ dài đoạn AM .

- A. 2. B. $\sqrt{29}$. C. $2\sqrt{7}$. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $M(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (a;b-3;c-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-3;3;3)$.

$$\text{Điểm } M \in BC: MC = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot (-3) \\ b-3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ c-1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2).$$

Vậy $AM = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$.

Ví dụ 1.4.4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

- A. 7. B. $\sqrt{39}$. C. $\sqrt{19}$. D. -5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(|\vec{u} + \vec{v}|)^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$

$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = 19.$$

Suy ra $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$.

Ví dụ 1.4.5

Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$ là

- A. $A = \sqrt{50}$. B. $A = 50$. C. $A = 2\sqrt{6}$. D. $A = \sqrt{37} + \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 37$$

$$\text{Tương tự } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 13$$

$$\text{Do đó } A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37} + \sqrt{13}.$$

➤ Dạng 1.5. Sự cùng phương

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

(2) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

☞ Ví dụ 1.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$. Tính $S = m + n$ khi các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương

A. $S = -6$. B. $S = -1$. C. $S = 3$. D. $S = 5$.

Lời giải

Chọn A

Các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3k \\ m = -2k \\ -n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -4 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow S = -6$.

☞ Ví dụ 1.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x , y thì A, B, M thẳng hàng.

A. $x = 4; y = 7$. B. $x = -4; y = -7$. C. $x = 4; y = -7$. D. $x = -4; y = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{AB} = (3; -4; 2)$, $\vec{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$.

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

☞ Ví dụ 1.5.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{4}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\vec{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\vec{AM} = (x + 2; -3; z - 1)$

A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \vec{AM} = k\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z - 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$.

$\vec{BM} = (-14; -6; -2)$, $\vec{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow AM = \sqrt{59}$, $BM = 2\sqrt{59} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

➤ Dạng 1.6. Sự đồng phẳng

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

- (1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$
 $= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$
- (2) Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0.$
- (3) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0.$

☞ Ví dụ 1.6.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$. Tìm vectơ đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các vectơ sau:

A. $\vec{c} = (-2; 1; 1)$. B. $\vec{d} = (1; -1; 1)$. C. $\vec{m} = (3; 1; 1)$. D. $\vec{n} = (2; 4; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $[\vec{a}; \vec{b}] = (5; -1; -3).$

Xét đáp án A, $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -14 \neq 0$ (Loại).

Xét đáp án B, $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{d} = 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 = 3 \neq 0$ (Loại).

Xét đáp án C, $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{m} = 5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) = 19 \neq 0$ (Loại).

Xét đáp án D, $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{n} = 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + (-3) \cdot 2 = 0$ (Thỏa mãn).

☞ Ví dụ 1.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(1; 1; -1)$. Trong các điểm sau, điểm nào nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

A. $M(2; 0; -1)$ B. $E(1; 2; 3)$ C. $N(-1; 2; 1)$ D. $F(-2; 3; 1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0; 1; -2)$.

Ta có $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (4; 0; 0).$

$\overrightarrow{AM} = (1; 0; -2)$; $\overrightarrow{AE} = (0; 2; 2)$; $\overrightarrow{AN} = (-2; 2; 0)$; $\overrightarrow{AF} = (-3; 3; 0).$

Xét $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = 4 \neq 0$, do đó bốn điểm không đồng phẳng.

Xét $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AE} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 0$, do đó bốn điểm đồng phẳng.

Xét $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AN} = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = -8 \neq 0$, do đó bốn điểm không đồng phẳng.

Xét $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AF} = 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = -12 \neq 0$, do đó bốn điểm không đồng phẳng.

Ví dụ 1.6.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;0;4)$, $B(2;1;0)$, $C(1;4;0)$ và $D(a;b;0)$. Điều kiện cần và đủ của a, b để hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng

- A. $3a+b=7$. B. $3a-5b=0$. C. $4a+3b=2$. D. $a-2b=1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = (a; b; -4) \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 1; -4) \\ \overrightarrow{AC} = (1; 4; -4) \end{cases} \longrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 4; 7).$$

Hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng

$$\Leftrightarrow \text{bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 3a+b=7.$$

Ví dụ 1.6.4

Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-2; 0; 3)$, $\vec{b} = (0; 4; -1)$ và $\vec{c} = (m-2; m^2; 5)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng.

- A. $\begin{cases} m=-2 \\ m=-4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m=-1 \\ m=-2 \end{cases}$. C. $m=2$. D. $m=5$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } [\vec{a}; \vec{b}] = (-12; -2; -8).$$

$$\text{Ta có } \vec{a}, \vec{b} \text{ và } \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-4 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.6.5

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$ và $D(0; m; p)$. Hệ thức giữa $B(a; b; c) \in (S)$ và p để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

- A. $2m+p=0$. B. $m+p=1$. C. $m+2p=3$. D. $2m-3p=0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (0; 2; -1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2), \quad \overrightarrow{AD} = (-1; m+2; p).$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2).$$

$$\text{Bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng khi } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m+2p=3.$$

➤ Dạng 1.7. Ứng dụng tích có hướng

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện: $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

$\Leftrightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng

(2) Diện tích ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.

$\Rightarrow$ Đường cao ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{\left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|}{\left| \vec{BC} \right|}$

(3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$.

(4) Thể tích tứ diện $ABCD$: $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$.

$\Rightarrow$ Đường cao chóp $ABCD$:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A, (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|}{\left| [\vec{BC}, \vec{BD}] \right|}$

► Bài toán tính diện tích tam giác:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...), B(...), C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Bước 2: Tìm tọa độ của vectơ $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.

Bước 3: Sử dụng $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right|$ để tính diện tích ΔABC .

Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:

Bước 4: Sử dụng $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AH \cdot OB \Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH .

► Bài toán tính thể tích tứ diện:

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...), B(...), C(...), D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

Bước 1: Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$.

Bước 2: Tính $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}$.

Bước 3: Sử dụng $V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:

Bước 4: Sử dụng $V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A, (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

☞ Ví dụ 1.7.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $\frac{\sqrt{29}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{78}}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; 2; -1) \\ \overrightarrow{OB} = (0; -2; 3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (4; -3; -2)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

☞ Ví dụ 1.7.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB .

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{29}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{29}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{377}}{13}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; 2; -1) \\ \overrightarrow{OB} = (0; -2; 3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (4; -3; -2).$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác ta có: } OB = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ và } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AH \cdot OB$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S_{\Delta OAB}}{OB} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{377}}{13}.$$

☞ Ví dụ 1.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 4

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; 2; 3); \overrightarrow{AC} = (-3; 3; 3); \overrightarrow{AD} = (-1; 3; 1).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -12; 9);$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-3) \cdot (-1) + (-12) \cdot 3 + 9 \cdot 1 = -24.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-24| = 4.$$

Ví dụ 1.7.4

Cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1), D(1;1;1)$ Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

- A. $DH=3$ B. $DH=2$ C. $DH=\frac{5}{3}$ D. $DH=\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3; 0; -4) \\ \overrightarrow{AC} = (4; 0; -3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -25; 0) \Rightarrow \left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\| = \sqrt{(0)^2 + (-25)^2 + 0^2} = 25.$$

$$\overrightarrow{AD} = (2; 3; -3) \Rightarrow \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 75 \Leftrightarrow DH = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left\| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right\|} = \frac{75}{25} = 3.$$

Ví dụ 1.7.5

Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0), C(0;4;0), D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

- A. $m=8$ B. $m=4$ C. $m=12$ D. $m=6$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DA} = (3; -2; m-3), \overrightarrow{DB} = (2; 0; -3), \overrightarrow{DC} = (0; 4; -3).$$

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] \cdot \overrightarrow{DA} \right| \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{6} |24 + 8(m-3)| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 6 \end{cases}.$$

Vì m dương nên $m=6$.

➤ Dạng 1.8. Liên quan góc

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

$$(1) \text{ Tích vô hướng hai vectơ: } \dots\dots\dots \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \text{ Góc giữa 2 vectơ: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}.$$

Chú ý: Khi $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) > 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn,

Ngược lại nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ thì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

(2) Vectơ $\vec{a}$ vuông góc vectơ $\vec{b}$: $\dots\dots\dots \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$

☞ Ví dụ 1.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Tính cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $-\frac{3}{13}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = -\frac{3}{13}.$$

☞ Ví dụ 1.8.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc BAC bằng

A. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$ B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$ C. $\frac{9}{\sqrt{35}}$ D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \text{ mà } \overrightarrow{AB} = (1; 5; -2), \overrightarrow{AC} = (5; 4; -1).$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{27}{\sqrt{30} \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

☞ Ví dụ 1.8.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Tất cả giá trị của m để hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau là

A. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$ D. $\frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = (2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2}) \\ \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = (2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}) \end{cases}$$

Khi đó: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + (2 - 3m\sqrt{2})(m + \sqrt{2}) + (-4 + 3m\sqrt{2})(-2m - \sqrt{2}) = 0$.

$$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 1.8.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có tọa độ các đỉnh $A(-4; 9; -9)$, $B(2; 12; -2)$ và $C(-m-2; 1-m; m+5)$. Tìm m để $\triangle ABC$ vuông tại B .

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = -4$

Lời giải

Chọn D

Ta có
$$\begin{cases} \vec{BA} = (-6; -3; -7) \\ \vec{BC} = (-m-4; -m-11; m+7) \end{cases}$$

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Ví dụ 1.8.5

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng 45° .

A. $m = 2$

B. $m = 2 - \sqrt{6}$

C. $m = 2 + \sqrt{6}$

D. $m = 2 \pm \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3+3m^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ (1-2m)^2 = 3+3m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m = 2 \pm \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

➤ Dạng 1.9. Tâm tứ cự

► Bài toán cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1; A_2; \dots; A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) . Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho $|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$|k_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{MA_n}| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \overrightarrow{MI}| = |k| |\overrightarrow{MI}|$$

Bước 3: Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

► Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

Bước 1: Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$.

Bước 2: Thấy rằng $MA_1^2 = |\overrightarrow{MA_1}|^2 = (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 = (\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2 \\ &= k_1 \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_1}) + (\overrightarrow{IA_1})^2 \right] + \dots + k_n \left[(\overrightarrow{MI})^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA_n}) + (\overrightarrow{IA_n})^2 \right] \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) + \dots + 2\overrightarrow{MI} \left(\underbrace{k_1 \cdot \overrightarrow{IA_1} + \dots + k_n \cdot \overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}} \right) \\ &= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2 + (k_1 \cdot IA_1^2 + \dots + k_n \cdot IA_n^2) \end{aligned}$$

Bước 3: Do $k > 0$, để $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

► **Chú ý:** Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ và các hệ số $k_1; k_2; \dots; k_n$ sao cho $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < 0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P) , sao cho tổng $S = k_1 \cdot MA_1^2 + k_2 \cdot MA_2^2 + \dots + k_n \cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

☞ Ví dụ 1.9.1

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7), B(0; 4; 1), C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$.

Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ điểm M là

- A. $M(0; 1; -2)$ B. $M(0; 1; 4)$ C. $M(0; 1; -4)$ D. $M(2; 1; 0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0; 1; 4)$.

☞ Ví dụ 1.9.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(0; -2; 0)$ B. $M(0; \frac{3}{2}; 0)$ C. $M(0; -3; 0)$ D. $M(0; -4; 0)$

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Do $M \in Oy$, nên $M(0; y; 0)$.

Tính $MA^2 + MB^2 = 2y^2 - 6y + 20 = f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y = \frac{3}{2}$. Vậy $M(0; \frac{3}{2}; 0)$.

Cách 2.

Ta có $A(1; 1; -3)$. Gọi I là trung điểm của AB . Suy ra $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 9. \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ khi MI có độ dài ngắn nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Vậy $M(0; \frac{3}{2}; 0)$.

➤ Dạng 1.10. Tọa độ hóa

► Công thức liên quan thường dùng:

Xét hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có:

(1) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$
 $= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$

(2) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương vectơ $\vec{b}$: $[\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$ hoặc $\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$.

(3) Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng: $[\vec{a}; \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

(4) Diện tích ΔABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

(5) Thể tích tứ diện $ABCD$: $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

(6) Thể tích khối hộp $ABCD$: $V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|$.

(7) Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|$.

(8) Góc:

• Giữa hai mặt phẳng: $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$

• Giữa hai đường thẳng: $\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{a}') = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}'|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|}$

• Giữa đường thẳng và mặt phẳng: $\sin \varphi = \left| \sin(\vec{a}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$

Mẹo nhớ công thức về góc trong hình học Oxyz :

- **Cùng** loại dùng Cos (Góc giữa đường với đường , mặt phẳng với mặt phẳng).
- **Khác** loại dùng Sin (Góc giữa đường và mặt).

(9) Khoảng cách

• Từ điểm đến mặt phẳng : $d(M_o, (\alpha)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

• Từ điểm đến đường thẳng: $d(M, \Delta) = \frac{|[\vec{M_oM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$

• Hai đường thẳng chéo nhau: $d(d, d') = \frac{|[\vec{a}, \vec{a}'] \cdot \vec{MM}'|}{|[\vec{a}, \vec{a}']|} = \frac{V_{hop}}{V_{day}}$

► Cách “gắn” trục:

• **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ Oxyz

- Xác định ba đường đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều ...),
- Dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

• **Bước 2:** Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

- Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. *Tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu bài toán.*

• **Bước 3:** Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

- Lập các phương trình đường, mặt liên quan.
- Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

• **Bước 4:** Giải quyết bài toán.

- Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

⌘ Cách chọn hệ trục tọa độ một số hình không gian.

A. Hộp.

□ Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

• Với hình lập phương.

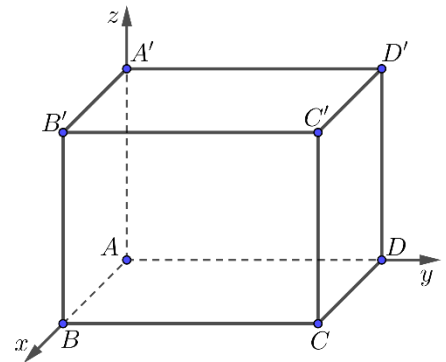
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), \\ A'(0;0;a), B'(a;0;a), C'(a;a;a), D'(0;a;a)$$

• Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0), \\ A'(0;0;c), B'(a;0;c), C'(a;b;c), D'(0;b;c)$$



► **Chú ý:** Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

□ Hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

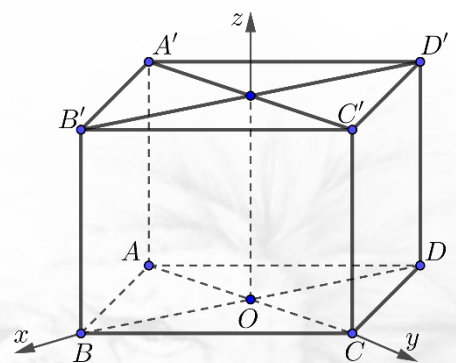
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$.

» Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

» Đặt $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì

$$A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{b}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), D\left(-\frac{b}{2}; 0; 0\right), \\ A'\left(0; -\frac{a}{2}; c\right), B'\left(\frac{b}{2}; 0; c\right), C'\left(0; \frac{a}{2}; c\right), D'\left(-\frac{b}{2}; 0; c\right).$$



► **Chú ý:** Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC , $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh AC, AC' .

B. Chóp.

□ Hình chóp đều

(1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a, SH = h$.

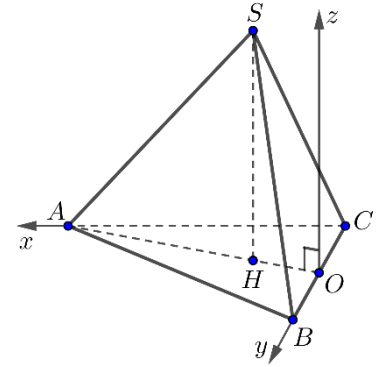
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với O là trung điểm BC

» $A \in Ox$.

» $B \in Oy$

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; h\right)$



(2) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AB = a, SH = h$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

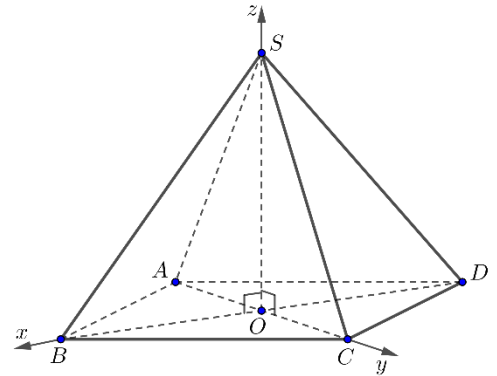
» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

» $B \in Ox$.

» $C \in Oy$.

» $S \in Oz$.

Khi đó: $A\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,
 $D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $S(0; 0; h)$.



► **Chú ý:** Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.

Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục Oy đi qua H và song song với BC .

□ Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = h$

Nếu đáy là hình chữ nhật.

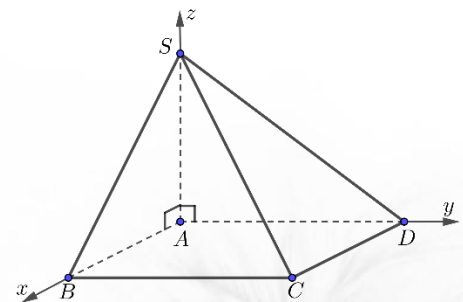
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $A \equiv O$

» $B \in Ox$.

» $D \in Oy$.

» $S \in Oz$.



Nếu đáy là hình thoi.

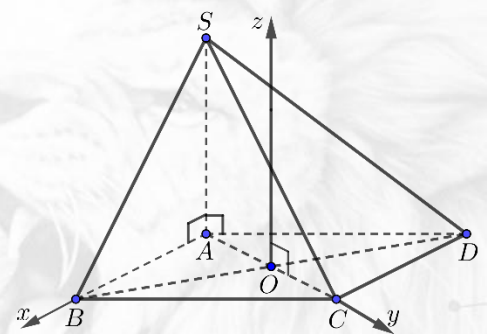
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

» Gốc tọa độ trùng với $O = AC \cap BD$

» $B \in Ox$.

» $C \in Oy$.

» $Oz \parallel SA$.



► **Chú ý:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, nếu đáy ABC là:

- Tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.
- Tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC .

□ Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABCD)$

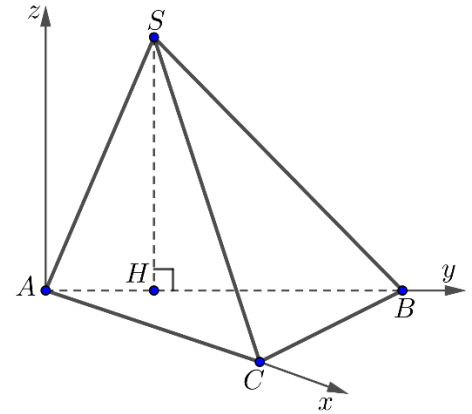
Đường cao $SH = h$ của $\triangle SAB$ là đường cao của hình chóp.

Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = a$, $AC = b$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

- » Gốc tọa độ trùng với $A \equiv O$
- » $B \in Oy$.
- » $C \in Oz$.
- » $Oz \parallel SH$.

Khi đó $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(b;0;0)$, $AH = c \Rightarrow H(0;c;0)$, $S(0;c;h)$



► **Chú ý:** Cho hình chóp có $SA \perp (ABC)$, nếu đáy ABC là:

- Tam giác vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.
- $\triangle ASB$ cân tại S , $\triangle ABC$ cân tại C thì ta chọn $H \equiv O$, $C \in Ox$, $B \in Oy$, $S \in Oz$

☞ Ví dụ 1.10.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

- A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{2\sqrt{39}}{39}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Khi đó $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$;

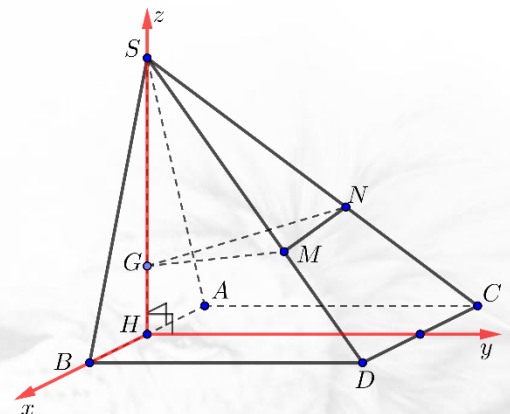
$C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$

$\Rightarrow G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta có $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$,

(GMN) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{GM}, \vec{GN}] = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{24}; \frac{a}{4}\right)$.

Gọi $\varphi = (GMN) \cap (ABCD)$, ta có $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.



Ví dụ 1.10.2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB} = 2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60° . Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 90°

B. 30°

C. 60°

D. 45°

Lời giải

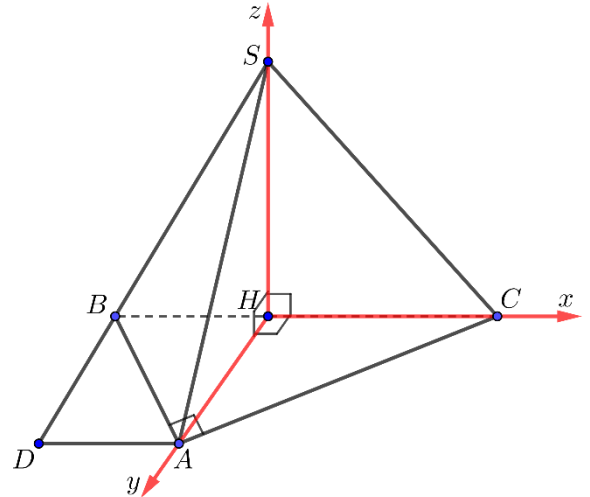
Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AH^2 &= BH^2 + BA^2 - 2BH \cdot BA \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{a^2}{4} + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \tan 60^\circ = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH\sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho

$$\begin{aligned} H(0;0;0), C\left(\frac{3}{2};0;0\right), A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{3}{2}\right), \\ B\left(-\frac{1}{2};0;0\right). \end{aligned}$$



$$\text{Khi đó } \overrightarrow{SB} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \left(-\frac{3}{4}; 0; -\frac{9}{4}\right) \Rightarrow D\left(-\frac{3}{4}; 0; -\frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DA} = \left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{u} = (\sqrt{3}; 2; \sqrt{3}) \text{ là một véc-tơ chỉ phương của } AD.$$

$$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{v} = (1; 0; -1) \text{ là một véc-tơ chỉ phương của } SC.$$

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow AD \perp SC$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90° .

Ví dụ 1.10.3

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC$, $\angle HBC = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cosin của góc giữa đường thẳng BC và (SHC)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

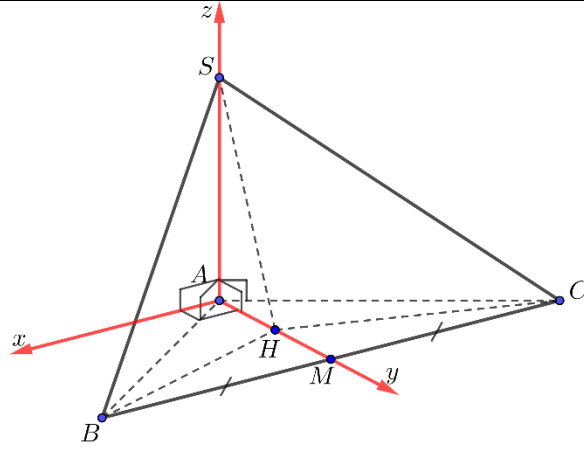
Từ M là trung điểm BC và H là trung điểm AM

$HB = HC$ suy ra $AM \perp BC$, hay tam giác ABC cân đỉnh A .

$$\text{Đặt } BC = a \Rightarrow BM = \frac{a}{2}. \text{ Do } \angle HBC = 30^\circ \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Đặt $SA = b$.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right); H\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right), S(0;0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{HC} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right); \overrightarrow{SH} = \left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}; -b\right)$.

Nên $[\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{SH}] = \left(-\frac{ab\sqrt{3}}{6}; -\frac{ab}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right)$.

Suy ra (SHC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2b\sqrt{3}; 6b; a\sqrt{3})$.

(HBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Góc $((SHC); (HBC)) = 60^\circ$ nên

$$\cos((SHC), (HBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{|a\sqrt{3}|}{\sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12b^2 + 36b^2 + 3a^2} = 2|a\sqrt{3}| \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Khi đó $\vec{n}_1 = \left(\frac{3a}{2}; \frac{3a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$, BC có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$

$$\text{Gọi } \varphi = BC \cap (SHC), \text{ ta có: } \sin \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\left|\frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{27a^2}{4} + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Do } \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Ví dụ 1.10.4

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a}{4}$

C. $\frac{a}{2}$

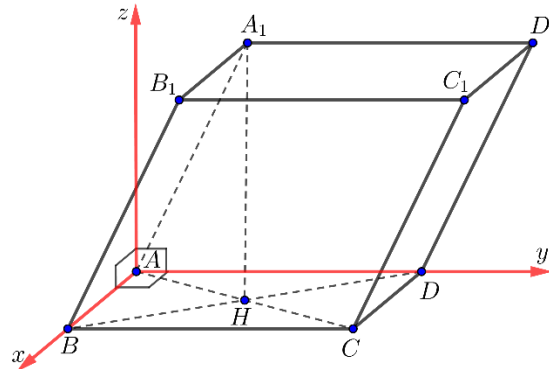
D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi H là tâm đáy $ABCD$ và đặt $A_1H = x$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $C(a;a\sqrt{3};0)$, $H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AA_1} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$, $\overrightarrow{AD} = (0;a\sqrt{3};0) \Rightarrow [\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}] = \left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \vec{n} = (2x;0;a)$ là véctơ pháp tuyến của (A_1AD) .

Lại có $\vec{k} = (0;0;1)$ là véctơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

Nên theo giả thiết, ta có $\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} \Rightarrow 2a = \sqrt{4x^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{A_1B} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right)$, $\overrightarrow{A_1D} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right) \Rightarrow [\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1D}] = (ax\sqrt{3}, ax, 0)$

Phương trình $(A_1BD): x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0$,

Vì $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$ nên $B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $d(B_1, (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 1.10.5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = AD = 2a$, $BC = a$, góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AB . Biết (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{5}$

B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$

D. $\frac{8a^3\sqrt{15}}{5}$

Lời giải

Chọn C

Vì $\begin{cases} (SDI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD) \end{cases}$ nên $SI \perp (ABCD)$.

Đặt $SI = x$, $x > 0$, tọa độ các điểm là $I(0;0;0)$,

$A(-a;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(-a;2a;0)$, $S(0;0;x)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC} = (a;a;-x)$, $\overrightarrow{CD} = (-2a;a;0)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}] = (ax; 2ax; 3a^2)$$

Nên $\vec{n}_1 = (x; 2x; 3a)$ là véc-tơ pháp tuyến của (SCD) .

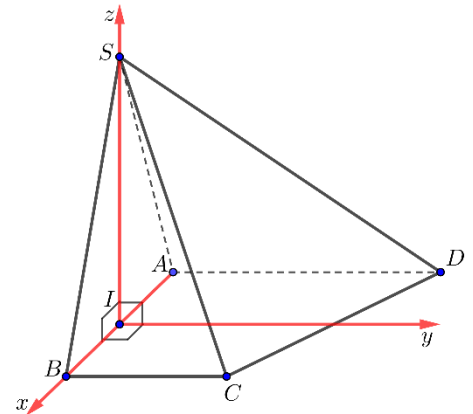
Mà $\vec{k} = (0;0;1)$ là véc-tơ pháp tuyến của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài, ta có

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Mặt khác $S_{ABCD} = \frac{AB(BC+CD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$$

-----Hết-----



Hình học

Chủ đề 02

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

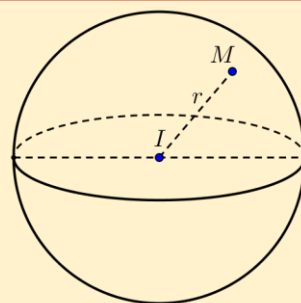
A. LÝ THUYẾT CHUNG.



Định nghĩa:

Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính r có phương trình là.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



1. Phương trình

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

2. Vị trí tương đối

Trong không gian Oxyz, ta có 3 đối tượng để xét vị trí tương đối với mặt cầu:

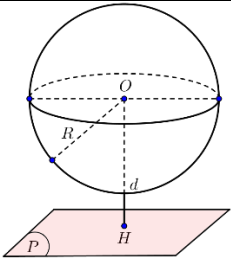
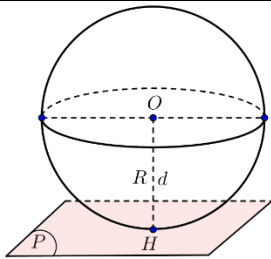
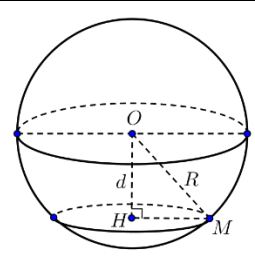
(1) Điểm $M(a;b;c)$.

Trong không gian Oxyz, cho điểm M và mặt cầu $S(I;R)$. Khi đó:

		Điểm		
		Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM \cap (S) = H$	Nằm trên $\Leftrightarrow IM \cap (S) = M \equiv H$	Nằm trong $\Leftrightarrow IM \cap (S) = \emptyset$
		$IM > R$	$IM = R$	$IM < R$
Mặt cầu				

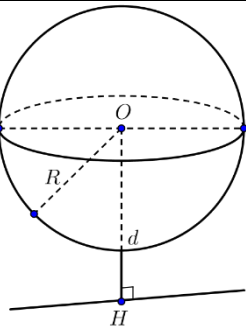
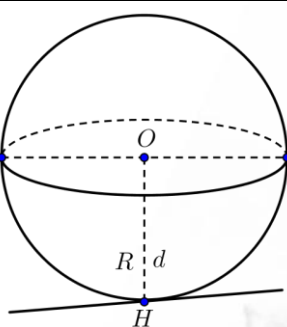
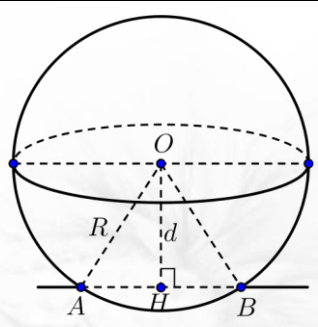
(2) Mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

Mặt phẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \{M\}$	Cắt theo giao tuyến là đường tròn $\Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = C(I'; r)$
	$d(I; (\alpha)) > R$	$d(I; (\alpha)) = R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M .	$d(I; (\alpha)) < R$ $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r . $R = \sqrt{r^2 + d^2(I; (\alpha))}$.
			

(3) Đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

Đường thẳng			
Mặt cầu	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$	Cắt tại hai điểm A; B $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$
	$d(I; \Delta) > R$	$d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$.
			

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ **Dạng 2.1. Xác định tâm - bán kính - nhận biết phương trình mặt cầu**

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x, y, z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2, y^2, z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2, y^2, z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$
Xác Định	Tâm	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x; y; z \div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

➤ **Ví dụ 2.1.1**

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I của mặt cầu (S) ?

- A. $(1; -2; 3)$. B. $(2; 0; 1)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(-2; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 2 + 1 + 4 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\text{Tọa độ tâm của mặt cầu } (S) \text{ là } I\left(\frac{-2}{-2}; \frac{4}{-2}; \frac{-6}{-2}\right) = (1; -2; 3).$$

➤ **Ví dụ 2.1.2**

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tọa độ tâm là

- A. $I(1; -2; 0)$. B. $I(-1; 2; 0)$. C. $I(1; 2; 0)$. D. $I(-1; -2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9 \text{ có tọa độ tâm là: } I(1; -2; 0).$$

➤ **Ví dụ 2.1.3**

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có phương trình nào sau đây có tọa độ tâm là $I(-1; 1; 0)$?

- A. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương án A: } 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 + 2x - 1 - 2xy$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 0$ không là phương trình mặt cầu loại A.

Phương án B: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(1; -1; 0)$ loại B.

Phương án C: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 1; 0)$ nhận C.

Ví dụ 2.1.4

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$.

D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Lời giải

Chọn A

+ Phương án A:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ có tâm $I(1; 0; 0)$ và $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ là phương trình mặt cầu.

+ Phương án B:

$x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$ không là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 khác hệ số trước x^2 và y^2 .

+ Phương án C: $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2x + 1 = 0 \text{ không là phương trình mặt cầu.}$$

+ Phương án D: $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 2xy - z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \text{ không là phương trình mặt cầu vì } x^2 + y^2 + z^2 + 1 > 0 \forall x; y; z.$$

Ví dụ 2.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 6(m-1)y - 2z - m + 3 = 0$. Tìm giá trị của m để được (S) là phương trình mặt cầu

A. $\begin{cases} m < \frac{7}{10} \\ m > 1 \end{cases}$

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 6(m-1)y - 2z - m + 3 = 0$ là phương trình mặt cầu phải có:

$$m^2 + 9(m-1)^2 + 1^2 + m - 3 > 0 \Leftrightarrow 10m^2 - 17m + 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{7}{10} \\ m > 1 \end{cases}.$$

Dạng 2.2. Phương trình mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R .	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R . Phương trình (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.	» Bán kính mặt cầu $R = IM = \overrightarrow{IM} = \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2}$. » Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = IM$.

Ví dụ 2.2.1

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là:

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$

Ví dụ 2.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4. Phương trình của mặt cầu là

- A. $x^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 2$. B. $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 16$.
C. $x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$. D. $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Đường kính của mặt cầu bằng 4 nên bán kính $R=2$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(0;-4;1)$ là $x^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Ví dụ 2.2.3

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính của mặt cầu là $R = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ qua $A(1;1;2)$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

Dạng 2.3. Phương trình mặt cầu nhận hai điểm làm đường kính

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$ làm đường kính	» Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right)$. » Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = IM$.

Ví dụ 2.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 6 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; -1).$$

Phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$.

Ví dụ 2.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO} = (-1; -2; 3)$ và $\overrightarrow{BO} = (-7; -4; -5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 104$. B. $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$.
 C. $(x+4)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 26$. D. $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 104$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AO}(-1; -2; 3) \Rightarrow A(1; 2; -3)$; $\overrightarrow{BO}(-7; -4; -5) \Rightarrow B(7; 4; -5)$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB thì tâm là trung điểm của $AB \Rightarrow I(4; 3; 1)$

$$\text{Bán kính } R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(7-1)^2 + (4-2)^2 + (-5+3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2}$$

Phương trình mặt cầu $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$

Vậy phương trình mặt cầu (S) $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 26$

Dạng 2.4. Phương trình mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A; B; C; D$ không đồng phẳng	» Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. » Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

Ví dụ 2.4.1

Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2), N(4; 0; 2), P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là

A. $(1; 2; 1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(-1; -1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

Vì $M, N, P, Q \in (S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 0^2 + 2^2 + 8a + 4c + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 0^2 + 8a + 4b + d = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 2^2 + 8a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 8 \end{cases} \Rightarrow I(3; 1; 1) \text{ là tâm mặt cầu } (S).$$

Ví dụ 2.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$.
Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $(1; 2; 1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(-1; -1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Vì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên tọa độ các điểm $A, B, C, D \in (S)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 4 + 4c + d = 0 \\ 12 + 4a + 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

➤ Dạng 2.5. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc (P) và qua ba điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in (P)$ và đi qua $A; B; C$. Với $(P): \alpha.x + \beta.y + \gamma.z + \delta = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in (P) \Rightarrow \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \quad (1)$. » Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A; B; C$ $\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \quad (2) \\ IA^2 = IC^2 \quad (3) \end{cases}$ » Từ $(1); (2)$ và $(3) \Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases} \alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \text{tọa độ } I.$ » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

➤ Ví dụ 2.5.1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2; 3; 3), B(-1; 1; 2), C(4; 2; 2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz) .

- A. $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = \sqrt{209}$. B. $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = 209$.
- C. $x^2 + (y+9)^2 + (z+10)^2 = 209$. D. $x^2 + (y+9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0; b; c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2; 3; 3), B(-1; 1; 2), C(4; 2; 2)$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
 IA = IB = IC = R &\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2 = R^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (3-b)^2 + (3-c)^2 = 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 \\ 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 = 16 + (2-b)^2 + (2-c)^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 40 + 9 - 6c + c^2 = 65 + 4 - 4c + c^2 \\ b = 9 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 20 \\ b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -10 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow I(0; 9; -10), R = IA = \sqrt{4 + 36 + 169} = \sqrt{209}.
 \end{aligned}$$

Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

Dạng 2.6. Phương trình mặt cầu tâm I thuộc d và qua hai điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I \in d$ và đi qua $A; B$. Với $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc d là các trục $Ox; Oy; Oz$. Nhận xét: Trong trường hợp $I \in$ một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn	» Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu » Ta có $I \in d \Rightarrow I(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$. » Viết $\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IB}$ » Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} \Rightarrow t = ?$. » Từ $t = ? \Rightarrow$ tọa độ I. » Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = IA$.

Ví dụ 2.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$, và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) ?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 29$.

B. $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

C. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 29$.

D. $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Lời giải

Chọn B

Vì mặt cầu có tâm I thuộc trục Ox nên tâm có dạng $I(x; 0; 0)$.

Vì mặt cầu đi qua $A(1; 2; 3), B(2; 0; -2)$, nên $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + 4 + 9 = (2-x)^2 + 4 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}.$$

Do đó phương trình mặt cầu là $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Ví dụ 2.5.2

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$

và có tâm I thuộc $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$?

A. $R = 7$.

B. $R = \sqrt{3}$.

C. $R = 2\sqrt{5}$.

D. $R = 8$.

Lời giải

Chọn A

Vì mặt cầu có tâm I thuộc Δ nên $I(2t; 1+t; -t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (2t; 1+t; -t) \\ \overrightarrow{IB} = (1-2t; t; -2+t) \end{cases}$.

Vì mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$, nên $IA = IB$

$$\Leftrightarrow (2t)^2 + (1+t)^2 + (-t)^2 = (1-2t)^2 + (t)^2 + (-2+t)^2$$

$$\Leftrightarrow 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = 7.$$

➤ Dạng 2.7. Phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng - đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{Tiếp xúc } (\alpha) \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxy) \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oxz) \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & \text{Tiếp xúc } (Oyz) \end{cases}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. ⌘ Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Bán kính mặt cầu $R = \begin{cases} d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \overrightarrow{MI} }{ \vec{u} } & \text{Tiếp xúc } \Delta \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Ox \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oy \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} & \text{Tiếp xúc } Oz \end{cases}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$.

☞ Ví dụ 2.7.1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với (Oxy) .

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$ D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Do mặt cầu (S) tiếp xúc $(Oxy) \Rightarrow R = d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} = \sqrt{(1)^2} = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$.

☞ Ví dụ 2.7.2

Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

- A. $I\left(-\frac{2}{5}; 1; 1\right)$ B. $I\left(\frac{5}{2}; 3; -2\right)$ C. $I(3;1;1)$ D. $I(2;4;2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S) .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) tại $M(0;3;-2)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c)$ trùng với M .

Do đó $b=3, c=-2$ và $I(a;3;-2)$.

$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 = a^2 \Leftrightarrow -2a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; 3; -2\right).$$

Ví dụ 2.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC .

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{5}{2}$ **B.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{25}{4}$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{2}{5}$ **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{4}{25}$

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (1; 5; 8), \overrightarrow{BC} = (1; 2; 3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}] = (-1; 5; -3)$$

$$\text{Mặt cầu có tâm là } A \text{ và tiếp xúc với } BC \Rightarrow R = d[A; (BC)] = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: } (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 2.7.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9), C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$ **B.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$ **D.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 25$

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S) .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $C(1;4;0)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy) là $H(a;b;0)$ trùng với C .

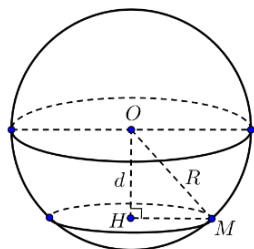
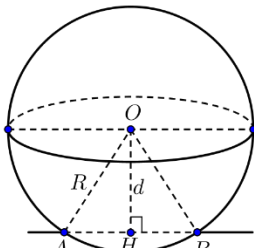
Do đó $a=1, b=4$ và $I(1;4;c)$.

$$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 3^2 + (c-9)^2 = c^2 \Leftrightarrow -18c + 90 = 0 \Leftrightarrow c = 5.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: } (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25.$$

Dạng 2.8. Phương trình mặt cầu cắt mặt phẳng - đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r. Với $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc (P) là các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Tính $d(I;(\alpha)) = \frac{ Aa + Bb + Cc + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ » Bán kính: $R^2 = d^2(I;(\alpha)) + r^2 = OH^2 + HM^2$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. 
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và H là trung điểm AB. Với $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ hoặc Δ là các trục $Ox; Oy; Oz$. Nhận xét: Trong trường hợp I tiếp xúc một trong các trục $Ox; Oy; Oz$ bài toán sẽ đơn giản hơn.	» Tính $d(I;\Delta) = \frac{ \vec{u}; \vec{MI} }{ \vec{u} }$ » Bán kính: $R^2 = d^2(I;(\alpha)) + AH^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$ » Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$. 

Ví dụ 2.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng:

- A. $\sqrt{21}$ B. 3 C. 6 D. 8

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm: $I(2; -3; 4)$, $R = 5$.

Gọi H là tâm đường tròn cắt nên H là hình chiếu của I . Vậy $H(2; -3; 0)$.

Bán kính đường tròn: $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Ví dụ 2.8.2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 4; 1)$ và $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

- A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 4$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 3$
 C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(I, (P)) = \frac{|2+4+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}.$

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có: $R^2 = d^2(I, (P)) + r^2 = 3 + 1 = 4.$

$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4.$

Ví dụ 2.8.3

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; -4; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho $\triangle ABC$ vuông.

A. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$

B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 82$

C. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 58$

D. $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 90$

Lời giải

Chọn A

Do $AB = AC$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A .

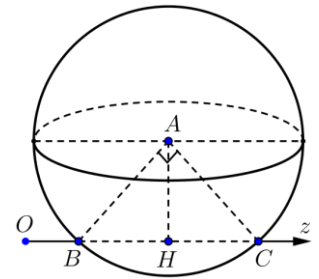
Gọi H trung điểm $BC \rightarrow AH = BH = HC$.

Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz .

Xét $\triangle ABH$: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$

$\Rightarrow R = AH\sqrt{2} = d(A, Oz) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{10}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$



Ví dụ 2.8.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với

$AB = 10$. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 31$

B. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 31$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$

D. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$

Lời giải

Chọn C

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH = d(I, d)$ và $IH \perp d$.

$H(1+t; -t; t) \Rightarrow \vec{IH} = (t; -t+1; t-2).$

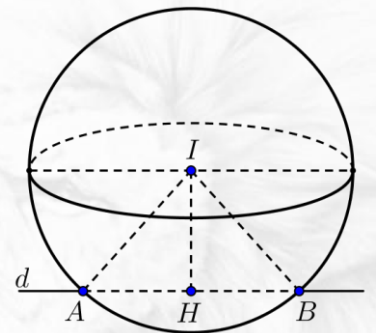
Vì: $IH \perp d \Rightarrow \vec{IH} \cdot \vec{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

$\Rightarrow H(2; -1; 1) \Rightarrow d(I, d) = IH = \sqrt{2}.$

Xét $\triangle IAH$: $IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{27}.$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27.$

-----Hết-----



Hình học

Chủ đề 03

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Phương trình

- Phương trình mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẪNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O .	$(\alpha): Ax + By + Cz = 0$	$D = 0$
(α) song song/chứa Ox .	$(\alpha): By + Cz + D = 0$	$A = 0$
(α) song song/chứa Oy .	$(\alpha): Ax + Cz + D = 0$	$B = 0$
(α) song song/chứa Oz .	$(\alpha): Ax + By + D = 0$	$C = 0$
(α) song song/trùng (Oxy) .	$(\alpha): Cz + D = 0$	$A = B = 0$
(α) song song/trùng (Oxz) .	$(\alpha): By + D = 0$	$A = C = 0$
(α) song song/trùng (Oyz) .	$(\alpha): Ax + D = 0$	$B = C = 0$

» **Nhận xét:** Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa mặt phẳng đó.

2. Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Cho mặt $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$; $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$. Khi đó có các trường hợp sau:

Trường hợp	$(\alpha) \cap (\beta) = d$	$(\alpha) // (\beta)$	$(\alpha) \equiv (\beta)$	$(\alpha) \perp (\beta)$
Hình vẽ				
Xảy ra khi & chỉ khi	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Xác định vectơ pháp tuyến

- » Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- » Mặt phẳng trong không gian đều có phương trình dạng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ trong đó $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
- » Nhận xét:
 - Khi lấy hệ số, lưu ý lấy đúng thứ tự hệ số trước $x-y-z$.
 - Thêm/bớt, phải thêm/bớt cả hoành – tung – cao độ

➤ Ví dụ 3.1.1

Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

- A. $\vec{i} = (1; 0; 0)$. B. $\vec{m} = (1; 1; 1)$. C. $\vec{j} = (0; 1; 0)$. D. $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với trục Oz nên nhận vectơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến

➤ Ví dụ 3.1.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$. B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$ là $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

➤ Ví dụ 3.1.3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y + x + 3z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$. B. $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$. D. $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

Lời giải

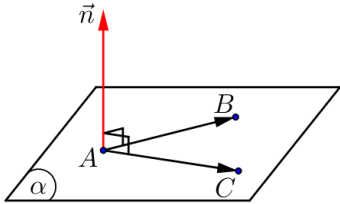
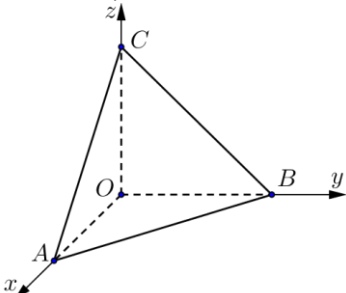
Từ $(P): 2y + x + 3z - 1 = 0$ nếu lấy nhanh hệ số và $\Rightarrow \vec{n} = (2; 1; 3)$ là sai do chưa lấy đúng hệ số trước $x - y - z$.

Mà ta phải sắp xếp đúng như sau: $(P): 2y + x + 3z - 1 = 0 \Leftrightarrow (P): x + 2y + 3z - 1 = 0$

Nên $\Rightarrow \vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

➤ Dạng 3.2. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm đồng phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Đi qua $A; B; C$ không thẳng hàng. 	» Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. » Vectơ pháp tuyến của (α): $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$.
(2) Đi qua $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$. (Phương trình đoạn chắn) 	» Phương trình (P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Lưu ý: - Với phương trình đoạn chắn thì vế phải = 1 - Bài toán có thể "gài" như sau: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$

☞ Ví dụ 3.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;3), B(2;-1;1), C(1;-1;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $x - 5y - z + 4 = 0$.

B. $x - 5y + z - 2 = 0$.

C. $x + 5y + z - 2 = 0$.

D. $x + 5y - z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -2); \overrightarrow{AC} = (2; -1; -3)$

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}] = (-1; -5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1) - 5y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow -x - 5y + z - 4 = 0$

☞ Ví dụ 3.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

Lưu ý phương án D "gài"

Ví dụ 3.2.3

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$; $B(0;4;0)$ và $C(0;0;-2)$ là:

A. $4x - 3y + 6z + 12 = 0$.

B. $4x + 3y + 6z + 12 = 0$.

C. $4x + 3y - 6z + 12 = 0$.

D. $4x - 3y + 6z - 12 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6z + 12 = 0$.

Ví dụ 3.2.4

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$

A. $(P): 3x + y + 2z - 6 = 0$.

B. $(P): 2x + 3y - z - 4 = 0$.

C. $(P): 2x + y + z - 4 = 0$.

D. $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử (P) đi qua 3 điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

Suy ra $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Mà (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ nên ta có hệ
$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases}$$

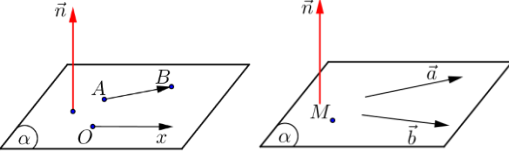
Theo giả thuyết ta có $OM = 2ON \Leftrightarrow |a| = 2|b| \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Trường hợp 1. $b = 1 \Rightarrow c = -2$ suy ra $(P): x + 2y - z - 2 = 0$

Trường hợp 2. $b = -1 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$ suy ra $(P): x - 2y + 3z - 2 = 0$

Dạng 3.3. Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm và chứa vectơ

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $A; B$ và chứa $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc chứa/song song trục tọa độ. 	» Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có sẵn vectơ $\vec{a}$. » Vectơ pháp tuyến của (α): $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{a}]$.

Ví dụ 3.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và chứa trục Oy là:

- A. $x-z+4=0$. B. $x+z=0$. C. $x-1=0$. D. $x-y-z-4=0$.

Lời giải

Chọn B

Lấy $O \in Oy$. Ta có $\overrightarrow{OA} = (1;0;-1); \overrightarrow{u_{Oy}} = (0;1;0) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{u_{Oy}}] = (1;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+z=0$.

Ví dụ 3.3.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(3;0;0), B(0;0;4)$ và song song trục Oy có phương trình

- A. $4x+3z-12=0$. B. $3x+4z-12=0$.
C. $4x+3z+12=0$. D. $4x+3z=0$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{u_{Oy}} = (0;1;0); \overrightarrow{AB} = (-3;0;4) \Rightarrow \vec{n}_p = [\overrightarrow{u_{Oy}}; \overrightarrow{AB}] = (4;0;3)$

Do đó $(P): 4(x-3)+3z=0 \Leftrightarrow 4x+3z-12=0$

Ví dụ 3.3.3

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1;6;3), B(2;0;6), C(1;2;-1), D(2;4;0)$.

Phương trình mặt phẳng qua AB và song song với CD là:

- A. $x-z+4=0$. B. $x+z+4=0$.
C. $x+y-z+4=0$. D. $x-y-z-4=0$.

Lời giải

Chọn A

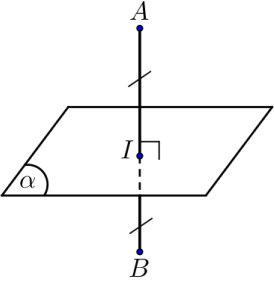
Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-6;3); \overrightarrow{CD} = (1;2;1)$

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = -\frac{1}{12}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}] = (1;0;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $(x+1)+0(y-6)-(z-3)=0 \Leftrightarrow x-z+4=0$

➤ Dạng 3.4. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Là mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB 	» Véc tơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. » Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB. » Mặt phẳng (α) qua điểm I.

☞ Ví dụ 3.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x - y - z = 0$.

B. $3x + y + z - 6 = 0$.

C. $x + y + 2z - 6 = 0$.

D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2)$ và đi qua trung điểm $I(1; 1; 2)$ của đoạn thẳng AB .

Do đó, ta có: $-6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0$.

☞ Ví dụ 3.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 2; 1)$ và $B(5; -4; 1)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) , và N là điểm đối xứng với B qua (Oyz) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN .

A. $x + y + z - 3 = 0$

B. $2x - y + z - 2 = 0$

C. $2x - y + z + 2 = 0$

D. $4x + 4y - 2z + 21 = 0$.

Lời giải

Chọn D

M là hình chiếu của $A(-3; 2; 1)$ trên trục (Oxy) nên ta có $M(-3; 2; 0)$.

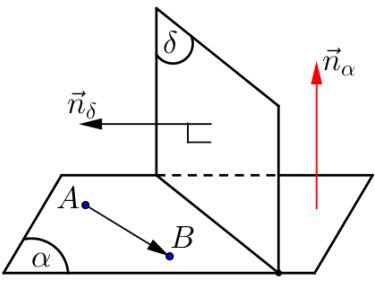
N là đối xứng với $B(5; -4; 1)$ qua (Oyz) nên ta có $N(-5; -4; 1)$.

Gọi I là trung điểm MN . Ta có $I\left(-4; -1; \frac{1}{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $2(x+4) + 2(y+1) - 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y - 2z + 21 = 0$.

Dạng 3.5. Phương trình mặt phẳng qua 2 điểm, vuông góc mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua điểm $A; B$ và vuông góc $(\delta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm A.

Ví dụ 3.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

A. $2y + 3z - 11 = 0$

B. $2x - 3y - 11 = 0$

C. $x - 3y + 2z - 5 = 0$

D. $3y + 2z - 11 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$, vectơ pháp tuyến của mp (P) là $\vec{n}_p = (1; -3; 2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_p] = (0; 8; 12)$ là vectơ pháp tuyến của mp (Q) .

Phương trình (Q) đi qua $A(2;4;1)$ là: $0(x-2) + 8(y-4) + 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0$.

Ví dụ 3.5.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0), B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$ có phương trình là

A. $4x - 3y + 2z + 3 = 0$

B. $4x - 3y - 2z + 3 = 0$

C. $2x + y - 3z - 1 = 0$

D. $4x + y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng $(Q): \vec{n}_Q = (1; 2; -1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng $(P): \vec{n}_p = \vec{n}_Q \wedge \overrightarrow{AB} = (4; -3; -2)$.

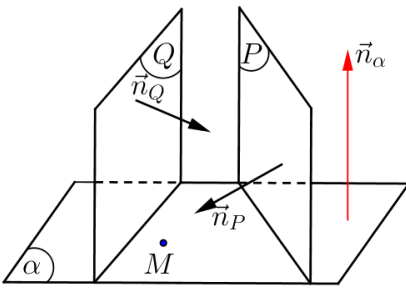
Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x - 3y - 2z + C = 0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3 + C = 0 \Leftrightarrow C = 3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

Dạng 3.6. Phương trình mặt phẳng qua điểm, vuông góc 2 mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P): Ax + By + Cz + D = 0,$ $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$ 	» Tìm cặp vectơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Hoặc bài toán sẽ gặp: “Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax + By + Cz + D = 0; (Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$”

Ví dụ 3.6.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0,$
 $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời
 vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x - y - 2z = 0.$

B. $2x - y + 2z = 0.$

C. $2x + y - 2z = 0.$

D. $2x + y - 2z + 1 = 0.$

Lời giải

Chọn C

Vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha = (3; -2; 2), \vec{n}_\beta = (5; -4; 3)$.

Khi đó vectơ pháp tuyến mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O , VTPT $\vec{n} = (2; 1; -2): 2x + y - 2z = 0$.

Ví dụ 3.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$.
 Phương trình (P) qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc với (α) và (β) là:

A. $2x + y - 2z + 1 = 0$

B. $2x + y - 2z = 0$

C. $x - y - 2z = 0$

D. $2x - y + 2z = 0.$

Lời giải

Chọn B

$(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$.

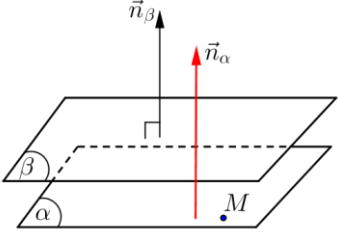
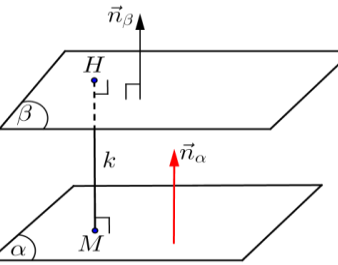
$(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$ có $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$.

Ta có $\vec{n} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (2; 1; -2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x - 0) + 1(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0$.

Dạng 3.7. Phương trình mặt phẳng song song mặt phẳng khác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	⌘ Cách 1: » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$. » Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ Cách 2: » Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$) » Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	» Vì $(\alpha) \parallel (P) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D \neq D'$). » Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha); (P)) = k \xLeftrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (P)) = k$ $\Leftrightarrow \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$ » Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Ví dụ 3.7.1

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1; 1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $2x - 2y + z + 2 = 0$

B. $2x - 2y + z = 0$

C. $2x - 2y + z - 6 = 0$

D. $2x - 2y + z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Có (P) song song $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ nên $(P): 2x - 2y + z + m = 0$, với $m \neq -1$.

Do (P) đi qua điểm $A(-1; 1; 2)$ nên $-2 - 2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (nhận)

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): 2x - 2y + z + 2 = 0$.

Ví dụ 3.7.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P) không qua O , song song mặt phẳng (Q) và $d((P); (Q)) = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x + 2y + 2z + 3 = 0$

B. $x + 2y + 2z = 0$

C. $x + 2y + 2z + 1 = 0$

D. $x + 2y + 2z - 6 = 0$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x + 2y + 2z + d = 0$ Với $d \neq 0; d \neq -3$.

Có $d((P); (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|d + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = -6 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow (P)$ có dạng: $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Ví dụ 3.7.3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x - y + z - 2 = 0, (\alpha_2): x + 4y - 5 = 0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x + 21y - z + 7 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng P .

A. $(Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$

B. $2x + 21y - z - 23 = 0$

C. $(Q): 2x - 2y + z - 19 = 0$

D. $(Q): 2x - 2y + z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn B

$(P) // (\alpha_3) \Rightarrow (P): 2x + 21y - z + m = 0 \ (m \neq -7)$

Gọi d là giao tuyến của $(\alpha_1); (\alpha_2)$ $d: \begin{cases} (\alpha_1): 3x - y + z - 2 = 0 \\ (\alpha_2): x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$

Cho $\xrightarrow{y=0} \begin{cases} 3x + z - 2 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(5; 0; -13)$ và $\xrightarrow{z=0} \begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + 4y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow N(1; 1; 0)$

$M \in (P) \Rightarrow 2.5 + 21.0 - (-13) + m = 0 \Rightarrow m = -23$

$N \in (P) \Rightarrow 2.1 + 21.1 - 0 + m = 0 \Rightarrow m = -23$

Vậy $2x + 21y - z - 23 = 0$.

Ví dụ 3.7.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $(Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$

B. $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$

C. $(Q): 2x - 2y + z - 19 = 0$

D. $(Q): 2x - 2y + z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn B

$(Q) // (P)$ nên mặt phẳng $(Q): 2x - 2y + z + C = 0; C \neq -5$, chọn $M(0; 0; 5) \in (P)$

Ta có $d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{|5 + C|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ C = -14 \end{cases}$

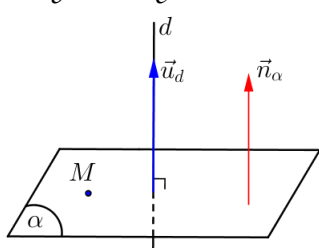
$C = 4 \Rightarrow (Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2; 0; 0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C = -14 \Rightarrow (Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7; 0; 0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$.

Dạng 3.8. Phương trình mặt phẳng qua điểm, song song/vuông góc đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$. 	» Tìm vectơ $\vec{u}_d = (a; b; c)$. » Vì $(\alpha) \perp d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \vec{u}_d$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.
Qua $M(x_0; y_0; z_0), N(x'_0; y'_0; z'_0)$ và song song $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$.	» Tìm vectơ $\vec{u}_d = (a; b; c); \overrightarrow{MN}$. » Vì $(\alpha) // d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến (α): $\vec{n} = [\vec{u}_d; \overrightarrow{MN}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Ví dụ 3.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$.

Phương trình mặt phẳng chứa điểm A và vuông góc đường thẳng d là

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$

B. $2x + y + z = 0$

C. $2x + 2y + z - 9 = 0$

D. $x + y + z - 1 = 0$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}_d = (2; 2; 1)$.

Vì $(\alpha) \perp d \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \vec{u}_d = (2; 2; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình là $2(x-1) + 2(y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 9 = 0$.

Ví dụ 3.8.2

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 2; 2)$ và song song với trục Ox có phương trình là

A. $x + y - z = 0$

B. $x + 2z - 3 = 0$

C. $2y - z + 1 = 0$

D. $y - 2z + 2 = 0$

Lời giải

Chọn D

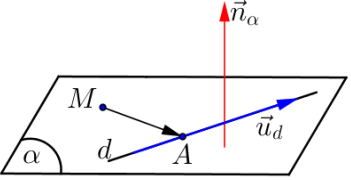
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 1)$.

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AB}, \vec{i}] = (0; 1; -2)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình là $0(x-1) + (y+0) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 2 = 0$.

Dạng 3.9. Phương trình mặt phẳng qua điểm, chứa đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$. 	» Lấy A tùy ý thuộc d, dễ nhất ta lấy $A(X; Y; Z)$. » Tìm vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Ví dụ 3.9.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z+3$.

Phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d là

A. $23x + 17y + z - 60 = 0$

B. $23x - 17y + z - 14 = 0$

C. $23x - 17y - z + 14 = 0$

D. $23x + 17y - z + 14 = 0$

Lời giải

Chọn C

$\vec{u}_d = (3; 4; 1)$. Gọi $M(0; 1; -3) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1; -1; -6)$.

Vì $\begin{cases} d \subset (P) \\ A \in (P) \end{cases}$ nên mặt phẳng (P) có 1 VTPT là $\vec{n}_p = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d] = (23; -17; -1)$.

Mặt phẳng $(P): \begin{cases} \text{qua } A(1; 2; 3) \\ \text{VTPT } \vec{n}_p = (23; -17; -1) \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 23(x-1) - 17(y-2) - 1(z-3) = 0 \Rightarrow 23x - 17y - z + 14 = 0$.

Ví dụ 3.9.2

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -4; 7)$ và chứa trục Oz .

A. $(P): 4x + 3y = 0$

B. $(P): 3x + 4y = 0$

C. $(P): 4y + 3z = 0$

D. $(P): 3x + 4z = 0$

Lời giải

Chọn A

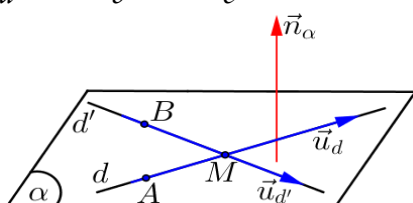
Ta có $\overrightarrow{OM} = (3; -4; 7)$, vectơ chỉ phương của trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) qua $M(3; -4; 7)$ có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{k}, \overrightarrow{OM}] = (4; 3; 0)$

nên có phương trình là $4(x-3) + 3(y+4) + 0(z-7) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 0$.

Dạng 3.10. Phương trình mặt phẳng chứa d, d' và d cắt d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$, d, d' cắt nhau 	» Tìm vectơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_{d'}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng ($\alpha$) qua điểm $A \in d$ hoặc $B \in d'$.

Ví dụ 3.10.1

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3} \text{ và } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3} \text{ có phương trình là}$$

A. $-2x - y + 9z - 36 = 0$

B. $2x - y - z = 0$

C. $6x + 9y + z + 8 = 0$

D. $6x + 9y + z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ đi qua điểm $M(1; -2; 4)$, có VTCP là $\vec{u}_1 = (-2; 1; 3)$

Đường thẳng $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ có một VTCP là $\vec{u}_2 = (1; -1; 3)$.

$\Rightarrow (P)$ qua điểm $M(1; -2; 4)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (6; 9; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $(P): 6(x-1) + 9(y+2) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow 6x + 9y + z + 8 = 0$.

Ví dụ 3.10.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $d: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ và

$d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ mặt phẳng chứa hai đường thẳng đã cho có phương trình là

A. $x + y - z + 3 = 0$

B. $-x + y - z + 31 = 0$

C. $x + 2y - 2z + 3 = 0$

D. $x + 2y - 2z + 12 = 0$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(0; -2; 1)$, có VTCP là $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$

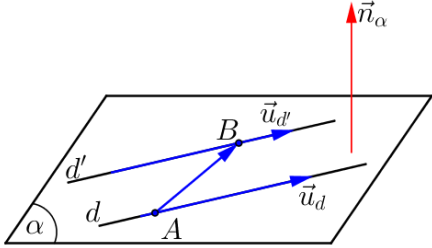
Đường thẳng $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ có một VTCP là $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$.

$\Rightarrow (P)$ qua điểm $M(0; -2; 1)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 1; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $(P): 1(x-0) + 1(y+2) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 3 = 0$.

Dạng 3.11. Phương trình mặt phẳng chứa d , d' và d song song d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$, $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$ và d song song d'. 	» Tìm $A \in d$ và $B \in d'$ » Tìm vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_d]$ hoặc $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_{d'}]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$ hoặc $B \in d'$

Ví dụ 3.11.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Khi đó mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng trên có phương trình là

A. $5x + 3y + 7z + 4 = 0$

B. $5x + 3y - 7z + 4 = 0$

C. $7x + 3y - 5z - 4 = 0$

D. $7x + 3y - 5z + 4 = 0$

Lời giải

Chọn D

+ d_1 đi qua $M_1(-1;1;0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;1;2)$;

+ d_2 đi qua $M_2(1;-2;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;1;2)$;

Nhận xét: $\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 // d_2$.

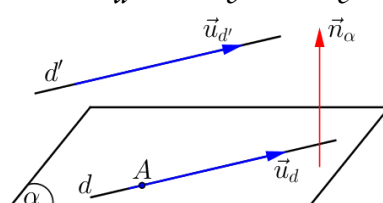
$\overrightarrow{M_1M_2} = (2;-3;1)$.

Mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng d_1, d_2 nên đi qua điểm $M_2(1;-2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến: $\vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1] = (-7;-3;5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) : $-7(x-1) - 3(y+2) + 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow 7x + 3y - 5z + 4 = 0$.

🔗 Dạng 3.12. Phương trình mặt phẳng chứa d và song song d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và song song với $d': \frac{x-X'}{a'} = \frac{y-Y'}{b'} = \frac{z-Z'}{c'}$. 	» Tìm $A \in d$, do $d \subset (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha)$. » Tìm vectơ $\vec{u}_{d'}$ và $\vec{u}_d$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$.

🔗 Ví dụ 3.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, gọi d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2 .

A. $(\alpha): 5x - 13y - 4z + 7 = 0$

B. $(\alpha): 5x - 13y + 4z + 7 = 0$

C. $(\alpha): 5x + 13y + 4z - 7 = 0$

D. $(\alpha): 5x + 13y + 4z + 7 = 0$

Lời giải

Chọn D

+ $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ đi qua $M_1(3; -2; 1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$;

+ Mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 2)$.

+ Mặt phẳng $(Q): x + 2y + z - 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; 1)$.

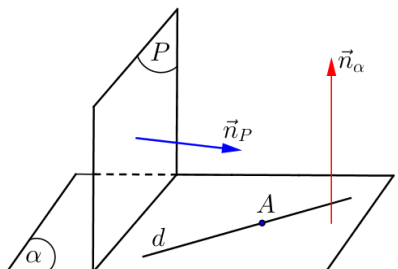
Gọi $d_2 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_2$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (-5; 1; 3)$.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 nên có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-5; -13; -4)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): -5(x - 3) - 13(y + 2) - 4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 13y + 4z + 7 = 0$.

Dạng 3.13. Phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc mặt khác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Chứa $d: \frac{x-X}{a} = \frac{y-Y}{b} = \frac{z-Z}{c}$ và vuông góc $(P): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm $A \in d \Rightarrow A \in (P)$. » Tìm vectơ $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_{(P)}$. » Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d]$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $A \in d$.

Ví dụ 3.13.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

A. $2y + 3z - 11 = 0$

B. $2y - z + 6 = 0$

C. $2y - 3z + 6 = 0$

D. $2y - 3z - 6 = 0$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và $\vec{n}_{(P)} = (1; -3; 2)$.

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (0; 8; 12)$. Chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (0; 2; 3)$.

Mặt phẳng (α) cần tìm là mặt phẳng đi qua $A(2;4;1)$ và nhận $\vec{n} = (0; 2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến có dạng: $0(x-2) + 2(y-4) + 3(z-1) = 0$ hay $2y + 3z - 11 = 0$.

Ví dụ 3.13.2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0$. là:

A. $x + 2y + z = 0$

B. $x + 2y - 1 = 0$

C. $x - 2y + z = 0$

D. $x - 2y - 1 = 0$

Lời giải

Chọn D

Ta có $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow d$ đi qua $M(1;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2;1;3)$

Mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_Q = (2;1;-1)$ là vectơ pháp tuyến.

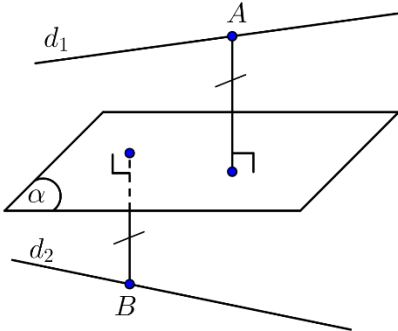
$d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d \perp (P), (Q) \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_Q \perp (P) \Rightarrow (P)$ có vectơ pháp tuyến

$\vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (-4; 8; 0) = -4(1; -2; 0)$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $1(x-1) - 2(y-0) + 0(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$.

➤ Dạng 3.14. Phương trình mặt phẳng cách đều 2 đường thẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Cách đều hai đường thẳng $d_1; d_2$ 	» Kiểm tra $d_1; d_2$ chéo nhau nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$. » Do (α) cách đều $d_1; d_2$ nên $d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$. Tìm D. » Viết phương trình mặt phẳng (α).

➤ Ví dụ 3.14.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$;

$d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều $d_1; d_2$ là:

A. $7x - 2y - 4z = 0$

B. $7x - 2y - 4z + 3 = 0$

C. $2x + y + 3z + 3 = 0$

D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$

Lời giải

Chọn D

Ta có d_1 qua $A(2;2;3)$ và có $\vec{u}_{d_1} = (2;1;3)$, d_2 qua $B(1;2;1)$ và có $\vec{u}_{d_2} = (2;-1;4)$

Do (α) cách đều $d_1; d_2$ nên (α) song song với $d_1; d_2 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (7;-2;-4)$

$\Rightarrow (\alpha): 7x - 2y - 4z + D = 0$.

Ta có $d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|D-2|}{\sqrt{69}} = \frac{|D-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow D = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\alpha): 14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

➤ Ví dụ 3.14.2

Trong không gian $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều

hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$

B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$

C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$

D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

Ta có d_1 qua $A(2;0;0)$ và có $\vec{u}_1 = (-1;1;1)$; d_2 qua $B(0;1;2)$ và có $\vec{u}_2 = (2;-1;-1)$.

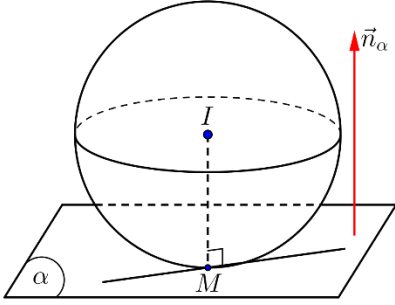
Do (α) cách đều $d_1; d_2$ nên (α) song song với $d_1; d_2 \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (0;1;-1)$

$\Rightarrow (\alpha): y - z + D = 0$.

Ta có $d(A, (P)) = d(B, (P)) \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = \frac{|-1+D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha): 2y - 2z + 1 = 0$.

Dạng 3.15. Phương trình mặt phẳng liên quan mặt cầu

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua A và tiếp xúc mặt cầu (S) tại M 	» Tìm tâm I và tính bán kính (S). » (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì (α) đi qua điểm M. » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{MI}$. » Mặt phẳng (α) qua điểm $M \in (S)$. ❑ Lưu ý: Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được $\vec{n}$ của (α) và (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết). Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I, (\alpha)) = R$ để tìm D.

Ví dụ 3.15.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81$. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $P(-5; -4; 6)$.

A. $x + y - z + 1 = 0$

B. $x + 2y - 2z + 1 = 0$

C. $2x + y + 2 = 0$

D. $2x + y - z + 1 = 0$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; 3)$. Do (α) tiếp xúc với (S) tại điểm $P(-5; -4; 6)$ nên (α) có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{IP} = (-6; -6; 3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-6(x+5) - 6(y+4) + 3(z-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 24 = 0$.

Ví dụ 3.15.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tiếp xúc với (S) .

A. $3x - 4y = 0$

B. $3x + 2y - z = 0$

C. $2x + 3y + 1 = 0$

D. $3x - 4y - 2 = 0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (α) chứa trục Oz có dạng: $Ax + By = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

Ta có: $d(I, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$\Leftrightarrow 4AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow 4A + B = 0$. Chọn $A = 3, B = -4 \Rightarrow (\alpha): 3x - 4y = 0$.

☞ Ví dụ 3.15.3

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình (P) song song với $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$

A. $\begin{cases} x + 2y - 2z - 10 = 0 \\ x + 2y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$

B. $x + 2y - z + 12 = 0$

C. $2x + y - 3z + 2 = 0$

D. $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2 + 3} = 3$

Do $(P) \parallel (Q)$ nên phương trình của (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Vì (P) tiếp xúc mặt cầu $(S): d(I, (P)) = R = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1 + 4 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |1 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -10 \\ D = 8 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn: $x + 2y - 2z - 10 = 0$ và $x + 2y - 2z + 8 = 0$.

-----Hết-----

Hình học

Chủ đề 04

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Phương trình

► Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ Véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

► Phương trình chính tắc đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ Véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

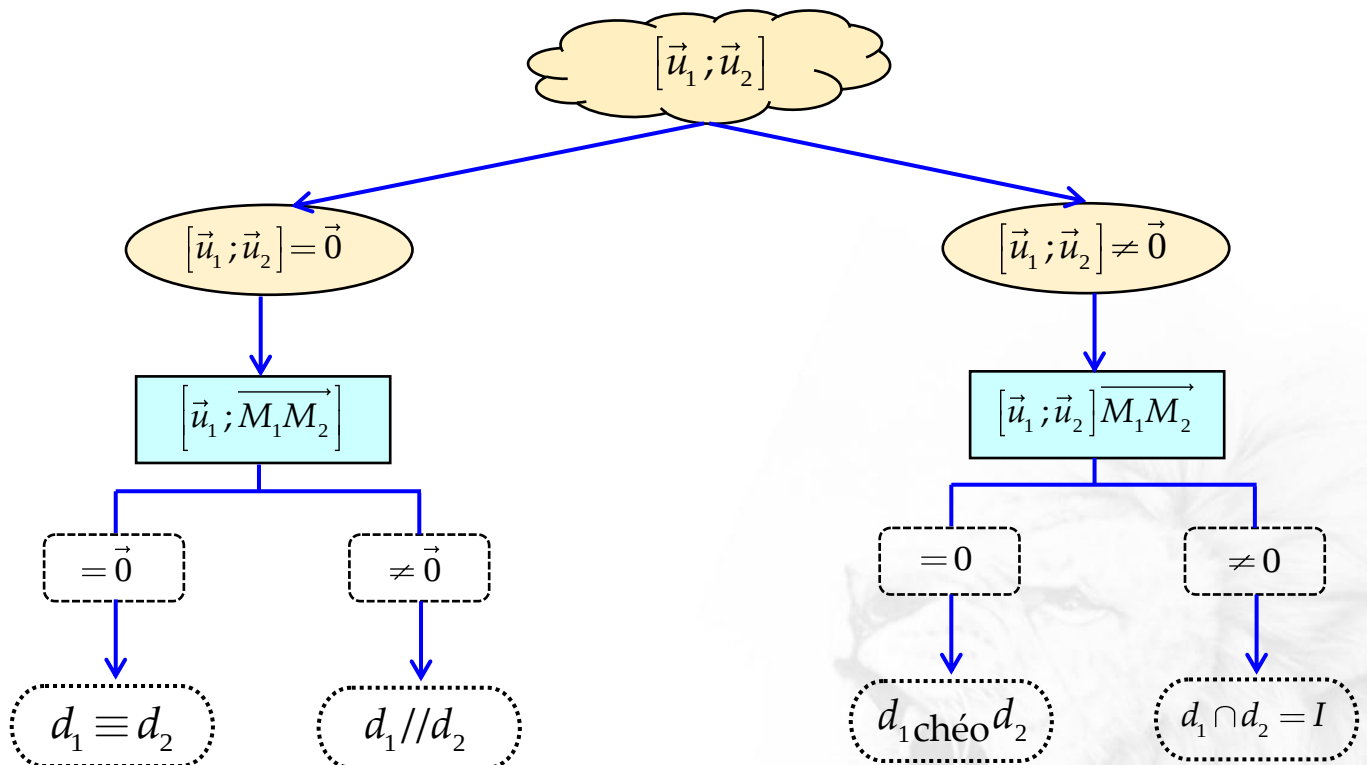
» Giao tuyến hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\gamma): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ cắt nhau.

Gọi Δ là giao tuyến của chúng. Khi đó, đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{n}_{(\beta)}]$.

2. Vị trí tương đối hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ và các điểm $M_1; M_2$ nằm trên $d_1; d_2$.



3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

» Trong không gian $Oxyz$,

cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Ta viết lại phương trình Δ dưới dạng tham số: $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ thay $x; y; z$ vào mặt phẳng (α) .

Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$.

Đặt $f(t) = A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D$.

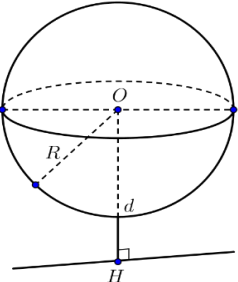
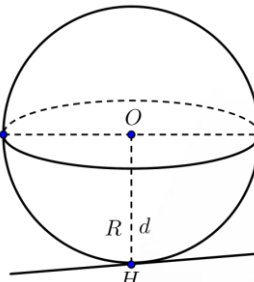
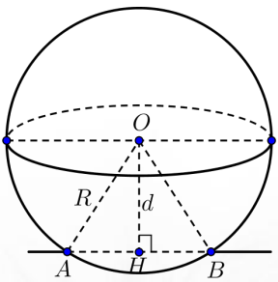
Khi đó: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$

Ta có các trường hợp sau:

Nếu	$f(t) = 0$ vô nghiệm	$f(t) = 0$ có 1 nghiệm	$f(t) = 0$ vô số nghiệm
Thì	Đường thẳng $\Delta // (\alpha)$.	Đường thẳng $\Delta \cap (\alpha) = I$.	Đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$.

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ và mặt cầu $S(I; R)$. Khi đó:

	Đường thẳng		
	Không cắt $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \emptyset$ $d(I; \Delta) > R$	Tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{H\}$ $d(I; \Delta) = R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	Cắt tại hai điểm $A; B$ $\Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A; B\}$ $d(I; \Delta) < R$ $\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I; \Delta)}$
Mặt cầu			

5. Khoảng cách liên quan đến đường thẳng

	Phương pháp 1	Phương pháp 2
Khoảng cách từ M đến Δ .	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \perp \Delta \end{cases}$ » Tìm tọa độ $H = (\alpha) \cap \Delta$. » Khi đó, $d(M; \Delta) = MH$.	$d(M; \Delta) = \frac{ \vec{M_0M} \cdot \vec{u} }{ \vec{u} }$
Khoảng cách Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \supset \Delta_1 \\ // \Delta_2 \end{cases}$ » Khi đó $d(\Delta_1; \Delta_2) = d(N; (\alpha))$	$d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{ \vec{u_1} \cdot \vec{u_2} \cdot \vec{MN} }{ \vec{u_1} \times \vec{u_2} }$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 4.1. Xác định vectơ chỉ phương

» Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $\vec{m} = k \cdot \vec{u}$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

» Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

» Phương trình chính tắc $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

» **Nhận xét:**

- Với phương trình tham số lấy đúng thứ tự hệ số trước tham số t .
- Với phương trình chính tắc lấy hệ số dưới mẫu.
- Nếu giả thiết chưa đúng cấu trúc, ta phải sắp xếp lại rồi mới lấy hệ số

➤ Ví dụ 4.1.1

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$.

➤ Ví dụ 4.1.2

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2; 2; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 2; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 1; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta viết lại $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} \Leftrightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{u}_1 = (2; 2; -1)$.

➤ Ví dụ 4.1.3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận véc tơ $\vec{u} = (a; 2; b)$ làm véc tơ chỉ phương. Tính $a+b$.

A. -8. B. 8. C. 4. D. -4.

Lời giải

Chọn B

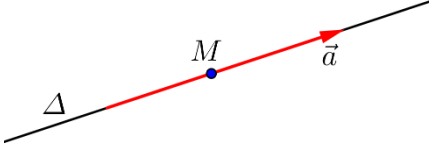
Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{v} = (2; 1; 2)$.

$\vec{u} = (a; 2; b)$ làm VTCP của d suy ra $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\frac{a}{2} = \frac{2}{1} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$.

Vậy $a+b=8$.

➤ Dạng 4.2. Phương trình đường thẳng qua điểm & có sẵn VTCP

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua M, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$ 	» Phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ nếu $\{a; b; c\} \neq 0$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.2.1

Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

A. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

☞ Ví dụ 4.2.2

Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

Lời giải

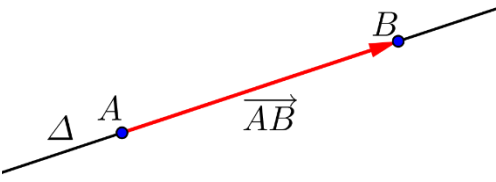
Chọn D

Do đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ đi qua điểm $M(1; 0; -2)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (2; 3; 1)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

➤ Dạng 4.3. Phương trình đường thẳng qua hai điểm

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua hai điểm A và B. 	» Chọn A hoặc B là điểm mà Δ đi qua. » Nhận $\overrightarrow{AB}$ làm VTCP $\rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

☞ Ví dụ 4.3.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm VTCP: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$.

☞ Ví dụ 4.3.2

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(-1; 3; 2)$, $B(2; 0; 5)$, $C(0; -2; 1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của ΔABC

A. $AM: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$.

B. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

C. $AM: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{-1}$.

D. $AM: \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

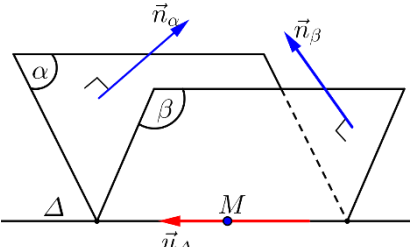
Gọi $M(x; y; z)$ là trung điểm BC . Khi đó $M(1; -1; 3)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \vec{u} = (2; -4; 1)$

Khi đó phương trình đường trung tuyến $AM: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$

Dạng 4.4. Phương trình đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ 	» Cho 1 trong 3 ẩn $x; y; z = 0$ để tìm 2 ẩn còn lại $x = 0 \longrightarrow \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow M(0; ?; ?)$ » Vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

B. $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

C. $\vec{u} = (1; 3; 5)$.

D. $\vec{u} = (-1; 3; -5)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $d = (P) \cap (Q)$. Khi đó một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; -3; -5)$.

Vậy $\vec{u} = (1; 3; 5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d .

Ví dụ 4.4.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 3 = 0$ và $(\beta): x + y + z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

B. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn B

(α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$.

(β) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = (1; 1; 1)$. Ta có $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1)$.

Vì đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; -3; 1)$.

Gọi $M = (\alpha) \cap (\beta)$, thì $M \in \Delta$ và tọa độ M thỏa mãn $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$.

Vậy $M(0; -1; 2)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;-1;2)$ và nhận $\vec{u}_{\Delta} = (2;-3;1)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Ví dụ 4.4.3

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{6}$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) . Giao tuyến d' của (Q) và (P) đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(1;0;1)$. B. $N(-4;0;0)$. C. $P(4;2;2)$. D. $P(-3;-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có $\vec{u}_d = (2;1;6)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1;1;-5)$.

(Q) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow (P) \cap (Q) = d'$.

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $11x - 16y - z - 10 = 0$.

Do $(P) \cap (Q) = d'$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng d' là

$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_Q, \vec{n}_p] = -27(3;2;1)$, suy ra d' có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3;2;1)$.

Gọi $I = d \cap (P)$, khi đó tọa độ I là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x+y-5z+4=0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{6} \end{cases}$$

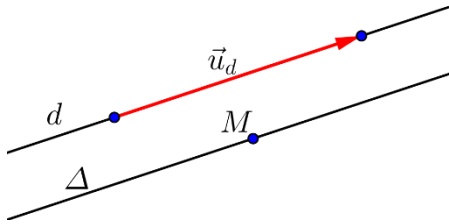
Giải hệ ta được $(x;y;z) = (1;0;1)$.

Do đó $d': \begin{cases} x=1+3t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$, suy ra đường thẳng d' đi qua điểm $P(4;2;2)$.

➤ Dạng 4.5. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với d .	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » Do $\Delta // d \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra



☞ Ví dụ 4.5.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

A. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1+t \\ z = 3+t \end{cases}$

C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $x - 2y + z = 0$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ đi qua A và song song BC nhận $\vec{BC} = (-2; 1; 1)$ làm vector chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ : $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

☞ Ví dụ 4.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$; $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

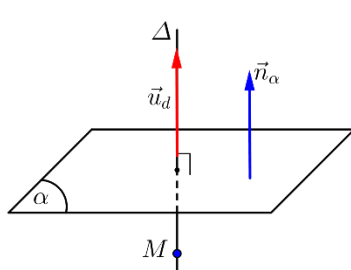
Trung điểm của AB là $I(0; 1; -1)$

Ta có $d // \Delta$ nên đường thẳng Δ cần tìm có $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_d = (1; -1; 2)$

Phương trình đường thẳng Δ : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

➤ Dạng 4.6. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc mặt

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » Do $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)}$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.6.1

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

$\Delta \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_P = (1; 3; -1)$ nên chỉ đáp án A hoặc B đúng.

Thử tọa độ điểm $A(2; 3; 0)$ vào ta thấy đáp án B thỏa mãn

☞ Ví dụ 4.6.2

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 2), B(1; 2; 1), C(3; 2; 0)$ và $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1), \overrightarrow{BD} = (0; -1; 2)$

$d \perp (BCD) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(BCD)} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-1; -4; -2)$

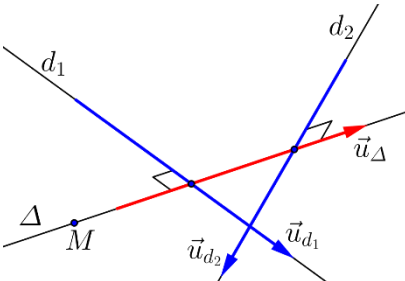
Khi đó ta loại đáp án A và B

Thay điểm $A(1; 0; 2)$ vào phương trình ở phương án C ta có $\begin{cases} 1 = 2 + t \\ 0 = 4 + 4t \\ 2 = 4 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

Nên chọn phương án C

➤ Dạng 4.7. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc hai đường d_1 và d_2. 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » VTCP: $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.7.1

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

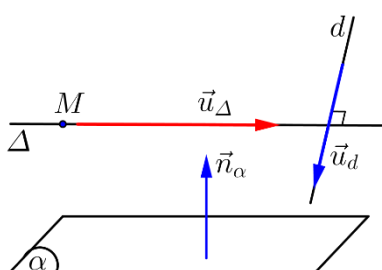
+) VTCP của Δ, Δ' lần lượt là $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (1; 3; -2)$; $[\vec{u}, \vec{v}] = (-7; 7; 7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$.

+) d đi qua $M(-1; 1; 3)$ nên $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Dạng 4.8. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) vuông góc d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và vuông góc d 	» Chọn $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm mà Δ đi qua. » VTCP: $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_\alpha; \vec{n}_{(\alpha)}]$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.8.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}_d = (3; -5; -1)$ là véc tơ chỉ phương của d .

$\vec{n}_p = (2; 0; 1)$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .

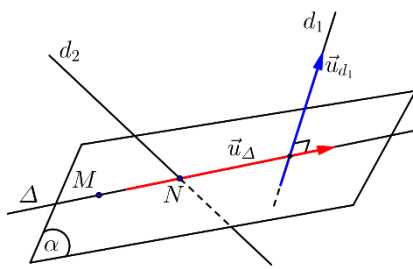
$[\vec{u}_d; \vec{n}_p] = (-5; -5; 10)$.

Do Δ vuông góc với d và song song với (P) nên $\vec{u} = (1; 1; -2)$ là véc tơ chỉ phương Δ .

Khi đó, phương trình của Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

Dạng 4.9. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc d, cắt d'

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc d_1 và cắt d_2. 	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \perp d_1 \\ qua M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_{d_1} \\ qua M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$ » Gọi $N = d_2 \cap (\alpha) \rightarrow$ giải hệ theo $t \rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} qua \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.9.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ có VTCP $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Gọi $M(0; m; 0) \in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM} = (-2; m-1; -3)$

Do $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2(m-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Ta có Δ có VTCP $\overrightarrow{AM} = (-2; -4; -3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$

Ví dụ 4.9.2

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng:

$d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}, d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua

A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ B. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$
 C. $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$ D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{u}_{d_1} = (1; 4; -2)$

$d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ nên phương trình tham số của $d_2: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Gọi đường thẳng d cắt đường thẳng d_2 tại $M(2+t; -1-t; 1+t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1+t; -t; t-2)$

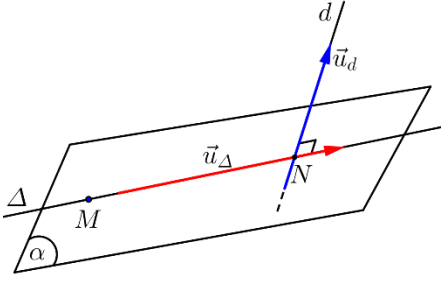
Đường thẳng d đi qua $A; M$ nên vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1+t; -t; t-2)$

Theo đề bài d vuông góc $d_1 \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (1+t) + 4(-t) - 2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$
 $\Rightarrow \vec{u}_d = (2; -1; -1)$

Phương trình đường thẳng d qua $A(1; -1; 3)$ có $\vec{u}_d = (2; -1; -1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$.

➤ Dạng 4.10. Phương trình đường thẳng qua điểm, vuông góc & cắt d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc và d. 	» Lập $(\alpha): \begin{cases} \perp d \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_d \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$ » Gọi $N = d \cap (\alpha) \rightarrow$ giải hệ theo $t \rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$ ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

➤ Ví dụ 4.10.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi giao điểm của Δ và d là $B(t+1; t; 2t-1)$. Khi đó $\overrightarrow{u}_{\Delta} = \overrightarrow{AB} = (t, t, 2t-3)$.

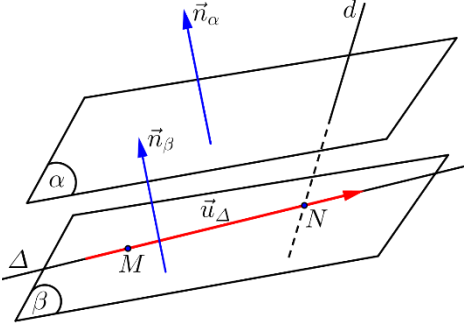
Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d có $\overrightarrow{u}_d = (1, 1, 2)$ thì:

$$t + t + 2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{u}_{\Delta} = (1, 1, -1).$$

Phương trình đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

Dạng 4.11. Phương trình đường thẳng qua điểm, song song (α) & cắt d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và cắt d. 	» Lập $(\beta): \begin{cases} \text{song song } (\alpha) \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(\beta)} = \vec{n}_{(\alpha)} \\ \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \end{cases}$. » Gọi $N = d \cap (\beta) \rightarrow$ giải hệ theo $t \rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.11.1

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 0; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -1; 0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $x - 5y - z + 4 = 0$.

B. $x - 5y + z - 2 = 0$.

C. $x + 5y + z - 2 = 0$.

D. $x + 5y - z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A , song song (P) và cắt đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 + 54t \\ y = 2 + 11t \\ z = -4 - 47t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 3 + 47t \\ y = 2 + 54t \\ z = -4 + 11t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 3 - 11t \\ y = 2 - 47t \\ z = -4 + 54t \end{cases}$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; -3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -4; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (3; -2; 2)$.

Giả sử $\Delta \cap d = M$ nên $M(2 + 3t; -4 - 2t; 1 + 2t)$ khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{AM} = (3t - 1; -2t - 6; 2t + 5)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$ nên $3(3t - 1) - 2(-2t - 6) - 3(2t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}$.

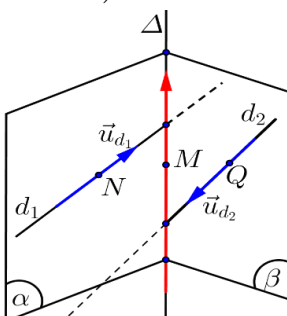
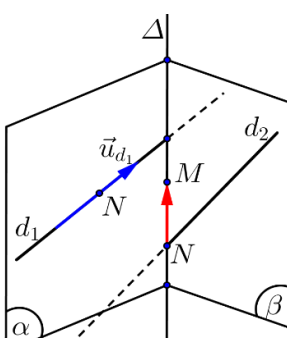
Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{11}{7}; -\frac{54}{7}; \frac{47}{7} \right)$

Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ có tọa độ là $(11; -54; 47)$ do đó phương

trình đường thẳng cần tìm là
$$\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases} .$$

➤ Dạng 4.12. Phương trình đường thẳng qua điểm & cắt d_1, d_2

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và cắt d_1 và d_2. 	► Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$, lấy $N \in d_1$ bất kỳ. » Viết $(\beta): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\beta)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in d_2$ bất kỳ. » Khi đó đường thẳng $\Delta = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến.
	► Cách 2: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M \\ \supset \Delta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{MQ} \end{cases}$, lấy $Q \in \Delta_1$ bất kỳ. » Gọi $N = (\alpha) \cap \Delta_2 \rightarrow$ giải hệ theo $t \Rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MN} \end{cases}$.

► **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

☞ Ví dụ 4.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$ và $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(0; 2; -4)$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa d_1

$d_1: \begin{cases} \text{qua } B(2; 1; -1) \\ \vec{u}_1 = (2; -1; 3) \end{cases}$ và $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3) \Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_1; \overrightarrow{AB}] = (-2; 2; 2)$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và chứa d_2

$d_2: \begin{cases} \text{qua } C(-1; 3; -2) \\ \vec{u}_2 = (-2; 3; -1) \end{cases}$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_2; \overrightarrow{AC}] = (7; 5; 1)$

Khi đó Δ là giao tuyến của (P) và $(Q) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = -8(1; -2; 3) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$.

☞ Ví dụ 4.12.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $I(1;1;2)$, $d_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \\ z=4 \end{cases}$ và $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Phương trình đường thẳng Δ qua I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=t \\ z=3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$$\Delta \cap d_1 = A(3+t; -1+2t; 4); \Delta \cap d_2 = B(-2+u; u; 2+2u).$$

$$\overrightarrow{IA} = (2+t; -2+2t; 2); \overrightarrow{IB} = (-3+u; u-1; 2u).$$

$$I, A, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+t = k(-3+u) \\ -2+2t = k(u-1) \\ 2 = 2ku \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \\ ku = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (4; 2; 2) = 2(2; 1; 1).$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình là: } \Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}.$$

☞ Ví dụ 4.12.3

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$ và $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình

A. $\begin{cases} x=-t \\ y=1+2t \\ z=1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-t \\ y=1-2t \\ z=1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=2-t \\ y=3-2t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } A = \Delta \cap d_1 \text{ suy ra } \overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{IA}] = (4; -6; -1) \text{ nên } A(t; -1+2t; 3-t).$$

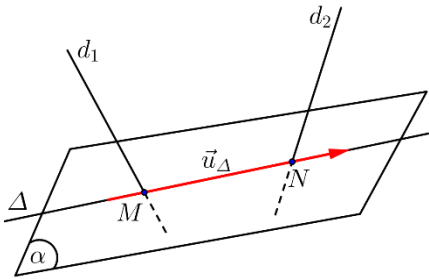
$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm } AB, \text{ suy ra } B(2-t; 5-2t; t-1).$$

$$\text{Theo giả thiết, } B \in d_2 \text{ nên } \frac{2-t}{2} = \frac{5-2t-1}{1} = \frac{t-1-1}{-1} \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases} A(2; 3; 1) \\ B(0; 1; 1) \end{cases}$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua hai điểm } A(2; 3; 1), B(0; 1; 1) \text{ nên } \Delta: \begin{cases} x=-t \\ y=1+2t \\ z=1 \end{cases}.$$

➤ Dạng 4.13. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & cắt d_1, d_2

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Nằm trong (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và cắt d_1 và d_2. 	» Gọi $\begin{cases} M = d_1 \cap (\alpha) \\ N = d_2 \cap (\alpha) \end{cases}$. » Khi đó đường thẳng Δ: $\begin{cases} \text{qua} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

➤ Ví dụ 4.13.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x - 3y + 11z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ và $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 đồng thời đường thẳng d nằm trong (P) .

A. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 7t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - 1t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 7t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tham số của đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 4 + t' \\ y = t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$.

Gọi $A = d \cap d_1 \Rightarrow A(-t; 3 + 2t; -1 + 3t)$.

Gọi $B = d \cap d_2 \Rightarrow B(4 + t'; t'; 3 + 2t')$.

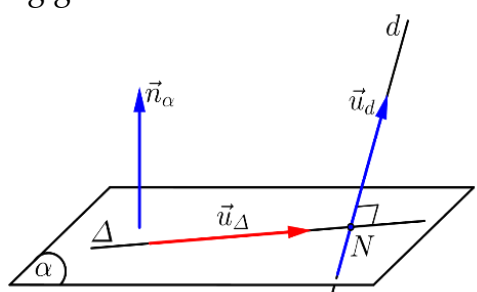
Vì $d \subset (P)$ nên có $\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t - 3(3 + 2t) + 11(-1 + 3t) - 3 = 0 \\ 4(4 + t') - 3t' + 11(3 + 2t') - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -2 \end{cases}$.

$\Rightarrow A(-1; 5; 2), B(2; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3; -7; -3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 7t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Dạng 4.14. Phương trình đường thẳng nằm trong (α) & vuông góc d

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Nằm trong (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và vuông góc d. 	» Gọi $N = d \cap (\alpha)$. » Khi đó đường thẳng Δ: $\begin{cases} \text{qua } N \\ \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{u}_d] \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.14.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{3}$.

B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+1}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{n}_P = (1; -1; 2)$, $\vec{u}_d = (2; 1; -3)$, Gọi $I = d \cap (P)$, $I \in d \Rightarrow I(2t; 3+t; 2-3t)$

$I \in (P) \Rightarrow 2t - (3+t) + 2(2-3t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-2; 2; 5)$

Theo giả thiết $\begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (1; 7; 3)$

Và đường thẳng Δ đi qua điểm I . Vậy $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}$.

Ví dụ 4.14.2

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Gọi $M = \Delta \cap (P) \Rightarrow M \in \Delta \Rightarrow M(t; 2t-1; t+1)$

$M \in (P) \Rightarrow t - 2(2t-1) - (t+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 1; 2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; -2; -1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

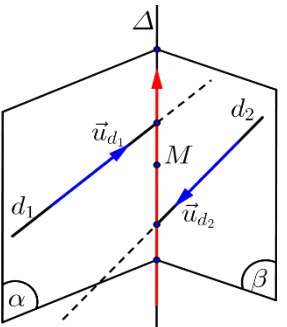
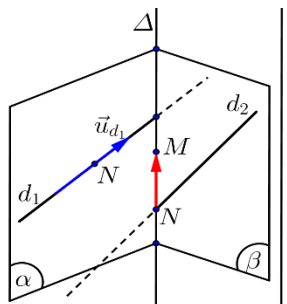
$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1; 1; 2) \in d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$



➤ Dạng 4.15. Phương trình đường thẳng qua điểm và // d' cắt d₁, d₂

► Trong không gian Oxyz, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và //d' và cắt d₁ và d₂ 	► Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_{d_1}] \end{cases}$ » Viết $(\beta): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\beta)} = [\vec{u}_{d'}, \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$ » Khi đó đường thẳng $d = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến.
	► Cách 2: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \parallel d' \\ \supset d_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_{d'} \end{cases}$, lấy $M \in d_1$ bất kỳ. » Gọi $N = (\alpha) \cap d_2 \rightarrow$ giải hệ theo t $\Rightarrow N(?)$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua } N \\ \vec{u}_{\Delta} = \vec{u}_{d'} \end{cases}$.

► **Lưu ý:** Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra.

☞ Ví dụ 4.15.1

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d₁ và d₂ lần lượt có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d₁, d₂ và song song với đường thẳng Δ: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng d₁ và d

Khi đó (P) qua $M(0; -1; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{u} = (1; 4; -2)$.

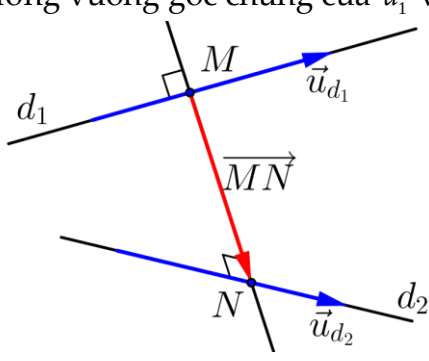
Khi đó $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}] = (-8; 3; 2) \Rightarrow (P): -8x + 3y + 2z + 3 = 0$

Gọi $H = d_2 \cap (P)$ $d_2: \begin{cases} -8x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow H(1; -1; 4).$

Đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

Dạng 4.16. Phương trình đường thẳng là đường vuông góc chung

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 	» Gọi $\begin{cases} M \in d_1 \\ N \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(?)$ (tọa độ theo $t; k$). » MN là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ? \\ k = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(?) \\ N(?) \end{cases}$. » Khi đó đường thẳng $\Delta: \begin{cases} \text{qua} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} \end{cases}$. ► Lưu ý: Phương trình tìm được không nằm trong các phương án, ta có thể thay tọa độ điểm mà đường thẳng đi qua để kiểm tra

Ví dụ 4.16.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$. Viết

phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1; d_2$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -5t \\ z = 11t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1; d_2$.

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (2; 1; 5)$; d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (1; 1; 3)$.

Gọi $A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(1 + 2t; 2 + t; -2 + 5t)$; $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(1 + s; 2 + s; 1 + 3s)$.

$\overrightarrow{AB} = (s - 2t; s - t; 3 + 3s - 5t)$.

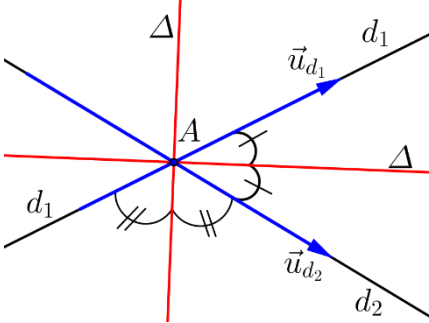
Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(s - 2t) + s - t + 5(3 + 3s - 5t) = 0 \\ s - 2t + s - t + 3(3 + 3s - 5t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18s - 30t = -15 \\ 11s - 18t = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $B(1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{AB} = \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua B và có VTCP $\vec{u} = (-2; -1; 1)$ là $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Dạng 4.17. Phương trình đường thẳng là đường phân giác

► Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ

Loại	Phương pháp
Đường phân giác góc trong, Đường phân giác góc ngoài tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2. 	Xét 2 đường thẳng d_1 và d_2. có 2 vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1); \vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ thỏa mãn $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$. - Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0$ thì vectơ chỉ phương của phân giác trong $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, phân giác ngoài $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. - Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 < 0$ thì vectơ chỉ phương của phân giác trong $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, phân giác ngoài $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. » Điểm đi qua thỏa $A = d_1 \cap d_2$.

Ví dụ 4.17.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có điểm $A(1; -3; 5)$ thuộc đường thẳng d , nên $A(1; -3; 5) = d \cap \Delta$.

Một VTCP của đường thẳng d là $\vec{v} = (-3; 0; -4)$. Ta xét:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{3} (1; 2; -2) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right);$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} (-3; 0; -4) = \left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5} \right).$$

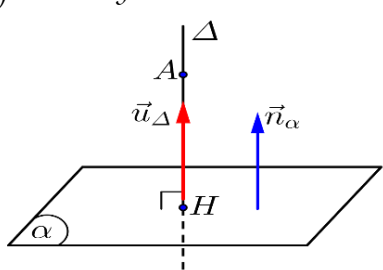
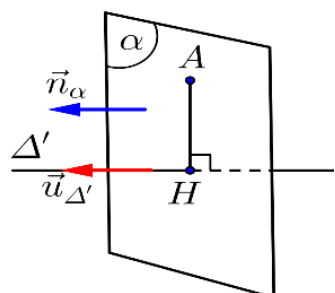
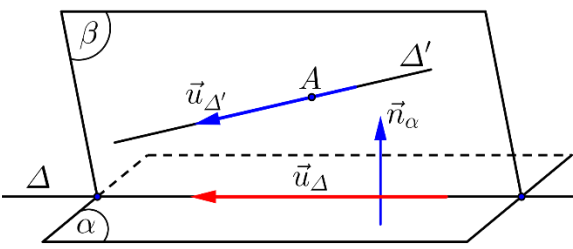
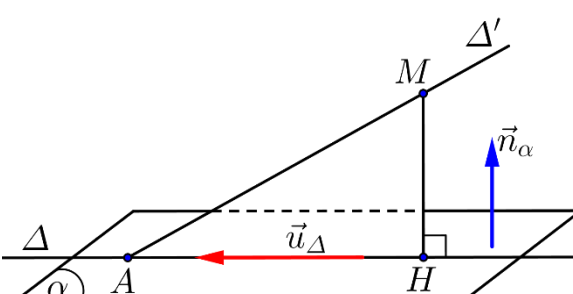
Nhận thấy $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 > 0$, nên góc tạo bởi hai vectơ $\vec{u}_1, \vec{v}_1$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ .

Ta có $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \left(-\frac{4}{15}; \frac{10}{15}; -\frac{22}{15} \right) = -\frac{15}{2} (2; -5; 11)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ

có vectơ chỉ phương là $\vec{w}_1 = (2; -5; 11)$. Do đó có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$.

➤ Dạng 4.18. Liên quan hình chiếu

➤ Trong không gian $Oxyz$, tìm

Loại	Phương pháp
(1) Hình chiếu vuông góc $A(x_A; y_A; z_A)$ lên $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Viết $\Delta: \begin{cases} \text{qua } A \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của A lên $(\alpha) \Rightarrow H = d \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. ❖ CT nhanh: $H(x_M - At; y_M - Bt; z_M - Ct)$ với $t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.
(2) Hình chiếu vuông góc $A(x_A; y_A; z_A)$ lên $\Delta': \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. 	Cách 1: » Viết $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } A \\ \perp \Delta' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_{\Delta'} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của A lên $\Delta' \Rightarrow H = \Delta' \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. Cách 2: » Tham số hóa $H \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (?t)$. » H là hình chiếu của A thì $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow t = ?$ » Tọa độ H.
(3) Hình chiếu vuông góc của Δ' lên $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Cách 1.  Cách 2. 	Cách 1: » Viết $(\beta): \begin{cases} \supset \Delta' \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{qua } A \\ \vec{n}_{(\beta)} = [\vec{n}_{(\alpha)}; \vec{u}_{\Delta'}] \end{cases}$. » Δ là hình chiếu vuông góc của Δ' lên $(\alpha) \Rightarrow \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \rightarrow$ phương trình giao tuyến. Cách 2: » Tìm $A = (\alpha) \cap d \rightarrow$ giải hệ tìm $t \Rightarrow A(?)$. » Lấy $M \in d (M \neq A)$. » Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (α) » Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (α) $\rightarrow \Delta: \begin{cases} \text{qua } \begin{bmatrix} A \\ H \end{bmatrix} \\ \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{AH} \end{cases}$.

❖ CT nhanh:

$$\Delta': \begin{cases} x = x_0 - at + (a(B^2 + C^2) - A(b.B + c.C))k \\ y = y_0 - bt + (b(A^2 + C^2) - B(a.A + c.C))k \\ z = z_0 - ct + (c(A^2 + B^2) - C(a.A + b.B))k \end{cases} \text{ với}$$

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A.a + B.b + C.c}.$$

» Điểm chiếu lên mặt

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$ và điểm $A(2; 5; 1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P) .

- A. $H(4; -2; 3)$. B. $H(-4; 2; 3)$. C. $H(4; 2; 3)$. D. $H(4; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (6; 3; -2)$.

Gọi AH qua A và vuông góc với $(P) \Rightarrow AH: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow H(2 + 6t; 5 + 3t; 1 - 2t)$

Mà $H \in (P) \Rightarrow 6(2 + 6t) + 3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-4; 2; 3)$

» Điểm chiếu lên đường

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d là:

- A. $N(2; 2; 3)$. B. $P(6; 6; 3)$. C. $M(2; 1; -3)$. D. $Q(1; 1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $H(4 + 2t; 4 + 2t; 2 - t) \in d$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = (3 + 2t; 3 + 2t; 3 - t)$.

Để H là hình chiếu của A thì $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow (3 + 2t)2 + (3 + 2t)2 - (3 - t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Ta được hình chiếu $H(2; 2; 3)$. Đối chiếu với đáp án ta có $H \equiv N(2; 2; 3)$.

» Đường chiếu lên mặt

☞ Ví dụ 4.18.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - z - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) .

- A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình tham số $d: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ qua $M(3;1;-1)$ có VTCP $\vec{u}_d = (3;1;-1)$.

Vì $M(3;1;-1) \in (P)$ nên $M = d \cap (P)$.

Gọi $O = (0;0;0) \in d$ và K là hình chiếu vuông góc của điểm O lên (P) .

Gọi Δ qua O và vuông góc với (P)

$\Rightarrow \Delta$ nhận vectơ pháp tuyến của (P) làm VTCP $\vec{u}_\Delta = (1;0;-1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = -t' \end{cases}$.

Khi đó $K = \Delta \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = -t' \\ x - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow K = (2;0;-2)$.

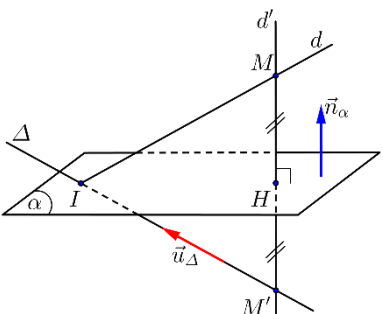
Hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) là đường thẳng MK .

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MK} = (-1;-1;-1) = -(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng MK là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

➤ Dạng 4.19. Liên quan đối xứng

➤ Trong không gian $Oxyz$, tìm

Loại	Phương pháp
(1) M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. ❖ CT nhanh: $M' \begin{cases} (x_M + 2At; y_M + 2Bt; z_M + 2Ct) \\ t = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}.$	» Viết $\Delta: \begin{cases} qua M \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)} \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của M lên (α) $\Rightarrow H = d \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$.
(2) M' là điểm đối xứng của M qua $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. ❖ CT nhanh: $M' \begin{cases} (2x_0 - x_M + 2at; 2y_0 - y_M + 2bt; 2z_0 - z_M + 2ct) \\ t = \frac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$	» Viết $(\alpha): \begin{cases} qua M \\ \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{n}_{(\alpha)} = \vec{u}_\Delta \end{cases}$. » Gọi H là HCVG của M lên Δ $\Rightarrow H = \Delta \cap (\alpha) \rightarrow t = ? \Rightarrow H(?)$. » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$.
(3) Δ là đường thẳng đối xứng d qua $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. 	» Tìm giao điểm $I = d \cap (\alpha)$ và lấy $M \in d$ (bất kỳ). » Viết $d': \begin{cases} qua M \\ \perp (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qua M \\ \vec{u}_{d'} = \vec{n}_\alpha \end{cases}$. » Tìm giao điểm $H = d' \cap (\alpha)$ » Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(?)$. » Hình chiếu của d là $\Delta: \begin{cases} qua M' \\ qua I \end{cases}$.

» Điểm đối xứng điểm qua mặt

☞ Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$.

Tìm tọa độ của điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (P) .

A. $N(2;1;1)$. B. $N(-1;-1;4)$. C. $N(2;1;0)$. D. $N(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với $(P) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases}$.

$$\text{Toạ độ } I = d \cap (P) \text{ thoả mãn hệ } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -2t \\ x+y-2z+4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+t) + (1+t) - 2(-2t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Khi đó giao điểm của d và (P) là $I(0; 0; 2)$.

Gọi N đối xứng với M qua mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(-1; -1; 4)$

» Điểm đối xứng điểm qua đường

☞ Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(3; 2; 0)$ $B(1; 0; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng của điểm A qua d .

A. $A'(-1; 0; 4)$. B. $A'(-2; 0; 1)$. C. $A'(1; 1; 1)$. D. $A'(3; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d .

Phương trình của (P) là: $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên d , khi đó $H = d \cap (P)$

Suy ra $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$, mặt khác $H \in (P)$

$$\Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0 \Rightarrow t=2. \text{ Vậy } H(1; 1; 2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d , khi đó H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; 0; 4)$.

» Đường đối xứng đường qua mặt

☞ Ví dụ 4.19.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{7}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{7}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{7}$.

Lời giải

Chọn A

» d không vuông góc với (P) .

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$

$$\text{Tọa độ } I = d \cap (P) \text{ là nghiệm của } \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1; 1).$$

» Lấy điểm $M(0; -1; 2) \in d$.

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ qua } M \text{ và vuông góc với } (P) \text{ có phương trình } \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\Delta \cap (P) = H \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$$M' \text{ đối xứng với } M \text{ qua } (P) \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của } MM' \Rightarrow M'\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

» Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P)

$$\Rightarrow d' \text{ đi qua } I(1; 1; 1) \text{ và } M'\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right) \text{ có vectơ chỉ phương } \overrightarrow{IM'} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}(1; -2; 7),$$

$$\text{phương trình } d' \text{ là } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{7}.$$

-----Hết-----



Hình học

Chủ đề 05

TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN Oxyz

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Điểm và mặt cầu, mặt phẳng và đường thẳng

Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ với:

» Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ tâm I , bán kính R .

» Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_p$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Điểm	
Mặt cầu	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM > R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM = R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM < R$	Điểm M nằm trong mặt cầu
Mặt phẳng	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $(P): Ax + By + Cz + D = 0$	
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$	Điểm M nằm trong mặt phẳng
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$	Điểm M nằm ngoài mặt phẳng
Đường thẳng	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$	
	$\frac{x_0 - X_0}{a} = \frac{y_0 - Y_0}{b} = \frac{z_0 - Z_0}{c}$	Điểm M nằm trên đường thẳng
	$\frac{x_0 - X_0}{a} \neq \frac{y_0 - Y_0}{b} \neq \frac{z_0 - Z_0}{c}$	Điểm M nằm ngoài đường thẳng
	1 trong 3 phân số $\neq$ nhau	
	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào $d: \begin{cases} x = X_0 + at \\ y = Y_0 + bt \\ z = Z_0 + ct \end{cases}$	
	$\begin{cases} x_0 = X_0 + at \\ y_0 = Y_0 + bt \\ z_0 = Z_0 + ct \end{cases} \rightarrow$ cho cùng giá trị t	Điểm M nằm trên đường thẳng
	$\begin{cases} x_0 = X_0 + at \\ y_0 = Y_0 + bt \\ z_0 = Z_0 + ct \end{cases} \rightarrow$ không cho cùng giá trị t	Điểm M nằm ngoài đường thẳng

2. Mặt cầu và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ tâm I , bán kính R , với:

» Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;(P)) > R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;(P)) = R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d(I;(P)) < R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu (*)
Đường thẳng	Tính $d(I;(d))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;d) > R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d) = R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d) < R$	Đường thẳng cắt mặt cầu (**)

(*): Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r .

$$\text{Biểu thức liên hệ } R = \sqrt{r^2 + d^2(I;(P))}$$

(**): Đường thẳng cắt mặt cầu tại hai điểm $A; B$.

$$\text{Biểu thức liên hệ } R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d^2(I;\Delta)}$$

3. Mặt phẳng và mặt phẳng, đường thẳng

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

» Mặt phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

» Đường thẳng $d: \frac{x-X_0}{a} = \frac{y-Y_0}{b} = \frac{z-Z_0}{c}$ có vecto chỉ phương $\vec{u}_d$.

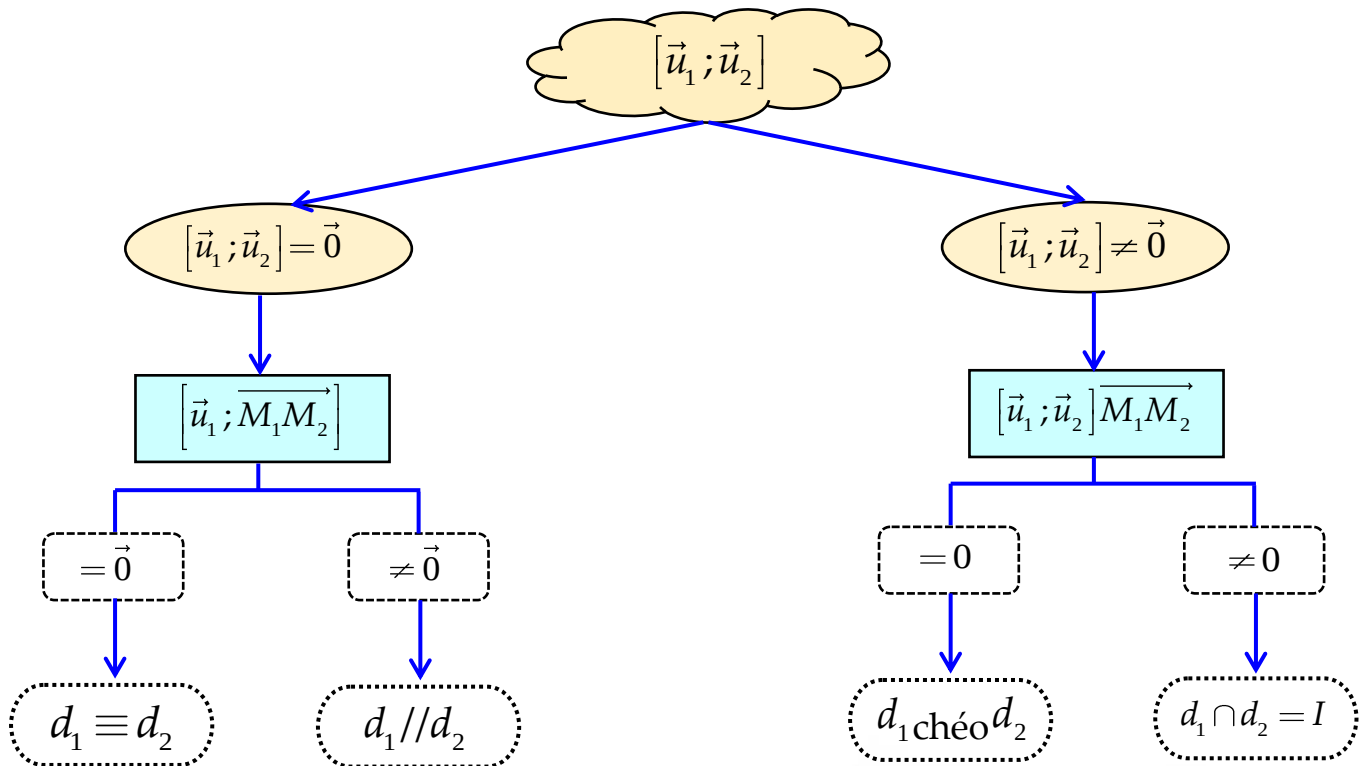
Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)	
Mặt phẳng (Q)	Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng	
	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$	Mặt (P) vuông góc mặt (Q)
Đường thẳng	Tham số hóa $H \in d \Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng (P)	
	Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.	

$f(t) = 0$ vô nghiệm	Đường thẳng song song mặt (P)
$f(t) = 0$ có 1 nghiệm	Đường thẳng cắt mặt (P)
$f(t) = 0$ vô số nghiệm	Đường thẳng nằm trong mặt (P)
Xét tích vô hướng vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P)	
$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \notin (P)$	Đường thẳng song song mặt (P)
$A.a + B.b + C.c \neq 0$	Đường thẳng cắt mặt (P)
$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \in (P)$	Đường thẳng nằm trong mặt (P)

4. Đường thẳng và đường thẳng

Xét hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có VTCP $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ và các điểm $M_1; M_2$ nằm trên $d_1; d_2$.



Hoặc ta có thể xét như sau:

Đường thẳng d_2	
Đường thẳng d_1	Xét $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ ($k \neq 0$)
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \in d_2$ d_1 trùng d_2
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$ d_1 song song d_2
	Và xét hệ tương giao $(I): \begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) có nghiệm duy nhất d_1 cắt d_2
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) vô nghiệm d_1 chéo d_2

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 5.1. Vị trí tương đối với mặt cầu

	Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;(P)) > R$	Mặt phẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;(P)) = R$	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M
	$d(I;(P)) < R$	Mặt phẳng cắt mặt cầu
Đường thẳng	Tính $d(I;(d))$ và so sánh với bán kính R	
	$d(I;d) > R$	Đường thẳng không cắt mặt cầu
	$d(I;d) = R$	Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu
	$d(I;d) < R$	Đường thẳng cắt mặt cầu
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R	
	$IM > R$	Điểm M nằm ngoài mặt cầu
	$IM = R$	Điểm M nằm trên mặt cầu
	$IM < R$	Điểm M nằm trong mặt cầu

➤ Ví dụ 5.1.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) . B. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .
C. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) . D. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) .

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và bán kính $R=3$

Mà $\overrightarrow{IM} = (2; 1; -1) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} < R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

➤ Ví dụ 5.1.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x + y - 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y + 2z - 1 = 0$.
C. $2x - y - 2z + 1 = 0$. D. $2x - 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} + 1 = 2$.

Với $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$ thì $d(I;(P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 = R$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Ví dụ 5.1.3

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; -2; 0)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -2)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MI} = (0; 1; 2) \text{ và } [\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (8; -2; 1) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{966}}{14}$$

Vì $d(I, \Delta) > R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S) .

Ví dụ 5.1.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$, $2x + 2y + z + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S) ?

A. 1. B. 4. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm là $I(1; -1; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên: $d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 2 + 1 + 2m|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow |2m + 1| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -5 \end{cases}$$

Ví dụ 5.1.5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + mt \\ z = -t \end{cases}$. Giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S) là:

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$. C. $-1 < m < 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có:

$$(1+t-2)^2 + (2+mt+1)^2 + (-t-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 + (3+mt)^2 + (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2)t^2 + 2.3mt + 10 = 0 \quad (1)$$

Để Δ không cắt mặt cầu (S) thì (1) vô nghiệm, hay (1) có $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

➤ Dạng 5.2. Vị trí tương đối với mặt phẳng

	Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	Xét tỉ lệ 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng
	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$ Mặt (P) vuông góc mặt (Q)
Đường thẳng	Tham số hóa $H \in d \Rightarrow H(?)$ và thay vào mặt phẳng (P)
	Được phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.
	$f(t) = 0$ vô nghiệm Đường thẳng song song mặt (P)
	$f(t) = 0$ có 1 nghiệm Đường thẳng cắt mặt (P)
	$f(t) = 0$ vô số nghiệm Đường thẳng nằm trong mặt (P)
	Xét tích vô hướng vecto chỉ phương của d và vecto pháp tuyến của (P)
	$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \notin (P)$ Đường thẳng song song mặt (P)
	$A.a + B.b + C.c \neq 0$ Đường thẳng cắt mặt (P)
Điểm	$A.a + B.b + C.c = 0$ và $M(X_0; Y_0; Z_0) \in (P)$ Đường thẳng nằm trong mặt (P)
	Thay tọa độ $M(x_0; y_0; z_0)$ vào (P): $Ax + By + Cz + D = 0$
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ Điểm M nằm trong mặt phẳng
	$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ Điểm M nằm ngoài mặt phẳng

➤ Ví dụ 5.2.1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0, (\beta): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\alpha) // (\beta)$ B. $(\alpha) \equiv (\beta)$ C. $(\alpha) \perp (\beta)$ D. $(\alpha) \cap (\beta)$

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{1}$ nên hai mặt phẳng (α) và (β) song song.

Đáp án B học sinh hiểu sai vì nhận thấy hai vecto pháp tuyến cùng phương.

Đáp án C học sinh hiểu sai điều kiện hai mặt phẳng vuông góc.

Đáp án D học sinh hiểu sai điều kiện hai mặt phẳng cắt nhau.

➤ Ví dụ 5.2.2

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt (P) B. $d // (P)$ C. $d \subset (P)$ D. $d \perp (P)$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; 3)$.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$ qua $M(-3; 2; 1)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 0)$.

Ta có $M \in (P)$ và $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$ nên $d \subset (P)$.

Ví dụ 5.2.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + y + mz + 1 = 0$ (với m là tham số) và $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) song song với d .

- A. $m = -2$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P): x + y + mz + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; m)$.

Đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 2)$.

Ta có (P) song song với $d \Leftrightarrow \begin{cases} O \notin (P) \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 \cdot m + 1 \neq 0 \\ 1 + 1 + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Ví dụ 5.2.4

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi

- A. $|m| = \sqrt{3}$ B. $|m| = 1$ C. $|m| = \sqrt{2}$ D. $|m| = 2$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (m^2; -1; m^2 - 2); \vec{n}_{(\beta)} = (2; m^2; -2)$.

$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(\beta)} \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow |m| = 2.$

Vậy $|m| = 2$.

Ví dụ 5.2.5

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ và $(Q): 4x + (m - 3)y + (m^2 + 1)z - 7 = 0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

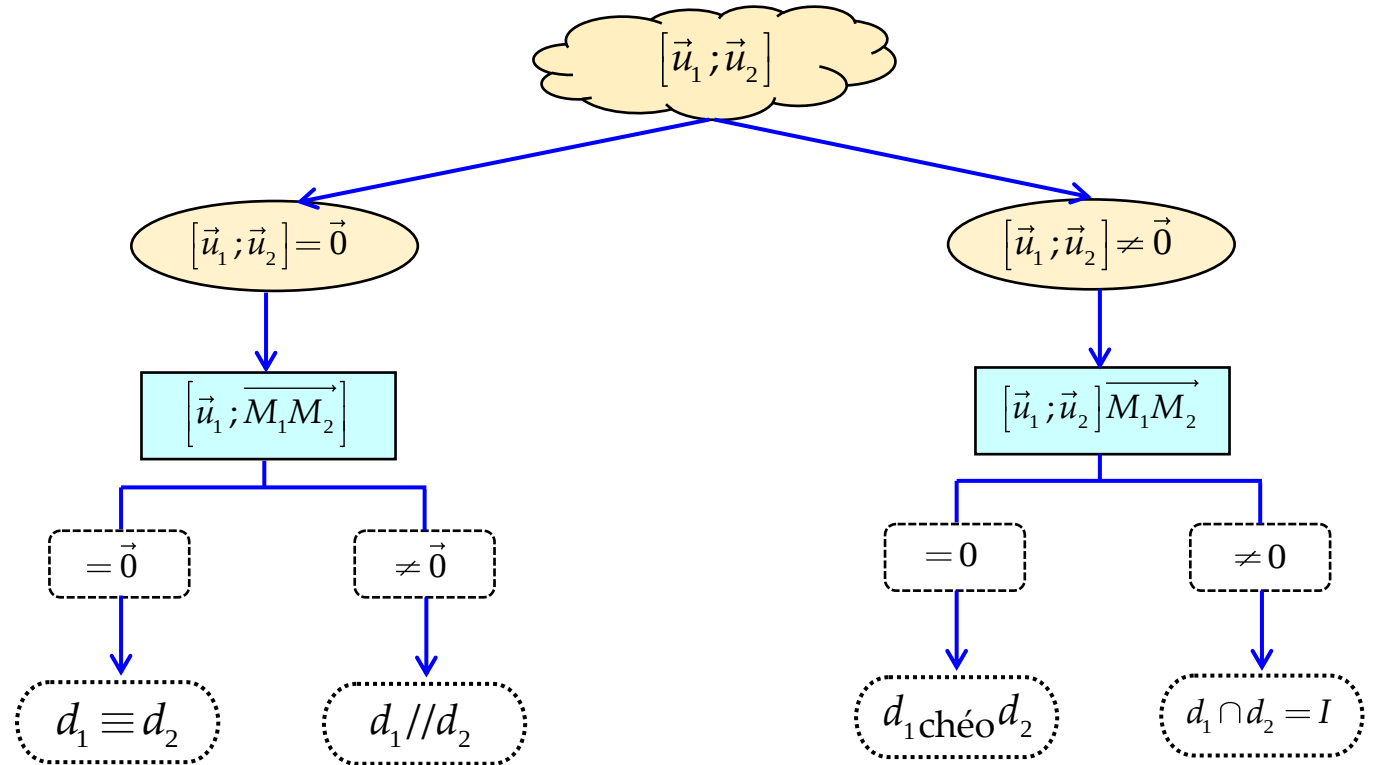
- A. $m = 3$ B. $m = \pm 3$ C. $m = -3$ D. $m = 0$

Lời giải

Chọn C

$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{4}{2} = \frac{m-3}{-3} = \frac{m^2+1}{5} \neq \frac{-7}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{-3} = 2 \\ \frac{m^2+1}{5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$

Đạng 5.3. Vị trí tương đối với đường thẳng



Hoặc ta có thể xét như sau:

Đường thẳng d_2	
Đường thẳng d_1	Xét $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ ($k \neq 0$)
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \in d_2$ d_1 trùng d_2
	$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$ d_1 song song d_2
	Và xét hệ tương giao (I): $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) có nghiệm duy nhất d_1 cắt d_2
	$\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2$ và (I) vô nghiệm d_1 chéo d_2

Ví dụ 5.3.1

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm của $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$ là

A. $(8; -13; 23)$ B. $(0; -3; 2)$ C. $(-7; -8; -2)$ D. $(3; 7; 18)$

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của d và d' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' \\ -2 + 3t = -1 - 4t' \\ 6 + 4t = 20 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases}$

Do đó giao điểm d và d' là $M(3; 7; 18)$.

☞ Ví dụ 5.3.2

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = -3-t \\ z = 0 \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d_1 và d_2 đồng phẳng
B. d_1 cắt và vuông góc với d_2
C. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau
D. $d_1 // d_2$

Lời giải

Chọn C

Ta có: Một VTCP của d_1 là $\vec{u}_1 = (1; 2; -3)$; VTCP của d_2 là $\vec{u}_2 = (2; -1; 0)$.

Từ đó ta có: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow d_1 \perp d_2$ (1).

Giao điểm d_1, d_2 (nếu có) là nghiệm:
$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3} \\ x = 2t \\ y = -3-t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2t}{1} = \frac{-3-t}{-3} \\ \frac{-3-t}{2} = \frac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{13}{3} \end{cases} \text{ (vô lý)}.$$

Từ đó ta có d_1 không cắt d_2 (2).

Từ (1) và (2) ta có d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

☞ Ví dụ 5.3.3

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+at \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2+2t' \\ z = 3-t' \end{cases}$;

$(t; t' \in \mathbb{R})$. Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

- A. $a = 2$
B. $a = 1$
C. $a = -1$
D. $a = 0$

Lời giải

Chọn D

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+at = 1-t' \\ t = 2+2t' \\ -1+2t = 3-t' \end{cases}$. Ta tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

Từ phương trình thứ hai và thứ ba của hệ suy ra $\begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $1+2a = 1$. Do đó để hệ có nghiệm duy nhất thì $a = 0$.

☞ Ví dụ 5.3.4

Trong không gian $Oxyz$, giá trị nào của tham số m thì đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{m}$ song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 2+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là

- A. 1
B. 4
C. 2
D. 3

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{m}$ có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 2; m)$ và qua $M(1; -2; 3)$.

Đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=2+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có VTCP $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$.

Dễ thấy $M \notin \Delta$ do đó $d // \Delta$ khi $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ cùng phương hay $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 4$.

Ví dụ 5.3.5

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{m} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{m} (m \neq 0)$ và đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x=5+t \\ y=3+2t \\ z=3-t \end{cases}$. Tìm giá trị của số thực m để d và Δ cắt nhau

A. $m=1$

B. $m=\frac{3}{2}$

C. $m=2$

D. $m=\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có hệ giao điểm như sau: $\begin{cases} 1+mt' = t+5 \\ 3+t' = 2t+3 \\ -5+mt' = -t+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2t \\ 2mt+1 = t+5 \\ 2mt-5 = -t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2m-1)t = 4 \\ (2m+1)t = 8 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện là $\frac{4}{2m-1} = \frac{8}{2m+1} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

➤ Dạng 5.4. Góc

- (1) Hai đường thẳng $d_1; d_2$: $|\cos(d_1; d_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.
- (2) Hai mặt phẳng $(\alpha_1); (\alpha_2)$: $|\cos((\alpha_1); (\alpha_2))| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.
- (3) Đường thẳng d và mặt phẳng (α) : $|\sin(d; (\alpha))| = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{u}_d|}$.

Chú ý: $0^\circ \leq ((\alpha), (\beta)) \leq 90^\circ$

➤ Ví dụ 5.4.1

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$, mặt phẳng $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. 45° B. 15° C. 30° D. 120°

Lời giải

Chọn A

(P) có $\vec{n}_1 = (8; -4; -8)$.

(Q) có $\vec{n}_2 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{12\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

➤ Ví dụ 5.4.2

Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$.

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Lời giải

Chọn C

d_1 có $\vec{u}_1 = (1; -\sqrt{2}; 1)$.

d_2 có $\vec{u}_2 = (1; \sqrt{2}; -1)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

➤ Ví dụ 5.4.3

Trong không gian $Oxyz$, tìm m để số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = -3+\sqrt{2}t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2+mt \\ y = 3+t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ bằng 60° .

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Lời giải

Chọn C

Ta có: đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; \sqrt{2})$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (m; 1; \sqrt{2})$.

Gọi φ là góc giữa d_1, d_2 . Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot m + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{m^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}}$.

Theo giả thiết ta có $\varphi = 60^\circ \Rightarrow \frac{|m+1|}{2\sqrt{m^2+3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |m+1| = \sqrt{m^2+3} \Leftrightarrow m=1$.

Vậy $m=1$.

Ví dụ 5.4.4

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q): x+(2m-1)z+7=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$?

A. $\begin{cases} m=4 \\ m=\sqrt{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m=2 \\ m=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m=2 \\ m=-2\sqrt{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m=1 \\ m=4 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(P), (Q)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_p = (1; -2; 2), \vec{n}_q = (1; 0; 2m-1)$

Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên $\cos \frac{\pi}{4} = |\cos(\vec{n}_p; \vec{n}_q)|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|1+2(2m-1)|}{3 \cdot \sqrt{1+(2m-1)^2}} \Leftrightarrow 2(4m-1)^2 = 9(4m^2-4m+2) \Leftrightarrow 4m^2-20m+16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=4 \end{cases}$$

Ví dụ 5.4.5

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0), B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$

B. $(8;11)$

C. $(3;5)$

D. $(0;3)$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc 60° nên $\cos((P), (Oyz)) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} (*)$.

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c = 2-\sqrt{2} \in (0;3)$.

Dạng 5.5. Khoảng cách

(1) Hai điểm $A; B$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

(2) Điểm M_0 và Δ : $d(M_0; \Delta) = \frac{|\left[\vec{u}; \overrightarrow{MM_0} \right]|}{|\vec{u}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\Delta' // \Delta \\ M_0 \in \Delta'}]{\Delta'} d(\Delta'; \Delta) = d(M_0; \Delta)$$

(3) Hai đường $\Delta_1; \Delta_2$ ($M \in \Delta_1; N \in \Delta_2$): $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{MN}|}{\left| \left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \right|}$.

$$\xrightarrow[\substack{AB \& CD \\ \text{chéo nhau}}]{AB \& CD} d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right] \cdot \overrightarrow{BD}|}{\left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right] \right|}$$

(4) Điểm M_0 và mặt $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$: $d(M_0; (\alpha)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}_{(\alpha)}|}$.

$$\xrightarrow[\substack{\left\{ \begin{array}{l} (\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta) \end{array} \right\}}]{\left\{ \begin{array}{l} (\beta) // (\alpha) \\ M_0 \in (\beta) \end{array} \right\}} d(M_0; (\alpha)) = d((\beta); (\alpha)) = d(\Delta; (\alpha))$$

Ví dụ 5.5.1

Trong không gian $Oxyz$ cho $(P): 3x + 4y + 2z + 5 = 0$, điểm $A(2; -1; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

A. $d = \frac{13}{9}$

B. $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$

C. $d = \frac{13}{29}$

D. $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng ta có:

$$d(A; (P)) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{29}}.$$

Ví dụ 5.5.2

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; -1; -2)$. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

C. $\sqrt{7}$

D. $\frac{2}{7}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ hay $(ABC): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

$$\text{Do đó } d(D; (ABC)) = \frac{|6 + 3 - 4 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{1}{7}.$$

☞ Ví dụ 5.5.3

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;-2;1)$. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng AB .

A. 2

B. $\sqrt{13}$

C. $3\sqrt{2}$

D. 12

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{CA} = (-5; 2; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4)$ và $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}] = (12; 26; 8)$.

$$d(C; AB) = \frac{\|[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}]\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{12^2 + 26^2 + 8^2}}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 4^2}} = \sqrt{13}.$$

☞ Ví dụ 5.5.4

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y - 2z + 5 = 0$ và $(Q): -2x - y + 2z + 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

A. 1

B. $\frac{2}{3}$

C. 2

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn C

Do $(P) \parallel (Q)$ nên chọn $A\left(0; 0; \frac{5}{2}\right) \in (P) \Rightarrow d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = \frac{6}{3} = 2$

☞ Ví dụ 5.5.5

Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x - 2y - z + 1 = 0$ và $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Khoảng cách giữa Δ và (P) bằng

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$ nên $\Delta \parallel (P)$.

Chọn $M(1; -2; 1) \in (\Delta)$ ta có: $d(\Delta, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot (-2) - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

☞ Ví dụ 5.5.6

Trong không gian $Oxyz$, cho $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' .

A. $h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$

B. $h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$

C. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$

D. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$

Lời giải

Chọn B

d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 2)$, đi qua $M(-1; -1; 1)$.

d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (2; 1; 1)$, đi qua $M'(1; -2; 3)$.

Ta có: $[\vec{u}, \vec{u}'] = (1; 2; -4)$, $\overrightarrow{MM'} = (2; -1; 2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 = -8 \neq 0$.

$\Rightarrow d, d'$ chéo nhau.

Khi đó: khoảng cách h giữa d và d' là: $h = \frac{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{MM'} \right|}{\left\| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right\|} = \frac{8}{\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{21} ..$

-----Hết-----