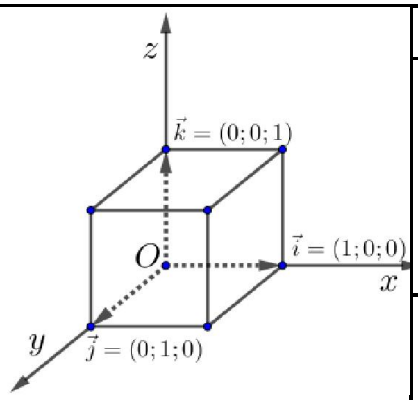
Chuyên đề 28 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6

Lý thuyết chung



1. Hệ trục tọa độ *Oxyz:*

- Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(x;y;z)}$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in R)$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$, $(b_1,\ b_2,\ b_3\neq 0)$.
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Nguyễn Bảo Vương

3. Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)}$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox}M_1(x_M;0;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy}M_2(0;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz}M_3(0;0;z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,y)]{\text{Chiếu vào } Oxy}M_1(x_M;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z)]{\text{Chiếu vào } Oyz}M_2(0;y_M;z_M)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,z)]{\text{Chiếu vào } Oxz}M_3(x_M;0;z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x;\text{ đối dấu } y,z)]{\text{Đối xứng qua } Ox}M_1(x_M;-y_M;-$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y;\text{ đối dấu } x,z)]{\text{Đối xứng qua } Oy}M_2(-x_M;y_M;-$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,y;\text{ đối dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy}M_1(x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,z;\text{ đối dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz}M_2(x_M;-y_M;z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z;\text{ đối dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz}M_3(-x_M;y_M;z_M)$

▪ $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z;\text{ đổi dấu } x,y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M;-y_M;$

4. Tích có hướng của hai vecto:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).$$

☞ **Tính chất:** $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$; $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

▪ Điều kiện **cùng phương** của hai vecto $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$ với $\vec{0}=(0;0;0)$.

▪ Điều kiện **đồng phẳng** của ba vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a},\vec{b}].\vec{c}=0$.

▪ **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]\right|$.

▪ **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$.

▪ **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.

▪ **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$.

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Dạng 1.1 Tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng, đường thẳng

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;0;5)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(0;2;5)$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0;2;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;0;1)$. **D.** $(0;2;0)$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;5;2)$. **B.** $(0;5;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;2)$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(8;0;0)$. **C.** $(0;1;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy?

A. $(0;4;2)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(1;0;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $M(3;0;2)$ **B.** $(0;0;2)$ **C.** $Q(0;5;2)$ **D.** $N(3;5;0)$

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy.

A. $Q(1;0;3)$ **B.** $P(1;2;0)$ **C.** $M(0;0;3)$ **D.** $N(0;2;3)$

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $Q(0;4;1)$. **B.** $P(3;0;1)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $N(3;4;0)$.

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Câu 12. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;0;-1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(2;0;0)$.

Câu 13. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3;-1;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(3;0;0)$.

Câu 14. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$ **B.** $N(0;-1;1)$ **C.** $P(0;-1;0)$ **D.** $Q(0;0;1)$

Câu 16. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $M(3;4;0)$. **B.** $P(-2;0;3)$. **C.** $Q(2;0;0)$. **D.** $N(0;4;-1)$.

Câu 17. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M'. Xác định tọa độ M'.

A. $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.

B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.

C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.

D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;0)$.

Câu 19. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

A. $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 20. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy.

A. $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

Dạng 1.2 Xác định tọa độ vectơ, độ dài vec tơ

Câu 21. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;-2;3)$ **C.** $(3;5;1)$ **D.** $(3;4;1)$

Câu 23. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=\sqrt{5}$ **B.** $OA=5$ **C.** $OA=3$ **D.** $OA=9$

Câu 24. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Câu 25. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1), B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(2;2;3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Câu 26. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 27. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Câu 28. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Câu 30. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x}=(2;1;-3)$ và $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

A. $\vec{a}=(4;1;-1)$. **B.** $\vec{a}=(3;1;-4)$. **C.** $\vec{a}=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{a}=(4;1;-5)$.

Câu 31. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;-1;0)$ và $B(1;1;-3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;0;-3)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Câu 32. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;-2;1), B(1;-1;3)$. Tọa độ vecto $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(-1;1;2)$.. **B.** $(-3;3;-4)$.. **C.** $(3;-3;4)$.. **D.** $(1;-1;-2)$

Câu 33. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$. **C.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$. **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Câu 34. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;3;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Câu 35. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Vectơ $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;7;2)$. **B.** $(1;5;2)$. **C.** $(3;7;2)$. **D.** $(1;7;3)$.

Câu 36. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Câu 37. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Câu 38. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $2\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 39. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0), \vec{b}(2;2;0), \vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;3;5)$, $B(2;2;3)$. Độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Dạng 1.3 Xác định tọa độ điểm

Câu 41. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;-2;10)$ **B.** $(1;3;2)$ **C.** $(2;6;4)$ **D.** $(2;-1;5)$

Câu 42. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD=BC$.

A. $D(6;0;0), D(12;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

C. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ **D.** $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(1;0;4)$. **B.** $I(2;0;8)$. **C.** $I(2;-2;-1)$. **D.** $I(-2;2;1)$.

Câu 44. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là :

A. $I(-2;2;1)$. **B.** $I(1;0;4)$. **C.** $I(2;0;8)$. **D.** $I(2;-2;-1)$.

Câu 45. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $I(2;-4;2)$. **B.** $I(4;2;6)$. **C.** $I(-2;-1;-3)$. **D.** $I(2;1;3)$.

Câu 46. Trong không gian cho hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $I(2;-4;2)$. **B.** $I(4;2;6)$. **C.** $I(-2;-1;3)$. **D.** $I(2;1;3)$.

Câu 48. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;3;2)$. **B.** $(2;-1;5)$. **C.** $(2;-1;-5)$. **D.** $(2;6;4)$.

Câu 49. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;3;4), B(2;-1;0), C(3;1;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(2;1;2)$. **B.** $G(6;3;6)$. **C.** $G\left(3;\frac{2}{3};3\right)$. **D.** $G(2;-1;2)$.

Câu 50. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0), B(-2;3;0)$, $C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:

A. $(1;2;1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(1;1;-2)$.

Câu 51. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là:

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(0;2;2)$. **C.** $(2;-2;6)$. **D.** $(1;0;3)$.

Câu 52. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(5;6)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;5)$. **B.** $(4;1)$. **C.** $(5;1)$. **D.** $(8;2)$.

Câu 53. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;9)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(0;3;3)$. **B.** $(4;-2;12)$. **C.** $(2;-1;6)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 54. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;2)$ và $B(3;-3;2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(1;1;2)$ **B.** $M(2;2;4)$ **C.** $M(2;-4;0)$ **D.** $M(4;-8;0)$

Câu 55. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$.

C. $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Dạng 2. Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 56. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Câu 57. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây *sai?*

A. $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$ **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ **D.** $\vec{a}\perp\vec{b}$

Câu 58. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3)$, $B(-2;-2)$, $C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A=-\dfrac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 59. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 60. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{3}{13}$.

Câu 61. **(Chuyên Đhsp Hà Nội 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $150°$.

Câu 62. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=8$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=6$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=0$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-6$.

Câu 63. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. 30^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Câu 64. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$ $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $-\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 65. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 66. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$ và $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{3}{13}$.

Câu 67. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=(2;-1)$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Câu 68. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho hai véc tơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 69. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(-4;-2;6)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{b}=-2\vec{a}$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$. **D.** $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$.

Câu 70. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - 2019)** Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $120°$. **B.** $45°$. **C.** $135°$. **D.** $60°$.

Câu 71. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;3)$, $B(0;0;-1)$, $C(1;0;-1)$, $D(0;1;-1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $AB\perp BD$. **B.** $AB\perp BC$. **C.** $AB\perp AC$. **D.** $AB\perp CD$.

Câu 72. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương - 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a};\vec{b})=90°$.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$

Câu 73. **(SGD Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}=1$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Câu 74. **(CỤM Chuyên Môn 4 - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;3);B(-1;2;1);C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. -6. **B.** -14. **C.** 14. **D.** 6.

Câu 75. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Côsin của góc BAC bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.

Dạng 3. Tích có hướng và ứng dụng

Câu 76. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vectơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Câu 77. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(3;5;-2)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a}=(1;2;-1),\vec{b}=(3;-1;0),\vec{c}=(1;-5;2)$. Câu nào sau đây **đúng?**

A. $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$. **B.** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

C. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. **D.** $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Câu 79. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $|\vec{a}+\vec{b}|=3$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=-4$. **C.** $|\vec{a}-\vec{b}|=5$. **D.** $[\vec{a},\vec{b}]=(-1;-4;3)$.

Câu 81. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1), B(1;-1;2)$. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 82. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 83. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tính diện tích S của tam giác ABC, biết $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$.

A. $S=\frac{\sqrt{61}}{3}$. **B.** $S=\frac{\sqrt{61}}{2}$. **C.** $S=2\sqrt{61}$. **D.** $S=\sqrt{61}$.

Câu 84. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0;0;0)$, $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O,A,B,C đồng phẳng?

A. $m=14$. **B.** $m=-14$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-7$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $A.BCD$ có $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;0)$ và $D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 86. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}$. **B.** $\frac{\sqrt{349}}{2}$. **C.** $\sqrt{349}$. **D.** $\sqrt{87}$.

Câu 87. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$ và điểm $D(2;1;-2)$. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ là

A. $V=\frac{5}{6}$. **B.** $V=\frac{5}{3}$. **C.** $V=\frac{6}{5}$. **D.** $V=\frac{3}{2}$.

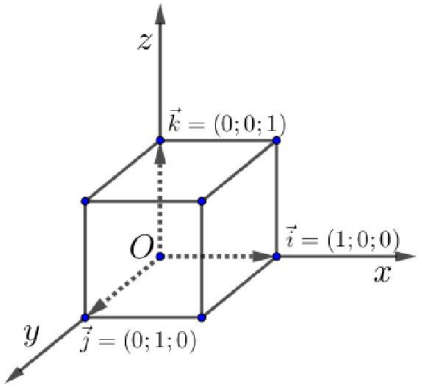
Câu 88. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $\frac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{78}}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Chuyên đề 28 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung



1. Hệ trục tọa độ *Oxyz:*

- Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vecto $\boxed{\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(x;y;z)}$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in R)$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3},\ (b_1,\ b_2,\ b_3\neq 0).$
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Nguyễn Bảo Vương

3. Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)}$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x)]{\text{Chiếu vào }Ox}M_1(x_M;0;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }y)]{\text{Chiếu vào }Oy}M_2(0;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }z)]{\text{Chiếu vào }Oz}M_3(0;0;z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x,y)]{\text{Chiếu vào }Oxy}M_1(x_M;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }y,z)]{\text{Chiếu vào }Oyz}M_2(0;y_M;z_M)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x,z)]{\text{Chiếu vào }Oxz}M_3(x_M;0;z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x;\text{đổi dấu }y,z)]{\text{Đối xứng qua }Ox}M_1(x_M;-y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }y;\text{đổi dấu }x,z)]{\text{Đối xứng qua }Oy}M_2(-x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }z;\text{đổi dấu }x,y)]{\text{Đối xứng qua }Oz}M_3(-x_M;-y_M;z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x,y;\text{đổi dấu }z)]{\text{Đối xứng qua }Oxy}M_1(x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }x,z;\text{đổi dấu }y)]{\text{Đối xứng qua }Oxz}M_2(x_M;-y_M;z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên }y,z;\text{đổi dấu }x)]{\text{Đối xứng qua }Oyz}M_3(-x_M;y_M;z_M)$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).$$

☞ **Tính chất:**	$[\vec{a}, \vec{b}]\perp\vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}]\perp\vec{b}$	$\left\|[\vec{a},\vec{b}]\right\|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

- Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ với $\vec{0}=(0;0;0)$.
- Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}=0$.
- **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Dạng 1.1 Một số bài toán liên quan đến vectơ, tọa độ vec tơ

Câu 1. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Câu 2. **(HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3), \vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Câu 3. **(THPT Nguyễn Khuyến -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì A,B,M thẳng hàng.

A. $x=4;y=7$ **B.** $x=-4;y=-7$ **C.** $x=4;y=-7$ **D.** $x=-4;y=7$

Câu 4. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 5. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. **(Chuyen ĐHSP Hà Nội -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Dôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. **D.** $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 8. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$; $\overrightarrow{AC}=(3;\ -4;\ 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

A. 29. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Câu 9. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Câu 10. **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Dạng 1.2 Tìm tọa độ điểm

Câu 11. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Câu 12. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ *(theo thứ tự các đỉnh)* là hình bình hành?

A. $D(2;0;0)$. **B.** $D(1;1;1)$. **C.** $D(0;0;1)$. **D.** $D(0;2;1)$.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$ **B.** $D(-4;8;-5)$ **C.** $D(-2;2;5)$ **D.** $D(-4;8;-3)$

Câu 14. **(THPT Nguyễn Khuyến -2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

A. -5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** -2

Câu 15. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa năm đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Câu 16. **(KTNL Gia Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $D(6;6;0)$ **B.** $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ **C.** $D(0;8;8)$ **D.** $D(-4;-2;-6)$

Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC có $A(1;-2;0)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;3;4)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(1;0;-6)$. **B.** $(1;6;2)$. **C.** $(-1;0;6)$. **D.** $(1;6;-2)$.

Câu 18. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là

A. $\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$. **B.** $(4;5;-9)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$. **D.** $(1;-7;12)$.

Câu 19. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$.

C. $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Câu 20. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng Khtn 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;2)$ và $D=(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2;0;2)$. **B.** $(2;2;2)$. **C.** $(2;-2;2)$. **D.** $(0;-2;0)$.

Câu 22. **(Sở Phú Thọ -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị $a-b+c$ bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Câu 23. **(Chuyên Đhsp Hà Nội -2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A,B,C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90°$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

A. $I(1;1;1)$. **B.** $I(0;1;1)$. **C.** $I(0;-1;-1)$. **D.** $I(1;0;1)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM}=2$ **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM}=3$

Câu 27. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

A. $D(-12;-1;3)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $D(8;7;-1)$. **D.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$.

Câu 28. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 30. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Câu 31. **(Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 0)$, $D'(0;\ 3;\ -3)$. Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

A. $(1;\ 1;\ -2)$. **B.** $(2;\ 1;\ -2)$. **C.** $(1;\ 2;\ -1)$. **D.** $(2;\ 1;\ -1)$.

Câu 32. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Câu 33. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;\ 2;0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz), điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C.

A. $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\frac{-3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{-3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 34. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$.

A. $M\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3};1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$. **D.** $M(4;-3;8)$.

Câu 35. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Câu 36. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=8$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=14$.

Câu 37. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;\,2;\,1)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$.

A. $M(0;0;3)$. **B.** $M(0;0;-3)$. **C.** $M(-8;-4;7)$. **D.** $M(8;4;-7)$.

Câu 38. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng

Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 1. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=2$ **B.** $m=-6$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-4$

Câu 2. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** –9.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 4. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 5. Biết $\vec{c}=(x;y;z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$. Khẳng định nào đúng?

A. $5z-x=0$. **B.** $7x-y=0$. **C.** $5z+x=0$. **D.** $7x+y=0$.

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A,B,C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$

A. $\sqrt{19}$. **B.** -5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{39}$.

Câu 8. **(THPT Trần Nhân Tông - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=-6$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=2$.

Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng

Câu 9. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1)$, $\vec{b}=(1;2;1)$, $\vec{c}=(m;3;-1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]$ là

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 11. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m},\vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

A. $\vec{p}=(9;-12;0)$. **B.** $\vec{p}=(45;-60;0)$. **C.** $\vec{p}=(0;9;-12)$. **D.** $\vec{p}=(0;45;-60)$.

Câu 12. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-2;2-a)$; $B(a+3;-1;1)$; $C(-4;-3;0)$; $D(-1;-2;a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7;-2)$. **B.** $(3;6)$.**C.** $(5;8)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 13. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m)$, $B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

A. $m=8$. **B.** $m=4$. **C.** $m=12$. **D.** $m=6$.

Câu 14. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2), \vec{v}=(-1;m;m-2)$. Khi $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$ thì

A. $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{11}{5}$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{11}{3}$

C. $m=1$ hoặc $m=-3$ **D.** $m=-1$

Câu 15. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D\in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D.

A. -6 **B.** 2 **C.** 7 **D.** -4

Câu 16. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$, $D(-2;m;n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng?

A. $2m+n=13$. **B.** $2m-n=13$. **C.** $m+2n=13$. **D.** $2m-3n=10$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{m}=(4\,;3\,;1)$ và $\vec{n}=(0\,;0\,;1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $\left[\vec{m}\,,\vec{n}\right]$ và $\left|\vec{p}\right|=15$. Tọa độ của véc tơ $\vec{p}$ là

A. $(9\,;-12\,;0)$. **B.** $(0\,;9\,;-12)$. **C.** $(-9\,;12\,;0)$. **D.** $(0\,;9\,;-12)$.

Câu 18. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-2;1);B(1;0;-2);C(3;1;-2);D(-2;-2;-1)$. Câu nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. **B.** Tam giác ACD là tam giác vuông tại A.

C. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù. **D.** Tam giác ABD là tam giác cân tại B.

Câu 19. **(THPT Lương Thế Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Câu 20. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $A(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC là

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $\sqrt{11}$.

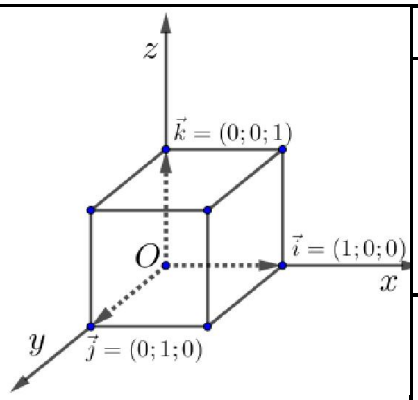
Câu 21. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-2;2-a)$; $B(a+3;-1;1)$; $C(-4;-3;0)$; $D(-1;-2;a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7;-2)$. **B.** $(3;6)$.**C.** $(5;8)$. **D.** $(-2;2)$.

Chuyên đề 28 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6

Lý thuyết chung



1. Hệ trục tọa độ *Oxyz:*

- Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(x;y;z)}$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in R)$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$, $(b_1,\ b_2,\ b_3\neq 0)$.
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Nguyễn Bảo Vương

3. Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)}$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ	Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox}M_1(x_M;0;0)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,y)]{\text{Chiếu vào } Oxy}M_1(x_M;y_M;0)$
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy}M_2(0;y_M;0)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z)]{\text{Chiếu vào } Oyz}M_2(0;y_M;z_M)$
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz}M_3(0;0;z_M)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,z)]{\text{Chiếu vào } Oxz}M_3(x_M;0;z_M)$
Đối xứng điểm qua trục tọa độ	**Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ**
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x;\text{đổi dấu } y,z)]{\text{Đối xứng qua } Ox}M_1(x_M;-y_M;-$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,y;\text{đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy}M_1(x_M;y_M;-z_M)$
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y;\text{đổi dấu } x,z)]{\text{Đối xứng qua } Oy}M_2(-x_M;y_M;-$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,z;\text{đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz}M_2(x_M;-y_M;z_M)$
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z;\text{đổi dấu } x,y)]{\text{Đối xứng qua } Oz}M_3(-x_M;-y_M;$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z;\text{đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz}M_3(-x_M;y_M;z_M)$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).$$

☞ **Tính chất:**	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$\left\|[\vec{a},\vec{b}]\right\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

- Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ với $\vec{0}=(0;0;0)$.
- Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}=0$.
- **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Dạng 1.1 Tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng, đường thẳng

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0;y_0;0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2;-2;0)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2;1;-1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2;0;-1)$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;0;5)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(0;2;5)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có tọa độ là $(1;0;0)$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0;2;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(0;0;1)$. **D.** $(0;2;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;5;2)$. **B.** $(0;5;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3;0;0)$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(8;0;0)$. **C.** $(0;1;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục Ox là $(8;0;0)$.

Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy?

A. $(0;4;2)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(1;0;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy là $(1;4;0)$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $M(3;0;2)$ **B.** $(0;0;2)$ **C.** $Q(0;5;2)$ **D.** $N(3;5;0)$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;5;0)$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy.

A. $Q(1;0;3)$ **B.** $P(1;2;0)$ **C.** $M(0;0;3)$ **D.** $N(0;2;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy là điểm $P(1;2;0)$.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $Q(0;4;1)$. **B.** $P(3;0;1)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $N(3;4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;4;0)$.

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(3;0;-1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 12. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0;0;-1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(2;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 13. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3;-1;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(3;0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;1)$

Câu 14. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là: $(0;0;-1)$.

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$ **B.** $N(0;-1;1)$ **C.** $P(0;-1;0)$ **D.** $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz), ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 16. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $M(3;4;0)$. **B.** $P(-2;0;3)$. **C.** $Q(2;0;0)$. **D.** $N(0;4;-1)$.

Lời giải

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x=0 \Rightarrow N(0;4;-1) \in (Oyz)$.

Câu 17. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M'. Xác định tọa độ M'.

A. $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;5;6)$.

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x;y;z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;y;-z)$.

B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x;y;-z)$.

C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x;y;-z)$.

D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x;2y;0)$.

Lời giải

Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x;-y;z)$. Do đó phương án A sai.

Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(-x;\mathrm{y};-z)$. Do đó phương án B sai.

Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(-x;-\mathrm{y};-\mathrm{z})$. Do đó phương án D sai.

Câu 19. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

A. $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0;2;3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1;2;3)$.

Câu 20. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy.

A. $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy. Suy ra $H(0;-3;0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA'.

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;-3;-5).$$

Dạng 1.2 Xác định tọa độ vectơ, độ dài vec tơ

Câu 21. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (2-1;2-1;1-(-2))$ hay $\overrightarrow{AB} = (1;1;3)$.

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(1;2;3)$ **B.** $(-1;-2;3)$ **C.** $(3;5;1)$ **D.** $(3;4;1)$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(1;2;3)$

Câu 23. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=\sqrt{5}$ **B.** $OA=5$ **C.** $OA=3$ **D.** $OA=9$

Lời giải

Chọn C

$OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Câu 24. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}(1;2;3);\vec{b}(2;2;-1);\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 25. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$, $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(2;2;3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Lời giải

Hai điểm $A(0;1;-1)$, $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(2;2;3)$.

Câu 26. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}-\vec{b}=(2-1;3-1;2+1)=(1;2;3)$.

Câu 27. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a}=(4;-6;6)$, $3\vec{b}=(0;6;-3)$, $-2\vec{c}=(-6;2;-10)$ $\Rightarrow\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=(-2;2;-7)$.

Câu 28. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải

$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1;2;-3)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Lời giải

Có $2\vec{a} = (4;-6;6)$; $3\vec{b} = (0;6;-3)$; $-2\vec{c} = (-6;2;-10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2;2;-7)$.

Câu 30. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x} = (2;1;-3)$ và $\vec{y} = (1;0;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

A. $\vec{a} = (4;1;-1)$. **B.** $\vec{a} = (3;1;-4)$. **C.** $\vec{a} = (0;1;-1)$. **D.** $\vec{a} = (4;1;-5)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{y} = (2;0;-2)$.

$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2+2;1+0;-3-2) = (4;1;-5)$.

Câu 31. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;-1;0)$ và $B(1;1;-3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(3;0;-3)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

$A(2;-1;0)$, $B(1;1;-3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-2;1+1;-3-0) = (-1;2;-3)$.

Câu 32. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;-2;1), B(1;-1;3)$. Tọa độ vecto $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(-1;1;2)$.. **B.** $(-3;3;-4)$.. **C.** $(3;-3;4)$.. **D.** $(1;-1;-2)$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$.

Câu 33. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;1;1)$. **C.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;1;-1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;-1;1)$.

Lời giải

Ta có $\vec{i} = (1;0;0), \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$.

Do đó, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;1;-1)$.

Câu 34. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;3;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ và $\vec{k} = (0;0;1)$.

Do đó, $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(2;3;-1)$.

Câu 35. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Vectơ $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;7;2)$. **B.** $(1;5;2)$. **C.** $(3;7;2)$. **D.** $(1;7;3)$.

Lời giải

Có $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, gọi $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

$$\Rightarrow\begin{cases}c_1=2.1+(-1)=1\\c_2=2.2+3=7\\c_3=2.1+0=2\end{cases}$$

Vậy $\vec{c}=(1;7;2)$

Câu 36. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

A. $\vec{a}(-1;2;-3)$. **B.** $\vec{a}(2;-3;-1)$. **C.** $\vec{a}(-3;2;-1)$. **D.** $\vec{a}(2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{a}(x;y;z)$ nên $\vec{a}(-1;2;-3)$. Do đó Chọn A

Câu 37. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(2;3;-3)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{22}$.

Câu 38. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

A. $2\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

Câu 39. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0),\vec{b}(2;2;0),\vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

A. 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2;6;2)$.

Vậy $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=2\sqrt{11}$.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;3;5)$, $B(2;2;3)$. Độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6}$.

Dạng 1.3 Xác định tọa độ điểm

Câu 41. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;-2;10)$ **B.** $(1;3;2)$ **C.** $(2;6;4)$ **D.** $(2;-1;5)$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB, ta có tọa độ điểm I là $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=2 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-1. \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=5 \end{cases}$

Vậy $I(2;-1;5)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 42. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD=BC$.

A. $D(6;0;0), D(12;0;0)$ **B.** $D(0;0;0)$, $D(6;0;0)$

C. $D(-2;1;0)$, $D(-4;0;0)$ **D.** $D(0;0;0)$, $D(-6;0;0)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x;0;0)\in Ox$

$AD=BC\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+16}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}\right.$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(1;0;4)$. **B.** $I(2;0;8)$. **C.** $I(2;-2;-1)$. **D.** $I(-2;2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$ được tính bởi

$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=1 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=0\Rightarrow I(1;0;4) \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=4 \end{cases}$

Câu 44. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là :

A. $I(-2;2;1)$. **B.** $I(1;0;4)$. **C.** $I(2;0;8)$. **D.** $I(2;-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$.

Trung điểm I có tọa độ: $\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=1 \\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{(-2)+2}{2}=0 \\ \frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3+5}{2}=4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4)$.

Câu 45. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $I(2;-4;2)$. **B.** $I(4;2;6)$. **C.** $I(-2;-1;-3)$. **D.** $I(2;1;3)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=2 \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=1 \\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 46. Trong không gian cho hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Lời giải

Toạ độ trong tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{1-1+0}{3}=0 \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-2+2+0}{3}=0 \\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{3+5+1}{3}=3 \end{cases} \Rightarrow G(0;0;3)$$

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB.

A. $I(2;-4;2)$. **B.** $I(4;2;6)$. **C.** $I(-2;-1;3)$. **D.** $I(2;1;3)$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm I của AB là

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{3-1}{2} = 1 \\ z_I = \dfrac{2+4}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;3).$$

Câu 48. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;3;2)$. **B.** $(2;-1;5)$. **C.** $(2;-1;-5)$. **D.** $(2;6;4)$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5).$

Câu 49. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;3;4), B(2;-1;0), C(3;1;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(2;1;2)$. **B.** $G(6;3;6)$. **C.** $G\left(3;\dfrac{2}{3};3\right)$. **D.** $G(2;-1;2)$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Tọa độ trọng tâm G là

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{3-1+1}{3} = 1 \\ z_G = \dfrac{4+0+2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2;1;2).$$

Câu 50. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0), B(-2;3;0), C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:

A. $(1;2;1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(1;1;-2)$.

Lời giải

Giả sử $G(x,y,z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+(-2)+0}{3} = 1 \\ y = \dfrac{-2+3+2}{3} = 1 \\ z = \dfrac{0+0+3}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1;1;1).$$

Câu 51. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là:

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(0;2;2)$. **C.** $(2;-2;6)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm MN. Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

Vậy $I(1;-1;3)$.

Câu 52. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(5;6)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(1;5)$. **B.** $(4;1)$. **C.** $(5;1)$. **D.** $(8;2)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4+6}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow I(1;5)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 53. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;9)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(0;3;3)$. **B.** $(4;-2;12)$. **C.** $(2;-1;6)$. **D.** $\left(0;\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Ta có $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3+9}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow I(2;-1;6)$.

Câu 54. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;2)$ và $B(3;-3;2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(1;1;2)$ **B.** $M(2;2;4)$ **C.** $M(2;-4;0)$ **D.** $M(4;-8;0)$

Lời giải

Chọn A

Trung điểm M có tọa độ là $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;1;2)$.

Câu 55. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$.

C. $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Giả sử $B(x_B;y_B;z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{-1+x_B}{2} \\ 1 = \dfrac{5+y_B}{2} \\ -2 = \dfrac{3+z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}$$. Vậy $B(5;-3;-7)$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 56. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 57. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho vecto $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây *sai?*

A. $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$ **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ **D.** $\vec{a}\perp\vec{b}$

Lời giải

Chọn B

- Xét đáp án A: $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$ đúng.
- Xét đáp án B: $\vec{a}=2(1;-1;-2)\neq\vec{b}=(1;-1;1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

  Đáp án B sai.

Câu 58. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3)$, $B(-2;-2)$, $C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A=-\dfrac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$.

Khi đó: $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\dfrac{-3.2+5.2}{\sqrt{34}.2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 59. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vậy: $\cos\left(\vec{i},\vec{u}\right)=\dfrac{\vec{i}.\vec{u}}{\left|\vec{i}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{1.\left(-\sqrt{3}\right)+0.0+0.1}{1.\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(\vec{i},\vec{u}\right)=150°$.

Câu 60. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{3}{13}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3.5+4.0+0.12}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}.\sqrt{5^2+0^2+12^2}}=\dfrac{-3}{13}$.

Câu 61. **(Chuyên Đhsp Hà Nội 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $150°$.

Lời giải

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$

$\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{i}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{i}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{i}\right|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\left(\vec{u},\vec{i}\right)=150°$.

Câu 62. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=8$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=6$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=0$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-6$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.2+0.1+1.0=6$.

Câu 63. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. 30^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$, ta có:

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{i}.\vec{u}}{\left|\vec{i}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=150^0$.

Câu 64. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$ $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $-\dfrac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $-\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;5;-2)$; $\overrightarrow{AC}(5;4;-1)$. $cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{5+20+2}{\sqrt{30}.\sqrt{42}}=\dfrac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 65. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1),\overrightarrow{AC}=(1;1;1)\Rightarrow(-1).1+0.1+1.1=0\Rightarrow AB\perp AC$.

Nên diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 66. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$ và $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-15}{\sqrt{(-3)^2+4^2}.\sqrt{5^2+12^2}}=-\dfrac{3}{13}$.

Câu 67. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=(2;-1)$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=(1;3)$.

Do đó, $\vec{u}.\vec{v}=1.2+3.(-1)=-1$.

Câu 68. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho hai véc tơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a}+\vec{b}=(-1;-1;5)\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}=-1.(-2)+(-1).1+5.2=11$.

Câu 69. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=(-4;-2;6)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{b}=-2\vec{a}$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$. **D.** $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy $\vec{b}=-2\vec{a}$. Từ đó suy ra vecto $\vec{a}$ ngược hướng với vecto $\vec{b}$ và $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$.

$\vec{a}.\vec{b}=2.(-4)+1.(-2)+(-3).6=-28\neq 0$.

Do đó đáp án B sai.

Câu 70. **(THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - 2019)** Cho $\vec{u}=(-1;1;0)$, $\vec{v}=(0;-1;0)$, góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

A. $120°$. **B.** $45°$. **C.** $135°$. **D.** $60°$.

Lời giải

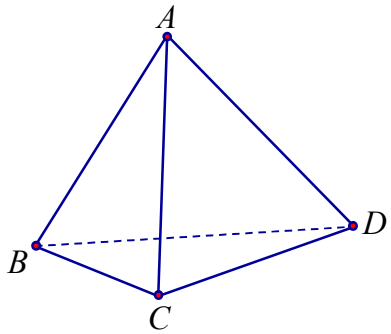
Chọn C

Ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=135°$.

Câu 71. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;3)$, $B(0;0;-1)$, $C(1;0;-1)$, $D(0;1;-1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $AB\perp BD$. **B.** $AB\perp BC$. **C.** $AB\perp AC$. **D.** $AB\perp CD$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;0;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=16\neq 0\Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

Câu 72. **(THPT Thanh Miện I - Hải Dương - 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a}=(2;1;-1)$; $\vec{b}=(1;3;\mathrm{m})$. Tìm m để $(\vec{a};\vec{b})=90°$.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$

Lời giải

$(\vec{a};\vec{b})=90° \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 5-m=0 \Leftrightarrow m=5$.

Câu 73. **(SGD Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(2;-1;1)$ và $\vec{v}=(0;-3;-m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}=1$.

A. $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=1 \Leftrightarrow 3-m=1 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 74. **(CỤM Chuyên Môn 4 - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;3);B(-1;2;1);C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. -6. **B.** -14. **C.** 14. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2);\overrightarrow{AC}=(2;-3;-5) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$

Câu 75. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Côsin của góc BAC bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.

Lời giải

Ta có $\cos\widehat{BAC}=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$ với $\overrightarrow{AB}=(1;5;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5;4;-1)$.

$$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{1.5+5.4+(-2)(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}=\frac{27}{\sqrt{30}\sqrt{42}}=\frac{9}{2\sqrt{35}}$$

Dạng 3. Tích có hướng và ứng dụng

Câu 76. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;-2)$ và vectơ $\vec{b}=(1;0;2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c}=(2;6;-1)$. **B.** $\vec{c}=(4;6;-1)$. **C.** $\vec{c}=(4;-6;-1)$. **D.** $\vec{c}=(2;-6;-1)$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=(2;-6;-1)$

Vậy chọn đáp án **D**

Câu 77. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

A. $(2;3;-1)$. **B.** $(3;5;-2)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(3;-5;-1)$.

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a}=(1;2;-1),\vec{b}=(3;-1;0),\vec{c}=(1;-5;2)$. Câu nào sau đây **đúng?**

A. $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$. **B.** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

C. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. **D.** $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(-1;-3;-7)\neq\vec{0}$. Hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

$\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=-1+15-14=0$. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 79. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;0;3)$, $C(-2;1;3)$ và $D(0;1;1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;3)$; $\overrightarrow{AC}=(-3;3;3)$; $\overrightarrow{AD}=(-1;3;1)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-12;9)$;

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-3).(-1)+(-12).3+9.1=-24$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|-24|=4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=3$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=-4$. **C.** $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=5$. **D.** $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-1;-4;3)$.

Lời giải

Ta có

- $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(1+1)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$ (đúng).
- $\vec{a}.\vec{b}=1.1+(-2).1+3.(-1)=1-2-3=-4$ (đúng).
- $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{0+9+16}=5$ (đúng).
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1;4;3)$ (sai).

Câu 81. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1),B(1;-1;2)$. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

$\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-1;-3;-1)$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+9+1}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 82. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AC}=(-3;1;-2);\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4);\overrightarrow{AD}=(-4;1;0)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-10;4)$.

Thể tích khối tứ diện là: $V=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|14|=\frac{7}{3}$.

Câu 83. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tính diện tích S của tam giác ABC, biết $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$.

A. $S=\frac{\sqrt{61}}{3}$. **B.** $S=\frac{\sqrt{61}}{2}$. **C.** $S=2\sqrt{61}$. **D.** $S=\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB}=(-2;3;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;0;4)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;8;6)$.

Ta có $\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=2S$.

Diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+8^2+6^2}=\sqrt{61}$.

Câu 84. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0;0;0)$, $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O,A,B,C đồng phẳng?

A. $m=14$. **B.** $m=-14$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}=(1;2;1)$, $\overrightarrow{OC}=(4;3;m)$. Bốn điểm O,A,B,C đồng phẳng

$\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=0\Leftrightarrow 5.4-2.3-1.m=0\Leftrightarrow m=14$.

Vậy $m=14$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $A.BCD$ có $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;0)$ và $D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Có $\overrightarrow{BC}=(0;-2;-2), \overrightarrow{BD}=(-1;-1;-1), \overrightarrow{BA}=(-1;0-3); \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(0;2;-2); \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BA}=6$

$$h_A=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 86. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}$. **B.** $\frac{\sqrt{349}}{2}$. **C.** $\sqrt{349}$. **D.** $\sqrt{87}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Vậy: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{(-18)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{349}$.

Câu 87. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$ và điểm $D(2;1;-2)$. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ là

A. $V=\frac{5}{6}$. **B.** $V=\frac{5}{3}$. **C.** $V=\frac{6}{5}$. **D.** $V=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;-3)$ và $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{5}{6}$.

Câu 88. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;-2;3)$. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $\frac{\sqrt{29}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{78}}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Diện tích tam giác OAB được xác định bởi công thức: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|$

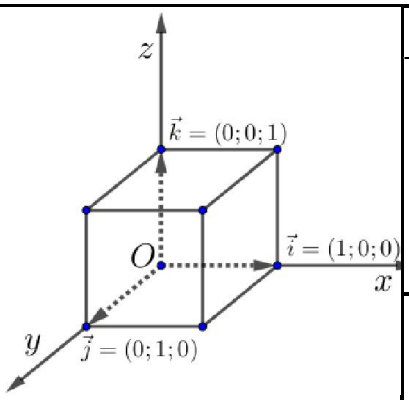
Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;2;-1)$, $\overrightarrow{OB}=(0;-2;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-3;-2)$

Vậy $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Chuyên đề 28 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Lý thuyết chung



1. Hệ trục tọa độ *Oxyz*:

- Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(x;y;z)}$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ \ (k\in R)$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3},\ \ (b_1,\ b_2,\ b_3\neq 0).$
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\cos(\vec{a},\ \vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Nguyễn Bảo Vương

3. Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)}$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox}M_1(x_M;0;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy}M_2(0;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz}M_3(0;0;z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,\ y)]{\text{Chiếu vào } Oxy}M_1(x_M;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z)]{\text{Chiếu vào } Oyz}M_2(0;y_M;z_M)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,\ z)]{\text{Chiếu vào } Oxz}M_3(x_M;0;z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x;\text{ đổi dấu } y,z)]{\text{Đối xứng qua } Ox}M_1(x_M;-y_M;-$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y;\text{ đổi dấu } x,z)]{\text{Đối xứng qua } Oy}M_2(-x_M;y_M;-$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z;\text{ đổi dấu } x,y)]{\text{Đối xứng qua } Oz}M_3(-x_M;-y_M$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,y;\text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy}M_1(x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x,z;\text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz}M_2(x_M;-y_M;z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y,z;\text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz}M_3(-x_M;y_M;z_M)$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1).$$

☞ **Tính chất:** $[\vec{a}, \vec{b}]\perp\vec{a}$; $[\vec{a}, \vec{b}]\perp\vec{b}$; $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

▪ Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ với $\vec{0}=(0;0;0)$.

▪ Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}=0$.

▪ **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

▪ **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

▪ **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.

▪ **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Dạng 1.1 Một số bài toán liên quan đến vectơ, tọa độ vec tơ

Câu 1. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3), B(1;0;2), C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Lời giải

Có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5), \overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;1)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\ y=\frac{8}{5}\end{cases}\Rightarrow x+y=1$.

Câu 2. **(HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3), \vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Lời giải

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\ (k>0)\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\ m-1=3k\\ 3=k(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\ m=7\\ n=-\frac{3}{4}\end{cases}$. Vậy $m=7;n=-\frac{3}{4}$

Câu 3. **(THPT Nguyễn Khuyến -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì A,B,M thẳng hàng.

A. $x=4;y=7$ **B.** $x=-4;y=-7$ **C.** $x=4;y=-7$ **D.** $x=-4;y=7$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2), \overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$

A,B,M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\ y=7\end{cases}$.

Câu 4. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Lời giải

Ta có $M\in(Oxy)\Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1);\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{-1}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-5\end{cases}$.

Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 5. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\vec{u}=(2;-2;1)$

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ và $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$

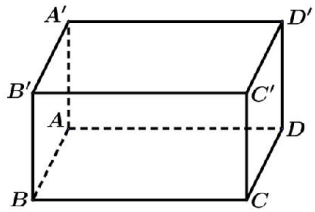
Do đó $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-2\end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6. **(Chuyen ĐHSP Hà Nội -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\dfrac{3}{2}|a|$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$.

Suy ra $AC=|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC'=3|a|$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. **D.** $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Đặt: $\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow(-3;22;5)=m.(2;3;1)+n.(-1;5;2)+p.(4;-1;3)\Rightarrow\begin{cases}2m-n+4p=-3\\3m+5n-p=22\\m+2n+3p=5\end{cases}(I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases}m=2\\n=3\\p=-1\end{cases}$.

Vậy $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

Câu 8. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$; $\overrightarrow{AC}=(3;-4;6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

A. 29. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Lời giải

Ta có

$AB^2=1^2+(-2)^2+2^2=9$, $AC^2=3^2+(-4)^2+6^2=61$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=1.3+(-2)(-4)+2.6=23$.

$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=61+9-2.23=24$.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{9+61}{2}-\frac{24}{4}=29.$$

Vậy $AM=\sqrt{29}$.

Câu 9. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Lời giải

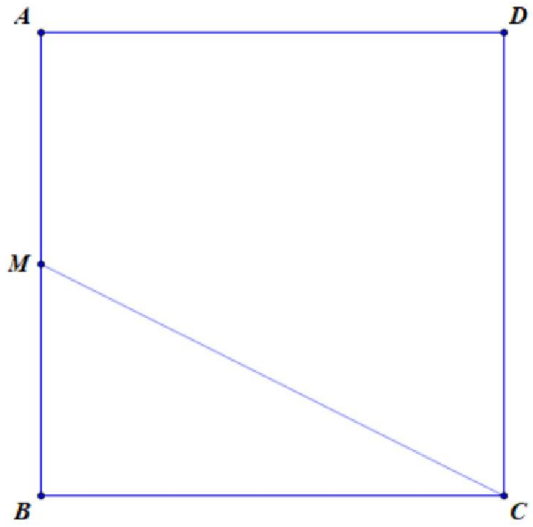
Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\m-1=3k\\3=k(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\m-1=6\\3=2(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\m=7\\n=\frac{-3}{4}\end{cases}.$$

Câu 10. **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Lời giải



$\overrightarrow{BD}=(-8;-4;-8)\Rightarrow BD=12\Rightarrow AB=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow MC=3\sqrt{10}$.

$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|2\overrightarrow{CM}\right|=2CM=6\sqrt{10}$.

Dạng 1.2 Tìm tọa độ điểm

Câu 11. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow(1;3;-7)=(-3-x;1-y;2-z)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-2\\z=9\end{cases}\Leftrightarrow D(-4;-2;9).$$

Câu 12. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0),B(1;1;0),C(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ *(theo thứ tự các đỉnh)* là hình bình hành?

A. $D(2;0;0)$. **B.** $D(1;1;1)$. **C.** $D(0;0;1)$. **D.** $D(0;2;1)$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=(x-1;y;z)$ và $\overrightarrow{BC}=(-1;0;1)$.

Suy ra $x=0;y=0;z=1$.

Vậy $D(0;0;1)$.

Câu 13. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$ **B.** $D(-4;8;-5)$ **C.** $D(-2;2;5)$ **D.** $D(-4;8;-3)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x_D;y_D;z_D)$ cần tìm

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B-x_A=x_C-x_D \\ y_B-y_A=y_C-y_D \\ z_B-z_A=z_C-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1=-3-x_D \\ -1-2=5-y_D \\ 3-(-1)=1-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-4 \\ y_D=8 \\ z_D=-3 \end{cases}.$$

Suy ra: $D(-4;8;-3)$.

Câu 14. **(THPT Nguyễn Khuyến -2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

A. -5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** -2

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} 1=\dfrac{1+2+a}{3} \\ c=\dfrac{-3-4-2}{3} \\ 3=\dfrac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=-2$

Câu 15. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa năm đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x;y;z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE}=(x-7;y-4;z+2); 2\overrightarrow{EB}=(2-2x;4-2y;-6-2z)$

$$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{8}{3} \\ z=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. **(KTNL Gia Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(-3;1;4)$. Điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $D(6;6;0)$ **B.** $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ **C.** $D(0;8;8)$ **D.** $D(-4;-2;-6)$

Lời giải

Chọn D

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-3-x_D\\3=1-y_D\\10=4-z_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-4\\y_D=-2\\z_D=-6\end{cases}$

Vậy $D(-4;-2;-6)$.

Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho tam giác ABC có $A(1;-2;0)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;3;4)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(1;0;-6)$. **B.** $(1;6;2)$. **C.** $(-1;0;6)$. **D.** $(1;6;-2)$.

Lời giải

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_D=x_A+x_C-x_B\\y_D=y_A+y_C-y_B\\z_D=z_A+z_C-z_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=1+0-2\\y_D=-2+3-1\\z_D=0+4+2\end{cases} \Rightarrow D(-1;0;6)$.

Câu 18. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là

A. $\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$. **B.** $(4;5;-9)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$. **D.** $(1;-7;12)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases}3-x=-2(2-x)\\1-y=-2(-3-y)\\-2-z=-2(5-z)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=-\frac{5}{3}\\z=\frac{8}{3}\end{cases}$$

Câu 19. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$.

C. $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x;y-1;z+2)$; $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$.

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y-1=-6\\z+2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-5\\z=7\end{cases}$. Vậy $M(9;-5;7)$.

Câu 20. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), \overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Lời giải

Gọi $B(x;y;z)$

Có $A(1;2;-1)\ \overrightarrow{AB}=(1;3;1)=(x-1;y-2;z+1)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\\z=0\end{cases}\Rightarrow B(2;5;0)$

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng Khtn 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;2)$ và $D=(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2;0;2)$. **B.** $(2;2;2)$. **C.** $(2;-2;2)$. **D.** $(0;-2;0)$.

Lời giải

Gọi tọa độ điểm C là $(x;y;z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC}=(x-1;y+1;z-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$

Suy ra $\begin{cases}x-1=1\\y+1=1\\z-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=2\end{cases}$

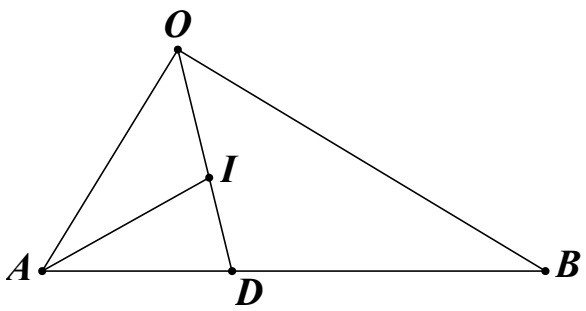
Vậy tọa độ điểm C là $(2;0;2)$.

Câu 22. **(Sở Phú Thọ -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-2)$ và $B\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Giá trị $a-b+c$ bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;2;-2)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, do đó $OA=3$, $OB=4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O, ta có $\overrightarrow{DA}=-\frac{DA}{DB}.\overrightarrow{DB}=-\frac{OA}{OB}.\overrightarrow{DB}$, suy ra

$\overrightarrow{DA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\frac{4.\overrightarrow{OA}+3.\overrightarrow{OB}}{7}$. Do đó $D\left(\frac{12}{7};\frac{12}{7};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{5}{7};-\frac{2}{7};2\right)\Rightarrow AD=\frac{15}{7}$.

$\overrightarrow{ID}=-\frac{AD}{AO}.\overrightarrow{IO}=-\frac{5}{7}\overrightarrow{IO}\Rightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{7}{12}\overrightarrow{OD}\Rightarrow D(1;1;0)$

Do đó $a-b+c=0$.

Câu 23. **(Chuyên Đhsp Hà Nội -2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0),B(0;2;0),C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A,B,C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90°$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA.

Do $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90°$ nên các tam giác $\Delta AMB,\Delta BMC,\Delta CMA$ vuông tại M.

Khi đó $IM=\frac{AB}{2};JM=\frac{BC}{2};KM=\frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB=BC=AC=2\sqrt{2}$.

Vậy $MI=MJ=MK=\sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

A. $I(1;1;1)$. **B.** $I(0;1;1)$. **C.** $I(0;-1;-1)$. **D.** $I(1;0;1)$.

Lời giải

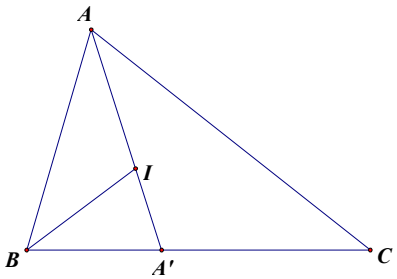
Chọn B

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC, I là tâm đường tròn nột tiếp ΔABC ta có: $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

với $BC=a;\ AC=b;\ AB=c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A.

$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b}\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow b\overrightarrow{BA'} + c\overrightarrow{CA'} = \vec{0}(1)$

$\overrightarrow{IA} = \frac{c}{A'B}\overrightarrow{A'I} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}}\overrightarrow{A'I} = \frac{b+c}{a}\overrightarrow{A'I} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{BA'} + c\overrightarrow{CA'} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ $(do(1))$.

Áp dụng công thức trong tam giác OMN

ta được $OM.\overrightarrow{IN} + ON.\overrightarrow{IM} + MN.\overrightarrow{IO} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{OM.x_N + ON.x_M + MN.x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \dfrac{OM.y_N + ON.y_M + MN.y_O}{OM + ON + MN} = 1. \\ z_I = \dfrac{OM.z_N + ON.z_M + MN.z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

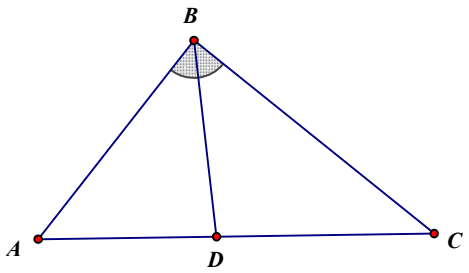
Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x;y;z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ $(*)$.

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x;2-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x;7-y;5-z)$.

Do đó $(*)\Rightarrow\begin{cases}1-x=-\frac{1}{2}(-4-x)\\2-y=-\frac{1}{2}(7-y)\\-1-z=-\frac{1}{2}(5-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=\frac{11}{3}\\z=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)\Rightarrow a+b+2c=5$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM}=2$ **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM}=3$

Lời giải

Chọn A

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\ \ (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

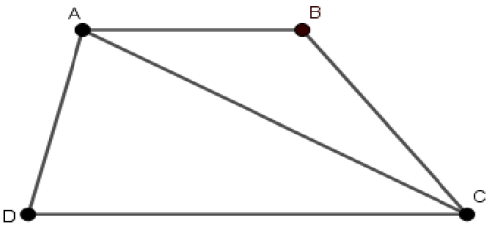
$\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)$;$\overrightarrow{AM}=(-7;-3;-1)\Rightarrow BM=2AB.$

Câu 27. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

A. $D(-12;-1;3)$. **B.** $\begin{bmatrix}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{bmatrix}$. **C.** $D(8;7;-1)$. **D.** $\begin{bmatrix}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC)\Leftrightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\frac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC}\Leftrightarrow 3BC=AD+BC\Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}\ \ (1)$.

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+2=-10\\y_D-3=-4\\z_D-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-12\\y_D=-1\\z_D=3\end{cases}$.

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Câu 28. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$; $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC)=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.3.(AD+3\sqrt{2})=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\frac{1}{3}BC$.

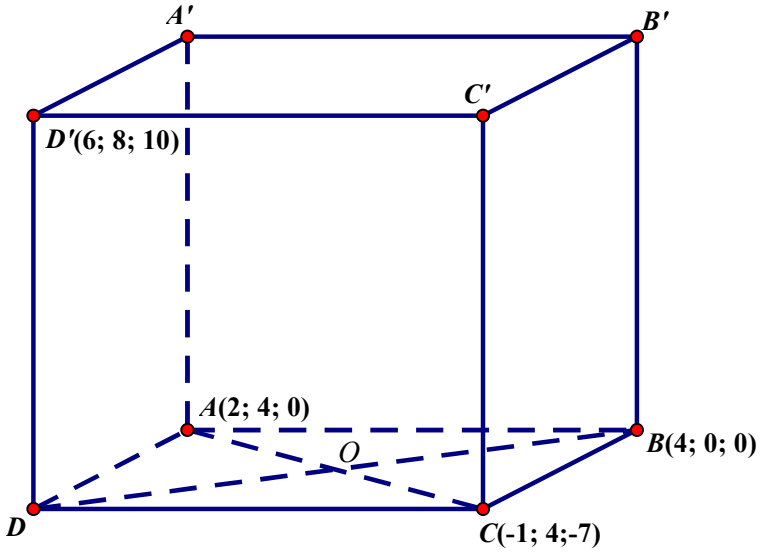
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có $\begin{cases}a-1=\frac{4}{3}\\ b-2=\frac{1}{3}\\ c-1=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{7}{3}\\ b=\frac{7}{3}\\ c=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Lời giải



Giả sử $D(a;b;c)$, $B'(a';b';c')$

Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow O\left(\frac{1}{2};4;\frac{-7}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=8\\ c=-7\end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{DD'}=(9;0;17)$, $\overrightarrow{BB'}=(a'-4;b';c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}\Rightarrow\begin{cases}a'=13\\b'=0\\c'=17\end{cases}$. Vậy $B'(13;0;17)$.

Câu 30. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$.

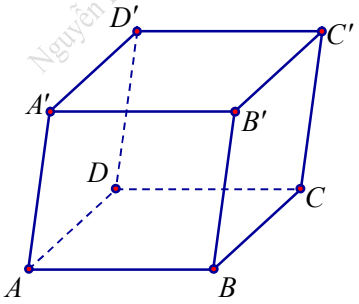
Do đó: $\overrightarrow{AA'}=(2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

Câu 31. **(Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

A. $(1;1;-2)$. **B.** $(2;1;-2)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(2;1;-1)$.

Lời giải



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0;0)$. Gọi $C(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(x;y-3;z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(x;y;z)=(3;3;0)\Rightarrow C(3;3;0)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;3;0)$. Gọi $A'(x';y';z')\Rightarrow\overrightarrow{A'D'}=(-x';3-y';-3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}\Rightarrow(x';y';z')=(0;0;-3)\Rightarrow A'(0;0;-3)$

Gọi $B'(x_0;y_0;z_0)\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=(x_0;y_0;z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow(x_0;y_0;z_0)=(3;0;-3)\Rightarrow B'(3;0;-3)$

G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{0+3+3}{3}=2\\y_G=\dfrac{0+0+3}{3}=1\\z_G=\dfrac{-3-3+0}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow G(2;1;-2)$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD'.Ta có $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

Ta có: $\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IG}$ với $\begin{cases}\overrightarrow{DI}=\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)\\ \overrightarrow{IG}=\left(a-\frac{3}{2};b-\frac{3}{2};c+\frac{3}{2}\right)\end{cases}$. Do đó: $\begin{cases}\frac{3}{2}=3\left(a-\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{3}{2}=3\left(b-\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{3}{2}=3\left(c+\frac{3}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$.

Vậy $G(2;1;-2)$.

Câu 32. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{26};\overrightarrow{BC}=(-6;8;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra : $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 33. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $B(-2;2;0)$ và $C(4;1;-1)$. Trên mặt phẳng (Oxz), điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A, B, C.

A. $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\frac{-3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{4};0;\frac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{-3}{4};0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có: $A(2;2;2)$ và $PA=PB=PC=\frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Câu 34. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$.

A. $M\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3};1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};3\right)$. **D.** $M(4;-3;8)$.

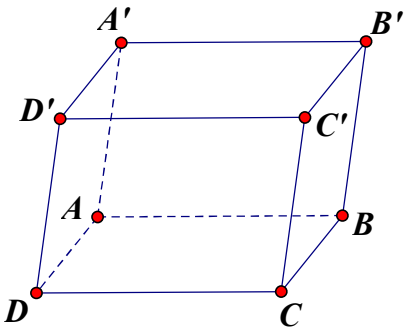
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{x_A-3x_B}{1-3}=4\\ y_M=\frac{y_A-3y_B}{1-3}=-3\\ z_M=\frac{z_A-3z_B}{1-3}=8\end{cases}\Rightarrow M(4;-3;8)$.

Câu 35. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Lời giải



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=(10;4;4)\Rightarrow\begin{cases}x=10+3\\y=4-0\\z=4-0\end{cases}\Rightarrow C'(13;4;4)$.

Câu 36. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=8$. **B.** $T=2$. **C.** $T=6$. **D.** $T=14$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;2;-2)$, $\overrightarrow{OB}=(2;2;-4)$. (OAB) có phương trình: $x+y+z=0$

$I\in(OAB)\Rightarrow a+b+c=0$.

$\overrightarrow{AI}=(a;b-2;c+2)$, $\overrightarrow{BI}=(a-2;b-2;c+4)$, $\overrightarrow{OI}=(a;b;c)$.

Ta có hệ $\begin{cases}AI=BI\\AI=OI\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(c+2)^2=(a-2)^2+(c+4)^2\\(b-2)^2+(c+2)^2=b^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\\a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\\c=-2\end{cases}$.

Vậy $I(2;0;-2)\Rightarrow T=a^2+b^2+c^2=8$

Câu 37. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;\ 2;\ 1)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$.

A. $M(0;0;3)$. **B.** $M(0;0;-3)$. **C.** $M(-8;-4;7)$. **D.** $M(8;4;-7)$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x;y;z)$. Khi đó: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=2(-2-x)\\y-2=2(-1-y)\\z-1=2(4-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=3\end{cases}$.

Vậy $M(0;0;3)$.

Câu 38. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC) \Leftrightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\frac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC=AD+BC \Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x_D+2=-10\\y_D-3=-4\\z_D-1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-12\\y_D=-1\\z_D=3\end{cases}$.

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng

Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 1. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=2$ **B.** $m=-6$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2);\overrightarrow{NP}(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow -6-2(m-2)+2=0 \Leftrightarrow m-2=-2 \Leftrightarrow m=0$.

Câu 2. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** –9.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)\\\overrightarrow{BC}=(-7;-5;-1)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC.

$\Rightarrow I\left(1;-\frac{1}{2};3\right)$. Vậy $a+2b+c=3$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Lời giải

$+\ (\vec{u},\vec{v})=45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)}=1-2m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-2m\ge 0\\ 3m^2+3=1-4m+4m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\ m^2-4m-2=0\end{cases} \Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}.$

Câu 4. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a};\ \vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{3m-9}{\sqrt{38}.\sqrt{2m^2+6m+10}}$.

Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a};\ \vec{b})<0 \Leftrightarrow 3m-9<0 \Leftrightarrow m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;\ 2\}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Biết $\vec{c}=(x;y;z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$. Khẳng định nào đúng?

A. $5z-x=0$. **B.** $7x-y=0$. **C.** $5z+x=0$. **D.** $7x+y=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\vec{c}=(x;y;z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(-1;2;3)$ nên

$\begin{cases}\vec{c}\,.\,\vec{a}=0\\ \vec{c}\,.\,\vec{b}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1x+3y+4z=0\\ -1x+2y+3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1x+3y+4z=0\\ 5y+7z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1x+3y+4.\dfrac{-5}{7}y=0\\ z=\dfrac{-5}{7}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y=0\\ 5y+7z=0\end{cases}$

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A,B,C và $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có: $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0\\ \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2)+y(y-2)+z^2=0\\ x^2+y(y-2)+z(z-2)=0\\ x(x-2)+y^2+z(z-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y=0\\ x^2+y^2+z^2-2y-2z=0\\ x^2+y^2+z^2-2x-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y=0\\ x=z\\ y=z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-4x=0\\ x=y=z\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}M(0;0;0)\\ M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)\end{array}\right.$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$

A. $\sqrt{19}$. **B.** -5. **C.** 7. **D.** $\sqrt{39}$.

Lời giải

Ta có : $\left(|\vec{u}+\vec{v}|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u};\vec{v})+|\vec{v}|^2$

$=2^2+2.2.5.\left(-\frac{1}{2}\right)+5^2=19$.

Suy ra $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{19}$.

Câu 8. **(THPT Trần Nhân Tông - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=-6$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có

$\overrightarrow{NM}=(3;2;-2)$, $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=0$

$\Leftrightarrow 3.2+2.(m-2)-2.1=0 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=0$.

Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng

Câu 9. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AC}=(-3;1;-2);\overrightarrow{AB}=(-1;-1;-4);\overrightarrow{AD}=(-4;1;0)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-10;4)$.

Thể tích khối tứ diện là: $V=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|14|=\frac{7}{3}$.

Câu 10. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(-5;3;-1)$, $\vec{b}=(1;2;1)$, $\vec{c}=(m;3;-1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]$ là

A. $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

$[\vec{b},\vec{c}]=(-5;m+1;3-2m)$

Ta có: $\vec{a}=[\vec{b},\vec{c}]\Leftrightarrow\begin{cases}m+1=3\\3-2m=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 11. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m},\vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

A. $\vec{p}=(9;-12;0)$. **B.** $\vec{p}=(45;-60;0)$. **C.** $\vec{p}=(0;9;-12)$. **D.** $\vec{p}=(0;45;-60)$.

Lời giải

Ta có : $[\vec{m};\vec{n}]=(3;-4;0)$

Do $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m};\vec{n}]$ nên $\vec{p}=k[\vec{m};\vec{n}]$, $k>0$

Mặt khác: $|\vec{p}|=15\Leftrightarrow k.\left|[\vec{m},\vec{n}]\right|=15\Leftrightarrow k.5=15\Leftrightarrow k=3$. Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

Câu 12. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-2;2-a)$; $B(a+3;-1;1)$; $C(-4;-3;0)$; $D(-1;-2;a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7;-2)$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(a+3;1;a-1)$, $\overrightarrow{AC}(-4;-1;a-2)$, $\overrightarrow{AD}(-1;0;2a-3)$.

$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(2a-3;-a^2-5a+10;-a+1)$.

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow -2a+3+(2a-3).(-a+1)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a=0\\a=\dfrac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

Câu 13. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m)$, $B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

A. $m=8$. **B.** $m=4$. **C.** $m=12$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA}=(3;-2;m-3)$, $\overrightarrow{DB}=(2;0;-3)$, $\overrightarrow{DC}=(0;4;-3)$.

Thể tích tứ diện: $V=\dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}].\overrightarrow{DA}\right|\Leftrightarrow 8=\dfrac{1}{6}\left|24+8(m-3)\right|\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-6\\m=6\end{bmatrix}$.

Vì m dương nên $m=6$. Do đó chọn **D.**

Câu 14. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;1;2), \vec{v}=(-1;m;m-2)$. Khi $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}$ thì

A. $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{11}{5}$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{11}{3}$

C. $m=1$ hoặc $m=-3$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn C

$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-m-2;-m;m+1)\Rightarrow\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{(m+2)^2+m^2+(m+1)^2}=\sqrt{3m^2+6m+5}$

$\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\sqrt{14}\Leftrightarrow 3m^2+6m+5=14\Leftrightarrow 3m^2+6m-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Câu 15. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D\in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D.

A. -6 **B.** 2 **C.** 7 **D.** -4

Lời giải

Chọn A.

Do $D\in Oy\Rightarrow D(0;y;0)$, khi đó: $\overrightarrow{DA}=(2;-1-y;1)$, $\overrightarrow{DB}=(3;-y;-1)$, $\overrightarrow{DC}=(2;-1-y;3)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]=(1+2y;5;y+3)$

Và $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}\right|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y+6=30\\2y+6=-30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=12\\y=-18\end{array}\right.$.

Vậy $y_1+y_2=12-18=-6$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$, $D(-2;m;n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng?

A. $2m+n=13$. **B.** $2m-n=13$. **C.** $m+2n=13$. **D.** $2m-3n=10$.

Lời giải

Ta tính

$\overrightarrow{AB}=(0;2;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;1;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-3;m+2;n)$; $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(5;1;2)$

Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow m+2n=13$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{m}=(4\,;3\,;1)$ và $\vec{n}=(0\,;0\,;1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $\left[\vec{m}\,,\vec{n}\right]$ và $\left|\vec{p}\right|=15$. Tọa độ của véc tơ $\vec{p}$ là

A. $(9\,;-12\,;0)$. **B.** $(0\,;9\,;-12)$. **C.** $(-9\,;12\,;0)$. **D.** $(0\,;9\,;-12)$.

Lời giải

Ta có: $\left[\vec{m}\,,\vec{n}\right]=(3\,;-4\,;0)$.

Vì $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $\left[\vec{m}\,,\vec{n}\right]$ nên $\vec{p}=k.\left[\vec{m}\,,\vec{n}\right]=(3k\,;-4k\,;0),\ k>0$.

Ta có: $\left|\vec{p}\right|=15\Leftrightarrow\sqrt{9k^2+16k^2}=15\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-3\\k=3\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện $k>0 \Rightarrow k=3 \Rightarrow \vec{p}=(9\,;-12\,;0)$.

Câu 18. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-2;1); B(1;0;-2); C(3;1;-2); D(-2;-2;-1)$. Câu nào sau đây **sai**?

A. Bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. **B.** Tam giác ACD là tam giác vuông tại A.

C. Góc giữa hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù. **D.** Tam giác ABD là tam giác cân tại B.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;2;-3)$; $\overrightarrow{CD}=(-5;-3;1)$

$\overrightarrow{AC}=(3;3;-3)$; $\overrightarrow{BD}=(-3;-2;1)$

$\overrightarrow{AD}=(-2;0;-2)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-6;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-2).3+0.6+(-2)(-3)=0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

Lại có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3.(-2)+3.0+(-3).(-2)=0 \Rightarrow AC \perp AD$.

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A. Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1.(-5)+2.(-3)+(-3).1=-14<0 \Rightarrow cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)<0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là góc tù.

Vậy đáp án C đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{14}$ *hay* $AB=BD \Rightarrow$ tam giác ABD là tam giác cân tại B. Vậy đáp án D đúng.

Câu 19. **(THPT Lương Thế Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Lời giải

Ta có $AD//BC \Rightarrow AD$ nhận $\overrightarrow{CB}=(5;2;-1)$ là một VTCP.

Kết hợp với AD qua $A(-2;3;1) \Rightarrow AD:\begin{cases} x=-2+5t \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \Rightarrow D(5t-2;2t+3;1-t)$.

Biến đổi $S_{ABCD}=3S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ACD}=2S_{ABC}$ (1)

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(4;-2;-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;-4;0) \\ \overrightarrow{AD}=(5t;2t;-t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-4;1;-18) \\ \left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=(4t;-t;18t) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+1^2+(-18)^2}=\dfrac{\sqrt{341}}{2} \\ S_{ACD}=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=\dfrac{1}{2}\sqrt{(4t)^2+(-t)^2+(18t)^2}=\dfrac{|t|\sqrt{341}}{2} \end{cases}$

Kết hợp với (1) ta được $\frac{|t|\sqrt{341}}{2}=\sqrt{341}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow D(8;7;-1)\\t=-2\Rightarrow D(-12;-1;3)\end{array}\right.$

Với $D(8;7;-1)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(10;4;-2)=2\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{BC}$.

Với $D(-12;-1;3)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(-10;-4;2)=-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BC}$.

Hình thang $ABCD$ có đáy AD thì $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{BC}$ với $k>0$.

Do đó chỉ có $D(-12;-1;3)$ thỏa mãn.

Câu 20. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $A(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC là

A. $\frac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi DH là độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC.

Công thức tính thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Công thức tính diện tích tam giác $S_{\Delta ABC}$ là: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Mặt khác $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot DH$ nên

$$\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|\cdot DH\Rightarrow DH=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}.$$

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(3;0;3);\overrightarrow{AC}=(1;1;-2);\overrightarrow{AD}=(4;1;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;9;3);\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-3.$

Nên $DH=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{3}{\sqrt{(-3)^2+9^2+3^2}}=\frac{\sqrt{11}}{11}$.

Câu 21. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-2;2-a)$; $B(a+3;-1;1)$; $C(-4;-3;0)$; $D(-1;-2;a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7;-2)$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(a+3;1;a-1)$, $\overrightarrow{AC}(-4;-1;a-2)$, $\overrightarrow{AD}(-1;0;2a-3)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2a-3;-a^2-5a+10;-a+1)$.

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow -2a+3+\left(2a-3\right).\left(-a+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định tâm và bán kính

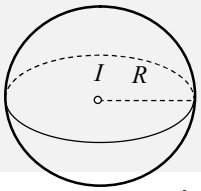
• *Mặt cầu tâm* $I(a;b;c)$ *và có bán kính* R *có phương trình* $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

• *Phương trình* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *với* $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

• *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:*

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 *phải bằng nhau và* $a^2+b^2+c^2-d>0$.



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-2)^2+z^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) là:

A. 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 7. **(Mã 101- 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-4;6)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(-2;4;-6)$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. **B.** $(2;-4;-6)$. **C.** $(-2;4;6)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

Nguyễn Bảo Vương

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;3)$. **B.** $(-2;-4;6)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(2;4;-6)$.

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$ **B.** $R=64$ **C.** $R=8$ **D.** $R=4$

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ có bán kính bằng

A. 9 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 13. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=6$ **B.** $R=3$ **C.** $R=18$ **D.** $R=9$

Câu 14. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(3;-1;1)$ **B.** $(-3;-1;1)$ **C.** $(-3;1;-1)$ **D.** $(3;1;-1)$

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$.

A. $I(-1;2;-4), R=2\sqrt{5}$ **B.** $I(1;-2;4), R=20$

C. $I(1;-2;4), R=2\sqrt{5}$ **D.** $I(-1;2;-4), R=5\sqrt{2}$

Câu 16. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 9.

Câu 17. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 18. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 3.

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2y-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 3. **C.** 9. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 20. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).

A. $I(-4;1;0), R=2.$ **B.** $I(-4;1;0), R=4.$

C. $I(4;-1;0), R=2.$ **D.** $I(4;-1;0), R=4.$

Câu 21. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=\sqrt{3}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=9$. **D.** $R=3\sqrt{3}$.

Câu 22. Trong không gian vơi hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S):

A. $I(-4;1;0), R=2$. **B.** $I(-4;1;0), R=4$. **C.** $I(4;-1;0), R=2$. **D.** $I(4;-1;0), R=4$.

Câu 23. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

A. $I(-3;1;-1)$. **B.** $I(3;1;-1)$. **C.** $I(-3;-1;1)$. **D.** $I(3;-1;1)$.

Câu 24. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

A. $(-1;2;1)$. **B.** $(2;-4;-2)$. **C.** $(1;-2;-1)$. **D.** $(-2;4;2)$.

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+1=0$ có tâm là

A. $(-4;2;-6)$ **B.** $(2;-1;3)$ **C.** $(-2;1;-3)$ **D.** $(4;-2;6)$

Câu 27. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;2;-3)$; $R=2$. **B.** $I(-1;2;-3)$; $R=4$.

C. $I(1;-2;3)$; $R=2$. **D.** $I(1;-2;3)$; $R=4$.

Câu 28. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$.Tính bán kính R của (S).

A. 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(3;1;-1)$.

Ngô Tiến Bảo Vương

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

① ***Dạng 1.*** *Cơ bản* $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I(a;b;c)\\ \bullet\ BK:R\end{cases}\Rightarrow (S):\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}.$

② ***Dạng 2.*** *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có tâm* I *và đi qua điểm* A.

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IA\end{cases}$ ***(dạng 1)***

③ ***Dạng 3.*** *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có đường kính* AB, *với* A, B *cho trước.*

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=\dfrac{1}{2}AB\end{cases}$ *là trung điểm của* AB.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<6$ **B.** $m\geq 6$ **C.** $m\leq 6$ **D.** $m>6$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$ **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$ **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$

Câu 4. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Câu 5. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=18$. **B.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 6. **(Chuyên Sơn La -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=2$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=2$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=8$.

Câu 7. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36.$ **B.** $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9.$

C. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9.$ **D.** $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=36.$

Câu 8. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là :

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$ **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$

Câu 10. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0.$ **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0.$

C. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0.$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0.$

Câu 11. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36.$ **B.** $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9.$

C. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6.$ **D.** $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9.$

Câu 12. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R=2$ là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2^2.$ **B.** $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0.$

C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+5=0.$ **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2.$

Câu 13. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8.$ **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8.$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64.$ **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64.$

Câu 14. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3.$ **B.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9.$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45.$ **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3.$

Câu 15. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29.$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5.$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25.$ **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5.$

Câu 16. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.
B. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.
D. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

Câu 17. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 1819)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(7;-2;2)$ và $B(1;2;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB?

A. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=14$.
B. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=2\sqrt{14}$.
C. $(x-7)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=14$.
D. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=56$.

Câu 18. **(Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.
B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

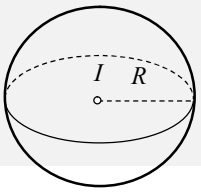
Dạng 1. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

- *Mặt cầu tâm* $I(a;b;c)$ *và có bán kính* R *có phương trình* $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
- *Phương trình* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *với* $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

- *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:*

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 *phải bằng nhau và* $a^2+b^2+c^2-d>0$.



Câu 1. **(Sở Phú Thọ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu.

A. $1<m<2$. **B.** $m<1$ hoặc $m>2$. **C.** $-2\le m\le 1$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{2;-10\}$. **C.** $\{-1;11\}$. **D.** $\{1;-11\}$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

A. $R=2$. **B.** $R=\sqrt{3}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l=2\sqrt{13}$. **B.** $l=2\sqrt{41}$. **C.** $l=2\sqrt{26}$. **D.** $l=2\sqrt{11}$.

Câu 7. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội -2019)** Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=\sqrt{6}$.

Câu 9. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<-5$ hoặc $m>1$. **B.** $-5<m<1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m>1$.

Câu 11. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Câu 12. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu là

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(0;0;-2)$. **D.** $(0;0;0)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Câu 14. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π. **B.** 4π. **C.** 20π. **D.** 36π.

Câu 15. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. **(Sở Kon Tum 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

A. 116π. **B.** $\frac{29\pi}{4}$. **C.** 29π. **D.** 16π.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $R=\sqrt{41}$. **B.** $R=\sqrt{15}$. **C.** $R=\sqrt{13}$. **D.** $R=\sqrt{26}$.

Câu 18. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó a, b, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM=3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{71}{3}$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{70}{3}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{74}{3}$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{76}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Câu 21. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

① ***Dạng 1. Cơ bản*** $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I(a;b;c)\\ \bullet\ BK:R\end{cases}\Rightarrow (S):\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

② ***Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và đi qua điểm*** A.

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IA\end{cases}$ ***(dạng 1)***

③ ***Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có đường kính*** AB, ***với*** A, B ***cho trước.***

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=\frac{1}{2}AB\end{cases}$ *là trung điểm của* AB.

④ ***Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.***

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IM\end{cases}$ *với M là hình chiếu của* I *lên trục hoặc mp tọa*

⑤ ***Dạng 5. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với mặt phẳng*** (P).

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=d[I;(P)]\end{cases}$

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P):ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

⑥ ***Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua bốn điểm*** A, B, C, D.

Phương pháp: Gọi $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì A, B, C, $D\in(S)$ *nên tìm được 4 phương trình* $\Rightarrow a$, b, c, $d\Rightarrow(S)$.

⑦ ***Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua 3 điểm*** A, B, C ***và tâm thuộc mp*** (P).

Phương pháp: Gọi $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì A, B, $C\in(S)$ *nên tìm được 3 phương trình và* $I(a;b;c)\in(P)$ *là phương trình thứ tư.*

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a$, b, c, $d\Rightarrow(S)$.

⑧ ***Dạng 8. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và cắt mặt phẳng*** (P) ***theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính*** r. ***(dạng này mình sẽ đưa vào bài phương trình mặt phẳng, các bạn học cũng có thể tự tìm để hiểu hơn)***

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $\boxed{R^2=d^2_{[I;(P)]}+r^2}$ *và cần nhớ* $C=2\pi r$ *và* $S_{\text{đt}}=\pi r^2$.

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$ **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$ **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$

Câu 2. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 3. **(Sgd Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ là

A. $m=5$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Câu 5. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A,B có phương trình.

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$.
B. $x^2+y^2+z^2+8x+2=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$
B. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$
C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$
D. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

Câu 8. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.
C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.
D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $A(2;\ 4;\ 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$.
B. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$.
D. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Câu 10. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.
B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Câu 11. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$.
B. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.
C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$.
D. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$.

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.
B. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.
C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$.
D. $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Câu 13. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$.
B. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.
C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$.
D. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Câu 14. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$.
B. $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.
C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$.
D. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Câu 15. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$.
B. $x^2+y^2+z^2=1$.
C. $x^2+y^2+z^2=9$.
D. $x^2+y^2+z^2=25$.

Câu 16. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$.
B. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.
C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$.
D. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến (tiếp xúc) mặt cầu

Câu 1. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 2. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Câu 3. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S):x^2+y^2+(z+1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Câu 4. **(THPT Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** (2).

Câu 5. **(THPT Chuyên Hạ Long - 2018)** Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2,3,3,2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

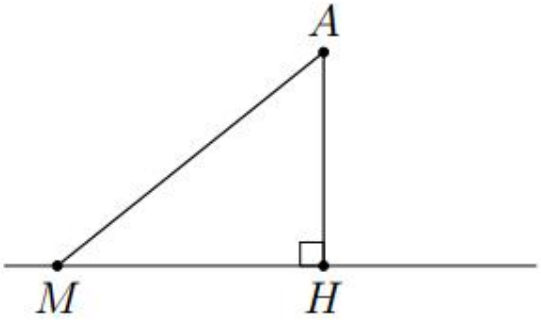
A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{7}{15}$. **D.** $\dfrac{6}{11}$.

Dạng 2. Bài toán cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \ge AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, ...A_n$ ta luôn có

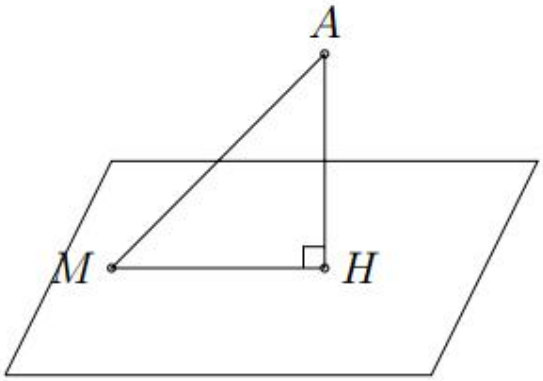
$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

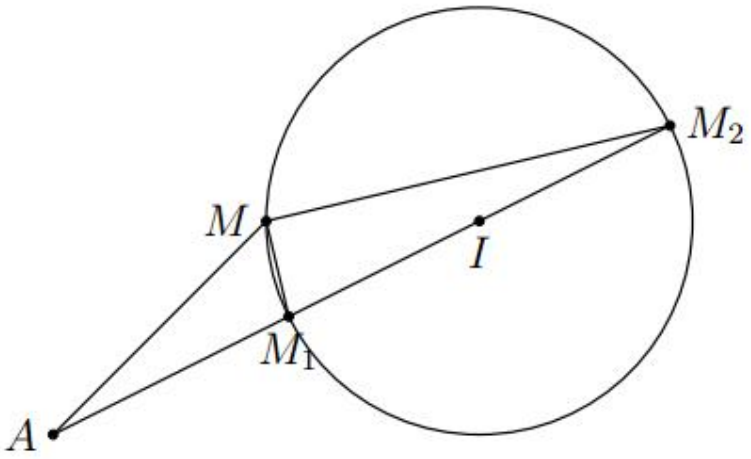
Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM



Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM Vuông tại . M ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

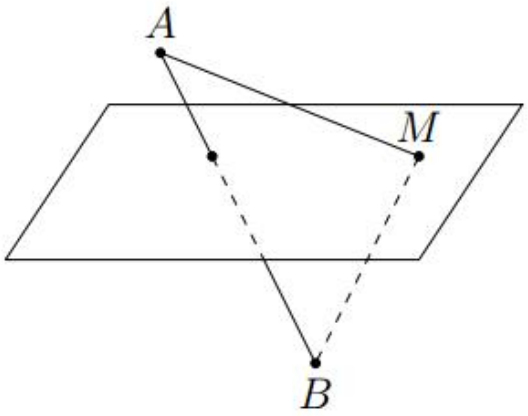
$AM+BM \geq AB$

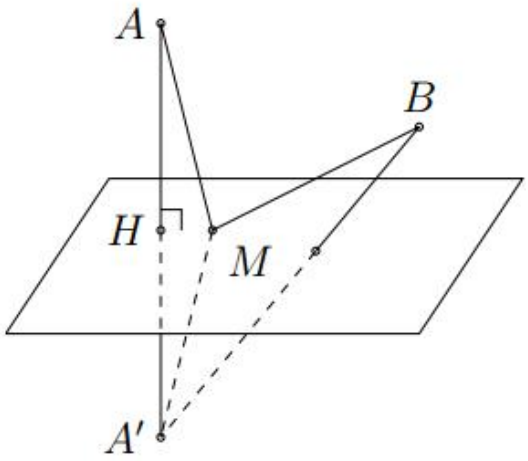
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó

$AM+BM=A'M+BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).





2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM-BM| \leq AB$

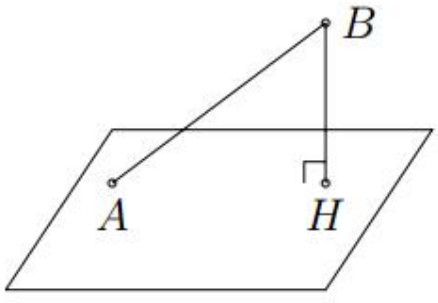
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM-BM|=|A'M-BM| \leq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh mặt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$d(B,(P))=BH \leq BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm $A, B,$ C. Viết phương trình mặt phẳng

(P) đi qua C và $T=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB\parallel (P)$ thì

$P=(\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P))\le(\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $I\vec{B}=\dfrac{\alpha}{\beta}I\vec{D}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta\cdot\frac{IB}{ID}\cdot \mathrm{d}(D,(P))=2\alpha \mathrm{d}(E,(P))\le 2(\alpha+\beta)EC$$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và $(P), B'$ là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i(i=\overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

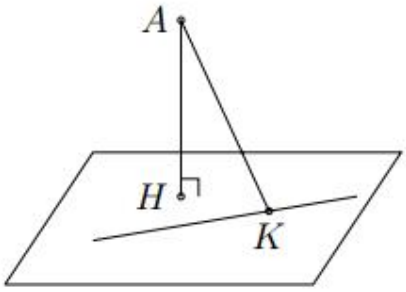
$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\left(A_i,(P)\right)=n\mathrm{d}(G,(P))\le nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi dó

$P=m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right)+k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$\mathrm{d}(A,(P))=AH\le AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bài toán 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Xét véc tơ

$\vec{w}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2M\overrightarrow{A_2}+\cdots+\alpha_nM\overrightarrow{A_n}$

Trong đó $\alpha_1;\alpha_2\ldots\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1G\vec{A_1}+\alpha_2G\vec{A_2}+\cdots+\alpha_nG\vec{A_n}=\vec{0}$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$\vec{w} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\vec{MG} + \alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$

Do đó

$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy $z,$ cho các diểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:

$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc măt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.

2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$MA_k^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \vec{GA_k}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{GA_k} + GA_k^2$

Do đó

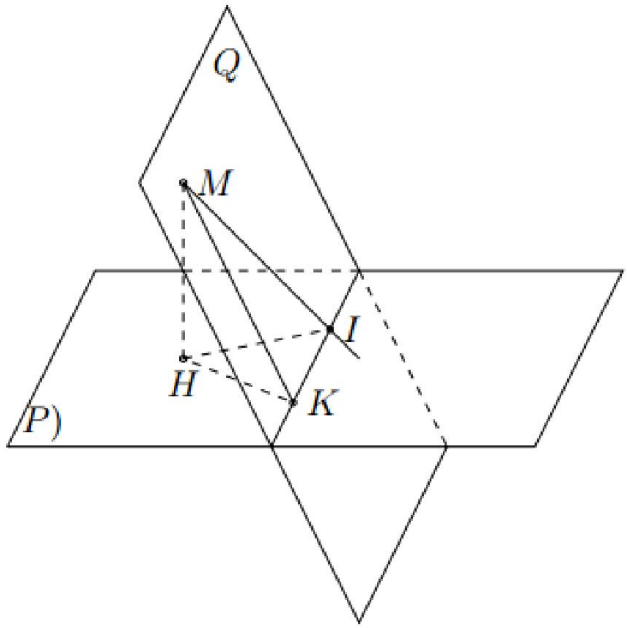
$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$

Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan\phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $\left(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

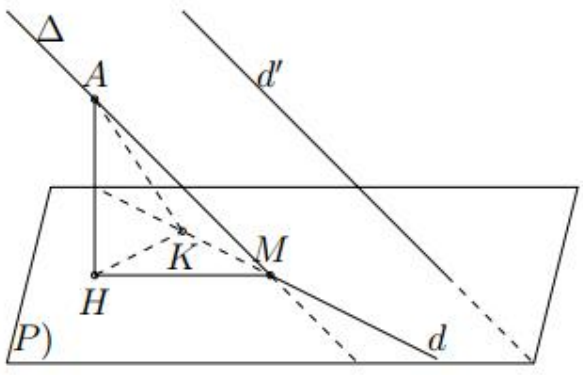
Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đai số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n}_P\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{n}_P\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi=\widehat{AMH}$ và $\cos\phi=\frac{HM}{AM}\geq\frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của măt phẳng (P). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{u}_{d'}\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Câu 6. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là cá số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng

A. -25 **B.** -13 **C.** 0 **D.** 26

Câu 7. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ là

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3), C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2-2MB^2-MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(3;-4;0)$.

Câu 10. **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

A. $M(2;3;1)$. **B.** $M(0;3;1)$. **C.** $M(0;-3;1)$. **D.** $M(0;1;2)$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Câu 14. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 15. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90°$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** Không tồn tại.

Câu 17. **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M,m. Khi đó, $M-m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 18. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 20. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 21. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox,Oy lần lượt lấy hai điểm A,B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 22. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\frac{51}{7}$.

Câu 23. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

A. 5 **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 24. **(HSG Nam Định-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P=a-2b+4c$.

A. $P=23$. **B.** $P=31$. **C.** $P=11$. **D.** $P=13$.

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 26. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là:

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

A. P = 0. **B.** P = 6. **C.** P = $\sqrt{14}$. **D.** P = $3\sqrt{14}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 là

A. 12. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 24.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3),C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng:

A. 9. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 7. **D.** $\frac{16}{3}$.

Câu 34. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 35. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(2;3;0)$. **B.** $M(1;3;0)$. **C.** $M(2;-3;0)$. **D.** $M(2;3;1)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$. **B.** $3\sqrt{79}$. **C.** $5\sqrt{79}$. **D.** $3\sqrt{82}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2):x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+4BC$ là

A. $2\sqrt{265}$. **B.** $\sqrt{265}$. **C.** $3\sqrt{265}$. **D.** $4\sqrt{265}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$.Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4), B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $\left|AM-BN\right|$.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{17}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định tâm và bán kính

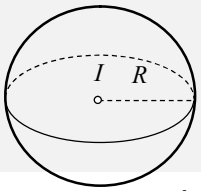
• *Mặt cầu tâm* $I(a;b;c)$ *và có bán kính* R *có phương trình* $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

• *Phương trình* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *với* $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

• *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:*

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 *phải bằng nhau và* $a^2+b^2+c^2-d>0$.



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm là $I(a;b;c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ có tâm là $I(1;-2;3)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$. **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2;-4;1)$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-2)^2+z^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của (S) là $R=\sqrt{9}=3$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=9$. Bán kính của (S) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của (S) là:

A. 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=16 \Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{16}=4$

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Bán kính của mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$ là $R=\sqrt{16}=4$.

Câu 7. **(Mã 101- 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-4;6)$. **C.** $(1;-2;3)$. **D.** $(-2;4;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là $(-1;2;-3)$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;2;3)$. **B.** $(2;-4;-6)$. **C.** $(-2;4;6)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1;-2;-3)$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là:

A. $(-2;-4;6)$. **B.** $(2;4;-6)$. **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1;-2;3)$

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;3)$. **B.** $(-2;-4;6)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(2;4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của mặt cầu (S) đã cho là: $I(1;2;-3)$.

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$ **B.** $R=64$ **C.** $R=8$ **D.** $R=4$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Rightarrow R=2\sqrt{2}$.

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ có bán kính bằng

A. 9 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Câu 13. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=6$ **B.** $R=3$ **C.** $R=18$ **D.** $R=9$

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có dạng:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Rightarrow R=3$.

Câu 14. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(3;-1;1)$ **B.** $(-3;-1;1)$ **C.** $(-3;1;-1)$ **D.** $(3;1;-1)$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3;-1;1)$.

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$.

A. $I(-1;2;-4), R=2\sqrt{5}$ **B.** $I(1;-2;4), R=20$

C. $I(1;-2;4), R=2\sqrt{5}$ **D.** $I(-1;2;-4), R=5\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

Nên mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$ có tâm và bán kính là $I(1;-2;4), R=2\sqrt{5}$.

Câu 16. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

$x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.(-1).x+2.0.y-2.1.z-7=0$.

$\Rightarrow a=-1,\ b=0,\ c=1,\ d=-7$.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+7}=3$.

Câu 17. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y+2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $R=\sqrt{1^2+(-1)^2-(-7)}=3$.

Câu 18. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2y-2z-7=0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 3. **C.** 9. **D.** $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ có bán kính là

$\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1^2+1^2+7}=3$

Câu 20. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).

A. $I(-4;1;0), R=2$. **B.** $I(-4;1;0), R=4$.

C. $I(4;-1;0), R=2$. **D.** $I(4;-1;0), R=4$.

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+1)^2+z^2=16$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(4;-1;0)$ và bán kính $R=4$.

Câu 21. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=\sqrt{3}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=9$. **D.** $R=3\sqrt{3}$.

Lời giải

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

Vậy bán kính của mặt cầu (S) là $R=3$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S):

A. $I(-4;1;0), R=2$. **B.** $I(-4;1;0), R=4$. **C.** $I(4;-1;0), R=2$. **D.** $I(4;-1;0), R=4$.

Lời giải

$(S): x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$

$\Rightarrow I(4;-1;0)$

$R=4$.

Câu 23. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

A. $I(-3;1;-1)$. **B.** $I(3;1;-1)$. **C.** $I(-3;-1;1)$. **D.** $I(3;-1;1)$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-3;-1;1)$.

Câu 24. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

A. $(-1;2;1)$. **B.** $(2;-4;-2)$. **C.** $(1;-2;-1)$. **D.** $(-2;4;2)$.

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-3=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Từ đó suy ra mặt cầu (S) có tâm là: $(-1;2;1)$.

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=1$. **B.** $R=7$. **C.** $R=\sqrt{151}$. **D.** $R=\sqrt{99}$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+1=0$ có tâm là

A. $(-4;2;-6)$ **B.** $(2;-1;3)$ **C.** $(-2;1;-3)$ **D.** $(4;-2;6)$

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt cầu suy ra tâm của mặt cầu là $(2;-1;3)$.

Câu 27. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(-1;2;-3)$; $R=2$. **B.** $I(-1;2;-3)$; $R=4$.

C. $I(1;-2;3)$; $R=2$. **D.** $I(1;-2;3)$; $R=4$.

Lời giải

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=2$.

Câu 28. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$. Tính bán kính R của (S).

A. 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Ta có: $a=-2, b=1, c=0, d=-4 \Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=3$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-3;1;-1)$. **B.** $(3;-1;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(3;1;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(3;-1;1)$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

① ***Dạng 1.*** *Cơ bản* $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I(a;b;c)\\ \bullet\ BK:R\end{cases} \Rightarrow (S):\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

② ***Dạng 2.*** *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có tâm* I *và đi qua điểm* A.

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IA\end{cases}$ ***(dạng 1)***

③ ***Dạng 3.*** *Viết phương trình mặt cầu* (S) *có đường kính* AB, *với* A, B *cho trước.*

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB.\\ \bullet\ BK:R=\dfrac{1}{2}AB\end{cases}$

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2+y^2+(z+3)^2=R^2$.

Ta có: $M\in(S)\Rightarrow 4^2+0^2+(0+3)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<6$ **B.** $m\geq 6$ **C.** $m\leq 6$ **D.** $m>6$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là một phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow 1^2+1^2+2^2-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$ **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$ **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$

lời giải

Chọn C

Ta có $R=IA=\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$

Câu 4. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7), B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.

C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1;3;3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R=IA=\sqrt{(1+1)^2+(-2-3)^2+(7-3)^2}=\sqrt{45}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Câu 5. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$.

A. $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=18$. **B.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=16$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên có bán kính $R=IA=3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=18$.

Câu 6. **(Chuyên Sơn La -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=8$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=2$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=2$. **D.** $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=8$.

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB.

Khi đó $I(1;0;2)$.

Bán kính của mặt cầu là: $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=2$.

Câu 7. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36.$ **B.** $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9.$

C. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9.$ **D.** $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=36.$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(0;3;-1).$

$\overrightarrow{IA}=(2;1;2)\Rightarrow IA=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3.$

Mặt cầu đã cho có tâm I, đường kính AB nên có phương trình là $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9.$

Câu 8. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ **B.** $x^2+z^2+3x-2y+4z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2xy-4y+4z-1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+8=0$

Lời giải

Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2. Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì $a^2+b^2+c^2-d=1+1+4-8=-2<0$.

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2+b^2+c^2-d=1+0+4+1=6>0$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là :

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=6$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$ **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$

Lờigiải

Chọn D

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$I(1;1;-2)$ bán kính $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\frac{1}{2}\sqrt{24}$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$

Câu 10. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0.$ **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0.$

C. $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0.$ **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0.$

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Câu 11. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.
B. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.
C. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.
D. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3;3;1)$, bán kính $R=IA=3$.

Câu 12. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R=2$ là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2^2$.
B. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$.
C. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4z+5=0$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R=2$ có hai dạng:

Chính tắc: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2^2$

Tổng quát: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$.

Vậy đáp án đúng là **B.**

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$.
B. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.
C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.
D. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

Lời giải

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2:0;2)$. $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Suy ra: $R=2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

Vậy chọn đáp án **B**

Câu 14. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$.
B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.
C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$.
D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R=IA=\sqrt{3}$ là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$

Câu 15. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$.
B. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.
C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.
D. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính của mặt cầu: $r=IA=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

Câu 16. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.
B. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.
D. $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải

Chọn A

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$\overrightarrow{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=3$ có phương trình là:

$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 17. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 1819)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(7;-2;2)$ và $B(1;2;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB?

A. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=14$.
B. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=2\sqrt{14}$.
C. $(x-7)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=14$.
D. $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=56$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu nhận AB làm đường kính, do đó mặt cầu nhận trung điểm $I(4;0;3)$ của AB làm tâm và có bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{56}$.

Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=56$.

Câu 18. **(Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.
B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2}=6$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

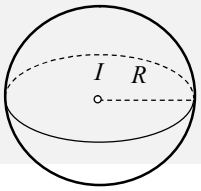
• *Mặt cầu tâm* $I(a;b;c)$ *và có bán kính* R *có phương trình* $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

• *Phương trình* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ *với* $a^2+b^2+c^2-d>0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ *và bán kính* $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

• *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:*

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 *phải bằng nhau và* $a^2+b^2+c^2-d>0$.



Câu 1. **(Sở Phú Thọ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-10<0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}$

Theo bài ra $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu.

A. $1<m<2$. **B.** $m<1$ hoặc $m>2$. **C.** $-2\le m\le 1$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là: $(m+2)^2+4m^2-19m+6>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$

$\Leftrightarrow (x+2m)^2+(y+m)^2+(z-m)^2=28-3m^2\ (1)$.

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28-3m^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}}<m<\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

A. $\{1;10\}$. **B.** $\{2;-10\}$. **C.** $\{-1;11\}$. **D.** $\{1;-11\}$.

Lời giải

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

Do đó: $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=11\end{array}\right.$.

Câu 5. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Dà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

A. $R=2$. **B.** $R=\sqrt{3}$. **C.** $R=3$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có: $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$; $MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$; $MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$MA^2=MB^2+MC^2\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow -2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $l=2\sqrt{13}$. **B.** $l=2\sqrt{41}$. **C.** $l=2\sqrt{26}$. **D.** $l=2\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x;\ y;\ 0)$.

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2}\\\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2\\x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10y=10\\2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\Rightarrow l=2R=2\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=2\sqrt{26}.$$

Câu 7. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+2a+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 9+6b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=1 \\ d=0 \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 8. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội -2019)** Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S).

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=6$. **D.** $R=\sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2=BI^2 \\ AI^2=CI^2 \\ AI^2=DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2 \\ (a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

Bán kính: $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Câu 9. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho hai điểm A,B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có:

$MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2 \quad (1)$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\dfrac{1}{2}; IA=\dfrac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2=18\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$ suy ra $M\in S\left(I;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 10. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A. $m<-5$ hoặc $m>1$. **B.** $-5<m<1$. **C.** $m<-5$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2+b^2>c^2$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2+m^2-5m^2-9>0\Leftrightarrow m^2+4m-5>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Câu 11. **(Yên Phong 1 - 2018)** Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-a;1-b;2-c);\overrightarrow{IH}=(4-a;-3-b;-2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IH}\Rightarrow \begin{cases} -a=-3(4-a) \\ 1-b=-3(-3-b) \\ 2-c=-3(-2-c) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}\Rightarrow I(3;-2;-1)$.

Câu 12. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu là

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(0;0;-2)$. **D.** $(0;0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do $I\in(Oxy)\Leftrightarrow c=0\Leftrightarrow (S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0$.

Ta có: $\begin{cases} A\in(S) \\ B\in(S) \\ C\in(S) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-d=21 \\ 2a-6b-d=11 \\ 4a+4b-d=17 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ d=-21 \end{cases}$.

Vậy $I(-2;1;0)$.

Câu 13. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox,Oy,Oz lần lượt là $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\frac{a}{3}=-6\\ \frac{b}{3}=-12\\ \frac{c}{3}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-18\\ b=-36\\ c=54\end{cases}$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0$. Vì (S) qua các điểm O,A,B,C nên ta có hệ:

$$\begin{cases}q=0\\ 36m+q=-18^2\\ 72n+q=-36^2\\ -108p+q=-54^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-9\\ n=-18\\ p=27\\ q=0\end{cases}.$$

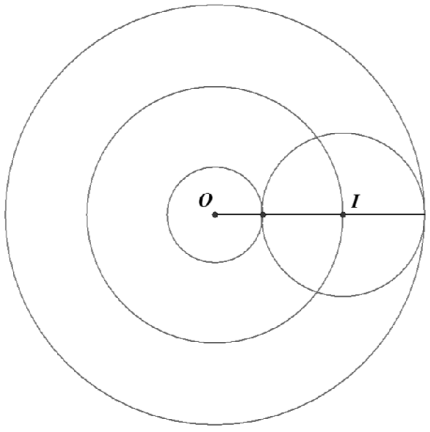
Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9;-18;27)$.

Câu 14. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$ với α,β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox,Oy và Oz. Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π. **B.** 4π. **C.** 20π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $O(0;0;0),R=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O, bán kính $R_1=|OI-R|=|1-2|=1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O, bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = 4\pi\left(1^2 + 3^2\right) = 40\pi$.

Câu 15. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2;-m;0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - \left(3m^2 - 2m\right)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$. với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1;2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 16. **(Sở Kon Tum 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

A. 116π. **B.** $\frac{29\pi}{4}$. **C.** 29π. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

(S) đi qua 4 điểm O, A, B, C nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d = 0 \\ 9 - 6a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 16 + 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2};-1;-2\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Cách 2:

Khối tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc tại O. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $OABC$ có bán kính $R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $R=\sqrt{41}$. **B.** $R=\sqrt{15}$. **C.** $R=\sqrt{13}$. **D.** $R=\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có:

$I(a;b;c)\in(Oxy)\Rightarrow c=0$;

$$\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-4b+d=-21\\-2a+6b+d=-11\\-4a-4b+d=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21\end{cases};$$

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4+1+0+21}=\sqrt{26}$.

Câu 18. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó a, b, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Bán kính của (S) bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA\perp Ox$, $IB\perp Oy$, $IC\perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox, Oy, $Oz\Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Vì (S) đi qua A, B, C, D nên ta có: $\begin{cases}a^2=b^2=c^2=d\ (1)\\5-2b-4c+d=0\ (2)\end{cases}$.

Vì a, b, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ nên $0<d\neq 1$. Mặt khác, từ $(1)\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{2d}$.

- TH1: Từ $(1)\Rightarrow b=c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-6\sqrt{d}+d=0\Leftrightarrow d=25$ (nhận).

$\Rightarrow R=\sqrt{2.25}=5\sqrt{2}$.

- TH2: Từ $(1)\Rightarrow b=c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+6\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH3: Từ $(1)\Rightarrow b=\sqrt{d}$, $c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5+2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH4: Từ $(1)\Rightarrow b=-\sqrt{d}$, $c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$: $5-2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R=5\sqrt{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một

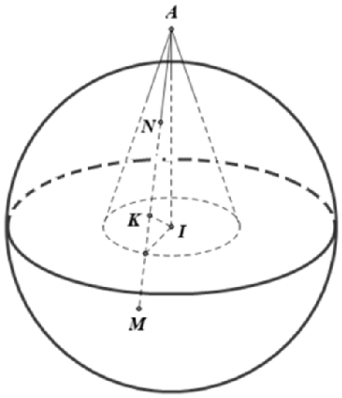
đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM=3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H).

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{71}{3}$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{70}{3}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{74}{3}$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{76}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K.

Dễ thấy $AN=NK=\frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Có $AM.AN=AI^2-R^2=4\Rightarrow AN^2=\frac{4}{3}\Rightarrow KN=AN=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow IK=\sqrt{IN^2-KN^2}=\frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK=\frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{71}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Lời giải

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $d(I,(Oyz))=d(I,(Ozx))=d(I,(Oxy))$

$$\Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=-b=c \\ a=-b=-c \end{array}\right.$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a=-b=c$ thì phương trình $AI=d(I,(Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a=-b=c$ thì $I(a;-a;a)$

$AI=d(I,(Oyx))\Leftrightarrow (a-1)^2+(a-1)^2+(a-4)^2=a^2\Leftrightarrow a^2-6a+9=0\Leftrightarrow a=3$

Khi đó $P=a-b+c=9$.

Câu 21. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

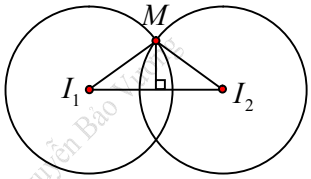
Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{AM}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM}=(x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM}=(x;y+1;z-3)$.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=1\\ \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1\\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0\end{cases}$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1)$, $R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2)$, $R_2=2$.



Ta có: $I_1I_2=\sqrt{5}$.

Dễ thấy: $r=\sqrt{R_1^2-\left(\dfrac{I_1I_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu

① ***Dạng 1. Cơ bản*** $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I(a;b;c)\\ \bullet\ BK:R\end{cases}\Rightarrow(S):\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$.

② ***Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và đi qua điểm*** A.

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IA\end{cases}$ ***(dạng 1)***

③ ***Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có đường kính*** AB, ***với*** A, B ***cho trước.***

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=\dfrac{1}{2}AB\end{cases}$ *là trung điểm của* AB.

④ ***Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.***

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=IM\end{cases}$ *với M là hình chiếu của* I *lên trục hoặc mp tọa*

⑤ ***Dạng 5. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và tiếp xúc với mặt phẳng*** (P).

Phương pháp: $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm } I\\ \bullet\ BK:R=d[I;(P)]\end{cases}$

• *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P):ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

⑥ ***Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua bốn điểm*** A, B, C, D.

Phương pháp: Gọi $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì A, B, C, $D\in(S)$ *nên tìm được 4 phương trình* $\Rightarrow a$, b, c, $d\Rightarrow(S)$.

⑦ ***Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***đi qua 3 điểm*** A, B, C ***và tâm thuộc mp*** (P).

Phương pháp: Gọi $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì A, B, $C\in(S)$ *nên tìm được 3 phương trình và* $I(a;b;c)\in(P)$ *là phương trình thứ tư.*

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a$, b, c, $d\Rightarrow(S)$.

⑧ ***Dạng 8. Viết phương trình mặt cầu*** (S) ***có tâm*** I ***và cắt mặt phẳng*** (P) ***theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính*** r***.(dạng này mình sẽ đưa vào bài phương trình mặt phẳng, các bạn học cũng có thể tự tìm để hiểu hơn)***

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $\boxed{R^2=d^2_{[I;(P)]}+r^2}$ *và cần nhớ* $C=2\pi r$ *và* $S_{\text{đt}}=\pi r^2$.

Câu 1. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=13$ **B.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$ **D.** $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

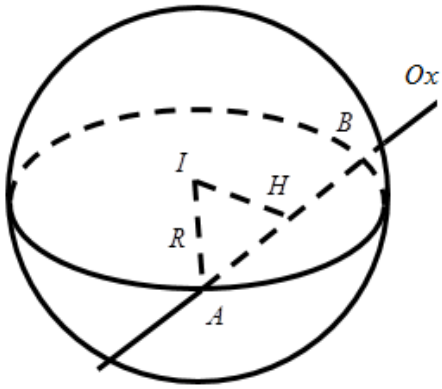
Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)\Rightarrow IM=\sqrt{13}$.Suy ra phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM là: $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Câu 2. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$IH=\sqrt{13}\Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

Câu 3. **(Sgd Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ là

A. $m=5$. **B.** $m=\sqrt{3}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=m^2+1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R=\sqrt{m^2+1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy)\Leftrightarrow d(I,(Oxy))=R$

$\Leftrightarrow 2=\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow m^2=3\Leftrightarrow m=\sqrt{3}$ (do m dương).

Câu 4. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM?

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. **D.** $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

Lời giải

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM=\sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2+y^2+z^2=13$

Câu 5. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. **B.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

C. $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$. **D.** $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

Trong đáp án C ta có: $\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-1\\d=2\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2),B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A,B có phương trình.

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+8x+2=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x+2=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$.

Lời giải

Gọi $I(a;0;0)\in Ox\Rightarrow \overrightarrow{IA}(1-a;1;2);\overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do (S) đi qua hai điểm A,B nên $IA=IB\Leftrightarrow\sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13}\Leftrightarrow 4a=16\Leftrightarrow a=4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}$.

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0.$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ **B.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$ **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Ta có: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 1$

Vậy (S) tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R = 1$ có pt: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 8. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \left(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\right)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 9. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $A(2;\ 4;\ 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S).

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases}2^2+0^2+0^2-2.a.2-2.b.0-2.c.0+d=0\\0^2+4^2+0^2-2.a.0-2.b.4-2.c.0+d=0\\0^2+0^2+6^2-2.a.0-2.b.0-2.c.6+d=0\\2^2+4^2+6^2-2.a.2-2.b.4-2.c.6+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+d=-4\\-8b+d=-16\\-12c+d=-36\\-4a-8b-12c+d=-56\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\\d=0\end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0\Rightarrow I(1;\ 2;\ 3)$ và $R=\sqrt{14}\ \Rightarrow R'=2\sqrt{14}$.

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1;\ 2;\ 3)$ và $R'=2\sqrt{14}:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$.

Câu 10. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy\Rightarrow M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM=\sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

Câu 11. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$. **B.** $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=4$.

Lời giải

Thể tích mặt cầu là $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Theo đề bài ta có $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256\pi}{3}\Leftrightarrow R=4$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;4;2)$ và bán kính $R=4$ là $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$.

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S). Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$. **B.** $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.

C. $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$. **D.** $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0), R=2.\ II'=10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S'). Theo giả thiết, ta có $R'+R=II' \Leftrightarrow R'=II'-R=8$.

Khi đó phương trình mặt cầu $(S'): (x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.

Câu 13. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$. **B.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$. **D.** $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d(I,(Oxy))=d(I,(Oyz))=d(I,(Oxz)) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R \quad (1)$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \quad (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

A. $x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$. **B.** $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$. **D.** $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

Ta áp dụng tính chất sau: "Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a.\overrightarrow{IO}+b.\overrightarrow{IM}+c.\overrightarrow{IN}=\vec{0}$, với $a=MN$, $b=ON$, $c=OM$".

Ta có $OM=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$, $ON=\sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=4$.

$MN=\sqrt{\left(\frac{-8}{3}-2\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2+\left(\frac{8}{3}-1\right)^2}=5$.

$$5.\overrightarrow{IO}+4.\overrightarrow{IM}+3.\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{-8}{3}\right)}{3+4+5}=0\\ y_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{4}{3}\right)}{3+4+5}=1\\ z_I=\dfrac{5.0+4.2+3.\left(\dfrac{8}{3}\right)}{3+4+5}=1\end{cases}.$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

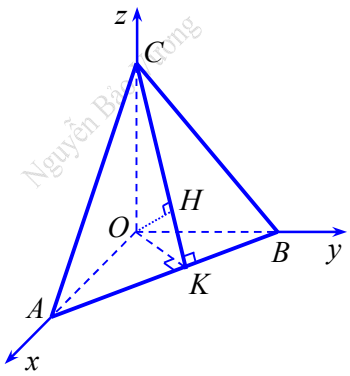
Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R=d\left(I,(Oxz)\right)=1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 15. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC. Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α).

A. $x^2+y^2+z^2=81$. **B.** $x^2+y^2+z^2=1$. **C.** $x^2+y^2+z^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=25$.

Lời giải



Ta có H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow OH\perp(ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases}OC\perp OA\\ OC\perp OB\end{cases}\Rightarrow OC\perp AB\ (1)$$

Mà $CH\perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(OHC)$ $\Rightarrow AB\perp OH$ (*)

Tương tự $BC\perp(OAH)$ $\Rightarrow BC\perp OH$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OH\perp(ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R=OH=3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S):x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 16. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$.

B. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$.

D. $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S). Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$d(I,(Oxy))=d(I,(Oyz))=d(I,(Oxz)) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R \quad (1)$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA=R \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2 \\ a>0;c>0;b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2 \\ a=c=-b=R>0 \quad (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-6a+9=0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9.$$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 29 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán liên quan đến tiếp tuyến (tiếp xúc) mặt cầu

Câu 1. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;0;\sqrt{2}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$; $A\in(Oxy)\Rightarrow A(a;b;0)$.

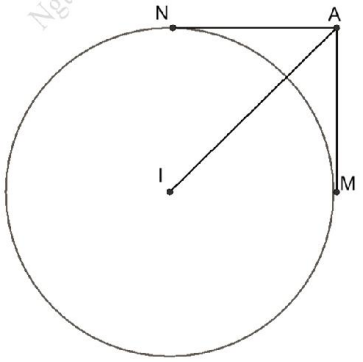
* Xét trường hợp $A\in(S)$, ta có $a^2+b^2=1$. Lúc này các tiếp tuyến của (S) thuộc tiếp diện của (S) tại A nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a;b)$ là $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases};\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases};\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases};\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$.

* Xét trường hợp A ở ngoài (S). Khi đó, các tiếp tuyến của (S) đi qua A thuộc mặt nón đỉnh A. Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại A.

Điều kiện để có ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng $90°$.

Giả sử $A'N;A'M$ là các tiếp tuyến của (S) thỏa mãn $AN\perp AM$ ($N;M$ là các tiếp điểm)



Dễ thấy $A'NIM$ là hình vuông có cạnh $IN=R=\sqrt{3}$ và $IA'=\sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

Điều kiện phải tìm là $\begin{cases}IA>R\\IA\le IA'=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2>1\\a^2+b^2\le 4\end{cases}$

Vì a,b là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a;b)$ là

$(0;2),(0;-2),(2;0),(-2;0),(1;1),(-1;-1),(-1;1),(1;-1)$.

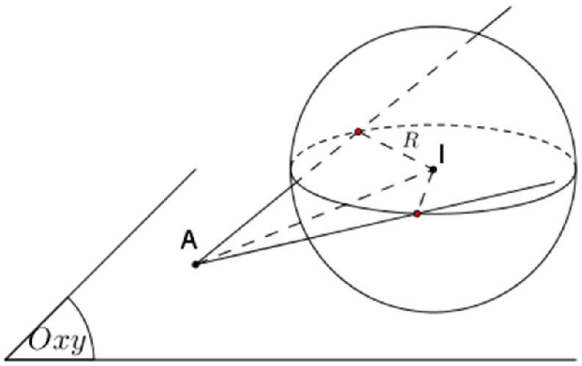
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.

Câu 2. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Vì $A\in(Oxy)$ nên $c=0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA>R$) tạo nên một mặt nón tâm A, để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90°$ hay $IA\leq R\sqrt{2}$.

Vậy $R\leq IA\leq R\sqrt{2}\Leftrightarrow 5\leq a^2+b^2+1\leq 10\Leftrightarrow 4\leq a^2+b^2\leq 9$

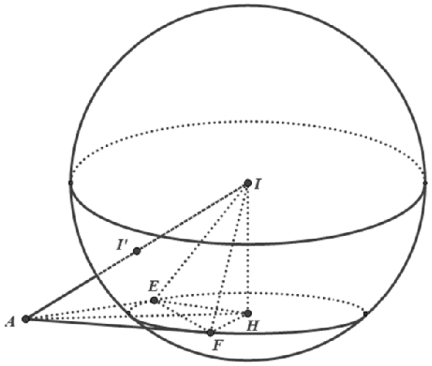
Ta có các bộ số thõa mãn $(0;\pm2);(0;\pm3);(\pm1;\pm2);(\pm2;\pm2);(\pm2;\pm1);(\pm2;0);(\pm3;0)$, 20 bộ số.

Câu 3. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S):x^2+y^2+(z+1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+1)^2=5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R=\sqrt{5}$

$A(a;b;0)\in(Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI\Rightarrow I'\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Gọi E,F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE\perp AF$.

Ta có: E,F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$.

Để tồn tại E,F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R-R'|\le II'\le|R+R'|$

$\Leftrightarrow\left|\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}\le\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+1}$

$\Leftrightarrow\sqrt{5}\le\sqrt{a^2+b^2+1}\Leftrightarrow a^2+b^2\ge4(1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE=HF=\sqrt{AI^2-5}$.

Ta có $IH^2=R^2-HF^2=5-(AI^2-5)=10-AI^2\ge0\Leftrightarrow a^2+b^2+1\le10\Leftrightarrow a^2+b^2\le9(2)$

Từ (1) và (2) ta có $4\le a^2+b^2\le9$ mà $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

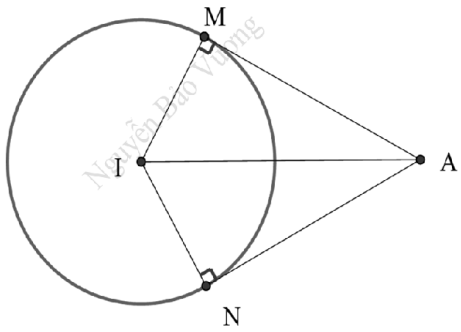
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0,0,-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))}=1<R\Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy). Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A\Leftrightarrow AI\ge R\ (1)$.

Có $A(a,b,c)\in(Oxy)\Rightarrow A(a,b,0),IA=a^2+b^2+1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI>R$ và là một mặt phẳng nếu $AI=R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM,AN là hai tiếp tuyến sao cho A,M,I,N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAN}\ge90^o\Leftrightarrow IA\le R\sqrt{2}\ \ (2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow4\le a^2+b^2\le9$. Vì $a,b\in\mathbb{Z}$

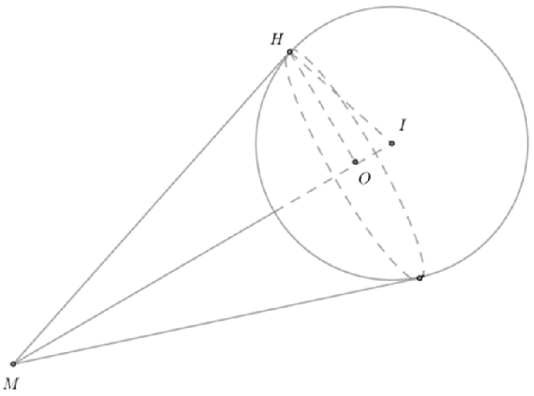
$\Rightarrow\begin{cases}a^2=0\\b^2=9\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=9\\b^2=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=0\\b^2=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=1\\b^2=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=4\\b^2=4\end{cases}$.

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4.2+3.4=20$.

Câu 4. **(THPT Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S), biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** (2).

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(1;2;1)$ và $IM=\sqrt{6}$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $Oxyz$ đến mặt cầu, khi đó $MH=\sqrt{IM^2-R^2}=\sqrt{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn (C) **khi đó** $IM\perp HO$ **và** $HO=r$**.**

Ta có $HI.HM=HO.IM\Rightarrow r=\dfrac{HI.HM}{IM}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. **(THPT Chuyên Hạ Long - 2018)** Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2,3,3,2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{7}{15}$. **D.** $\dfrac{6}{11}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

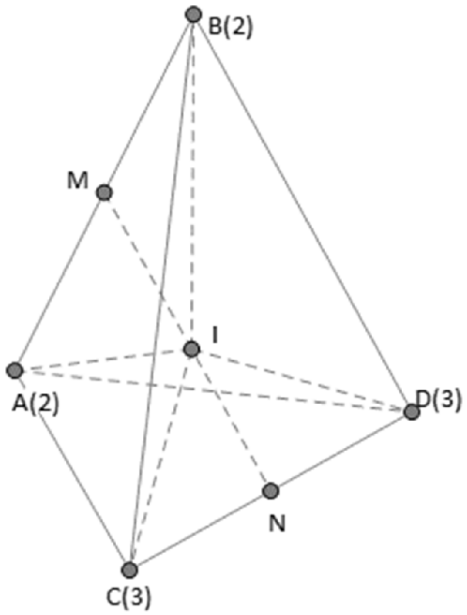
Cách 1:

Gọi A,B,C,D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB=4$, $AC=BD=AD=BC=5$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Dễ dàng tính được $MN=2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA=IB,IC=ID$ nên I nằm trên đoạn MN.

Đặt $IN=x$, ta có $IC=\sqrt{3^2+x^2}=3+r$, $IA=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}-x\right)^2}=2+r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2+x^2}-\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}-x\right)^2}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2}-3=\dfrac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A,B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C,D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x.

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A,B,C,D nên $IA=IB=x+2,\ IC=ID=x+3$.

Gọi (P), (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD.

$\begin{cases} IA=IB\Rightarrow I\in(P) \\ IC=ID\Rightarrow I\in(Q) \end{cases}\Rightarrow I\in(P)\cap(Q)\ (1)$.

Tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=CA=CB=5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD, suy ra $MN=(P)\cap(Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I\in MN$

Tam giác IAM có $IM=\sqrt{IA^2-AM^2}=\sqrt{(x+2)^2-4}$.

Tam giác CIN có $IN=\sqrt{IC^2-CN^2}=\sqrt{(x+3)^2-9}$.

Tam giác ABN có $NM=\sqrt{NA^2-AM^2}=\sqrt{12}$.

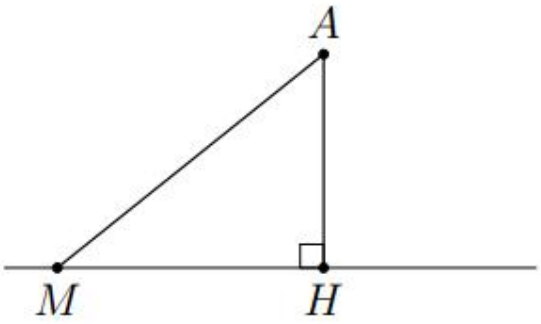
Suy ra $\sqrt{(x+3)^2-9}+\sqrt{(x+2)^2-4}=\sqrt{12}\Rightarrow x=\dfrac{6}{11}$.

Dạng 2. Bài toán cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM\geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, ...A_n$ ta luôn có

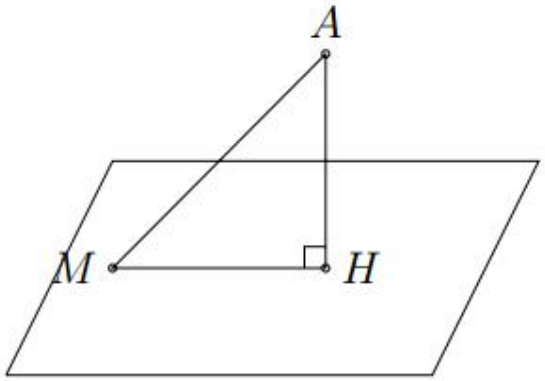
$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

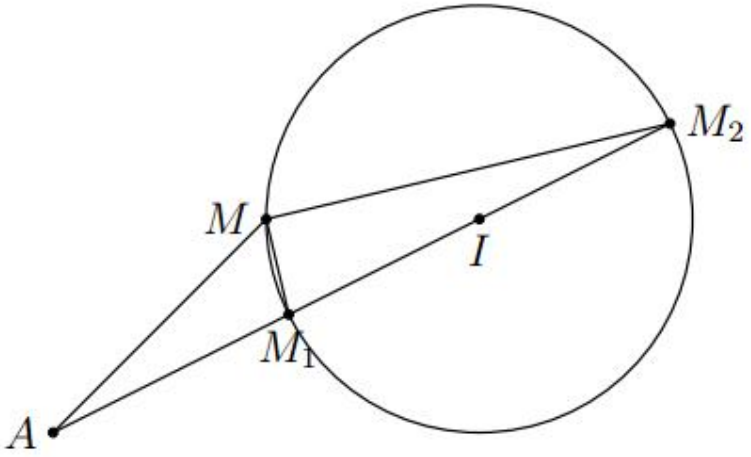


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại . M ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điể M thuộc (P) sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

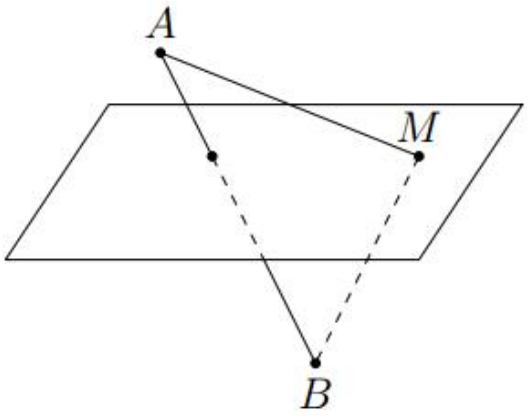
$AM+BM \geq AB$

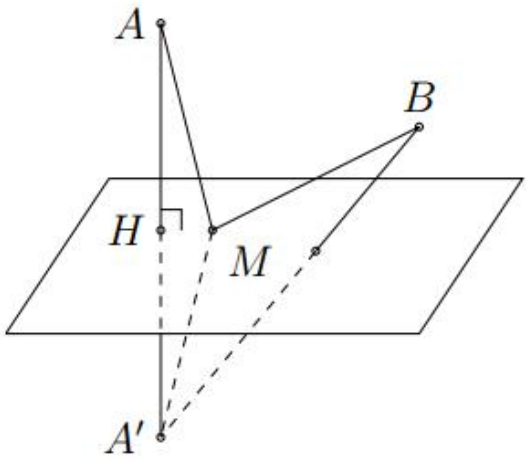
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó

$AM+BM=A'M+BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).





2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM-BM| \leq AB$

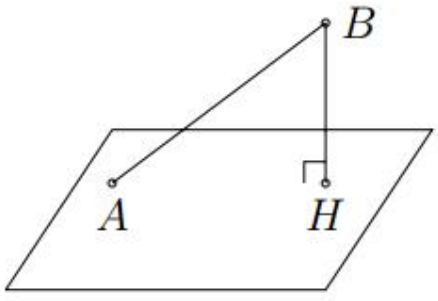
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM-BM|=|A'M-BM| \leq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh mặt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$d(B,(P))=BH \leq BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm $A, B,$ C. Viết phương trình mặt phẳng

(P) đi qua C và $T=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB\parallel (P)$ thì

$P=(\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P))\le(\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $I\vec{B}=\dfrac{\alpha}{\beta}I\vec{D}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta\cdot\frac{IB}{ID}\cdot \mathrm{d}(D,(P))=2\alpha \mathrm{d}(E,(P))\le 2(\alpha+\beta)EC$$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và $(P), B'$ là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i(i=\overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

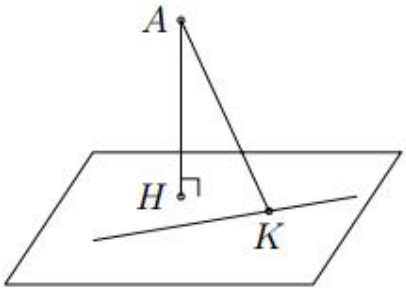
$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\left(A_i,(P)\right)=n\mathrm{d}(G,(P))\le nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi dó

$P=m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right)+k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$\mathrm{d}(A,(P))=AH\le AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bài toán 8. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Xét véc tơ

$\vec{w}=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2M\overrightarrow{A_2}+\cdots+\alpha_nM\overrightarrow{A_n}$

Trong đó $\alpha_1;\alpha_2\ldots\alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1G\vec{A_1}+\alpha_2G\vec{A_2}+\cdots+\alpha_nG\vec{A_n}=\vec{0}$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$\vec{w} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\vec{MG} + \alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$

Do đó

$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy $z,$ cho các diểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:

$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc măt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.

2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1\vec{GA_1} + \alpha_2\vec{GA_2} + \cdots + \alpha_n\vec{GA_n} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$MA_k^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \vec{GA_k}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{GA_k} + GA_k^2$

Do đó

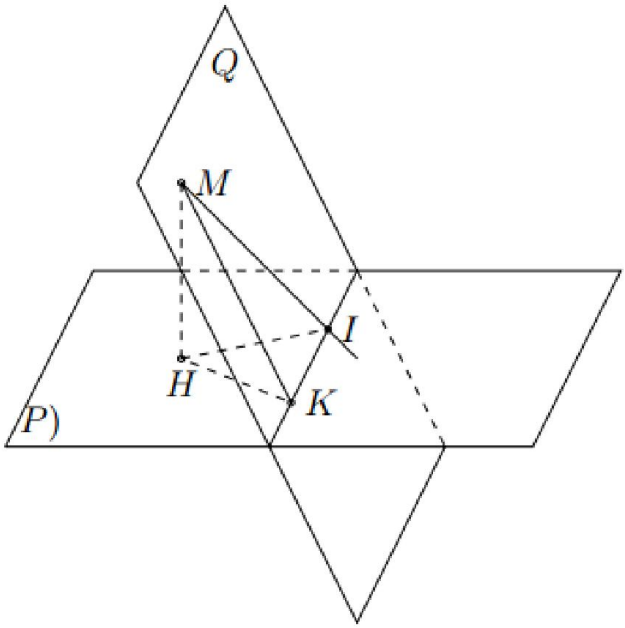
$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$

Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan\phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $\left(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

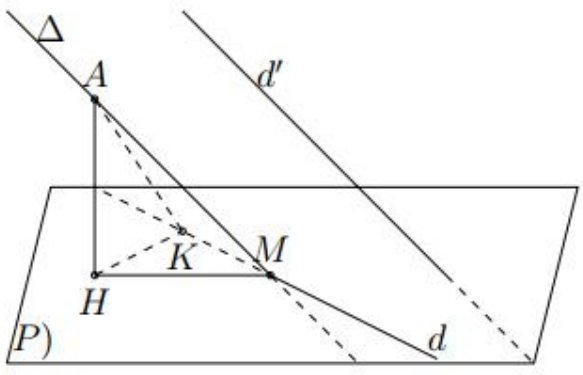
Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đai số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{n}_P\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{n}_P\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi=\widehat{AMH}$ và $\cos\phi=\frac{HM}{AM}\geq\frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của măt phẳng (P). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{u}_{d'}\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Câu 6. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;3), B(6;-5;8)$ và $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}$ trong đó a,b là cá số thực luôn thay đổi. Nếu $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giác trị nhỏ nhất thì giá trị $a-b$ bằng

A. -25 **B.** -13 **C.** 0 **D.** 26

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OM}=a.\vec{i}+b.\vec{k}\Rightarrow M(a;0;b)$

$\overrightarrow{MA}=(-1-a;2;3-b);\overrightarrow{MB}=(6-a;-5;8-b)\Rightarrow -2\overrightarrow{MB}=(-12+2a;10;-16+2b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=(a-13;12;b-13)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(a-13)^2+12^2+(b-13)^2}\geq 12$

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|_{\min}=12\Leftrightarrow \begin{cases}a=13\\ b=13\end{cases}$. Do đó $a-b=0$

Câu 7. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ là

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta thấy $M(a;b;0)\in(Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=\left(\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}\right)+\left(\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IM}^2-2\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM}\right)$

$=IM^2+2IA^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=IM^2+\frac{AB^2}{2}=IM^2+7$.

Bởi vậy MA^2+MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy). Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. Như vậy $a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.

Câu 8. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$

$=4MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2\geq IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ (vì $MI^2\geq 0$ với mọi điểm M)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)\Rightarrow x+y+z=\frac{7}{4}+\frac{7}{2}=\frac{21}{4}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3), C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2-2MB^2-MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(3;-4;0)$.

Lời giải

Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE, suy ra $E(3;-4;5)$.

Khi đó: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=-ME^2+EA^2-2EB^2$.

Do đó MA^2-2MB^2 lớn nhất $\Leftrightarrow ME$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của $E(3;-4;5)$ lên (Oxy) $\Leftrightarrow M(3;-4;0)$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M(0;0;5)$ không thuộc (Oxy).

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};0\right)$, $M(3;-4;0)$ vào biểu thức MA^2-2MB^2 thì $M(3;-4;0)$ cho giá trị lớn nhất nên ta chọn $M(3;-4;0)$.

Câu 10. **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow I(2;-2;2)$.

$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $M\in(Oyz)\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I lên $(Oyz)\Leftrightarrow M(0;-2;2)$.

Vậy $P=0-2+2=0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2), B(1;1;-1), C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

A. $M(2;3;1)$. **B.** $M(0;3;1)$. **C.** $M(0;-3;1)$. **D.** $M(0;1;2)$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=(2;3;1)\Leftrightarrow I(2;3;1)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$

$=\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2MI$.

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2;3;1)$ lên mặt phẳng (Oyz). Suy ra $M(0;3;1)$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-6)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Lời giải

Lấy $G(1;3;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có:

$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy.

Vậy $M(1;3;0)$.

Câu 14. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tìm giá trị của biểu thức $T=x_M+y_M+z_M$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

A. $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ khi đó: $\begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+3x_B}{1+3} \\ y_H=\dfrac{y_A+3y_B}{1+3} \\ z_H=\dfrac{z_A+3z_B}{1+3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4};\dfrac{19}{4}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z=0$.

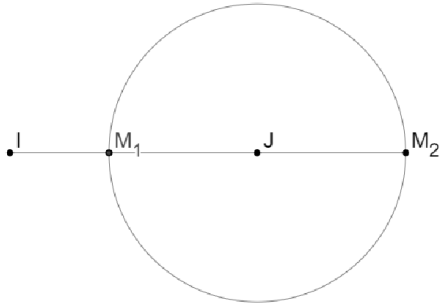
Xét $T=\dfrac{z_H}{1}=\dfrac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là: $\begin{cases} x_M=x_H-aT \\ y_M=y_H-bT \\ z_M=z_H-cT \end{cases} \Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{11}{4};0\right)$.

Vậy $T=x_M+y_M+z_M=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{4}+0=2$.

Câu 15. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Lời giải



Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Rightarrow I(2x_A-x_B;2y_A-y_B;2z_A-z_B)$

$\Rightarrow I(5;5;-1)$.

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ có tâm $J(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$

Suy ra $IJ=5$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$\min MI=IM_1=JI-R=5-3=2$

$\max MI=IM_2=JI+R=5+3=8$

Suy ra $m-n=8^2-2^2=60$

Câu 16. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB}=90°$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Ta có $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4\Rightarrow(S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB}=90°\Rightarrow AB$ qua $I\Rightarrow AB=2R=4$.

Ta có $S_{AMB}=\dfrac{1}{2}MA.MB\le\dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}=4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA=MB=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ và $AB=4$.

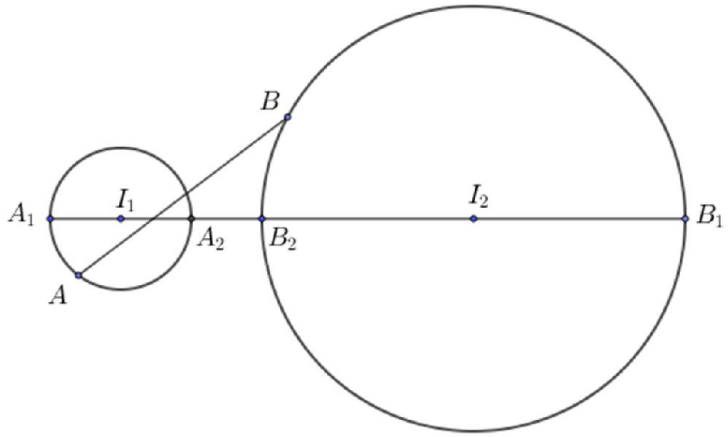
Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 17. **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là M,m. Khi đó, $M-m$ bằng

A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $A(d,e,f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1=1$, $B(a,b,c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2):(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2=3$. Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2\Rightarrow(S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F=AB$, AB max khi $A\equiv A_1,B\equiv B_1\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2+R_1+R_2=9$.

AB min khi $A\equiv A_2,B\equiv B_2\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2-R_1-R_2=1$.

Vậy $M-m=8$

Câu 18. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3MA=2MB\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2\end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 20. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải:

Chọn D

Xét $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$

$=6MI^2+\overrightarrow{MI}(4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC})+\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}$

Gọi I là điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{4x_A+3x_B+5x_C}{12}\\ y_I=\dfrac{4y_A+3y_B+5y_c}{12}\\ z_I=\dfrac{4x_A+3z_B+5z_C}{12}\end{cases}\Rightarrow I(\dfrac{-2}{12},\dfrac{1}{12},\dfrac{7}{12})$.

Mà: $(4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC})=\vec{0}$. $\overrightarrow{IA}\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}\overrightarrow{IC}+3\overrightarrow{IC}\overrightarrow{IA}=const$. Nên $S_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt Oxy. $\Rightarrow M(\dfrac{-2}{12},\dfrac{1}{12},0)$. $\Rightarrow T=12a+12b+c=-1$

Câu 21. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC=1$. Trên hai tia Ox,Oy lần lượt lấy hai điểm A,B thay đổi sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $OA=a;\ OB=b\ (a>0,\ b>0)\Rightarrow a+b=1\Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$

Bán kính cầu:

$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow R^2=\dfrac{(1-2ab)+1^2}{4}=\dfrac{2-2a(1-a)}{4}=\dfrac{2a^2-2a+2}{4}=\dfrac{a^2-a+1}{2}$

$=\dfrac{\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}}{2}$

$R^2\ge\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow R\ge\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. *Vậy* $R_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 22. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\dfrac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\dfrac{51}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

$M(a;b;c)\in(S)\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$.

Ta có: $|2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)|\le\sqrt{(2^2+3^2+6^2).\left[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right]}$.

$\Leftrightarrow|2a+3b+6c-20|\le28\Rightarrow2a+3b+6c-20\le28\Rightarrow2a+3b+6c\le48$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{3} \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b+6c=48 \\ 3a-2b=-1 \\ 3a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{15}{7} \\ b=\dfrac{26}{7} \\ c=\dfrac{38}{7} \end{cases}$

Vậy $P=2a-b+c=2.\dfrac{15}{7}-\dfrac{26}{7}+\dfrac{38}{7}=6$.

Câu 23. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

A. 5 **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi $P(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{OP}=(x;y;z), \overrightarrow{AP}=(x-2t;y-2t;z), \overrightarrow{BP}=(x;y;z-t)$

Vì $P(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-4tx-4ty-2tz-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{4}{3}tx-\dfrac{4}{3}ty-\dfrac{2}{3}tz-1=0$

Nên P thuộc mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{2t}{3};\dfrac{2t}{3};\dfrac{t}{3}\right)$, $R=\sqrt{t^2+1}$.

Ta có $OI=t<R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP=OI+R$.

Suy ra $OP_{\max}=OI+R \Leftrightarrow 3=t+\sqrt{t^2+1}$. Từ đó tìm được $t=\dfrac{4}{3}$ Suy ra $a=4, b=3$

Vậy, $Q=2a+b=11$.

Câu 24. **(HSG Nam Định-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P=a-2b+4c$.

A. $P=23$. **B.** $P=31$. **C.** $P=11$. **D.** $P=13$.

Lời giải

Chọn D

+ Đặt $Q=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2=MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)$.

$\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2=MB^2+MC^2-2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=MB^2+MC^2-BC^2$.

$\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right)^2=MC^2+MA^2-2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}\left(MC^2+MA^2-AC^2\right)$.

$\Rightarrow Q=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$=\frac{1}{2}\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)+MB^2+MC^2-BC^2-\frac{5}{2}\left(MC^2+MA^2-AC^2\right)$

$=-2MA^2+\frac{3}{2}MB^2-\frac{3}{2}MC^2-\frac{1}{2}AB^2-BC^2+\frac{5}{2}AC^2.$

$-\frac{1}{2}AB^2-BC^2+\frac{5}{2}AC^2$ không đổi nên Q lớn nhất khi $T=-2MA^2+\frac{3}{2}MB^2-\frac{3}{2}MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

+ $T=-2MA^2+\frac{3}{2}MB^2-\frac{3}{2}MC^2.$

Gọi E là điểm thỏa mãn $-2\overrightarrow{EA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{EB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{EC}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}-3\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA}=3\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$

$\Rightarrow E\left(1;\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right).$

$T=-2MA^2+\frac{3}{2}MB^2-\frac{3}{2}MC^2=-2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2$

$=-2ME^2-2EA^2+\frac{3}{2}EB^2-\frac{3}{2}EC^2\le -2EA^2+\frac{3}{2}EB^2-\frac{3}{2}EC^2.$

Vì $-2EA^2+\frac{3}{2}EB^2-\frac{3}{2}EC^2$ không đổi nên T đạt giá trị lớn nhất khi $ME=0\Rightarrow M\equiv E.$

$\Rightarrow M\left(1;\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right).$

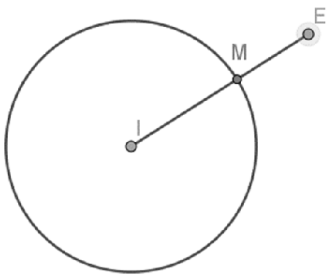
$P=a-2b+4c=1-2.\frac{5}{2}+4.\frac{17}{4}=13.$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$ bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. Suy ra $E(-1;1;1)$.

Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE=2\sqrt{3}>R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$IE-R=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Vậy $P=2MA^2+3MB^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2=105$.

Câu 26. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\frac{3}{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA=\sqrt{2}>R$ và $IB=\sqrt{82}>R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S).

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1;-2;-1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S).

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right).\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)$

$=MK^2+\overrightarrow{MK}.\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}=MK^2-KA^2$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

Đánh giá: $IM+MK\geq IK\Rightarrow R+MK\geq IK\Rightarrow MK\geq IK-R$.

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK-R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K. Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S).

Có $\overrightarrow{IK}=(2;-4;-2)$, $IK=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}=4R=4IM$.

Suy ra $\overrightarrow{IK}=4\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}2=4(a+1)\\-4=4(b-2)\\-2=4(c-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=1\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là:

A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.

Lời giải

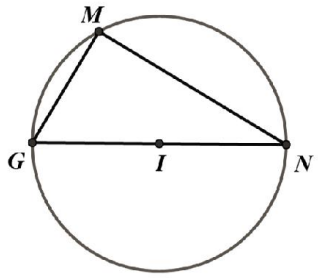
Chọn B

Mặt cầu (S): tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R=1$

Gọi trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$, trung điểm DE là $N(0;2;0)$

do G,N đều nằm trên (S) và I là trung điểm GN nên GN là đường kính của (S)

$$P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|=2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|2\overrightarrow{MN}\right|$$
$$=6MG+6MN=6(MG+MN)$$



Ta có: $(MG+MN)^2\le 2\left(MG^2+MN^2\right)=2GN^2=8$

Suy ra $MG+MN\le 2\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $12\sqrt{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

A. P = 0. **B.** P = 6. **C.** P = $\sqrt{14}$. **D.** P = $3\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JO}+3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OJ}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow J(3;6;9)$.

Mà $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}+\left(3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)$ nên $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|$

Do đó $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min}\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MJ}\right|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $IJ=2\sqrt{14}>R\Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1,M_2.

Phương trình đường thẳng $(IJ):\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+6t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+6t\\(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=\dfrac{1}{2}\\t_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra $M_1(2;4;6), M_2(0;0;0), M_1J=\sqrt{14}; M_2J=3\sqrt{14}$.

Vậy $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min} \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MJ}\right|_{\min} \Leftrightarrow M\equiv M_1$.

$P=x_M+y_M=2+4=6$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ta có

$MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$

$=3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}\right)=3MK^2+KA^2+2KB^2$.

Biểu thức MA^2+2MB^2 đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min}=|KI-R|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Vậy $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}=3MK^2_{\min}+KA^2+2KB^2=\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{4}$.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức OA^2-OB^2 là

A. 12. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ có tâm $I(0;0;1)$.

Vì A, B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA=IB$.

$OA^2-OB^2=\left(\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{OB}\right)^2=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BA}=2OI.BA.\cos\varphi$, với $\varphi=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{BA}\right)$.

Suy ra biểu thức OA^2-OB^2 đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi=0$.

Vậy $\max\left(OA^2-OB^2\right)=2.1.6.\cos 0=12$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1)\Leftrightarrow I(2;1;1)$.

Khi đó, $T=MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=5MI^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2$

$=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$ (vì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M\equiv I(2;1;1)\Rightarrow a=2$, $b=c=1$.

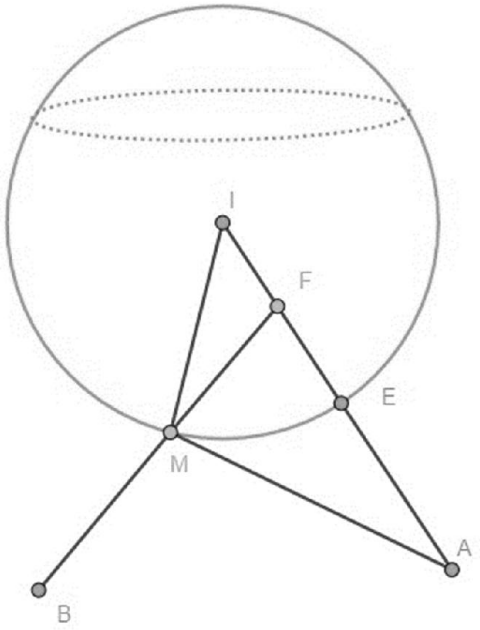
Vậy $a+b+c=4$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0),R=2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R,E=IA\cap(S)\Rightarrow E(1;2;0)$.

Gọi F là trung điểm của $IE\Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có $\widehat{AIM}$ chung và $\frac{IF}{IM}=\frac{1}{2}=\frac{IM}{IA}\Rightarrow\Delta AIM\sim\Delta MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM}=\frac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2FB=6\sqrt{2}$.

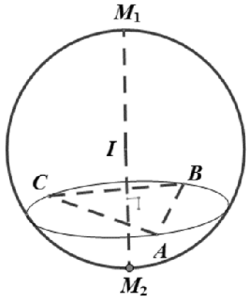
Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$,cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3), C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S). Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng:

A. 9. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 7. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Ta có $(S): (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-3;-4)\\ \overrightarrow{AC}=(1;-1;-4)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;4).$

Gọi $D(x;y;z)\in(S) \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\ \overrightarrow{AD}=(x;y-1;z-1)\end{cases}$.

Ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|8x-8y+4z+4\right|=\frac{2}{3}\left|2x-2y+z+1\right|$.

Ta có: $\left|2x-2y+z+1\right|=\left|2.(x-1)-2.y+1.(z+1)+2\right|$

Ta có: $\left|2(x-1)-2y+z+1\right| \le \sqrt{\left(2^2+2^2+1^2\right)\left[(x-1)^2+y^2+(z+1)^2\right]}=6$

$\Rightarrow -6 \le 2(x-1)-2y+z+1 \le 6 \Leftrightarrow -4 \le 2x-2y+z+1 \le 8$

$\Rightarrow \left|2x-2y+z+1\right| \le 8 \Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{16}{3}$

Suy ra: Giá trị lớn nhất của V_{ABCD} bằng $\frac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}>0\\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 34. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x-3;y;z)$, $\overrightarrow{BM}=(x-4;y-2;z-1)$.

Và $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8 \Leftrightarrow 3\left[(x+1)^2+(y-4)^2+z^2-8\right]=0$.

Ta có: $P=MA+2MB=\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}+2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$

$=\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2+3\left[(x+1)^2+(y-4)^2+z^2-8\right]}+2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$

$=\sqrt{4x^2+4y^2-24y+4z^2+36}+2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$

$=2\left[\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\right]$

$=2\left[\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}+\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2+(1-z)^2}\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowxki:

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{d^2+e^2+f^2}\geq\sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{a}{f}>0$.

$\Rightarrow P\geq 2\sqrt{(x+4-x)^2+(y-3+2-y)^2+(z+1-z)^2}=2\sqrt{4^2+(-1)^2+(1)^2}=6\sqrt{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{x}{4-x}=\frac{y-3}{2-y}=\frac{z}{1-z}=t>0\\(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4t}{t+1}\\y=\frac{2t+3}{t+1}\\z=\frac{t}{t+1}\\\left(\frac{5t+1}{t+1}\right)^2+\left(\frac{-2t-1}{t+1}\right)^2+\left(\frac{t}{t+1}\right)^2=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4t}{t+1}\\y=\frac{2t+3}{t+1}\\z=\frac{t}{t+1}\\22t^2-2t-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4+4\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\y=\frac{34+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\z=\frac{1+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\t=\frac{1+\sqrt{133}}{22}\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $6\sqrt{2}$.

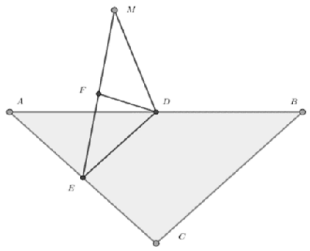
Câu 35. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M(2;3;0)$. **B.** $M(1;3;0)$. **C.** $M(2;-3;0)$. **D.** $M(2;3;1)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Gọi $D;E;F$ lần lượt là trung điểm của $AB;AC;ME$. Ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|2.\overrightarrow{MD}+2.\overrightarrow{ED}\right|=2\left|2.\overrightarrow{FD}\right|=4.FD$$

Ta lại có: $M(x;y;0)$; $D\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; $E(3;0;0)$; $F\left(\frac{x+3}{2};\frac{y}{2};0\right)$

$FD_{\min} \Leftrightarrow F$ là hình chiếu của D trên $mp(Oxy) \Leftrightarrow x=2;y=3 \Leftrightarrow M(2;3;0)$

Cách 2

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-0\overrightarrow{C}\right) \Rightarrow I(2;3;1)$$

$$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=2.MI$$

$\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên $mp(Oxy)$.

Vì $I(2;3;1) \Rightarrow M(2;3;0)$

Cách 3

Gọi $M(x;y;0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-2x;6-2y;-1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}$$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án A vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=1$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án B vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{17}$

Thế tọa độ điểm M ở đáp án C vào ta được $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{145}$

Điểm M ở đáp án D không thuộc (Oxy) nên bị loại.

Cách 4

Gọi $M(x;y;0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(4-2x;6-2y;-1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}$$

Ta có: $\sqrt{4x^2+4y^2-16x-24y+53}=\sqrt{(2x-4)^2+(2y-6)^2+1}\geq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2;y=3$. Khi đó $M(2;3;0)$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

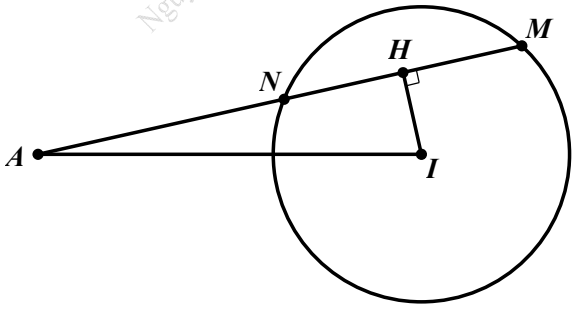
A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

$AI=\sqrt{34}>R\Rightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu (S).



Do hai điểm M,N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M.

Gọi H là trung điểm $MN\Rightarrow IH\perp MN, NH=\dfrac{1}{2}MN$

$$S=4(AH-NH)+AH+NH=5AH-3NH$$

$$S=5\sqrt{AI^2-IH^2}-3\sqrt{R^2-IH^2}=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2},x=IH$$

Xét hàm số $f(x)=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2},(0\leq x<3)$

$$f'(x)=\frac{-5x}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3x}{\sqrt{3^2-x^2}}=x\left(\frac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{3^2-x^2}}\right)$$

Xét $\left(\frac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)>0$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{9-x^2}<3\sqrt{34-x^2}\Leftrightarrow 225-25x^2<9.34-9x^2\Leftrightarrow 16x^2+81>0$ (luôn đúng)

Suy ra ; $f'(x)\geq 0,\forall x\in[0;3),f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$

Suy ra $\min\limits_{[0;3)} f(x)=f(0)=5\sqrt{34}-9.$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S). Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$. **B.** $3\sqrt{79}$. **C.** $5\sqrt{79}$. **D.** $3\sqrt{82}$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.

Ta có $IA=2\sqrt{10}=2R$ nên tồn tại điểm C cố định sao cho $MA=2MC\ \forall M\in(S)\ (1)$.

Thật vậy, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm C. Khi đó, với mọi điểm

$M(x;y;z)\in(S)\Rightarrow x^2+y^2+z^2=2x+4z+5$, ta có:

$MA^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+21$

$=2x+4z+5-2x-4y+8z+21=-4y+12z+26.$

$MC^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2$

$=2x+4z+5-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2=(2-2a)x-2by+(4-2c)z+a^2+b^2+c^2+5.$

Nên $(1)\Leftrightarrow MA^2=4MC^2\ \forall M\in(S)$

$\Leftrightarrow -4y+12z+26=4\left[(2-2a)x-2by+(4-2c)z+a^2+b^2+c^2+5\right]\ \forall x,y,z$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4(2-2a)=0\\4(-2b)=-4\\4(4-2c)=12\\4(a^2+b^2+c^2+5)=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\a=1\\c=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow C\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$

Lúc này, $IC=\frac{\sqrt{10}}{2}<R<IB=2\sqrt{37}$ nên C nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S) và

$MA+2MB=2MC+2MB=2(MC+MB)\geq 2BC=3\sqrt{82}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S).

Vậy $\min(MA+2MB)=3\sqrt{82}$.

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2):x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là

điểm thay đổi trên (S_1), N là điểm thay đổi trên (S_2). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

A. $2\sqrt{265}$. **B.** $\sqrt{265}$. **C.** $3\sqrt{265}$. **D.** $4\sqrt{265}$.

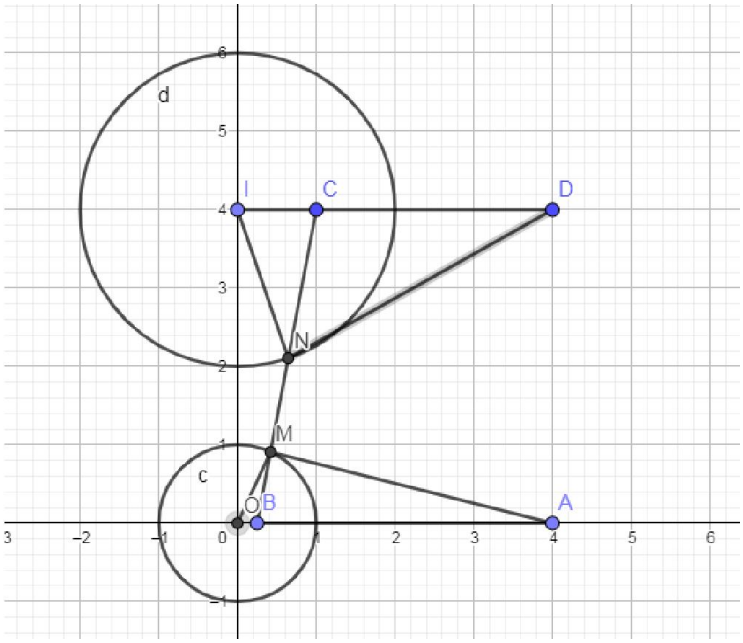
Lời giải

Chọn A

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 1$

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ nên (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R_2 = 2$

Vậy các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$, $O(0;0;0)$ và $I(0;4;0)$ cùng thuộc (Oxy)



Nhận thấy $OB.OA = OM^2$ suy ra OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB

Do đó ΔMOB đồng dạng ΔAOM

$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OM} = 4 \Rightarrow MA = 4MB$

Hoàn toàn tương tự $\frac{ND}{NC} = \frac{DI}{NI} = 2 \Rightarrow ND = 2NC$

$Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC = 4(MB + NC + MN) + 4BC \geq 4BC + 4BC = 8BC = 2\sqrt{265}$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = \left|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\right| + \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3).$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz); $HG=\sqrt{22}$.

Ta có: $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

$=\left|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}-4\overrightarrow{MH}-4\overrightarrow{HC}\right|+\left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-3\overrightarrow{MH}\right|+\left|3\overrightarrow{MG}\right|$

$=3(MH+MG)\geq 3GH=3\sqrt{22}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M\in(Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz).

Đường thẳng GH có phương trình $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}$; mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

$M\in GH\Rightarrow M(1+3t;2+3t;1-2t)$.

$M\in(Oxz)\Rightarrow 2+3t=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$.

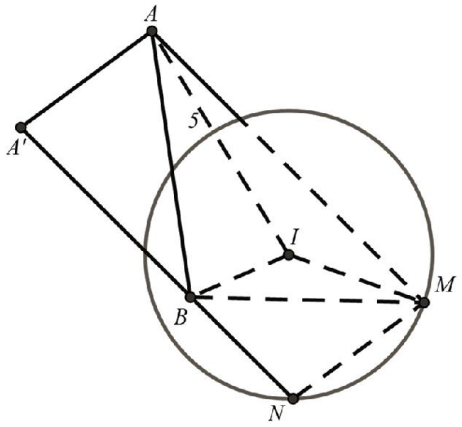
Vậy $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $\left|AM-BN\right|$.

A. $\sqrt{41}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn C



Tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;0;4)\Rightarrow IA=5$, $\overrightarrow{IB}=(0;2;2)\Rightarrow IB=2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4;2;4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1;4;2)$ nằm trong mặt cầu (S).

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;k;k), k>0$ do $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;4;4)$.

Gọi $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A'=(4;6;8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$

Ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ N là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm N luôn tồn tại).

$\overrightarrow{A'B}=(-3;-2;-6)$ suy ra $A'B=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$. Vậy $|AM-BN|_{\min}=A'B=7$.

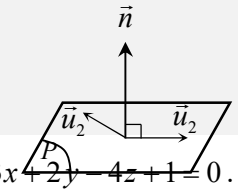
Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định véc tơ pháp tuyến

- *Véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là véctơ có giá vuông góc với (P). Nếu $\vec{n}$ là một véctơ pháp tuyến của (P) thì $k.\vec{n}$ cũng là một véctơ pháp tuyến của (P).*
- *Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]$.*
- *Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)$.*



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_2}=(3;2;4)$. **B.** $\overrightarrow{n_3}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(3;-4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;2;-4)$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+2=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3(2;3;2)$. **B.** $\vec{n}_1(2;3;0)$. **C.** $\vec{n}_2(2;3;1)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Câu 3. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-z+3=0$. Véctơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-2;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;4;1)$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+4z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;-3;4)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;3;-4)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-2;3;4)$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z+5=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

A. $\overrightarrow{n_3}=(-2;1;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;1;3)$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+4z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?

A. $\vec{n}_3=(1;-2;4)$. **B.** $\vec{n}_1=(1;2;-4)$. **C.** $\vec{n}_2=(1;2;4)$. **D.** $\vec{n}_4=(-1;2;4)$

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_2=(3;0;-1)$ **B.** $\vec{n}_1=(3;-1;2)$ **C.** $\vec{n}_3=(3;-1;0)$ **D.** $\vec{n}_4=(-1;0;-1)$

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+3z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;1;3)$ **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-1;3;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_4}=(1;3;2)$ **D.** $\overrightarrow{n_1}=(3;1;2)$

Câu 9. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(1;2;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(1;2;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(1;3;-1)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(2;3;-1)$.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Trong không giam $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-1)$ **B.** $\overrightarrow{n_3}=(1;3;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_4}=(2;3;1)$ **D.** $\overrightarrow{n_2}=(-1;3;2)$

Câu 11. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;3;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$.

Câu 12. **(Mã 103 -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+z-2=0$. Véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **B.** $\vec{n}_4=(2;1;-2)$. **C.** $\vec{n}_3=(-3;1;-2)$. **D.** $\vec{n}_2=(2;-3;-2)$.

Câu 13. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x+3y+z-1=0$. Véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_4=(3;1;-1)$. **B.** $\vec{n}_3=(4;3;1)$. **C.** $\vec{n}_2=(4;-1;1)$. **D.** $\vec{n}_1=(4;3;-1)$.

Câu 14. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x+2y+z-4=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\overrightarrow{n_2}=(3;2;1)$ **B.** $\overrightarrow{n_1}=(1;2;3)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-1;2;3)$ **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;2;-3)$

Câu 15. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$ có một véc tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3=(-1;2;3)$ **B.** $\vec{n}_4=(1;2;-3)$ **C.** $\vec{n}_2=(1;2;3)$ **D.** $\vec{n}_1=(3;2;1)$

Câu 16. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$ **B.** $\vec{m}=(1;1;1)$ **C.** $\vec{j}=(0;1;0)$ **D.** $\vec{k}=(0;0;1)$

Câu 17. **(THPT Lý Thái Tổ 2019)** Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y-4z+1=0$. Khi đó, một véc tơ pháp tuyến của (α)

A. $\vec{n}=(2;3;-4)$. **B.** $\vec{n}=(2;-3;4)$. **C.** $\vec{n}=(-2;3;4)$. **D.** $\vec{n}=(-2;3;1)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_4}=(-1;0;-1)$ **B.** $\overrightarrow{n_1}=(3;-1;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;0)$ **D.** $\overrightarrow{n_2}=(3;0;-1)$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+1=0$?

A. $\vec{a}=(2;-3;1)$ **B.** $\vec{b}=(2;1;-3)$ **C.** $\vec{c}=(2;-3;0)$ **D.** $\vec{d}=(3;2;0)$

Câu 20. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$ **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$ **D.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$

Câu 21. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P):2x-6y-8z+1=0$. Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là:

A. $(-1;\ -3;\ 4)$ **B.** $(1;\ 3;\ 4)$ **C.** $(1;-3;-4)$ **D.** $(1;-3;\ 4)$

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):2y-3z+1=0$?

A. $\overrightarrow{u_4}=(2;0;-3)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(0;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(2;-3;0)$.

Câu 23. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho mặt phẳng $(P):3x-y+2=0$. Véc tơ nào trong các véctơ dưới đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $(3;-1;2)$. **B.** $(-1;0;-1)$. **C.** $(3;0;-1)$. **D.** $(3;-1;0)$.

Dạng 2. Xác định phương trình mặt phẳng

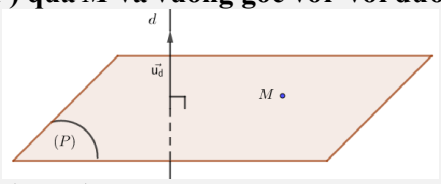
- Mặt phẳng $(P)\begin{cases}\text{qua } M(x_0;y_0;z_0)\\ VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)\end{cases}$ thì phương trình $(P):\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ (*)

Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$, mặt phẳng này có $VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

- Các mặt phẳng cơ bản

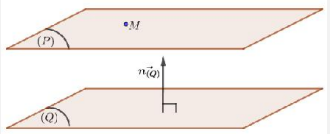
$$\boxed{\begin{array}{l} mp(Oyz):x=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oyz)}}=(1;0;0)\\ mp(Oxz):y=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oxz)}}=(0;1;0)\\ mp(Oxy):z=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oxy)}}=(0;0;1)\end{array}}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M* và vuông góc với với đường thẳng *AB* cho trước.



Mặt phẳng (P) qua M, có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{AB}$ nên phương trình được viết theo (*).

2. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M* và song song với mặt phẳng (*Q*) cho trước.

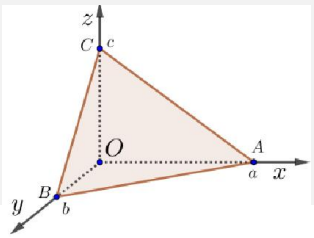


Mặt phẳng (P) qua M, có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{n_{(Q)}}$ nên phương trình được viết theo (*).

3. Viết phương trình mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a.b.c\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn

$$(P):\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}.$$



Câu 24. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

A. $x=0$ **B.** $z=0$ **C.** $x+y+z=0$ **D.** $y=0$

Câu 25. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$ **B.** $x=0$ **C.** $y-z=0$ **D.** $z=0$

Câu 26. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $x=0$. **D.** $y=0$.

Câu 27. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx?

A. $x=0$. **B.** $y-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $z=0$.

Câu 28. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x+y=0$.

Câu 29. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$ **B.** $x-2y-3z-6=0$ **C.** $x-2y+3z-12=0$ **D.** $x-2y-3z+6=0$

Câu 30. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$) và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $x+y+2z-3=0$ **B.** $x+y+2z-6=0$ **C.** $x+3y+4z-7=0$ **D.** $x+3y+4z-26=0$

Câu 31. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $2x-3y-z-20=0$ **B.** $3x-y+3z-25=0$ **C.** $2x-3y-z+8=0$ **D.** $3x-y+3z-13=0$

Câu 32. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+3y+z-5=0$ **B.** $x+3y+z-6=0$ **C.** $3x-y-z-6=0$ **D.** $3x-y-z+6=0$

Câu 33. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$ **B.** $x+2y-2z+1=0$ **C.** $x+2y-2z-1=0$ **D.** $3x+2z-1=0$

Câu 34. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là?

A. $3x-y+3z-25=0$ **B.** $2x-3y-z+8=0$ **C.** $3x-y+3z-13=0$ **D.** $2x-3y-z-20=0$

Câu 35. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+4z-12=0$. **B.** $3x-y+4z+12=0$. **C.** $x-y+2z-12=0$. **D.** $x-y+2z+12=0$.

Câu 36. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $x-2y-5z-5=0$. **B.** $2x-y+5z-5=0$. **C.** $x-2y-5=0$. **D.** $x-2y-5z+5=0$.

Câu 37. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;0;1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-4=0$. **D.** $x-y-z+2=0$.

Câu 38. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$ và $B(2;3;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với AB là

A. $2x+y-z-3=0$. **B.** $x+y-z+3=0$. **C.** $x+y-z-3=0$. **D.** $x-y-z-3=0$.

Câu 39. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+4z-12=0$. **B.** $3x-y+4z+12=0$.

C. $x-y+2z-12=0$. **D.** $x-y+2z+12=0$.

Câu 40. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x-y+3z-4=0$.

C. $x-2y-4=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 41. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và vuông góc với giá của véctơ $\vec{v}=(-1;2;3)$ là

A. $x-2y-3z-4=0$. **B.** $x-2y+3z-4=0$.

C. $x-2y-3z+4=0$. **D.** $-x+2y-3z+4=0$.

Câu 42. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ là

A. $4x-2y+3z-9=0$. **B.** $4x-2y-3z-15=0$.

C. $3x-z-15=0$. **D.** $4x-2y-3z+15=0$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ là

A. $x-2y-2z-1=0$. **B.** $-x+y-2z-1=0$. **C.** $x-2y-2z+7=0$. **D.** $-x+y-2z+1=0$.

Câu 44. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-1;0;1), B(2;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB.

A. $(P):3x+y-z+4=0$. **B.** $(P):3x+y-z-4=0$.

C. $(P):3x+y-z=0$. **D.** $(P):2x+y-z+1=0$.

Câu 45. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $y+2z-5=0$. **B.** $2x-y-1=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $-y+2z-5=0$.

Câu 46. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x-2y+4z-21=0$. **B.** $2x-2y+4z+21=0$

C. $3x-2y+z-12=0$. **D.** $3x-2y+z+12=0$.

Câu 47. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-2)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là:

A. $2x+y-2x+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$

C. $3x-2y+z+2=0$. **D.** $3x-2y+z-2=0$.

Câu 48. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+11=0$. **B.** $2x-y+3z-14=0$.

C. $3x-2y+z-11=0$. **D.** $2x-y+3z+14=0$.

Câu 49. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z-3=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+1=0$. **B.** $3x-2y+z-1=0$. **C.** $2x+y-3z+14=0$. **D.** $2x+y-3z-14=0$

Câu 50. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha):3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)?

A. $3x-y+2z-6=0$ **B.** $3x-y+2z+6=0$

C. $3x-y-2z+6=0$ **D.** $3x+y+2z-14=0$

Câu 51. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+2=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z+11=0$ **B.** $2x-y-3z+11=0$

C. $2x-y+3z-11=0$ **D.** $2x+y+3z-9=0$

Câu 52. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+4=0$ là:

A. $2x+y+3z+7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.

C. $2x-y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z-7=0$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-1=0$ có phương trình là

A. $2x-2y+z+2=0$ **B.** $2x-2y+z=0$

C. $2x-2y+z-6=0$ **D.** $(\alpha):2x-2y+z-2=0$

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(Q):3x-2y+4z-4=0.$ **B.** $(Q):3x-2y+4z+4=0.$

C. $(Q):3x-2y+4z+5=0.$ **D.** $(Q):3x+2y+4z+8=0.$

Câu 55. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;6)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M và song song với mặt phẳng (α).

A. $(\beta):x+2y+2z-13=0.$ **B.** $(\beta):x+2y+2z-15=0.$

C. $(\beta):x+2y+2z+15=0.$ **D.** $(\beta):x+2y+2z+13=0.$

Câu 56. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1.$ **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1.$

C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$ **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$ **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1.$ **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1.$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1.$

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1.$ **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1.$ **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$ **D** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

Câu 59. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1.$ **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1.$ **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1.$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1.$

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$, $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=-1.$ **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$ **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=0.$

Câu 61. **(Đề thử nghiệm THPT QG 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới dây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1.$ **B.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1.$ **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1.$ **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1.$

Câu 62. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;3)$ là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1.$ **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=0.$ **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1.$

Câu 63. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;2;0)$, $P(0;0;3)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $6x+3y+2z-6=0$. **B.** $6x+3y+2z+1=0$.

C. $6x+3y+2z-1=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Câu 64. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, B(0;-1;0), C(0;0;-3). Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $-3x+6y-2z+6=0$.**B.** $-3x-6y+2z+6=0$.

C. $-3x+6y+2z+6=0$.**D.** $-3x-6y+2z-6=0$.

Câu 65. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ là

A. $4x-3y+6z+12=0$. **B.** $4x+3y+6z+12=0$.

C. $4x+3y-6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Câu 66. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;0;7)$ và $C(0;3;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{7}+\frac{z}{3}=1$ **B.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=0$ **C.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=1$ **D.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}+1=0$

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-3)$ có phương trình là

A. $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=-1.$ **B.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$ **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1.$ **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1.$

Câu 68. **(Chuyên Thái Bình -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox,Oy,Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$ **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$ **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0.$ **D.** $-\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$

Câu 69. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$; $B(0;4;0)$ và $C(0;0;-2)$ là.

A. $4x-3y+6z+12=0$. **B.** $4x+3y+6z+12=0$.

C. $4x+3y-6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Câu 70. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;5)$ có phương trình là

A. $15x+5y+3z+15=0.$ **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}+1=0.$

C. $x+3y+5z=1.$ **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1.$

Câu 71. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;3)$ là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=-1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 72. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $-3x+6y-2z+6=0$. **B.** $-3x-6y+2z+6=0$.

C. $-3x+6y+2z+6=0$. **D.** $-3x-6y+2z-6=0$.

Câu 73. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1$. **C.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1}=1$. **D.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=-1$.

Dạng 3. Điểm thuộc mặt phẳng

Một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $(P): ax+by+cz+d=0$, và điểm $M(x_M;y_M;z_M)$.

Nếu $ax_M+by_M+cz_M+d=0 \Rightarrow M \in (P)$

Nếu $ax_M+by_M+cz_M+d\neq 0 \Rightarrow M \notin (P)$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 74. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$ **B.** $N(2;2;2)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $M(1;-1;1)$

Câu 75. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$ **B.** $M(1;1;6)$ **C.** $Q(2;-1;5)$ **D.** $N(-5;0;0)$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-1;-1)$ **B.** $N(1;1;1)$ **C.** $P(-3;0;0)$ **D.** $Q(0;0;-3)$

Câu 77. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M(2;1;0)$. **B.** $M(2;-1;0)$. **C.** $M(-1;-1;6)$. **D.** $M(-1;-1;2)$.

Câu 78. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$.

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Câu 79. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $N(1;2;3)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $Q(0;0;3)$.

Câu 80. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2019=0$. **C.** $y+5=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Câu 81. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $x-2y+2z-3=0$. Điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (α)?

A. $M(2;0;1)$. **B.** $Q(2;1;1)$. **C.** $P(2;-1;1)$. **D.** $N(1;0;1)$.

Câu 82. **(SGD Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $P(1;6;1)$. **D.** $Q(0;3;0)$.

Câu 83. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α): $x-2y+z-4=0$ đi qua điểm nào sau đây

A. $Q(1;-1;1)$. **B.** $N(0;2;0)$. **C.** $P(0;0;-4)$. **D.** $M(1;0;0)$.

Câu 84. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-1=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $N(0;1;-2)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $P(1;-2;0)$. **D.** $Q(1;-3;-4)$.

Dạng 4. Khoảng cách từ điểm đến mặt

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P): ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Câu 85. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P)

A. $d=\frac{5}{29}$ **B.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$ **C.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$ **D.** $d=\frac{5}{9}$

Câu 86. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d=\frac{5}{9}$. **B.** $d=\frac{5}{29}$. **C.** $d=\frac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 87. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$.

A. $\frac{11}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 88. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 89. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=3$. **B.** $d=4$. **C.** $d=1$. **D.** $d=\frac{1}{3}$.

Câu 90. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y-2z+1=0$ và điểm $M(1;-2;1)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 91. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+5=0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 92. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2-3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+5=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 93. **(Cần Thơ - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z+5=0$ và điểm $A(-1;3;-2)$. Khoảng cách từ A đến mặt (P) là

A. $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 94. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-4=0$. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 3.

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

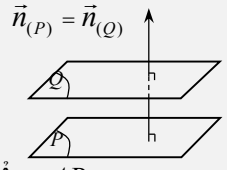
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định phương trình mặt phẳng (không chứa yếu tố đường thẳng)

Dạng 1. *Mặt* $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases}\Rightarrow (P):\boxed{a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=0}.$

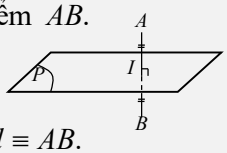
Dạng 2. *Viết phương trình* (P) *qua* $A(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ *và* $(P)\parallel(Q):ax+by+cz+d=0.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A(x_\circ,y_\circ,z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(a;b;c)\end{cases}$



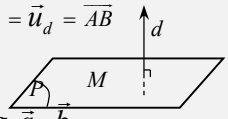
Dạng 3. *Viết phương trình mặt phẳng trung trực* (P) *của đoạn thẳng* $AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)\ :\text{là trung điểm } AB.\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



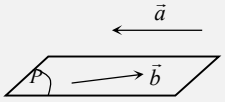
Dạng 4. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *qua* M *và vuông góc với đường thẳng* $d\equiv AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



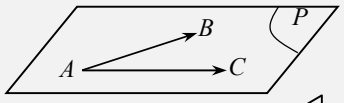
Dạng 5. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *qua điểm* M *và có cặp véctơ chỉ phương* $\vec{a},\ \vec{b}.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=[\vec{a},\vec{b}]\end{cases}$



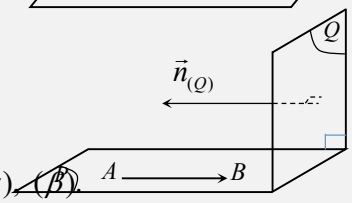
Dạng 6. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua ba điểm* $A,\ B,\ C$ *không thẳng hàng.*

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B\ hay\ C)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\end{cases}$



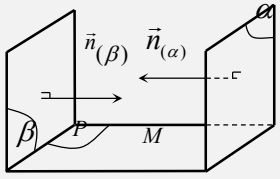
Dạng 7. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua* $A,\ B$ *và* $(P)\perp(Q).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}\right]\end{cases}$



Dạng 8. *Viết phương trình mp* (P) *qua* M *và vuông góc với hai mặt* $(\alpha),(\beta).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]\end{cases}$



Dạng 9. *Viết* (P) *đi qua* M *và giao tuyến* d *của hai mặt phẳng:*

$(Q):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(T):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$

Phương pháp: Khi đó mọi mặt phẳng chứa d *đều có dạng:*

$(P):m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,\ m^2+n^2\neq 0.$

Vì $M\in(P)\Rightarrow$ *mối liên hệ giữa* m *và* $n.$ *Từ đó chọn* $m\Rightarrow n$ *sẽ tìm được* $(P).$

Dạng 10. *Viết phương trình mặt phẳng đoạn chắn*

Phương pháp: Nếu mặt phẳng (P) *cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm* $A(a;0;0),$ $B(0;b;0),\ C(0;0;c)$ *với* $(abc\neq 0)$ *thì* $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ *gọi là mặt phẳng đoạn chắn.*

Dạng 1.1 Xác định phương trình mặt phẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3).$ Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x-y-z=0.$ **B.** $3x+y+z-6=0.$ **C.** $x+y+2z-6=0.$ **D.** $6x-2y-2z-1=0.$

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.

Câu 3. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

A. $3x+y+z-6=0$ **B.** $3x-y-z=0$ **C.** $6x-2y-2z-1=0$ **D.** $3x-y-z+1=0$

Câu 4. **(Mã 101 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là:

A. $x+y+2z-3=0$. **B.** $3x+2y-z-14=0$. **C.** $2x-y-z+5=0$. **D.** $2x-y-z-5=0$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+2y-3z-17=0$. **B.** $4x+3y-z-26=0$.

C. $2x+2y-3z+17=0$. **D.** $2x+2y+3z-11=0$.

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB.

A. $(\alpha):4x+2y+12z+7=0$. **B.** $(\alpha):4x-2y+12z+17=0$.

C. $(\alpha):4x+2y-12z-17=0$. **D.** $(\alpha):4x-2y-12z-7=0$.

Câu 7. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P)

A. $(Q):2x-y+3=0$ **B.** $(Q):x+z=0$ **C.** $(Q):-x+y+z=0$ **D.** $(Q):3x-y+z=0$

Câu 8. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Câu 9. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;3;0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z+2=0$. **C.** $x+2y-z-3=0$. **D.** $x+2y-z+3=0$.

Câu 10. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x-3y+2z+3=0$. **B.** $4x-3y-2z+3=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $4x+y-2z-1=0$.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0,(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0.$ **B.** $2x-y+2z=0.$ **C.** $2x+y-2z=0.$ **D.** $2x+y-2z+1=0.$

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1); B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5.$ **B.** $a+b+c=15.$ **C.** $a+b+c=-5.$ **D.** $a+b+c=-15.$

Câu 13. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;2); B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z-3=0.$ **B.** $x+y+z-2=0.$ **C.** $-x+y=0.$ **D.** $3x-2y-z+3=0.$

Câu 14. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-3y+2z-1=0, (Q): x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Câu 15. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x+y-2z+1=0.$ **B.** $2x+y-2z=0.$ **C.** $2x-y-2z=0.$ **D.** $2x-y+2z=0.$

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2); B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z+3=0.$ **B.** $x+y+z-2=0.$ **C.** $3x-2y-z-3=0.$ **D.** $-x+y=0.$

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;1;0), B(2;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-y-1=0$ là:

A. $x+y-3z-1=0.$ **B.** $2x+2y-5z-2=0.$

C. $x-2y-6z+2=0.$ **D.** $x+y-z-1=0.$

Câu 18. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0.$ Phương trình mặt phẳng qua O, đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x-y+2z=0.$ **B.** $2x-y+2z+1=0.$ **C.** $2x+y-2z=0.$ **D.** $2x-y-2z=0.$

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2);$ $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $3x-2y-z-3=0.$ **B.** $-x+y=0.$ **C.** $x+y+z-2=0.$ **D.** $3x-2y-z+3=0.$

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-9=0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-12$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Câu 21. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2y+z-5=0$ và $(R): x-y+z-2=0$. Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời vuông góc với (R). Phương trình của (α) là

A. $2x+3y-5z+5=0$. **B.** $x+3y+2z-6=0$.

C. $x+3y+2z+6=0$. **D.** $2x+3y-5z-5=0$.

Câu 22. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=10$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-7$.

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x-y+3z-1=0$, $(Q): y=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Câu 25. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho hai mặt phẳng (α): $3x-2y+2z+7=0$ và (β): $5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là:

A. $x-y-2z=0$. **B.** $2x-y+2z=0$. **C.** $2x+y-2z+1=0$. **D.** $2x+y-2z=0$.

Câu 26. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng: $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a\in(b;c)$. **D.** $a+b>c$.

Câu 27. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$. **C.** $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Dạng 1.2 Xác định phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Câu 28. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $(P): 6x+3y+2z+18=0$. **B.** $(P): 6x+3y+2z+6=0$.

C. $(P): 6x+3y+2z-18=0$. **D.** $(P): 6x+3y+2z-6=0$.

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox,Oy,Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $-\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 30. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$. **B.** $12x+3y+4z-48=0$.**C.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=0$. **D.** $12x+3y+4z=0$.

Câu 31. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M,N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$

A. $(P): 3x+y+2z-6=0$ **B.** $(P): 2x+3y-z-4=0$

C. $(P): 2x+y+z-4=0$ **D.** $(P): x+2y-z-2=0$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 32. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, nếu ba điểm A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên các trục tọa độ thì phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$.

Câu 33. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(8;-2;4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C là

A. $x-4y+2z-8=0$ **B.** $x-4y+2z-18=0$ **C.** $x+4y+2z-8=0$ **D.** $x+4y-2z-8=0$

Câu 34. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$, biết (α) cắt trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm

A. $2x+5y+z-6=0$. **B.** $2x+y-6z-23=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $3x+4y+3z-1=0$.

Câu 35. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi các điểm A,B,C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó hoành độ điểm A là:

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D. 5**

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by+cz-14=0$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 8. **B.** 14. **C.** $T=6$. **D.** 11.

Câu 37. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$. **C.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+4y-2z-6=0$, $(Q):x-2y+4z-6=0$. Mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z+6=0$. **C.** $x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-z-6=0$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{243}{2}$. **C.** $\frac{81}{6}$. **D.** 243.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6),D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABC),(P)$ cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$. **B.** $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z=0$. **D.** $6x+3y+2z-36=0$.

Câu 41. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực dương thay đổi, thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2017$. Khi đó, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua có một điểm có tọa độ cố định là

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;1;1)$.

C. $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$. **D.** $(2017;2017;2017)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(P):6x+3y+2z-18=0$. **B.** $(P):6x+3y+2z-6=0$.

C. $(P):6x+3y+2z+18=0$. **D.** $(P):6x+3y+2z+6=0$.

Câu 43. Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$. **C.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C mà $OA=OB=OC\neq 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 8

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 47. **(Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Câu 48. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $2x-y-z-1=0$. **B.** $x+2y+4z+1=0$. **C.** $4x+2y+z+1=0$. **D.** $4x+2y+z-8=0$.

Câu 49. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)=0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) và các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $6x-3y-2z+12=0$. **B.** $9x-3y+2z-12=0$.
C. $6x+3y+2z-12=0$. **D.** $6x-3y-2z-12=0$.

Câu 50. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox, Oy. Giả sử $(\alpha):ax+by+cz+d=0$ (a, b, c, d là các số nguyên). Tính $S=\frac{a+b+c}{d}$.

A. 3. **B.** -3. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Dạng 1.3 Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. **B.** $3x-2y+6z=6$. **C.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $3x-2y+6z-12=0$.

Câu 52. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1), B(2;-1;4)$ và $C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 53. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=1, d=1$. **B.** $a=6, d=-6$. **C.** $a=-1, d=-6$. **D.** $a=-6, d=6$.

Câu 54. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;2)$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ?

A. $3x+5y+2z-60=0$. **B.** $10x+6y+15z-60=0$.

C. $10x+6y+15z-90=0$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$.

Câu 55. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x+2y-3z+4=0$. **C.** $3x-3y+z=0$. **D.** $x+y-2z+3=0$.

Câu 57. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;\ 3;\ 5)$, $B(3;\ 2;\ 4)$ và $C(4;\ 1;\ 2)$ có phương trình là

A. $x+y+5=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Câu 58. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

A. $2x+y+z+1=0$. **B.** $x-y+z-4=0$. **C.** $7x-2y+z-9=0$. **D.** $2x+y-z-2=0$.

Câu 59. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

A. $x+y-z-3=0$. **B.** $x+y-z-3=0$. **C.** $x+5y-7z-15=0$. **D.** $7x+5y-4z-15=0$.

Dạng 2. Một số bài toán liên đến khoảng cách - góc

Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt, khoảng cách giữa hai mặt

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P):ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song* $(P):ax+by+cz+d=0$ *và* $(Q):ax+by+cz+d'=0$ *có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d\big((Q),(P)\big)=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Viết phương trình $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0$ ***và cách*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***khoảng*** k.

Phương pháp:

- *Vì* $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0\Rightarrow(P):ax+by+cz+d'=0.$
- *Sử dụng công thức khoảng cách* $d_{[M,(P)]}=\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d'.$

Viết phương trình mặt phẳng $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0$ ***và*** (P) ***cách mặt phẳng*** (Q) ***một khoảng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Vì* $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0\Rightarrow(P):ax+by+cz+d'=0.$
- *Chọn một điểm* $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\in(Q)$ *và sử dụng công thức:*

$$d_{[(Q);(P)]}=d_{[M,(P)]}=\frac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d'.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) ***vuông góc với hai mặt phẳng*** (α), (β), ***đồng thời*** (P) ***cách điểm*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***một khoảng bằng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Tìm* $\vec{n}_{(\alpha)}$, $\vec{n}_{(\beta)}$. *Từ đó suy ra* $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]=(a;b;c).$
- *Khi đó phương trình* (P) *có dạng* $(P):ax+by+cz+d=0,$ *(cần tìm* d*).*
- *Ta có:* $d_{[M;(P)]}=k\Leftrightarrow\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d.$

Câu 1. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P):x+y-z+1=0$ và $(Q):x-y+z-5=0$ có tọa độ là

A. $M(0;-3;0)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M(0;-2;0)$. **D.** $M(0;1;0)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm2$.

Câu 3. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+z-1=0\\3x+y+7z+6=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+2y+z-1=0\\-2x+3y+6z+13=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x+y+2z-1=0 \\ -2x+3y+7z+23=0 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ -23x+37y+17z+23=0 \end{array}\right.$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$ **B.** $6x+3y+2z-12=0$

C. $6x+3y+2z=0$ **D.** $6x+3y+2z-36=0$

Câu 5. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P))=2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** 3.

Câu 7. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x-y+z=0$ và $2x-y+z-7=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 7. **B.** $7\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{7}$. **D.** $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z-16=0$ và $(Q): x+2y-2z-1=0$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** 6. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 10. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+3z-1=0$ và $(Q): x+2y+3z+6=0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): 6x+3y+2z-1=0$ và $(Q): x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+8=0$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn-2019)** Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là:

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$. **C.** 14. **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha):x-2y-2z+4=0$ và $(\beta):-x+2y+2z-7=0$.

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 14. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-2z-9=0$ và $(Q):4x-2y-4z-6=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-6=0$ và $(Q):x+2y-2z+3=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 17. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P).

A. $d=6$. **B.** $d=\frac{30}{13}$. **C.** $d=\frac{66}{13}$. **D.** $d=9$.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z-1=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3?

A. $(Q):2x+2y-z+10=0$. **B.** $(Q):2x+2y-z+4=0$.

C. $(Q):2x+2y-z+8=0$. **D.** $(Q):2x+2y-z-8=0$.

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P):2x+3y+z-17=0$.

A. $M(0;0;-3)$. **B.** $M(0;0;3)$. **C.** $M(0;0;-4)$. **D.** $M(0;0;4)$.

Câu 20. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1),B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P):ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 21. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$ là.

A. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z-17=0$ **B.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z+17=0$

C. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z+17=0$ **D.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z-17=0$

Câu 22. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x+y-z+6=0;\ x+y-z=0$. **B.** $x+y-z+6=0$.

C. $x-y-z+6=0;\ x-y-z=0$. **D.** $x+y+z+6=0;\ x+y+z=0$.

Câu 23. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(4;2;1)$, $B(0;0;3)$, $C(2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa OC và cách đều 2 điểm A, B.

A. $x-2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$. **B.** $x+2y+2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.

C. $x+2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$. **D.** $x+2y-2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.

Câu 24. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;-2;3), C(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ là

A. $x+y+z-1=0$ hoặc $-23x+37y+17z+23=0$.

B. $x+y+2z-1=0$ hoặc $-23x+3y+7z+23=0$.

C. $x+2y+z-1=0$ hoặc $-13x+3y+6z+13=0$.

D. $2x+3y+z-1=0$ hoặc $3x+y+7z-3=0$.

Câu 25. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $(Q): 2x-2y+z+4=0$. **B.** $(Q): 2x-2y+z-14=0$.

C. $(Q): 2x-2y+z-19=0$. **D.** $(Q): 2x-2y+z-8=0$.

Câu 26. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):\ x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (P) không qua O, song song với mặt phẳng (Q) và $d((P),(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z+1=0$ **B.** $x+2y+2z=0$ **C.** $x+2y+2z-6=0$ **D.** $x+2y+2z+3=0$

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$. **B.** $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z=0$. **D.** $6x+3y+2z-36=0$.

Câu 28. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$. **B.** $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$. **D.** $6x+2y-3z-5=0$.

Câu 29. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, (α) song song với đường thẳng CD. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+2-3=0$. **B.** $2x-y+z-2=0$. **C.** $2x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Dạng 2.2 Góc của 2 mặt phẳng

1. ***Góc giữa hai véctơ***

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \text{ với } 0°<\alpha<180°.$$

2. ***Góc giữa hai mặt phẳng***

Cho hai mặt phẳng $(P):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos((P),(Q))=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \text{ với } 0°<\alpha<90°.$$

Câu 30. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q):x+y-11=0$

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Câu 31. **(THPT Quang Trung Đống Đa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q):x+(2m-1)z+7=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\sqrt{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=4\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$ **B.** $M(0;-2019;0)$ **C.** $M(-2019;1;1)$ **D.** $M(0;0;-2019)$

Câu 34. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+5=0$ và $(Q): x-y+2=0$. Trên (P) có tam giác ABC; Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên (Q). Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2;-1;-2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x-y-5=0$ là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 36. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;\ 1;\ 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 37. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1), B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\frac{2}{7}$ là

A. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z-12=0\\2x+3y-6z=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}2x-3y+6z-12=0\\2x-3y-6z=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}2x-3y+6z-12=0\\2x-3y-6z+1=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z+12=0\\2x+3y-6z-1=0\end{array}\right.$

Câu 38. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(8;11)$.

Dạng 3. Vị trí tương đối

Dạng 3.1 Vị trí tương đối mặt phẳng với mặt cầu

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P).

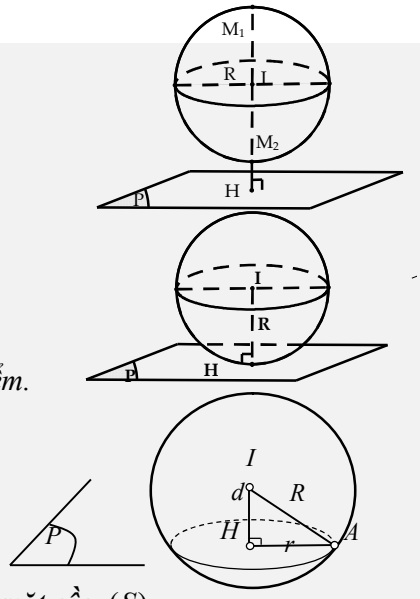
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P). Khi đó:

- *Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.*
- *Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.*

  Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.
- *Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện*

  là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.



Viết phương trình mặt $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0$ ***và tiếp xúc với mặt cầu*** (S).

Phương pháp:

- *Vì $(P) \| (Q): ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow (P): ax + by + cz + d' = 0.$*
- *Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu.*
- *Vì (P) tiếp xúc (S) nên có $d_{[I;(P)]} = R \Rightarrow d'.$*

Nguyễn Bảo Vương

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x + y + 3z - 9 = 0$ **B.** $x + y - 3z + 3 = 0$ **C.** $x + y - 3z - 8 = 0$ **D.** $x - y - 3z + 3 = 0$

Câu 2. **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r = \dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $r = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$.

Câu 4. **(SGD Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$. **B.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

C. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$. **D.** $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

Câu 5. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.
B. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.
D. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 7. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P): 2x-y+2z+4=0$ là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\dfrac{20}{3}$.
B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=\dfrac{400}{9}$.
C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{20}{3}$.
D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

Nguyễn Bảo Vương

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.
B. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$.
C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.
D. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 9. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$.
B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.
C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 10. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. 8.
B. $4\sqrt{6}$.
C. 10.
D. 6.

Câu 11. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P): x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).
B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
C. (P) và (S) không có điểm chung.
D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\frac{1}{3}$. **B.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\frac{1}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 14. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r=3$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=\sqrt{6}$. **D.** $r=\sqrt{14}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$.

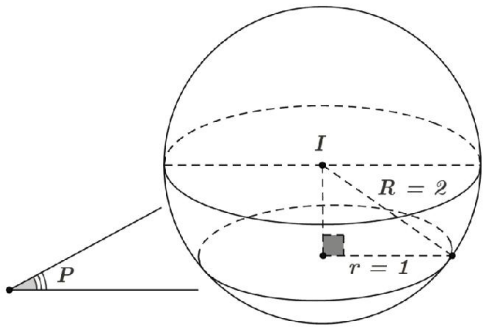
A. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\frac{3}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng (P): $x+my+z-3m-1=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.



A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-2$.
C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-1$

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz). Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $|b|=1$. **D.** $|c|=1$.

Câu 20. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+2z-11=0$ có phương trình là:

A. $2x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-y+2z+9=0$.
C. $2x-y+2z+7=0$. **D.** $2x-y+2z-9=0$.

Câu 21. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+z-2=0$ và $(Q):2x-y+z+1=0$. Số mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P):5x+y-6z+62=0$. **B.** $(P):5x+y-6z-62=0$.
C. $(P):5x-y-6z-62=0$. **D.** $(P):5x+y+6z+62=0$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2\mathrm{x}+2\mathrm{y}+\mathrm{z}-\mathrm{m}^2-3m=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-5$.

Câu 24. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $0xyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ có tâm I và mặt phẳng $(P):x+2y+2z+7=0$. Thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

A. 12π **B.** 48π **C.** 36π **D.** 24π

Câu 25. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z+5=0$.

Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (P) đi qua. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=\frac{5}{2}$. **B.** $S=-\frac{5}{2}$. **C.** $S=\frac{9}{2}$. **D.** $S=-\frac{9}{2}$.

Câu 26. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27. **(Sở Hà Nam - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $(6;0;1)$. **B.** $(-3;1;4)$. **C.** $(-2;-1;5)$. **D.** $(4;-1;-2)$.

Câu 28. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 29. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}-1$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q):x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2;-2;1)$. **B.** $(1;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-5)$. **D.** $(-2;2;-1)$.

Câu 31. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$. Phương trình mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(0;4;-2)$ là

A. $x+6y-6z+37=0$ **B.** $x-2y-2z-4=0$ **C.** $x-2y-2z+4=0$ **D.** $x+6y-6z-37=0$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng (P): $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Câu 33. **(THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\mathrm{P}):\mathrm{mx}+2\mathrm{y}-\mathrm{z}+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(\mathrm{S}):(\mathrm{x}-2)^2+(\mathrm{y}-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

A. $\mathrm{m}=\pm 1$. **B.** $\mathrm{m}=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $\mathrm{m}=\pm 4$. **D.** $\mathrm{m}=6\pm 2\sqrt{5}$.

Câu 34. **(Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q):y+3z=0$. **B.** $(Q):x+y-2z=0$. **C.** $(Q):y-z=0$. **D.** $(Q):y-2z=0$.

Câu 35. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z+8=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P):

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

Câu 36. Trong không gian **với** hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(0;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$?

A. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=3$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 37. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+4=0$ là

A. $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z+21=0$. **B.** $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+10z+21=0$.

C. $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z-21=0$. **D.** $(S):x^2+y^2+z^2+x-2y-5z-21=0$.

Câu 38. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3.$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3.$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9.$

Câu 39. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P):x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4.$ **B.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25.$

C. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5.$ **D.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2.$

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 41. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.

C. $2x+2y+z+2=0$ **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-4$.

Câu 43. **(THPT Kinh Môn - HD - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

Nguyễn Bảo Vương

A. $\left[\begin{array}{l} x-2y+z+3=0 \\ x-2y+z-21=0 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 3x+y+4z+1=0 \\ 3x+y+4z-2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 4x-3y-z+5=0 \\ 4x-3y-z-27=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$.

Câu 44. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $x-2y-2z+1=0$. **B.** $-x+2y+2z+5=0$.

C. $x-2y-2z-23=0$. **D.** $-x+2y+2z+17=0$.

Câu 45. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Câu 46. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh – 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Câu 47. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-7=0$. Biết $mp(Q)$ cắt mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-2y+z-7=0$.

C. $2x-2y+z-17=0$. **D.** $2x-2y+z+17=0$.

Dạng 3.2 Vị trí tương đối hai mặt

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

- (P) *cắt* $(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}.$
- $(P)\parallel(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}.$
- $(P)\equiv(Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}.$
- $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

Câu 48. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m,n\in\mathbb{R}$. Xác định m, n để (P) song song với (Q).

A. $m=n=-4$. **B.** $m=4;n=-4$. **C.** $m=-4;n=4$. **D.** $m=n=4$.

Câu 49. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và $(Q): mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=6$

Câu 50. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, tìm tập hợp các điểm cách đều cặp mặt phẳng sau đây: $4x-y-2z-3=0$, $4x-y-2z-5=0$.

A. $4x-y-2z-6=0$. **B.** $4x-y-2z-4=0$. **C.** $4x-y-2z-1=0$. **D.** $4x-y-2z-2=0$.

Câu 51. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$; $(Q): 2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của $(R): m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** -3.

Câu 52. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Câu 53. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b.c \neq 0$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Mối liên hệ giữa b,c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $2b=c$. **B.** $b=2c$. **C.** $b=c$. **D.** $b=3c$.

Câu 54. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): 4x+(2-m)y+mz-3=0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$ và $(Q): x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

A. -16. **B.** -8. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 56. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2019)** Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A. $(Q): x+2y-2z+8=0$. **B.** $(Q): x+2y-2z+5=0$.

C. $(Q): x+2y-2z+1=0$. **D.** $(Q): x+2y-2z+2=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 58. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x+y+z+3=0$, cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a;b;c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a+b+c<-2$?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 59. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2): 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là:

A. $(P): 3x-y+4z+10=0$. **B.** $(P): 3x-y+4z+5=0$.

C. $(P): 3x-y+4z-10=0$. **D.** $(P): 3x-y+4z-5=0$.

Câu 60. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=3$.

Câu 61. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các

trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 9.

Câu 62. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$. **B.** $2x+y+3z+9=0$. **C.** $3x+2y+z-14=0$. **D.** $2x+y+z-9=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán liên khác quan điểm – mặt phẳng – mặt cầu

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x+2y+2z+15=0$ **B.** $x+y+z+7=0$

C. $2x+2y+2z-15=0$ **D.** $x+y+z-7=0$

Câu 2. **(Sở Bắc Giang Năm 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y+6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y-6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 8 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 6

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, thì giá trị của k là

A. 45. **B.** 50. **C.** -45. **D.** -50.

Câu 7. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 8. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 243π. **B.** 81π. **C.** $\frac{81}{2}\pi$. **D.** $\frac{243\pi}{2}$.

Câu 9. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1), B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

A. $r=4$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Câu 11. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}: d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta): \frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x=1, (Q): y=-1$ và $(R): z=1$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 8 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Câu 15. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = \sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 16. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

A. 14. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 18. **(Sở Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x + 2y + z - 1 = 0$. **B.** $2x + 2y + z - 3 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 1 = 0$. **D.** $2x + 2y + z - 5 = 0$.

Câu 19. **(Hội 8 Trường Chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và (S'): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\frac{14}{3}$. **B.** $\frac{17}{7}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{19}{2}$.

Câu 20. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2+1)y + (m^2-1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x + y + z - 6 = 0$. **B.** $x + y + z - 4 = 0$

C. $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi đó m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{\frac{142}{15}}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{92}{3}}$. **C.** $r=\sqrt{\frac{23}{3}}$. **D.** $r=\sqrt{\frac{586}{15}}$.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Tìm khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\frac{15}{\sqrt{23}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{915}}$. **C.** $\frac{9}{\sqrt{15}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{314}}$.

Câu 24. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0),B(-2;2;-1),C(5;-1;3)$. Tích abc bằng

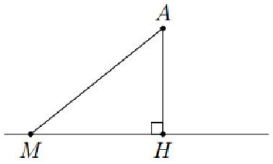
A. 6 **B.** –6 **C.** 0 **D.** 5

Dạng 2. Cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \ge AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A,B,C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB+BC \ge AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1,A_2,....A_n$ ta luôn có

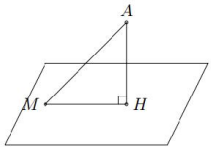
$A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n \ge A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x,y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \ge 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ ta luôn có $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}=k\vec{b},k\in\mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

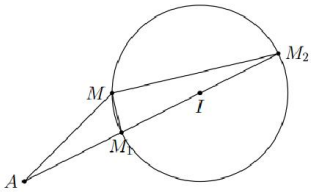


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại . M ta có $AM \ge AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM.



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)(AM_1 < AM_2)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$AI - R = AM_1 \le AM \le AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$R - AI \le AM \le R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho măt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điể M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

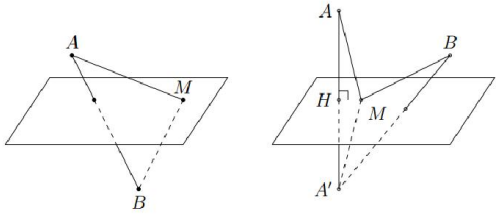
$AM + BM \ge AB$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó

$AM + BM = A'M + BM \ge A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM - BM| \le AB$

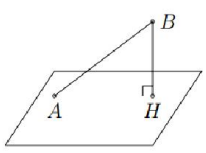
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM - BM| = |A'M - BM| \le A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh măt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$\mathrm{d}(B,(P)) = BH \le BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm $A, B,$ C. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$P = (\alpha + \beta)\mathrm{d}(A,(P)) \le (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $I\vec{B} = \dfrac{\alpha}{\beta} I\vec{D}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \cdot \dfrac{IB}{ID} \cdot \mathrm{d}(D,(P)) = 2\alpha \mathrm{d}(E,(P)) \le 2(\alpha + \beta)EC$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và $(P), B'$ là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(A_i,(P)\right) = n\mathrm{d}(G,(P)) \le nGA$

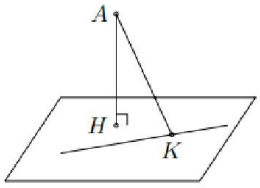
Nguyễn Bảo Vương

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m + k = n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó

$P = m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right) + k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$\mathrm{d}(A,(P)) = AH \le AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét véc tơ

$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 M\overrightarrow{A_2} + \cdots + \alpha_n M\overrightarrow{A_n}$

Trong đó $\alpha_1; \alpha_2 \ldots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \ne 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1; 2; \ldots; n,$ nên

$\overrightarrow{w}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\vec{MG}+\alpha_1\vec{GA_1}+\alpha_2\vec{GA_2}+\cdots+\alpha_n\vec{GA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$

Do đó

$|\vec{w}|=|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|\cdot|\vec{MG}|$

Vì $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M\in(P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z, cho các điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Xét biểu thức:

$T=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+\cdots+\alpha_nMA_n^2$

Trong đó $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$.

2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1\vec{GA_1}+\alpha_2\vec{GA_2}+\cdots+\alpha_n\vec{GA_n}=\vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA_k}=\vec{MG}+\vec{GA_k}$ với $k=1;2;\ldots;n,$ nên

$MA_k^2=\left(\overrightarrow{MG}+\vec{GA_k}\right)^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\vec{GA_k}+GA_k^2$

Do đó

$T=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)MG^2+\alpha_1GA_1^2+\alpha_2GA_2^2+\cdots+\alpha_nGA_n^2$

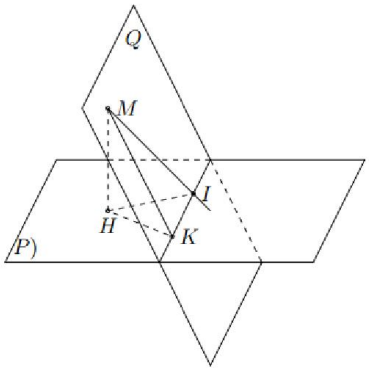
Vì $\alpha_1GA_1^2+\alpha_2GA_2^2+\cdots+\alpha_nGA_n^2$ không đổi nên

• với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

• với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M\in(P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M\in d,M\neq I$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi=\widehat{MKH}$, do đó

$\tan\phi=\dfrac{HM}{HK}\geq\dfrac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $(\vec{n}_P\wedge\vec{u}_d)\wedge\vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

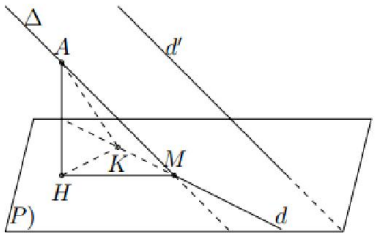
- Goi $\vec{n}=(a;b;c),a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$\cos\phi=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_P|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_P|}=f(t)$

với $t=\dfrac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi=\widehat{AMH}$ và $\cos\phi=\dfrac{HM}{AM}\geq\dfrac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d\wedge\vec{u}_{d'}\right)\wedge\vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (P). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{u}_{d'}\right|}=f(t)$$

với $t=\dfrac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Dạng 2.1. Cực trị liên quan đến bán kính, diện tích, chu vi, thể tích

Câu 1. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$ **B.** $T=4$ **C.** $T=5$ **D.** $T=2$

Câu 2. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng

A. 12. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P):x-2y+3z-6=0$. **B.** $(P):x+2y+3z-6=0$.

C. $(P):3x+2y+2z-4=0$. **D.** $(P):x+2y+z-2=0$.

Câu 5. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Câu 7. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-1), B(-1;-3;1)$. Giả sử C,D là hai điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y-2z-1=0$ sao cho $CD=4$ và A,C,D thẳng hàng. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác BCD. Khi đó tổng S_1+S_2 có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{37}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $x-y+2z-1=0$ và các điểm $A(0;1;1);B(1;0;0)$ (A và B nằm trong mặt phẳng (P)) và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. CD là đường kính thay đổi của (S) sao cho CD song song với mặt phẳng (P) và bốn điểm A,B,C,D tạo thành một tứ diện. Giá trị lớn nhất của tứ diện đó là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y+44z-39=0$ **B.** $16x-40y-44z+39=0$

C. $16x+40y-44z+39=0$ **D.** $16x-40y-44z-39=0$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4), B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-4=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

A. $T=\frac{1}{5}$. **B.** $T=\frac{3}{4}$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-2$.

Câu 11. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2)\in(P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C (A,B,C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(0;2;2)$ **B.** $M(0;2;1)$ **C.** $P(2;0;0)$ **D.** $Q(2;0;-1)$

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{243}{2}$. **C.** $\frac{81}{6}$. **D.** 243.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{3}$.

Dạng 2.2. Cực trị liên quan đến giá trị biểu thức

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145 **B.** 135 **C.** 105 **D.** 108

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Câu 17. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q):x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{22}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{26}{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1;3;5)$; $B(2;6;-1)$; $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42 **B.** 14 . **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T=\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Câu 20. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Câu 21. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -8.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng

A. $\frac{13}{6}$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của MA^2+2MB^2 bằng

A. 102. **B.** 78. **C.** 84. **D.** 52.

Câu 24. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Câu 25. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Câu 26. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;-2;6);B(2;4;2);M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, khi đó tọa độ của M là

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$ **B.** $(4;3;1)$ **C.** $(1;3;4)$ **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$

Câu 28. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P):4x+3y+2=0$.

A. $\frac{17}{5}$. **B.** 6. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** 9.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2),B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M,N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2+3BN^2$ bằng

A. 49,8. **B.** 45. **C.** 53. **D.** 55,8.

Câu 31. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Câu 32. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho x,y,z,a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1.$ **B.** $\sqrt{3}+1.$ **C.** $4-2\sqrt{3}.$ **D.** $4+2\sqrt{3}.$

Câu 33. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 34. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Dạng 2.3. Cực trị liên quan đến góc, khoảng cách

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$ với a,b,c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{51}{5}.$ **B.** $S=\frac{49}{4}.$ **C.** $S=\frac{49}{5}.$ **D.** $S=\frac{51}{4}.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 36. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Câu 37. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giải sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=4$. **B.** $m.n=2$. **C.** $m.n=-4$. **D.** $m.n=-2$.

Câu 38. Cho x,y,z là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

A. $\max P=20$. **B.** $\max P=-18$. **C.** $\max P=18$. **D.** $\max P=12$.

Câu 39. **(Sở Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0),N(0;n;0),P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, $T=m+n+p$ bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P): ax+b\,y+c\,z-3=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $P=a-2b+3c+12$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Câu 43. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+2z=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

A. $y-2z=0$. **B.** $y-z=0$. **C.** $2y+z=0$. **D.** $x+z=0$.

Câu 44. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P): 3x+3y+3z-10=0$. **B.** $(P): x+y+z-1=0$.

C. $(P): x+y+z-10=0$. **D.** $(P): x+y+z+10=0$.

Câu 45. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a,b,c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) có giá trị lớn nhất bằng:

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 46. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng

A. $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$. **B.** $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Câu 47. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho $A(4;5;6); B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+1=0$.

Khi đó $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2<m<6$. **B.** $m>6$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-6<m<2$.

Câu 49. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x-2y+2z+5=0$. **B.** $x-y+2z+3=0$.

C. $2x-2y+4z+3=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Câu 50. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $d=\frac{36}{7}$. **B.** $d=\frac{24}{5}$. **C.** $d=\frac{8}{3}$. **D.** $d=\frac{26}{\sqrt{14}}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $d=\frac{36}{7}$ **B.** $d=\frac{24}{5}$ **C.** $d=\frac{8}{3}$ **D.** $d=\frac{26}{\sqrt{14}}$

Câu 52. **(THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 53. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn: $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết độ dài đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

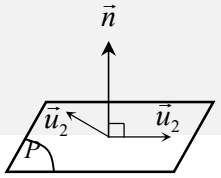
A. $2\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định véc tơ pháp tuyến

- *Véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là véctơ có giá vuông góc với (P). Nếu $\vec{n}$ là một véctơ pháp tuyến của (P) thì $k.\vec{n}$ cũng là một véctơ pháp tuyến của (P).*
- *Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]$.*
- *Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)$.*



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_2}=(3;2;4)$. **B.** $\overrightarrow{n_3}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(3;-4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;2;-4)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;2;-4)$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+2=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3(2;3;2)$. **B.** $\vec{n}_1(2;3;0)$. **C.** $\vec{n}_2(2;3;1)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Lời giải

Chọn C

Véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2;3;1)$.

Câu 3. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-z+3=0$. Véctơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-2;4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;4;1)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-z+3=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;-1)$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+4z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;-3;4)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;3;-4)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(2;3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-2;3;4)$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+4z-1=0$ là $\overrightarrow{n_3}=(2;-3;4)$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+3z+5=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(-2;1;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_1}=(2;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x-2y+4z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)?

A. $\vec{n_3}=(1;-2;4)$. **B.** $\vec{n_1}=(1;2;-4)$. **C.** $\vec{n_2}=(1;2;4)$. **D.** $\vec{n_4}=(-1;2;4)$

Lời giải

Chọn A.

Câu 7. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n_2}=(3;0;-1)$ **B.** $\vec{n_1}=(3;-1;2)$ **C.** $\vec{n_3}=(3;-1;0)$ **D.** $\vec{n_4}=(-1;0;-1)$

Lời giải

Chọn A

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):3x-z+2=0$ là $\vec{n_2}=(3;0;-1)$.

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):2x+y+3z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;1;3)$ **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-1;3;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_4}=(1;3;2)$ **D.** $\overrightarrow{n_1}=(3;1;2)$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P):2x+y+3z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $(2;1;3)$.

Câu 9. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(1;2;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(1;2;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}=(1;3;-1)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(2;3;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt phẳng (P) suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\overrightarrow{n_4}=(1;2;3)$.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Trong không giam $Oxyz$, mặt phẳng $(P):2x+3y+z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-1)$ **B.** $\overrightarrow{n_3}=(1;3;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_4}=(2;3;1)$ **D.** $\overrightarrow{n_2}=(-1;3;2)$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(P):2x+3y+z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_4}=(2;3;1)$.

Câu 11. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+3z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_3}=(2;3;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_1}=(2;-1;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1;3)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(P):2x-y+3z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$

Câu 12. **(Mã 103 -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-3y+z-2=0$. Véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **B.** $\vec{n}_4=(2;1;-2)$. **C.** $\vec{n}_3=(-3;1;-2)$. **D.** $\vec{n}_2=(2;-3;-2)$.

Lời giải

Chọn A

$(P):2x-3y+z-2=0$. Véctơ $\vec{n}_1=(2;-3;1)$ là một véctơ pháp tuyến của (P).

Câu 13. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x+3y+z-1=0$. Véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P)

A. $\vec{n}_4=(3;1;-1)$. **B.** $\vec{n}_3=(4;3;1)$. **C.** $\vec{n}_2=(4;-1;1)$. **D.** $\vec{n}_1=(4;3;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$(P):4x+3y+z-1=0$.

Véctơ $\vec{n}_3=(4;3;1)$ là một véctơ pháp tuyến của (P).

Câu 14. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P):3x+2y+z-4=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\overrightarrow{n_2}=(3;2;1)$ **B.** $\overrightarrow{n_1}=(1;2;3)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-1;2;3)$ **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;2;-3)$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P):3x+2y+z-4=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(3;2;1)$.

Câu 15. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+2y+3z-5=0$ có một véc tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_3=(-1;2;3)$ **B.** $\vec{n}_4=(1;2;-3)$ **C.** $\vec{n}_2=(1;2;3)$ **D.** $\vec{n}_1=(3;2;1)$

Lời giải

Chọn C

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):x+2y+3z-5=0$ là: $\vec{n}_2=(1;2;3)$.

Câu 16. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$ **B.** $\vec{m}=(1;1;1)$ **C.** $\vec{j}=(0;1;0)$ **D.** $\vec{k}=(0;0;1)$

Lời giải

Chọn D

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với trục Oz nên nhận véctơ $\vec{k}=(0;0;1)$ làm một véc tơ pháp tuyến

Câu 17. **(THPT Lý Thái Tổ 2019)** Cho mặt phẳng $(\alpha):2x-3y-4z+1=0$. Khi đó, một véc tơ pháp tuyến của (α)

A. $\vec{n}=(2;3;-4)$. **B.** $\vec{n}=(2;-3;4)$. **C.** $\vec{n}=(-2;3;4)$. **D.** $\vec{n}=(-2;3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y-4z+1=0$ có một véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_0}=(2;-3;-4)$.

Nhận thấy $\vec{n}=(-2;3;4)=-\overrightarrow{n_0}$, hay $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_0}$.

Do đó véc tơ $\vec{n}=(-2;3;4)$ cũng là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-z+2=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_4}=(-1;0;-1)$ **B.** $\overrightarrow{n_1}=(3;-1;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;0)$ **D.** $\overrightarrow{n_2}=(3;0;-1)$

Lời giải

Chọn D

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+1=0$?

A. $\vec{a}=(2;-3;1)$ **B.** $\vec{b}=(2;1;-3)$ **C.** $\vec{c}=(2;-3;0)$ **D.** $\vec{d}=(3;2;0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}=(2;-3;0)=\vec{c}$.

Câu 20. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$ là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$ **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$ **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$ **D.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Phương trình $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{3}z-1=0.\Leftrightarrow 3x+6y-2z+6=0.$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n}=(3;6;-2)$.

Câu 21. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): 2x-6y-8z+1=0$. Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là:

A. $(-1;\ -3;\ 4)$ **B.** $(1;\ 3;\ 4)$ **C.** $(1;-3;-4)$ **D.** $(1;-3;\ 4)$

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P): 2x-6y-8z+1=0$ nên một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là $(2;-6;-8)$ hay $(1;-3;-4)$.

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 2y-3z+1=0$?

A. $\overrightarrow{u_4}=(2;0;-3)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(0;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(2;-3;0)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{u_2}=(0;2;-3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 2y-3z+1=0$.

Câu 23. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho mặt phẳng $(P): 3x-y+2=0$. Véc tơ nào trong các véctơ dưới đây là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $(3;-1;2)$. **B.** $(-1;0;-1)$. **C.** $(3;0;-1)$. **D.** $(3;-1;0)$.

Lời giải

Một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):3x-y+2=0$ là $(3;-1;0)$.

Dạng 2. Xác định phương trình mặt phẳng

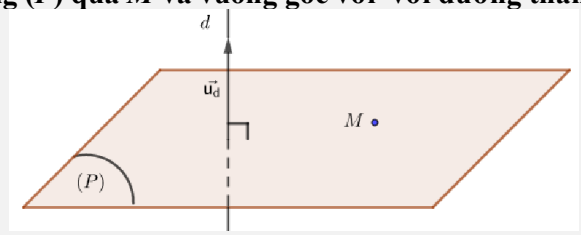
- Mặt phẳng $(P)\begin{cases}\text{qua } M(x_0;y_0;z_0)\\ VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)\end{cases}$ thì phương trình $(P):\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ (*)

Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$, mặt phẳng này có $VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

- Các mặt phẳng cơ bản

$$\boxed{\begin{array}{l} mp(Oyz):x=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oyz)}}=(1;0;0)\\ mp(Oxz):y=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oxz)}}=(0;1;0)\\ mp(Oxy):z=0\xrightarrow{VTPT}\overrightarrow{n_{(Oxy)}}=(0;0;1)\end{array}}$$

Viết phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M* và vuông góc với với đường thẳng *AB* cho trước.



Mặt phẳng (P) qua M, có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{AB}$ nên phương trình được viết theo (*).

Câu 24. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

A. $x=0$ **B.** $z=0$ **C.** $x+y+z=0$ **D.** $y=0$

Lời giải

Chọn D

Câu 25. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$ **B.** $x=0$ **C.** $y-z=0$ **D.** $z=0$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oyz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$ nên ta có phương trình mặt phẳng (Oyz) là : $1(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0\Leftrightarrow x=0$.

Câu 26. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $x=0$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 27. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx?

A. $x=0$. **B.** $y-1=0$. **C.** $y=0$. **D.** $z=0$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng Ozx đi qua điểm $O(0;0;0)$ và vuông góc với trục Oy nên có VTPT $\vec{n}=(0;1;0)$. Do đó phương trình của mặt phẳng Ozx là $y=0$.

Câu 28. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z=0$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x+y=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Oxy) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$, nhận vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$ là vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình tổng quát: $0.(x-0)+0.(y-0)+1.(z-0)=0 \Rightarrow (Oxy): z=0$.

Câu 29. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$.

A. $x-2y+3z+12=0$ **B.** $x-2y-3z-6=0$ **C.** $x-2y+3z-12=0$ **D.** $x-2y-3z+6=0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;3)$ là

$1(x-1)-2(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+3z+12=0$.

Câu 30. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$) và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $x+y+2z-3=0$ **B.** $x+y+2z-6=0$ **C.** $x+3y+4z-7=0$ **D.** $x+3y+4z-26=0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;1)$ và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(1;1;2)$ là vectơ pháp tuyến

$(P): 1(x-0)+1(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-3=0$.

Câu 31. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $2x-3y-z-20=0$ **B.** $3x-y+3z-25=0$ **C.** $2x-3y-z+8=0$ **D.** $3x-y+3z-13=0$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)=-2(2;-3;-1)$

(P) đi qua $A(5;-4;2)$ nhận $\vec{n}=(2;-3;-1)$ làm VTPT

(P): $2x-3y-z-20=0$

Câu 32. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+3y+z-5=0$ **B.** $x+3y+z-6=0$ **C.** $3x-y-z-6=0$ **D.** $3x-y-z+6=0$

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB}(3;-1;-1)$. Do mặt phẳng (α) cần tìm vuông góc với AB nên (α) nhận $\overrightarrow{AB}(3;-1;-1)$ làm vtpt. Suy ra, phương trình mặt phẳng $(\alpha): 3(x+1)-(y-2)-(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-z+6=0$.

Câu 33. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $3x+2z+1=0$ **B.** $x+2y-2z+1=0$ **C.** $x+2y-2z-1=0$ **D.** $3x+2z-1=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;2)$ là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n}=-\overrightarrow{BC}=(1;2;-2)$ cũng là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x+2y-2z+1=0$.

Câu 34. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là?

A. $3x-y+3z-25=0$ **B.** $2x-3y-z+8=0$ **C.** $3x-y+3z-13=0$ **D.** $2x-3y-z-20=0$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB nên nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến, $\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)$

Mặt phẳng đi qua $A(5;-4;2)$ và có vectơ pháp tuyến, $\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)$ có phương trình

$-4(x-5)+6(y+4)+2(z-2)=0$ hay $2x-3y-z-20=0$. Vậy chọn **D.**

Câu 35. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$ đồng thời vuông góc với giá của vecto $\vec{a}=(1;-1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+4z-12=0$. **B.** $3x-y+4z+12=0$. **C.** $x-y+2z-12=0$. **D.** $x-y+2z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

(P) có dạng: $1.(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0$.

Câu 36. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $x-2y-5z-5=0$. **B.** $2x-y+5z-5=0$. **C.** $x-2y-5=0$. **D.** $x-2y-5z+5=0$.

Lời giải

Do mặt phẳng vuông góc với BC nên $\overrightarrow{BC}=(1;-2;-5)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Vì vậy phương trình mặt phẳng là : $1(x-2)-2(y-1)-5(z+1)=0 \Leftrightarrow x-2y-5z-5=0$.

Câu 37. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(2;0;1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-4=0$. **D.** $x-y-z+2=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là:

$(x-1)-(y-1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow x-y-z+2=0$.

Câu 38. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$ và $B(2;3;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với AB là

A. $2x+y-z-3=0$. **B.** $x+y-z+3=0$. **C.** $x+y-z-3=0$. **D.** $x-y-z-3=0$.

Lời giải

Chọn C

➢ $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$.

➢ Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $x-1+y-2-z=0 \Leftrightarrow x+y-z-3=0$.

Câu 39. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$ có phương trình là

A. $3x-y+4z-12=0$. **B.** $3x-y+4z+12=0$.

C. $x-y+2z-12=0$. **D.** $x-y+2z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3;-1;4)$ đồng thời vuông góc với giá của $\vec{a}=(1;-1;2)$ nên nhận $\vec{a}=(1;-1;2)$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó, (P) có phương trình là

$1(x-3)-1(y+1)+2(z-4)=0 \Leftrightarrow x-y+2z-12=0$.

Vậy, ta chọn

C.

Câu 40. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x-y+3z-4=0$.

C. $x-2y-4=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là

$2.(x-1)-1.(y-2)+3.(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-2-y+2+3z+9=0$

$\Leftrightarrow 2x-y+3z+9=0$.

Câu 41. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và vuông góc với giá của vécto $\vec{v}=(-1;2;3)$ là

A. $x-2y-3z-4=0$. **B.** $x-2y+3z-4=0$.

C. $x-2y-3z+4=0$. **D.** $-x+2y-3z+4=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và vuông góc với giá của vécto $\vec{v}=(-1;2;3)$ là:

$-1(x-1)+2(y+2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow -x+2y+3z-4=0 \Leftrightarrow x-2y-3z+4=0$.

Câu 42. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ là

A. $4x-2y+3z-9=0$. **B.** $4x-2y-3z-15=0$.

C. $3x-z-15=0$. **D.** $4x-2y-3z+15=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng đi qua điểm $A(3;0;-1)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;-3)$ có phương trình:

$4(x-3)-2(y-0)-3(z+1)=0 \Leftrightarrow 4x-2y-3z-15=0$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ là

A. $x-2y-2z-1=0$. **B.** $-x+y-2z-1=0$. **C.** $x-2y-2z+7=0$. **D.** $-x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua $A(-1;1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;-2)$ nên có phương trình

$(x+1)-2(y-1)-2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z-1=0$.

Vậy mặt phẳng cần tìm có phương trình: $x-2y-2z-1=0$.

Câu 44. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-1;0;1), B(2;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB.

A. $(P):3x+y-z+4=0$. **B.** $(P):3x+y-z-4=0$.

C. $(P):3x+y-z=0$. **D.** $(P):2x+y-z+1=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) qua điểm $A(-1;0;1)$ và vuông góc với đường thẳng AB nên có 1 véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(3;1;-1) \Rightarrow (P):3(x+1)+1(y-0)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y-z+4=0$.

Câu 45. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A. $y+2z-5=0$. **B.** $2x-y-1=0$. **C.** $2x-y+1=0$. **D.** $-y+2z-5=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: $\overrightarrow{BC}=(-4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng:

$-4(x-0)+2(y-1)+0(z-2)=0 \Leftrightarrow -4x+2y-2=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Câu 46. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x-2y+4z-21=0$. **B.** $2x-2y+4z+21=0$

C. $3x-2y+z-12=0$. **D.** $3x-2y+z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$3(x-2)-2(y+1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-12=0$.

Câu 47. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-2)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là:

A. $2x+y-2x+9=0$. **B.** $2x+y-2z-9=0$

C. $3x-2y+z+2=0$. **D.** $3x-2y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) có dạng: $3x-2x+z+D=0$.

Mặt phẳng (Q) qua điểm $M(2;1;-2)$, do đó: $3.2-2.1+(-2)+D=0 \Leftrightarrow D=-2$.

Vậy $(Q):3x-2y+z-2=0$.

Câu 48. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+11=0$. **B.** $2x-y+3z-14=0$.

C. $3x-2y+z-11=0$. **D.** $2x-y+3z+14=0$.

Lời giải

Chọn C

(P) nhận $\vec{n}=(3;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến

Mặt phẳng đã cho song song với (P) nên cũng nhận nhận $\vec{n}=(3;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến

Vậy mặt phẳng đi qua M và song song với (P) có phương trình là

$3(x-2)-2(y+1)+(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-11=0$

Câu 49. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+z-3=0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A. $3x-2y+z+1=0$. **B.** $3x-2y+z-1=0$. **C.** $2x+y-3z+14=0$. **D.** $2x+y-3z-14=0$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Q) cần tìm song song với mặt phẳng $(P):3x-2y+z-3=0$ nên có phương trình dạng

$$(Q):3x-2y+z+m=0,\ m\neq -3$$

Vì $M\in(Q)$ nên $(Q):3.2-2.1+(-3)+m=0 \Leftrightarrow m=-1$

Vậy $(Q):3x-2y+z-1=0$.

Câu 50. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha):3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)?

A. $3x-y+2z-6=0$ **B.** $3x-y+2z+6=0$

C. $3x-y-2z+6=0$ **D.** $3x+y+2z-14=0$

Lời giải

Chọn A

Gọi $(\beta)//(\alpha)$, PT có dạng $(\beta):3x-y+2z+D=0$ (điều kiện $D\neq 4$);

Ta có: (β) qua $M(3;-1;-2)$ nên $3.3-(-1)+2.(-2)+D=0 \Leftrightarrow D=-6$ (thoả đk);

Vậy $(\beta):3x-y+2z-6=0$

Câu 51. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+2=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z+11=0$ **B.** $2x-y-3z+11=0$

C. $2x-y+3z-11=0$ **D.** $2x+y+3z-9=0$

Lời giải

Chọn C

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua điểm $A(2;-1;2)$ và song song với mặt phẳng (P).

Do $(Q)//(P)$ nên phương trình của (Q) có dạng $2x-y+3z+d=0$ $(d\neq 2)$.

Do $A(2;-1;2)\in(Q)$ nên $2.2-(-1)+3.2+d=0 \Leftrightarrow d=-11$ (nhận).

Vậy $(Q):2x-y+3z-11=0$.

Câu 52. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+4=0$ là:

A. $2x+y+3z+7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.

C. $2x-y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z-7=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(\alpha)//(P)\Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$

Ta có: (α) đi qua $A(1;3;-2)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-1;3)$.

Do đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là:

$2(x-1)-1(y-3)+3(z+2)=0$ hay $2x-y+3z+7=0$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-1=0$ có phương trình là

A. $2x-2y+z+2=0$ **B.** $2x-2y+z=0$

C. $2x-2y+z-6=0$ **D.** $(\alpha):2x-2y+z-2=0$

Lời giải

Chọn A

Có (P) song song $(\alpha):2x-2y+z-1=0$ nên $(P):2x-2y+z+m=0$, với $m\neq -1$.

Do (P) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0\Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy măt phẳng cần tìm là $(P):2x-2y+z+2=0$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(Q):3x-2y+4z-4=0.$ **B.** $(Q):3x-2y+4z+4=0.$

C. $(Q):3x-2y+4z+5=0.$ **D.** $(Q):3x+2y+4z+8=0.$

Lời giải

Chọn B

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q):\ 3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.

Câu 55. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;6)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x+2y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M và song song với mặt phẳng (α).

A. $(\beta):x+2y+2z-13=0$. **B.** $(\beta):x+2y+2z-15=0$.

C. $(\beta):x+2y+2z+15=0$. **D.** $(\beta):x+2y+2z+13=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) nên có dạng $x+2y+2z+m=0\ (m\neq -1)$.

Do $M\in(\beta)$ nên ta có: $1+2.0+2.6+m=0\Leftrightarrow m+13=0\Leftrightarrow m=-13$ (thỏa mãn).

Vậy $(\beta):x+2y+2z-13=0$.

Câu 56. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(0;1;0)$ và $C(0;0;-2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **D.** $\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B.

$(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ hay $(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **D** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 59. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-3}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ (với $abc\neq 0$) có dạng

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=-1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $M(2;0;0), N(0;-1;0), P(0;0;2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 61. **(Đề thử nghiệm THPT QG 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới dây là phương trình mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{1}=1$. **B.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-2}=1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua 3 điểm A, B, C là $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 62. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;0;3)$ là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=0$. **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $A\in Oy, B\in Ox, C\in Oz$ nên phương trình mặt phẳng (α) là $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 63. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;2;0)$, $P(0;0;3)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $6x+3y+2z-6=0$. **B.** $6x+3y+2z+1=0$.

C. $6x+3y+2z-1=0$. **D.** $x+y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (MNP) có phương trình là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$.

Câu 64. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, B(0;-1;0), C(0;0;-3). Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $-3x+6y-2z+6=0$. **B.** $-3x-6y+2z+6=0$.

C. $-3x+6y+2z+6=0$. **D.** $-3x-6y+2z-6=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(2;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;-3)$ suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình đoạn chắn là : $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-3}=1 \Leftrightarrow -3x+6y+2z+6=0$

Câu 65. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ là

A. $4x-3y+6z+12=0$. **B.** $4x+3y+6z+12=0$.

C. $4x+3y-6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$ là

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow 4x-3y+6z+12=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 66. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;0;7)$ và $C(0;3;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{7}+\frac{z}{3}=1$ **B.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=0$ **C.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=1$ **D.** $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}+1=0$

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;0;7)$ và $C(0;3;0)$ là

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=1$

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua ba điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-3)$ có phương trình là

A. $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=-1$. **B.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-3}=1$

Câu 68. **(Chuyên Thái Bình -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox,Oy,Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $-\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Ta có $A(1;0;0),B(0;2;0),C(0;0;3)$ lần lượt là hình chiếu của M lên Ox,Oy,Oz.

Phương trình đoạn chắn có dạng: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 69. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3;0;0)$; $B(0;4;0)$ và $C(0;0;-2)$ là.

A. $4x-3y+6z+12=0$. **B.** $4x+3y+6z+12=0$.

C. $4x+3y-6z+12=0$. **D.** $4x-3y+6z-12=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow 4x-3y+6z+12=0$.

Câu 70. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;5)$ có phương trình là

A. $15x+5y+3z+15=0$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}+1=0$.

C. $x+3y+5z=1$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình mặt phẳng qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;5)$ là $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$.

Câu 71. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;3)$ là

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=-1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;3)$ là:

$\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 72. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $-3x+6y-2z+6=0$. **B.** $-3x-6y+2z+6=0$.

C. $-3x+6y+2z+6=0$. **D.** $-3x-6y+2z-6=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) (theo đoạn chắn) là

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow -3x+6y+2z+6=0$.

Câu 73. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=1$. **C.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1}=1$. **D.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=-1$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (ABC) có phương trình đoạn chắn là $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow \frac{x}{1}-\frac{y}{3}-\frac{z}{4}=-1$.

Dạng 3. Điểm thuộc mặt phẳng

Một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $(P): ax+by+cz+d=0$, và điểm $M(x_M;y_M;z_M)$.

Nếu $ax_M+by_M+cz_M+d=0\Rightarrow M\in(P)$

Nếu $ax_M+by_M+cz_M+d\neq 0\Rightarrow M\notin(P)$

Câu 74. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$ **B.** $N(2;2;2)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $M(1;-1;1)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $1-1+1-6=-5\neq 0\Rightarrow M(1;-1;1)$ là điểm không thuộc (α).

Câu 75. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $P(0;0;-5)$ **B.** $M(1;1;6)$ **C.** $Q(2;-1;5)$ **D.** $N(-5;0;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $1-2.1+6-5=0$ nên $M(1;1;6)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-1;-1)$ **B.** $N(1;1;1)$ **C.** $P(-3;0;0)$ **D.** $Q(0;0;-3)$

Lời giải

Điểm $N(1;1;1)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên $N\in(P)$.

Câu 77. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M(2;1;0)$. **B.** $M(2;-1;0)$. **C.** $M(-1;-1;6)$. **D.** $M(-1;-1;2)$.

Lời giải

Ta có: $2.2-1+0-3=0\Rightarrow M(2;1;0)\in(P): 2x-y+z-3=0$.

Câu 78. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$.

A. $Q(1;-2;2)$. **B.** $P(2;-1;-1)$. **C.** $M(1;1;-1)$. **D.** $N(1;-1;-1)$.

Lời giải

+ Thay toạ độ điểm Q vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-(-2)+2-2=4\neq 0$ nên $Q\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm P vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.2-(-1)+(-1)-2=2\neq 0$ nên $P\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-1+(-1)-2=-2\neq 0$ nên $M\notin(P)$.

+ Thay toạ độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1-(-1)+(-1)-2=0$ nên $N\in(P)$.

Câu 79. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(0;2;0)$. **B.** $N(1;2;3)$. **C.** $M(1;0;0)$. **D.** $Q(0;0;3)$.

Lời giải

Chọn B

Thế toạ độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta có: $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=1$.

Vậy mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ không đi qua điểm $N(1;2;3)$.

Câu 80. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2019=0$. **C.** $y+5=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Dựa vào nhận xét mặt phẳng có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ đi qua gốc tọa độ thì $D=0$.

Vậy chọn đáp án **D.**

Cách 2: Thay tọa độ điểm $O(0;0;0)$ lần lượt vào các phương trình để kiểm tra.

Câu 81. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-3=0$. Điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (α)?

A. $M(2;0;1)$. **B.** $Q(2;1;1)$. **C.** $P(2;-1;1)$. **D.** $N(1;0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $1.1-2.0+2.1-3=0$. Tọa độ điểm $N(1;0;1)$ thỏa mãn phương trình mặt phẳng (α) nên N nằm trên mặt phẳng (α).

Câu 82. **(SGD Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $P(1;6;1)$. **D.** $Q(0;3;0)$.

Lời giải

Chọn A

Xét điểm $M\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$, ta có: $1-1+2.\frac{3}{2}-3=0$ đúng nên $M\in(\alpha)$ nên A đúng.

Xét điểm $N\left(1;-1;-\frac{3}{2}\right)$, ta có: $1+1+2.\left(-\frac{3}{2}\right)-3=0$ sai nên $N\notin(\alpha)$ nên B sai.

Xét điểm $P(1;6;1)$, ta có: $1-6+2.1-3=0$ sai nên $P\notin(\alpha)$ nên C sai.

Xét điểm $Q(0;3;0)$, ta có: $0-3+2.0-3=0$ sai nên $Q\notin(\alpha)$ nên D sai.

Câu 83. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-4=0$ đi qua điểm nào sau đây

A. $Q(1;-1;1)$. **B.** $N(0;2;0)$. **C.** $P(0;0;-4)$. **D.** $M(1;0;0)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ Q vào phương trình mặt phẳng (α) ta được: $1-2(-1)+1-4=0$.

Thay tọa độ N vào phương trình mặt phẳng (α) ta được: $0-2.2+0-4=-8\neq 0\Rightarrow$ Loại B

Thay tọa độ P vào phương trình mặt phẳng (α) ta được: $0-2.0-4-4=-8\neq 0\Rightarrow$ Loại C

Thay tọa độ M vào phương trình mặt phẳng (α) ta được: $1-2.0+0-4=-3\neq 0\Rightarrow$ Loại D

Câu 84. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-1=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?

A. $N(0;1;-2)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $P(1;-2;0)$. **D.** $Q(1;-3;-4)$.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy $2.1-(-3)+(-4)-1=0$ nên $Q(1;-3;-4)$ thuộc (P).

Dạng 4. Khoảng cách từ điểm đến mặt

- *Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Câu 85. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P)

A. $d=\dfrac{5}{29}$ **B.** $d=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ **C.** $d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ **D.** $d=\dfrac{5}{9}$

Lời giải

Chọn B

Khoảng cách từ điểm A đến (P) là $d=\dfrac{|3.1+4.(-2)+2.3+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Câu 86. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P).

A. $d=\dfrac{5}{9}$. **B.** $d=\dfrac{5}{29}$. **C.** $d=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Khoảng cách d từ A đến (P) là $d(A,(P))=\dfrac{|3x_A+4y_A+2z_A+4|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\dfrac{|3-8+6+4|}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow d(A,(P))=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$

Câu 87. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến mặt phẳng $(P):x+2y+2z-10=0$.

A. $\dfrac{11}{3}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

$d(M;(P))=\dfrac{|1+2.2+2.(-3)-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|-11|}{3}=\dfrac{11}{3}$.

Câu 88. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $d(M,(P))=\dfrac{|2.(-1)-2.2+0-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 89. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+4=0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $d=3$. **B.** $d=4$. **C.** $d=1$. **D.** $d=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Khoảng cách d từ điểm $M(1;2;1)$ đến mp(P) là $d=d(M,(P))=\dfrac{|2.1-2.2+1+4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=1$.

Câu 90. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):x+2y-2z+1=0$ và điểm $M(1;-2;1)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng $d(M,(Q))=\frac{|1+2(-2)-2.1+1|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}$.

Câu 91. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng $(P):2x-y-2z+5=0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$AH=d(A,(P))=\frac{|2+2-6+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1$.

Câu 92. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2-3)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+5=0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P): $d(M,(P))=\frac{|2.(-1)-2.2+1.(-3)+5|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 93. **(Cần Thơ - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z+5=0$ và điểm $A(-1;3;-2)$. Khoảng cách từ A đến mặt (P) là

A. $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có khoảng cách từ A A đến mặt phẳng (P) là $d(A,(P))=\frac{|(-1)-2.3-2.(-2)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 94. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-4=0$. Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Khoảng cách từ điểm $M(3;1;-2)$ đến mặt phẳng (P):

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{\left|2.3-1+2.(-2)-4\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1.$$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

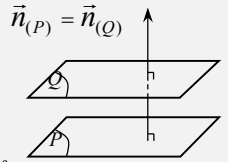
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định phương trình mặt phẳng (không chứa yếu tố đường thẳng)

Dạng 1. *Mặt* $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases}\Rightarrow (P):\boxed{a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=0}.$

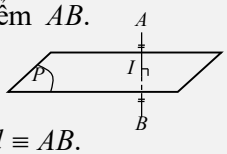
Dạng 2. *Viết phương trình* (P) *qua* $A(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ *và* $(P)\parallel(Q):ax+by+cz+d=0.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A(x_\circ,y_\circ,z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{n}_{(Q)}=(a;b;c)\end{cases}$



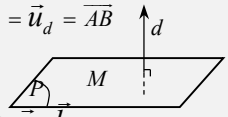
Dạng 3. *Viết phương trình mặt phẳng trung trực* (P) *của đoạn thẳng* $AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)\ :\text{là trung điểm } AB.\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



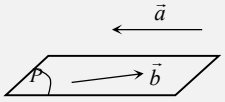
Dạng 4. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *qua* M *và vuông góc với đường thẳng* $d\equiv AB.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



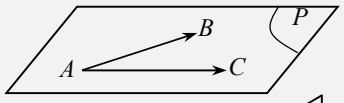
Dạng 5. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *qua điểm* M *và có cặp véctơ chỉ phương* $\vec{a},\ \vec{b}.$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=[\vec{a},\vec{b}]\end{cases}$



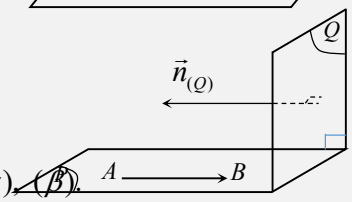
Dạng 6. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua ba điểm* $A,\ B,\ C$ *không thẳng hàng.*

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B\ hay\ C)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\end{cases}$



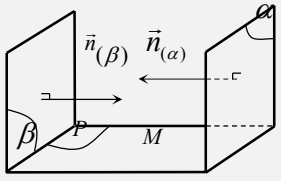
Dạng 7. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua* $A,\ B$ *và* $(P)\perp(Q).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ A,\ (hay\ B)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}\right]\end{cases}$



Dạng 8. *Viết phương trình mp* (P) *qua* M *và vuông góc với hai mặt* $(\alpha),(\beta).$

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\right]\end{cases}$



Dạng 9. *Viết* (P) *đi qua* M *và giao tuyến* d *của hai mặt phẳng:*

$(Q):a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(T):a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$

Phương pháp: Khi đó mọi mặt phẳng chứa d *đều có dạng:*

$(P):m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,\ m^2+n^2\neq 0.$

Vì $M\in(P)\Rightarrow$ *mối liên hệ giữa* m *và* $n.$ *Từ đó chọn* $m\Rightarrow n$ *sẽ tìm được* $(P).$

Dạng 10. *Viết phương trình mặt phẳng đoạn chắn*

Phương pháp: Nếu mặt phẳng (P) *cắt ba trục tọa độ lần lượt tại các điểm* $A(a;0;0),$ $B(0;b;0),\ C(0;0;c)$ *với* $(abc\neq 0)$ *thì* $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ *gọi là mặt phẳng đoạn chắn.*

Dạng 1.1 Xác định phương trình mặt phẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3).$ Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $3x-y-z=0.$ **B.** $3x+y+z-6=0.$ **C.** $x+y+2z-6=0.$ **D.** $6x-2y-2z-1=0.$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ và đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của đoạn thẳng AB. Do đó, phương trình mặt phẳng đó là:

$-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -6x+2y+2z=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0.$

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$ và $B(3;0;2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $2x-y+z+2=0$. **C.** $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x-y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Suy ra $I(1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vtpt, nên có phương trình là $(\alpha): 2x-y+z-2=0$.

Câu 3. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

A. $3x+y+z-6=0$ **B.** $3x-y-z=0$ **C.** $6x-2y-2z-1=0$ **D.** $3x-y-z+1=0$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

(α) đi qua $I(1;1;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm một VTPT.

$\Rightarrow (\alpha): -6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow (\alpha): 3x-y-z=0$.

Câu 4. **(Mã 101 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;0)$ và $B(5;1;-1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là:

A. $x+y+2z-3=0$. **B.** $3x+2y-z-14=0$. **C.** $2x-y-z+5=0$. **D.** $2x-y-z-5=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I(3;2;-1)$, có vec tơ pháp tuyến

$\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$ có phương trình: $2(x-3)-1(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x-y-z-5=0$.

Chọn đáp án **B.**

Câu 5. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;2)$ và $B(6;5;-4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x+2y-3z-17=0$. **B.** $4x+3y-z-26=0$.

C. $2x+2y-3z+17=0$. **D.** $2x+2y+3z-11=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB là $M(4;3;-1)$ và có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;4;-6)$ nên có phương trình là

$4(x-4)+4(y-3)-6(z+1)=0$

$\Leftrightarrow 2(x-4)+2(y-3)-3(z+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-3z-17=0$

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB.

A. $(\alpha):4x+2y+12z+7=0$.

B. $(\alpha):4x-2y+12z+17=0$.

C. $(\alpha):4x+2y-12z-17=0$.

D. $(\alpha):4x-2y-12z-7=0$.

Lời giải

Gọi $I\left(0;\frac{5}{2};-1\right)$ là trung điểm của AB; $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;6)$.

Mặt phẳng (α) qua $I\left(0;\frac{5}{2};-1\right)$ và có VTPT $\vec{n}=(-2;-1;6)$ nên có

PT: $(\alpha):-2(x)-\left(y-\frac{5}{2}\right)+6(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+2y-12z-17=0$.

Câu 7. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$; $B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P)

A. $(Q):2x-y+3=0$ **B.** $(Q):x+z=0$ **C.** $(Q):-x+y+z=0$ **D.** $(Q):3x-y+z=0$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)=-2(1;1;-1),\vec{u}=(1;1;-1)$

$\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$

$\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(1;0;1)$

Vậy $(Q):x+z=0$.

Câu 8. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1),B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp(Q) là:

$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0\Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Câu 9. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;3;0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z+2=0$. **C.** $x+2y-z-3=0$. **D.** $x+2y-z+3=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=2(1;2;-1)$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(2;1;1)$.

+ Mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$x-2+2(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-z-3=0$.

Vậy mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $x+2y-z-3=0$.

Câu 10. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x-3y+2z+3=0$. **B.** $4x-3y-2z+3=0$. **C.** $2x+y-3z-1=0$. **D.** $4x+y-2z-1=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0,(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $2x-y+2z=0$.

C. $2x+y-2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn C

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2),\overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O,VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;1);B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=15$. **C.** $a+b+c=-5$. **D.** $a+b+c=-15$.

Lời giải

Chọn A

Vì (Q) vuông góc với (P) nên (Q) nhận vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$ của (P) làm vtcp

Mặt khác (Q) đi qua A và B nên (Q) nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ làm vtcp

(Q) nhận $\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(0;8;12)$ làm vtpt

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):0(x+1)+8(y-1)+12(z-3)=0$, hay $(Q):2y+3z-11=0$

Vậy $a+b+c=5$. Chọn **A.**

Câu 13. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;2);B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z-3=0$. **B.** $x+y+z-2=0$. **C.** $-x+y=0$. **D.** $3x-2y-z+3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$

Từ (P) suy ra vec tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Gọi vec tơ pháp tuyến của (Q) là $\overrightarrow{n_Q}$

Vì (Q) chứa A,B nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}(1)$

Mặt khác $(Q)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}(2)$

Từ $(1),(2)$ ta được $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-2;-1)$

(Q) đi qua $A(1;-1;2)$ và có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(3;-2;-1)$ nên (Q) có phương trình là

$3(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 14. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0,(Q):x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

A. $x+y+z-3=0$ **B.** $x+y+z+3=0$ **C.** $-2x+z+6=0$ **D.** $-2x+z-6=0$

Lời giải

Chọn A

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$, (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(3;3;3)=3(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ nên (α) có phương trình:

$x+y+z-3=0$.

Câu 15. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x+y-2z+1=0$. **B.** $2x+y-2z=0$. **C.** $2x-y-2z=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng phải tìm là (P). Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;\ 1;\ -2)$.

Phương trình của (P) là $2x+y-2z=0$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và hai điểm $A(1;-1;2);B(2;1;1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A,B và vuông góc với mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $3x-2y-z+3=0$. **B.** $x+y+z-2=0$. **C.** $3x-2y-z-3=0$. **D.** $-x+y=0$.

Lờigiải

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_p}=(1;1;1)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (Q), do (Q) vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ có giá vuông góc với $\overrightarrow{n_p}$, mặt khác véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có giá nằm trong mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}$ cũng vuông góc với $\overrightarrow{AB}$

Mà $\vec{n}_p$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương nên ta có thể chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(-3;2;1)$, mặt khác (Q) đi qua $A(1;-1;2)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là:

$-3(x-1)+2(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;1;0),B(2;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x-y-1=0$ là:

A. $x+y-3z-1=0$. **B.** $2x+2y-5z-2=0$.

C. $x-2y-6z+2=0$. **D.** $x+y-z-1=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$. Mặt phẳng (P) có 1 véctơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;0)$.

Gọi $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm. Khi đó $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(P)}\right]=(1;1;-1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $1(x-0)+1(y-1)-1(z-0)=0\Leftrightarrow x+y-z-1=0$.

Câu 18. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng qua O, đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

A. $2x-y+2z=0$. **B.** $2x-y+2z+1=0$. **C.** $2x+y-2z=0$. **D.** $2x-y-2z=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(3;-2;2)$.

Mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(5;-4;3)$.

Giả sử mặt phẳng (γ) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Do mặt phẳng (γ) vuông góc với cả (α) và (β) nên ta có:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;1;-2).$$

Mặt phẳng (γ) đi qua $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$ có phương trình là:

$2x+y-2z=0$.

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;2)$; $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $3x-2y-z-3=0$. **B.** $-x+y=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $3x-2y-z+3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$, mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{m}=(1;1;1)$.

Vì mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{m}\right]=(3;-2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) có phương trình là $(Q):3(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):ax+by+cz-9=0$ chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=-12$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$.

$\overrightarrow{n_{(Q)}}=(3;1;1)$ là VTPT của mp(Q).

Mp(P) chứa hai điểm $A(3;2;1)$, $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(2;9;-15)$ là VTPT của mp(P)

$A(3;2;1)\in(P)$

$\Rightarrow(P):2x+9y-15z-9=0$ hoặc $(P):-2x-9y+15z+9=0$

Mặt khác $(P):ax+by+cz-9=0\Rightarrow a=2;b=9;c=-15$.

Vậy $S=a+b+c=2+9+(-15)=-4$.

Câu 21. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$, $(Q): 2y+z-5=0$ và $(R): x-y+z-2=0$. Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời vuông góc với (R). Phương trình của (α) là

A. $2x+3y-5z+5=0$. **B.** $x+3y+2z-6=0$.

C. $x+3y+2z+6=0$. **D.** $2x+3y-5z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ mọi điểm thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$$

Cho $z=1$ ta được $A(-2;2;1)$, cho $z=5$ ta được $B(-4;0;5)$ thuộc giao tuyến, $\overrightarrow{AB}(-2;-2;4)$.

Mặt phẳng (R) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_R}=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;2;1)$ và có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_R}\right]=(1;3;2)$.

Phương trình của (α) là: $(x+2)+3(y-2)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+3y+2z-6=0$.

Câu 22. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ là

A. $4x+5y-3z+22=0$. **B.** $4x-5y-3z-12=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $4x+5y-3z-22=0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(Q): x+y+3z=0$, $(R): 2x-y+z=0$ có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(1;1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q), (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P): 4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0$

$\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

Câu 23. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng (P): $x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=10$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-7$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$, (Q) có vtpt $\vec{k}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(0;8;12)$

$\Rightarrow (Q)$ có dạng: $2(y-4)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Vậy $a+b+c=5$.

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):2x-y+3z-1=0$, $(Q):y=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A, vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $3x-y+2z-4=0$. **B.** $3x+y-2z-2=0$. **C.** $3x-2z=0$. **D.** $3x-2z-1=0$.

Lời giải

$(P):2x-y+3z-1=0$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$.

$(Q):y=0$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(0;1;0)$.

Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]$. $\Rightarrow \vec{n}_{(R)}=(-3;0;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3x+2z+1=0 \Leftrightarrow 3x-2z-1=0$.

Câu 25. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho hai mặt phẳng (α): $3x-2y+2z+7=0$ và (β): $5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là:

A. $x-y-2z=0$. **B.** $2x-y+2z=0$. **C.** $2x+y-2z+1=0$. **D.** $2x+y-2z=0$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_P$ là vectơ pháp tuyến của (P). Ta có $\vec{n}_P \perp \vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_P \perp \vec{n}_\alpha$ với $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2)$ và $\vec{n}_\beta=(5;-4;3)$. Chọn $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]=(2;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ nên $(P):2x+y-2z=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 26. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng: $ax+by+cz-11=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a\in(b;c)$. **D.** $a+b>c$.

Lời giải

Ta có: $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$.

Véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua AB và vuông góc với (P) nên (Q) nhận véc tơ $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=(0;-8;-12)$ làm một véc tơ pháp tuyến nên phương trình của (Q) sẽ là: $2(y-4)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Suy ra $a=0$, $b=2$, $c=3 \Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 27. **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A, trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $4x-2y-z+4=0$. **B.** $4x-2y+z+4=0$. **C.** $4x+2y+z-4=0$. **D.** $4x+2y-z+4=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;6;-8)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x+6y-8z+10=0$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là: $2x+y+z-2=0$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là: $2x-3y-2z+6=0$.

Giao điểm của ba mặt phẳng trên là trực tâm H của tam giác ABC nên $H\left(-\frac{22}{101};\frac{70}{101};\frac{176}{101}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A, H nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{22}{101};-\frac{31}{101};-\frac{26}{101}\right)=-\frac{1}{101}(22;31;26)$.

Mặt phẳng $(P)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\vec{n}_{(ABC)}=(1;6;-8)$.

Vậy $\left[\vec{n}_{(ABC)};\vec{u}_{AH}\right]=(404;-202;-101)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn $\vec{n}_P=(4;-2;-1)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là $4x-2y-z+4=0$.

Dạng 1.2 Xác định phương trình mặt phẳng đoạn chắn

Câu 28. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC.

A. $(P):6x+3y+2z+18=0$. **B.** $(P):6x+3y+2z+6=0$.

C. $(P):6x+3y+2z-18=0$. **D.** $(P):6x+3y+2z-6=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $A\in Ox$, $B\in Oy$, $C\in Oz$ nên ta có thể đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Vì $M(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$.

Từ đó ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là:

$(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox,Oy,Oz. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **B.** $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $-\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Lời giải

Chọn A

+ A là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Ox\Rightarrow A(1;0;0)$.

B là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Oy\Rightarrow B(0;2;0)$.

C là hình chiếu vuông góc của M trên trục $Oz \Rightarrow C(0;0;3)$.

+ Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 30. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$. **B.** $12x+3y+4z-48=0$.

C. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=0$. **D.** $12x+3y+4z=0$.

Lời giải

Chọn B

Mp(P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$.

Vì G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên $\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_O}{4}=\frac{a}{4} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_O}{4}=\frac{b}{4} \\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_O}{4}=\frac{c}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=16 \\ c=12 \end{cases}$.

Khi đó mp(P) có phương trình là $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$ hay $12x+3y+4z-48=0$.

Vậy mp(P) thỏa mãn là $12x+3y+4z-48=0$.

Câu 31. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM=2ON$

A. $(P): 3x+y+2z-6=0$ **B.** $(P): 2x+3y-z-4=0$

C. $(P): 2x+y+z-4=0$ **D.** $(P): x+2y-z-2=0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Giả sử (P) đi qua 3 điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$

Suy ra $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mà (P) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ nên ta có hệ $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ \frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases}$

Theo giả thuyết ta có $OM=2ON \Leftrightarrow |a|=2|b| \Leftrightarrow |b|=1$

TH1. $b=1 \Rightarrow c=-2$ suy ra $(P): x+2y-z-2=0$

TH1. $b=-1 \Rightarrow c=-\frac{2}{3}$ suy ra $(P): x-2y+3z-2=0$

Câu 32. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, nếu ba điểm A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên các trục tọa độ thì phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. **D.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=0$.

Lời giải

Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên Ox,Oy,Oz.

Suy ra: $A(1;0;0),B(0;2;0),C(0;0;3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Câu 33. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(8;-2;4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C là

A. $x-4y+2z-8=0$ **B.** $x-4y+2z-18=0$ **C.** $x+4y+2z-8=0$ **D.** $x+4y-2z-8=0$

Lời giải

$M(8;-2;4)$ chiếu lên Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(8;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;4)$

Phương trình đoạn chắn qua A, B, C là: $\frac{x}{8}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow x-4y+2z-8=0$

Câu 34. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2;1;-3)$, biết (α) cắt trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho tam giác ABC nhận M làm trực tâm

A. $2x+5y+z-6=0$. **B.** $2x+y-6z-23=0$.

C. $2x+y-3z-14=0$. **D.** $3x+4y+3z-1=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c),abc\neq 0$.

Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M\in(\alpha)\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}=1$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2-a;1;-3),\overrightarrow{BM}=(2;1-b;-3),\overrightarrow{BC}=(0;-b;c),\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Do M là trực tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b-3c=0\\ -2a-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3c\\ a=-\frac{3c}{2}\end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $-\frac{4}{3c}-\frac{1}{3c}-\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow c=-\frac{14}{3}\Rightarrow a=7,b=14.$

Do đó $(\alpha):\frac{x}{7}+\frac{y}{14}-\frac{3z}{14}=1\Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0.$

Câu 35. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi các điểm A,B,C lần lượt ở trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó hoành độ điểm A là:

A. -3. **B.** -5. **C.** 3. **D. 5**

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Khi đó mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Ta có:

$\overrightarrow{AH}=(2-a;1;1);\ \overrightarrow{BH}=(2;1-b;1)$

$\overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\ \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

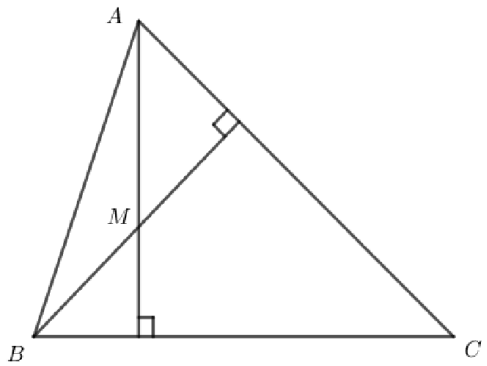
Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases}H\in(ABC)\\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ -b+c=0\\ -2a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=6\end{cases}$

Vậy $A(3;0;0)$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by+cz-14=0$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 8. **B.** 14. **C.** $T=6$. **D.** 11.

Lời giải



Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$, $m,n,p\neq 0$. Ta có phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Mà $M\in(\alpha)\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{2}{n}+\frac{3}{p}=1.\ (1)$

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-m;2;3)$, $\overrightarrow{BM}=(1;2-n;3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-n;p)$, $\overrightarrow{AC}=(-m;0;p)$.

M là trực tâm tam giác $ABC\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3p-2n=0\\ 3p-m=0\end{cases}.\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $m=14;\ n=7;\ p=\frac{14}{3}$.

Suy ra (α) có phương trình $\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Vậy $T=a+b+c=1+2+3=6$.

Câu 37. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$. **C.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Lời giải

Cách 1 :

Ta có tính chất hình học sau : tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc thì điểm M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC).

Do đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(1;2;5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $(x-1)+2(y-2)+5(z-5)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-30=0.$

Cách 2:

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Theo giả thiết ta có $M\in(P)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1(1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-a;2;5);\overrightarrow{BC}(0;-b;c);\overrightarrow{BM}=(1;2-b;5);\overrightarrow{AC}(-a;0;c)$

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=5c\\ a=5c\end{cases}(2)$

Từ (1) và (2) ta có $a=30;b=15;c=6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{30}+\frac{y}{15}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow x+2y+5z-30=0.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+4y-2z-6=0$, $(Q):x-2y+4z-6=0$. Mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z+6=0$. **C.** $x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-z-6=0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P):x+4y-2z-6=0$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;4;-2)$.

Mặt phẳng $(Q):x-2y+4z-6=0$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;4)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(12;-6;-6)$, cùng phương với $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Ta có đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $M(6;0;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa $d \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u} \\ M \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \\ \frac{6}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} (*) \end{cases}$.

Ta lại có hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow |b| = |c| = 6$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $b = c = 6$.

Vậy phương trình của mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C (A, B, C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{243}{2}$. **C.** $\frac{81}{6}$. **D.** 243.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Ta có $1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{a.b.c}} \Rightarrow a.b.c \geq 243$.

$V_{OABC} = \frac{1}{6} a.b.c \geq \frac{243}{6} = \frac{81}{2}$. Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{81}{2}$.

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC), (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. **B.** $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

C. $6x + 3y + 2z = 0$. **D.** $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$

+ (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng: $6x + 3y + 2z + D = 0$ $(D \neq -12)$

+ $d(D;(P)) = d((ABC),(P)) \Leftrightarrow d(D;(P)) = d(A,(P)) \Leftrightarrow |36 + D| = |12 + D| \Leftrightarrow D = -24$.

Vậy (P) là: $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Câu 41. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là ba số thực dương thay đổi, thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2017$. Khi đó, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua có một điểm có tọa độ cố định là

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;1;1)$.

C. $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$. **D.** $(2017;2017;2017)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Dựa vào điều kiện, chọn $M(m;m;m)$ cố định nằm trên (ABC).

Ta có: $M\in(ABC)\Leftrightarrow m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1\Leftrightarrow m.2017=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2017}$.

Vậy $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$ là điểm cố định.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC là

A. $(P):6x+3y+2z-18=0$. **B.** $(P):6x+3y+2z-6=0$.

C. $(P):6x+3y+2z+18=0$. **D.** $(P):6x+3y+2z+6=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ các điểm $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy$ và $C(0;0;c)\in Oz$.

M là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases}3x_M=x_A+x_B+x_C\\3y_M=y_A+y_B+y_C\\3y_M=z_A+z_B+z_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$$

Do đó phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$.

Câu 43. Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$.

C. $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$. Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (P) đi qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{5}{c}=1(*)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-a;b;0),\overrightarrow{AC}=(-a;0;c),\ \overrightarrow{BM}=(1;2-b;5),\overrightarrow{CM}=(1;2;5-c)$.

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{a}{2}\\ c=\dfrac{a}{5}\end{cases}$.

Thay vào (*) ta có $\frac{1}{a}+\frac{4}{a}+\frac{25}{a}=1\Leftrightarrow a=30\Rightarrow b=15,c=6$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{30}+\frac{y}{15}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow x+2y+5z-30=0$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a;0;0),\mathrm{B}(0;\mathrm{b};0),\mathrm{C}(0;0;\mathrm{c})$ với $abc\neq 0\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mà $OA=OB=OC\neq 0\Rightarrow\begin{cases}|b|=|a|\\ |c|=|a|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\pm a\\ c=\pm a\end{cases}$

Trường hợp 1: $b=a;c=a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=8$

Trường hợp 2: $b=a;c=-a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{a}-\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-2$

Trường hợp 3: $b=-a;c=a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}-\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{2}{a}+\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-4$

Trường hợp 4: $b=-a;c=-a$

$\Rightarrow (ABC):\frac{x}{a}-\frac{y}{a}-\frac{z}{a}=1$ mà $M(1;2;5)\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{2}{a}-\frac{5}{a}=1\Rightarrow a=-6$

Vậy có 4 mặt phẳng (α)

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox,y'Oy,z'Oz$ lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox,y'Oy,z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA=OB=OC$ nên ta có hệ:

$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1 \ (1)\\ |a|=|b|=|c| \quad (2)\end{cases}$. Ta có: $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c\\ a=b=-c\\ a=c=-b\\ b=c=-a\end{array}\right.$

- Với $a=b=c$ thay vào (1) được $a=b=c=4$

- Với $a=b=-c$ thay vào (1) được $0=1$.

- Với $a=c=-b$ thay vào (1) được $a=c=-b=2$.

- Với $b=c=-a$ thay vào (1) được $b=c=-a=2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$(P_1):\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1;\ (P_2):\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1;\ (P_3):\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua $M(2;1;3)$, $A(0;0;4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại B, C khác O thỏa mãn diện tích tam giác OBC bằng 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(a;0;0)$, $C(0;b;0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox,Oy.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{4}=1$.

Vì $M(2;1;3)$ thuộc (P) nên ta có $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{4}=1\Leftrightarrow\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4a+8b=ab$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB.OC=\frac{1}{2}|a|.|b|=\frac{1}{2}|ab|=1\Leftrightarrow|ab|=2$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=2\end{cases},(I)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+8b=2\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=1\\ 2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1-4b\\ (1-4b)b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1-4b\\ 4b^2-b+4=0,(vn)\end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}4a+8b=ab\\ ab=-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4a+8b=-2\\ ab=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b=-1\\ 2ab=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-1-4b\\ (-1-4b)b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-1-4b\\ 4b^2+b-4=0\end{cases}$. Hệ có hai nghiệm.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. **(Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$.

C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c), \overrightarrow{CA}=(a;0;-c)$ và $\overrightarrow{AM}=(3-a;2;1), \overrightarrow{BM}=(3;2-b;1)$.

Vì M là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b+c=0\\ 3a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\\ c=3a\end{cases}.$$

Hơn nữa vì M thuộc (ABC) nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{3}{a}+\frac{2}{\frac{3a}{2}}+\frac{1}{3a}=1\Leftrightarrow a=\frac{14}{3}$.

Ta được $a=\frac{14}{3}$, $b=7$, $c=14$ hay $(ABC): \frac{x}{\frac{14}{3}}+\frac{y}{7}+\frac{z}{14}=1$.

Ta chọn $(ABC): 3x+2y+z-14=0$.

Câu 48. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

A. $2x-y-z-1=0$. **B.** $x+2y+4z+1=0$. **C.** $4x+2y+z+1=0$. **D.** $4x+2y+z-8=0$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}\Leftrightarrow\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{b}{2}\\ c=2b\end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b}=1\Leftrightarrow b=4$.

Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1\Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

Câu 49. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)=0$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) và các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $6x-3y-2z+12=0$. **B.** $9x-3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z-12=0$. **D.** $6x-3y-2z-12=0$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz$. Theo giả thiết ta có $a,b,c\neq 0$.

Vì $A\in(S)$ nên ta có: $a^2-2a=0 \xleftrightarrow{a\neq 0} a=2$. Vậy $A(2;0;0)$.

Vì $B\in(S)$ nên ta có: $b^2-4a=0 \xleftrightarrow{b\neq 0} b=4$. Vậy $B(0;4;0)$.

Vì $C\in(S)$ nên ta có: $c^2-6c=0 \xleftrightarrow{c\neq 0} c=6$. Vậy $C(0;0;6)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Câu 50. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ và chắn trên Oz một đoạn dài gấp đôi các đoạn chắn trên các tia Ox, Oy. Giả sử $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ (a, b, c, d là các số nguyên). Tính $S=\frac{a+b+c}{d}$.

A. 3. **B.** -3. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;p)$ (với $m,n,p>0$)

Theo giả thiết có $OC=2OA=2OB \Rightarrow p=2m=2n \quad (1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Do mặt phẳng (α) đi qua $M(1;-3;8)$ nên $\frac{1}{m}-\frac{3}{n}+\frac{8}{p}=1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $\frac{1}{m}-\frac{3}{m}+\frac{8}{2m}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{m}=1 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow m=n=2, p=4$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+2y+z-4=0$

Từ đó suy ra $a=2t, b=2t, c=t, d=-4t \quad (t\neq 0)$

Vậy $S=\frac{a+b+c}{d}=-\frac{5}{4}$.

Dạng 1.3 Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. **B.** $3x-2y+6z=6$.

C. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $3x-2y+6z-12=0$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;1)$ lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz), (Oyz).

Khi đó, $M(2;-3;0)$, $N(2;0;1)$ và $P(0;-3;1)$

$\overrightarrow{MN}=(0;3;1)$ và $\overrightarrow{MP}=(-2;0;1)$.

Ta có, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là cặp vectơ không cùng phương và có giá nằm trong (MNP)

Do đó, (MNP) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(3;-2;6)$.

Mặt khác, (MNP) đi qua $M(2;-3;0)$ nên có phương trình là:

$3(x-2)-2(y+3)+6(z-0)=0\Leftrightarrow 3x-2y+6z-12=0$.

Câu 52. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;1), B(2;-1;4)$ và $C(1;1;4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3;3);\overrightarrow{AC}=(2;-1;3)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-6;-3;3)$.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) có vecto chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ do đó chọn $\vec{u}(2;1;-1)$.

Câu 53. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=1,d=1$. **B.** $a=6,d=-6$. **C.** $a=-1,d=-6$. **D.** $a=-6,d=6$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$x+y-1-z+2=0\Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Vậy $a=1,d=1$.

Câu 54. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;2)$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ?

A. $3x+5y+2z-60=0$. **B.** $10x+6y+15z-60=0$.

C. $10x+6y+15z-90=0$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz).

Ta có $A_1(3;5;0)$, $A_2(0;5;2)$, $A_3(3;0;2)$. $\overrightarrow{A_1A_2}=(-3;0;2)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(0;-5;2)$.

Mặt phẳng qua A_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right]=(10;6;15)$ có phương trình là $10x+6y+15z-60=0$.

Câu 55. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.

C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Ta có $\vec{n}=(4;-6;12)$ cùng phương $\vec{n}_1=(2;-3;6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

Cách 2:

Vì phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm A, B, C nên thay tọa độ điểm $C(0;2;1)$ lần lượt vào các đáp án. Loại đáp án A, B, **D.** Còn lại đáp án C thỏa.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x+2y-3z+4=0$.

C. $3x-3y+z=0$. **D.** $x+y-2z+3=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;3;3)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-2;-1)$

Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(0;1;2)$ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;3;-6)$ làm véctơ pháp tuyến.

Nên phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$, $C(1;0;2)$ có phương trình là $3x+3y-6z+9=0$ hay $x+y-2z+3=0$

Câu 57. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;\ 3;\ 5)$, $B(3;\ 2;\ 4)$ và $C(4;\ 1;\ 2)$ có phương trình là

A. $x+y+5=0$. **B.** $x+y-5=0$. **C.** $y-z+2=0$. **D.** $2x+y-7=0$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}\subset(ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;-3)$ suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;\ 1;\ 0)$.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2;\ 3;\ 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$1(x-2)+1(y-3)+0(z-5)=0\Leftrightarrow x+y-5=0$.

Câu 58. **(Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

A. $2x+y+z+1=0$. **B.** $x-y+z-4=0$. **C.** $7x-2y+z-9=0$. **D.** $2x+y-z-2=0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$,

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(14;-14;14)=14(1;-1;1)$ có dạng

$x-y+z-4=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 59. **(SGD - Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

A. $x+y-z-3=0$. **B.** $x+y-z-3=0$.

C. $x+5y-7z-15=0$. **D.** $7x+5y-4z-15=0$.

Lời giải

Phương trình Mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow -3x+2y+z-6=0$.

H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$ nên H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow H\left(\dfrac{19}{14};\dfrac{31}{7};\dfrac{17}{14}\right)$

Mặt phẳng $(SBH):\begin{cases}qua\ B(0;3;0)\\ vtpt\left[\overrightarrow{BH},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\dfrac{11}{14};\dfrac{55}{14};-\dfrac{11}{2}\right)=\dfrac{11}{14}(1;5;-7)\end{cases}$.

Phương trình Mặt phẳng $(SBH):x+5(y-3)-7z=0\Leftrightarrow x+5y-7z-15=0$.

Dạng 2. Một số bài toán liên đến khoảng cách - góc

Dạng 2.1 Khoảng cách từ điểm đến mặt, khoảng cách giữa hai mặt

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P):ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song* $(P):ax+by+cz+d=0$ *và* $(Q):ax+by+cz+d'=0$ *có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d\big((Q),(P)\big)=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Viết phương trình $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0$ ***và cách*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***khoảng*** k.

Phương pháp:

- *Vì* $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0\Rightarrow(P):ax+by+cz+d'=0.$
- *Sử dụng công thức khoảng cách* $d_{[M,(P)]}=\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d'.$

Viết phương trình mặt phẳng $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0$ ***và*** (P) ***cách mặt phẳng*** (Q) ***một khoảng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Vì* $(P)\,||\,(Q):ax+by+cz+d=0\Rightarrow(P):ax+by+cz+d'=0.$
- *Chọn một điểm* $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\in(Q)$ *và sử dụng công thức:*

$$d_{[(Q);(P)]}=d_{[M,(P)]}=\frac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d'.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) ***vuông góc với hai mặt phẳng*** (α), (β), ***đồng thời*** (P) ***cách điểm*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***một khoảng bằng*** k ***cho trước.***

Phương pháp:

- *Tìm* $\vec{n}_{(\alpha)}$, $\vec{n}_{(\beta)}$. *Từ đó suy ra* $\vec{n}_{(P)}=\big[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(\beta)}\big]=(a;b;c).$
- *Khi đó phương trình* (P) *có dạng* $(P):ax+by+cz+d=0$, *(cần tìm* d*).*
- *Ta có:* $d_{[M;(P)]}=k\Leftrightarrow\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=k\Rightarrow d.$

Câu 1. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P):x+y-z+1=0$ và $(Q):x-y+z-5=0$ có tọa độ là

A. $M(0;-3;0)$. **B.** $M(0;3;0)$. **C.** $M(0;-2;0)$. **D.** $M(0;1;0)$.

Lời giải

Ta có $M\in Oy\Rightarrow M(0;y;0)$.

Theo giả thiết: $d\big(M(P)\big)=d\big(M(Q)\big)\Leftrightarrow\dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{|-y-5|}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-3$.

Vậy $M(0;-3;0)$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3\ (1)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d(A,(P))=\dfrac{|2.1+2+m.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\ (2)$.

Để $AB=d(A,(P))\Rightarrow 3=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\Leftrightarrow 9(5+m^2)=9(m+1)^2\Leftrightarrow m=2$.

Câu 3. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+z-1=0\\3x+y+7z+6=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+2y+z-1=0\\-2x+3y+6z+13=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-1=0\\-2x+3y+7z+23=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x+y+z-1=0\\-23x+37y+17z+23=0\end{array}\right.$

Lời giải

Gọi $(P):\begin{cases}qua\ A(1;0;0)\\VTPT\ \vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}\end{cases}$

$(P):A.(x-1)+By+Cz=0$

$B\in(P):-A-2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B+3C\ (1)$

$d(C;(P))=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{|B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3(B^2+C^2+2BC)=4(A^2+B^2+C^2)$

$\Leftrightarrow B^2+C^2-6BC+4A^2=0\ (2)$

Thay (1) vào (2) ta có: $B^2+C^2-6BC+4(-2B+3C)^2=0\Leftrightarrow 17B^2-54BC+37C^2=0$

Cho $C=1$: $17B^2-54B+37=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=1\Rightarrow A=1\\B=\dfrac{37}{17}\Rightarrow A=\dfrac{-23}{17}\end{array}\right.$

$(P):x+y+x-1=0$

$(P):-23x+37y+17z+23=0$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0),B(0;4;0),C(0;0;6),D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$ **B.** $6x+3y+2z-12=0$

C. $6x+3y+2z=0$ **D.** $6x+3y+2z-36=0$

Lời giải

Chọn A

$(ABC):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

$(P)//(ABC)\Rightarrow(P):6x+3y+2z+m=0\ (m\neq -12)$.

(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d(D,(P)) = d(A,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6.2+3.4+2.6+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{|6.2+3.0+2.0+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |36+m| = |12+m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36+m = 12+m \\ 36+m = -12-m \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m = -24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 5. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải.

Vì $d(B;(P)) = 2d(A;(P))$ và (P) cắt đoạn AB tại I nên

$$\overrightarrow{BI} = -2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} a-5 = -2(a-1) \\ b+4 = -2(b-2) \\ c+1 = -2(c-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{3} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 4.$$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng:

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 3.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Lấy $A(2;1;3) \in (P)$.Do (P) song song với (Q) nên Ta có

$$d((P),(Q)) = d(A,(Q)) = \frac{|2+2.1+2.3-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{7}{3}$$

Câu 7. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x-y+z=0$ và $2x-y+z-7=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 7. **B.** $7\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{7}$. **D.** $\dfrac{7}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $O(0;0;0)$.

Do mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng: $d((P),(Q)) = d(O,(Q)) = \dfrac{|-7|}{\sqrt{6}} = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-8=0$ và $(Q): x+2y+2z-4=0$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(8;0;0)\in(P)\end{cases}\Rightarrow d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\frac{|8+2.0+2.0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{3}.$

Nhận xét:

Nếu mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d$ *và* $(Q):ax+by+cz+d'$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$ *song song với nhau* $(d\neq d')$ *thì* $d\left((P);(Q)\right)=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$..

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-16=0$ và $(Q):x+2y-2z-1=0$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** 6. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}(P)//(Q)\\ A(16;0;0)\in(P)\end{cases}\Rightarrow d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\frac{|16+2.0-2.0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=5.$

Câu 10. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$ **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$ **C.** 14 **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Lời giải

$(P):x+2y+3z-1=0$ $(Q):x+2y+3z+6=0$. Ta có: $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}\neq\frac{-1}{6}$

Các giải trắc nghiệm:

Công thức tính nhanh: $(P):Ax+By+Cz+D_1=0;(Q)\,Ax+By+Cz+D_2=0$

$\mathrm{d}\left((P);(Q)\right)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$(P)//(Q)$ áp dụng công thức: $\mathrm{d}\left((P);(Q)\right)=\frac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):6x+3y+2z-1=0$ và $(Q):x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+8=0$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Vì $\frac{6}{1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}\neq\frac{-1}{8}\Rightarrow(P)//(Q)$ nên $d\left((P);(Q)\right)=d\left(M;(Q)\right)$ với $M(0;1;-1)\in(P)$

$$d\left((P);(Q)\right)=d\left(M;(Q)\right)=\frac{\left|x_M+\frac{1}{2}y_M+\frac{1}{3}z_M+8\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{\left|0+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+8\right|}{\sqrt{\frac{49}{36}}}=7.$$

Câu 12. **(Chuyên Lam Sơn-2019)** Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z-1=0$ và $(Q):x+2y+3z+6=0$ là:

A. $\frac{7}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$. **C.** 14. **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Lời giải

Chọn A

Có $(P)//(Q)\Rightarrow d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)$ với A bất kì thuộc (P).

Chọn $A(1;0;0)\in(P)$ có $d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=\frac{|7|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}$.

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha):x-2y-2z+4=0$ và $(\beta):-x+2y+2z-7=0$.

A. 0. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $M(0;1;1)\in(\alpha)$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là:

$$h=d\left(M,(\beta)\right)=\frac{|-0+2.1+2.1-7|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=1.$$

Câu 14. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ và mặt phẳng $(P):3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$.

Vậy $d\left(I,(P)\right)=\frac{|3-2+6+14|}{\sqrt{9+4+36}}=3.$.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):2x-y-2z-9=0$ và $(Q):4x-2y-4z-6=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Trong mặt phẳng (P) ta chọn điểm $M(0;-9;0)$. Tính khoảng cách từ M đến (Q) ta có:

$d(M,(Q))=\dfrac{|4.0-2.(-9)-4.0-6|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}}=2$. Vậy $d((P),(Q))=d(M,(Q))=2$.

Câu 16. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z-6=0$ và $(Q):x+2y-2z+3=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

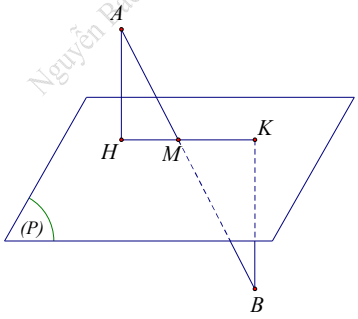
Lấy $M(6;0;0)\in(P)$ ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|1.6+2.0-2.0+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$.

Câu 17. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+4y-12z+5=0$ và điểm $A(2;4;-1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M. Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P).

A. $d=6$. **B.** $d=\dfrac{30}{13}$. **C.** $d=\dfrac{66}{13}$. **D.** $d=9$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB}=3.\overrightarrow{AM}\Rightarrow BM=2.AM\Rightarrow\dfrac{d(B,(P))}{d(A,(P))}=\dfrac{BM}{AM}=2$

$\Rightarrow d(B,(P))=2.d(A,(P))=2.\dfrac{|3.2+4.4-12.(-1)+5|}{\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}}=2.3=6$.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z-1=0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3?

A. $(Q):2x+2y-z+10=0$. **B.** $(Q):2x+2y-z+4=0$.

C. $(Q):2x+2y-z+8=0$. **D.** $(Q):2x+2y-z-8=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3 nên có dạng $(Q): 2x+2y-z+d=0, (d\neq -1)$.

Mặt khác ta có $d(M,(Q))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|1+d|}{\sqrt{4+4+1}}=3 \Leftrightarrow |d+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=8 \\ d=-10 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Do đó $(Q): 2x+2y-z+8=0$ hoặc $(Q): 2x+2y-z-10=0$.

Câu 19. **(SGD Bến Tre 2019)** Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$.

A. $M(0;0;-3)$. **B.** $M(0;0;3)$. **C.** $M(0;0;-4)$. **D.** $M(0;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $M\in Oz \Rightarrow M(0;0;m)$. Ta có: $MA=\sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2}$; $d(M,(P))=\dfrac{|m-17|}{\sqrt{14}}$.

M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$ khi và chỉ khi

$\sqrt{2^2+3^2+(4-m)^2}=\dfrac{|m-17|}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow 13(m-3)^2=0 \Leftrightarrow m=3$. Vậy $M(0;0;3)$.

Câu 20. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P): ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB=3<d(\mathrm{B},(P))$ suy ra A,B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B xuống mặt phẳng (P).

Ta có $6=AH+BK\geq AK\geq AH=6$. Do đó A,B,H,K thẳng hàng.

Từ đó suy ra $AB\perp(P)$ và B là trung điểm của AH nên $H(5;6;-1)$, $\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng

$(P): 2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0 \Leftrightarrow -4x-4y+2z+46=0$.

Vậy $a+b+c=-6$.

Câu 21. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\dfrac{7}{3}$ là.

A. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z-17=0$ **B.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z+17=0$

C. $x+2y+2z+3=0; x+2y+2z+17=0$ **D.** $x+2y+2z-3=0; x+2y+2z-17=0$

Lời giải

Chọn D

Vì (Q) song song với (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng

$$(Q): x+2y+2z+c=0$$

Lấy $M\in(P)\Rightarrow M(0;0;5)\Rightarrow d(M,(Q))=\frac{7}{3}$. Khi đó ta có

$$d(M,(Q))=\frac{|2.5+c|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{7}{3}\Rightarrow\begin{bmatrix}10+c=7\\10+c=-7\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c=-3\\c=-17\end{bmatrix}$$

Vậy ta có các mặt phẳng (Q) là

$(Q):x+2y+2z-3=0;(Q):x+2y+2z-17=0$

Câu 22. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta):x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x+y-z+6=0;\ x+y-z=0$.
B. $x+y-z+6=0$.
C. $x-y-z+6=0;\ x-y-z=0$.
D. $x+y+z+6=0;\ x+y+z=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình (α) có dạng : $x+y-z+c=0$ với $c\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lấy điểm $I(-1;-1;1)\in(\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có :

$$d(I,(\alpha))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|-1-1-1+c|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{|c-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}c=0\\c=6\end{bmatrix}.$$ (thỏa điều kiện $c\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$).

Vậy phương trình (α) là: $x+y-z+6=0;\ x+y-z=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 23. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(4;2;1)$, $B(0;0;3)$, $C(2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa OC và cách đều 2 điểm A,B.

A. $x-2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$.
B. $x+2y+2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.
C. $x+2y-2z=0$ hoặc $x+4y-2z=0$.
D. $x+2y-2z=0$ hoặc $x-4y-2z=0$.

Lời giải

Gọi $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq0)$.

$O\in(\alpha)$ nên ta có: $D=0\ (1)$

$C\in(\alpha)$ nên ta có: $Ax+By+Cz-2A-C=0\ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow C=-2A$.

Theo đề bài: $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha))$.

$$\Leftrightarrow|2A+2B|=|-6A|\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2A+B=6A\\2A+B=-6A\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}B=2A\ (*)\\B=-4A\ (**)\end{bmatrix}$$

Từ $(*)$: Chọn $A=1\Rightarrow B=2,\ C=-2\ \Rightarrow(\alpha):x+2y-2z=0$.

Từ $(**)$: Chọn $A=1\Rightarrow B=-4,\ C=-2\ \Rightarrow(\alpha):x-4y-2z=0$.

Câu 24. **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0),B(0;-2;3),C(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa A,B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ là

A. $x+y+z-1=0$ hoặc $-23x+37y+17z+23=0$.

B. $x+y+2z-1=0$ hoặc $-23x+3y+7z+23=0$.

C. $x+2y+z-1=0$ hoặc $-13x+3y+6z+13=0$.

D. $2x+3y+z-1=0$ hoặc $3x+y+7z-3=0$.

Lời giải

Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}=(-1;-2;3)\Rightarrow -a-2b+3c=0\Rightarrow a=-2b+3c.$

$(P):\text{ax}+\text{by}+\text{cz}-\text{a}=0\Rightarrow d(C;(P))=\dfrac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}|b+c|=2\sqrt{b^2+c^2+(-2b+3c)^2}\Leftrightarrow 17b^2-54bc+37c^2=0.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=c\\ b=\dfrac{37}{17}c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=c=1\\ c=17,b=37\end{array}\right.$

TH1: $b=c=1\Rightarrow a=1\Rightarrow(P):\text{x}+\text{y}+\text{z}-1=0$.

TH2: $b=37,c=17\Rightarrow a=-23\Rightarrow(P):-23\,\text{x}+37\,\text{y}+17\,\text{z}+23=0$.

Câu 25. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $(Q):2x-2y+z+4=0$.

B. $(Q):2x-2y+z-14=0$.

C. $(Q):2x-2y+z-19=0$.

D. $(Q):2x-2y+z-8=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có, (Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y+z+C=0;\ C\neq -5$

Chọn $M(0;0;5)\in(P)$

Ta có $d((P);(Q))=d(M;(Q))=\dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=4\\ C=-14\end{array}\right.$

$C=4\Rightarrow(Q):2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C=-14\Rightarrow(Q):2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q):2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):2x-2y+z-14=0$.

Câu 26. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):\ x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (P) không qua O, song song với mặt phẳng (Q) và $d((P),(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+2z+1=0$ **B.** $x+2y+2z=0$ **C.** $x+2y+2z-6=0$ **D.** $x+2y+2z+3=0$

Lời giải

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow vtpt\overrightarrow{n_P} = vtpt\overrightarrow{n_Q} = (1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+D=0$

Gọi $A(3;0;0) \in (Q)$

$\Rightarrow d((P),(Q)) = d(A,(P)) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3+D|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+D=3 \\ 3+D=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=0 \quad (l), qua\, O \\ D=-6 \ (n) \end{array}\right.$

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là

A. $6x+3y+2z-24=0$. **B.** $6x+3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z=0$. **D.** $6x+3y+2z-36=0$.

Lời giải

Phương trình $mp(ABC): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên phương trình có dạng:

$$6x+3y+2z+d=0,\ d \neq -12.$$

Mặt phẳng (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC)

$\Leftrightarrow d((ABC),(P)) = d(D,(P)) \Leftrightarrow d(A,(P)) = d(D,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6.2+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{|6.2+3.4+2.6+d|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |d+12| = |d+36| \Leftrightarrow d=-24$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $6x+3y+2z-24=0$.

Câu 28. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1;1;1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

A. $2x+3y-6z+1=0$. **B.** $3x+2y-6z+1=0$.

C. $3x+2y-5z=0$. **D.** $6x+2y-3z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-1}=1$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên

$(P): \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-z+m=0 \ (m \neq -1)$.

Do $D(1;1;1) \in (P)$ có: $\dfrac{1}{2}.1+\dfrac{1}{3}.1-1+m=0 \Leftrightarrow m-\dfrac{1}{6}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Vậy $(P): \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y-z+\dfrac{1}{6}=0 \Leftrightarrow 3x+2y-6z+1=0$.

Câu 29. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, (α) song song với đường thẳng CD. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x+y+2-3=0$. **B.** $2x-y+z-2=0$. **C.** $2x+y+z-3=0$. **D.** $x+y-2=0$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{CD}=(0;1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-2;-1;-1)$.

(α) đi qua $A(1;1;0)$ và có một VTPT là $\vec{n}(2;1;1) \Rightarrow (\alpha): 2x+y+z-3=0$.

Dạng 2.2 Góc của 2 mặt phẳng

1. ***Góc giữa hai véctơ***

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \text{ với } 0°<\alpha<180°.$$

2. ***Góc giữa hai mặt phẳng***

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos((P),(Q))=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \text{ với } 0°<\alpha<90°.$$

Câu 30. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn C

(P) qua O và nhận $\overrightarrow{OH}=(2;1;2)$ làm VTPT

$(Q): x-y-11=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;0)$

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\frac{|\overrightarrow{OH}.\vec{n}|}{OH.|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{((P),(Q))}=45^0$

Câu 31. **(THPT Quang Trung Đống Đa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q): x+(2m-1)z+7=0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải

Mặt phẳng (P), (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_p}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{n_Q}=(1;0;2m-1)$

Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\cos\frac{\pi}{4}=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}\right)\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|1+2(2m-1)|}{3.\sqrt{1+(2m-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(4m-1)^2=9(4m^2-4m+2)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-20m+16=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=4 \end{array}\right.$$

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc $60°$ nên $\cos((P),(Oyz))=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ (*).

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2}=2 \Rightarrow c=-\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c=2-\sqrt{2}\in(0;3)$.

Câu 33. **(Chuyên Bắc Giang -2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$, $(Q):x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?**

A. $M(2019;-1;1)$ **B.** $M(0;-2019;0)$ **C.** $M(-2019;1;1)$ **D.** $M(0;0;-2019)$

Lời giải

Chọn C

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Khi đó:

$$\cos\varphi=\frac{|1.1+2.m-2.(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2m^2-2m+2}}=\frac{1}{3.\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Góc φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $m=\frac{1}{2}$.

Khi $m=\frac{1}{2}$ thì $(Q):x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+2019=0$, đi qua điểm $M(-2019;1;1)$.

Câu 34. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+2z+5=0$ và $(Q):x-y+2=0$. Trên (P) có tam giác ABC; Gọi A',B',C' lần lượt là hình chiếu của A,B,C trên (Q). Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{|2.1-1.(-1)+2.0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\alpha = 4.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2;-1;-2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x-y-5=0$ là

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q} = (1;-1;0)$.

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2;-1;-2) \Rightarrow (P)$ qua H và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;-1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \varphi = 45°$.

Câu 36. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;\ 1;\ 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $OH \perp (P)$. Do đó $\overrightarrow{OH} = (2;\ 1;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;\ 1;\ 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q).

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{OH}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{OH}|.|\vec{n}|} = \dfrac{|2.1+1.1+2.0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là $45°$.

Câu 37. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1), B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$ là

A. $\begin{bmatrix} 2x+3y+6z-12=0 \\ 2x+3y-6z=0 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z=0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 2x-3y+6z-12=0 \\ 2x-3y-6z+1=0 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 2x+3y+6z+12=0 \\ 2x+3y-6z-1=0 \end{bmatrix}$

Lời giải

Giả sử (P) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(a;b;c)$

(P) có VTCP $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$ suy ra $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow 3a+b(-2)+0.c=0\Rightarrow 3a-2b=0\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}b \qquad (1)$

(Oyz) có phương trình $x=0$ nên có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;0;0)$

Mà $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow\dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow\dfrac{|a.1+b.0+c.0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2}{7}$

$\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow 7|a|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow 49a^2=4(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 45a^2-4b^2-4c^2=0 \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $4b^2-c^2=0$

Chọn $c=2$ ta có $4b^2-2^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{2}{3}\\a=\dfrac{-2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3};1;2\right)\\\vec{n}=\left(-\dfrac{2}{3};-1;2\right)\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}\vec{n}=(2;3;6)\\\vec{n}=(2;3;-6)\end{array}\right.$

Vậy $(P)\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z-12=0\\2x+3y-6z=0\end{array}\right.$

Câu 38. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc $60°$. Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;8)$. **D.** $(8;11)$.

Lời giải

Ta có: $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}b+d=0\\a+d=0\end{cases}$. Suy ra (P) có dạng $ax+ay+cz-a=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;a;c)$.

Mặt phẳng (yOz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ta có: $\cos 60°=\dfrac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}.1}\Leftrightarrow 2a^2+c^2=4a^2\Leftrightarrow 2a^2-c^2=0$.

Chọn $a=1$, ta có: $c^2=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$ do $c<0$.

Ta có: $a+b+c=a+a+c=1+1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}\in(0;3)$.

Dạng 3. Vị trí tương đối

Dạng 3.1 Vị trí tương đối mặt phẳng với mặt cầu

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu $S(I;R)$ *và mặt phẳng* (P).

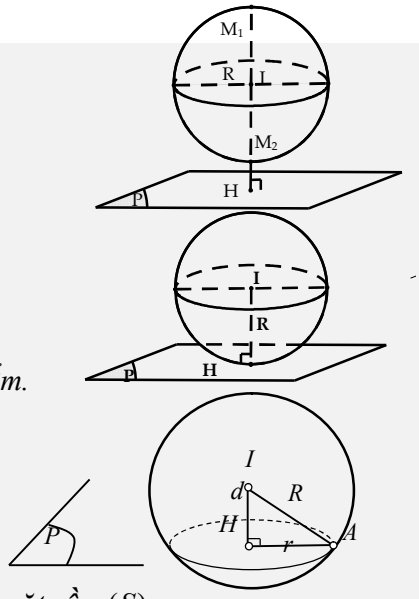
Gọi H *là hình chiếu vuông góc của* I *lên* (P)

và có $d = IH$ *là khoảng cách từ I đến mặt phẳng* (P). *Khi đó:*

- *Nếu* $d > R$: *Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.*
- *Nếu* $d = R$: *Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu.*

  Lúc đó (P) *là mặt phẳng tiếp diện của* (S) *và* H *là tiếp điểm.*
- *Nếu* $d < R$: *mặt phẳng* (P) *cắt mặt cầu theo thiết diện*

  là đường tròn có tâm H *và bán kính* $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.



Viết phương trình mặt $(P)\,||\,(Q): ax+by+cz+d=0$ ***và tiếp xúc với mặt cầu*** (S).

Phương pháp:

- *Vì* $(P)\,||\,(Q): ax+by+cz+d=0 \Rightarrow (P): ax+by+cz+d'=0.$
- *Tìm tâm* I *và bán kính* R *của mặt cầu.*
- *Vì* (P) *tiếp xúc* (S) *nên có* $d_{[I;(P)]} = R \Rightarrow d'.$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A?

A. $x+y+3z-9=0$ **B.** $x+y-3z+3=0$ **C.** $x+y-3z-8=0$ **D.** $x-y-3z+3=0$

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x-y+3z-3=0 \Leftrightarrow x+y-3z+3=0$.

Câu 2. **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α). Ta có $d = d(I,(\alpha)) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó ta có: $r = \sqrt{R^2-d^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

A. $x^2+y^2+z^2+4x+2y-8z-4=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+8z-4=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-4=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu cần tìm có bán kính $R=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2-2.1+2.(-4)-7\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=5$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$.

Câu 4. **(SGD Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π. Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=2$. **B.** $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=3$. **D.** $x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi R,r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có:

$$\pi r^2=2\pi \Leftrightarrow r^2=2$$

Mặt khác $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=1$ nên $R^2=r^2+\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2=3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

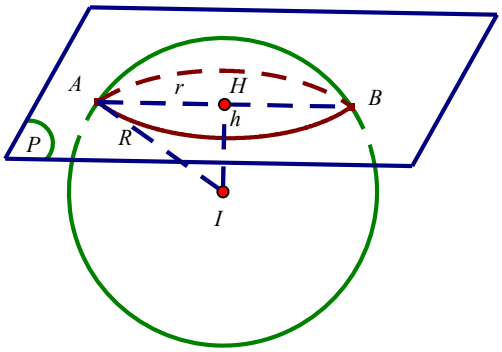
Câu 5. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$h = d(I;(P)) = \dfrac{|-1-4-2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 34$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 3$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 9$.
C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 9$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Vì mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x-2y-2z-2=0$ nên bán kính

$R = d(I,(P)) = \dfrac{|-1-2.2-2.1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 3 \Rightarrow (S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 9$.

Câu 7. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P): 2x-y+2z+4=0$ là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2 = \dfrac{20}{3}$.
B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2 = \dfrac{400}{9}$.
C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = \dfrac{20}{3}$.
D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = \dfrac{400}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d(I,(P)) = \dfrac{|2.3-(-2)+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{20}{3}$. Suy ra mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $(P): 2x-y+2z+4=0$ có bán kính $R = \dfrac{20}{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(3;-2;4)$, bán kính $R = \dfrac{20}{3}$ là:

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = \dfrac{400}{9}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;1;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16$.

C. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của mặt cầu (S) là R.

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I;(P))=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3-2.1-2.(-1)+3|}{\sqrt{1+4+4}}=R \Leftrightarrow R=2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

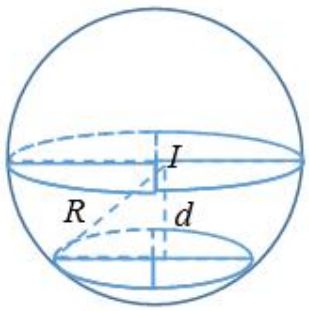
Câu 9. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

Chọn D



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$d=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-2+2.1+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$.

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r=4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

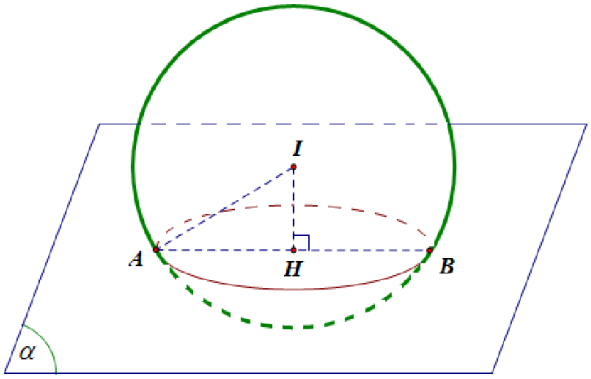
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Câu 10. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

A. 8. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là tâm mặt cầu (S), H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) và AB là một đường kính của đường tròn (C).

Dễ thấy $I(3;-2;1)$, $IA=10$, $IH=d\left(I,(\alpha)\right)=6$ suy ra $HA=\sqrt{IA^2-IH^2}=8$.

Vậy bán kính đường tròn (C) bằng 8.

Câu 11. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P):x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (P) tiếp xúc với (S).

B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

C. (P) và (S) không có điểm chung.

D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I=(2;-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{4+1+1-(-10)}=\sqrt{16}=4$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2+2.(-1)-2(-1)+10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$

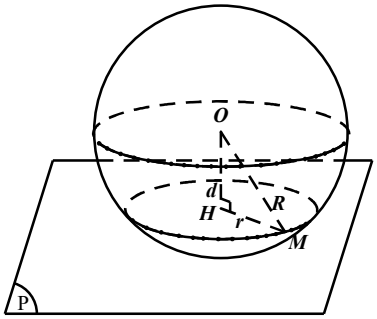
Ta thấy: $d\left(I,(P)\right)=R$, vậy (P) tiếp xúc với (S).

Câu 12. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. $r=\dfrac{1}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{1}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

Khoảng cách $d(O,(P))=\frac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 13. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+2y-z+1=0$?

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B.** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D.** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d(I,(P))=R\Rightarrow R=\frac{|2.3+2.1-0+1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\Leftrightarrow R=3.$$

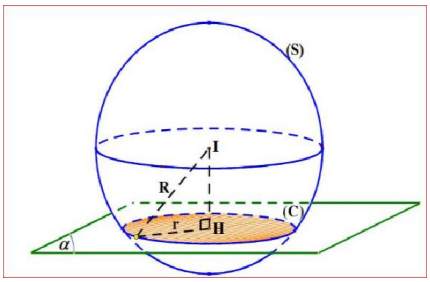
Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Câu 14. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r=3$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=\sqrt{6}$. **D.** $r=\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d=3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$ **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R,r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

Ta có $R^2=r^2+\left(d\left(I,(P)\right)\right)^2=1+\left(\dfrac{|2.2+1.1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}\right)^2=10$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

Câu 16. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-z+2=0$.

A. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d>0(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$

nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+6b+6c-d=22\\4a-2b-2c-d=6\\4a+2b-6c+d=-14\\2a+3b-c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\\d=-2\end{cases}:T/m(*)$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{3}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

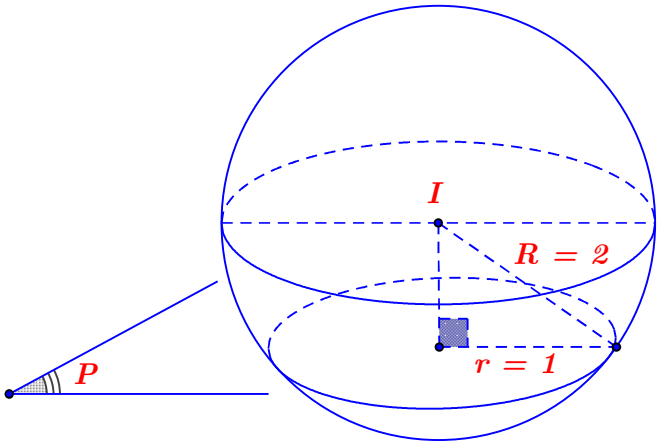
Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+z=1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx+my+mnz-mn=0$

Mặt khác $d\left(I;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{\left|1-mn\right|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1=d(\left(I;\left(ABC\right)\right)$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R=1$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-1\right)^2=4$ và mặt phẳng (P): $x+my+z-3m-1=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.



A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-2$.
C. $m=1$ hoặc $m=2$. **D.** $m=-1$

Lời giải

Mặt cầu (S): $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-1\right)^2=4$ có tâm $I\left(2;4;1\right)$, bán kính $R=2$.

Ta có $d\left(I,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2+4m+1-3m-1\right|}{\sqrt{1+m^2+1}}=\dfrac{\left|m+2\right|}{\sqrt{m^2+2}}$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r=1$.

Ta có $R^2=d^2\left(I,\left(P\right)\right)+r^2\Leftrightarrow 4=\dfrac{\left(m+2\right)^2}{m^2+2}+1\Leftrightarrow m^2+4m+4=3\left(m^2+2\right)\Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0$

$\Leftrightarrow m=1$.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng $\left(Oxz\right)$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $\left|a\right|=1$. **B.** $a+b+c=1$. **C.** $\left|b\right|=1$. **D.** $\left|c\right|=1$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $\left(Oxz\right)$: $y=0$.

Vì mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với $\left(Oxz\right)$ nên ta có:

$d\left(I;\left(Oxz\right)\right)=1\Leftrightarrow\left|b\right|=1$.

Câu 20. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là:

A. $2x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-y+2z+9=0$.

C. $2x-y+2z+7=0$. **D.** $2x-y+2z-9=0$.

Lời giải

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có dạng: $(Q): 2x-y+2z+D=0, (D\neq -11)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5}=3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

$$d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \frac{|2.(-1)-2+2.3+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{|2+D|}{3}=3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+D=9 \\ 2+D=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=7 \\ D=-11 \end{array}\right. . \text{ Do } D\neq -11 \Rightarrow D=7.$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+2z+7=0$.

Câu 21. **(Sở Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$ và $(Q): 2x-y+z+1=0$. Số mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $M(0;0;2)\in(P) \Rightarrow d((P);(Q))=d(M;(Q))=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$d(A;(P))=\frac{\sqrt{6}}{2}; d(A;(Q))=\sqrt{6} \Rightarrow d(A;(Q))=d(A;(P))+d((Q);(P))$

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

Câu 22. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

A. $(P): 5x+y-6z+62=0$. **B.** $(P): 5x+y-6z-62=0$.

C. $(P): 5x-y-6z-62=0$. **D.** $(P): 5x+y+6z+62=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(5;1;-6)$ là vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P):

$$5(x-6)+1(y-2)-6(z+5)=0 \Leftrightarrow 5x+y-6z-62=0.$$

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S):\begin{cases} I(1;-1;1) \\ R=3 \end{cases}$.

Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d(I;(P))=R \Leftrightarrow \dfrac{|1-m^2-3m|}{3}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+3m-10=0 \\ m^2+3m+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Câu 24. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $0xyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ có tâm I và mặt phẳng $(P):x+2y+2z+7=0$. Thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

A. 12π **B.** 48π **C.** 36π **D.** 24π

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=5$

Ta có chiều cao của khối nón $h=d(I,(P))=\dfrac{|1+2+2+7|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$

Bán kính đáy của hình nón là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{25-16}=3$

Thể tích của khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi.3^3.4=12\pi.$

Câu 25. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ lần lượt có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$, $x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z+5=0$. Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a;b;c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (P) đi qua. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=\dfrac{5}{2}$. **B.** $S=-\dfrac{5}{2}$. **C.** $S=\dfrac{9}{2}$. **D.** $S=-\dfrac{9}{2}$.

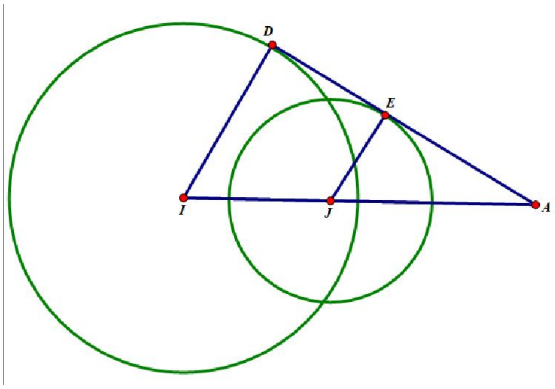
Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R_1=5$

Mặt cầu (S_2) có tâm $J(3;-2;-1)$ và bán kính $R_2=3$

Ta có $\overrightarrow{IJ}(2;-3;-2) \Rightarrow IJ=\sqrt{17} \Rightarrow R_1-R_2<IJ<R_1+R_2$. Vậy $(S_1),(S_2)$ là hai mặt cầu cắt nhau.



Gọi A là tâm tỉ cự của hai mặt cầu ta có

$\frac{AI}{\text{AJ}}=\frac{ID}{JE}=\frac{5}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\text{AJ}}\Rightarrow 3\overrightarrow{AI}=5\overrightarrow{\text{AJ}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\frac{5\overrightarrow{OJ}-3\overrightarrow{OI}}{2}\Rightarrow A\left(6;-\frac{13}{2};-4\right)\Rightarrow a+b+c=-\frac{9}{2}$

Câu 26. **(Sở Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-13=0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -11. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $A(1;2;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)\Rightarrow I$ là hình chiếu của A lên mp(P) $\Leftrightarrow\begin{cases}I\in(P)\\ \overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{n_P}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-c-13=0\\ 1-a=k\\ 2-b=k\\ -1-c=-k\end{cases}\Rightarrow(1-k)+(2-k)-(-1+k)-13=0\Leftrightarrow k=-3\Rightarrow I(4;5;-4)$.

Vậy $a+b+c=5$.

Câu 27. **(Sở Hà Nam - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $(6;0;1)$. **B.** $(-3;1;4)$. **C.** $(-2;-1;5)$. **D.** $(4;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r=6\pi\Leftrightarrow r=3$.

Do $(Q)//(P) \Rightarrow (Q): x-2y+z+d=0 \ \ (d \neq 7)$.

Ta có: $d\left(I,(Q)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \dfrac{|d-1|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=7 \ \ (\text{loại}) \\ d=-5 \ \ (\text{nhận}) \end{array}\right.$

Vậy $(Q): x-2y+z-5=0$. Thay tọa độ $(-2;-1;5)$ vào (Q) thấy thỏa mãn.

Câu 28. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+2}=4$.

Vì $(\alpha)||(\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x+3y-12z+d=0, (d \neq 10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S)

nên: $d_{(I,(\beta))}=R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}}=4 \Leftrightarrow |d-26|=52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=-26 \\ d=78 \end{array}\right.$.

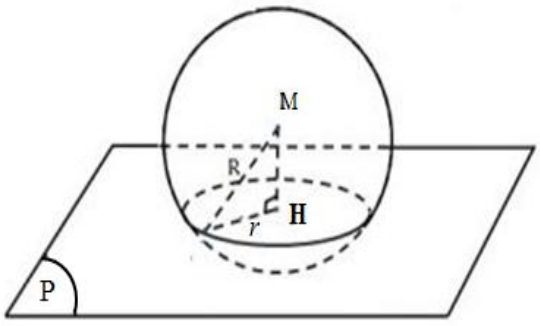
Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d=78$.

Vậy mp (β): $4x+3y-12z+78=0$.

Câu 29. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm M, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}-1$.

Lời giải



Mặt cầu tâm tâm M, bán kính bằng $R=\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính r suy ra $r=\sqrt{R^2-MH^2}$.

Với $MH=d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|2.1-(-2)-2.0-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1$. Suy ra $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2;-2;1)$. **B.** $(1;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-5)$. **D.** $(-2;2;-1)$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$x-2y+z+D=0$, $D\neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$$d(I;(P))=\sqrt{R^2-r^2}\Leftrightarrow d(I;(P))=\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-2.0-2+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow |D-1|=6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D-1=6\\ D-1=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=7\\ D=-5\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D=7$. Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x-2y+z+7=0$.

Nhận thấy điểm có tọa độ $(-2;2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 31. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$. Phương trình mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(0;4;-2)$ là

A. $x+6y-6z+37=0$ **B.** $x-2y-2z-4=0$ **C.** $x-2y-2z+4=0$ **D.** $x+6y-6z-37=0$

Lời giải

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=9$ có tâm $I(1;2;-4)$.

$\overrightarrow{IM}=(-1;2;2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $M(0;4;-2)$ nhận $\overrightarrow{IM}=(-1;2;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$$-1(x-0)+2(y-4)+2(z+2)=0\Leftrightarrow x-2y-2z+4=0.$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng (P): $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$ hoặc $m=-21$.

C. $m=1$ hoặc $m=21$. **D.** $m=-9$ hoặc $m=31$.

Lời giải

Ta có mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I,(P))=R\Leftrightarrow \dfrac{|4.2-3.(-1)-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\Leftrightarrow |11-m|=10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=21\end{array}\right.$.

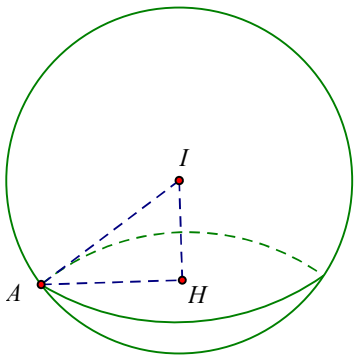
Câu 33. **(THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu

$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Từ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$



Ta có $IH=d(I;(P))\Leftrightarrow IH=\dfrac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$

Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2\Leftrightarrow 9=\dfrac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$

$\Leftrightarrow m^2-12m+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6-2\sqrt{5}\\m=6+2\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Câu 34. **(Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

A. $(Q):y+3z=0$. **B.** $(Q):x+y-2z=0$. **C.** $(Q):y-z=0$. **D.** $(Q):y-2z=0$.

Lời giải

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By+Cz=0\ (B^2+C^2\neq 0)$.

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r=3$.

Vì $R=r$ nên $I\in(Q)$.

$\Leftrightarrow -2B-C=0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B=1\Rightarrow C=-2$.

Vậy $(Q):y-2z=0$.

Câu 35. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+2y-2z+8=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P):

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

Lời giải

Chọn D

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P):

$\Rightarrow R=d(I;(P))=\dfrac{|-1+4-2+8|}{\sqrt{1+4+4}}=3$

Vậy: $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

Câu 36. Trong không gian **với** hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(0;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$?

A. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=9$.

C. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3$. **D.** $x^2+(y+1)^2+(z+3)^2=3$.

Lời giải

Ta có: Bán kính mặt cầu là: $R=d(I;(P))=\dfrac{|-1-6-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=3$.

Phương trình mặt cầu là: $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 37. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;2;5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng
$(P):x-2y+2z+4=0$ là

A. $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z+21=0$. **B.** $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+10z+21=0$.

C. $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z-21=0$. **D.** $(S):x^2+y^2+z^2+x-2y-5z-21=0$.

Lời giải

Ta có bán kính của mặt cầu (S) là $R=d(I;(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.5+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;5)$ và bán kính của $R=3$ suy ra phương trình mặt cầu (S) là
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-10z+21=0$.

Câu 38. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải

Theo giả thiết $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.1-(-2)+2.3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$

Vậy (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Câu 39. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P):x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$. **B.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.

C. $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$. **D.** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S=\pi r^2=\pi \Rightarrow r=1$

$d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|-3-2.0-2.1-1\right|}{\sqrt{1+4+4}}=2$

(S) có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{d^2\left(I;(P)\right)+r^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

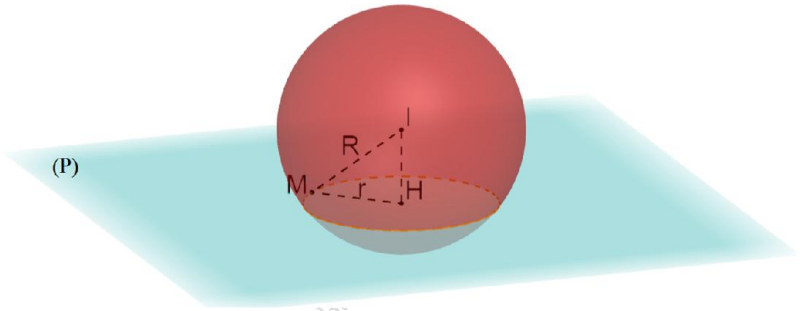
Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5.$

Câu 40. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25.$ **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16.$

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34.$ **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34.$

Lời giải



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2=R^2=d^2_{(I;(P))}+r^2 \qquad (*)$$

Ta có: $d_{(I;(P))}=\dfrac{\left|-1-2.2+2.(-1)-2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3=IH.$

Từ $(*)\Rightarrow R^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34.$

Câu 41. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S).

A. $2x+2y+z-4=0$. **B.** $6x+6y+3z-8=0$.

C. $2x+2y+z+2=0$ **D.** $6x+6y+3z-3=0$.

Lời giải

Chọn C

$(S):x^2+y^2+(z+1)^2=3 \Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0;0;-1)$, $R=\sqrt{3}$.

Do $\overrightarrow{IK}=(2;2;1), IK=3>R\Rightarrow$ K nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE\perp EK\Rightarrow \Delta IKE$ vuông tại $E\Rightarrow KE=\sqrt{IK^2-IE^2}=\sqrt{6}\Rightarrow$ E thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R'=\sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2z-2=0\\(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2z-2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6$$

$$\Leftrightarrow 4x+4y+2z+4=0\Leftrightarrow 2x+2y+z+2=0.$$

Câu 42. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17-m>0\Leftrightarrow m<17$.

Khi đó $I(-1;2;3); R=\sqrt{17-m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S).

Để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r=4$.

Ta có $R^2=d^2(I,(\beta))+r^2\Leftrightarrow 17-m=16+2\Leftrightarrow m=-1$ (TMĐK).

Câu 43. **(THPT Kinh Môn - HD - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha):x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P), biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l}x-2y+z+3=0\\x-2y+z-21=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}3x+y+4z+1=0\\3x+y+4z-2=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}4x-3y-z+5=0\\4x-3y-z-27=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vectơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z+D=0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I;(P))=R\Leftrightarrow\frac{|2.1+3+2.2+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4\Leftrightarrow|D+9|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-21\\D=3\end{array}\right.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$

Câu 44. **(SGD - Đà Nẵng - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $x-2y-2z+1=0$. **B.** $-x+2y+2z+5=0$.

C. $x-2y-2z-23=0$. **D.** $-x+2y+2z+17=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương trình (Q) có dạng: $x-2y-2z+D=0$ $(D\neq -5)$.

(Q) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $d(I,(Q))=R \Leftrightarrow \dfrac{|1-2.(-2)-2.(-3)+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Leftrightarrow |D+11|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D+11=6\\D+11=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=-5\\D=-17\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện suy ra $D=-17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x-2y-2z-17=0 \Leftrightarrow -x+2y+2z+17=0$.

Câu 45. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha):x+4y+z-11=0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v}=(1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Lập phương trình mặt phẳng (P).

A. $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$. **B.** $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.

C. $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$. **D.** $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

Lời giải

(S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;4;1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x-y+2z+d=0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4$

Hay $\dfrac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}d=-21\\d=3\end{array}\right.$.

Câu 46. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh – 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng là: $(P): Ax+By+Cz+D=0\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A,B nên ta có:

$\begin{cases}A+D=0\\2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2C\\D=-2C\end{cases}$. Vậy mặt phẳng (P) có dạng: $2Cx+By+Cz-2C=0$.

(S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R=1$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d_{(I,(P))}=R\Leftrightarrow\dfrac{2C+B-2C}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1\Leftrightarrow B^2=5C^2+B^2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $A=D=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y=0$.

Câu 47. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-7=0$. Biết $mp(Q)$ cắt mặt cầu $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$. **B.** $2x-2y+z-7=0$.

C. $2x-2y+z-17=0$. **D.** $2x-2y+z+17=0$.

Lời giải

Do mặt phẳng $(Q)\,//\,(P): 2x-2y+z-7=0$, suy ra $(Q): 2x-2y+z+m=0,\quad (m\neq -7)$.

Ta có $(S): x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$ có tâm $I(0;2;-1)$ bán kính $R=5$.

Gọi $h=d_{(I;(Q))}=\dfrac{|2.0-2.2-1+m|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|m-5|}{3}$.

Do (Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$, suy ra: $R^2=r^2+h^2$

$\Leftrightarrow 25=9+\dfrac{(m-5)^2}{9}\Leftrightarrow (m-5)^2=144\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-5=12\\m-5=-12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=17\\m=-7\ (\text{loai})\end{array}\right.$.

Vậy $mp(Q)$ có phương trình: $2x-2y+z+17=0$.

Dạng 3.2 Vị trí tương đối hai mặt

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

- (P) *cắt* $(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\,||\,(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

Câu 48. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+my+3z-5=0$ và $(Q): nx-8y-6z+2=0$, với $m,n\in\mathbb{R}$. Xác định m, n để (P) song song với (Q).

A. $m=n=-4$. **B.** $m=4;n=-4$. **C.** $m=-4;n=4$. **D.** $m=n=4$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_1}(2;m;3)$

Mặt phẳng (Q) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n_2}(n;-8;-6)$

Mặt phẳng $(P)//(Q) \Rightarrow \vec{n_1} = k\vec{n_2}\ (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = kn \\ m = -8k \\ 3 = -6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1/2 \\ m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$

Nên chọn đáp án **B**

Câu 49. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và $(Q): mx+y-2z+1=0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=6$

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$1.m-2.1+2.(-2)=0 \Leftrightarrow m=6$

Câu 50. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, tìm tập hợp các điểm cách đều cặp mặt phẳng sau đây: $4x-y-2z-3=0$, $4x-y-2z-5=0$.

A. $4x-y-2z-6=0$. **B.** $4x-y-2z-4=0$. **C.** $4x-y-2z-1=0$. **D.** $4x-y-2z-2=0$.

Lời giải

Gọi điểm $A(0;-3;0) \in 4x-y-2z-3=0\ (\alpha)$ và $B(0;-5;0) \in 4x-y-2z-5=0\ (\beta)$.

Mặt phẳng cách đều hai mp trên có dạng: $4x-y-2z+m=0\ (\gamma)$.

Để mp (γ) cách đều hai mp trên thì $d(A;(\beta)) = 2d(A;(\gamma)) \Leftrightarrow |m+3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

Mặt khác điểm hai điểm A, B phải nằm về hai phía của mp (γ).

Do đó:

+) Với $m=-2$ ta có: $(4.0+3-2.0-2)(4.0+5-2.0-2)>0$ nên $A;B$ cùng phía.

+) Với $m=-4$ ta có: $(4.0+3-2.0-4)(4.0+5-2.0-4)<0$ nên $A;B$ khác phía.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $4x-y-2z-4=0\ (\gamma)$.

Câu 51. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$; $(Q): 2x+y+z-1=0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1;1;1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q); phương trình của $(R): m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$. Khi đó giá trị của m là

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Vì $(R): m(x-2y-z+3)+(2x+y+z-1)=0$ đi qua điểm $M(1;1;1)$ nên ta có:

$m(1-2.1-1+3)+(2.1+1+1-1)=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 52. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-z-2=0$. **B.** $x-y-z-2=0$. **C.** $x+y+z-2=0$. **D.** $2x+y+z-2=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;1;1)$.

Mặt phẳng $(Q): x-y-z-2=0$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;-1)$.

Mà $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=2-1-1=0\Rightarrow\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\Rightarrow(P)\perp(Q)$.

Vậy mặt phẳng $x-y-z-2=0$ là mặt phẳng cần tìm.

Câu 53. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $b.c\neq 0$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Mối liên hệ giữa b,c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $2b=c$. **B.** $b=2c$. **C.** $b=c$. **D.** $b=3c$.

Lời giải

• Phương trình $(ABC): \frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Rightarrow(ABC)$ có VTPT: $\vec{n}=\left(1;\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$.

• Phương trình $(P): y-z+1=0\Rightarrow(P)$ có VTPT: $\vec{n}'=(0;1;-1)$.

• $(ABC)\perp(P)\Leftrightarrow\vec{n}.\vec{n}'=0\Leftrightarrow\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c$.

Câu 54. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x+y-2z+5=0$ và $(Q): 4x+(2-m)y+mz-3=0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(4;2-m;m)$.

Ta có: $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0\Leftrightarrow 4.1+2-m-2m=0\Leftrightarrow m=2$.

Nên $m=2$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax-y+2z+b=0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-y-z+1=0$ và $(Q): x+2y+z-1=0$. Tính $a+4b$.

A. -16. **B.** -8. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng $(P),(Q)$ ta lấy lần lượt 2 điểm A,B như sau:

Lấy $A(x;y;1)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=0\\x+2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0\Rightarrow A(0;0;1)$.

Lấy $B(-1;y;z)\in\Delta$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}y+z=0\\2y+z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\z=-2\end{cases}\Rightarrow B(-1;2;-2)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $A,B \in (\alpha)$. Do đó ta có: $\begin{cases} 2+b=0 \\ -a+b-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-2 \end{cases}$.

Vậy $a+4b=-8+2.(-2)=-16.$

Câu 56. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z-1=0$ và $(\beta): 2x+4y-mz-2=0.$ Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A. $m=1$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vec tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$, vec tơ pháp tuyến của (β) là $\overrightarrow{n_2}=(2;4;-m)$.

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-m}{-1}\neq\frac{-2}{-1}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2019)** Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A. $(Q): x+2y-2z+8=0$. **B.** $(Q): x+2y-2z+5=0$.

C. $(Q): x+2y-2z+1=0$. **D.** $(Q): x+2y-2z+2=0$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có: $(P): x+2y-2z-1=0$, chọn $A(1;0;0)\in(P)$.

+ Xét đáp án A, ta có $d(A;(Q))=\frac{|1+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$. Vậy đáp án A thoả mãn.

Câu 58. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): x+y+z+3=0$, cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a;b;c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a+b+c<-2$?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có mặt phẳng cần tìm là $(P): x+y+z+d=0$ với $d\neq 3$.

Mặt phẳng (P) cách điểm $M(3;2;1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|6+d|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3 \\ d=-15 \end{array}\right.$ đối chiếu điều kiện suy ra $d=-15$. Khi đó $(P): x+y+z-15=0$.

Theo giả thiết $X(a;b;c)\in(P) \Leftrightarrow a+b+c=15>-2$ không thỏa mãn $a+b+c<-2$.

Vậy không tồn tại mặt phẳng (P).

Câu 59. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x-y+4z+2=0$ và $(Q_2): 3x-y+4z+8=0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là:

A. $(P): 3x-y+4z+10=0$. **B.** $(P): 3x-y+4z+5=0$.

C. $(P): 3x-y+4z-10=0$. **D.** $(P): 3x-y+4z-5=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có dạng $3x-y+4z+D=0$.

Lấy $M(0;2;0)\in(Q_1)$ và $N(0;8;0)\in(Q_2)$. Do $(Q_1)//(Q_2)$ trung điểm $I(0;5;0)$ của MN phải thuộc vào (P) nên ta tìm được $D=5$.

Vậy $(P): 3x-y+4z+5=0$.

Câu 60. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m): x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x-y-6z+3=0$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=3$.

Lời giải

+ $(P_m): mx+2y+nz+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(m;2;n)$.

$(Q_m): x-my+nz+2=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;-m;n)$.

$(\alpha): 4x-y-6z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(4;-1;-6)$.

+ Giao tuyến của hai mặt phẳng (P_m) và (Q_m) vuông góc với mặt phẳng (α) nên

$$\begin{cases}(P_m)\perp(\alpha)\\(Q_m)\perp(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\\\overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-2-6n=0\\4+m-6n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}.$$

Vậy $m+n=3$.

Câu 61. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 9.

Lời giải

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+b+c+d=0\\-2b+2c+d=0\end{cases}\quad(*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox,Oy lần lượt tại $M(-d;0;0), N\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$.

Vì M,N cách đều O nên $OM=ON$. Suy ra: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right|$.

Nếu $d=0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d|=\left|\frac{d}{b}\right|\Leftrightarrow b=\pm 1$.

• Với $b=1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=-2\\2c+d=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=4\\d=-6\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P): $x+y+4z-6=0$

• Với $b=-1$, $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}c+d=0\\2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2\\d=2\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q): $x-y-2z+2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Cách 2

$\overrightarrow{AB}=(-1;-3;1)$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O lần lượt tại M,N. Vì M,N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a;0;0),N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (P). Ta có $\overrightarrow{MN}=(-a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_1}\right]=(-1;-1;-4)$,

suy ra $(P):x+y+4z+d_1=0$

TH2: $M(-a;0;0),N(0;a;0)$ với $a\neq 0$ khi đó (α) chính là (Q). Ta có $\overrightarrow{MN}=(a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_2}=(1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_2}\right]=(-1;1;2)$,

suy ra $(Q):x-y-2z+d_2=0$

Vậy: $b_1b_2+c_1c_2=1.(-1)+4.(-2)=-9$.

Câu 62. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

A. $3x+2y+z+14=0$. **B.** $2x+y+3z+9=0$. **C.** $3x+2y+z-14=0$. **D.** $2x+y+z-9=0$.

Lời giải

Gọi $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a.b.c\neq 0)$

Vì (P) qua M nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1\quad(1)$

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1);\overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1);\overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=c\\3a=c\end{cases}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=\frac{14}{3};b=\frac{14}{2};c=14$. Khi đó phương trình (P): $3x+2y+z-14=0$

Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x+2y+z+14=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 30 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán liên khác quan điểm – mặt phẳng – mặt cầu

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x+2y+2z+15=0$ **B.** $x+y+z+7=0$

C. $2x+2y+2z-15=0$ **D.** $x+y+z-7=0$

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S). Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z-4)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1-1)(x-1)+(y-2-1)(y-2)+(z-3-1)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-(x+y+z-7)=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-7=0$ $(Do\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0)$.

Câu 2. **(Sở Bắc Giang Năm 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M thuộc mặt phẳng nào sau đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y+6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Lời giải

Giả sử $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)$.

Vì $M\in(S)$ và $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$ nên ta có hệ $\begin{cases} x(x-2)+y(y+2)+z(z-2)=6 \\ x^2+y^2+(z+2)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \\ x^2+y^2+z^2+4z+4=1 \end{cases} \Rightarrow 2x-2y+6z+9=0$.

Vậy điểm M thuộc mặt phẳng có phương trình: $2x-2y+6z+9=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$. **B.** $2x-2y-6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$. **D.** $2x-2y+6z+9=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ là điểm cần tìm.

Khi đó: $x^2+y^2+(z+2)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4z+4=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-4z-3 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ và $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y+2)+z(z-2)=6$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \quad (2)$

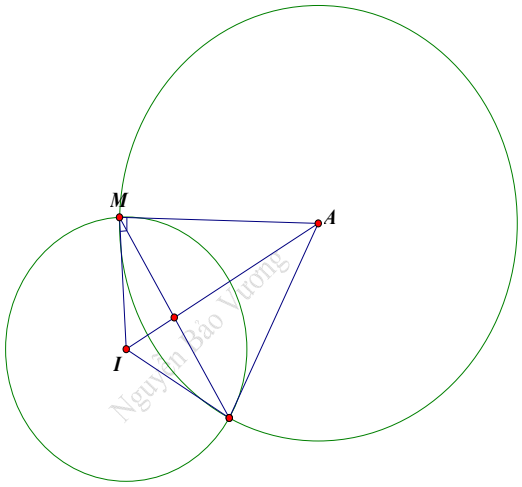
Thay (1) vào (2) ta được

$-4z-3-2x+2y-2z-6=0 \Leftrightarrow 2x-2y+6z+9=0$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$. **C.** $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải



(S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=1$.

Do $IA=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}>R$ nên điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

ΔAMI vuông tại M: $AM=\sqrt{AI^2-IM^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S') có tâm A bán kính $\sqrt{2}$.

Ta có phương trình $(S'):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2$.

Ta có $M\in(S)\cap(S')$.

Tọa độ của M thỏa hệ phương trình $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=2\end{cases}(I)$.

Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+10=0\end{cases}\Rightarrow 2x+2y+2z-8=0\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

Suy ra $M\in(P):x+y+z-4=0$.

Câu 5. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có

tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 8 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là: $ax+by+cz+d=0$ (đk: $a^2+b^2+c^2>0$).

Khi đó ta có hệ điều kiện sau: $\begin{cases} d\left(A;(P)\right)=2 \\ d\left(B;(P)\right)=1 \\ d\left(C;(P)\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \\ \dfrac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \\ \dfrac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$.

Khi đó ta có: $|3a-b+c+d|=|-a-b+c+d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b+c+d=-a-b+c+d \\ 3a-b+c+d=a+b-c-d \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a-b+c+d=0 \end{array}\right.$.

với $a=0$ thì ta có

$\begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d|=2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ \left[\begin{array}{l} 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+d=0 \Rightarrow c=d=0, b\neq 0 \\ c+d=4b, c=\pm 2\sqrt{2}b \end{array}\right.$ do đó có 3 mặt phẳng.

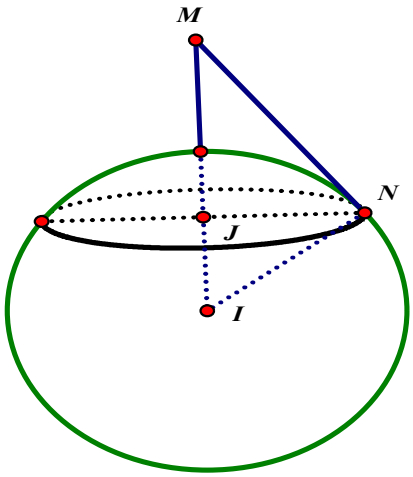
Với $a-b+c+d=0$ thì ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=4|a| \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=\dfrac{4}{3}|a| \\ |c|=\dfrac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$

do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N. Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, thì giá trị của k là

A. 45. **B.** 50. **C.** –45. **D.** –50.

Lời giải



Mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$ có tâm $I(-3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Có $IM=\sqrt{25+16+4}=3\sqrt{5}>6=R$, nên M thuộc miền ngoài của mặt cầu (S).

Có MN tiếp xúc mặt cầu (S) tại N, nên $MN\perp IN$ tại N.

Gọi J là điểm chiếu của N lên MI.

Có $IN^2=IJ.IM$. Suy ra $IJ=\dfrac{IN^2}{IM}=\dfrac{36}{3\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ (không đổi), I cố định.

Suy ra N thuộc (P) cố định và mặt cầu (S), nên N thuộc đường tròn (C) tâm J.

Gọi $N(x;y;z)$, có $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{IJ}{IM}\overrightarrow{IM}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{IM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=8\\y-2=-\dfrac{4}{5}\\z-5=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow N\left(5;\dfrac{6}{5};\dfrac{23}{5}\right)$, $k=2a-5b+10c=50$. Vậy $k=50$.

Câu 7. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Đk: $a^2+b^2+c^2-d>0$

(S) đi qua các điểm M, N, P và tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz)\Leftrightarrow\begin{cases}-4a-2b-8c+d=-21\\-10a+d=-25\\-2a+6b-2c+d=-11\\R=|a|\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b-8c+10a-25=-21 \\ d=10a-25 \\ -2a+6b-2c+10a-25=-11 \\ a^2+b^2+c^2-d=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 8a+6b-2c=14 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 32a+24b-8c=56 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c=4 \\ d=10a-25 \\ 26a+26b=52 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ d=10a-25 \\ b=-a+2 \\ b^2+c^2-d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-a+2)^2+(a-1)^2-10a+25=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-16a+30=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=4 \\ d=25 \end{cases}$$

Vì $a+b+c<5$ nên chọn $c=2$.

Câu 8. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 243π. **B.** 81π. **C.** $\frac{81}{2}\pi$. **D.** $\frac{243\pi}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $a,b,c\neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mà $H(1;2;-2)\in(\alpha)$ nên: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}=1$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1-a;2;-2)$, $\overrightarrow{BH}=(1;2-b;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Lại có H là trực tâm tam giác ABC, suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b=-c \\ a=-2c \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{-2c}+\frac{2}{-c}-\frac{2}{c}=1\Leftrightarrow c=-\frac{9}{2}$, khi đó $a=9,b=\frac{9}{2}$.

Vậy $A(9;0;0)$, $B\left(0;\frac{9}{2};0\right)$, $C\left(0;0;-\frac{9}{2}\right)$.

Khi đó, giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là:

$x^2+y^2+z^2-2a'x-2b'y-2c'z+d=0$. Với $(a')^2+(b')^2+(c')^2-d>0$

Vì 4 điểm O,A,B,C thuộc mặt cầu nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d=0 \\ -18a'+d=-81 \\ -9b'+d=-\dfrac{81}{4} \\ 9c'+d=-\dfrac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a'=\dfrac{9}{2} \\ b'=\dfrac{9}{4} \\ c'=-\dfrac{9}{4} \end{cases}.$$

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là: $x^2+y^2+z^2-9x-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}z=0$, có tâm $I\left(\frac{9}{2};\frac{9}{4};-\frac{9}{4}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2-0}=\frac{9\sqrt{6}}{4}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tự diện $OABC$ là $S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{9\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{243\pi}{2}$.

Câu 9. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

□ Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I\in(C)$ và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (MNP).

Ta có: (S) tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM

$\Leftrightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM) \Leftrightarrow d(H,MN)=d(H,NP)=d(H,PM)$

$\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP.

□ (MNP) có phương trình là $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+y+z-6=0$.

□ $(C)=(S_1)\cap(S_2) \Rightarrow$ Tọa độ các điểm thuộc trên (C) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y-z=0.$$

Do đó, phương trình chứa mặt phẳng chứa (C) là $(\alpha): 3x-2y-z=0$.

□ Vì $1.3+1.(-2)+1.(-1)=0 \Rightarrow (MNP)\perp(\alpha)$. (1)

□ Ta có: $MN=NP=PM=6\sqrt{2} \Rightarrow \Delta MNP$ đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow G(2;2;2)$ và G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Thay tọa độ của điểm G vào phương trình mặt phẳng (α), ta có: $G\in(\alpha)$.

□ Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (MNP) tại G.

Vì $\begin{cases}(MNP)\perp(\alpha)\\ G\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow \Delta\subset(\alpha)$.

Khi đó: $\forall I\in\Delta\Rightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM)=r$

$\Rightarrow$ Mặt cầu tâm I bán kính r tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, MP, PM.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3;1;1), B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tiếp xúc với (P) tại điểm C. Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T).

A. $r=4$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải

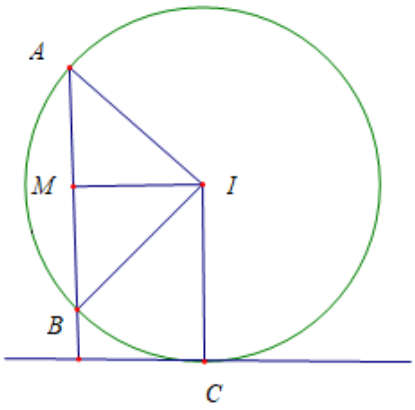
Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$. Do đó AB vuông góc với (P).

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B nên ta có

$$\begin{cases}9+1+1+6a-2b-2c+d=0\\ 1+1+25-2a+2b-10c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a-2b-2c+d=-11\\ 2a-2b+10c-d=27\end{cases}.$$

Suy ra $8a-4b+8c=16\Leftrightarrow 2a-b+2c=4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d(I,(P))=\dfrac{|2a-b+2c+11|}{3}=5$.



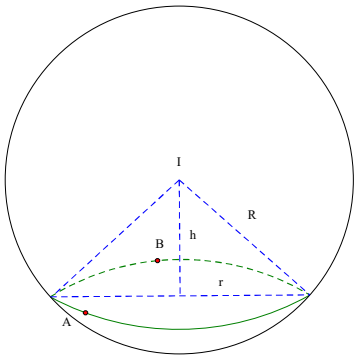
Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)\Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$. Gọi M là trung điểm AB ta có $d(C,AB)=IM=\sqrt{5^2-3^2}=4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r=4.$.

Câu 11. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A,B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn

giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên A,B thuộc mặt cầu (S).

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3};\sqrt{3};0)=-\sqrt{3}(1;-1;0)=-\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của AB.

Gọi $\vec{a}=(1;-1;0)$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $A,B\in(P)$ nên có $\begin{cases}I\in(P)\\ \vec{a}.\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}b+3c+d=0\\ a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-6a-3c\\ a=b\end{cases}$.

Gọi $h=d(I,(P))$, $(C)=(P)\cap(S)$, r là bán kính đường tròn (C).

$r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N).

$S=\frac{1}{2}.h.2r=h.\sqrt{6-h^2}\le\frac{h^2+6-h^2}{2}=3$.

$MaxS=3$ khi $h^2=6-h^2\Rightarrow h=\sqrt{3}$.

$h=d(I,(P))\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$\Leftrightarrow a^2=c^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=c\\ a=-c\end{array}\right.$.

Nếu $a=c$ thì $b=a;d=-9a$ và $(P):ax+ay+az-9a=0\Leftrightarrow x+y+z-9=0$ (nhận).

Nếu $a=-c$ thì $b=a;d=-3a$ và $(P):ax+ay-az-3a=0\Leftrightarrow x+y-z-3=0$ (loại).

Vậy $T=|a+b+c+d|=6$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R=d\left(I,(\alpha)\right)=d\left(I,(\beta)\right)$.

Mà $d\left(I,(\beta)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{(1-m)^2}+1}}$

Ta có

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{1-m}\right)^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)}\right]^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}=\frac{1}{m(1-m)}-1(\text{do } m\in(0;1)$$

Nên

$$R=\frac{\left|\dfrac{a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)}{m(1-m)}\right|}{\dfrac{1}{m(1-m)}-1}$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{\left|a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\right|}{m^2-m+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R-Rm+Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\\-R+Rm-Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2(R+c-1)+m(a-b-c-R+1)+R-a=0(1)\\m^2(R+c-1)+m(b+c-a-R-1)+R+a=0(2)\end{array}\right.$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ với mọi $m\in(0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\a-b-c-R+1=0\\R-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\b=R\\c=1-R\end{cases}\Rightarrow I(R;R;1-R).$$

Mà $R=d\left(I,(\alpha)\right)\Leftrightarrow R=\dfrac{\left|2R-R+2(1-R)+10\right|}{3}\Leftrightarrow 3R=\left|12-R\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=3\\R=-6(l)\end{array}\right.$

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\b+c-a-R-1=0\\R+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-R\\b=-R\\c=R+1\end{cases}\Rightarrow I(-R;-R;R+1)$$

Mà $R=d\left(I,(\alpha)\right)\Leftrightarrow R=\dfrac{\left|-2R+R+2(1+R)+10\right|}{3}\Leftrightarrow 3R=\left|12+R\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=6\\R=-3(l)\end{array}\right.$.

Vậy $R_1+R_2=9$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P):x=1,(Q):y=-1$ và $(R):z=1$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính của (S). Khi đó ta có

$$R = IA = d\left(I;(P)\right) = d\left(I;(Q)\right) = d\left(I;(R)\right) \Leftrightarrow IA = |a-1| = |b+1| = |c-1| \Leftrightarrow \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = \pm(b+1) \\ a-1 = \pm(c-1) \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ (2-a)^2 + a^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ 2a^2 - 12a + 28 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2:

$\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 - 16a + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow R = 1$

TH3: $\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + a^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 4a + 12 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH4: $\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 12 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Nguyễn Bảo Vương

Vậy mặt cầu có bán kính $R = 1$

Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 8 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Theo bài mặt phẳng (P) đi qua $M(1;1;2)$ và $OA = OB = OC$ nên ta có hệ:

$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 \quad (1) \\ |a| = |b| = |c| \quad (2) \end{cases}$. Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = c = -b \\ b = c = -a \end{cases}$

- Với $a = b = c$ thay vào (1) được $a = b = c = 4$

- Với $a = b = -c$ thay vào (1) được $0 = 1$ (loại).

- Với $a=c=-b$ thay vào (1) được $a=c=-b=2$.

- Với $b=c=-a$ thay vào (1) được $b=c=-a=2$.

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn bài toán là:

$(P_1):\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1;\ (P_2):\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1;\ (P_3):\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$

Câu 15. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$ với $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(a-3;b-1;c-7)$ và $\overrightarrow{BM}=(a-5;b-5;c-1)$.

Vì $\begin{cases}M\in(P)\\MA=MB=\sqrt{35}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(P)\\MA^2=MB^2\\MA^2=35\end{cases}$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}2a-b-c+4=0\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=(a-5)^2+(b-5)^2+(c-1)^2\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b-c=-4\\4a+8b-12c=-8\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=c\\c=a+2\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+2\\c=a+2\\3a^2-14a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\\c=2\end{cases},\ (\text{do } a\in\mathbb{Z}).$$

Ta có $M(2;2;0)$. Suy ra $OM=2\sqrt{2}$.

Câu 16. **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

A. 14. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow\frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a}+\frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b}+\frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c}=1\Rightarrow\frac{1}{7a}+\frac{2}{7b}+\frac{3}{7c}=1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d\left(I,(ABC)\right)=\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}} \text{ mà } \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$$

$$\Rightarrow d\left(I,(ABC)\right)=\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết rằng $a+b+c<5$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt cầu (S) đã cho có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Từ đề bài ta có:

$M(2;1;4)\in(S)\Leftrightarrow -4a-2b-8c+d=-21\ (1)$

$N(5;0;0)\in(S)\Leftrightarrow -10a+d=-25\ (2)$.

$P(1;-3;1)\in(S)\Leftrightarrow -2a+6b-2c+d=-11\ (3)$.

Hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{HI}=(a;0;0)\Rightarrow HI=|a|$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz)\Rightarrow IH=|a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}\Leftrightarrow b^2+c^2-d=0(4)$.

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{cases} b=2-a \\ c=a-1 \\ d=10a-25 \end{cases}.$$

Thế vào phương trình (4) ta được: $a^2-8a+15=0\Leftrightarrow a=5\vee a=3$.

Trường hợp 1: $a=5\Rightarrow b=-3,c=4\Rightarrow a+b+c=6>5\Rightarrow$ loại.

Trường hợp 1: $a=3\Rightarrow b=-1,c=2\Rightarrow a+b+c=4<5\Rightarrow$ nhận.

Vậy $c=2$ thỏa yêu cầu đề.

Câu 18. **(Sở Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x+2y+z-1=0$. **B.** $2x+2y+z-3=0$.

C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x+2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=2$.

Có $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)\Rightarrow IA=3$.

Tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB=\sqrt{IA^2-IB^2}=\sqrt{5}$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI.

Ta có: $IB^2=IH.IA\Rightarrow IH=\dfrac{IB^2}{IA}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow IH=\dfrac{4}{9}.IA$.

Từ suy ra được $\overrightarrow{IH}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}\Rightarrow\begin{cases}x-0=\dfrac{4}{9}.2\\ y-0=\dfrac{4}{9}.2\\ z-1=\dfrac{4}{9}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{9}\\ y=\dfrac{8}{9}\\ z=\dfrac{13}{9}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Hơn nữa mặt phẳng (BCD) đi qua điểm H.

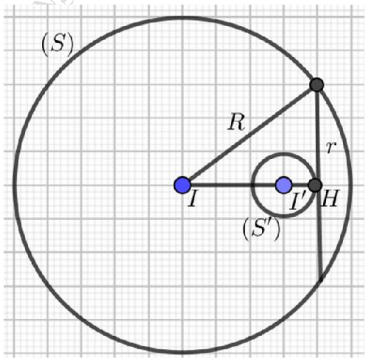
Vậy (BCD) có phương trình: $2.\left(x-\dfrac{8}{9}\right)+2.\left(y-\dfrac{8}{9}\right)+1.\left(z-\dfrac{13}{9}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-5=0$.

Câu 19. **(Hội 8 Trường Chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và (S'): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π. Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\dfrac{14}{3}$. **B.** $\dfrac{17}{7}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$, mặt cầu (S') có tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$

Vì $I'I=3<R-R'=4$ nên mặt cầu (S') nằm trong mặt cầu (S).

Mặt phẳng (P) tiếp xúc $(S')\Rightarrow d(I',(P))=R'=1$; (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π (suy ra bán kính đường tròn là $r=3$) nên $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=4$.

Nhận thấy $d(I,(P))-d(I',(P))=I'I$ nên tiếp điểm H của (P) và (S') cũng là tâm đường tròn giao của (P) và (S). Khi đó, (P) là mặt phẳng đi qua H, nhận $\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\frac{4}{3}\\ y_H=\frac{8}{3}\\ z_H=\frac{11}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x-\frac{4}{3}+2\left(y-\frac{8}{3}\right)+2\left(z-\frac{11}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-14=0$.

Khoảng cách từ O đến (P) là $d\left(O,(P)\right)=\frac{14}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x_0;y_0;z_0)$ là tâm của mặt cầu (S) cố định và R là bán kính của mặt cầu (S).

Ta có:

$$R=d\left(I,(P)\right)=\frac{\left|2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10\right|}{\sqrt{4m^2+\left(m^2+1\right)^2+\left(m^2-1\right)^2}}=\frac{\left|2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10\right|}{\sqrt{2}\left(m^2+1\right)}$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10=R\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\\ 2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10=-R\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\end{array}\right.$ đúng với mọi $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(y_0+z_0\right)m^2+2mx_0+y_0-z_0-10=R\sqrt{2}m^2+R\sqrt{2}\\ \left(y_0+z_0\right)m^2+2mx_0+y_0-z_0-10=-R\sqrt{2}m^2-R\sqrt{2}\end{array}\right.$ đúng với mọi $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_0+z_0=R\sqrt{2}\\ x_0=0\\ y_0-z_0-10=R\sqrt{2}\end{cases}\quad(I)\\ \begin{cases}y_0+z_0=-R\sqrt{2}\\ x_0=0\\ y_0-z_0-10=-R\sqrt{2}\end{cases}\quad(II)\end{array}\right.$

Từ hệ (I) suy ra $x_0=0;y_0=5+R\sqrt{2};z_0=-5$

Do đó tâm mặt cầu là $I\left(0;5+R\sqrt{2};-5\right)$

Ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow R^2=4+\left(R\sqrt{2}-6\right)^2$ suy ra $R=2\sqrt{2}$ và $R=10\sqrt{2}$

Hệ (II) suy ra $x_0=0;y_0=5-R\sqrt{2},z_0=-5$

Như vậy, ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow 4^2+\left(R\sqrt{2}+6\right)^2=R^2$, phương trình không có giá trị R thỏa mãn nên loại.

Vậy tổng hai bán kính của hai mặt cầu là: $12\sqrt{2}$.

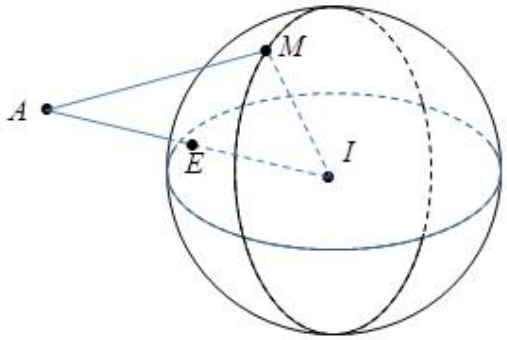
Câu 21. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $x+y+z-6=0$. **B.** $x+y+z-4=0$

C. $3x+3y+3z-8=0$. **D.** $3x+3y+3z-4=0$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $\widehat{AMI}=90^\circ$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1=IE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu $(S_1):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0.$

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

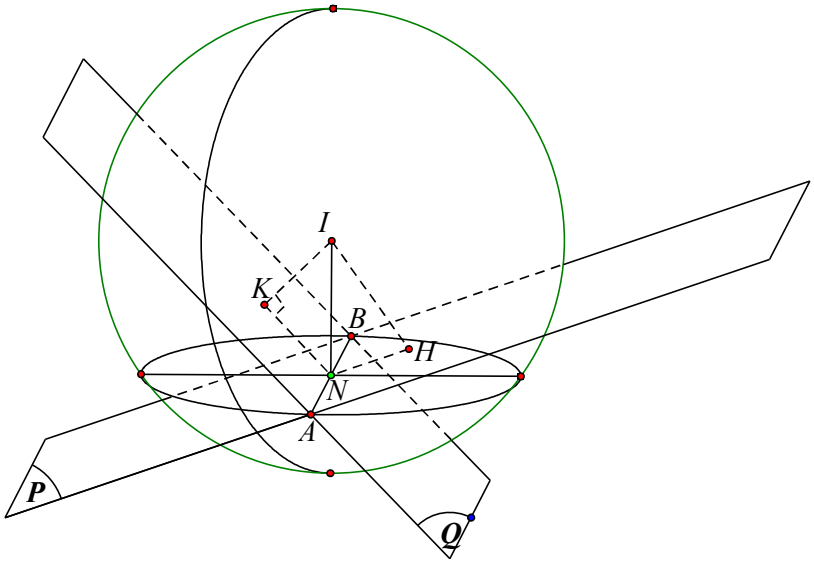
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi đó m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{\frac{142}{15}}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{92}{3}}$. **C.** $r=\sqrt{\frac{23}{3}}$. **D.** $r=\sqrt{\frac{586}{15}}$.

Lời giải



Giả sử đường thẳng d_m cắt mặt cầu tại hai điểm A, B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-2;1)$, bán kính $R=4$.

Đường thẳng $M(x;y)\in d_m$ thỏa $\begin{cases} x+(1-2m)y+4mz-4=0 \\ 2x+my-(2m+1)z-8=0 \end{cases} \Rightarrow 5x+y-2z-20=0$ nên các giao điểm của (S) và d_m thuộc đường tròn giao tuyến giữa (S) và $(P): 5x+y-2z-20=0$.

$d(I,(P))=\dfrac{14}{\sqrt{30}}$ nên $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{4^2-\dfrac{14^2}{30}}=\sqrt{\dfrac{142}{15}}$.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Tìm khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{15}{\sqrt{23}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{915}}$. **C.** $\dfrac{9}{\sqrt{15}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{314}}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(a+4b;-a+b-c;-b+c)$.

Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Vì $I\in(\alpha)$ nên ta có

$$A(a+4b)+B(-a+b-c)+C(-b+c)+D=0$$

$$\Leftrightarrow (A-B)a+(4A+B-C)b+(-B+C)c=-D \quad (1).$$

Theo bài ra ta có $4a+b-2c=4$ (2).

Đồng nhất (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A-B=4 \\ 4A+B-C=1 \\ -B+C=-2 \\ D=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{17}{4} \\ C=-\dfrac{25}{4} \\ D=-4 \end{cases}$$

Suy ra (α) có phương trình $x+17y+25z+16=0$.

Vậy, khảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến (α) bằng

$$d(D,(\alpha))=\frac{|1+17.2+25.(-2)+16|}{\sqrt{1^2+17^2+25^2}}=\frac{1}{\sqrt{915}}.$$

Câu 24. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, điểm $M(a,b,c)$ thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$ và cách đều các điểm $A(1;6;0),B(-2;2;-1),C(5;-1;3)$. Tích abc bằng

A. 6 **B.** –6 **C.** 0 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} a+b+c=6 \\ MA^2=MB^2 \\ MA^2=MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+b^2=(a+2)^2+(b-2)^2+(c+1)^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2+c^2=(a-5)^2+(b+1)^2+(c-3)^2 \end{cases}$

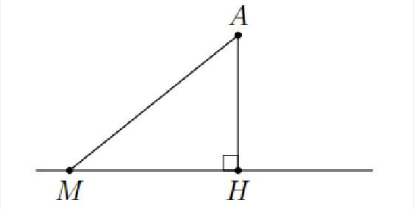
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ 3a+4b+c=14 \\ 4a-7b+3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow abc=6.$$

Dạng 2. Cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A,B,C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB+BC \geq AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1,A_2,....A_n$ ta luôn có

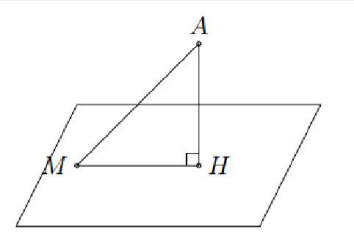
$A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x,y ta luôn có $\dfrac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ ta luôn có $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}=k\vec{b},k \in \mathbb{R}$

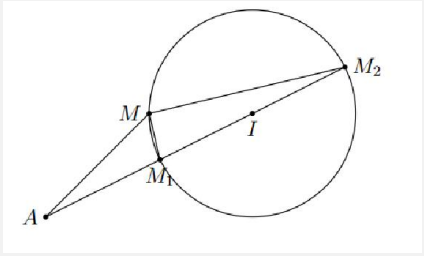
2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM



Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM
Vuông tại . M ta có $AM \geq AH$.
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

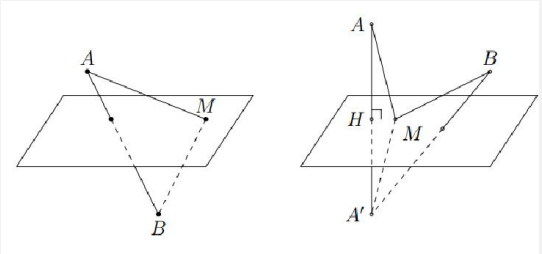
Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có
$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$
Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có
$R - AI \leq AM \leq R + AI$
Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điể M thuộc (P) sao cho
1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.
1. Ta xét các trường hợp sau
- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó
$AM + BM \geq AB$
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).
- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó
$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. Ta xét các trường hợp sau
- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM-BM|\le AB$

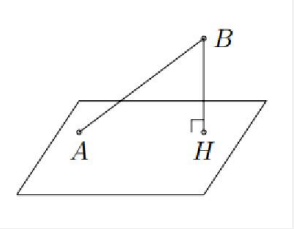
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- TH 2: Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM-BM|=|A'M-BM|\le A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh măt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$\mathrm{d}(B,(P))=BH\le BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α,β và ba điểm $A,B,$ C. Viết phương trình măt phẳng (P) đi qua C và $T=\alpha\mathrm{d}(A,(P))+\beta\mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB\parallel(P)$ thì

$P=(\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P))\le(\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB}=\frac{\alpha}{\beta}\vec{ID}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P=\alpha\mathrm{d}(A,(P))+\beta\cdot\frac{IB}{ID}\cdot\mathrm{d}(D,(P))=2\alpha\mathrm{d}(E,(P))\le 2(\alpha+\beta)EC$$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P=\alpha\mathrm{d}(A,(P))+\beta\mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i(i=\overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1,A_2,\ldots,A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

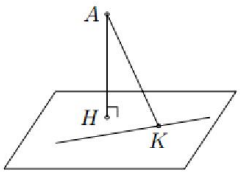
$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\left(A_i,(P)\right)=n\mathrm{d}(G,(P))\le nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó

$P=m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right)+k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó
$\mathrm{d}(A,(P)) = AH \le AK$
Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

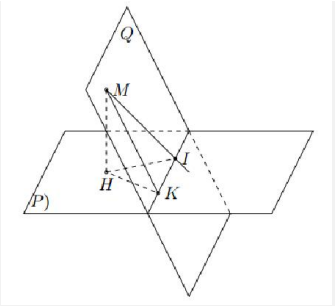
Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét véc tơ
$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 M\overrightarrow{A_2} + \cdots + \alpha_n M\overrightarrow{A_n}$
Trong đó $\alpha_1; \alpha_2 \ldots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn
$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$
(điểm G hoàn toàn xác định).
Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1; 2; \ldots; n,$ nên
$\overrightarrow{\mathrm{w}} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\vec{MG} + \alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$
Do đó
$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$
Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z, cho các diểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:
$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$
Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho
1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.
2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn
$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$
Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1; 2; \ldots; n,$ nên
$MA_k^2 = \left(\overrightarrow{MG} + G\vec{A}_k\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot G\vec{A}_k + GA_k^2$
Do đó
$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$
Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên
• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
• với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan\phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $\left(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

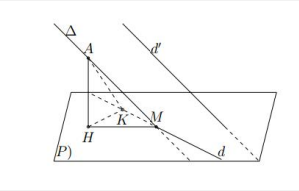
Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đai số như sau:

- Goi $\vec{n} = (a;b;c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\phi = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{n}_P\right|}{|\vec{n}| \cdot \left|\vec{n}_P\right|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi = \widehat{AMH}$ và $\cos\phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n} = (a;b;c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của măt phẳng (P). Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}| \cdot \left|\vec{u}_{d'}\right|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Dạng 2.1. Cực trị liên quan đến bán kính, diện tích, chu vi, thể tích

Câu 1. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6), B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$ **B.** $T=4$ **C.** $T=5$ **D.** $T=2$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Ta có $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2c \\ b=2 \end{cases}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}=\sqrt{25-\left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất

Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$

Xét $f(c)=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$

$f'(c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $d\left(I;(P)\right)$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Câu 2. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng

A. 12. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a>0, b>0, c>0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mà $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc \geq \frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Vậy $\min V_{OABC}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow a=b=c=3$. Khi đó $a+2b+3c=18$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua AM và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại B, C. Khi mặt phẳng (P) thay đổi thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $4\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $b, c>0$.

Phương trình của mặt phẳng (P) là $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$.

Suy ra

$\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{bc}} \Rightarrow bc \geq 16$.

Nguyễn Bảo Vương

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}$

$\geq \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+8bc}$

$\geq \frac{1}{2}\sqrt{16^2+8.16}=4\sqrt{6}$.

Vậy $\min S_{ABC}=4\sqrt{6}$, đạt được khi $b=c=4$.

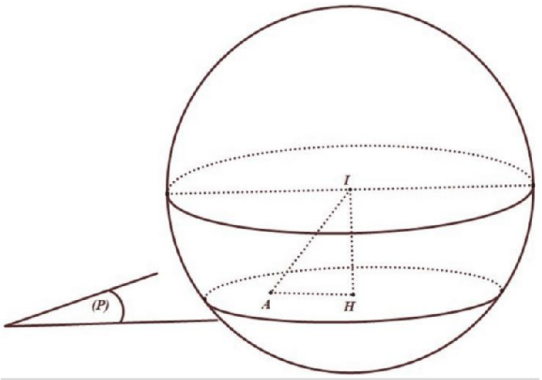
Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là:

A. $(P):x-2y+3z-6=0$. **B.** $(P):x+2y+3z-6=0$.

C. $(P):3x+2y+2z-4=0$. **D.** $(P):x+2y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S).

Do đó mặt phẳng (P) qua A luôn cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ (với H là hình chiếu của $I(1;2;3)$ trên (P)).

Ta luôn có $IA\geq IH \Rightarrow \sqrt{R^2-IH^2}\geq\sqrt{R^2-IA^2} \Rightarrow r\geq\sqrt{R^2-IA^2}$.

Diện tích của hình tròn (C) nhỏ nhất khi bán kính r nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2} \Leftrightarrow H\equiv A$.

Khi đó $IA\perp(P) \Rightarrow$ mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)$ làm một VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng (P): $-x-2y-(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0$..

Câu 5. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S), là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

+ Vì (α) qua A ta có: $-(-4)+c=0 \Rightarrow c=-4$.

+ Vì (α) qua B ta có: $2a+c=0 \Rightarrow a=2$.

$\Rightarrow(\alpha)$: $2x+by-z-4=0$.

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3), R=3\sqrt{3}$.

+ Chiều cao khối nón: $h=d_{(I,\alpha)}=\dfrac{|2-2b-3-4|}{\sqrt{4+b^2+1}}=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$.

+Bán kính đường tròn: $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{27-\left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2}=\sqrt{27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}}$.

+ Thể tích khối nón: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi\left(27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}\right)\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$

+ Tới đây ta có thể Thử các trường hợp đáp án.

Hoặc ta làm tự luận như sau:

Đặt $t=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$ và xét hàm số $f(t)=(27-t^2)t$ trên đoạn $\left[0;3\sqrt{3}\right]$.

Ta có: $f'(t)=27-3t^2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-3(l)\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

t	0		3		$3\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	54	↘	0

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi

$$t=3\Leftrightarrow\left(\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2=3^2\Leftrightarrow 4b^2+20b+25=9b^2+45$$

$$\Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0\Leftrightarrow b=2.$$

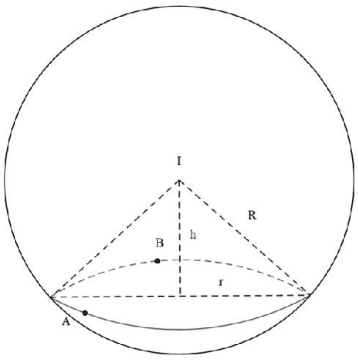
Vì vậy $a-b+c=-4$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$, $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d\in\mathbb{Z}:d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B. Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Tính giá trị của $T=|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=12$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên A,B thuộc mặt cầu (S).

$\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)=-\sqrt{3}(1;-1;0)=-\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của AB.

Gọi $\vec{a}=(1;-1;0)$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Vì $A,B\in(P)$ nên có $\begin{cases}I\in(P)\\ \vec{a}.\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}b+3c+d=0\\ a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-6a-3c\\ a=b\end{cases}$.

Gọi $h=d\left(I,(P)\right)$, $(C)=(P)\cap(S)$, r là bán kính đường tròn (C).

$r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N).

$S=\frac{1}{2}.h.2r=h.\sqrt{6-h^2}\le\frac{h^2+6-h^2}{2}=3$.

$\max S=3$ khi $h^2=6-h^2\Rightarrow h=\sqrt{3}$.

$h=d\left(I,(P)\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow a^2=c^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=c\\ a=-c\end{array}\right.$.

Nếu $a=c$ thì $b=a;d=-9a$ và $(P):ax+ay+az-9a=0\Leftrightarrow x+y+z-9=0$ (nhận).

Nếu $a=-c$ thì $b=a;d=-3a$ và $(P):ax+ay-az-3a=0\Leftrightarrow x+y-z-3=0$ (loại).

Vậy $T=|a+b+c+d|=6$.

Câu 7. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;-1),B(-1;-3;1)$. Giả sử C,D là hai điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y-2z-1=0$ sao cho $CD=4$ và A,C,D thẳng hàng. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác BCD. Khi đó tổng S_1+S_2 có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{37}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;2)$

Gọi H là hình chiếu của B trên CD ta có $BH\le BA$ nên $S_{\Delta BCD}$ lớn nhất khi $H\equiv A$.

Vậy $S_1=\frac{1}{2}BA.CD=\frac{1}{2}.3.4=6$.

Gọi H_1 là hình chiếu của B trên mặt phẳng (P) khi đó $S_{\Delta BCD}\ge\frac{1}{2}BH_1.CD=\frac{1}{2}d\left(B;(P)\right).CD$

điều này xảy ra khi A,C,D,H_1 thẳng hàng.

Vậy $S_2=\frac{1}{2}d\left(B,(P)\right).CD=\frac{1}{2}\frac{|-2-3-2-1|}{\sqrt{9}}.4=\frac{16}{3}$.

Khi đó $S_1+S_2=6+\frac{16}{3}=\frac{34}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $x-y+2z-1=0$ và các điểm $A(0;1;1);B(1;0;0)$ (A và B nằm trong mặt phẳng (P)) và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$. CD là đường kính thay đổi của (S) sao cho CD song song với mặt phẳng (P) và bốn điểm A,B,C,D tạo thành một tứ diện. Giá trị lớn nhất của tứ diện đó là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;2)$, mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(1;-1;2)$. Gọi điểm $C(x;y;z)$, ta có $C\in(S)$ nên $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$ (1).

Do CD là đường kính của mặt cầu (S) nên I là trung điểm của CD, suy ra $D(4-x;-y-2;4-z)$.

Mà theo đề có CD song song với mặt phẳng (P) nên

$\overrightarrow{IC}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}.\vec{n}=0\Leftrightarrow x-2-(y+1)+2(z-2)=0$ (2).

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(x;y-1;z-1)$; $\overrightarrow{AD}=(4-x;-y-3;3-z)$.

$\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=(2y+4z-6;-2x+4z-4;-4x-4y+4)$.

$\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=2y+4z-6+(-1).(-2x+4z-4)+(-1).(-4x-4y+4)$

$=6x+6y-6$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là: $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|=|x+y-1|$.

Đặt $\begin{cases}x-2=a\\y+1=b\\z-2=c\end{cases}$. Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=4\\a-b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=-2c\\ab=\frac{4-5c^2}{2}\end{cases}$

$V=|x+y-1|=|x-2+y+1|=|a+b|=\sqrt{(a-b)^2+4ab}$

$=\sqrt{4c^2+2(4-5c^2)}=\sqrt{8-6c^2}\le 2\sqrt{2}$.

Vậy GTLN của V là $2\sqrt{2}$ khi

$\begin{cases}z-2=0\\x-2=y+1\\(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{2};y=-1+\sqrt{2};z=2\\x=2-\sqrt{2};y=-1-\sqrt{2};z=2\end{array}\right.$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y+44z-39=0$ **B.** $16x-40y-44z+39=0$

C. $16x+40y-44z+39=0$ **D.** $16x-40y-44z-39=0$

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=\frac{AB'}{AB},y=\frac{AC'}{AC},z=\frac{AD'}{AD}$. Ta có $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Suy ra

$4=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\Rightarrow xyz\ge\frac{27}{64}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-1;1);\\ \overrightarrow{AC}=(-2;-2;-1)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(3;-1;-4);\overrightarrow{AD}=(-1;2;3).$

Thể tích của tứ diện ABCD là $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{17}{6}$

Lại có $V_{AB'C'D'}=xyzV_{ABCD}\Rightarrow$ tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất khi xyz nhỏ nhất

Khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{4}\Rightarrow$ Mặt phẳng mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua điểm B'. Vì $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$ nên $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

$\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2);\\ \overrightarrow{BD}=(-2;3;2)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=(4;10;-11)\Rightarrow(B'C'D')$ nhận VTPT là $\vec{n}=(4;10;-11)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(B'C'D'):16x+40y-44z+39=0$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4),B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-4=0$ đi qua A,B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

A. $T=\frac{1}{5}$. **B.** $T=\frac{3}{4}$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: (S) có tâm $I(-1;1;0)$ và bàn kính $R=2$.

Do $A,B\in(P)\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+4c-4=0\\ c-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2b-12\\ c=4\end{cases}\Rightarrow(P):-2(b+6)x+by+4z-4=0.$

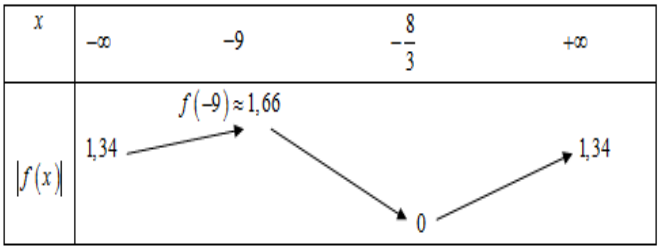
Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (P) và $(S)\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}$, để r đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ đạt giá trị lớn nhất. Mà $d(I,(P))=\frac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}};f'(x)=\frac{32x+288}{\left(\sqrt{5x^2+48x+160}\right)^3};f'(x)=0\Leftrightarrow x=-9.$

Bảng xét biến thiên:

x	$-\infty$		-9		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1,34$	↘	$f(-9)\approx-1,66$	↗	$1,34$

suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ là



Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $x=-9\Rightarrow b=-9\Rightarrow a=6\Rightarrow T=1$.

Kết luận: $T=1$.

Câu 11. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+2=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(1;0;1)$. Điểm $C(a;b;-2)\in(P)$ sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất. Tính $a+b$

A. 0. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$C(a;b;-2)\in(P)\Rightarrow a-b+2=0\Rightarrow b=a+2\Rightarrow C(a;a+2;-2)$.

$\overrightarrow{AB}=(0;-2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(a-1;a;-5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(10+2a;-2a+2;2a-2)$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{(2a+10)^2+2(2a-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{12a^2+24a+108}}{2}=\sqrt{3\left(a^2+2a+9\right)}$$

$$=\sqrt{3(a+1)^2+24}\geq 2\sqrt{6}\ \text{ với }\ \forall a.$$

Do đó $\min S_{\Delta ABC}=2\sqrt{6}$ khi $a=-1$. Khi đó ta có $C(-1;1;-2)\Rightarrow a+b=0$.

Câu 12. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C (A,B,C không trùng với gốc O) sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $N(0;2;2)$ **B.** $M(0;2;1)$ **C.** $P(2;0;0)$ **D.** $Q(2;0;-1)$

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$ $(a,b,c>0)$

Ta có $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Vì $M\in(P)$ nên ta có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow abc\geq 54$

Thể tích khối chóp $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\geq 9$

Dấu bằng xảy ra khi các số tham gia cô si bằng nhau nghĩa là

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a=3;b=6;c=3$$

Vậy pt mặt phẳng $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow N(0;2;2)\in(P)$

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{243}{2}$. **C.** $\frac{81}{6}$. **D.** 243.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Mặt phẳng (P) có phương trình (theo đoạn chắn): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ nên $\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Ta có $1=\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{a.b.c}} \Rightarrow a.b.c\geq 243$.

$V_{OABC}=\frac{1}{6}a.b.c\geq\frac{243}{6}=\frac{81}{2}$. Vậy thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{81}{2}$.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $9\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $H(a;b;c)$ là tiếp điểm của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có a, b, c là các số dương. Mặt khác, $H\in(S)$ nên $a^2+b^2+c^2=3$ hay $OH^2=3\Leftrightarrow OH=\sqrt{3}$. (1)

Mặt phẳng (α) đi qua điểm H và vuông góc với đường thẳng OH nên nhận $\overrightarrow{OH}=(a;b;c)$ làm véctơ pháp tuyến. Do đó, mặt phẳng (α) có phương trình là

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-3=0$

Suy ra: $A\left(\frac{3}{a};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{b};0\right)$, $C\left(0;0;\frac{3}{c}\right)$.

Theo đề: $OA^2+OB^2+OC^2=27 \Leftrightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{9}{c^2}=27 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=9$.

Mặt khác, ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 9$ và dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Suy ra,

$OA=OB=OC=3$ và $V_{O.ABC}=\frac{OA.OB.OC}{6}=\frac{9}{2}$.

Lúc đó: $S_{\Delta ABC}=\frac{3V_{O.ABC}}{OH}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2.2. Cực trị liên quan đến giá trị biểu thức

Câu 15. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145 **B.** 135 **C.** 105 **D.** 108

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ suy ra $I(-1;1;1)$

$IA^2=27$; $IB^2=12$; $d\left(I,(P)\right)=3$

$2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+3\overrightarrow{IB}^2=5MI^2+90$

Mà $2MA^2+3MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

Suy ra $MI\geq d\left(I,(P)\right)=3$

Vậy $2MA^2+3MB^2\geq 5.9+90=135$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_I=\frac{2x_A+x_B-x_C}{2}=1\\ y_I=\frac{2y_A+y_B-y_C}{2}=0\\ z_I=\frac{2z_A+z_B-z_C}{2}=4\end{cases}\Rightarrow I(1;0;4).$$

Ta có:

$$T = 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right) + \left(2IA^2 + IB^2 - IC^2\right) = 2MI^2 + \left(2IA^2 + IB^2 - IC^2\right)$$

Để T nhỏ nhất thì $2MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ ngắn nhất M là hình chiếu của điểm $I/(P)$. Khi đó

$MI = d\left(I,(P)\right) = 6;\ 2IA^2 + IB^2 - IC^2 = 30 \Rightarrow \min T = 102$

Câu 17. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;2), B(1;1;0), C(3;0;1)$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-5=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (Q). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bằng

A. $\frac{34}{3}$. **B.** $\frac{22}{3}$. **C.** 0. **D.** $\frac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};1\right)$. Khi đó

$$P = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\geq 3\left[d\left(G,(Q)\right)\right]^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

Ta có $d\left(G,(Q)\right) = \frac{\left|\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 - 5\right|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{GA} = \left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};1\right) \Rightarrow GA^2 = \frac{26}{9};\ \overrightarrow{GB} = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-1\right) \Rightarrow GB^2 = \frac{11}{9};\ \overrightarrow{GC} = \left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};0\right) \Rightarrow GC^2 = \frac{29}{9}$.

Vậy $\min P = 3.\frac{4}{3} + \frac{26}{9} + \frac{11}{9} + \frac{29}{9} = \frac{34}{3}$ khi M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Q).

Câu 18. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1;3;5);\ B(2;6;-1);\ C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42 **B.** 14 . **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC nên $G(-1;-1;3)$ và $S = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right| = 3MG$

Vì $G \notin (P)$ nên $GM \geq GH$ với H là chân đường vuông góc từ G đến mp(P)

$$S_{\min} = 3GH = 3d_{(G;(P))} = 3\frac{|-1-2-6-5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 14$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$. Gọi $M(a,b,c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = \left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{IA} = (1-x;-1-y;3-z) \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} = (3-3x;-3-3y;9-3z)$

$\overrightarrow{IB} = (2-x;1-y;-z) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x;2-2y;-2z)$

$\overrightarrow{IC} = (-3-x;-1-y;-3-z)$

Khi đó $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = (-2x-4;-2y-6;-2z+6) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4=0 \\ -2y-6=0 \\ -2z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$$. Vậy $I(-2;-3;3)$

Ta có $T = \left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right) - 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right|$

Suy ra $T_{\min} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng MI đi qua $I(-2;-3;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số

là $MI: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-3+t \\ z=3-t \end{cases}$. Lấy $M(-2+t;-3+t;3-t) \in MI$

Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow (-2+t)+(-3+t)-(3-t)-4=0 \Rightarrow t=4$

Suy ra $M(2;1;-1)$. Vậy $a+b+c=2$

Câu 20. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right) + 5\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right) - 7\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm $I = (-23;20;-11)$

Khi đó: $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+5\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)-7\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)$

$=-\overrightarrow{IM}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)=-\overrightarrow{IM}$.

Nên: $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|-\overrightarrow{IM}\right|=IM\geq d\left(I,(\alpha)\right)$.

Vậy: $P_{\min}=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2.(-23)-20+2(-11)+7\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=27$.

Câu 21. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P):3x+3y-2z-29=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a+b+c$.

A. 8. **B.** 10. **C.** -10. **D.** -8.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ $(*)$.

Khi đó, $(*)\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OC}=(2;1;1)\Leftrightarrow I(2;1;1)$.

Mặt khác, áp dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm $\Rightarrow T=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$.

Vì $IA^2+IB^2+3IC^2$ là hằng số nên suy ra T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ \overrightarrow{IM}\text{ cùng phương }\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+3b-2c=29\\ \dfrac{a-2}{3}=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{c-1}{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=4\\ c=-1\end{cases}$.

Vậy $a+b+c=8$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;-1)$. Điểm M thuộc mặt phẳng $(P):2x+2y-z+2=0$ sao cho $3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó bằng

A. $\dfrac{13}{6}$. **B.** $\dfrac{17}{2}$. **C.** $\dfrac{61}{6}$. **D.** $\dfrac{23}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thảo mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_I=\dfrac{3x_A+2x_B+x_C}{6}=-\dfrac{1}{6}\\ y_I=\dfrac{3y_A+2y_B+y_C}{6}=\dfrac{1}{3}\\ z_I=\dfrac{3z_A+2z_B+z_C}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Ta có $3MA^2+2MB^2+MC^2=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=3IA^2+2IB^2+IC^2+6IM^2$.

Do đó $3MA^2+2MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên $(P)\Rightarrow M\left(-\frac{11}{18};-\frac{1}{9};\frac{5}{9}\right)\Rightarrow \min\left(3MA^2+2MB^2+MC^2\right)=\frac{61}{6}$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-3)$, $B(0;-2;3)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=1$. Xét điểm M thay đổi luôn thuộc mặt cầu (S), giá trị lớn nhất của MA^2+2MB^2 bằng

A. 102. **B.** 78. **C.** 84. **D.** 52.

Lời giải

Chọn C

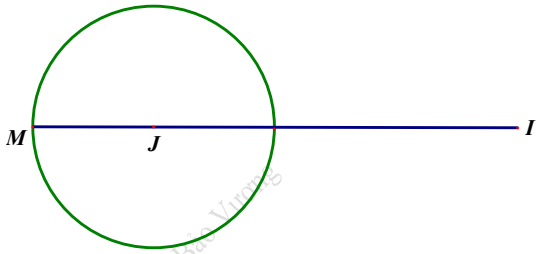
Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(1;-1;1)$.

Ta có $T=MA^2+2MB^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+2IB^2=3MI^2+36$.

Mặt cầu (S) có tâm $J(-1;0;3)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $IJ>R\Rightarrow I$ nằm ngoài mặt cầu (S).



Ta có: T lớn nhất $\Leftrightarrow IM$ lớn nhất.

Mà $IM_{\max}=IJ+R=3+1=4$.

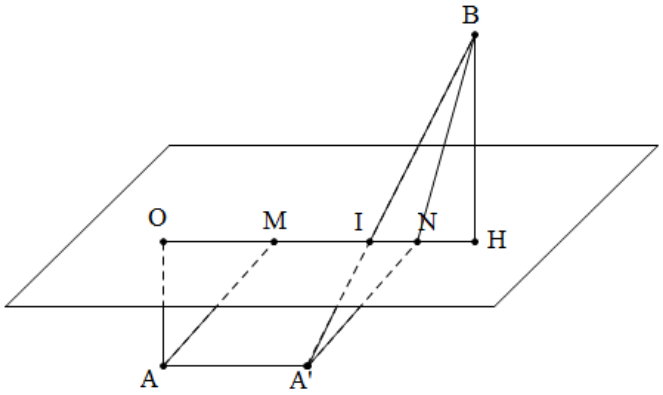
Do đó: $T_{\max}=3.4^2+36=84$.

Câu 24. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ với $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $\sqrt{34}-1$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Từ $\begin{cases}(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25 & (1)\\ (S_2):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z=0$ hay

$(P):z=0$ tức là $(P)\equiv(Oxy)$.

Dễ thấy A, B nằm khác phía đối với (P), hình chiếu của A trên (P) là O, hình chiếu của B trên (P) là $H(3;4;0)$.

Lấy A' sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$.

Khi đó $AM+BN=A'N+BN\ge A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

Lấy $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|}=\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Khi đó vì $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ nên $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$. Do đó $AM+BN=A'N+BN\ge A'B=5$.

Câu 25. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$, $C(-1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+8=0$. Xét điểm M thay đổi thuộc (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MA^2+MB^2-MC^2$.

A. 102. **B.** 105. **C.** 30. **D.** 35.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=(1;0;4)$

$\Leftrightarrow I(1;0;4)$.

Khi đó, với mọi điểm $M(x;y;z)\in(P)$, ta luôn có:

$$T=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+2\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2$

$=2MI^2+2IA^2+IB^2-IC^2$.

Ta tính được $2IA^2+IB^2-IC^2=30$.

Do đó, T đạt GTNN $\Leftrightarrow MI$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MI\perp(P)$.

Lúc này, $IM=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2.1-0+2.4+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=6$.

Vậy $T_{\min}=2.6^2+30=102$.

Câu 26. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng

$$6MI^2+228=6.9+228=282.$$

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;-2;6);B(2;4;2);M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, khi đó tọa độ của M là

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$ **B.** $(4;3;1)$ **C.** $(1;3;4)$ **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$

Lời giải

Chọn B.

Gọi $M(x;y;z)\in(\alpha)\Rightarrow x+2y-3z-7=0$

$\overrightarrow{MA}=(4-x;-2-y;6-z);\overrightarrow{MB}=(2-x;4-y;2-z)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(4-x)(2-x)+(-2-y)(4-y)+(6-z)(2-z)$

$=x^2+y^2+z^2-6x-2y-8z+12=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-12$

Áp dụng bđt **B.** **C.** S:

$\left[1^2+2^2+(-3)^2\right]\left[(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\right]\geq\left[x-3+2(y-1)-3(z-4)\right]^2$

$\Leftrightarrow 14\left[(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\right]\geq\left[x+2y-3z+7\right]^2$

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\geq\frac{(7+7)^2}{14}$

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-12\geq 2$

$Min\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)=2$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+2y-3z-7=0\\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=3\\ z=1\end{cases}.$

Câu 28. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{14}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Gọi $G(x_1;y_1;z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$.

Vậy $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}x_1=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{-1+2-4}{3}=-1\\ y_1=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{3+6-12}{3}=-1\\ z_1=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{5-1+5}{3}=3\end{cases}\Rightarrow G(-1;-1;3).$

Vì G cố định nên $S=3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG\perp(P)$.

Ta có: $d\left(G,(P)\right)=\dfrac{\left|-1.1+2.(-1)-2.3-5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{14}{3}=MG.$

Vậy giá trị nhỏ nhất $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=3.\dfrac{14}{3}=14.$

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;5)$, $B(3;-1;0)$, $C(-4;0;-2)$. Gọi I là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(P):4x+3y+2=0$.

A. $\dfrac{17}{5}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{12}{5}$. **D.** 9.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Khi đó: $\begin{cases}-1-a-2(3-a)+3(-4-a)=0\\ 2-b-2(-1-b)+3(0-b)=0\\ 5-c-2(0-c)+3(-2-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{19}{2}\\ b=2\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow M\left(-\dfrac{19}{2};2;-\dfrac{1}{2}\right).$

Ta có: $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{IM}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{IM}+3\overrightarrow{MC}\right|$

$=\left|2\overrightarrow{IM}+\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\right|=2\left|\overrightarrow{IM}\right|=2IM$.

Biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của M lên $(Oxy) \Leftrightarrow I\left(-\frac{19}{2};2;0\right)$.

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d\left(I;(P)\right)=\frac{\left|4.\left(-\frac{19}{2}\right)+3.2+2\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6$.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2), B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M,N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2+3BN^2$ bằng

A. 49,8. **B.** 45. **C.** 53. **D.** 55,8.

Lời giải

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng

$(P) \Rightarrow AH=BK=3, H(1;-1;0), K(0;1;2), HK=3$. Đặt $HM=t$ ta có:

$HM+MN+NK \geq HK=3 \Rightarrow NB \geq 2-t$

$2AM^2+3BN^2=2AH^2+2HM^2+3BK^2+3KN^2 \geq 45+2t^2+(2-t)^2 \geq 49,8$

Dấu bằng xảy ra khi $M,N \in$ đoạn thẳng HK. Vậy Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2AM^2+3BN^2$ bằng $49,8$

Câu 31. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5\left(a^2+b^2+c^2\right)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Lời giải

Đặt $t=b+c\ (t>0)$; $b^2+c^2 \geq \frac{t^2}{2}$; $bc \leq \frac{t^2}{4}$.

$5\left(a^2+b^2+c^2\right)=9(ab+2bc+ca) \Leftrightarrow 5a^2+5(b+c)^2-9a(b+c)=28bc \Rightarrow 5a^2+5t^2-9at \leq 7t^2$

$\Leftrightarrow (5a+t)(a-2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t$.

Vậy $Q \leq \frac{4}{t}-\frac{1}{27t^3}=f(t)$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\frac{4}{t^2}+\frac{1}{9t^4}=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$ (vì $t>0$).

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	16	↘	0

Vậy $Q_{max}=16 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3};\ b=c=\frac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{12};\frac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$; $N\left(0;\frac{1}{12};0\right)$; $P\left(0;0;\frac{1}{12}\right)$.

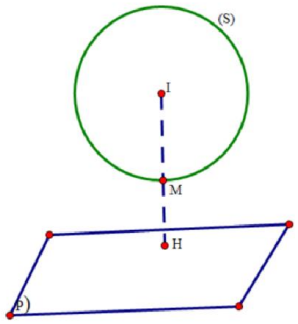
Phương trình mặt phẳng $(MNP)\ \frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{12}}+\frac{z}{\frac{1}{12}}=1 \Leftrightarrow 3x+12y+12z-1=0$.

Câu 32. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho x,y,z,a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

A. $\sqrt{3}-1$. **B.** $\sqrt{3}+1$. **C.** $4-2\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M(x;y;z)\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-1;-1;2)$ bán kính $R=1$

Gọi $H(a;b;c)\Rightarrow H$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$

Ta có $d(I,(P))=\frac{|-1-1+2-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R\Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung

$P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi vị trí của M và H như hình vẽ

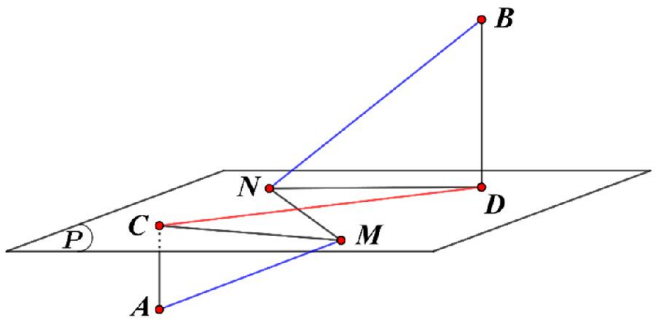
Khi đó $HI=d(I,(P))=\sqrt{3}\Rightarrow HM=HI-R=\sqrt{3}-1$

Do đó $P_{\min}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.

Câu 33. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải



• Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4\\ x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0\\ x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases} \Rightarrow x=0$

Vậy $(P):x=0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P). Suy ra $AC=1$, $BD=2$, $CD=5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned}AM+BN&=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}\\&\ge\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}\\&\ge\sqrt{9+(CM+DN)^2}\end{aligned}$$

Nguyễn Bảo Vương

Lại có $CM+MN+ND\ge CD=5$ nên suy ra $CM+ND\ge 4$. Do đó $AM+BN\ge 5$.

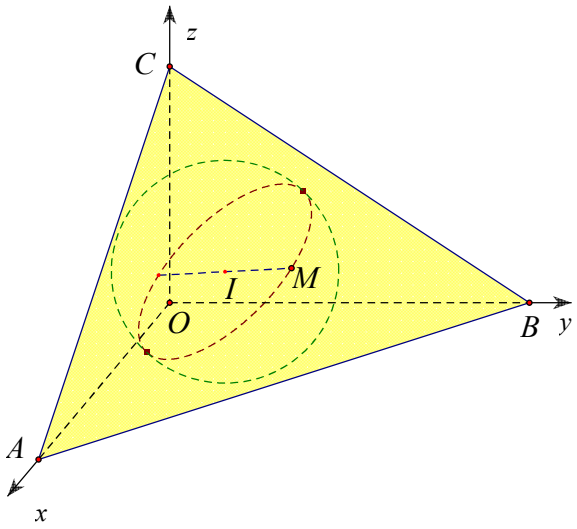
Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM}=\frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0;\frac{4}{5};\frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0;\frac{7}{5};\frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là 5.

Câu 34. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia Ox; Oy; Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là:

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Lời giải



(S) có tâm (O) và bán kính $R=1$.

Theo đề bài ta có $A(a,0,0);B(0,b,0);C(0,0,c);\ (a,b,c>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

(P) tiếp xúc với (S) tại $M\in(S)\Leftrightarrow d(O;(P))=1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=1$

$\Leftrightarrow abc=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\Rightarrow abc\ge 3\sqrt{3}\quad(1)$ vì $(a,b,c>0)$.

Khi đó: $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

$\Rightarrow T=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2=1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2$

Mặt khác $1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2\ge 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2a^2b^2c^2\ge 64\quad(2)\Rightarrow T\ge 64$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Dạng 2.3. Cực trị liên quan đến góc, khoảng cách

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$ với a,b,c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{51}{5}$. **B.** $S=\frac{49}{4}$. **C.** $S=\frac{49}{5}$. **D.** $S=\frac{51}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Dựng $OH\perp(ABC);\quad(H\in(ABC))$ vì $OABC$ là tứ diện vuông nên ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{4b^2}+\frac{4^2}{16c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{4b^2}+\frac{4^2}{16c^2}\ge\frac{(1+2+4)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=1\Rightarrow OH\le 1$$

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất là 1 khi:

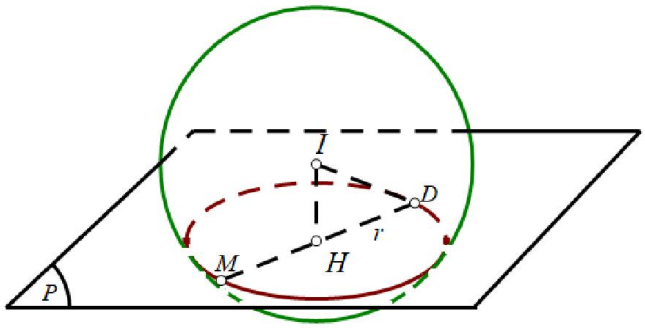
$$\frac{1}{a^2}=\frac{2}{4b^2}=\frac{4}{16c^2}=\frac{1+2+4}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=7\\ b^2=\frac{7}{2}\Rightarrow S=\frac{49}{4}\\ c^2=\frac{7}{4}\end{cases}$$

Câu 36. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó?

A. $\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $M(x;y;z)$, ta có: $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0(1)$.

Mà $M\in(S)$ nên ta có: $x^2+y^2+z^2+4x-8y-19=0(2)$

Trừ $(1),(2)$ theo vế ta được: $x-y-2=0$.

Suy ra M thuộc đường tròn (T) là giao của (S) với mặt phẳng $(P):x-y-2=0$.

Thay tọa độ của D vào phương trình của (P) và của (S) thấy thỏa mãn nên $D\in(T)$, suy ra giá trị lớn nhất của MD bằng đường kính của (T).

(S) có tâm $I(2;4;0)$ và bán kính $R=\sqrt{39}$.

Khoảng cách từ I với (P) là $h=d(I;(P))=4\sqrt{2}$.

Bán kính của (T) là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{7}$. Suy ra $\max MD=2r=2\sqrt{7}$.

Câu 37. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi

qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giải sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=4$. **B.** $m.n=2$. **C.** $m.n=-4$. **D.** $m.n=-2$.

Lời giải

Chọn C

(P) đi qua điểm $A(0;8;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;m;n)\Rightarrow (P):x+my+nz-8m-2n=0$.

(P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Rightarrow \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2}$.

$d=d\left(B;(P)\right)=\dfrac{|9-15m+21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\dfrac{|5-11m+5n+4-4m+16n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

$\le \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}+4\dfrac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

$\le 6\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{1+m^2+n^2}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$ (Buinhiacôpxki).

$=18\sqrt{2}$.

$\Rightarrow d_{\max}=18\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{1}=\dfrac{-1}{m}=\dfrac{4}{n}\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=4 \end{cases}\Rightarrow m.n=-4$

Câu 38. Cho x,y,z là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

A. $\max P=20$. **B.** $\max P=-18$. **C.** $\max P=18$. **D.** $\max P=12$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=2x+2y-z\Leftrightarrow 2x+2y-z-P=0\quad (1)$.

Lại có: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25\quad (2)$

Xét trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta thấy (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là $mp(\alpha)$ và (2) là phương trình của một mặt cầu (S) tâm $I(2;-3;1)$, bán kính $R=5$.

Giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$ là giá trị lớn nhất của P để (α) và (S) có điểm chung, điều này tương đương với $d\left(I,(\alpha)\right)\le R\Leftrightarrow \dfrac{|2.2+2.(-3)-1.1-P|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\le 5\Leftrightarrow |P+3|\le 15\Leftrightarrow -18\le P\le 12.$

Vậy $\max P=12$.

Câu 39. **(Sở Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0),N(0;n;0),P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\geq \frac{9}{m^2+n^2+p^2}=3$$

Khi đó: $d\left(O;(P)\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=n=p=1$.

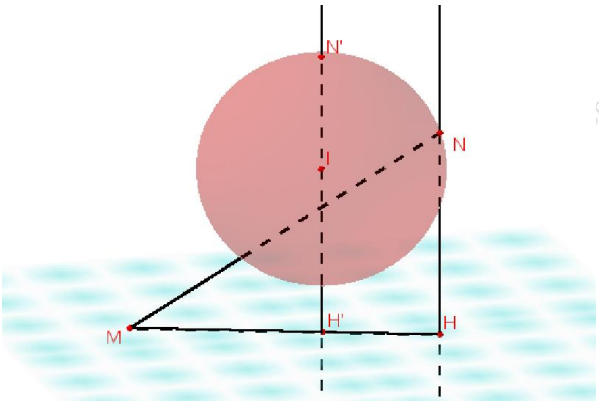
Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-2;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $r=1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45°. Vì $d\left(I;(P)\right)=2>1=r$ nên (P) không cắt (S).

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH}=45^o$ và $MN=\frac{NH}{\sin 45^o}=NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N\equiv N'$ và $H\equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I, vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P).

Lúc đó $NH_{\max}=N'H'=r+d\left(I;(P)\right)=3$ và $MN_{\max}=\frac{NH_{\max}}{\sin 45^o}=3\sqrt{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;1)$, $B(3;1;5)$, $C(1;2;0)$, $D(4;2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua D sao cho ba điểm A, B, C nằm cùng phía đối với (α) và tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến mặt phẳng (α) là lớn nhất. Giả sử phương trình (α) có dạng: $2x+my+nz-p=0$. Khi đó, $T=m+n+p$ bằng:

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Vì mặt phẳng (α) đi qua $D(4;2;1)$ nên phương trình (α) có dạng:

$a.(x-4)+b.(y-2)+c.(z-1)=0$

Đặt $S=d\left[A,(\alpha)\right]+d\left[B,(\alpha)\right]+d\left[C,(\alpha)\right]=\dfrac{|-2a-2b|+|-a-b+4c|+|-3a-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Theo giả thiết, A, B, C nằm cùng phía đối với (α) nên không mất tính tổng quát, ta giả sử:

$\begin{cases}-2a-2b>0\\-a-b+4c>0\\-3a-c>0\end{cases}$.

Khi đó, $S=\dfrac{-2a-2b-a-b+4c-3a-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{-6a-3b+3c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức $B.C.S$ cho hai bộ số $(-6;-3;3)$ và $(a;b;c)$, ta được:

$-6a-3b+3c\le|-6a-3b+3c|\le\sqrt{(6^2+3^2+3^2).(a^2+b^2+c^2)}\Rightarrow S\le 3\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-3b+3c\ge 0\\\dfrac{a}{-6}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{c}{3}\end{cases}$. Ta chọn $\begin{cases}a=-2\\b=-1\\c=1\end{cases}$.

$\Rightarrow(\alpha):-2x-y+z+9=0$ hay $(\alpha):2x+y-z-9=0\Rightarrow m=1$, $n=-1$, $p=9$.

Vậy $T=m+n+p=9$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ (a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2),N(-1;1;3)$ và không đi qua $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ $H(0;0;2)$ đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $P=a-2b+3c+12$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $M(0;-1;2),N(-1;1;3)$ nên ta có

$\begin{cases}-b+2c-3=0\\-a+b+3c-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2c-3\\a=5c-6\end{cases}$ (*).

Mặt khác $d\left(H;(P)\right)=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (**).

Thay (*) vào (**) ta được $d\left(H;(P)\right)=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2c-3|}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{2c-3}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y' = \dfrac{18c-18}{30c^2-72c+45}; y' = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\lim\limits_{c\to+\infty} y = \dfrac{2}{\sqrt{30}}; \lim\limits_{c\to-\infty} y = -\dfrac{2}{\sqrt{30}}$

$\Rightarrow \min\limits_{D} y = y(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Xét hàm số $g(c) = \dfrac{|2c-3|}{\sqrt{30c^2-72c+45}}$

Từ đó suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} g(c) = f(1) = g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ đạt tại $c = 1.$

Với $c = 1 \Rightarrow a - 1; b = -1.$

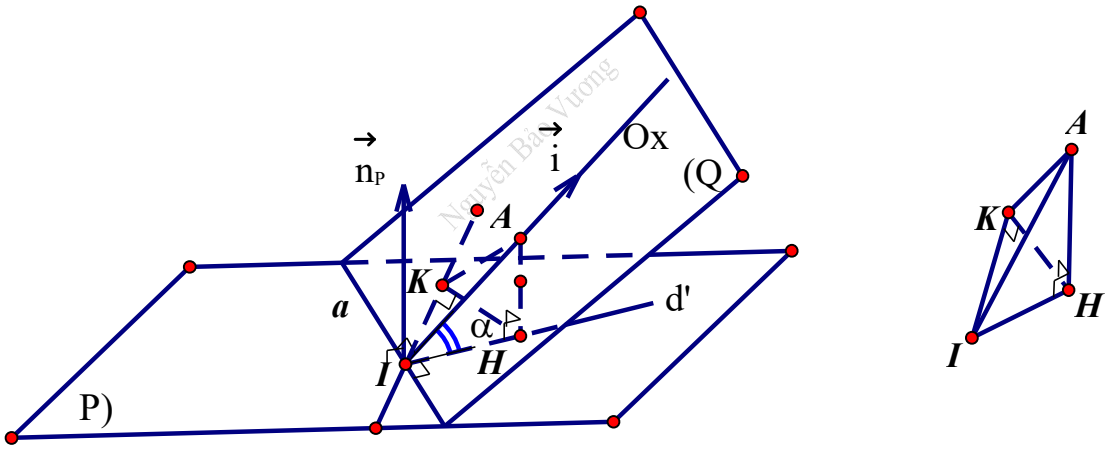
Vậy $P = a - 2b + 3c + 12 = 16$

Câu 43. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

A. $y - 2z = 0.$ **B.** $y - z = 0.$ **C.** $2y + z = 0.$ **D.** $x + z = 0.$

Lời giải

Chọn A



Chứng minh góc giữa (P) và (Q) bé nhất là góc giữa Ox và (P).

Giả sử (Q) ≡ (AKI). Ta có $((P),(Q)) = \widehat{AKI}$, $(Ox,(P)) = \widehat{AIH}$

Xét $\Delta AHI, \Delta AHK$ là tam giác vuông chung cạnh AH.

$\Delta IHK, \widehat{K} = 90^\circ \Rightarrow HK \le HI \Rightarrow \widehat{KAH} \le \widehat{IAH} \Leftrightarrow 90^\circ - \widehat{AKH} \le 90^\circ - \widehat{AIH} \Rightarrow \widehat{AKH} \ge \widehat{AIH}$

Ox có VTCP $\vec{i}(1;0;0)$

(P) có VTPT $\vec{n}_P = (1;-1;2)$

Góc giữa Ox và mặt phẳng (P) là α: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{i}.\vec{n}_P|}{|\vec{i}|.|\vec{n}_P|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Góc giữa (Q) và mặt phẳng (P) thoả: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|} = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$

Phương trình mặt phẳng $(Q): By + Cz = 0$

Ta có: $\frac{|-B+2C|}{\sqrt{B^2+C^2}.\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow|-B+2C|=\sqrt{5B^2+5C^2}$

$\Leftrightarrow 4B^2+4BC+C^2=0\Leftrightarrow C=-2B$

Chọn B = 1, C = -2.

Câu 44. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;7;2)$ và cách $M(-2;4;-1)$ một khoảng lớn nhất có phương trình là

A. $(P):3x+3y+3z-10=0$. **B.** $(P):x+y+z-1=0$.

C. $(P):x+y+z-10=0$. **D.** $(P):x+y+z+10=0$.

Lời giải

Ta có: $d(M,(P))\le MA$

Nên $d(M,(P))_{max}=MA$ khi A là hình chiếu của M trên mặt phẳng (P).

Suy ra $AM\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

(P) đi qua $A(1;7;2)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(-3;-3;-3)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$-3(x-1)-3(y-7)-3(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+z-10=0$.

Câu 45. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó a,b,c là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) có giá trị lớn nhất bằng:

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Nhận thấy, điểm $M(2;-2;1)\in(ABC)$; $\overrightarrow{OM}=(2;-2;1)$, $OM=3$.

Ta có: $d(O;(ABC))=OH\le OM\Rightarrow$khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) có giá trị lớn nhất khi $OM\perp(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_{(ABC)}}=k.\overrightarrow{OM},(k\ne0)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=2k\\\frac{1}{b}=-2k\\\frac{1}{c}=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2k}\\b=-\frac{1}{2k}\\c=\frac{1}{k}\end{cases}$.

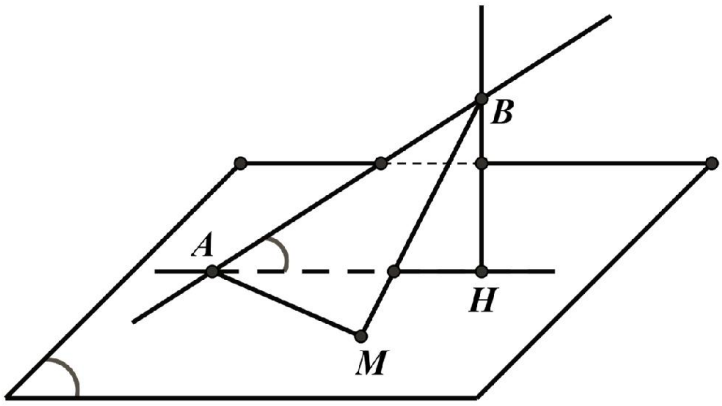
Mà $\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$ nên $\frac{2}{\frac{1}{2k}}-\frac{2}{-\frac{1}{2k}}+\frac{1}{\frac{1}{k}}=1\Leftrightarrow 9k=1\Leftrightarrow k=\frac{1}{9}$. Do đó $a=\frac{9}{2};b=-\frac{9}{2};c=9$.

Vậy $d_{\max}(O;(ABC))=OM=3$ khi $a=\frac{9}{2};b=-\frac{9}{2};c=9$.

Câu 46. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng

A. $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$. **B.** $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải



+) Nhận xét: $\overrightarrow{AB}(2;2;2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}; A \in (P)$.

+) Xét tam giác MAB ta có $P = \dfrac{MA + 2\sqrt{3}}{MB} = \dfrac{MA + AB}{MB} = \dfrac{\sin B + \sin M}{\sin A}$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B-M}{2}}{2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{B-M}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} \le \dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}$

+) Để $P_{\max} \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2}$ min, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} AB = AM \\ \widehat{ABM} = \widehat{ABH} \end{cases}$

$(P): x - 2y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow d_{B/(P)} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow BM = \sqrt{\dfrac{24\sqrt{3} - 8\sqrt{26}}{\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow P_{\max} = \sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 47. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho $A(4;5;6); B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 1 = 0$.

Khi đó $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Lời giải

Ta có $|MA - MB| \le AB$ với mọi điểm $M \in (P)$

Vì $(2.4 + 5 + 2.6 + 1).(2.1 + 1 + 2.2 + 1) = 208 > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía với (P)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$

Khi đó, $|MA - MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{41}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$. **B.** $m > 6$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-6 < m < 2$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\sqrt{\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}}$.

Xét $f(m)=\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}\Rightarrow f'(m)=\dfrac{(5-m)(3m-1)}{2\left(m^2-m+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=5\end{array}\right.$.

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$

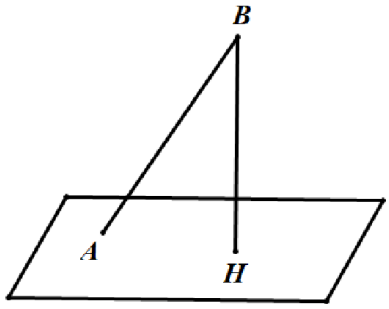
Vậy $\max d\left(A;(P)\right)=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$ khi $m=5\in(2;6)$.

Câu 49. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x-2y+2z+5=0$. **B.** $x-y+2z+3=0$.

C. $2x-2y+4z+3=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)\Rightarrow AB=2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P).

Ta có $d\left(B,(P)\right)=BH\le BA=2\sqrt{6}\Rightarrow max d\left(B,(P)\right)=2\sqrt{6}$, đạt được khi $H\equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)$ là véctơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)-2(y-2)+4(z+1)=0\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Câu 50. **(Sở Bắc Giang 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $d=\dfrac{36}{7}$. **B.** $d=\dfrac{24}{5}$. **C.** $d=\dfrac{8}{3}$. **D.** $d=\dfrac{26}{\sqrt{14}}$.

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

$M(1;4;9)\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$.

Áp dụng BĐT

Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\geq(1+2+3)^2.$$

$\Rightarrow a+b+c\geq 49.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\end{cases}\xrightarrow{a+b+c=49}\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}$. Nên $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$.

Vậy $d=\frac{36}{7}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P).

A. $d=\frac{36}{7}$ **B.** $d=\frac{24}{5}$ **C.** $d=\frac{8}{3}$ **D.** $d=\frac{26}{\sqrt{14}}$

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn A

Gọi mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;4;9)$ cắt các tia tại $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$ ta có $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$ và $OA+OB+OC=a+b+c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c}\geq\frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\geq 36$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}\Rightarrow(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$

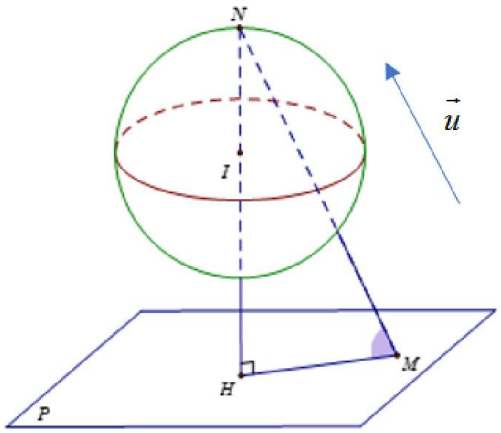
Nên $d(o;(p))=\frac{\left|\frac{0}{6}+\frac{0}{12}+\frac{0}{18}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{18}\right)^2}}=\frac{36}{7}$

Câu 52. **(THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha=\widehat{HNM}$.

Có $HN=MN.\cos\alpha\Rightarrow MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất

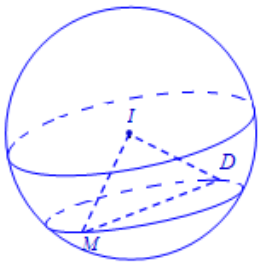
$\Leftrightarrow HN=d(I,(P))+R=3$.

Có $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\overrightarrow{n_P})\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}HN=3\sqrt{2}$.

Câu 53. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn: $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết độ dài đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

A. $2\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $4\sqrt{7}$.

Lời giải



+) Mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ có tâm là $I(-2;4;0)$, bán kính $R=\sqrt{39}$.

Gọi $M(x,y,z)\in(S)$. Ta có: $x^2+y^2+z^2=19-4x+8y$.

$MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2=20-6x+8y$.

$\overrightarrow{MB}=(2-x;1-y;3-z)$; $\overrightarrow{MC}=(-x;2-y;-3-z)$.

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=-2x+x^2+2-3y+y^2-9+z^2=19-4x+8y-2x-3y-7=-6x+5y+12$.

Suy ra $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=-18x+18y+44$.

Theo giả thiết $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8\Leftrightarrow-18x+18y+44=8\Leftrightarrow-x+y+2=0$.

Do đó $M \in (P): -x + y + 2 = 0$.

Ta có $d(I;(P)) = \dfrac{|8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} < \sqrt{39}$ nên mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính R_1 với $R_1 = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{39 - 32} = \sqrt{7}$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} D, M \in (P) \\ D, M \in (S) \end{cases} \Rightarrow D, M \in (\mathrm{C})$. Do đó độ dài MD lớn nhất bằng $2R_1 = 2\sqrt{7}$.

Vậy chọn ***A*.**

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

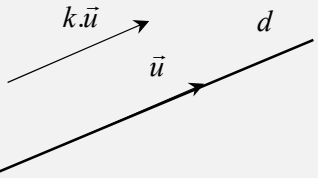
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định VTCP

- *Véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là véctơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d. Nếu d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k.\vec{u}$ cũng là một véctơ chỉ phương của d.*
- *Nếu có hai véctơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với d thì d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$.*
- *Để viết phương trình đường thẳng d, ta cần tìm điểm đi qua và một véctơ chỉ phương.*

Nếu đường thẳng $d:\begin{cases}Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ VTCP:\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)\end{cases}$ *thì ta có hai dạng phương trình đường thẳng:*

Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R}).$



Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{\dfrac{x-x_\circ}{a_1}=\dfrac{y-y_\circ}{a_2}=\dfrac{z-z_\circ}{a_3}},(a_1a_2a_3\neq 0).$

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}(3;4;1)$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$. Vectơ nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;4;1)$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$. Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d

A. $\overrightarrow{u_3}=(3;-1;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(4;2;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Vectơ nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;3)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(4;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(3;-1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\ y=1+2t\\ z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$ **B.** $\overrightarrow{u_3}=(2;1;3)$ **C.** $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;1)$ **D.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$

Câu 6. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d

A. $\vec{u}=(1;3;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;5;3)$. **C.** $\vec{u}=(2;-5;3)$. **D.** $\vec{u}=(1;3;2)$.

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vectơ nào dưới đây là một vecto chỉ phương của đường thẳng AB.

A. $\vec{d}=(-1;1;2)$ **B.** $\vec{a}=(-1;0;-2)$ **C.** $\vec{b}=(-1;0;2)$ **D.** $\vec{c}=(1;2;2)$

Câu 8. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;5)$ **B.** $\overrightarrow{u_4}=(1;-1;2)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(-3;1;5)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;-2)$

Câu 9. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_4}=(1;3;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_3}=(-2;1;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_2}=(1;-3;2)$.

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_4=(-1;2;0)$ **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;0)$ **C.** $\vec{u}_3=(2;1;1)$ **D.** $\vec{u}_1=(-1;2;1)$

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{3}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;3)$ **B.** $\overrightarrow{u_3}=(2;6;-4)$. **C.** $\overrightarrow{u_4}=(-2;-4;6)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;5)$.

Câu 12. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_4=(1;2;-3)$. **B.** $\vec{u}_3=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}_1=(2;1;-3)$. **D.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$.

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;-1;2)$ **B.** $M(-1;-2;-3)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $N(-2;1;-2)$

Câu 14. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$ **B.** $\overrightarrow{u_1}=(0;2;0)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(1;2;0)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0;0)$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu **không phải** là vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(3;-6;-9)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-2;4;3)$.

Câu 16. **(Sở Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ là một vectơ chỉ phương?

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ **D.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$

Câu 17. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ nhận véc tơ $\vec{u}(a;2;b)$ làm véc tơ chỉ phương. Tính $a+b$.

A. -8. **B.** 8. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 18. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Câu 19. **(Chuyên KHTN 2019)** Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-3;2;1)$. **C.** $(3;-2;1)$. **D.** $(2;1;3)$.

Câu 20. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $(d):\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-7}{1}$ nhận vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

A. $(-2;-4;1)$. **B.** $(2;4;1)$. **C.** $(1;-4;2)$. **D.** $(2;-4;1)$.

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$ véc tơ nào dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=3-2t\end{cases}$,

A. $\vec{u}=(1;4;3)$. **B.** $\vec{u}=(1;4;-2)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;-2)$. **D.** $\vec{u}=(1;0;2)$.

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng

Dạng 1. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và dạng chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***và có véctơ chỉ phương*** $\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)$.

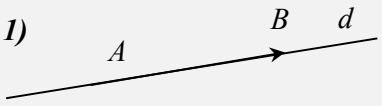
Phương pháp. *Ta có:* $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\\bullet\ VTCP:\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)\end{cases}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\boxed{d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\y=y_\circ+a_2t\\z=z_\circ+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})}$.

Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{d:\frac{x-x_\circ}{a_1}=\frac{y-y_\circ}{a_2}=\frac{z-z_\circ}{a_3}},(a_1a_2a_3\neq0)$.

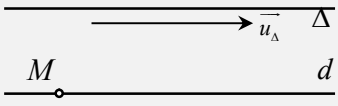
Dạng 2. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng*** d ***đi qua*** A ***và*** B.

Phương pháp. *Đường thẳng* $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ A\ (hay\ B)\\\bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



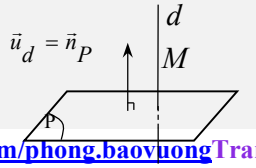
Dạng 3. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** M ***và song song với đường thẳng*** Δ.

Phương pháp. *Ta có* $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua}\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\\bullet\ VTCP:\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



Dạng 4. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** M ***và vuông góc với mặt phẳng*** $(P):ax+by+cz+d=0$.

Phương pháp. *Ta có* $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\\bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases}$ ***(dạng 1)***



Dạng 4. *Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng (P), (Q).*

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } M\\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=3t\\ z=-2+t\end{cases}$?

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$ **C.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$ là

A. $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-6\\ z=2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=-3t\\ z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+4t\\ y=-6t\\ z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+2t\\ y=-3t\\ z=-1+t\end{cases}$.

Câu 26. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-7}$ **B.** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-7}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases}x=-2+4t\\ y=6t\\ z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\ y=-3t\\ z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-6\\ z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=3t\\ z=1+t\end{cases}$.

Câu 28. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(1;1;-1)$ và $Q(2;3;2)$

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{3}$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(5;4;-1)$ là

A. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-4}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{4}$. **D.** $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=t\\y=t\,(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=2+t\,(t\in\mathbb{R})\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=0\,(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\,(t\in\mathbb{R})\\z=0\end{cases}$.

Câu 31. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$ có đường thẳng có phương trình tham số là $(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+t\end{cases}$. Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$ **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 32. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-7}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-7}$. **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-3}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$.

Câu 33. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z=0$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Câu 34. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số

A. $x=0$. **B.** $y+z=0$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

Câu 35. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}(1;-4;-5)$ là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-4+2t\\z=-5+3t\end{cases}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+5}{3}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+4t\\z=3+5t\end{cases}$.

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;2)$ là

A. $d:\begin{cases}x=0\\y=3t\\z=2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1\\y=3\\z=2\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=2t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=-t\\y=-2t\\z=-3t\end{cases}$.

Câu 37. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Câu 38. **(Sở Bình Thuận 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;4)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(3;-1;5)$ làm vectơ chỉ phương. Hệ phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d?

A. $\begin{cases}x=3t\\y=1-t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3\\y=-1-t\\z=5+4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=-1-t\\z=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3t\\y=1-t\\z=-4+5t\end{cases}$.

Câu 39. **(Sở GD Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ nhận vectơ $\vec{u}=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 40. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=3+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=-2-t\\z=3-3t\end{cases}$.

Câu 41. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):\ 2x-y+3z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+2t\\z=3-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2-t\\z=3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=-3-3t\end{cases}$.

Câu 42. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Câu 43. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là:

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-3-2t \end{cases}$.

Câu 44. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y-z+5=0$?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$

Câu 45. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α).

A. $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. **B.** $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. **C.** $d_3:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. **D.** $d_4:\begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 46. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P).

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$.

C. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$.

Câu 48. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 49. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+y+3z+5=0$ có phương trình là

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$. **D.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{3}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=2 \\ z=-1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=-1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 51. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$ có dạng

A. $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{1}$. **B.** $d: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

C. $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-2}{2}$.

Câu 52. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x-5y+z-1=0$ và $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-5+2t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-5t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-5t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-3+5t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+3=0$ và điểm $A(1;-2;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) là

A. $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-4t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y-z-1=0$ có dạng

A. $d: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1}$. **B.** $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

C. $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{-2}$.

Câu 55. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+6z+19=0$ có phương trình là

A. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-6}{3}$. **B.** $\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{6}$.

C. $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+6}{3}$. **D.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+3}{6}$.

Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 56. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-1}$.

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(1;1;1), C(3;4;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{-1}$.

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0), B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$. **C.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Câu 59. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;1;0), B(1;0;1), C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$. **B.** $\frac{z+1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 60. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

A. $x-2y+z=0$. **B.** $\begin{cases}x=-2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$.

C. $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 61. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$; $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d?

A. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ **B.** $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{2}$

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$, (Q): $x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

A. $\begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$. **B.** $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $x-2y+z=0$.

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;3;-1)$, $N(-1;2;3)$ và $P(2;-1;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua M và song song với NP là

A. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-3t \\ z=3-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-3t \\ z=1-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=3-3t \\ z=-1-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-3+3t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 66. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là:

A. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 67. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua C và song song với AB có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}, (t\in R)$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}, (t\in R)$.

C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-1-t \end{cases}, (t\in R)$. **D.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}, (t\in R)$.

Câu 68. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-1=0$, $(\beta): 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{-2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

Dạng 3 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, giao điểm đường với mặt phẳng

Câu 69. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$. **B.** $Q(1;-2;-1)$. **C.** $N(-1;3;2)$. **D.** $P(1;2;1)$.

Câu 70. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $P(1;2;-1)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $N(2;3;-1)$. **D.** $Q(-2;-3;1)$.

Câu 71. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $Q(4;-2;1)$. **B.** $N(4;2;1)$. **C.** $P(2;1;-3)$. **D.** $M(2;1;3)$.

Câu 72. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{2}=\frac{z-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $N(4;2;-1)$. **B.** $Q(2;5;1)$. **C.** $M(4;2;1)$. **D.** $P(2;-5;1)$.

Câu 73. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(3;-1;-2)$ **B.** $Q(2;4;1)$ **C.** $P(2;4;-1)$ **D.** $M(3;1;2)$

Câu 74. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $M(3;1;5)$. **B.** $N(3;1;-5)$. **C.** $P(2;2;-1)$. **D.** $Q(2;2;1)$.

Câu 75. **(Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=5+t \\ z=2+3t \end{cases}$?

A. $N(1;5;2)$ **B.** $Q(-1;1;3)$ **C.** $M(1;1;3)$ **D.** $P(1;2;5)$

Câu 76. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$.

A. $N(2;-1;2)$ **B.** $Q(-2;1;-2)$ **C.** $M(-2;-2;1)$ **D.** $P(1;1;2)$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 77. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(1;3;-1)$. **B.** $M(-3;5;3)$. **C.** $M(3;5;3)$. **D.** $M(1;2;-3)$.

Câu 78. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

A. $K(1;-1;1)$. **B.** $E(1;1;2)$. **C.** $H(1;2;0)$. **D.** $F(0;1;2)$.

Câu 79. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$?

A. $Q(-2;1;-3)$. **B.** $P(2;-1;3)$. **C.** $M(-1;1;-2)$. **D.** $N(1;-1;2)$.

Câu 80. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$ **B.** $P(1;2;5)$ **C.** $N(1;5;2)$ **D.** $M(1;1;3)$

Câu 82. Trong không gian Oxyz, đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;-1;-2)$. **B.** $M(1;-2;-3)$. **C.** $P(-1;2;-3)$. **D.** N$(2;-1;-2)$.

Câu 83. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $C(-3;4;5)$. **B.** $D(3;-4;-5)$. **C.** $B(-1;2;-3)$. **D.** $A(1;-2;3)$.

Câu 84. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A?

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$. **B.** $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$ **B.** $P(1;2;5)$ **C.** $N(1;5;2)$ **D.** $M(1;1;3)$

Câu 86. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d?

A. $P(7;2;1)$. **B.** $Q(-2;-4;7)$. **C.** $N(4;0;-1)$. **D.** $M(1;-2;3)$.

Câu 87. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Giao điểm của mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=3+3t\end{cases}$

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;4;2)$. **D.** $(2;0;3)$.

Câu 88. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$. Tìm tọa độ của điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $A(3;5;3)$. **B.** $A(1;3;1)$. **C.** $A(-3;5;3)$. **D.** $A(1;2;-3)$.

Câu 89. **(Hùng Vương Gia Lai2019)** Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** –2.

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4;5;2)$ lên mặt phẳng $(P):y+1=0$ là điểm có tọa độ

A. $(-4;-1;2)$. **B.** $(-4;1;2)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(0;1;0)$.

Câu 91. **(Chuyên Bắc Giang 19)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(1;1;6)$. **D.** $(12;9;1)$.

Câu 92. **(Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases}x=4-2t\\y=-3+t\\z=1-t\end{cases}$, giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;-3;0)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-1)$. **D.** $(-2;0;-2)$.

Câu 93. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là toạ độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC). Tính tổng $S=a+b-c$.

A. 6. **B.** 5. **C.** –7. **D.** 11.

Câu 94. **(Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+5=0$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $M(-1;0;4)$. **B.** $M(-5;-2;2)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(-3;-1;3)$.

Câu 95. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;3;5)$. Tìm tọa độ điểm A' là hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy.

A. $A'(2;0;0)$. **B.** $A'(0;3;0)$. **C.** $A'(2;0;5)$. **D.** $A'(0;3;5)$.

Dạng 4. Bài toán liên quan khoảng cách, góc

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng

- ***Khoảng cách từ điểm*** M ***đến một đường thẳng*** d *qua điểm* $M_\circ$ *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d$ *được xác định bởi công thức* $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_\circ M},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}}$.

  Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song *là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau****:* d *đi qua điểm* M *và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}$ *và* d' *đi qua điểm* M' *và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}'$ *là* $\boxed{d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_\circ M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}}$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d_1 *và* d_2 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ *và* $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$.

$$\boxed{\cos(d_1;d_2)=\cos\alpha=\frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}\ \text{với}\ 0°<\alpha<90°.$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d=(a;b;c)$ *và mặt phẳng* (P) *có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ *được xác định bởi công thức:*

$$\boxed{\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d)\right|=\frac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{\left|aA+bB+cC\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ \text{với}\ 0°<\alpha<90°.$$

Câu 96. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

A. $d=2$ **B.** $d=\dfrac{5}{3}$ **C.** $d=\dfrac{2}{3}$ **D.** $d=\dfrac{1}{3}$

Câu 97. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 98. **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=5+4t\\z=2+t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z=0$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 99. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 120° **D.** 45^0

Câu 100. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - TPHCM - 2018)** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$ và $d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 3.

Câu 101. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x+3y-z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+4}{1}$, sin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{8}{13}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Câu 102. **(Chuyên ĐH Vinh -2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $-\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 120^0. **D.** 150^0.

Câu 104. **(Bình Phước - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{14}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 106. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-3-t\\z=2+2t\end{cases}$, $d':\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Khi đó khoảng cách giữa d và d' là

A. $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$. **D.** 0.

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

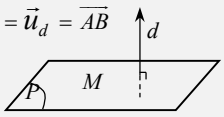
Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+4=0$

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

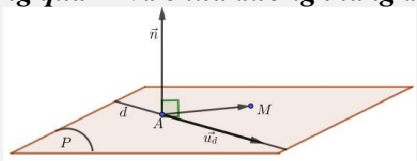
Dạng 5. Xác định phương trình mặt phẳng có yếu tố đường thẳng

Dạng 1. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***qua*** M ***và vuông góc với đường thẳng*** $d\equiv AB$.

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_0;y_0;z_0)\\\bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



Dạng 2. ***Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với*** $M\notin d$.



- **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\vec{u}_d$. Tính $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_d\right]$.

Bước 2: Phương trình $\text{mp}(P)\begin{cases}\text{qua } M\\\text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_d\right]\end{cases}$

Câu 109. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $3x+2y-z+1=0$. **B.** $2x-2y+3z-17=0$.

C. $3x+2y-z-1=0$. **D.** $2x-2y+3z+17=0$.

Câu 110. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x+2y+z+3=0$. **B.** $x-2y-z=0$. **C.** $2x+2y+z-3=0$. **D.** $x-2y-z-2=0$.

Câu 111. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $3x+y-z-7=0$. **B.** $x+4y-2z+6=0$.

C. $x+4y-2z-6=0$. **D.** $3x+y-z+7=0$.

Câu 112. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-3z-9=0$. **B.** $x+y-2z-6=0$.

C. $x+2y-3z+9=0$. **D.** $x+y-2z+6=0$.

Câu 113. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. Mặt phẳng đi qua điểm qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x+3y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-9=0$. **C.** $2x+3y+z+3=0$. **D.** $2x-y+2z+9=0$.

Câu 114. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong gian gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-2z+5=0$. **B.** $3x-2y+2z-17=0$.

C. $3x-2y+2z+17=0$. **D.** $x+2y-2z-5=0$.

Câu 115. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{3}$ có phương trình là

A. $2x+y+3z+2=0$. **B.** $x+2y+3z+1=0$.

C. $2x+y+3z-2=0$. **D.** $3x+2y+z-5=0$.

Câu 116. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;-1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$?

A. $3x+2y+z-8=0$ **B.** $3x-2y+z+12=0$

C. $3x-2y+z-12=0$ **D.** $x-2y+3z+3=0$

Câu 117. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-9=0$. **C.** $2x-y+3z-9=0$. **D.** $2x-y+3z-6$.

Câu 118. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}=(1;2;3)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(1;4;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;1;2)$.

Câu 119. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ là:

A. $x+y+z+1=0$. **B.** $x-y-z=1$. **C.** $x+y+z=1$. **D.** $x+y+z=0$.

Câu 120. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;0)$ và chứa đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là:

A. $x-y+z+1=0$. **B.** $3x-y+2z+1=0$. **C.** $x+y+z-1=0$. **D.** $3x+y-2z-1=0$.

Câu 121. (Chuyên Hưng Yên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d.

A. $(T):x+y+2z+1=0$. **B.** $(P):x-2y+z+1=0$.

C. $(Q):x-2y-z+1=0$. **D.** $(R):x+y+z+1=0$.

Câu 122. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0;-3;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $3x-2y+z+5=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $3x-2y+z-10=0$. **D.** $3x-2y+z-5=0$.

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;-1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$?

A. $x-2y+3z+3=0$ **B.** $3x+2y+z-8=0$

C. $3x-2y+z+12=0$ **D.** $3x-2y+z-12=0$

Câu 124. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0;-3;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $3x-2y+z+5=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $3x-2y+z-10=0$. **D.** $3x-2y+z-5=0$.

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$.. **B.** $x+y-z=0$..

C. $-3x-2y-10z+23=0$.. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;0)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d.

A. $2x+y+z-4=0$. **B.** $x+2y-z+4=0$. **C.** $2x-y-z+4=0$. **D.** $2x+y-z-4=0$.

Câu 127. (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ có phương trình là

A. $2x+y-z-4=0$. **B.** $2x-y-z+4=0$.

C. $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x+y-z+4=0$.

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(2;-3;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-3}{1}=\frac{4-y}{2}=\frac{z-7}{5}$.

A. $x-2y+5z-10=0$. **B.** $x-2y+5z-8=0$.

C. $2x-3y+4=0$. **D.** $x+2y+5z+4=0$.

Câu 130. (Bắc Giang - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d có phương trình là ?

A. $(P):x+y+2z=0$. **B.** $(P):x-y-2z=0$. **C.** $(P):x-y+2z=0$. **D.** $(P):x-2y-2=0$.

Câu 131. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d.

A. $(P):x-y-2z=0$. **B.** $(P):x-2y-2=0$. **C.** $(P):x+y+2z=0$. **D.** $(P):x-y+2z=0$.

Câu 132. (SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d):\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$ và điểm $A(1;-2;3)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là:

A. $x-y+2z-9=0$. **B.** $x-2y+3z-14=0$.

C. $x-y+2z+9=0$. **D.** $x-2y+3z-9=0$.

Câu 133. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng 2018) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $2x-y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-6=0$. **C.** $2x-y+z+3=0$. **D.** $2x-y-z+3=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định phương trình đường thẳng

1. Dạng 1. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và dạng chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)$.***

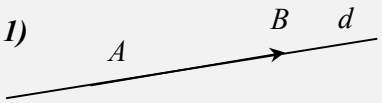
Phương pháp. Ta có: $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)\end{cases}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\boxed{d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R}).}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{d:\dfrac{x-x_\circ}{a_1}=\dfrac{y-y_\circ}{a_2}=\dfrac{z-z_\circ}{a_3},(a_1a_2a_3\neq 0).}$

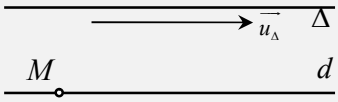
2. Dạng 2. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua A và B.***

Phương pháp. Đường thẳng $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ A\ (hay\ B)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



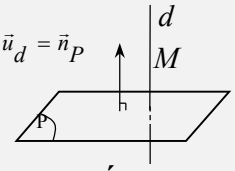
3. Dạng 3. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua}\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTCP:\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



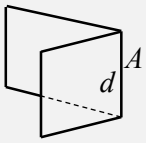
4. Dạng 4. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases}$ ***(dạng 1)***



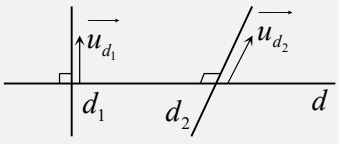
5. Dạng 5. ***Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cho trước.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ A=(P)\cap(Q)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}]\end{cases}$ ***(dạng 1)***



6. Dạng 6. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}]\end{cases}$ ***(dạng 1)***



7. Dạng 7. ***Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng (P), (Q).***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

8. Dạng 8. ***Viết phương trình đường thẳng d qua M, vuông góc đường d' và song song mặt (P).***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{u}_{d'},\vec{n}_P]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

9. <u>Dạng 9</u>. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***nằm trong mặt*** (P), ***song song mặt*** (Q) ***và qua*** M.

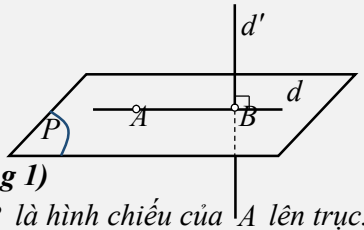
<u>Phương pháp</u>. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } M\\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

10. <u>Dạng 10</u>. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***đi qua điểm*** A, ***vuông góc và cắt đường thẳng*** d'.

<u>Phương pháp</u>.

Viết phương trình mặt phẳng (P) *qua* A, *vuông góc* d'.

Nghĩa là mặt phẳng $(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } A\\ \bullet\ VTPT: \vec{n}_P=\vec{u}_{d'}\end{cases}$.



Tìm $B=d'\cap(P)$. *Suy ra đường thẳng* d *qua* A *và* B ***(dạng 1)***

<u>Lưu ý</u>: *Trường hợp* d' *là các trục tọa độ thì* $d\equiv AB$, *với* B *là hình chiếu của* A *lên trục.*

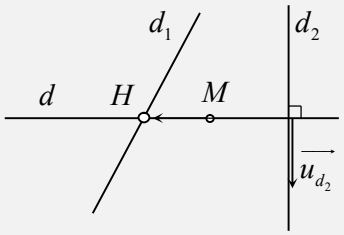
11. <u>Dạng 11</u>. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng*** d ***đi qua điểm*** M ***và cắt đường thẳng*** d_1 ***và vuông góc*** d_2 ***cho trước.***

<u>Phương pháp</u>. *Giả sử* $d\cap d_1=H,\ (H\in d_1,\ H\in d)$

$\Rightarrow H(x_1+a_1t;\ x_2+a_2t;\ x_3+a_2t)\in d_1$.

Vì $MH\perp d_2\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\Rightarrow t\Rightarrow H$.

Suy ra đường thẳng $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } M\\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d=\overrightarrow{MH}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



<u>Dạng 12</u>. d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• ***Cách 1***: Gọi $M_1\in d_1$, $M_2\in d_2$ Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.

• ***Cách 2***: Gọi $(P)=(M_0,d_1)$, $(Q)=(M_0,d_2)$. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$, do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]$.

<u>Dạng 13</u>. d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Tìm các giao điểm A = $d_1\cap(P)$, B = $d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

<u>Dạng 14.</u> d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

<u>Dạng 15.</u> d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• ***Cách 1***: Gọi $M\in d_1$, $N\in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases}MN\perp d_1\\ MN\perp d_2\end{cases}$, ta tìm được M,N.

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• **Cách 2:**

– Vì $d\perp d_1$ và $d\perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a}=[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}]$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1.

+ Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P=[\vec{a},\vec{a}_{d_1}]$.

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_1.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

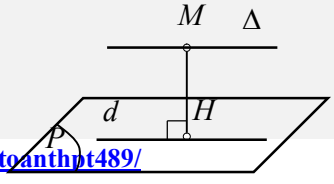
<u>Dạng 16</u>. **Viết phương trình đường thẳng** d **là hình chiếu vuông góc của đường thẳng** Δ **lên mặt** (P).

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P).

• Nếu $\Delta\parallel(P)$.

Chọn một điểm M trên Δ.

Tìm H là hình chiếu của M lên (P).

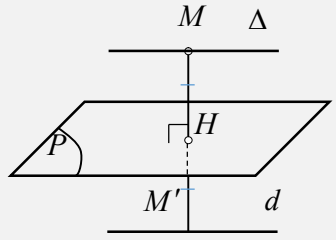


Hình chiếu $d:\begin{cases}\text{Qua } H\\ \text{VTCP}:\vec{u}_d=\vec{u}_\Delta\end{cases}$.

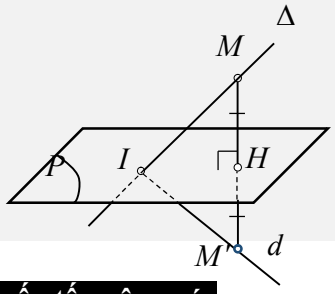
- Nếu $\Delta\cap(P)=I$.
  Chọn một điểm $M\neq I$ trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Hình chiếu vuông góc của Δ lên (P) là $d\equiv IH$.

***Dạng 17*. Viết đường thẳng d là đường thẳng đối xứng với đường thẳng Δ qua mặt phẳng (P).**

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P).



- Nếu $\Delta\parallel(P)$.
  Chọn một điểm M trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Tìm M' đối xứng với M qua (P).
  Đường thẳng đối xứng $d:\begin{cases}\text{Qua } M'\\ \text{VTCP}:\vec{u}_d=\vec{u}_\Delta\end{cases}$.



- Nếu $\Delta\cap(P)=I$.
  Chọn một điểm M trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Tìm M' đối xứng với M qua (P).
  Đường thẳng đối xứng $d:\begin{cases}\text{Qua } M'\\ \text{VTCP}:\vec{u}_d=\overrightarrow{IM'}\end{cases}$.

Dạng 1.1 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-2t\\ z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2t\\ z=3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=3+2t\end{cases}$

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2),B(1;2;1),C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-t\\ y=4t\\ z=2+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=4\\ z=2+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=4+4t\\ z=4+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\ y=2-4t\\ z=2-2t\end{cases}$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2:\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$ **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$

Câu 4. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0), B(2;0;2), C(2;-1;3), D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t \\ z=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3-t \end{cases}$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$, $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-1-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Câu 6. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+3t \\ z=2t \end{cases}$

Câu 7. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(2;1;0), C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=-1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=2+2t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-2+2t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 8. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$ **C.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

Câu 9. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;2;1), B(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3})$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

A. $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$ **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$

C. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$

Câu 11. **(Mã 123 2017)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$, $\Delta':\frac{x+1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=2\end{cases}$, $d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A. $2x-y+2z+13=0$ **B.** $2x+y+2z-22=0$

C. $2x-y+2z-13=0$ **D.** $2x-y+2z+22=0$

Câu 14. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{4}$.

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 16. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 17. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases}$, $d':\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và d'?

A. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z-2}{9}$. **B.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z+2}{9}$.

C. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-2}{14}$. **D.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

Câu 18. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ và $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình nào sau đâu là phương trình của (Δ)

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y+z=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3-5t \\ z=3-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-5t \\ z=4-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-5t \\ z=-4-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=7-5t \\ z=2-7t \end{cases}$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng: $d_1:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình là?

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+5}{3}$. **B.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-5}{3}$.

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{7}=\frac{z+1}{3}$. **D.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+2}{-4}$; $d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình là

A. $\frac{x+7}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{3}$ **B.** $\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

C. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$ **D.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt d_1 và d_2 có phương trình là

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{x+\frac{13}{5}}{1}=\frac{y-\frac{9}{5}}{1}=\frac{z-\frac{4}{5}}{1}$. **B.** $\frac{x-\frac{1}{5}}{1}=\frac{y+\frac{3}{5}}{1}=\frac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

C. $\frac{x-\frac{7}{5}}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-\frac{2}{5}}{1}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=t\\y=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và cắt đường thẳng $(d_2):\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. Phương trình của (Δ) là?

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là:

A. $\Delta:\begin{cases}x=5t\\y=-1+t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=4+t\end{cases}$.

Câu 29. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 30. **(Sở Hà Nam - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-3z-2=0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0;-2;-5)$. **B.** $N(1;-1;-4)$. **C.** $P(2;0;1)$. **D.** $Q(3;1;-4)$.

Dạng 1.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 32. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$, (Q): $x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$

Câu 33. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+4}{2}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}; d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;9;8)$

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$

Câu 35. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y-3z-7=0$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A, song song (P) và cắt đường thẳng d?

A. $\begin{cases} x=3+11t \\ y=2-54t \\ z=-4+47t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+54t \\ y=2+11t \\ z=-4-47t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+47t \\ y=2+54t \\ z=-4+11t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-11t \\ y=2-47t \\ z=-4+54t \end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+4}{2}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$, (Q): $x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3;-1;5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P):x-y+z-4=0$, $(Q):2x+y+z+4=0$.

A. $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

C. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$. **D.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-3}$.

Câu 40. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z-1=0$, $(\beta):2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với AB.

A. $\begin{cases} x=\dfrac{13}{98}-t \\ y=-\dfrac{40}{49}+2t \\ z=\dfrac{135}{98} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=\dfrac{13}{98}-2t \\ y=\dfrac{40}{49}+t \\ z=\dfrac{135}{98} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=\dfrac{13}{98}+2t \\ y=\dfrac{40}{49}+t \\ z=\dfrac{135}{98} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-\dfrac{13}{98}-t \\ y=\dfrac{40}{49}+2t \\ z=\dfrac{135}{98} \end{cases}$.

Câu 42. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x-2z-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-1-t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d.

A. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}$. **D.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

Câu 43. Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$; $d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}$ và $d_3:\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}$. **B.** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$.

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{6}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{6}$.

Câu 44. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$, $d_2:\begin{cases}x=-1+3t\\y=-2t\\z=-4-t\end{cases}$, $d_3:\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 và cắt đồng thời d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{6}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{6}$.

C. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}$. **D.** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+y-3=0$ và $(Q):2x-y+z-3=0$.

A. $\begin{cases}x=1+3t\\y=3-t\\z=-2+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=3+t\\z=-2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=-2-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=-2-3t\end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P):2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d là:

A. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$. **B.** $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$. **D.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$.

Câu 47. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+9=0$, đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P).

A. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Câu 48. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian, cho mặt phẳng (P): $x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\frac{a}{c}$.

A. $\frac{a}{c}=2$. **B.** $\frac{a}{c}=-2$. **C.** $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

Dạng 1.3 Phương trình đường thẳng hình chiếu, đối xứng

Câu 49. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases}x=-3\\y=-5+2t\\z=3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5-t\\z=-3+4t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5+t\\z=3+4t\end{cases}$

Câu 50. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{1}$

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$ **D.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+4}{3}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (α).

A. $\frac{x}{11}=\frac{y+5}{-17}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\frac{x}{11}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z+4}{-2}$.

C. $\frac{x}{11}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-4}{-2}$. **D.** $\frac{x}{11}=\frac{y-5}{-17}=\frac{z-4}{2}$.

Câu 52. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$.

A. 2019. **B.** −2019. **C.** 2018. **D.** −2020.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{5}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$.

C. $\frac{x+5}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{5}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{5}$.

Câu 54. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

A. $d': \frac{x+2}{7}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $d': \frac{x-2}{7}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{2}$.

C. $d': \frac{x+2}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}$. **D.** $d': \frac{x-2}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{2}$.

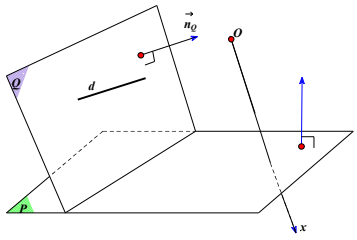
Câu 55. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P); d' nhận $\vec{u}(a;b;2019)$ làm một véctơ chỉ phương. Xác định tổng $a+b$.

A. 2019 **B.** –2019 **C.** 2018 **D.** –2020

Câu 56. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d'. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d':

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $P(1;3;-1)$. **C.** $N(1;-1;3)$. **D.** $Q(2;7;-6)$.

Câu 57. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$.



A. 2019. **B.** –2019. **C.** 2018. **D.** –2020.

Câu 58. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-1=0$. Gọi d' là hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P), véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' là

A. $\overrightarrow{u_3}=(5;-6;-13)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(5;-4;-3)$.

C. $\overrightarrow{u_4}=(5;16;13)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(5;16;-13)$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+5}{1}$.

Dạng 1.4 Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến, giao tuyến…)

Hai đường thẳng d_1,d_2 cắt nhau tại điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vécto chỉ phương |ân lượt là $\vec{u_1}(a_1;b_1;c_1),\vec{u_2}(a_2;b_2;c_2)$

Đường thẳng phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng này có vécto chỉ phương được xác định theo công thức

$$\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\vec{u_1}\pm\frac{1}{|u_2|}\cdot\vec{u_2}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}(a_1;b_1;c_1)\pm\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}(a_2;b_2;c_2)$$

Chi tiết có hai phân giác:

Nếu $\vec{u_1}\vec{u_2}>0\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\vec{u_1}+\frac{1}{|u_2|}\cdot\vec{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng và $\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\vec{u_1}-\frac{1}{|u_2|}\cdot\vec{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng.

Nếu $\vec{u_1}\vec{u_2}>0\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\vec{u_1}+\frac{1}{|u_2|}\cdot\vec{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng và $\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\vec{u_1}-\frac{1}{|u_2|}\cdot\vec{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng.

Câu 60. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=-3+5t\\z=5+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$

Câu 61. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+7t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=-6-5t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=6-5t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+4t\\z=1-5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=1+t\\z=1+5t\end{cases}$

Câu 62. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng

đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;1;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=1+27t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=11-10t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=-11-10t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+17t\\z=1+10t\end{cases}$

Câu 63. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-7;-1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+5t\\y=2-2t.\\z=3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+6t\\y=2+11t.\\z=3+8t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t.\\z=2+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t.\\z=-2+t\end{cases}$

Câu 64. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2), B(2;0;5), C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $AM:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ **B.** $AM:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$

C. $AM:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$ **D.** $AM:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$

Câu 65. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=t\\z=1\end{cases}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1), B(\dfrac{-8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3})$. Đường phân giác trong của tam giác OAB có phương trình là

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=4t\\y=t\\z=-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=14t\\y=2t\\z=-5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2t\\y=14t\\z=13t\end{cases}$

Câu 67. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}; d_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1;d_2$ lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 68. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3), A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại B,C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 69. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0), B(3;0;2), C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc A.

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$

Câu 70. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Câu 71. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;0;1)$, $B(1;0;-3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O. Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d:\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-1 \end{cases}$ **C.** $d:\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$.

Câu 72. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}$ và $\Delta_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ cắt nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (P). Lập phương trình đường phân giác d của góc nhọn tạo bởi Δ_1, Δ_2 và nằm trong mặt phẳng (P).

A. $d:\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-1+t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d:\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-1+2t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-2t \\ z=-1-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d:\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=-1 \end{cases},(t\in\mathbb{R})$

Câu 73. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{5}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{2}$. **D.** $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-5}{5}$.

Câu 74. **(SGD Bắc Giang - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $d:\frac{x+4}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

B. $d:\frac{x-\frac{8}{3}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C. $d:\frac{x+\frac{4}{9}}{1}=\frac{y-\frac{17}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{19}{9}}{2}$.

D. $d:\frac{x}{1}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-6}{2}$.

Câu 75. **(Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_4=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;2;1)$.

Câu 76. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+7t\\y=-3+5t\\z=5+t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$.

Câu 78. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn MN.

A. $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{-1}$.

D. $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 79. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+3y-z+1=0$, $(\beta): 2x-y+z-7=0$.

A. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{-7}$ **B.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$

C. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-10}{7}$ **D.** $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{7}$

Câu 80. Đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$

Câu 81. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

A. $(0;1;3)$. **B.** $(2;3;3)$. **C.** $(5;6;8)$ **D.** $(1;-2;0)$

Câu 82. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 83. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d', đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ **B.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ **D.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$

Câu 84. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. **D.** $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Câu 85. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ và $x+y-2z+8=0$, điểm $A(2;-1;3)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN là:

A. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-5}{2}$ **B.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$

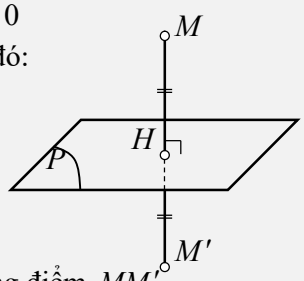
C. $\frac{x-5}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-5}{2}$ **D.** $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{2}$

Dạng 2. Bài toán tìm điểm

① Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$

Viết phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P), khi đó:

$$H=d\cap(P) \text{ thỏa } \begin{cases} x=x_\circ+a_1t \\ y=y_\circ+a_2t \\ z=z_\circ+a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$

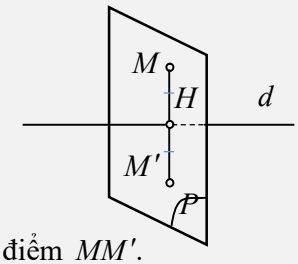


✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

② Tìm hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d.

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d, khi đó:

$$H=d\cap(P) \text{ thỏa } \begin{cases} x=x_\circ+a_1t \\ y=y_\circ+a_2t \\ z=z_\circ+a_3t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$



✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

Câu 1. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;\ b;\ c)$ thuộc d sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết $c<0$.

A. $M\left(\frac{1}{6};\ \frac{7}{6};\ -\frac{2}{3}\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{6};\ -\frac{7}{6};\ -\frac{2}{3}\right)$

C. $M(-1;\ 0;\ -3)$ **D.** $M(2;\ 3;\ 3)$

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1;0;1)$ lên đường thẳng $(\Delta):\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ là

A. $(2;4;6)$. **B.** $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;0)$. **D.** $\left(\frac{2}{7};\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-2t \end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên Δ. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 7.

Câu 4. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian Oxyz, tìm tọa độ hình chiếu H của $A(1;1;1)$ lên đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$.

A. $H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3})$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Câu 5. **(THPT Quang Trung Đống Da Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=6-4t\\y=-2-t\\z=-1+2t\end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

A. $A'(2;3;1)$. **B.** $A'(-2;3;1)$. **C.** $A'(2;-3;1)$. **D.** $A'(2;-3;-1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB và CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 7. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$; $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -5

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B.** $(7;1;-1)$. **C.** $(2;1;-2)$. **D.** $(0;2;-5)$.

Câu 9. **(Sở Bình Phước -2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $2\sqrt{14}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$. Biết điểm M có tung độ âm và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=11$. **C.** $T=-13$. **D.** $T=1$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=t\\z=1\end{cases}$.

Câu 12. **(Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$. Tọa độ điểm M là

A. $M(2;0;-1)$. **B.** $M(5;-1;-3)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(-1;1;1)$.

Câu 13. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$ là:

A. $(-2;1;1)$. **B.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$. **C.** $(1;1;-2)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 14. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véctơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$ có tọa độ là

A. $(2;-2;-2)$. **B.** $(-1;0;1)$. **C.** $(-2;2;2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Câu 15. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** –2.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và $d:\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC). Tổng $S=a+b+c$ là:

A. -7. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 17. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), tính OA'.

A. $OA'=5\sqrt{3}$ **B.** $OA'=\sqrt{46}$ **C.** $OA'=\sqrt{186}$ **D.** $OA'=3\sqrt{26}$

Câu 18. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z=0$.

A. $M'\left(2;\dfrac{5}{2};3\right)$. **B.** $M'(1;3;5)$. **C.** $M'\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $M'(3;1;2)$.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha):2x+y+2z-3=0$ có tọa độ là

A. $(-3;0;0)$. **B.** $(-1;1;2)$. **C.** $(-1;-2;-4)$. **D.** $(2;1;2)$.

Câu 20. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$ **B.** $(3;-2;-1)$ **C.** $(-3;8;-3)$ **D.** $(0;3;-2)$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác đều ABC với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Câu 23. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$, $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 24. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-2}$ và $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. Gọi M là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn OM.

A. $OM=\frac{\sqrt{14}}{2}$. **B.** $OM=\sqrt{5}$. **C.** $OM=2\sqrt{35}$. **D.** $OM=\sqrt{35}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 25. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x-2y+z=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2020.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt d_1, d_2 tại B và C. Độ dài BC là

A. $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 28. Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;0;2)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$.

Biết điểm $M(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $AM \perp \Delta$ và $AM=\sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=5$. **C.** $T=7$. **D.** $T=-6$.

Câu 29. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(3;-2;-1)$. **B.** $(-3;8;-3)$. **C.** $(0;3;-2)$. **D.** $(6;-7;0)$.

Câu 30. **(SGD Bạc Liêu - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=-2+t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là

A. $2x+4y-4z-19=0$. **B.** $3x-6y-6z-62=0$.

C. $2x-4y-4z-43=0$. **D.** $3x+6y-6z-31=0$.

Dạng 3. Bài toán liên quan đến góc – khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- *Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ đến mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song $(P):ax+by+cz+d=0$ và $(Q):ax+by+cz+d'=0$ có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d((Q),(P))=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng

- ***Khoảng cách từ điểm** M **đến một đường thẳng** d qua điểm $M_\circ$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức* $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_\circ M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}}$.

  ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song** là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**: d đi qua điểm M và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có véctơ chỉ phương $\vec{u}'$ là* $\boxed{d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_\circ M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}}$.

3. <u>Góc giữa hai véctơ</u>

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó góc giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc nhọn hoặc tù.

$$\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \text{ với } 0°<\alpha<180°.$$

4. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(P):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

$$\cos\big((P),(Q)\big)=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \text{ với } 0°<\alpha<90°.$$

5. *Góc giữa hai đường thẳng*

Góc giữa hai đường thẳng d_1 *và* d_2 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ *và* $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2).$

$$\cos(d_1;d_2)=\cos\alpha=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \text{ với } 0°<\alpha<90°.$$

6. *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Góc giữa đường thẳng d *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d=(a;b;c)$ *và mặt phẳng* (P) *có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ *được xác định bởi công thức:*

$$\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d)\right|=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_{(P)}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ với } 0°<\alpha<90°.$$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x=7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P). Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1,d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(a;b;c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

A. $\frac{a+2b}{c}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{a+2b}{c}=0$. **C.** $\frac{a+2b}{c}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{a+2b}{c}=1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7),B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 33. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$, $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

A. -4 hoặc 0. **B.** 4 hoặc 0. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 34. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45° và nhận véctơ $\vec{n}(1;b;c)$ làm một véctơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

A. -4 **hoặc** 0 **B.** 4 **hoặc** 0 **C.** -4 **D.** 4

Câu 35. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc $45°$ và nhận vecto $\vec{n}(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Câu 36. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 37. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t,t\in\mathbb{R},\\z=2-t\end{cases}$ cắt mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ tại điểm I. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta\perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) của điểm I trên đường thẳng Δ.

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $M(6;-3;0)$. **C.** $M(5;2;-4)$. **D.** $M(-3;6;0)$.

Câu 38. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h;k;1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -2.

Câu 39. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O, thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 40. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P):x-z-1=0$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi $d_1;d_2$ là các đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 41. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P):x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A, cắt (d) và song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ)

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 42. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t\\y=-1-2t\\z=2+2t\end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng?

A. $\frac{\sqrt{87}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{174}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{174}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{87}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+3z-14=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông tại M. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy).

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(4;3;7)$. **B.** $(-1;-2;1)$. **C.** $(7;5;3)$. **D.** $(3;4;3)$.

Câu 45. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1;d_2$ tới mặt phẳng (P) trong đó: $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3};d_2:\frac{-x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1};(P):2x+4y-4z-3=0$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 46. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $(\Delta):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa (Δ) và (P) là

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** 1

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=3-t\\z=t\end{cases}$ .Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $45°$.Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(3;2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(3;-1;2)$. **D.** $M(3;-1;-2)$.

Câu 48. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019))** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d và (α), A thuộc d sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α).

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 49. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P):x+ay+bz+c=0(c>0)$ song song với d_1,d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P). Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 14. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1),B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A,B có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=2t\\y=7-3t\\z=t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-t\\y=7-3t\\z=4t\end{cases}$.

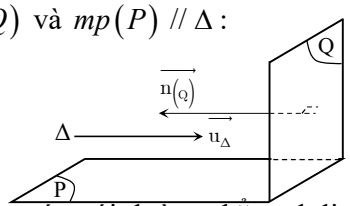
Câu 51. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+z-3=0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh A.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng

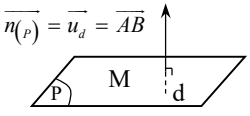
Dạng 1. Viết phương trình mp(P) đi qua M, vuông góc mp(Q) và $mp(P)$ // Δ :

$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M(x_o,y_o,z_o)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{n_{(Q)}},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\end{cases}$$



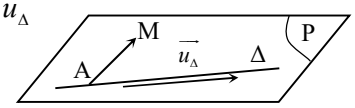
Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi qua hai điểm A và B, với:

$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$$



Dạng 3. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ:

$\xrightarrow{PP}$ ***Trên đường thẳng Δ lấy điểm A và xác định VTCP*** $\overrightarrow{u_\Delta}$



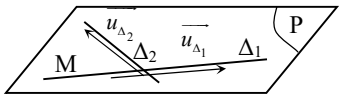
Khi đó $mp(P):\begin{cases}\bullet\ Đi\ qua\ M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\end{cases}$

Dạng 4. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2:

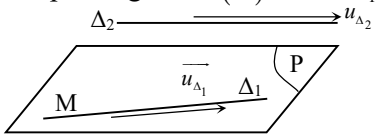
$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ Đi\ qua\ M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$

Dạng 5. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2:

$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ Đi\ qua\ M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$



Dạng 6. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2. Hãy viết phương trình (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2 $\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ Đi\ qua\ M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$



Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β)

$\xrightarrow{PP}$ ***Chọn*** A,B ***thuộc giao tuyến hai mặt phẳng*** (α) ***và*** $(\beta)\Rightarrow A,B\in(P)$***. Cụ thể:***

Cho: $z=z_o\Rightarrow\begin{cases}A_1x+B_1y=-(C_1z_o+D_1)\\ A_2x+B_2y=-(C_2z_o+D_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=...\\ y=...\end{cases}\Rightarrow A(...;...;...)\in(P)$

Cho: $x=x_o\Rightarrow\begin{cases}B_1y+C_1z=-(A_1x_o+D_1)\\ B_2y+C_2z=-(A_2x_o+D_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=...\\ z=...\end{cases}\Rightarrow B(...;...;...)\in(P)$

Khi đó $mp(P):\begin{cases}\bullet\ Đi\ qua\ M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\end{cases}$

Câu 52. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình:

$\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $m=2$ **B.** $m=-52$ **C.** $m=52$ **D.** $m=-2$

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x-y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O, song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $x-2y+z=0$. **C.** $x+2y+z-4=0$. **D.** $x-2y+z+4=0$.

Câu 54. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;-2)$ và đi qua điểm $M(1;-3;2)$, $d_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax+by+cz+11=0$. Giá trị $a+2b+3c$ bằng

A. -42. **B.** -32. **C.** 11. **D.** 20.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$

A. $(P):2x-2z+1=0$ **B.** $(P):2y-2z+1=0$ **C.** $(P):2x-2y+1=0$

D. $(P):2y-2z-1=0$

Câu 56. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $-2x-y+9z-36=0$. **B.** $2x-y-z=0$.

C. $6x+9y+z+8=0$. **D.** $6x+9y+z-8=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 57. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q):x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=5-t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và vuông góc với (Q) là :

A. $3x+y+z-1=0$. **B.** $3x-y-z+1=0$. **C.** $x+3y+z-3=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

Câu 58. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x+y-z-2=0$. **C.** $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Câu 59. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P):x+5y+8z-16=0$. **B.** $(P):x+5y+8z+16=0$.

C. $(P):x+4y+6z-12=0$. **D.** $(P):2x+y-6=0$.

Câu 60. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng: $(d):\begin{cases}x=t+2\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$ và $(\Delta):\begin{cases}x=m+3\\y=3m-2\\z=2m+1\end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P=a+2b+3c$.

A. $P=-10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-8$. **D.** $P=0$.

Câu 61. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - 2018)** Tìm tất cả các mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P):\ 2x-z+1=0$ góc $45°$.

A. $(\alpha):\ 3x+z=0$. **B.** $(\alpha):\ x-y-3z=0$.

C. $(\alpha):\ x+3z=0$. **D.** $(\alpha):\ 3x+z=0$ hay $(\alpha):\ 8x+5y+z=0$.

Câu 62. **(Quảng Nam - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véctơ nào trong các véctơ dưới đây là một véctơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

A. $\vec{n}=(1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}=(1;-1;5)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

Câu 63. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$, $d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $14x-4y-8z+1=0$. **B.** $14x-4y-8z+3=0$.

C. $14x-4y-8z-3=0$. **D.** $14x-4y-8z-1=0$.

Câu 64. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d?

A. $(P):5x+2y+4z-5=0$. **B.** $(P):2x+1y+2z-1=0$.

C. $(P):5x-2y-4z-5=0$. **D.** $(P):2x+1y+2z-2=0$.

Câu 65. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3},d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1,d_2.

A. $14x+4y+8z+13=0$. **B.** $14x-4y-8z-17=0$.

C. $14x-4y-8z-13=0$. **D.** $14x-4y+8z-17=0$.

Câu 66. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$ là:

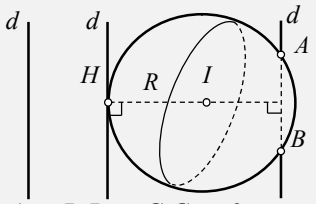
A. $2y-2z+1=0$. **B.** $2y-2z-1=0$.

C. $2x-2z+1=0$. **D.** $2x-2z-1=0$.

Dạng 5. Bài toán liên quan đến vị trí tương đối

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I,\Delta)$ rồi so sánh với bán kính R.

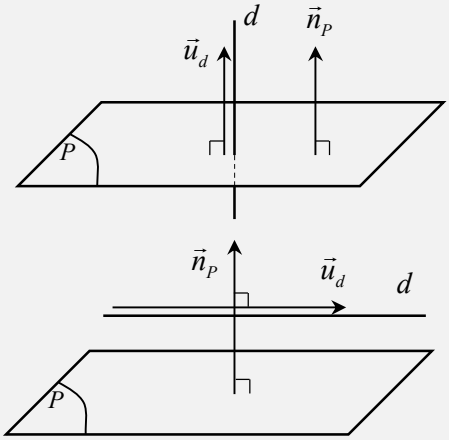


- *Nếu $d(I,\Delta)>R:\Delta$ không cắt (S).*
- *Nếu $d(I,\Delta)=R:\Delta$ tiếp xúc với (S) tại H.*
- *Nếu $d(I,\Delta)<R:\Delta$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B.*
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\y=y_\circ+a_2t\\z=z_\circ+a_3t\end{cases}$ *và mặt phẳng* $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x=x_\circ+a_1t & (1)\\y=y_\circ+a_2t & (2)\\z=z_\circ+a_3t & (3)\\Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$ $(*)$



- *Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α).*
- *Nếu $(*)$ có vô nghiệm $\Leftrightarrow d\parallel(\alpha)$.*
- *Nếu $(*)$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow d\subset(\alpha)$.*

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'

Cho hai đường thẳng: $d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\y=y_\circ+a_2t\\z=z_\circ+a_3t\end{cases}$ *và* $d':\begin{cases}x=x'_\circ+a'_1t'\\y=y_\circ+a'_2t'\\z=z_\circ+a'_3t'\end{cases}$ *lần lượt qua điểm hai điểm M, N và có véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_d$, $\vec{a}_{d'}$.*

- *d song song $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d=k\vec{a}_{d'}\\M\notin d'\end{cases}$.*
- *d trùng $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d=k\vec{a}_{d'}\\M\in d'\end{cases}$.*
- *d cắt $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d\ ko\uparrow\uparrow\ \vec{a}_{d'}\\[\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$*
- *d chéo $d'\Leftrightarrow[\vec{a}_d,\vec{a}_{d'}].\overrightarrow{MN}\neq0$.*

***Lưu ý**: Nếu d cắt d' ta tìm tọa độ giao điểm bằng giải hệ phương trình:* $\begin{cases}x_\circ+a_1t=x'_\circ+a'_1t'\\y_\circ+a_2t=y'_\circ+a'_2t'\\z_\circ+a_3t=z'_\circ+a'_3t'\end{cases}$.

Câu 67. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$, $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau **B.** Trùng nhau **C.** Song song **D.** Cắt nhau

Câu 68. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\quad \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2. **C.** Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P). **B.** d vuông góc với (P).

C. d song song với (P). **D.** d nằm trong (P).

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta\subset(P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

A. $T=2$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=14$. **D.** $T=-14$.

Câu 71. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x-my-2z+19=0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d\,//\,(\alpha)$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Câu 72. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P):2x+y-m^2z+m=0$

A. $m=1$. **B.** $m\in\varnothing$ **C.** $m\in\{-1;1\}$. **D.** $m=-1$

Câu 73. Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn: giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m):mx+2y+nz+1=0$ và $(Q_m):x-my+nz+2=0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x-y-6z+3=0$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=3$.

Câu 74. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=m\end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Câu 75. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_3):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_4):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Câu 76. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(1;-1;0)$ **B.** $H(-3;0;-2)$ **C.** $H(-1;4;4)$ **D.** $H(3;0;2)$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 78. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta:\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Câu 80. **(Mã 104 2018)** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

A. $6x+8y+11=0$ **B.** $6x+8y-11=0$ **C.** $3x+4y-2=0$ **D.** $3x+4y+2=0$

Câu 81. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$; $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$ **B.** $x+z+1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x+z-1=0$

Câu 82. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$ **D.** Đáp án khác.

Câu 83. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$ **C.** $x+y+2z+9=0$ **D.** $x-y+2z+9=0$

Câu 84. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_1=(1;1;\sqrt{3})$ **B.** $\vec{u}_2=(1;1;\sqrt{6})$ **C.** $\vec{u}_3=(1;1;0)$ **D.** $\vec{u}_4=(1;1;-\sqrt{3})$

Câu 86. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

A. $a=-1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=1$.

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$, $(S_2): x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$ và $(S_3): x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(1;2;-1)$.

C. $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=4+2t \\ y=3+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Câu 91. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\begin{cases}x=4-2t\\y=t\\z=3\end{cases},(t\in\mathbb{R}), d_2:\begin{cases}x=1\\y=t'\\z=-t'\end{cases},(t'\in\mathbb{R})$.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ là:

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{9}{4}$.

B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{3}{2}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$.

D. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{3}{2}$.

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $\sqrt{24}$.

D. $\sqrt{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán liên quan đến mặt cầu – mặt phẳng – đường thẳng

Câu 1. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\sqrt{6}$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P):2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36.$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9.$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9.$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36.$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

Nguyễn Bảo Vương

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0$; $(Q):x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1.$ **B.** $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6.$

C. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}.$ **D.** $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8.$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1).$ **B.** $\vec{v}=(2;0;-1).$ **C.** $\vec{m}=(-3;1;0).$ **D.** $\vec{n}=(1;-1;1).$

Câu 6. **(Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B.** $K(-1;2;3)$, $r=8$. **C.** $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D.** $K(1;2;3)$, $r=6$.

Câu 7. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{cases}$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$. **C.** $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Câu 13. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là

đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-2t\\y=-3+t\\z=5+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$.

Câu 14. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B,C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases}x=t\\y=1\\z=-2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=-2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-2\end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):z+2=0$, $K(0;0;-2)$, đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r=\sqrt{5}$ là

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+z^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-2)^2=9$. **D.** $x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=4$.

Câu 17. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$, mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tổng $b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 45.

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **D.** $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Câu 20. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=3-t'\\y=t'\\z=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4.$ **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16.$

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4.$ **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16.$

Câu 21. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0$, $\widehat{BMC}=60^0$, $\widehat{CMA}=120^0$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\frac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\frac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\frac{23}{9}$.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$. **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

Câu 23. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-4$ **B.** $S=-1$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-3$

Câu 24. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4),B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. Đáp án khác. **B.** $r=\frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\frac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Câu 25. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1;-1;6)$, $A(1;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(4;2;3)$, $D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $d=\frac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Câu 29. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3),B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 31. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 32. Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2\\y=t\\z=2+2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$, $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 33. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x-my+z+2m-1=0$ và $(\beta):mx+y-mz+m+2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy). Biết rằng với mọi số thực m thay đổi thì đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 35. Trong không gian cho mặt phẳng $(P):x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2):x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\dfrac{7}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{7}{9}\pi$. **C.** $\dfrac{9}{7}\pi$. **D.** $\dfrac{7}{6}\pi$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m):x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$.

Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{1}{3}$. **D.** $r=\sqrt{3}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt câu $(S):x^2+y^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA,MB,MC đến mặt cầu (S) (A,B,C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB}=60°$, $\widehat{BMC}=90°$, $\widehat{CMA}=120°$. Tính $Q=a+b+c$.

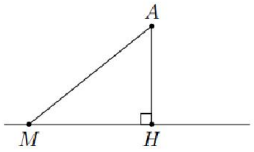
A. $Q=3$. **B.** $Q=\dfrac{10}{3}$. **C.** $Q=2$. **D.** $Q=1$.

Dạng 2 Bài toán cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, ...A_n$ ta luôn có

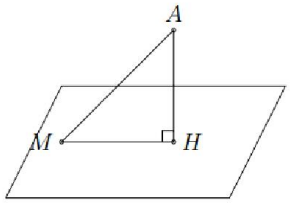
$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

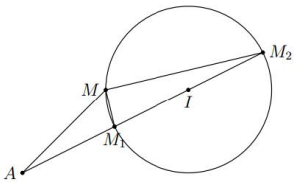


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại . M ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$R - AI \leq AM \leq R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điể M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

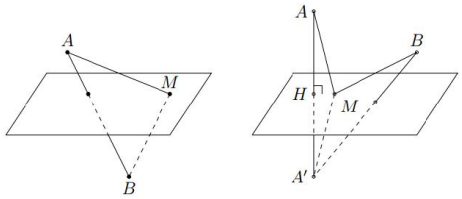
$AM + BM \geq AB$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- TH 2: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó

$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. Ta xét các trường hợp sau

- TH 1: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM - BM| \leq AB$

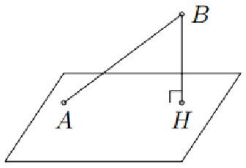
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- TH 2: Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh măt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$\mathrm{d}(B,(P)) = BH \leq BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm $A, B,$ C. Viết phương trình măt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$P = (\alpha + \beta)\mathrm{d}(A,(P)) \leq (\alpha + \beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $I\vec{B} = \dfrac{\alpha}{\beta} I\vec{D}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot \mathrm{d}(D,(P)) = 2\alpha \mathrm{d}(E,(P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P = \alpha \mathrm{d}(A,(P)) + \beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

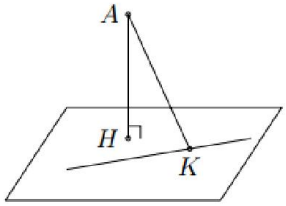
$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(A_i,(P)\right) = n\mathrm{d}(G,(P)) \le nGA$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó

$P = m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right) + k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$\mathrm{d}(A,(P)) = AH \le AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét véc tơ

$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 M\overrightarrow{A_2} + \cdots + \alpha_n M\overrightarrow{A_n}$

Trong đó $\alpha_1;\alpha_2 \ldots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$\vec{w} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)\vec{MG} + \alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)\overrightarrow{MG}$

Do đó

$|\vec{w}| = \left|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\right| \cdot |\vec{MG}|$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:

$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.

2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$MA_k^2 = \left(\overrightarrow{MG} + G\vec{A}_k\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot G\vec{A}_k + GA_k^2$

Do đó

$T = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$

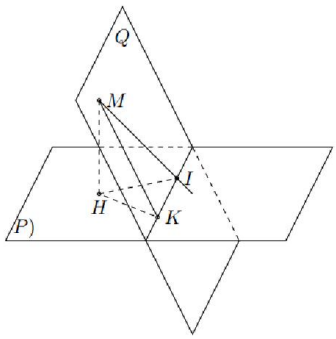
Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \cdots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Nguyễn Bảo Vương

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan\phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $\left(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

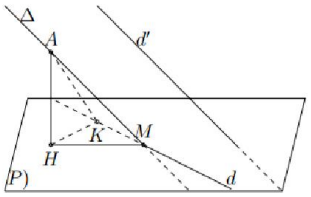
- Gọi $\vec{n} = (a;b;c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c (hoặc b theo a, c hoặc c theo a, b).
- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$$\cos\phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Nguyễn Bảo Vương

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d, ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi = \widehat{AMH}$ và $\cos\phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (P). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{u}_{d'}\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Dạng 2.1. Cực trị liên quan đến khoảng cách, góc

Câu 1. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(0;5;-3)$. **B.** $P(-3;0;-3)$. **C.** $M(0;-3;-5)$. **D.** $N(0;3;-5)$.

Câu 2. **(Mã 103 2019)** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất. d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(0;2;-5)$. **B.** $M(0;4;-2)$. **C.** $P(-2;0;-2)$. **D.** $N(0;-2;-5)$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(0;3;-5)$. **B.** $M(0;-3;-5)$. **C.** $P(-3;0;-3)$. **D.** $Q(0;11;-3)$.

Câu 4. **(Mã 104 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;8;-5)$. **B.** $N(0;2;-5)$. **C.** $P(0;-2;-5)$. **D.** $Q(-2;0;-3)$.

Câu 5. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x-2y+z=0$. **B.** $x+22y+10z=0$. **C.** $x-2y-z=0$. **D.** $x+10y-22z=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2<m<6$. **B.** $m>6$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-6<m<2$.

Câu 7. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+2=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

A. $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$. **B.** $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

Câu 8. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):\ 2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$

Câu 10. **-(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha):3x-4y+z-12=0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases}x=4-t\\y=-2+t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4+t\\y=-2-t\\z=-1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=1-2t\\z=-1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=4+t\\y=-2+t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng

$(\alpha):x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=4+3t\\z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-t'\\z=2t'\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=8+5t'\\y=-3-4t'\\z=2+t'\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t'\\y=1-t'\\z=3-2t'\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t'\\y=1-4t'\\z=3+2t'\end{cases}$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận vecto nào dưới đây là vecto chỉ phương ?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d:\dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 17. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 18. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3),B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B,(P))}=2d_{(A,(P))}$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$

A. 8 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 4

Câu 19. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P).

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Câu 20. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d:\dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 21. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-4z=0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. **B.** $a+2b=0$. **C.** $a+2b=4$. **D.** $a+2b=7$.

Câu 22. **(Bắc Giang 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất ?

A. $a+b=-\frac{1}{2}$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=\frac{3}{2}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vecto $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$

Câu 24. **(SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất.

A. $\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(-\frac{11}{9};-\frac{8}{9};-\frac{2}{9}\right)$ **C.** $(1;-2;2)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Câu 25. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vecto $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 26. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$; bán kính $R=4$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

A. $O(0;0;0)$. **B.** $A\left(1;\frac{3}{5};-\frac{1}{4}\right)$. **C.** $B(-1;-2;-3)$. **D.** $C(2;1;0)$.

Câu 28. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Câu 29. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 30. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P): $2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc $90°$. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $J(-3;2;7)$. **B.** $K(3;0;15)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 31. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$. Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P),(Q)$ là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M,N. Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. **D.** $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Câu 32. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 6. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 33. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Câu 34. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Biết rằng (P): $ax+by+cz-3=0$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

Câu 35. **(ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\dfrac{x-1}{-5}=y-2=\dfrac{z}{4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{13}=\dfrac{z-3}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$.

Câu 36. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a-b=-1$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=0$.

Câu 37. **(Chuyên Bắc Giang 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=6$. **B.** $T=12$. **C.** $T=\sqrt{5}$. **D.** $T=21$.

Câu 38. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mp(P): $2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp(Q): $3x+4y-4z+5=0$, cắt mp(P) tại B. Điểm M nằm trong mp(P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB.

A. $M=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $MB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $MB=\sqrt{5}$. **D.** $MB=\sqrt{41}$.

Câu 39. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0),B(0;2;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Câu 40. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Câu 41. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta'=\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a,b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó giá trị x_0+y_0 bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 42. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A song song với (P) và cách $B(-1;0;2)$ một khoảng nhỏ nhất. Hỏi Δ nhận vectơ nào dưới đây làm vecto chỉ phương?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Câu 43. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Câu 44. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của $d(M;\Delta)$ là

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 45. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(x_0;0;0)$ $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$ và $B'(-x_0;0;y_0)$ trong đó $x_0;y_0$ là các số thực dương và thỏa mãn $x_0+y_0=4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$. **B.** $R=\frac{29}{4}$. **C.** $R=\frac{\sqrt{41}}{4}$. **D.** $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 46. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\y=1-4t\\z=-2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-2t\\z=-2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1+4t\\z=-2-t\end{cases}$.

Dạng 2.2. Cực trị liên quan đến giá trị biểu thức

Câu 47. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 48. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Câu 49. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{57}$. **B.** $T_{\max}=3$. **C.** $T_{\max}=2\sqrt{6}-3$. **D.** $T_{\max}=3\sqrt{6}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0.

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 51. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$

A. $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Câu 52. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+3=0$?

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\dfrac{121}{54}$ **C.** 24 **D.** $\dfrac{91}{54}$

Câu 53. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và ba điểm $A(3;1;1)$, $B(7;3;9)$ và $C(2;2;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a-10b+c$.

A. $\dfrac{62}{9}$. **B.** $\dfrac{27}{9}$. **C.** $\dfrac{46}{9}$. **D.** $\dfrac{43}{9}$.

Câu 55. **(THPT Lê Quý Dôn Dà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$. Cho biết $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tính tích số $x_0y_0z_0$.

A. 16. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 12.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

A. $P=6$. **B.** $P=2$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Câu 57. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2),B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 59. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;4;5),B(3;4;0),C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha):3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 60. **(Dề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0),B(1;-1;3),C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-15=0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 61. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q):3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+5c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 14.

Câu 62. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N(-2;0;1)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N(-1;2;1)$.

Câu 63. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz,cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên

(S). Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Câu 64. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 65. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1\,;\,1\,;3)$, $B(21\,;\,9\,;\,-13)$. Điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Câu 67. **(THPT Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, đường thẳng $(d):\dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d). Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

A. $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Câu 68. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$, $(Q):-x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 5. **B.** 29. **C.** 13. **D.** 3.

Dạng 2.3. Cực trị liên quan đến chu vi, diện tích, bán kính, thể tích

Câu 69. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Câu 70. **(THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-1$.

Câu 71. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 73. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1);B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)(a>2)$ thuộc (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=a+b+c$ bằng:

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=4$. **D.** $T=0$.

Câu 74. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.

C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$ **B.** $T=5$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=48$ Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4),B(2;0;0)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S), đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{128\pi}{3}$ **B.** 39π **C.** $\frac{88\pi}{3}$ **C.** $\frac{215\pi}{3}$

Câu 77. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{27}$. **B.** $\frac{32}{27}$. **C.** $\frac{8}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $(4;3;5\sqrt{2})$. **B.** $(4;3;10\sqrt{2})$. **C.** $(4;3;5\sqrt{10})$. **D.** $(4;3;10\sqrt{10})$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P):2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

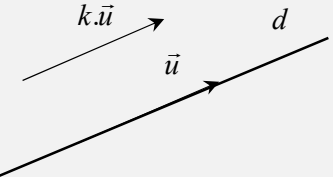
Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định VTCP

- *Véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là véctơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d. Nếu d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k.\vec{u}$ cũng là một véctơ chỉ phương của d.*
- *Nếu có hai véctơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với d thì d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$.*
- *Để viết phương trình đường thẳng d, ta cần tìm điểm đi qua và một véctơ chỉ phương.*

Nếu đường thẳng $d:\begin{cases}Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ VTCP:\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)\end{cases}$ *thì ta có hai dạng phương trình đường thẳng:*



Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\boxed{\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases}},(t\in\mathbb{R}).$

Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{\dfrac{x-x_\circ}{a_1}=\dfrac{y-y_\circ}{a_2}=\dfrac{z-z_\circ}{a_3}},(a_1a_2a_3\neq 0).$

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{3}$.

Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}(2;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(2;-5;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(2;5;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}=(2;-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(3;4;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$ có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(3;4;-1)$.

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d

A. $\overrightarrow{u_3}=(3;-1;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(4;2;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;3)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Một vecto chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_2}(4;-2;3)$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Vecto nào dưới đây là một vecto chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;3)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(4;2;-3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(3;-1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$ **B.** $\overrightarrow{u_3}=(2;1;3)$ **C.** $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;1)$ **D.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$

Lời giải

Chọn C

$d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;1)$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d

A. $\vec{u}=(1;3;-2)$. **B.** $\vec{u}=(2;5;3)$. **C.** $\vec{u}=(2;-5;3)$. **D.** $\vec{u}=(1;3;2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào phương trình đường thẳng suy ra một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;-5;3)$

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

A. $\vec{d}=(-1;1;2)$ **B.** $\vec{a}=(-1;0;-2)$ **C.** $\vec{b}=(-1;0;2)$ **D.** $\vec{c}=(1;2;2)$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;2)$ suy ra đường thẳng AB có VTCP là $\vec{b}=(-1;0;2)$.

Câu 8. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;5)$ **B.** $\overrightarrow{u_4}=(1;-1;2)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(-3;1;5)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;-2)$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_4}=(1;-1;2)$.

Câu 9. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_4}=(1;3;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_3}=(-2;1;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_2}=(1;-3;2)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;-3;2)$.

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_4=(-1;2;0)$ **B.** $\vec{u}_2=(2;1;0)$ **C.** $\vec{u}_3=(2;1;1)$ **D.** $\vec{u}_1=(-1;2;1)$

Lời giải

Chọn D

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{3}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d?

A. $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;3)$ **B.** $\overrightarrow{u_3}=(2;6;-4)$. **C.** $\overrightarrow{u_4}=(-2;-4;6)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy đường thẳng d có một vectơ chỉ phương có tọa độ $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;3)$.

Câu 12. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}_4=(1;2;-3)$. **B.** $\vec{u}_3=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}_1=(2;1;-3)$. **D.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Một vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;-1;2)$ **B.** $M(-1;-2;-3)$ **C.** $P(1;2;3)$ **D.** $N(-2;1;-2)$

Lời giải

Chọn C

Câu 14. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Vectơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2?

A. $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$ **B.** $\overrightarrow{u_1}=(0;2;0)$ **C.** $\overrightarrow{u_2}=(1;2;0)$ **D.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0;0)$

Lời giải

Chọn A

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox\Rightarrow M_1(1;0;0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy\Rightarrow M_2(0;2;0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu **không phải** là vectơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(3;-6;-9)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;-2;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-2;4;3)$.

Lời giải

Ta có một vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$.

$\overrightarrow{u_2}=-3\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3}=-\overrightarrow{u_1}$ $\Rightarrow$ các vectơ $\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

Không tồn tại số k để $\overrightarrow{u_4}=k.\overrightarrow{u_1}$ nên $\overrightarrow{u_4}=(-2;4;3)$ không phải là vectơ chỉ phương của d.

Câu 16. **(Sở Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ là một vectơ chỉ phương?

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ **D.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$

Lời giải

Chọn C

Xét đường thẳng được cho ở câu C, có một vectơ chỉ phương là $(-2;-1;-1)=-(2;1;1)$ (thỏa đề bài).

Câu 17. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ nhận véc tơ $\vec{u}(a;2;b)$ làm véc tơ chỉ phương. Tính $a+b$.

A. -8. **B.** 8. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{v}(2;1;2)$.

$\vec{u}(a;2;b)$ làm véc tơ chỉ phương của d suy ra $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{b}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=4\end{cases}$

Câu 18. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa độ của một véctơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-6t\\z=9t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$?

A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(4;-6;0)$.

Lời giải

Cách 1: Từ phương trình Δ suy ra véctơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(4;-6;9)=12\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 19. **(Chuyên KHTN 2019)** Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$

A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-3;2;1)$. **C.** $(3;-2;1)$. **D.** $(2;1;3)$.

Lời giải

Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}=(3;-2;-1)=-1(-3;2;1)$ nên $\overrightarrow{u_1}=(-3;2;1)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng.

Câu 20. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-7}{1}$ nhận vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

A. $(-2;-4;1)$. **B.** $(2;4;1)$. **C.** $(1;-4;2)$. **D.** $(2;-4;1)$.

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của đường thẳng d ta có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2;-4;1)$.

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$ véc tơ nào dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4 \\ z = 3-2t \end{cases}$,

A. $\vec{u} = (1;4;3)$. **B.** $\vec{u} = (1;4;-2)$. **C.** $\vec{u} = (1;0;-2)$. **D.** $\vec{u} = (1;0;2)$.

Lời giải

Từ phương trình tham số của đường thẳng d, ta suy ra một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1;0;-2)$.

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng

Dạng 1. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và dạng chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ ***và có véctơ chỉ phương*** $\vec{u}_d = (a_1;a_2;a_3)$.

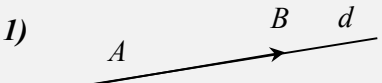
Phương pháp. *Ta có:* $d: \begin{cases} \bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d = (a_1;a_2;a_3) \end{cases}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\boxed{d: \begin{cases} x = x_\circ + a_1 t \\ y = y_\circ + a_2 t \\ z = z_\circ + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{d: \dfrac{x-x_\circ}{a_1} = \dfrac{y-y_\circ}{a_2} = \dfrac{z-z_\circ}{a_3}}, (a_1a_2a_3 \neq 0).$

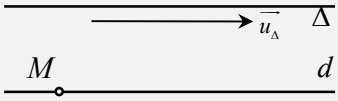
Dạng 2. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng*** d ***đi qua*** A ***và*** B.

Phương pháp. *Đường thẳng* $d: \begin{cases} \bullet\ Qua\ A\ (hay\ B) \\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$ ***(dạng 1)***



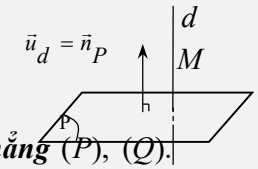
Dạng 3. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** M ***và song song với đường thẳng*** Δ.

Phương pháp. *Ta có* $d: \begin{cases} \bullet\ \text{Qua}\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ) \\ \bullet\ VTCP: \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}$ ***(dạng 1)***



Dạng 4. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết*** d ***đi qua điểm*** M ***và vuông góc với mặt phẳng*** $(P): ax+by+cz+d=0$.

Phương pháp. *Ta có* $d: \begin{cases} \bullet\ Qua\ M \\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (a;b;c) \end{cases}$ ***(dạng 1)***



Dạng 4. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***qua*** M ***và song song với hai mặt phẳng*** (P), (Q).

Phương pháp. *Ta có* $d: \begin{cases} \bullet\ Qua\ M \\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \end{cases}$ ***(dạng 1)***

Dạng 2.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng MN nhận $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ hoặc $\vec{u}(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương nên ta loại ngay phương án A, B và **C.**

Thay tọa độ điểm $M(1;0;1)$ vào phương trình ở phương án D ta thấy thỏa mãn.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$?

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-2}$ **C.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2}$ **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$ đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(2;3;1)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$.

Đường thẳng MN qua N nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình

$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-3;1)$ là

A. $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6 \\ z=2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải

Theo lý thuyết về dường thẳng trong không gian $Oxyz$, ta có phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases},\ (t\in\mathbb{R}).$$

Do đó, đáp án D đúng.

Câu 26. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-7}$ **B.** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-7}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ **D.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{EF}=(3;1;-7)$. Đường thẳng EF đi qua điểm $E(-1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{EF}=(3;1;-7)$ có phương trình: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-7}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$.Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6 \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải

$\vec{a}=(4;-6;2)=2(2;-3;1)$ \

Do đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;1)$. Vậy phương trình tham số của Δ đi qua $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;1)$ là: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Câu 28. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(1;1;-1)$ và $Q(2;3;2)$

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{PQ}=(1;2;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm P,Q

Khi đó d có một vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\overrightarrow{PQ}=(1;2;3)$

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $P(1;1;-1)$ là $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(5;4;-1)$ là

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-4}$.

C. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$. **D.** $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(4;2;-4)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u}(-2;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $B(5;4;-1)$ nhận $\vec{u}(-2;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương là:

$\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+1}{2},(1)$. Do đó loại ***A***, ***C***.

Có tọa độ $C(-1;-2;-3)$ không thỏa mãn phương trình (1) nên phương án ***B***.

Lại có tọa độ $D(3;3;1)$ thỏa mãn phương trình (1) nên phương trình đường thẳng AB cũng được viết là: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Đường thẳng Oy đi qua điểm $A(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;\ 1;\ 0)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=0+0.t\\y=2+1.t\\z=0+0.t\end{cases}(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 31. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$ có đường thẳng có phương trình tham số là $(d):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+t\end{cases}$. Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$ **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;-3)$ nhận véc tơ $\vec{u}=(2;-1;1)$ nên có phương trình dạng chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$

Câu 32. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1;0;2)$ và $F(2;1;-5)$. Phương trình đường thẳng EF là

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-7}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-7}$. **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-3}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng EF có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{EF}=(3;1;-7)$ và đi qua $E(-1;0;2)$ nên có phương trình: $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-7}$.

Câu 33. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

A. $z=0$. **B.** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Trục Oz đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 34. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số

A. $x=0$. **B.** $y+z=0$. **C.** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{i}(1;0;0)$ nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases}x=0+1.t\\y=0+0.t\\z=0+0.t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=0.\\z=0\end{cases}$$

Vậy trục Ox có phương trình tham số $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

Câu 35. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}(1;-4;-5)$ là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-4+2t\\z=-5+3t\end{cases}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+5}{3}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+4t\\z=3+5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\vec{a}(1;-4;-5)$, do $\vec{a}=-\vec{v}$ với $\vec{v}(-1;4;5)$ nên d cũng nhận véctơ $\vec{v}(-1;4;5)$ làm véctơ chỉ phương do đó phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1-t\\y=2+4t..\\z=3+5t\end{cases}$

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;2)$ là

A. $d:\begin{cases}x=0\\y=3t\\z=2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1\\y=3\\z=2\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=2t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=-t\\y=-2t\\z=-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $d:\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=2t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 37. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 38. **(Sở Bình Thuận 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;4)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(3;-1;5)$ làm vectơ chỉ phương. Hệ phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d?

A. $\begin{cases}x=3t\\y=1-t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3\\y=-1-t\\z=5+4t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=-1-t\\z=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3t\\y=1-t\\z=-4+5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;4)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(3;-1;5)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=3t \\ y=-1-t \\ z=4+5t \end{cases}$.

Câu 39. **(Sở GD Nam Định - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ nhận vectơ $\vec{u}=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ nhận vectơ $\vec{u}=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$.

Dạng 2.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 40. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=3+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng cần tìm đi qua $M(1;-2;3)$, vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$ là véc tơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Câu 41. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):\ 2x-y+3z-1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=3-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2-t \\ z=3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=-3-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P):\ 2x-y+3z-1=0$ là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và và vuông góc với (P) có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+3t \end{cases}$.

Câu 42. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=-3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) nhận véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) làm véc tơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$.

Câu 43. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là:

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-3-2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P):2x+y-3z+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-3)$

đường thẳng đi qua $M(1;2;-2)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}=(2;1;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Vậy phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Câu 44. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+3y-z+5=0$?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=1-t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}=(1;3;-1)$ nên suy ra chỉ đáp án **A** hoặc **B** đúng. Thử tọa độ điểm $A(2;3;0)$ vào ta thấy đáp án **B** thỏa mãn

Câu 45. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α).

A. $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. **B.** $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$. **C.** $d_3:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $d_4:\begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi VTCP của đường thẳng cần tìm là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ với $a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$.

Đường thẳng vuông góc với $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}$ cùng phương $\vec{n}\Leftrightarrow\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{-1}=\frac{a_3}{2}$

Chọn $a_1=1$ thì $a_2=-1$ và $a_3=2$.

Câu 46. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

.

Lời giải

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ chỉ phương. Mặt khác d đi qua $A(1;1;1)$ nên:

$\Rightarrow$ Đường thẳng d có phương trình là: $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P).

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+2}{2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$.

C. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;-3;2)$.

Vì d vuông góc với (P) nên d nhận $\vec{n}=(1;-3;2)$ là VTCP.

Đường thẳng d qua M và nhận $\vec{n}=(1;-3;2)$ là VTCP có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{2}$.

Câu 48. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. **B.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\Delta:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Gọi giao điểm của Δ và d là $B(t+1;t;2t-1)$. Khi đó $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AB}=(t,t,2t-3)$.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d có $\overrightarrow{u_d}=(1,1,2)$ thì:

$t+t+2(2t-3)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=(1,1,-1)$.

Phương trình đường thẳng Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

Câu 49. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+y+3z+5=0$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. **B.** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $x+y+3z+5=0$ nên nó có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;3)$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có mặt phẳng $(P):x+z-2=0$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;0;1)$

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ. Vì đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

$\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;0;1)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(3;2;-1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$ là:

$$\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}.$$

Câu 51. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x-2y+z-1=0$ có dạng

A. $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;1)$. Vì $d\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;1)$ cũng là vecto chỉ phương của đường thẳng d. Suy ra phương trình đường thẳng d thường gặp là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$. So với đáp án không có, nên đường thẳng d theo bài là đường có vecto chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ và đi qua điểm $A(1;2;1)$. Thay tọa độ điểm $A(1;2;1)$ vào 3 đáp án A, B, D thấy đáp án D thỏa mãn.

Câu 52. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (P): $2x-5y+z-1=0$ và $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=-5+2t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-3-5t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-5t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=-3+5t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-5;1)$.

Đường thẳng Δ vuông góc với (P) nên có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=-\vec{n}=(-2;5;-1)$.

Δ đi qua A nên có phương trình $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+5t\\z=-1-t\end{cases}$.

Cho $t=-1$ ta được điểm $B(3;-3;0)\in\Delta$.

Vì thế Δ có phương trình $\begin{cases}x=3-2t\\y=-3+5t\\z=-t\end{cases}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x-y+z+3=0$ và điểm $A(1;-2;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) là

A. d: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** d: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-4t\\z=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** d: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=1+3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;1)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{n}=(2;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương. Mà d đi qua $A(1;-2;1)$ nên có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y-z-1=0$ có dạng

A. $d: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-1}$. **B.** $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $d: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

$(P): x-2y-z-1=0$ có $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;-1)$

Vì $d \perp (P)$ nên d có một VTCP là $\vec{a}=(1;-2;-1) \Rightarrow$ chọn A, C, D

Thay tọa độ điểm A vào các câu đã chọn, ta thấy câu D thỏa yêu cầu. $d: \dfrac{1-2}{2}=\dfrac{2}{-4}=\dfrac{1}{-2}$

Câu 55. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+6z+19=0$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-6}{3}$. **B.** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$.

C. $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+6}{3}$. **D.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+6z+19=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-3;6)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=(2;-3;6)$ làm vectơ chỉ phương, khi đó phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$.

Dạng 2.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 56. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ và $C(3;4;-1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. **C.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua A và song song với BC nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Phương trình của đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(1;1;1), C(3;4;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$, đường thẳng song song nên có vec tơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$.

Do vậy đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}$

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0), B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$. **C.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{3}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là phương trình đường thẳng qua $A(1;2;0)$ và song song với BC.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;2;-1)\Rightarrow d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.

Câu 59. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(1;0;1), C(3;1;0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$. **B.** $\frac{z+1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua $A(1;1;0)$, song song với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}=(2;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương do đó có phương trình là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 60. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

A. $x-2y+z=0$. **B.** $\begin{cases}x=-2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$.

C. $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua A và song song BC nhận $\overrightarrow{BC}=(-2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta:\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Chú ý: *Đáp án A không nhận được, vì đó là phương trình tham số của đường thẳng cần tìm, chứ không phải phương trình chính tắc.*

Câu 61. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-3)$; $B(-1;4;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d?

A. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ **B.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$

Lời giải

Chọn B

Trung điểm của AB là $I(0;1;-1)$

$d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ có VTCP là $\vec{u}(1;-1;2)$ nên đường thẳng Δ cần tìm cũng có VTCP $\vec{u}(1;-1;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{x+1}{2}$.

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$, (Q): $x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=3-2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+t\\y=2\\z=-3-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2\\z=3+2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=3-t\end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)\\\vec{n}_{(Q)}=(1;-1;1)\end{cases}$ và $\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;0;-2)=2(1;0;-1)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng, nên nhận véc tơ $(1;0;-1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC?

A. $\begin{cases}x=-2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $x-2y+z=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua A và song song BC nhận $\overrightarrow{BC}=(-2;1;1)$ làm vecto chỉ phương

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng cần tìm: $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Chú ý: *Đáp án A không nhận được, vì đó là phương trình tham số của đường thẳng cần tìm, chứ không phải phương trình chính tắc.*

Câu 64. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{n}_{(Oxy)}=(1;1;0)$, $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy). Khi đó:

$\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(Oxy)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Oxy)}\right]=(1;-1;0)$. Vậy $d:\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;3;-1)$, $N(-1;2;3)$ và $P(2;-1;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua M và song song với NP là

A. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2-3t\\z=3-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+3t\\y=-1-3t\\z=1-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+3t\\y=3-3t\\z=-1-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-2t\\y=-3+3t\\z=-2-t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường thẳng d đi qua M và song song với NP nên có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{NP}=(3;-3;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=-2+3t\\y=3-3t\\z=-1-2t\end{cases}$

Câu 66. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là:

A. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$. **B.** $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

C. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng song song với đường thẳng d nên nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;-1)$ hoặc $\vec{u}=(1;-2;1)$ nên loại phương án **C** và **D.**

Vì điểm $M(2;1;-1)$ thuộc đường thẳng $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1}$ nên chọn phương án **B.**

Vậy phương trình của đường thẳng là $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Câu 67. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua C và song song với AB có phương trình là

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=-1+t\end{cases},(t\in R)$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=-1+t\end{cases},(t\in R)$.

C. $\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=-1-t\end{cases},(t\in R)$. **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=-1+t\end{cases},(t\in R)$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}(-1;-2;-1)$ nên chọn là véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}(1;2;1)$.

Do đó phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1+2t\\z=-1+t\end{cases},(t\in R)$

Câu 68. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z-1=0$, $(\beta):2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{-2}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn B

mp(α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(1;-2;1)$, mp(β) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(2;1;-1)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=(1;3;5)$.

Phương trình của đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

Dạng 3 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, giao điểm đường với mặt phẳng

Câu 69. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$. **B.** $Q(1;-2;-1)$. **C.** $N(-1;3;2)$. **D.** $P(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng ta thấy điểm $P(-1;2;1)$ thỏa $\frac{-1+1}{-1}=\frac{2-2}{3}=\frac{1-1}{3}=0$. Vậy điểm $P(-1;2;1)$ thuộc đường thẳng yêu cầu.

Câu 70. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $P(1;2;-1)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $N(2;3;-1)$. **D.** $Q(-2;-3;1)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm $P(1;2;-1)$ vào phương trình đường thẳng d thấy thỏa mãn nên đường thẳng d đi qua điểm $P(1;2;-1)$.

Câu 71. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $Q(4;-2;1)$. **B.** $N(4;2;1)$. **C.** $P(2;1;-3)$. **D.** $M(2;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $P(2;1;-3)$ vào $d:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$ ta được $\frac{2-2}{4}=\frac{1-1}{-2}=\frac{-3+3}{1}\Leftrightarrow 0=0=0$ đúng. Vậy điểm $P\in(d)$.

Câu 72. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-4}{2}=\frac{z-2}{-5}=\frac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $N(4;2;-1)$. **B.** $Q(2;5;1)$. **C.** $M(4;2;1)$. **D.** $P(2;-5;1)$.

Lời giải

Chọn A

Thế điểm $N(4;2;-1)$ vào d ta thấy thỏa mãn nên chọn **A.**

Câu 73. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $N(3;-1;-2)$ **B.** $Q(2;4;1)$ **C.** $P(2;4;-1)$ **D.** $M(3;1;2)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{3-3}{2}=\frac{-1+1}{4}=\frac{-2+2}{-1}=0$. Vậy $N(3;-1;-2)$ thuộc d.

Câu 74. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $M(3;1;5)$. **B.** $N(3;1;-5)$. **C.** $P(2;2;-1)$. **D.** $Q(2;2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{3-3}{2}=\frac{1-1}{2}=\frac{-5+5}{-1}=0$ nên điểm $N(3;1;-5)\in d$.

Câu 75. **(Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $N(1;5;2)$ **B.** $Q(-1;1;3)$ **C.** $M(1;1;3)$ **D.** $P(1;2;5)$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Dựa vào lý thuyết: Nếu d qua $M(x_0;y_0;z_0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)$ thì phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$, ta chọn đáp án

B.

Cách 2. Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d, ta có:

$\begin{cases}1=1-t\\2=5+t\\5=2+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t=-3\\t=1\end{cases}$ (Vô lý). Loại đáp án **A.**

Thay tọa độ các điểm N vào phương trình đường thẳng d, ta có:

$\begin{cases}1=1-t\\5=5+t\\2=2+3t\end{cases}\Leftrightarrow t=0$. Nhận đáp án **B.**

Câu 76. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$.

A. $N(2;-1;2)$ **B.** $Q(-2;1;-2)$ **C.** $M(-2;-2;1)$ **D.** $P(1;1;2)$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2;1;-2)$.

Câu 77. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(1;3;-1)$. **B.** $M(-3;5;3)$. **C.** $M(3;5;3)$. **D.** $M(1;2;-3)$.

Lời giải

Với $t=-2$, ta có $\begin{cases} x=1+2(-2)=-3 \\ y=3-(-2)=5 \\ z=1-(-2)=3 \end{cases}$.

Vậy $M(-3;5;3)\in d$.

Câu 78. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

A. $K(1;-1;1)$. **B.** $E(1;1;2)$. **C.** $H(1;2;0)$. **D.** $F(0;1;2)$.

Lời giải

Thay tọa độ của $K(1;-1;1)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ -1=1-t \\ 1=2+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ t=2 \\ t=-1 \end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $K\notin d$.

Thay tọa độ của $E(1;1;2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ 1=1-t \\ 2=2+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $E\notin d$.

Thay tọa độ của $H(1;2;0)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ 2=1-t \\ 0=2+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=1 \\ t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$: không tồn tại t.

Do đó, $H\notin d$.

Thay tọa độ của $F(0;1;2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 0=t \\ 1=1-t \\ 2=2+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}\Leftrightarrow t=0.$

Câu 79. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$?

A. $Q(-2;1;-3)$. **B.** $P(2;-1;3)$. **C.** $M(-1;1;-2)$. **D.** $N(1;-1;2)$.

Lời giải

Xét điểm $N(1;-1;2)$ ta có $\dfrac{1-1}{2}=\dfrac{-1+1}{-1}=\dfrac{2-2}{3}$ nên điểm $N(1;-1;-2)$ thuộc đường thẳng đã cho.

Câu 80. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Lời giải

Phương trình tham số đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=5-2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$, với vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-2)$.

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng d_1 tại B. Khi đó $B(1+t;t;5-2t)$.

$\overrightarrow{AB}=(t;t;3-2t)$

Vì đường thẳng d vuông góc với đường thẳng d_1 nên $AB\perp d_1\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$

$$\Leftrightarrow t+t+(3-2t)(-2)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Khi đó $B(2;1;3)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$ là:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

Nhận thấy $Q(0;-1;1)\in d$.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$ **B.** $P(1;2;5)$ **C.** $N(1;5;2)$ **D.** $M(1;1;3)$

Lời giải

Chọn C

Với $t=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow N(1;5;2)\in d$.
$z=2$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 82. Trong không gian Oxyz, đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(2;-1;-2)$. **B.** $M(1;-2;-3)$. **C.** $P(-1;2;-3)$. **D.** N$(2;-1;-2)$.

Lời giải

Đáp án A nhầm vectơ chỉ phương.
Đáp án B nhầm dấu tọa độ điểm.
Đáp án D nhầm vectơ chỉ phương.

Câu 83. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $C(-3;4;5)$. **B.** $D(3;-4;-5)$. **C.** $B(-1;2;-3)$. **D.** $A(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{-5}$ đi qua điểm $A(1;-2;3)$.

Câu 84. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A?

A. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$. **B.** $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Xét đáp án **A.** Thay tọa độ điểm $A(3;-2;1)$ vào phương trình đường thẳng ta được $\dfrac{0}{1}=\dfrac{0}{1}=\dfrac{0}{2}$ đúng. Suy ra đường thẳng $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ đi qua điểm $A(3;-2;1)$.

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t\end{cases}$?

A. $Q(-1;1;3)$ **B.** $P(1;2;5)$ **C.** $N(1;5;2)$ **D.** $M(1;1;3)$

Lời giải

Chọn C

Với $t=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\\z=2\end{cases}\Rightarrow N(1;5;2)\in d$.

Câu 86. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d?

A. $P(7;2;1)$. **B.** $Q(-2;-4;7)$. **C.** $N(4;0;-1)$. **D.** $M(1;-2;3)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $P(7;2;1)$ vào phương trình đường thẳng d ta có $\dfrac{7-1}{3}=\dfrac{2+2}{2}\neq\dfrac{1-3}{-4}$ nên điểm $P(7;2;1)\notin d$.

Câu 87. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Giao điểm của mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=3+3t\end{cases}$

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;4;2)$. **D.** $(2;0;3)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có: $2+t-t-(3+3t)-2=0\Leftrightarrow -3t-3=0\Leftrightarrow t=-1$.

$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow A(1;1;0)$.

Câu 88. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=1-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$. Tìm tọa độ của điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $A(3;5;3)$. **B.** $A(1;3;1)$. **C.** $A(-3;5;3)$. **D.** $A(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Vì A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) nên

$+ A\in d\Rightarrow A(1+2t;3-t;1-t)$.

$+ A\in(P)\Rightarrow(1+2t)+2(3-t)-3(1-t)+2=0\Rightarrow t=-2$.

Vậy tọa độ điểm $A(-3;5;3)$.

Câu 89. (Hùng Vương Gia Lai2019) Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** −2.

Lời giải

Chọn D

$M\in\Delta\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$.

$M\in(P)\Leftrightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.

$M(0;0;-2)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=-2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 90. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4;5;2)$ lên mặt phẳng $(P):y+1=0$ là điểm có tọa độ

A. $(-4;-1;2)$. **B.** $(-4;1;2)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(0;1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H à hình chiếu vuông góc của M lên $(P)\Rightarrow MH:\begin{cases}x=-4\\y=5+t\\z=2\end{cases}$

$H\in MH\Rightarrow H(-4;5+t;2)$

$H\in(P)\Leftrightarrow 5+t+1=0\Leftrightarrow t=-6\Rightarrow H(-4;-1;2)$

Câu 91. (Chuyên Bắc Giang 19) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P).

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;0;-2)$. **C.** $(1;1;6)$. **D.** $(12;9;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}\Rightarrow d:\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$.

Thay $x=12+4t$, $y=9+3t$, $z=1+t$ vào $(P):3x+5y-z-2=0$, ta được:

$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.

Với $t=-3\Rightarrow x=0$, $y=0$, $z=-2$.

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là $(0;0;-2)$.

Câu 92. **(Kon Tum - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-2t\\y=-3+t\\z=1-t\end{cases}$, giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(4;-3;0)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-1;-1)$. **D.** $(-2;0;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Gọi $M(4-2m;-3+m;1-m)$ là giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) thì ta có:

$$1-m=0\Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $M(2;-2;0)$.

Câu 93. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là toạ độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC). Tính tổng $S=a+b-c$.

A. 6. **B.** 5. **C.** -7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$

Điểm $M\in(d)\Rightarrow M(-t;2+t;3+t)$. Lại vì $M=d\cap(ABC)$ nên ta có

$6(-t)+3(2+t)+2(3+t)-6=0\Leftrightarrow -t=-6\Leftrightarrow t=6\Rightarrow M(-6;8;9)$

Vậy ta có $S=a+b-c=-6+8-9=-7$

Câu 94. **(Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+5=0$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. $M(-1;0;4)$. **B.** $M(-5;-2;2)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(-3;-1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$.

Xét phương trình $-3+2t+2(-1+t)-(3+t)+5=0\Leftrightarrow 3t=3\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $M(-1;0;4)$.

Câu 95. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;5)$. Tìm tọa độ điểm A' là hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy.

A. $A'(2;0;0)$. **B.** $A'(0;3;0)$. **C.** $A'(2;0;5)$. **D.** $A'(0;3;5)$.

Lời giải

Chọn B

Dạng 4. Bài toán liên quan khoảng cách, góc

1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng

- ***Khoảng cách từ điểm*** M ***đến một đường thẳng*** d *qua điểm* M_0 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d$ *được xác định bởi công thức* $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}}$.

  Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song *là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau****: d đi qua điểm M và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}$ *và* d' *đi qua điểm* M' *và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}'$ *là* $\boxed{d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right]\right|}}$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d_1 *và* d_2 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ *và* $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$.

$$\boxed{\cos(d_1;d_2)=\cos\alpha=\frac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}\ \text{với}\ 0°<\alpha<90°.$$

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d=(a;b;c)$ *và mặt phẳng* (P) *có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ *được xác định bởi công thức:*

$$\boxed{\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d)\right|=\frac{\left|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|.\left|\vec{n}_{(P)}\right|}=\frac{\left|aA+bB+cC\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ \text{với}\ 0°<\alpha<90°.$$

Câu 96. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P).

A. $d=2$ **B.** $d=\frac{5}{3}$ **C.** $d=\frac{2}{3}$ **D.** $d=\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

(P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(2;-2;-1)$ và đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;2)$ thỏa mãn $\vec{n}.\vec{u}=0$ nên $\Delta//(P)$ hoặc $\Delta\subset(P)$.

Do đó: lấy $A(1;-2;1)\in\Delta$ ta có: $d(\Delta(P))=d(A;(P))=\frac{|2.1-2.(-2)-1+1|}{\sqrt{4+4+1}}=2$.

Câu 97. **(Chuyên Sơn La 2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Đường thẳng d qua $M(1;0;0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Ta có: $\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=1.1+1.1-2.1=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d//(P)$.

$d(d,(P))=d(M,(P))=\frac{|1+0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$.

Câu 98. **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\ y=5+4t\\ z=2+t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z=0$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét phương trình $2(2+t)-(5+4t)+2(2+t)=0\Leftrightarrow 0t+3=0$.

Phương trình này vô nghiệm nên $\Delta//(P)$.

Chọn $M(2;5;2)\in\Delta$.

Khi đó:

$d(\Delta,(P))=d(M,(P))=\frac{|2.2-5+2.2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$.

Câu 99. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 120° **D.** 45^0

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;0)$

Gọi α là góc giữa Đường thẳng d và Mặt phẳng (P). Khi đó ta có

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{|-1.1+2.(-1)+1.0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $\alpha=60^0$

Câu 100. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - TPHCM - 2018)** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$ và $d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

d_1 qua $M(0;3;2)$ có vtcp $\vec{u}=(1;2;1)$, d_2 qua $N(3;-1;2)$ có vtcp $\vec{v}=(1;-2;1)$.

$[\vec{u},\vec{v}]=(4;0;-4)$, $\overrightarrow{MN}=(3;-4;0)$.

$$d(d_1,d_2)=\frac{|[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{MN}|}{|[\vec{u},\vec{v}]|}=\frac{12}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 101. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x+3y-z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+4}{1}$, sin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{5}{13}$. **B.** $\frac{8}{13}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(P):4x+3y-z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;3;-1)$.

Đường thẳng $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+1}{1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(4;3;1)$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Khi đó $\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n};\vec{u})\right|=\frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}=\frac{|4.4+3.3+1(-1)|}{\sqrt{4^2+3^2+1^2}.\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{12}{13}$.

Câu 102. (Chuyên ĐH Vinh -2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z=0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;2)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α), khi đó

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|1-2-2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30°.$$

Câu 103. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $-\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 120^0. **D.** 150^0.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-\sqrt{3};1;0)$

Trục Ox có VTCP $\vec{i}=(1;0;0)$

Góc tạo bởi (P) với trục Ox

$$\sin((\mathrm{P});Ox)=\left|\cos((\mathrm{P});Ox)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{3}.1+1.0+0.0\right|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng 60^0.

Câu 104. (Bình Phước - 2019) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$.. **B.** $\sqrt{6}$.. **C.** $2\sqrt{14}$.. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;2;3)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$; $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}..$$

Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(3;0;1)\in d$.

$\overrightarrow{AM}(1;1;1);\overrightarrow{u_d}(-2;-1;1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]=(2;-3;1)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]\right|=\sqrt{14}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng $d(A,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

Câu 106. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-3-t\\z=2+2t\end{cases}$, $d':\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Khi đó khoảng cách giữa d và d' là

A. $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A(1;-3;2)\in d$, $B(0;3;1)\in d'$ và $\vec{u}(1;-1;2),\vec{u'}(3;-1;1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d,d'

Ta có $d(d,d')=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}=\dfrac{27}{\sqrt{30}}=\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d//(P)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(d,(P)\right)=\mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\dfrac{|1+0+0+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$.

Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, khoảng cách giữa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+4=0$

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

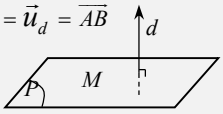
Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên : Chọn $M(1;3;2)\in d$

$$d(d;(P))=d(\mathrm{M};(\mathrm{P}))=\frac{|1-6+4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$$

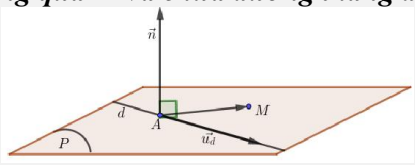
Dạng 5. Xác định phương trình mặt phẳng có yếu tố đường thẳng

Dạng 1. ***Viết phương trình mặt phẳng*** (P) ***qua*** M ***và vuông góc với đường thẳng*** $d\equiv AB$.

Phương pháp. $(P):\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTPT:\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$



Dạng 2. ***Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với*** $M\notin d$**.**



▪ **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\vec{u}_d$. Tính $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_d\right]$.

Bước 2: Phương trình $\mathrm{mp}(P)\begin{cases}\text{qua } M\\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_d\right]\end{cases}$

Câu 109. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $3x+2y-z+1=0$. **B.** $2x-2y+3z-17=0$.

C. $3x+2y-z-1=0$. **D.** $2x-2y+3z+17=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.

Ta có: $\vec{n}_P=\vec{u}_d=(3;2;-1)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình mặt phẳng (P) là: $3(x-2)+2(y+2)-1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0$.

Câu 110. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x+2y+z+3=0$. **B.** $x-2y-z=0$. **C.** $2x+2y+z-3=0$. **D.** $x-2y-z-2=0$.

Lời giải

Chọn C

$\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ thì Δ có một vec-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Có $\Delta\perp(\alpha)$, nên $\vec{u}=(2;2;1)$ là một vec-tơ pháp tuyến của (α).

Mặt phẳng (α) qua điểm $M(1;1;-1)$ và có một vec-tơ pháp tuyến $\vec{u}=(2;2;1)$.

Nên phương trình (α) là $2x+2y+z-3=0$.

Câu 111. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $3x+y-z-7=0$. **B.** $x+4y-2z+6=0$.

C. $x+4y-2z-6=0$. **D.** $3x+y-z+7=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$ nhận véc tơ $\vec{u}(1;4;-2)$ là một véc tơ chỉ phương.

Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;4;-2)$ của Δ là véc tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng phải tìm là:

$1.(x-2)+4(y-1)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+4y-2z-6=0$.

Câu 112. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;1;-2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-3z-9=0$. **B.** $x+y-2z-6=0$.

C. $x+2y-3z+9=0$. **D.** $x+y-2z+6=0$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng đi qua $M(1;1;-2)$ và vuông góc với d nhận véc tơ $\vec{n}(1;2;-3)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình: $x-1+2(y-1)-3(z+2)=0\Leftrightarrow x+2y-3z-9=0$

Câu 113. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$. Mặt phẳng đi qua điểm qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x+3y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-9=0$. **C.** $2x+3y+z+3=0$. **D.** $2x-y+2z+9=0$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;1)$

Mặt phẳng (P) vuông góc với d nên nhận $\vec{u}$ làm vecto pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$2(x-2)+3(y+1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+3y+z-3=0$.

Câu 114. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong gian gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $x+2y-2z+5=0$. **B.** $3x-2y+2z-17=0$.

C. $3x-2y+2z+17=0$. **D.** $x+2y-2z-5=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng nhận vectơ nhận $(1;2;-2)$ là vecto pháp tuyến và đáp án cần chọn là **A.**

Câu 115. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{3}$ có phương trình là

A. $2x+y+3z+2=0$. **B.** $x+2y+3z+1=0$.

C. $2x+y+3z-2=0$. **D.** $3x+2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng qua $A(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;3)$ làm VTPT

Vậy phương trình của mặt phẳng là: $2(x-1)+(y-2)+3(z+2)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y+3z+2=0$.

Câu 116. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;-1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$?

A. $3x+2y+z-8=0$ **B.** $3x-2y+z+12=0$

C. $3x-2y+z-12=0$ **D.** $x-2y+3z+3=0$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M(3;-1;1)$ và nhận VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;-2;1)$ làm VTPT nên có phương trình: $3x-2y+z-12=0$.

Câu 117. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt

phẳng đi qua $M(1;-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$.

A. $2x-y+3z+9=0$. **B.** $2x+y+3z-9=0$. **C.** $2x-y+3z-9=0$. **D.** $2x-y+3z-6$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với Δ nên (P) nhận vtcp của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}(2;-1;3)$ làm vtpt

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-1)-1(y+1)+3(z-2)=0$ hay $2x-y+3z-9=0$.

Câu 118. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}=(1;2;3)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(1;4;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;1;2)$.

Lời giải

Ta có: Đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_d}=(2;-1;2)$

Vì $(P)\perp d$ nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{a_d}=(2;-1;2)$

Câu 119. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ là:

A. $x+y+z+1=0$. **B.** $x-y-z=1$. **C.** $x+y+z=1$. **D.** $x+y+z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $(d):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ nên nhận véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến, suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x+y+z+D=0$, mặt khác (P) đi qua gốc tọa độ nên $D=0$.

Vậy phương trình (P) là: $x+y+z=0$.

Câu 120. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;0)$ và chứa đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là:

A. $x-y+z+1=0$. **B.** $3x-y+2z+1=0$. **C.** $x+y+z-1=0$. **D.** $3x+y-2z-1=0$.

Lời giải

Ta lấy điểm $M(2;1;3)\in(\Delta)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(2;0;3)\\ vtcp\ \overrightarrow{u_{(\Delta)}}=(1;-1;1)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_{(\Delta)}}\right]=(3;1;-2)$

Mặt phẳng cần tìm qua $A(0;1;0)$ và nhận $\vec{n}=(3;1;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là:

$3.(x-0)+1.(y-1)-2.(z-0)=0\Leftrightarrow 3x+y-2z-1=0$.

Câu 121. (Chuyên Hưng Yên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d.

A. $(T):x+y+2z+1=0$. **B.** $(P):x-2y+z+1=0$.

C. $(Q):x-2y-z+1=0$. **D.** $(R):x+y+z+1=0$.

Lời giải

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu vectơ chỉ phương của đường thẳng cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$.

Mặt phẳng (T) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_T}=(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$. Do $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{1}{2}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_T}$. Do đó d không vuông góc với (T).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$. Do $\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2}{-2}=\dfrac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$. Do đó d vuông góc với (P).

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$. Do $\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2}{-2}\neq\dfrac{1}{-1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_Q}$. Do đó (d) không vuông góc với (Q).

Mặt phẳng (R) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_R}=(1\,;\,1\,;\,1)$. Do $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_R}$. Do đó (d) không vuông góc với (R).

Câu 122. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0;-3;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $3x-2y+z+5=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $3x-2y+z-10=0$. **D.** $3x-2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là: $\vec{n}=\overrightarrow{u_d}=(3;-2;1)$. Mặt khác mặt phẳng này đi qua A nên có phương trình là:

$3(x-0)-2(y+3)+(z-1)=0$

$\Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0$.

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3;-1;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$?

A. $x-2y+3z+3=0$ **B.** $3x+2y+z-8=0$

C. $3x-2y+z+12=0$ **D.** $3x-2y+z-12=0$

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng cần tìm đi qua $M(3;-1;1)$ và nhận VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;-2;1)$ làm VTPT nên có phương trình: $3x-2y+z-12=0$.

Câu 124. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0;-3;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $3x-2y+z+5=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $3x-2y+z-10=0$. **D.** $3x-2y+z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng đi qua $A(0;-3;1)$ và vuông góc với đường thẳng d nên có VTPT $\vec{n}=\vec{u}_d=(3;-2;1)$.

Phương trình tổng quát: $3(x-0)-2(y+3)+(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0$.

Câu 125. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$.. **B.** $x+y-z=0$..

C. $-3x-2y-10z+23=0.$. **D.** $2x-y+3z+4=0.$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$-3(x+1)-2(y-3)-10(z-2)=0 \Leftrightarrow -3x-2y-10z+23=0$.

Câu 126. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;0)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d.

A. $2x+y+z-4=0$. **B.** $x+2y-z+4=0$. **C.** $2x-y-z+4=0$. **D.** $2x+y-z-4=0$.

Lời giải

Chọn D

Do (P) vuông góc với d nên ta có $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)+1(y-2)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-4=0.$

Câu 127. (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $B(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;0)\Rightarrow(P)$ có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mà (P) đi qua $A(-1;3;2)$ nên (P) có phương trình: $-3x-2y-10z+23=0$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ có phương trình là

A. $2x+y-z-4=0$. **B.** $2x-y-z+4=0$.

C. $2x+y+z-4=0$. **D.** $2x+y-z+4=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ suy ra nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2,1,-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;0)$ và nhận $\vec{n}=(2,1,-1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$2(x-1)+1(y-2)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-4=0$.

Câu 129. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(2;-3;0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-3}{1}=\frac{4-y}{2}=\frac{z-7}{5}$.

A. $x-2y+5z-10=0$. **B.** $x-2y+5z-8=0$.

C. $2x-3y+4=0$. **D.** $x+2y+5z+4=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta viết lại phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-7}{5}$

$\Rightarrow$ đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-3;0)$ và vuông góc với đường thẳng d

$\Rightarrow$ Mp(P) qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;5)$ làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng $(P): x-2y+5z-8=0$.

Câu 130. (Bắc Giang - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d có phương trình là ?

A. $(P): x+y+2z=0$. **B.** $(P): x-y-2z=0$. **C.** $(P): x-y+2z=0$. **D.** $(P): x-2y-2=0$.

Lời giải

d có VTCP $\overrightarrow{u}=(1;-1;2)$.

$(P)\perp d \Rightarrow (P)$ có VTPT $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}=(1;-1;2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x-2-(y-0)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y+2z=0$.

Câu 131. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và vuông góc với d.

A. $(P): x-y-2z=0$. **B.** $(P): x-2y-2=0$. **C.** $(P): x+y+2z=0$. **D.** $(P): x-y+2z=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(1;-1;2)$.

Nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $(x-2)-(y-0)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y+2z=0$.

Câu 132. (SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ và điểm $A(1;-2;3)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là:

A. $x-y+2z-9=0$. **B.** $x-2y+3z-14=0$.

C. $x-y+2z+9=0$. **D.** $x-2y+3z-9=0$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương: $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n}=(1;-1;2)$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là: $(x-1)-(y+2)+2(z-3)=0\Leftrightarrow x-y+2z-9=0$.

Câu 133. (THPT Thái Phiên - Hải Phòng 2018) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $2x-y+z-3=0$. **B.** $2x-y+2z-6=0$. **C.** $2x-y+z+3=0$. **D.** $2x-y-z+3=0$.

Lời giải

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(0;0;3)$ và vuông góc với đường thẳng d nên nhận véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=(2;-1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến. Do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-y+z-3=0$.

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định phương trình đường thẳng

1. Dạng 1. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và dạng chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm $M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)$.***

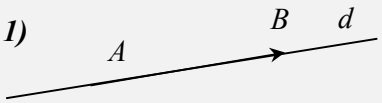
Phương pháp. Ta có: $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=(a_1;a_2;a_3)\end{cases}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng tham số*** $\boxed{d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R}).}$

Phương trình đường thẳng d ***dạng chính tắc*** $\boxed{d:\dfrac{x-x_\circ}{a_1}=\dfrac{y-y_\circ}{a_2}=\dfrac{z-z_\circ}{a_3},(a_1a_2a_3\neq 0).}$

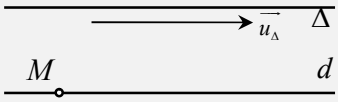
2. Dạng 2. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua A và B.***

Phương pháp. Đường thẳng $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ A\ (hay\ B)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



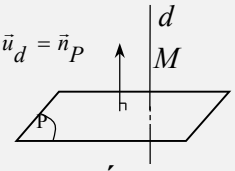
3. Dạng 3. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua}\ M(x_\circ;y_\circ;z_\circ)\\ \bullet\ VTCP:\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



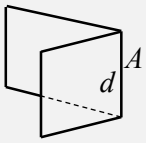
4. Dạng 4. ***Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)\end{cases}$ ***(dạng 1)***



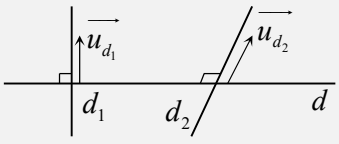
5. Dạng 5. ***Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cho trước.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ A=(P)\cap(Q)\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}]\end{cases}$ ***(dạng 1)***



6. Dạng 6. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước.***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{u}_{d_1},\vec{u}_{d_2}]\end{cases}$ ***(dạng 1)***



7. Dạng 7. ***Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng (P), (Q).***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

8. Dạng 8. ***Viết phương trình đường thẳng d qua M, vuông góc đường d' và song song mặt (P).***

Phương pháp. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ Qua\ M\\ \bullet\ VTCP:\vec{u}_d=[\vec{u}_{d'},\vec{n}_P]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

9. <u>Dạng 9</u>. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***nằm trong mặt*** (P), ***song song mặt*** (Q) ***và qua*** M.

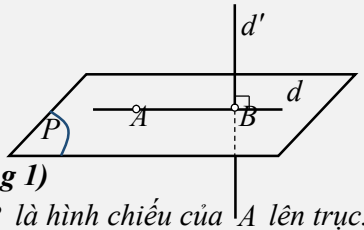
<u>Phương pháp</u>. Ta có $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } M\\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]\end{cases}$ ***(dạng 1)***

10. <u>Dạng 10</u>. ***Viết phương trình đường thẳng*** d ***đi qua điểm*** A, ***vuông góc và cắt đường thẳng*** d'.

<u>Phương pháp</u>.

Viết phương trình mặt phẳng (P) *qua* A, *vuông góc* d'.

Nghĩa là mặt phẳng $(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } A\\ \bullet\ VTPT: \vec{n}_P=\vec{u}_{d'}\end{cases}$.



Tìm $B=d'\cap(P)$. *Suy ra đường thẳng* d *qua* A *và* B ***(dạng 1)***

<u>Lưu ý</u>: *Trường hợp* d' *là các trục tọa độ thì* $d\equiv AB$, *với* B *là hình chiếu của* A *lên trục.*

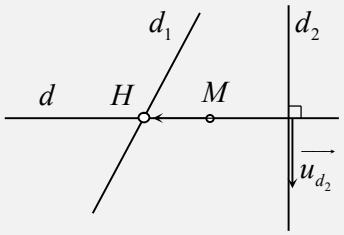
11. <u>Dạng 11</u>. ***Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng*** d ***đi qua điểm*** M ***và cắt đường thẳng*** d_1 ***và vuông góc*** d_2 ***cho trước.***

<u>Phương pháp</u>. *Giả sử* $d\cap d_1=H,\ (H\in d_1,\ H\in d)$

$\Rightarrow H(x_1+a_1t;\ x_2+a_2t;\ x_3+a_2t)\in d_1$.

Vì $MH\perp d_2\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\Rightarrow t\Rightarrow H$.

Suy ra đường thẳng $d:\begin{cases}\bullet\ \text{Qua } M\\ \bullet\ VTCP: \vec{u}_d=\overrightarrow{MH}\end{cases}$ ***(dạng 1)***



<u>Dạng 12</u>. d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• ***Cách 1***: Gọi $M_1\in d_1$, $M_2\in d_2$ Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.

• ***Cách 2***: Gọi $(P)=(M_0,d_1)$, $(Q)=(M_0,d_2)$. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$, do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]$.

<u>Dạng 13</u>. d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Tìm các giao điểm A = $d_1\cap(P)$, B = $d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

<u>Dạng 14.</u> d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

<u>Dạng 15.</u> d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• ***Cách 1***: Gọi $M\in d_1$, $N\in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases}MN\perp d_1\\ MN\perp d_2\end{cases}$, ta tìm được M,N.

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• **Cách 2:**

– Vì $d\perp d_1$ và $d\perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a}=[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}]$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1.

+ Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P=[\vec{a},\vec{a}_{d_1}]$.

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_1.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

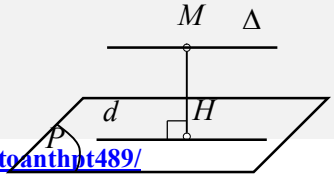
<u>Dạng 16</u>. **Viết phương trình đường thẳng** d **là hình chiếu vuông góc của đường thẳng** Δ **lên mặt** (P).

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P).

• Nếu $\Delta\parallel(P)$.

Chọn một điểm M trên Δ.

Tìm H là hình chiếu của M lên (P).

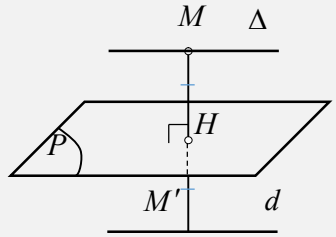


Hình chiếu $d:\begin{cases}\text{Qua } H\\ \text{VTCP}: \vec{u}_d=\vec{u}_\Delta\end{cases}$.

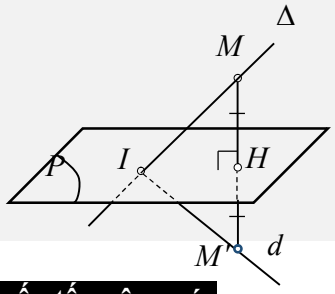
- Nếu $\Delta\cap(P)=I$.
  Chọn một điểm $M\neq I$ trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Hình chiếu vuông góc của Δ lên (P) là $d\equiv IH$.

***Dạng 17*. Viết đường thẳng d là đường thẳng đối xứng với đường thẳng Δ qua mặt phẳng (P).**

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và (P).



- Nếu $\Delta\parallel(P)$.
  Chọn một điểm M trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Tìm M' đối xứng với M qua (P).
  Đường thẳng đối xứng $d:\begin{cases}\text{Qua } M'\\ \text{VTCP}: \vec{u}_d=\vec{u}_\Delta\end{cases}$.



- Nếu $\Delta\cap(P)=I$.
  Chọn một điểm M trên Δ.
  Tìm H là hình chiếu của M lên (P).
  Tìm M' đối xứng với M qua (P).
  Đường thẳng đối xứng $d:\begin{cases}\text{Qua } M'\\ \text{VTCP}: \vec{u}_d=\overrightarrow{IM'}\end{cases}$.

Dạng 1.1 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=-2t\\ z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2t\\ z=3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+2t\\ z=3+2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $M=\Delta\cap Ox$. Suy ra $M(a;0;0)$.

$\overrightarrow{AM}=(a-1;-2;-3)$.

d có VTCP: $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-2)$.

Vì $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2a-2-2+6=0\Leftrightarrow a=-1$.

Vậy Δ qua $M(-1;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)=-(2;2;3)$ nên Δ có phương trình:

$\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2t\\ z=3t\end{cases}$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;2), B(1;2;1), C(3;2;0)$ và $D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=4t \\ z=2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=4 \\ z=2+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=4+4t \\ z=4+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-4t \\ z=2-2t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) nhận vectơ pháp tuyến của (BCD) là vectơ chỉ phương

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;0;-1), \overrightarrow{BD}=(0;-1;2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{BCD}}=\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=(-1;-4;-2)$

Khi đó ta loại đáp án A và B

Thay điểm $A(1;0;2)$ vào phương trình ở phương án C ta có $\begin{cases} 1=2+t \\ 0=4+4t \\ 2=4+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$.

Suy ra đường thẳng có phương trình tham số ở phương án C đi qua điểm A nên C là phương án đúng

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ **B.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$

C. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{3}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $d_1: \begin{cases} x=3-t_1 \\ y=3-2t_1 \\ z=-2+t_1 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=5-3t_2 \\ y=-1+2t_2 \\ z=2+t_2 \end{cases}$.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Giả sử đường thẳng Δ cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại A, B.

Gọi $A(3-t_1;3-2t_1;-2+t_1)$, $B(5-3t_2;-1+2t_2;2+t_2)$.

$\overrightarrow{AB}=(2-3t_2+t_1;-4+2t_2+2t_1;4+t_2-t_1)$.

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;2;3)$.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $\frac{2-3t_2+t_1}{1}=\frac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\frac{4+t_2-t_1}{3}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2} \\ \dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ t_2=1 \end{cases}$. Do đó $A(1;-1;0)$, $B(2;-1;3)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;2;3)$ là

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0), B(2;0;2), C(2;-1;3), D(1;1;3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=-2-3t \\ z=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1+3t \\ z=3-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$

$\overrightarrow{AD}=(0;-1;3)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=(-4;-3;-1)$

Nguyễn Bảo Vương

Đường thẳng qua $C(2;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình

$\begin{cases} x=2-4t \\ y=-1-3t \\ z=3-t \end{cases}$

Điểm $E(-2;-4;2)$ thuộc đường thẳng trên, suy ra đường thẳng cần tìm trùng với đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-4+3t \\ z=2+t \end{cases}$

Chọn đáp án đúng là đáp án **C**

Câu 5. **(Mã 104 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;0)$, $B(1;2;1)$, $C(3;-2;0)$, $D(1;1;-3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-1-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)$; $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-2)$.

Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{n}_{(ABC)}=(1;1;-2)$, phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-3-2t\end{cases}$.

Câu 6. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3+3t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+3t\\z=3+2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2t\\y=-3+3t\\z=2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ

$d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ có VTCP $\vec{u}=(1;-2;2)$.

Gọi $M(0;m;0)\in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM}=(-2;m-1;-3)$

Do $\Delta\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-2-2(m-1)-6=0\Leftrightarrow m=-3$

Ta có Δ có VTCP $\overrightarrow{AM}=(-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=3t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. **(Mã 103 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2),B(2;1;0),C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=-1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=-2+2t\\z=1-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD).

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;1;-1);\overrightarrow{BD}=(0;-1;-2)$.

Mặt phẳng (BCD) có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right]=(3;2;-1)$.

Gọi $\vec{u}_d$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Vì $d\perp(BCD)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\vec{n}_{(BCD)}=(3;2;-1)$.

Đáp **A** và **C** có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(3;2;-1)$ nên loại **B** và **D.**

Ta thấy điểm $A(0;0;2)$ thuộc đáp án **C** nên loại **A.**

Câu 8. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d, nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vecto pháp tuyến $(P):1(x-1)+y+2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+2z-5=0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

Vì $B\in(P)\Leftrightarrow(1+t)+t+2(-1+2t)-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Cách 2:

Gọi $d\cap\Delta=B\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

$\overrightarrow{AB}=(t;t;-3+2t)$, Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;2)$

Vì $d\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t+t+2(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$.Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Câu 9. **(Đề Tham Khảo 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1),B(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3})$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

A. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1}=\frac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\frac{z+\frac{5}{9}}{2}$ **B.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z-4}{2}$

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{11}{6}}{2}$ **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$

Lời giải.

Chọn D

Ta có: $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(4;-8;8)$

Gọi d là đường thẳng thỏa mãn khi đó d có VTCP $\vec{u}=(1;-2;2)$

Ta có $OA=3,OB=4,AB=5$. Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Áp dụng hệ thức $OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IO}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4.(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+3.(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})+5.\overrightarrow{IO}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{1}{12}\left(4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow I(0;1;1)$

Suy ra $d:\begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=1+2t\end{cases}$ cho $t=-1\Rightarrow d$ đi qua điểm $M(-1;3;-1)$

Do đó d đi qua $M(-1;3;-1)$ có VTCP $\vec{u}=(1;-2;2)$ nên đường thẳng có phương trình

$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=-2+2t\end{cases}$

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d.

$\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(-1;4;3)$

Gọi A là giao điểm của d và (P). Tọa độ A là nghiệm của phương trình:

$$(-1+2t)+(-t)-(-2+2t)+1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow A(3;-2;2)$$

Phương trình Δ qua $A(3;-2;2)$ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;4;3)$ có dạng: $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$

Câu 11. **(Mã 123 2017)** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$, $\Delta':\frac{x+1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ'.

A. $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$

Lời giải

Chọn D

+) VTCP của Δ,Δ' lần lượt là $\vec{u}=(3;2;1)$ và $\vec{v}=(1;3;-2)$; $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-7;7;7)$

+) Vì d vuông góc với Δ và Δ' nên $\vec{u}_d=(-1;1;1)$.

+) d đi qua $M(-1;1;3)$ nên $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1+t\end{cases}$

Gọi $M=\Delta\cap(P)\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M(t;2t-1;t+1)$

$M\in(P)\Rightarrow t-2(2t-1)-(t+1)+3=0\Leftrightarrow 4-4t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;2)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-2;-1)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=(1;2;1)$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

$\Rightarrow$ Đường thẳng d nhận $\frac{1}{2}[\vec{n},\vec{u}]=(0;-1;2)$ làm véc tơ chỉ phương và $M(1;1;2)\in d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$

Câu 13. **(Mã 123 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=2\end{cases}$, $d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P), đồng thời vuông góc với d_2?

A. $2x-y+2z+13=0$ **B.** $2x+y+2z-22=0$

C. $2x-y+2z-13=0$ **D.** $2x-y+2z+22=0$

Lời giải:

Chọn C

Tọa độ giao điểm của d_1 và (P) là $A(4;-1;2)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và nhận $\vec{u}_2(2;-1;2)$ làm VTCP có phương trình $2x-y+2z-13=0$.

Câu 14. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai -2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Gọi d là đường thẳng qua A và d cắt d_2 tại K. Khi đó $K(2+t;-1-t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AK}=(1+t;-t;t-2)$.

Đường $AK\perp d_1\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\vec{u_1}=0$, với $\vec{u_1}=(1;4;-2)$ là một vectơ chỉ phương của d_1.

Do đó $1+t-4t-2t+4=0\Leftrightarrow t=1$, suy ra $\overrightarrow{AK}=(2;-1;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz.

Gọi $N(0;0;t)=\Delta\cap Oz\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-1;0;t-1)$.

$\Delta\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-1;0;\dfrac{1}{3}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u_1}=(-3;0;1)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương $(-3;0;1)$ nên có phương

Câu 16. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$, $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2.

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(2+t;-1-t;1+t)=d\cap d_2$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1+t;-t;-2+t)$ và $\overrightarrow{u_1}=(3;3;-1)$ là vectơ chỉ phương của d_1

Mặt khác $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_1}=0$ nên $3.(1+t)+3.(-t)-1.(-2+t)=0\Leftrightarrow t=5$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(6;-5;3)$ là 1 vectơ chỉ phương của d.

Vậy phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 17. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1-4t\\z=6+6t\end{cases}$, $d':\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và d'?

A. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z-2}{9}$. **B.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z+2}{9}$.

C. $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-2}{14}$. **D.** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-4;6)$.

Đường thẳng d' có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(2;1;-5)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với d và d' nên có một vectơ chỉ phương là:

$\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=(14;17;9)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

Câu 18. Cho hai đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Phương trình nào sau đâu là phương trình của (Δ)

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $M\in(d_1)$: $M(2+t_1;1+t_1;1+t_1)$

$N\in(d_2)$: $N(t_2;7-3t_2;-t_2)$

$\overrightarrow{MN}=(t_2-t_1-2;-3t_2-t_1+6;-t_2-t_1-1)$

Đường thẳng MN là đường vuông góc chung $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2+t_1=1\\11t_2+3t_1=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_2=2\\t_1=-1\end{cases}$

Suy ra $M(1;0;0),N(2;1;-2)$ và $\overrightarrow{MN}(1;1;-2)$

Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M,N là: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y+z=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P), cắt và vuông góc với d. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A. $\begin{cases}x=-2+4t\\y=3-5t\\z=3-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-3+4t\\y=5-5t\\z=4-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=1-5t\\z=-4-7t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-3+4t\\y=7-5t\\z=2-7t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Do Δ nằm trong nằm trong (P) và vuông góc với d nên Δ có véctơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{u_d}\right]=(4;-5;-7)$$

Gọi $A=\Delta\cap d$ thì $A=(P)\cap d\Rightarrow A(1;0;-3)$

Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=1+4t\\y=0-5t\\z=-3-7t\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-3+4t\\y=5-5t\\z=4-7t\end{cases}$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng: $d_1:\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u}_{d_1}=(1;4;-2)$

$d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ nên phương trình tham số của $d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Gọi đường thẳng d cắt đường thẳng d_2 tại $M(2+t;-1-t;1+t)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(1+t;-t;t-2)$

Đường thẳng d đi qua $A;M$ nên vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(1+t;-t;t-2)$

Theo đề bài d vuông góc $d_1\Rightarrow\vec{u}_d\perp\vec{u}_{d_1}\Leftrightarrow\vec{u}_d.\vec{u}_{d_1}=0\Leftrightarrow 1.(1+t)+4(-t)-2(t-2)=0\Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow\vec{u}_d=(2;-1;-1)$

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;-1;3)$ và có $\vec{u}_d=(2;-1;-1)$ có dạng:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình là?

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+5}{3}$.

B. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-5}{3}$.

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{7}=\frac{z+1}{3}$.

D. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-1}{3}$.

Lời giải

$\overrightarrow{n_P}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-3)$, Gọi $I=d\cap(P)$, $I\in d\Rightarrow I(2t;3+t;2-3t)$

$I\in(P)\Rightarrow 2t-(3+t)+2(2-3t)-6=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow I(-2;2;5)$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Theo giả thiết $\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_d}\\ \overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}\right]=(1;7;3)$

Và đường thẳng Δ đi qua điểm I. Vậy $\Delta:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-5}{3}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+2}{-4}$; $d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình là

A. $\frac{x+7}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{3}$

B. $\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

C. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$

D. $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

$\Delta\cap d_1=M$ nên $M(-3+2t;-2-t;-2-4t)$

$\Delta\cap d_2=N$ nên $N(-1+3u;-1+2u;2+3u)$

$\overrightarrow{MN}=(2+3u-2t;1+2u+t;4+3u+4t)$

Ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(P)}}$

Nên $\frac{2+3u-2t}{1}=\frac{1+2u+t}{2}=\frac{4+3u+4t}{3}$ ta giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases}u=-2\\ t=-1\end{cases}$

Khi đó tọa độ điểm $M(-5;-1;2)$ và VTCP $\overrightarrow{MN}=(-2;-4-6)=-2(1;2;3)$

Phương trình tham số Δ là $\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+\frac{13}{5}}{1}=\dfrac{y-\frac{9}{5}}{1}=\dfrac{z-\frac{4}{5}}{1}$.

B. $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

C. $\dfrac{x-\frac{7}{5}}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-\frac{2}{5}}{1}$.

D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt d_1 và d_2 tai M,N

Ta có: $M(1+2a;-1-a;a)$, $N(-1+t;-1;-t)$, $\overrightarrow{NM}=(2a-t+2;-a;a+t)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;1;1)$

Vì MN vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{NM}$ cùng phương $\vec{n}$ $\Leftrightarrow\dfrac{2a-t}{1}=\dfrac{-a}{1}=\dfrac{a+t}{1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{3}{5};-\dfrac{2}{5}\right)\\t=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Đường thẳng (d) qua điểm M nhận $\vec{n}$ làm vec tơ chỉ phương

Phương trình $d:\dfrac{x-\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=t\\y=1-t\,(t\in\mathbb{R})\\z=-1\end{cases}$ và cắt đường thẳng $(d_2):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình của (Δ) là?

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1+t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1+t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(2t';1+t';t')\in(d_2)$ là giao điểm giữa đường thẳng (Δ) và đường thẳng (d_2)

Ta có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}}=(1;-1;0)$, $\overrightarrow{MA}=(2t';t';t'-1)$

Theo đề bài: $\overrightarrow{u_{d_1}}.\overrightarrow{MA}=0\Leftrightarrow 2t'-t'=0\Leftrightarrow t'=0$

Suy ra $A(0;1;0)$

Khi đó vecto chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AM}=(0;0;1)$

Phương trình đường thẳng (Δ) qua $M(0;1;1)$ có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(0;0;1)$ có dạng:

$\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1+t\end{cases}$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d, nên nhận véc tơ chỉ phương của d là vecto pháp tuyến $(P):1(x-1)+y+2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+2z-5=0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$

Vì $B\in(P)\Leftrightarrow(1+t)+t+2(-1+2t)-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vecto $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M, vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $N=\Delta\cap Oz$.

Ta có $N(0;0;c)$. Vì Δ qua M,N và $M\notin Oz$ nên $\overrightarrow{MN}(-1;0;c-1)$ là VTCP của Δ.

d có 1 VTCP $\vec{u}(1;2;3)$ và $\Delta\perp d$ nên

$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow-1+3(c-1)=0\Leftrightarrow c=\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{MN}(-1;0;\frac{1}{3})$.

Chọn $\vec{v}(-3;0;1)$ là 1 VTCP của Δ, phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Gọi $A=\Delta\cap d_1;B=\Delta\cap d_2\Rightarrow A(2+2t;3+3t;-4-5t),B(-1+3t';4-2t';4-t')$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3t'-2t-3;-2t'-3t+1;-t'+5t+8)$.

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;3;-5),\overrightarrow{u_{d_2}}=(3;-2;-1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của Δ,d_1,d_2 ta có:

$\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_{d_1}}\\ \overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_{d_2}}\end{cases}$.Chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(-13;-13;-13)=-13(1;1;1)=-13\vec{u}$.

Vì $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ đều là véc tơ chỉ phương của Δ nên ta có:

$$\overrightarrow{AB}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}3t'-2t-3=k\\-2t'-3t+1=k\\-t'+5t+8=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3t'-2t-k=3\\-2t'-3t-k=-1\\-t'+5t-k=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\t=-1\\k=2\end{cases}\Rightarrow A(0;0;1).$$

$\Rightarrow\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là:

A. $\Delta:\begin{cases}x=5t\\y=-1+t\\z=4+5t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=4+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}\Delta\perp d\\ \Delta\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_d}\\ \overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}\end{cases}$

$\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(5;0;5)$. Do đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta=(1;0;1)$

$$\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$$

Câu 29. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M=d\cap\Delta\Rightarrow M\in d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}\Rightarrow M(2t-1;t;3t-2)$.

$M\in\Delta\subset(P)\Rightarrow M\in(P):x+2y+z-4=0\Rightarrow 2t-1+2t+3t-2-4=0\Rightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;1)$.

Vì $\Delta\perp d$ và $\Delta\subset(P)\Rightarrow\Delta$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n};\vec{u}_d\right]=(5;-1;-3)$.

Vậy phương trình Δ là $\Delta:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 30. **(Sở Hà Nam - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-3z-2=0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. **C.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=\quad -t\end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=\quad -t\\x+y-3z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=\quad -t\\-3+2t-1+t+3t-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\x=-1\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow d\cap(P)=M(-1;0;-1).$$

Vì d' nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d nên d' đi qua M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}=\vec{n}_P\wedge\vec{u}_d=(2;-5;-1)$ hay d' nhận véc tơ $\vec{v}=(-2;5;1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Phương trình của d': $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2: \dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0;-2;-5)$. **B.** $N(1;-1;-4)$. **C.** $P(2;0;1)$. **D.** $Q(3;1;-4)$.

Lời giải

Gọi $A(-1+2t;-2+t;1+t)$ và $B(-2-4t';1+t';-2-t')$ là hai điểm lần lượt thuộc Δ_1 và Δ_2.

$\overrightarrow{AB}=(-1-2t-4t';3-t+t';-3-t-t')$. Δ_1 có VTCP $\vec{u}=(2;1;1)$; Δ_2 có VTCP $\vec{u'}=(-4;1;-1)$.

AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u'}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(-1-2t-4t')+(3-t+t')+(-3-t-t')=0\\ -4(-1-2t-4t')+(3-t+t')-(-3-t-t')=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6t-8t'=2\\ 8t+18t'=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t'=-1\end{cases}$

Suy ra $A(1;-1;2)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;1;-3)$.

Phương trình đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 là: $\begin{cases}x=1+t_1\\ y=-1+t_1\\ z=2-3t_1\end{cases}$.

Chỉ có điểm $Q(3;1;-4)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình.

Dạng 1.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 32. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, $(Q): x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases}x=1+t\\ y=-2\\ z=3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+t\\ y=2\\ z=-3-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2\\ z=3+2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1\\ y=-2\\ z=3-2t\end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)\\ \vec{n}_{(Q)}=(1;-1;1)\end{cases}$ và $\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;0;-2)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng (P) và (Q), nên d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;-1)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1;-2;3)$ nên có phương trình: $\begin{cases}x=1+t\\ y=-2\\ z=3-t\end{cases}$

Câu 33. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}_d=(3;-5;-1)$ là véc tơ chỉ phương của d.

$\vec{n}_{(P)}=(2;0;1)$ là véc tơ pháp tuyến của (P).

$\left[\overrightarrow{u_d},n_{(p)}\right]=(-5;-5;10)$.

Do Δ vuông góc với d và song song với (P) nên $\vec{u}=(1;1;-2)$ là véctơ chỉ phương của Δ.

Khi đó, phương trình của Δ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1};d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Xét các điểm A,B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;9;8)$

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$

Lời giải

Chọn A

$A\in d_1\Rightarrow A(3a;1-a;-1+a)$; $B\in d_2\Rightarrow B(2+b;1-2b;-3+b)$.

$\overrightarrow{AB}=(2+b-3a;-2b+a;b-2-a)$; $\vec{n}_P=(2;-1;2)$.

Do $AB//(P)$ nên $\overrightarrow{AB}.\vec{n}_P=0\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}b$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

$I\left(\dfrac{3a+2+b}{2};\dfrac{2-2b-a}{2};\dfrac{-4+a+b}{2}\right)$ hay $I\left(1+\dfrac{3}{2}b;1-\dfrac{8}{6}b;-2+\dfrac{5}{6}b\right)$

Suy ra tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

Câu 35. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$ và mặt phẳng $(P):3x-2y-3z-7=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A, song song (P) và cắt đường thẳng d?

A. $\begin{cases}x=3+11t\\y=2-54t\\z=-4+47t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=3+54t\\y=2+11t\\z=-4-47t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=3+47t\\y=2+54t\\z=-4+11t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3-11t\\y=2-47t\\z=-4+54t\end{cases}$.

Lời giải

Gọi $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;-2;-3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-4;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(3;-2;2)$.

Giả sử $\Delta\cap d=M$ nên $M(2+3t;-4-2t;1+2t)$ khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AM}=(3t-1;-2t-6;2t+5)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0$ nên $3(3t-1)-2(-2t-6)-3(2t+5)=0\Leftrightarrow t=\frac{6}{7}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{11}{7};-\frac{54}{7};\frac{47}{7}\right)$

Chọn vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ có tọa độ là $(11;-54;47)$ do đó phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=3+11t\\y=2-54t\\z=-4+47t\end{cases}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d:\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):\ 2x+z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

A. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$.

B. $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+4}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d:\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-2}{-1}$ có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(3;-5;-1)$

Mặt phẳng $(P):\ 2x+z-2=0$ có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;0;1)$

Đường thẳng Δ vuông góc với d nên vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_d}$,

Đường thẳng Δ song song với (P) nên $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}$

Ta có $\overrightarrow{u_d}\wedge\vec{n}_{(P)}=(-5;-5;10)$.

Chọn vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-2)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) là $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P):\ x+y+z+1=0$, $(Q):\ x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A, song song với (P) và (Q)?

A. $\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=3-2t\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=-1+t\\y=2\\z=-3-t\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2\\z=3+2t\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=3-t\end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)\\ \vec{n}_{(Q)}=(1;-1;1)\end{cases}$ và $\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;0;-2)=2(1;0;-1)$. Vì đường thẳng d song song với hai mặt phẳng, nên nhận véc tơ $(1;0;-1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\ y=2t\\ z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=-t\\ z=-1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1\\ z=-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\ y=1+2t\\ z=-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{n}_{(Oxy)}=(1;1;0)$, $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy). Khi đó:

$\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_{(Oxy)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Oxy)}\right]=(1;-1;0)$. Vậy $d:\begin{cases}x=2+t\\ y=-t\\ z=-1\end{cases}$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3;-1;5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P):x-y+z-4=0$, $(Q):2x+y+z+4=0$.

A. $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

C. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$. **D.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$; mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=(2;1;1)$.

Nhận thấy $A\notin(P)$ và $A\notin(Q)$.

Gọi đường thẳng cần lập là d và $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của nó.

Ta chọn $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-1;-3)$.

Mặt khác, d qua $A(3;-1;5)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

Câu 40. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z-1=0$, $(\beta):2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn B

mp(α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(1;-2;1)$, mp(β) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(2;1;-1)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=(1;3;5)$.

Phương trình của đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với AB.

A. $\begin{cases}x=\frac{13}{98}-t\\ y=-\frac{40}{49}+2t\\ z=\frac{135}{98}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=\frac{13}{98}-2t\\ y=\frac{40}{49}+t\\ z=\frac{135}{98}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=\frac{13}{98}+2t\\ y=\frac{40}{49}+t\\ z=\frac{135}{98}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-\frac{13}{98}-t\\ y=\frac{40}{49}+2t\\ z=\frac{135}{98}\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases}AI=BI\\ AI=CI\\ I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2\\ (x-1)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-3)^2\\ \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=-3\\ 2x-6z=-8\\ 6x+3y+2z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{13}{98}\\ y=\frac{40}{49}\\ z=\frac{135}{98}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{13}{98};\frac{40}{49};\frac{135}{98}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$.

Mặt phẳng (Oxy) có 1 véc tơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$.

Theo giả thiết đường thẳng Δ cần tìm có 1 véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{k}\right]=(2;1;0)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=\dfrac{13}{98}+2t\\ y=\dfrac{40}{49}+t\\ z=\dfrac{135}{98}\end{cases}$.

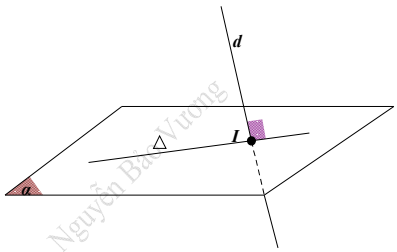
Câu 42. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x-2z-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=3+t\\ z=-1-t\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d.

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. **D.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn B



Giao điểm I của d và (α) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+t\\ y=3+t\\ z=-1-t\\ x-2z-6=0\end{cases}\Rightarrow I(2;4;-2)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;0;-2)$; đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $[\vec{n},\vec{u}]=(2;-1;1)$.

Đường thẳng Δ qua điểm $I(2;4;-2)$ và có một vectơ chỉ phương $[\vec{n},\vec{u}]=(2;-1;1)$ nên có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 43. Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$; $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}$ và $d_3:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$. **B.** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

C. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **D.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+t\\z=2-2t\end{cases}$; từ $d_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_2}=(3;-2;-1)\\A(-1;0;-4)\end{cases}$;

Từ $d_3:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}\Rightarrow\overrightarrow{u_3}=(4;-1;6)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_3

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&-1\\-1&6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&3\\6&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-2\\4&-1\end{vmatrix}\right)=(-13;-22;5)\\A(-1;0;-4)\in(P)\end{cases}$$

$\Rightarrow(P):-13(x+1)-22y+5(z+4)=0\Leftrightarrow(P):13x+22y-5z-7=0$

Gọi B là giao điểm của (P) và d_1. Đường thẳng đi qua B và song song với d_3 chính là đường thẳng cần tìm.

Gọi $B(3+2t;-1+t;2-2t)$. Thay tọa độ B vào (P): $13(3+2t)+22(-1+t)-5(2-2t)-7=0$

$\Rightarrow t=0\Rightarrow B(3;-1;2)$

Vì đường thẳng cần tìm song song với (d_3) nên có các véc tơ chỉ phương là $n.\overrightarrow{u_3}$ $(n\neq 0;n\in\mathbb{Z})$

Như vậy chỉ có đáp án B là hợp lý.

Câu 44. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$, $d_2:\begin{cases}x=-1+3t\\y=-2t\\z=-4-t\end{cases}$, $d_3:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 và cắt đồng thời d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

C. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$. **D.** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ đường thẳng song song với d_3 và cắt d_1 và d_2.

$\vec{u}_\Delta;\vec{u}_3$ lần lượt là véctơ chỉ phương của Δ và d_3.

Ta có $\Delta\cap d_1=A\Rightarrow A(2x+3;x-1;-2x+2)$; $\Delta\cap d_2=B\Rightarrow B(-1+3y;-2y;-4-y)$.

$\overrightarrow{AB}=(3y-2x-4;-2y-x+1;-y+2x-6)$.

Vì $\Delta//d_3\Rightarrow\vec{u}_\Delta=k\vec{u}_3\Rightarrow\dfrac{3y-2x-4}{4}=\dfrac{-2y-x+1}{-1}=\dfrac{-y+2x-6}{6}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-3y+4=-8y-4x+4\\-12y-6x+6=y-2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+5y=0\\-13y+4x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0.$$

Từ đó suy ra: $A(3;-1;2);B(-1;0;-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-4;1;-6)$ là véctơ chỉ phương của Δ.

Phương trình Δ là: $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+y-3=0$ và $(Q): 2x-y+z-3=0$.

A. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-t \\ z=-2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Hai mặt phẳng $(P): x+y-3=0$ và $(Q): 2x-y+z-3=0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\overrightarrow{n_P}=(1;1;0); \overrightarrow{n_Q}=(2;-1;1)$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ chỉ phương: $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;-1;-3)$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x+y-3=0$ và $(Q): 2x-y+z-3=0$ nhận vectơ $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d là:

A. $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-2}$. **B.** $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$. **D.** $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{2} \Rightarrow d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1;2;2)$.

$(P): 2x+y+2z-5=0 \Rightarrow (P)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;1;2)$.

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d

$\Rightarrow \Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(2;2;-3)$, và đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;1;-2) \Rightarrow$ Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-3}$.

Câu 47. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+9=0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P).

A. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;1;-1)$.

d có vectơ chỉ phương là: $\vec{u}=(1;3;2)$ và $B(3;3;0)\in d$.

Δ có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)$ và $A(1;2;-1)\in\Delta$ (trong đó $a^2+b^2+c^2>0$).

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;1;1); d\,||(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=0\Leftrightarrow a+b-c=0\Leftrightarrow c=a+b \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;a+b)$.

Do d cắt $\Delta \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right].\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 2a+b=0\Leftrightarrow b=-2a.$

Chọn $a=-1\Rightarrow b=2\Rightarrow c=1\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;1)\Rightarrow \Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Kết luận: $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Cách 2:

Ta có: (P) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Δ có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)$ và $A(1;2;-1)\in\Delta$ (trong đó $a^2+b^2+c^2>0$).

Do Δ song song với mặt phẳng $(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=0$.

Nhận xét đáp án A: $\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=0$.

Nhận xét đáp án B: $\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=4\neq 0\Rightarrow$ loại đáp án **B.**

đáp án C: $\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=2\neq 0\Rightarrow$ loại đáp án **C.**

đáp án D: $\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=2\neq 0\Rightarrow$ loại đáp án **D.**

Kết luận: Chọn đáp án **A.**

Câu 48. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Trong không gian, cho mặt phẳng (P): $x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\frac{a}{c}$.

A. $\frac{a}{c}=2$. **B.** $\frac{a}{c}=-2$. **C.** $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

(P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Δ đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$.

Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Δ không song song với $Oz \Leftrightarrow a:b:c\neq 0:0:1$.

Δ đồng phẳng với $Oz \Leftrightarrow$ Ba vectơ $\vec{u};\vec{k};\overrightarrow{OA}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \left[\vec{k},\overrightarrow{OA}\right]\vec{u}=0 \Leftrightarrow a+2b=0 \Leftrightarrow a=-2b$.

Do $\Delta // (P) \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=\vec{0} \Leftrightarrow a+b-c=0 \Rightarrow c=-b$. Suy ra $\frac{a}{c}=2$.

Dạng 1.3 Phương trình đường thẳng hình chiếu, đối xứng

Câu 49. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases}x=-3\\y=-5+2t\\z=3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5-t\\z=-3+4t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=-3\\y=-5+t\\z=3+4t\end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(2;-1;4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P):x+3=0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTPT là $\left[\vec{n}_P;\vec{u}_d\right]=(0;4;1)$

$\Rightarrow (Q):4y+z+17=0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$\begin{cases}4y+z+17=0\\x+3=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t\end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Cách 2: Ta có $M\in d \Rightarrow M(1+2t;-5-t;3+4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên $(P):x+3=0$. Suy ra $M'(-3;-5-t;3+4t)$. Suy ra $d':\begin{cases}x=-3\\y=-5-t\\z=3+4t\end{cases}$

So sánh với các phương án, ta chọn D là đáp án đúng.

Câu 50. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{1}$

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$ **D.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giao điểm của d với (P).

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y+z-3=0\\\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y=1\\x+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow M(1;1;1)$

Lấy điểm $N(0;-1;2)\in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P).

Tọa độ của N' là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y+z-3=0\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\ x-y=1\\ x-z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow N'\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

$\overrightarrow{MN'}=\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\vec{u}(1;4;-5)$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=(1;4;-5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương trinh $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z+4}{-2}$.

C. $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. **D.** $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha):2x+y+z-3=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2;1;1)$.

Gọi tọa độ giao điểm của d và (α) là I thì $I(-22;39;8)$.

Lấy $A(-4;3;2)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α).

Suy ra phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=-4+2t\\ y=3+t\\ z=2+t\end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của A lên (α) thì $H=\Delta\cap(\alpha)\Rightarrow H(-2;4;3)$.

A' đối xứng với A qua $(\alpha)\Leftrightarrow H$ là trung điểm $AA'\Rightarrow A'(0;5;4)$.

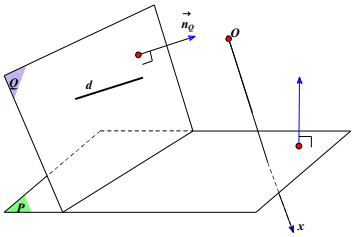
Đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng $(\alpha)\Rightarrow d'$ đi qua điểm I, A'có vecto chỉ phương $\overrightarrow{A'I}=(22;-34;-4)=2(11;-17;-2)$ có phương trình là: $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 52. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu

của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$.

A. 2019. **B.** -2019. **C.** 2018. **D.** -2020.

Lời giải



Chọn $A(1;2;-1)\in d;\vec{u}_d=(2;1;3);\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

Ta thấy $\left[\vec{u}_d;\vec{i}\right].\overrightarrow{OA}=7\neq 0\Rightarrow d$ và Ox chéo nhau.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Ox.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\vec{u}_d;\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là đường giao tuyến giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

d' có một vectơ chỉ phương là $\left[\vec{n}_Q;\vec{n}_P\right]=(-4;1;3)\Rightarrow\vec{u}=673\left[\vec{n}_Q;\vec{n}_P\right]=(-2692;673;2019)$ cũng là một vectơ chỉ phương.

Vậy $a+b=-2019$.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là

Nguyễn Bảo Vương

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-1}{5}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

C. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$. **D.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha):x+y-z+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;1;-1)$.

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;3;5)$.

Vì $\vec{n}.\vec{u}=1.2+1.3+(-1).5=0$ nên $d//(\alpha)$.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(\alpha)\Rightarrow d'//d$.

Lấy $A(1;-4;0)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α).

Suy ra phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+t\\y=-4+t\\z=-t\end{cases}$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên (α) thì $A'=\Delta\cap(\alpha)\Rightarrow A'(0;-5;1)$.

Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua $A'(0;-5;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;3;5)$ có phương trình là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

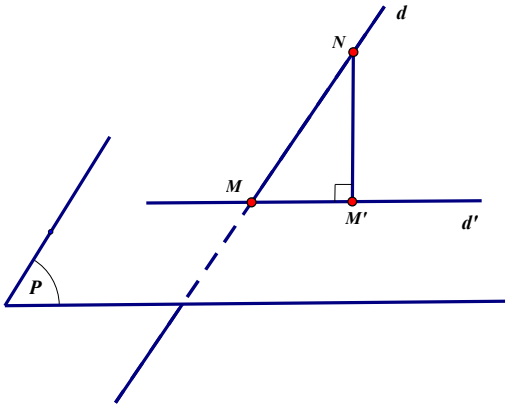
Câu 54. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

A. $d': \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $d': \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d': \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$. **D.** $d': \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



+) Phương trình tham số của $d: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=4-2t \\ z=-1+t \end{cases}, t\in R$. Gọi $M=(-2+2t;4-2t;-1+t)$ là giao điểm của d và $(P) \Rightarrow (-2+2t)+(4-2t)-(-1+t)-1=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M=(2;0;1)$.

+) Mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$. Điểm $N=(0;2;0)\in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $N(0;2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \Delta$ nhận vector $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$ làm vector chỉ phương. Suy ra phương trình của Δ là:

$(\Delta): \dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{-1} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=c \\ y=2+c \\ z=-c \end{cases}, c\in R$. Gọi $M'=(c;2+c;-c)$ là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P) \Rightarrow c+(2+c)-(-c)-1=0 \Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow M'\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

+) $\overrightarrow{MM'}=\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$, đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) nên d' chính là đường thẳng MM', suy ra d' đi qua $M(2;0;1)$ và nhận vector $\vec{u}=-3\overrightarrow{MM'}=(7;-5;2)$ làm vector chỉ phương nên phương trình của d' là:

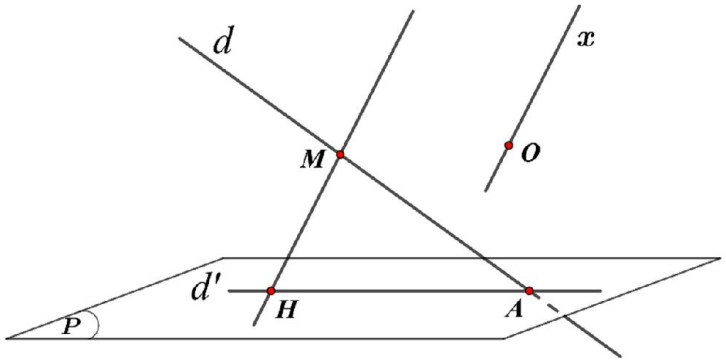
$d': \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.

Câu 55. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d

theo phương Ox lên (P); d' nhận $\vec{u}(a;b;2019)$ làm một véctơ chỉ phương. Xác định tổng $a+b$.

A. 2019 **B.** –2019 **C.** 2018 **D.** –2020

Lời giải



• Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$.

Đường thẳng d có véctơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(2;1;3)$, đường thẳng chứa trục Ox có có véctơ chỉ phương $\vec{i}=(1;0;0)$.

• Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và song song (hoặc chứa) trục Ox.

Khi đó (Q) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

• Đường thẳng d' chính là giao tuyến của (P) và (Q).

$\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u}_1=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(-4;1;3)$.

Suy ra: $\vec{u}(-2692;673;2019)$ cũng là chỉ phương của d'.

Ta có: $a+b=-2692+673=-2019$.

Câu 56. **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d'. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d':

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $P(1;3;-1)$. **C.** $N(1;-1;3)$. **D.** $Q(2;7;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A=d\cap(P)$. Vì $A\in d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}\Rightarrow A(t;-1+2t;2-t)$.

Mặt khác $A\in(P)\Rightarrow t-1+2t+2-t-3=0\Leftrightarrow t=1$. Vậy $A(1;1;1)$.

Lấy $B(0;-1;2)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc (P).

Thì $\Delta:\begin{cases}x=t'\\y=-1+t'\\z=2+t'\end{cases}$. Gọi C là hình chiếu của B lên (P).

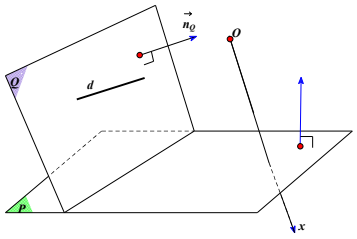
Suy ra $C\in\Delta\Rightarrow C(t';-1+t';2+t')$.

Mặt khác $C\in(P)\Rightarrow t'-1+t'+2+t'-3=0\Leftrightarrow t'=\frac{2}{3}$. Vậy $C\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Lúc này d' qua $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$. Hay d' nhận $\vec{u}=(1;4;-5)$ làm một vectơ chỉ phương.

Suy ra $d':\begin{cases}x=1+s\\y=1+4s\\z=1-5s\end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng d' là $M(2;5;-4)$.

Câu 57. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P), d' nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$.



A. 2019. **B.** –2019. **C.** 2018. **D.** –2020.

Lời giải

Chọn B

Chọn $A(1;2;-1)\in d;\vec{u}_d=(2;1;3);\left[\vec{u},\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

Ta thấy $\left[\vec{u}_d;\vec{i}\right].\overrightarrow{OA}=7\neq 0\Rightarrow d$ và Ox chéo nhau.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Ox.

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q=\left[\vec{u}_d;\vec{i}\right]=(0;3;-1)$.

Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (P) là đường giao tuyến giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

d' có một vectơ chỉ phương là $\left[\vec{n}_Q;\vec{n}_P\right]=(-4;1;3)\Rightarrow\vec{u}=673\left[\vec{n}_Q;\vec{n}_P\right]=(-2692;673;2019)$ cũng là một vectơ chỉ phương.

Vậy $a+b=-2019$..

Câu 58. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+2z-1=0$. Gọi d' là hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P), véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' là

A. $\overrightarrow{u_3}=(5;-6;-13)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(5;-4;-3)$.

C. $\overrightarrow{u_4}=(5;16;13)$. **D.** $\overrightarrow{u_1}=(5;16;-13)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;1;2)$.

Gọi $\overrightarrow{u_{d'}}$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d'.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó (Q) đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có 1 véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(5;-4;-3)$.

d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mặt phẳng $(P)\Leftrightarrow d'=(P)\cap(Q)$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{u_{d'}}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}\\ \overrightarrow{u_{d'}}\perp\overrightarrow{n_Q}\end{cases}$. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(5;16;-13)$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).

(Q) đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-2;-1)$.

$\Rightarrow(Q)\colon 3x-2y-z=0$.

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P), khi đó tập hợp các điểm thuộc Δ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x-2y-z=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}\ (I)$.

Trong hệ (I) cho $z=1$, ta được $x=1$, $y=1$. Vậy điểm $A(1;1;1)$ thuộc Δ.

Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;4;-5)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Cách 2: Gọi $A=d\cap(P)$.

$A\in d\Rightarrow A(t;-1+2t;2-t)$.

$A\in(P)\Rightarrow t+(-1+2t)+(2-t)-3=0\Rightarrow 2t-2=0\Rightarrow t=1\Rightarrow A(1;1;1)$.

Lấy điểm $M(0;-1;2)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P). Khi đó Δ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=t\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$.

Gọi $B=\Delta\cap(P)$.

$B\in\Delta\Rightarrow B(t;-1+t;2+t)$.

$B\in(P)\Rightarrow t+(-1+t)+(2+t)-3=0\Rightarrow 3t-2=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow B\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right).$

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=-3.\overrightarrow{AB}=-3.\left(\frac{-1}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)=(1;4;-5)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

Dạng 1.4 Xác định một số phương trình đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến, giao tuyến…)

Hai đường thẳng d_1,d_2 cắt nhau tại điểm $A(x_0;y_0;z_0)$ và có vécto chỉ phương |ần lượt là $\overrightarrow{u_1}(a_1;b_1;c_1),\overrightarrow{u_2}(a_2;b_2;c_2)$

Đường thẳng phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng này có vécto chỉ phương được xác định theo công thức

$$\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\overrightarrow{u_1}\pm\frac{1}{|u_2|}\cdot\overrightarrow{u_2}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}(a_1;b_1;c_1)\pm\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}(a_2;b_2;c_2)$$

Chi tiết có hai phân giác:

Nếu $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}>0\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\overrightarrow{u_1}+\frac{1}{|u_2|}\cdot\overrightarrow{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng và $\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\overrightarrow{u_1}-\frac{1}{|u_2|}\cdot\overrightarrow{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng.

Nếu $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}>0\Rightarrow\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\overrightarrow{u_1}+\frac{1}{|u_2|}\cdot\overrightarrow{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng và $\vec{u}=\frac{1}{|u_1|}\cdot\overrightarrow{u_1}-\frac{1}{|u_2|}\cdot\overrightarrow{u_2}$ là vécto chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng.

Câu 60. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=-3+5t\\z=5+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d, nên $A(1;-3;5)$ là giao điểm của d và Δ.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}(-3;0;-4)$. Ta xét:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{|\vec{u}|}.\vec{u}=\frac{1}{3}(1;2;-2)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right);$$

$$\overrightarrow{v_1}=\frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v}=\frac{1}{5}(-3;0;-4)=\left(-\frac{3}{5};0;-\frac{4}{5}\right).$$

Nhận thấy $\vec{u_1}.\vec{v_1}>0$, nên góc tạo bởi hai vectơ $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.

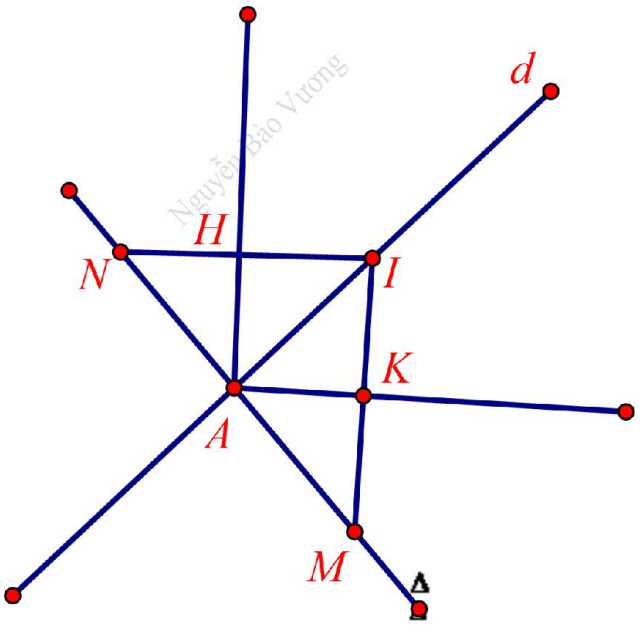
Ta có $\vec{w}=\vec{u_1}+\vec{v_1}=\left(-\frac{4}{15};\frac{10}{15};-\frac{22}{15}\right)=-\frac{15}{2}(2;-5;11)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{w_1}=(2;-5;11)$. Do đó có phương trình: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$.

Câu 61. **(Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+7t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=-6-5t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=6-5t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+4t\\z=1-5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=1+t\\z=1+5t\end{cases}$

Lời giải

Chọn B



Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1+t'\\y=1-2t'\\z=1+2t'\end{cases}$.

Ta có $d\cap\Delta=A(1;1;1)$. Lấy $I(4;5;1)\in d\Rightarrow\overrightarrow{AI}=(3;4;0)\Rightarrow AI=5$.

Gọi $M(1+t';1-2t';1+2t')\in\Delta$ sao cho $AM=AI$.

Khi đó $3|t'|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t'=\frac{5}{3}\\t'=-\frac{5}{3}\end{array}\right.$.

Với $t'=\frac{5}{3}\Rightarrow M\left(\frac{8}{3};-\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{3};\frac{-10}{3};\frac{10}{3}\right)\Rightarrow AM=\frac{15}{3}$.

Khi đó $\cos\widehat{IAM}=-\frac{1}{3}\Rightarrow \widehat{IAM}>90^0\Rightarrow$ trong trường hợp này $(d;\Delta)>90^0$ (loại)

Với $t'=-\frac{5}{3}\Rightarrow N\left(-\frac{2}{3};\frac{13}{3};\frac{-7}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\left(-\frac{5}{3};\frac{10}{3};-\frac{10}{3}\right)\Rightarrow AN=\frac{15}{3}$.

Khi đó $\cos\widehat{IAN}=\frac{1}{3}\Rightarrow \widehat{IAM}<90^0\Rightarrow$ trong trường hợp này $(d;\Delta)<90^0$ (thỏa mãn)

Gọi H là trung điểm của $NI\Rightarrow H\left(\frac{5}{3};\frac{14}{3};\frac{-2}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(2;11;-5)$.

Khi đó đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ đi qua $H\left(\frac{5}{3};\frac{14}{3};\frac{-2}{3}\right)$ hoặc $A(1;1;1)$

và nhận làm $\vec{u}=(2;11;-5)$ VTCP $\Rightarrow$ phương trình phân giác là $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-10+11t\\z=6-5t\end{cases}$.

Câu 62. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;1;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=1+27t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=11-10t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=-11-10t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+17t\\z=1+10t\end{cases}$

Lời giải

Chọn B

$A=d\cap\Delta$

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=1+1t\\z=1+2t\end{cases}$.

Chọn điểm $B(-1;2;3)\in\Delta, AB=3$.

Gọi $C\in d$ thỏa mãn $AC=AB\Rightarrow C\left(\frac{14}{5};\frac{17}{5};1\right)$ hoặc $C\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5};1\right)$

Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5};1\right)$ thỏa mãn BAC là góc nhọn.

Trung điểm của BC là $I\left(-\frac{9}{10};\frac{3}{10};2\right)$.Đường phân giác cần tìm là AI có vectơ chỉ phương là

$\vec{u}=(19;7;-10)$ có phương trình là $\begin{cases}x=1+19t\\y=1+7t\\z=1-10t\end{cases}$. Tọa độ điểm của đáp án B thuộc AI.

Câu 63. **(Mã 103 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-7;-1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1+5t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+6t\\y=2+11t\\z=3+8t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t\\z=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t\\z=-2+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và có VTCP $\vec{a}=(1;1;0)$.

Ta có $\vec{a}.\vec{u}=1.0+1.(-7)+0.(-1)=-7<0\Rightarrow(\vec{a},\vec{u})>90^{\circ}$.

Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có VTCP: $\vec{b}=-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(5;12;1)\,//\,(5;12;1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t\\z=2+t\end{cases}$.

Câu 64. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $AM:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $AM:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{1}$

C. $AM:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{-1}$ **D.** $AM:\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+1}{3}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y;z)$ là trung điểm BC. Khi đó $M(1;-1;3)$

Ta có $\overrightarrow{AM}=vtcp\vec{u}=(2;-4;1)$

PTĐT $AM:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$

Câu 65. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=t\\z=1\end{cases}$.

Lời giải

Gọi $B(0;b;0)$ là giao điểm của d với trục Oy. (Điều kiện $b<0$)

Ta có $OA=2$ và tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=1\Rightarrow OB=1$

Suy ra $B(0;-1;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;0)$ là một vec tơ chỉ phương của d.

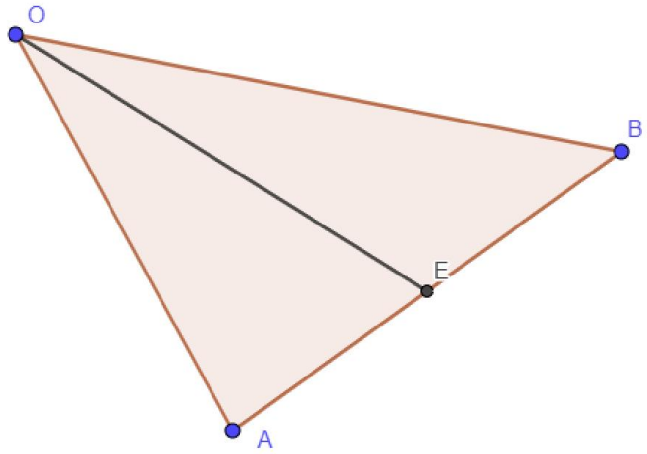
Và đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;0)$ nên $\begin{cases}x=2-2t\\y=-t\\z=0\end{cases}$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1), B(\frac{-8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3})$. Đường phân giác trong của tam giác OAB có phương trình là

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=4t\\y=t\\z=-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=14t\\y=2t\\z=-5t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2t\\y=14t\\z=13t\end{cases}$

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\overrightarrow{EA}=-\frac{OA}{OB}.\overrightarrow{EB}=-\frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{16}{9}+\frac{64}{9}}}.\overrightarrow{EB}=-\frac{3}{4}.\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{BE}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-x=\frac{3}{4}\left(x+\frac{8}{3}\right)\\2-y=\frac{3}{4}\left(y-\frac{4}{3}\right)\\1-z=\frac{3}{4}\left(z-\frac{8}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{12}{7}\\z=\frac{12}{7}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OE}=\left(0;\frac{12}{7};\frac{12}{7}\right)\Rightarrow\vec{u}=(0;1;1)$$

$$\Delta:\begin{cases}qua\ O\\VTCP\ \vec{u}\end{cases}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$$

Câu 67. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}; d_2: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1;d_2$ lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

$B\in d_1 \Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. PT tham số của $d_2: \begin{cases}x=5+2s\\y=11+4s\\z=5+2s\end{cases}$.

$C\in d_2 \Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(1-t;-1-t;2t+1); \overrightarrow{AC}=(2s;4s+14;2s)$.

Do A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t-1=2ks\\-t-1=4ks+14k\\2t+1=2ks\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-2\\s=-3\\k=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 68. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3), A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y-2z+1=0$, $(Q): x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại B,C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải

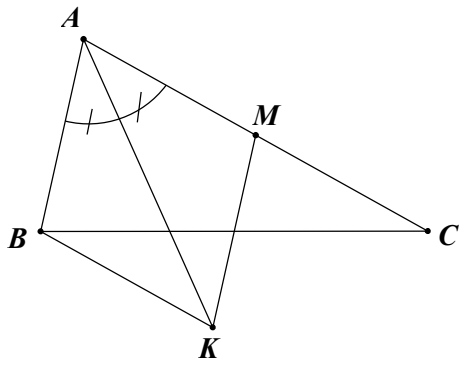
Điểm B thuộc mặt (P) nên $B(2c-b-1;b;c)$ vì $M(1;2;3)$ là trung điểm BC nên $C(3-2c+b;4-b;6-c)$. Do C thuộc mặt (Q) nên $3c-c-7=0\Leftrightarrow c=3b-7$. Khi đó $B(5b-15;b;3b-7)$, $C(-5b+17;4-b;13-3b)$. $\overrightarrow{BC}(-10b+32;-2b+4;-6b+20)$. ABC cân tại A nên $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow 20b-60=0\Leftrightarrow b=3\Rightarrow B(0;3;2)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;3)$ và $B(0;3;2)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 69. ***(*Chuyên Bắc Giang 2019)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0), B(3;0;2), C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc A.

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=t\end{cases}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)$.

Gọi M là trung điểm AC, ta có $M(3;2;-2)$, $\overrightarrow{AM}=(1;1;-2)$.

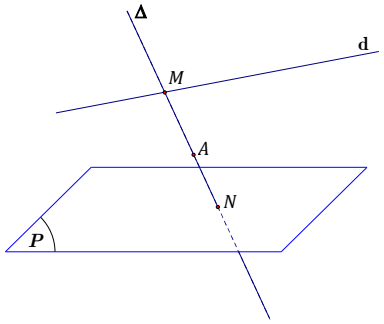
Do đó ΔABM cân tại A. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$. Khi đó AK là tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Vậy phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Câu 70. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Lời giải



Ta có $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Do đó $M\in d\Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$.

Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm $MN\Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$.

Mặt khác $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2;3;2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Câu 71. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;0;1)$, $B(1;0;-3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua

gốc tọa độ O. Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=-1\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1\\y=t\\z=-1\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=1\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=t\\y=1\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;0;-4)=-4(0;0;1)$. Hay AB có véc-tơ chỉ phương $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ có một véc-tơ pháp tuyến: $\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right]=(0;4;0)=4(0;1;0)$, hay $\vec{j}=(0;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\subset(ABCD)\end{cases}$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\perp\vec{k}\\\overrightarrow{AD}\perp\vec{j}\end{cases}$. Đường thẳng AD có véc-tơ chỉ phương là $\left[\vec{j};\vec{k}\right]=(1;0;0)$.

Phương trình đường thẳng AD là: $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=1\end{cases}$.

Do đó $D(1+t;0;1)$.

Mặt khác $AD=AB\Leftrightarrow\sqrt{t^2+0^2+(1-1)^2}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-4\end{array}\right.$.

Vì điểm D có hoành độ âm nên $D(-3;0;1)$.

Vì tâm I của hình vuông $ABCD$ là trung điểm BD, nên $I=(-1;0;-1)$.

Đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$, nên phương trình đường thẳng d là: $d:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=-1\end{cases}$.

Câu 72. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$ cắt nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (P). Lập phương trình đường phân giác d của góc nhọn tạo bởi Δ_1, Δ_2 và nằm trong mặt phẳng (P).

A. $d:\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-1+t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **B.** $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2\\z=-1+2t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2-2t\\z=-1-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. **D.** $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=-1\end{cases},(t\in\mathbb{R})$

Lời giải

Nhận thấy $A(-1;2;-1)$ là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

Δ_1 có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(1;2;3)$

Δ_2 có VTCP là $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-3)$.

$\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-12;6;0)=-6(2;-1;0)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $2x-y+4=0$.

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP của d cần tìm.

Ta có d nằm trong mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng Δ_1, $\Delta_2 \Rightarrow \vec{u} \perp \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]$

$\Rightarrow 2a-b=0 \Rightarrow b=2a$

Lại có d là phân giác của Δ_1, Δ_2

$$\Rightarrow \cos(d,\Delta_1)=\cos(d,\Delta_2) \Rightarrow \frac{|a+2b+3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{14}}=\frac{|a+2b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+2b+3c=a+2b-3c \\ a+2b+3c=-a-2b+3c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=0 & (1) \\ a+2b=0 & (2) \end{array}\right.$$

Xét (1), $c=0$, $b=2a \Rightarrow \vec{u}=(a,2a,0)=(1;2;0). \Rightarrow d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=-1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$$\cos(\Delta_1;d)=\frac{|1.1+2.2|}{\sqrt{14}.\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{70}}{14} \Rightarrow (\Delta_1;d)\approx 53°18'.$$

Xét (2): $\begin{cases} a+2b=0 \\ b=2a \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow \vec{u}=(0;0;c)=c(0;0;1) \Rightarrow d: \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

$$\cos(\Delta_1,d)=\frac{|-3|}{\sqrt{14}.1}=\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow (\Delta_1,d)\approx 36°42'.$$

Do d là đường phân giác của góc nhọn nên $(\Delta_1,d)<45°$.

Vậy đường thẳng d cần tìm là $d: \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Nhận xét: Có thể làm đơn giản hơn bằng cách: ta thấy $\overrightarrow{u_1}=(1;2;3)$; $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-3)$ là hai véc tơ có độ dài bằng nhau và $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}<0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)>90°$. Vậy $\left(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\right)$ chính là véc tơ chỉ phương của d.

Câu 73. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

A. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{5}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{5}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{2}$. **D.** $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-5}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;3;0)$; $\overrightarrow{BC}=(-4;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;1;2)$

$\Rightarrow AB^2=10$, $BC^2=24$, $AC^2=14 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0;2;0)$.

Đường thẳng d cần tìm đi qua $I(0;2;0)$ và nhận vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-1;5)$ làm véc tơ chỉ phương. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{5}$.

Câu 74. **(SGD Bắc Giang - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

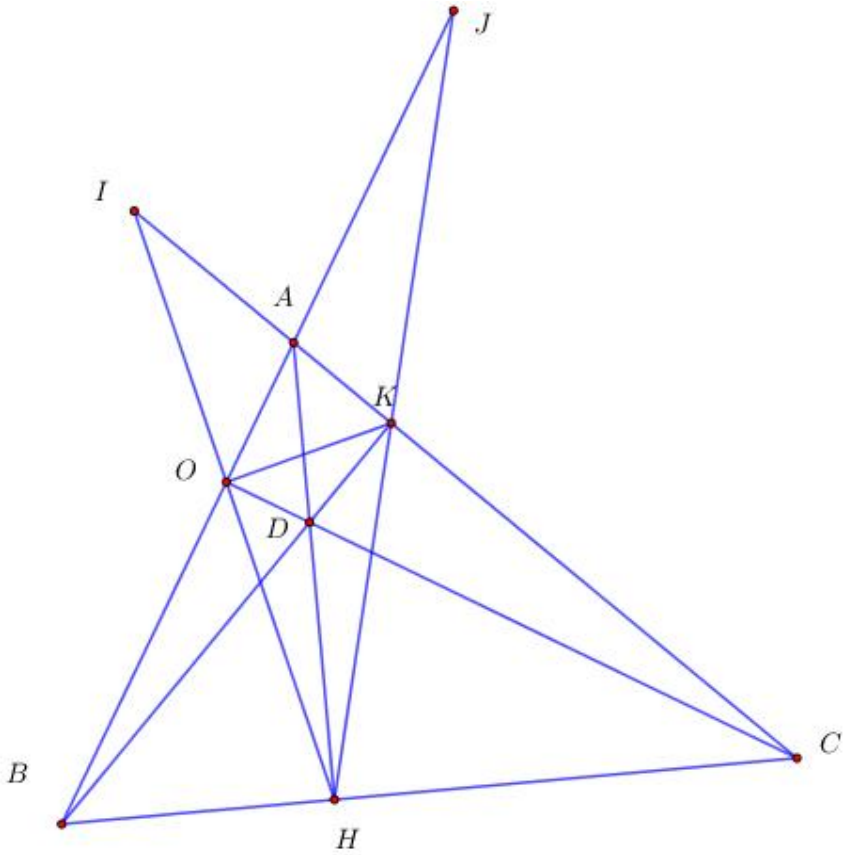
A. $d:\frac{x+4}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

B. $d:\frac{x-\frac{8}{3}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C. $d:\frac{x+\frac{4}{9}}{1}=\frac{y-\frac{17}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{19}{9}}{2}$.

D. $d:\frac{x}{1}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-6}{2}$.

Lời giải



Ta có tứ giác $BOKC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, O cùng nhìn BC dưới một góc vuông) suy ra $\widehat{OKB}=\widehat{OCB}$ (1)

Ta có tứ giác $KDHC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (vì có hai góc vuông K, H cùng nhìn DC dưới một góc vuông) suy ra $\widehat{DKH}=\widehat{OCB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DKH}=\widehat{OKB}$ do đó BK là đường phân giác trong của góc $\widehat{OKH}$ và AC là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{OKH}$.

Tương tự ta chứng minh được OC là đường phân giác trong của góc $\widehat{KOH}$ và AB là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{KOH}$.

Ta có $OK=4;\ OH=3;\ KH=5$.

Gọi I, J lần lượt là chân đường phân giác ngoài của góc $\widehat{OKH}$ và $\widehat{KOH}$.

Ta có $I=AC\cap HO$ ta có $\dfrac{IO}{IH}=\dfrac{KO}{KH}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\overrightarrow{IO}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IH}\Rightarrow I(-8;-8;-4)$.

Ta có $J=AB\cap KH$ ta có $\dfrac{JK}{JH}=\dfrac{OK}{OH}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{JK}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{JH}\Rightarrow J(16;4;-4)$.

Đường thẳng IK qua I nhận $\overrightarrow{IK}=\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{28}{3};\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{4}{3}(4;7;5)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình $(IK):\begin{cases}x=-8+4t\\y=-8+7t\\z=-4+5t\end{cases}$

Đường thẳng OJ qua O nhận $\overrightarrow{OJ}=(16;4;-4)=4(4;1;-1)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình $(OJ):\begin{cases}x=4t'\\y=t'\\z=-t'\end{cases}$

Khi đó $A=IK\cap OJ$, giải hệ ta tìm được $A(-4;-1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(4;7;5)$ và $\overrightarrow{IJ}=(24;12;0)$, ta tính $\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}\right]=(-60;120;-120)=-60(1;-2;2)$.

Khi đó đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$ nên có phương trình $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Nhận xét:

□ Mấu chốt của bài toán trên là chứng minh trực tâm D của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK. Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: "Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, với $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$". Sau khi tìm được D, ta tìm được A với chú ý rằng $A\in DH$ và $OA\perp DA$.

□ Ta cũng có thể tìm ngay tọa độ điểm A bằng cách chứng minh A là tâm đường tròn bàng tiếp góc H của tam giác OHK. Khi đó, ta tìm tọa độ điểm D dựa vào tính chất quen thuộc sau: "Cho tam giác ABC với J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, ta có $-a.\overrightarrow{JA}+b.\overrightarrow{JB}+c.\overrightarrow{JC}=\vec{0}$, với $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$".

Câu 75. **(Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}_2=(1;-1;0)$. **C.** $\vec{u}_4=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}_1=(1;2;1)$.

Lời giải

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc C là $CD:\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\end{cases}$.

Gọi $C=(2+2t;4-t;2-t)$, suy ra tọa độ trung điểm M của AC là $M=\left(2+t;\frac{7-t}{2};\frac{5-t}{2}\right)$. Vì $M\in BM$ nên:

$$\frac{(2+t)-3}{-1}=\frac{\left(\frac{7-t}{2}\right)-3}{2}=\frac{\left(\frac{5-t}{2}\right)-2}{-1}\Leftrightarrow\frac{t-1}{-1}=\frac{1-t}{4}=\frac{1-t}{-2}\Rightarrow t=1.$$

Do đó $C=(4;3;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc CD là

$2.(x-2)-1.(y-3)-1.(z-3)=0$ hay $2x-y-z+2=0$.

Tọa độ giao điểm H của (P) và CD là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2x-y-z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\\z=2\\t=0\end{cases}\Rightarrow H(2;4;2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác CD, suy ra H là trung điểm AA', bởi vậy:

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=2.2-2=2\\y_{A'}=2y_H-y_A=2.4-3=5\\x_{A'}=2z_H-z_A=2.2-3=1\end{cases}\Rightarrow A'(2;5;1).$$

Do $A'\in BC$ nên đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'}=(-2;2;0)=2(-1;1;0)$, nên phương trình đường thẳng BC là $\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\end{cases}$.

Vì $B=BM\cap BC$ nên tọa độ B là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ

$$\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\\\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\\z=1\\t=2\end{cases}\Rightarrow B(2;5;1)\equiv A'.$$

Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)=2(0;1;-1)$; hay $\vec{u}_4=(0;1;-1)$ là một véc-tơ chỉ của phương đường thẳng AB.

Câu 76. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$.

Lời giải

Chọn A

+ d không vuông góc với (P).

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}$.

Tọa độ giao điểm I của d và mặt phẳng (P) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1;1)$.

+ Lấy điểm $M(0;-1;2)\in d$.

Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$.

$\Delta\cap(P)=H\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

M' đối xứng với M qua $(P)\Leftrightarrow H$ là trung điểm của $MM'\Rightarrow M'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$.

+ Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P)

$\Rightarrow d'$ đi qua $I(1;1;1)$ và $M'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{IM'}=\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{3}(1;-2;7)$,

phương trình d' là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-3\\z=5+4t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-3;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;-2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=6+11t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+7t\\y=-3+5t\\z=5+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-3\\z=5+7t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có điểm $A(1;-3;5)$ thuộc đường thẳng d, nên $A(1;-3;5)$ là giao điểm của d và Δ.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{v}(-3;0;-4)$. Ta xét:

$\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{|\vec{u}|}.\vec{u}=\frac{1}{3}(1;2;-2)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$;

$\overrightarrow{v_1}=\frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v}=\frac{1}{5}(-3;0;-4)=\left(-\frac{3}{5};0;-\frac{4}{5}\right)$.

Nhận thấy $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v_1}>0$, nên góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$ là góc nhọn tạo bởi d và Δ.

Ta có $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{v_1}=\left(-\frac{4}{15};\frac{10}{15};-\frac{22}{15}\right)=-\frac{15}{2}(2;-5;11)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ hay đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{w_1}=(2;-5;11)$. Do đó có phương trình: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-5t\\z=-6+11t\end{cases}$.

Câu 78. (THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn MN.

A. $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{-1}$. **D.** $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết: $N\in d\Rightarrow N(2t-2;t+1;1-t)$.

Mà A là trung điểm $MN\Rightarrow M(4-2t;5-t;3+t)$.

Mặt khác, $M\in(P)\Leftrightarrow 2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2$.

$\Rightarrow N(-6;-1;3)\Rightarrow \overrightarrow{NA}=(7;4;-1)$.

Đường thẳng Δ đi qua $N(-6;-1;3)$ và có một VTCP là $\vec{u}=\overrightarrow{NA}=(7;4;-1)$ nên có phương trình chính tắc là: $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

Câu 79. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x+3y-z+1=0$, $(\beta):2x-y+z-7=0$.

A. $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{-7}$ **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{-7}$

C. $\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-10}{7}$ **D.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{7}$

Lời giải

Chọn D

Tọa độ các điểm thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng thỏa mãn hệ phương trình:

$\begin{cases}x+3y-z+1=0\\2x-y+z-7=0\end{cases}$.

Với $y=0\Rightarrow\begin{cases}x-z=-1\\2x+z=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\z=3\end{cases}\Rightarrow A(2;0;3)\in d$

Với $y=3\Rightarrow\begin{cases}x-z=-10\\2x+z=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=10\end{cases}\Rightarrow B(0;3;10)\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(2;0;3)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;3;7)$ làm vecto chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{7}$.

Câu 80. Đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$ **B.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$

Lời giải

Chọn C

$(P): x+z-5=0$ có 1 vtpt $\overrightarrow{n_1}=(1;0;1)$

$(Q): x-2y-z+3=0$ có 1 vtpt $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;-1)$

Gọi Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng thì Δ có 1 vtcp $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;2;-2)$.

Câu 81. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d):\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

A. $(0;1;3)$. **B.** $(2;3;3)$. **C.** $(5;6;8)$ **D.** $(1;-2;0)$

Lời giải

$\overrightarrow{u_d}(1;1;2)$ là một VTCP của đường thẳng d

$\overrightarrow{n_\beta}(1;1;-2)$ là một VTPT của (β)

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-4;4;0)$

$A(2;3;0)\in d \Rightarrow A\in(\alpha)$

Phương trình mặt phẳng

$(\alpha): -4(x-2)+4(y-3)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow -4x+4y-4=0 \Leftrightarrow x-y+1=0$.

Giả sử $M(x;y;z)\in(\alpha)\cap(\beta)$. Khi đó tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$

Thay các đáp án vào hệ trên ta thấy $M(2;3;3)$ thỏa mãn. Chọn đáp án B

Câu 82. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

A. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

Lời giải

$(P): x+z-5=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(1;0;1)$.

$(Q): x-2y-z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;-2;-1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;2;-2)$.

Gọi $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ, thì $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_1}$ và $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_2}$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]$. Chọn $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Lấy $M(2;1;3)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q).

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;3)$ có một véctơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Vậy phương trình Δ là: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 83. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -3+t \\ z = 4-2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d', đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$ **B.** $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.

C. $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$ **D.** $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

Chọn D

Ta thấy hai đường thẳng d và d' có cùng véctơ chỉ phương hay $d // d'$

Vậy đường thẳng cần tìm có véctơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;1;-2)$ và đi qua trung điểm $I(3;-2;2)$ của AB với $A(2;-3;4) \in d$ và $B(4;-1;0) \in d'$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$.

Câu 84. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = 4-2t \end{cases}$ và $d': \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+2}{2}$.

C. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{2}$. **D.** $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Lời giải

d đi qua $A(2;1;4)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1;2;-2)$.

d' đi qua $B(4;-1;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$ và $\dfrac{2-4}{1} \neq \dfrac{1+1}{-2} \neq \dfrac{4}{2}$ nên $d // d'$.

Đường thẳng Δ thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta//d//d'\\ d(\Delta,d)=d(\Delta,d')\end{cases}$ hay Δ qua trung điểm $I(3;0;2)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;2)$. Khi đó phương trình của Δ: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

Câu 85. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $x+y-2z+8=0$, điểm $A(2;-1;3)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN là:

A. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-5}{2}$ **B.** $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$

C. $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{2}$ **D.** $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$

Lời giải

Đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=t\\ z=2+t\end{cases}$

Điểm M thuộc đường thẳng d nên $M(-1+2t;t;2+t)$.

Điểm A là trung điểm của MN nên:

$A(2;-1;3)$

$\begin{cases}x_N=2x_A-x_M=5-2t\\ y_N=2y_A-y_M=-2-t\Rightarrow N(5-2t;-2-t;4-t)\\ z_N=2z_A-z_M=4-t\end{cases}$

Mặt khác điểm $N\in(P)$ nên: $5-2t-2-t-8+2t+8=0\Leftrightarrow t=3$

Suy ra: $M(5;3;5)$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}(3;4;2)$ và đi qua điểm $M(5;3;5)$ nên có phương trình: $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$

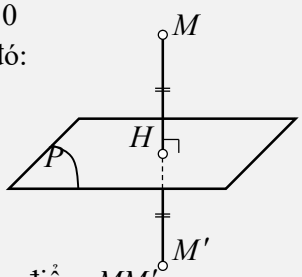
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 2. Bài toán tìm điểm

① **Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$**

Viết phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P), khi đó:

$$H = d \cap (P) \text{ thỏa } \begin{cases} x = x_\circ + a_1 t \\ y = y_\circ + a_2 t \\ z = z_\circ + a_3 t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$

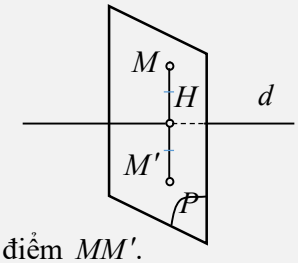


✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

② **Tìm hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d.**

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d, khi đó:

$$H = d \cap (P) \text{ thỏa } \begin{cases} x = x_\circ + a_1 t \\ y = y_\circ + a_2 t \\ z = z_\circ + a_3 t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x=? \\ y=? \Rightarrow H. \\ z=? \end{cases}$$



✓ **Lưu ý**: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm MM'.

Câu 1. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;\ b;\ c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M\left(\dfrac{1}{6};\ \dfrac{7}{6};\ -\dfrac{2}{3}\right)$ **B.** $M\left(-\dfrac{1}{6};\ -\dfrac{7}{6};\ -\dfrac{2}{3}\right)$

C. $M(-1;\ 0;\ -3)$ **D.** $M(2;\ 3;\ 3)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M \in d$ nên $\exists t \in \mathbb{R}: M(1+t;\ 2+t;\ 1+2t)$. Đk: $1+2t<0 \Rightarrow t < \dfrac{-1}{2}\ (*)$

$MA^2 + MB^2 = 28$

$\Leftrightarrow (-t)^2 + (-3-t)^2 + (1-2t)^2 + (-2-t)^2 + (-t)^2 + (2-2t)^2 = 28$

$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 (L) \\ t = -\dfrac{5}{6} (T/m) \end{array}\right.$

Với $t = -\dfrac{5}{6}$, ta có $M\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{7}{6}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1;0;1)$ lên đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ là

A. $(2;4;6)$. **B.** $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;0)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có vtcp $\vec{u}=(1;2;3)$ và có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Gọi $N(t;2t;3t)\in\Delta$ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ, khi đó:

$\overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\Leftrightarrow(t-1)+(2t-0).2+(3t-1).3=0\Leftrightarrow 14t-4=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{7}\Rightarrow N\left(\frac{2}{7};\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-2t \end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của M lên Δ. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của M lên Δ nên tọa độ của H có dạng $H(1-t;-2+3t;-2t)$ và $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 14t-11=0\Leftrightarrow t=\frac{11}{14}\Rightarrow H(\frac{3}{14};\frac{5}{14};\frac{-22}{14})\Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 4. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian Oxyz, tìm tọa độ hình chiếu H của $A(1;1;1)$ lên đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3})$. **B.** $H(1;1;1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(1;1;0)$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$. Do $H\in d\Rightarrow H(1+t;1+t;t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t;t;t-1)$. Do H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d nên suy ra

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t+t+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow H(\frac{4}{3};\frac{4}{3};1)$.

Câu 5. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d):\begin{cases} x=6-4t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d).

A. $A'(2;3;1)$. **B.** $A'(-2;3;1)$. **C.** $A'(2;-3;1)$. **D.** $A'(2;-3;-1)$.

Lời giải

Ta có $A'\in(d)$ nên gọi $A'(6-4t;-2-t;-1+2t)$; $\overrightarrow{AA'}=(5-4t;-3-t;-2+2t)$;

đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;-1;2)$.

$AA'\perp(d)\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0\Leftrightarrow(5-4t).(-4)+(-3-t).(-1)+(-2+2t).2=0\Leftrightarrow t=1$.

$\Rightarrow A'(2;-3;1)$.

Vậy $A'(2;-3;1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB và CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d qua $C(-6;3;6)$ và song song với đường thẳng AB là

$$\frac{x+6}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{2}$$

Điểm D thuộc đường thẳng d nên gọi tọa độ D là $D(-6-2t;3+t;6+2t)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow t^2+8t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\t=-6\end{array}\right.$$

Với $t=-2 \Rightarrow D_1(-2;1;2)$, tứ giác là hình bình hành nên loại.

Với $t=-6 \Rightarrow D_2(6;-3;-6)$ thỏa mãn, nên $6-3-6=-3$.

Câu 7. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$; $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** -5

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases}$

Vì $C\in d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases} \Rightarrow c(-1+2t;t)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2);\overrightarrow{AC}=(-1+2t;t;2-t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}$

$S_{ABC}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow C(1;1;1) \Rightarrow m+n+p=3$

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

A. $(-1;0;4)$. **B.** $(7;1;-1)$. **C.** $(2;1;-2)$. **D.** $(0;2;-5)$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d. Phương trình của mặt phẳng (P) là: $1(x-3)+2(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d, khi đó $H=d\cap(P)$

Suy ra $H\in d\Rightarrow H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$, mặt khác $H\in(P) \Rightarrow -1+t-6+4t-4+4t-7=0$ $\Rightarrow t=2$. Vậy $H(1;1;2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng d, khi đó H là trung điểm của AA' suy ra $A'(-1;0;4)$.

Câu 9. **(Sở Bình Phước -2019)** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{14}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** $2\sqrt{14}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;2;3)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$; $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.

$d(M,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi $M(a;\,b;\,c)$ thuộc đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Biết điểm M có tung độ âm và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=11$. **C.** $T=-13$. **D.** $T=1$.

Lời giải

$M\in\Delta\Rightarrow M(t;\,1+2t;\,-2+3t)$.

Ta có $d(M;(Oyz))=|t|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow 1+2t=5\\t=-2\Rightarrow 1+2t=-2\end{array}\right.$.

Suy ra $t=-2$. Do đó $M(-2;\,-3;\,-8)$.

Vậy $a=-2;\ b=-3;\ c=-8\Rightarrow T=a+b+c=-13$.

trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1+2t\\2x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\x=1\\y=1\\z=3\end{cases}$. Do đó $M(1;1;3)$, $a+b+c=5$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(0;b;0)$ là giao điểm của d với trục Oy. (Điều kiện $b<0$)

Ta có $OA=2$ và tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=1\Rightarrow OB=1$

Suy ra $B(0;-1;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;0)$ là một vec tơ chỉ phương của d.

Và đường thẳng d đi qua điểm $A(2;0;0)$ nên $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 12. **(Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$. Tọa độ điểm M là

A. $M(2;0;-1)$. **B.** $M(5;-1;-3)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(-1;1;1)$.

Lời giải

Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-2}{-3}=\frac{y}{1} \\ \frac{y}{1}=\frac{z+1}{2} \\ x+2y-3z+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+3y=2 \\ 2y-z=1 \\ x+2y-3z=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Vậy $M(-1;1;1)$.

Câu 13. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$ là:

A. $(-2;1;1)$. **B.** $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$. **C.** $(1;1;-2)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$. Khi đó: AH nhận $\vec{n}(1;1;1)$ là vectơ chỉ phương suy ra phương trình $AH:\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$.

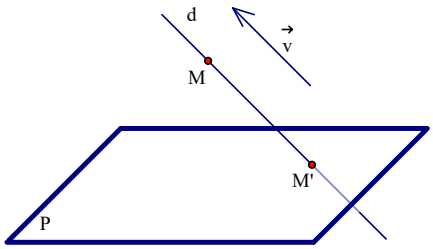
Do $H\in AH\Rightarrow H(3+t;\ 2+t;-1+t)$.

Do $H\in(\alpha)\Rightarrow 3+t+2+t-1+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}\Rightarrow H\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Câu 14. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véctơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$ có tọa độ là

A. $(2;-2;-2)$. **B.** $(-1;0;1)$. **C.** $(-2;2;2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Lời giải



Đường thẳng d đi qua $M(-1;0;3)$, có véctơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;1)$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \end{cases}$.

Gọi M' là hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véctơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$.

$\Rightarrow M'=d\cap(P)\Rightarrow$ tọa độ M' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \\ x-y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=3+t \\ -1+t+2t+3+t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=2 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow M'(-2;2;2).$$

Câu 15. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

$M\in\Delta\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$.

$M\in(P)\Leftrightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.

$M(0;0;-2)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=-2$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và $d:\begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC). Tổng $S=a+b+c$ là:

A. -7. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ nằm trên các trục Ox, Oy, Oz có phương trình là: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.

Điểm $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của của d và mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\frac{-t}{1}+\frac{2+t}{2}+\frac{3+t}{3}=1\Leftrightarrow t=6$ suy ra $\begin{cases}a=-6\\b=8\\c=9\end{cases}$.

Vậy $S=-6+8+9=11$.

Câu 17. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), tính OA'.

A. $OA'=5\sqrt{3}$ **B.** $OA'=\sqrt{46}$ **C.** $OA'=\sqrt{186}$ **D.** $OA'=3\sqrt{26}$

Lời giải

Chọn C

+ A' đối xứng với A qua (P) nên AA' vuông góc với (P)

+Suy ra phương trình đường thẳng $AA':\begin{cases}x=-1+6t\\y=3-2t\\z=6+t\end{cases}$

+Gọi H là giao điểm của AA' và mặt phẳng $(P)\Rightarrow H(-1+6t;3-2t;6+t)$

+ Do H thuộc $(P)\Rightarrow 6(-1+6t)-2(3-2t)+1(6+t)-35=0$

$\Leftrightarrow 41t-41=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(5;1;7)$

+ A' đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm của AA'

$\Rightarrow A'(11;-1;8)\Rightarrow OA'=\sqrt{11^2+(-1)^2+8^2}=\sqrt{186}$

Câu 18. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z=0$.

A. $M'\left(2;\frac{5}{2};3\right)$. **B.** $M'(1;3;5)$. **C.** $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $M'(3;1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (α).

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=3-2t\\z=1+t\end{cases}$. Ta có $M'=\Delta\cap(\alpha)$.

Xét phương trình: $2+t-2(3-2t)+1+t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Vậy $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 19. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha):2x+y+2z-3=0$ có tọa độ là

A. $(-3;0;0)$. **B.** $(-1;1;2)$. **C.** $(-1;-2;-4)$. **D.** $(2;1;2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;2)$.

MM' vuông góc với mặt phẳng (α) nên đường thẳng MM' nhận $\vec{n}=(2;1;2)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng MM' là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=4+2t \end{cases}$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng MM' và mặt phẳng (α).

$H \in MM' \Leftrightarrow H(1+2t;2+t;4+2t)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1+2t)+2+t+2(4+2t)-3=0 \Leftrightarrow 9t+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow H(-1;1;2)$.

M' đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (α) nên H là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-3;0;0)$.

Câu 20. **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$,đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(6;-7;0)$ **B.** $(3;-2;-1)$ **C.** $(-3;8;-3)$ **D.** $(0;3;-2)$

Lời giải

Chọn D

Ta gọi AB cắt d tại điểm $M(1+2m;-1+m;2-m) \in d$

$\overrightarrow{AM}(2m;m-3;3-m)$, theo yêu cầu bài toán AB vuông góc d, ta có

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_d}=0 \Rightarrow 2.2m+m-3+m-3=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;-2;2)$

Đường thẳng AB đi qua A nhận $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=(1;-1;1)$ là VTCP, ta có phương trình AB là

$AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Gọi $B(1+t;2-t;-1+t) \in AB$

Lại có điểm $B \in (P) \Rightarrow 1+t+2-t+2(-1+t)+1=0 \Rightarrow t=-1$. Vậy $B(0;3;-2)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(2;-1;1)$. **B.** $Q(0;-1;1)$. **C.** $N(0;-1;2)$. **D.** $M(-1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}=(1;1;-2)$.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng d_1. Vì $H \in d_1 : H(1+t;t;5-2t)$.

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(t;t;3-2t)$.

d vuông góc với $d_1 \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AH}=0 \Leftrightarrow t+t-2(3-2t)=0 \Leftrightarrow 6t=6 \Leftrightarrow t=1$.

Lúc đó, đường thẳng d qua $A(1;0;2)$ và có VTCP $\overrightarrow{AH}=(1;1;1)$ có phương trình: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$.

Lúc đó, điểm $Q(0;-1;1)$ thuộc đường thẳng d.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác đều ABC với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng BC đi qua $M_0(1;2;0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;2)$.

Mp(ABC) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0A}\right]=(3;15;-6)$ cùng phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$.

$\Delta\perp(ABC)\Rightarrow\Delta$ có vecto chỉ phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$

Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow AH\perp BC$ và $H(1-t;2+t;2t)$.

$\overrightarrow{AH}=(-5-t;-1+t;2t-5)$. Ta có $AH\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $H(0;3;2)$.

G là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}\right)=2\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=(2;3;3)\Leftrightarrow G=(2;3;3)$.

Δ đi qua G, có vecto chỉ phương $\vec{n'}=(1;5;-2)$

$\Rightarrow$ phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+5t \\ z=3-2t \end{cases}$. Vậy $Q\in\Delta$.

Câu 23. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1;3;1)$, $B(0;2;-1)$. Gọi $C(m;n;p)$ là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m+n+p$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $C(m;n;p)\in d\Rightarrow C(-1+2t;t;2-t)$.

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;-1;-2) \\ \overrightarrow{AC}=(2t;t-3;1-t) \end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3t-7;-3t-1;3t-3)$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}$.

Theo đề ta có $\frac{1}{2}\sqrt{27t^2-54t+59}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 27t^2-54t+27=0\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra $C(1;1;1)$.

Vậy $m+n+p=3$.

Câu 24. **(Đà Nẵng 2019)** Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-2}$ và $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$. Gọi M là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn OM.

A. $OM=\frac{\sqrt{14}}{2}$. **B.** $OM=\sqrt{5}$. **C.** $OM=2\sqrt{35}$. **D.** $OM=\sqrt{35}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=4+t\\z=-2t\end{cases}$ nhận véctơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ làm véctơ chỉ phương.

Đường thẳng $d':\begin{cases}x=3+2m\\y=-1-m\\z=-2-m\end{cases}$ nhận véctơ $\vec{v}=(2;-1;-1)$ làm véctơ chỉ phương.

Gọi AB là đoạn vuông góc chung với $A\in d$ và $B\in d'$.

Khi đó $A(2+t;4+t;-2t)$ và $B(3+2m;-1-m;-2-m)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2m-t+1;-m-t-5;-m+2t-2)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\\\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{v}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-6t=0\\6m-3t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\t=-1\end{cases}$. Suy ra $A(1;3;2)$ và $B(-1;1;0)$.

Suy ra trung điểm của AB là $M(0;2;1)$. Vậy $OM=\sqrt{5}$.

Câu 25. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P):x-2y+z=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn A

Tìm A từ hệ $\begin{cases}x-2y+z=0\\\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z=0\\x-2y=1\\y+z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow A(-1;-1;-1)$.

Gọi $M(1+2t;t;-2-t)$, $t>\frac{-1}{2}$ ta có $AM=\sqrt{6t^2+12t+6}=\sqrt{6}\Leftrightarrow t=0;t=-2$

Với $t=0\Rightarrow M(1;0;-2)\Rightarrow a=1;b=0;c=-2\Rightarrow S=2018.$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt d_1, d_2 tại B và C. Độ dài BC là

A. $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d \cap d_1 = B \Rightarrow B(1+t_1;-1-t_1;2t_1)$.

$d \cap d_2 = C \Rightarrow C(t_2;1+2t_2;t_2)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (t_1-4;-t_1+2;2t_1-5)$ và $\overrightarrow{AC} = (t_2-5;2t_2+4;t_2-5)$.

Vì $A \notin d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.

Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1-4 = k(t_2-5) \\ -t_1+2 = k(2t_2+4) \\ 2t_1-5 = k(t_2-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó $B(2;-2;2)$, $C(-1;-1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-3;1;-3)$.

Vậy $BC = \sqrt{19}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$; $d_2 : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M căt d_1, d_2 lần lượt tại A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 4. **D.** 2.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có:

phương trình tham số của $d_1 : \begin{cases} x = 1+t_1 \\ y = 2+3t_1 \\ z = t_1 \end{cases} ; t_1 \in \mathbb{R}$, $A \in d_1 \Rightarrow A(1+t_1;2+3t_1;t_1)$;

phương trình tham số của $d_2 : \begin{cases} x = -1-t_2 \\ y = 1+2t_2 \\ z = 2+4t_2 \end{cases} ; t_2 \in \mathbb{R}$, $B \in d_2 \Rightarrow B(-1-t_2;1+2t_2;2+4t_2)$;

$\overrightarrow{MA} = (t_1-2;3t_1-1;t_1+2); \overrightarrow{MB} = (-4-4t_2;-2+2t_2;4+4t_2)$.

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1-2 = -4k-kt_2 \\ 3t_1-1 = -2k+2kt_2 \\ t_1+2 = 4k+4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+4k+kt_2 = 2 \\ 3t_1+2k-2kt_2 = 1 \\ t_1-4k-4kt_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \dfrac{1}{2} \\ kt_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy, $A(1;2;0)$ và $B(-1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2;-1;2)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$.

Câu 28. Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;0;2)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$.

Biết điểm $M(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $AM\perp\Delta$ và $AM=\sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=5$. **C.** $T=7$. **D.** $T=-6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;-3)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.

Mặt phẳng (ABC) nhận vectơ $\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng Δ

$\Rightarrow$ mặt phẳng (Q) nhận vectơ $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó $AM\perp\Delta\Leftrightarrow AM\subset(Q)\Rightarrow M\in(Q)$.

Mặt khác theo giả thiết $M\in(ABC)\Rightarrow M\in$ giao tuyến d của hai mặt phẳng (ABC) và (Q).

Đường thẳng d nhận vectơ $\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_{(ABC)}}\right]=(3;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương, đồng thời đi qua A

$\Rightarrow$ PT $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=1-t\end{cases}$.

Ta có $M\in d\Rightarrow M=(1+3t;1+2t;1-t)$.

Theo giả thiết $AM^2=14\Leftrightarrow(3t)^2+(2t)^2+(-t)^2=14\Leftrightarrow14t^2=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\end{array}\right.$.

Với $t=-1\Rightarrow M=(-2;-1;2)$ (loại).

Với $t=1\Rightarrow M=(4;3;0)$ (nhận)

Khi đó $a=4;b=3;c=0$.

Vậy $a+b+c=7$.

Câu 29. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d. Tọa độ điểm B là

A. $(3;-2;-1)$. **B.** $(-3;8;-3)$. **C.** $(0;3;-2)$. **D.** $(6;-7;0)$.

Lời giải

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

Gọi $M=AB\cap d\Rightarrow M(1+2t;-1+t;2-t)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2t;t-3;3-t)$.

$AB\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 4t+t-3-3+t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;-2;2)=2(1;-1;1)$

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(1;2;-1)$, có một VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$

$\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Ta có: $B=AB\cap(P)$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+t\\x+y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=0\\y=3\\z=-2\end{cases}$

$\Rightarrow B(0;3;-2)$.

Câu 30. **(SGD Bạc Liêu - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=-2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$.

Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A, cắt mặt cầu tại B sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là

A. $2x+4y-4z-19=0$. **B.** $3x-6y-6z-62=0$.

C. $2x-4y-4z-43=0$. **D.** $3x+6y-6z-31=0$.

Lời giải

Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A suy ra tọa độ $A(3+a;-1-a;-2+a)$.

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=\pm\overrightarrow{AB}$

Trường hợp 1:

$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=x-3-a\\3(3+a)=y+1+a\\3(1-a)=z+2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-2a\\y=8+2a\\z=1-2a\end{cases}$ suy ra $B(-3-2a;8+2a;1-2a)$

Do $B\in(S)$ nên

$(-3-2a)^2+(8+2a)^2+(1-2a)^2-4(-3-2a)+10(8+2a)+14(1-2a)+64=0$

$\Leftrightarrow 12a^2+40a+244=0$, phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2:

$$3\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=-(x-3-a)\\3(3+a)=-(y+1+a)\\3(1-a)=-(z+2-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9+4a\\y=-10-4a\\z=-5+4a\end{cases}$$

Suy ra $B(9+4a;-10-4a;-5+4a)$

Do $B\in(S)$ nên

$$(9+4a)^2+(-10-4a)^2+(-5+4a)^2-4(9+4a)+10(-10-4a)+14(-5+4a)+64=0$$

$$\Leftrightarrow 48a^2+112a+64=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$$

Điểm B có hoành độ là số nguyên nên $B(5;-6;-9)$; $A(2;0;-3)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I\left(\frac{7}{2};-3;-6\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến

$\vec{n}=(-1;2;2)$ nên có phương trình $\left(x-\frac{7}{2}\right)-2(y+3)-2(z+6)=0\Leftrightarrow 2x-4y-4z-43=0$

Dạng 3. Bài toán liên quan đến góc – khoảng cách

1. *Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

- *Khoảng cách từ điểm* $M(x_M;y_M;z_M)$ *đến mặt phẳng* $(P):ax+by+cz+d=0$ *được xác định bởi công thức:* $\boxed{d(M;(P))=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

  Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng
- *Cho hai mặt phẳng song song* $(P):ax+by+cz+d=0$ *và* $(Q):ax+by+cz+d'=0$ *có cùng véctơ pháp tuyến, khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là* $\boxed{d((Q),(P))=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

2. *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng – Khoảng cách giữa hai đường thẳng*

- ***Khoảng cách từ điểm*** M ***đến một đường thẳng*** d *qua điểm* $M_\circ$ *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d$ *được xác định bởi công thức* $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_\circ M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}}$.

  Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song *là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.*
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau****:* d *đi qua điểm* M *và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}$ *và* d' *đi qua điểm* M' *và có véctơ chỉ phương* $\vec{u}'$ *là* $\boxed{d(d,d')=\dfrac{\left|[\vec{u},\vec{u}'].\overrightarrow{M_\circ M}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{u}']\right|}}$.

3. *Góc giữa hai véctơ*

Cho hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ *và* $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. *Khi đó góc giữa hai véctơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *là góc nhọn hoặc tù.*

$$\boxed{\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}\ \text{với}\ 0°<\alpha<180°.$$

4. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *và* $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

$$\cos\big((P),(Q)\big)=\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$ *với* $0°<\alpha<90°.$

5. *Góc giữa hai đường thẳng*

Góc giữa hai đường thẳng d_1 *và* d_2 *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$ *và* $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2).$

$$\cos(d_1;d_2)=\cos\alpha=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ *với* $0°<\alpha<90°.$

6. *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Góc giữa đường thẳng d *có véctơ chỉ phương* $\vec{u}_d=(a;b;c)$ *và mặt phẳng* (P) *có véctơ pháp tuyến* $\vec{n}_{(P)}=(A;B;C)$ *được xác định bởi công thức:*

$$\sin\alpha=\left|\cos(\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d)\right|=\frac{|\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_{(P)}|}=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ *với* $0°<\alpha<90°.$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):4x=7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P). Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1,d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(a;b;c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

A. $\frac{a+2b}{c}=\frac{2}{3}.$ **B.** $\frac{a+2b}{c}=0.$ **C.** $\frac{a+2b}{c}=\frac{1}{3}.$ **D.** $\frac{a+2b}{c}=1.$

Lời giải

Cách 1:

Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$ khi đó (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_1}\right]=(5;5;15).$

Đường thẳng d_1' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1'}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_1}\right]=(22;11;-11)$ hay một vecto chỉ phương khác $\vec{u}=(2;1;-1).$

Vì $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_2}=0\Rightarrow 4a-7b+c=0\Rightarrow c=7b-4a\Rightarrow\overrightarrow{u_2}=(a;b;7b-4a).$

Ta lại có $(d_1;d_2)=(d_1';d_2)\Leftrightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1'},\overrightarrow{u_2}\right)\right|$

$\Leftrightarrow|a+2b+4a-7b|=|2a+b+4a-7b|\Leftrightarrow|5a-5b|=|6a-6b|\Leftrightarrow|a-b|=0\Leftrightarrow a=b$

Chọn $a=1\Rightarrow b=1,c=3\Rightarrow\frac{a+2b}{c}=1.$

Cách 2:

Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$ khi đó $(P)\perp(Q)$. Các đường thẳng nằm trong (P) mà vuông góc với (Q) thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong (Q) hay chúng cùng tạo với d_1,d_1' các góc 90°. Do đó, các đường thẳng này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chúng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\overrightarrow{n_Q}(1;1;3)\Rightarrow\dfrac{a+2b}{c}=1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7),B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P):2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

* Ta có : $\overrightarrow{AB}=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$

Gọi $I(4;3;4)$ là trung điểm của AB

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB là : $(x-4)+2(y-3)-3(z-4)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-3z+2=0$

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Đường thẳng d có 1 vpcp là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;1;1)$ và đi qua điểm

$N(-2;0;0)$, có phương trình là $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=t\\z=t\end{cases}$

* Gọi $M\in(P):MA=MB$. Khi đó $M\in$ d và $M(-2+t;t;t)$

Theo giả thiết, ta có : $MA=\sqrt{35}\Leftrightarrow\sqrt{(t-5)^2+(t-1)^2+(t-7)^2}=\sqrt{35}$

$\Leftrightarrow 3t^2-26t+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{20}{3}\\t=2\Rightarrow M(0;2;2)\end{array}\right.$

Vậy $OM=2\sqrt{2}$

Câu 33. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45^0 và nhận vectơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc.

A. -4 hoặc 0. **B.** 4 hoặc 0. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Ta có vectơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) qua $d_1\Rightarrow\vec{n}.\vec{u}_1=0\Leftrightarrow 2-2b-c=0.\quad(1)$

$\sin(d_2,(P))=\dfrac{|\vec{u}_2.\vec{n}|}{|\vec{u}_2|.|\vec{n}|}=\sin 45^\circ\Leftrightarrow\dfrac{|1-c|}{\sqrt{b^2+c^2+1}.\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow|1-c|=\sqrt{b^2+c^2+1}\Leftrightarrow b^2+2c=0.(2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}\Rightarrow b.c=-4.$

Cu 34. (Chuỹn Phan Bội Chu 2019) Trong khơng gian với hệ tọa độ $Oxyz$**, cho hai đường thẳng** $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ **v** $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$**. Mặt phẳng** (P) **qua** d_1 **tạo với** d_2 **một gĩc** 45° **v nhận vctơ** $\vec{n}(1;b;c)$ **lm một vctơ pp tuyến. Xc định tích** bc**.**

A. -4 **hoặc** 0 **B.** 4 **hoặc** 0 **C.** -4 **D.** 4

Lời giải

Đường thẳng d_1 và d_2 có véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2=(1;0;-1)$.

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;b;c)$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\vec{u}_1\perp\vec{n}\\\left|\dfrac{\vec{u}_2.\vec{n}}{|\vec{u}_2|.|\vec{n}|}\right|=\sin 45^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}_1.\vec{n}=0\\\left|\dfrac{1.1+0.b+(-1).c}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+b^2+c^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2b-c=0\\|1-c|=\sqrt{1+b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=2\\(1-c)^2=1+b^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b+c=2\\b^2+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}$

Vậy $b.c=-4$.

Câu 35. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc $45°$ và nhận vectơ $\vec{n}(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Lời giải.

$\overrightarrow{u_1}=(2;-2;-1),\overrightarrow{u_2}=(1;0;-1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Theo bài ra ta có

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0\\\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\sin\left(d_2;(P)\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2.1+(-2)b+(-1)c=0\\\dfrac{|1.1+0.b+(-1)c|}{\sqrt{1+b^2+c^2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2-2b\\(c-1)^2=1+b^2+c^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}.$

Câu 36. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M=d\cap(P)$. Suy ra $M\in d\Rightarrow M(3+2t;-2+t;-1-t);M\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(1;-3;0)$

(P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;1;1)$. d có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_d=(2;1;-1)$. Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta=[\vec{a}_d,\vec{n}_P]=(2;-3;1)$. Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó $MN=(x-1;y+3;z)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{a_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y+z-11=0\\ x+y+z+2=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}$.

Giải hệ ta tìm được $N(5;-2;-5)$ và $N(-3;-4;5)$.

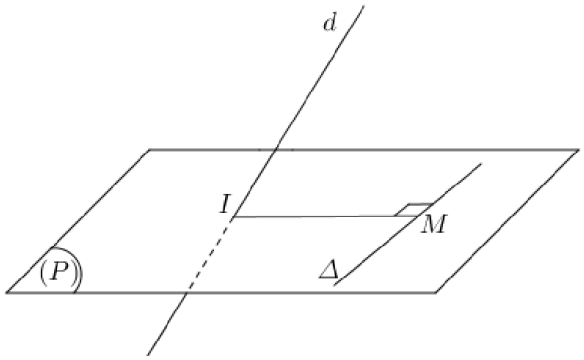
Với $N(5;-2;-5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$.

Với $N(-3;-4;5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Câu 37. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=2-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$, cắt mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ tại điểm I. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta\perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) của điểm I trên đường thẳng Δ.

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $M(6;-3;0)$. **C.** $M(5;2;-4)$. **D.** $M(-3;6;0)$.

Lời giải



(P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$ và d có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-1)$.

$I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;1;1)$.

Vì $\Delta\subset(P);\Delta\perp d\Rightarrow\Delta$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=[\vec{n},\vec{u}]=(-3;2;1)$.

M là hình chiếu của I trên Δ nên M thuộc mặt phẳng (Q) đi qua I và vuông góc với Δ.

Mặt phẳng (Q) nhận $\overrightarrow{u_\Delta}=(-3;2;1)$ làm véctơ pháp tuyến nên ta có phương trình của

$(Q):-3(x-1)+2(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z=0$.

Gọi $d_1=(P)\cap(Q)\Rightarrow d_1$ có véctơ chỉ phương $\vec{v}=[\overrightarrow{u_\Delta},\vec{n}]=(1;4;-5)$ và d_1 đi qua I, phương trình của $d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+4t\\ z=1-5t\end{cases}$.

Mặt khác $M\in\Delta\Rightarrow M\in(P)\Rightarrow M\in d_1$.

Giả sử $M(1+t;1+4t;1-5t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t;4t;-5t)$.

Ta có: $IM = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{t^2+16t^2+25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow t = \pm 1$.

+) Với $t = 1 \Rightarrow M(2;5;-4)$.

+) Với $t = -1 \Rightarrow M(0;-3;6)$.

Vì $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) nên $M(2;5;-4)$.

Cách 2: Vì $M(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{IM} \perp \vec{u}_\Delta \\ IM = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3(a-1)+2(b-1)+(c-1)=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3a+2b+c=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-b=3 \\ a+b+c-3=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a-3 \\ c=-5a+6 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} a=0 \\ b=-3 \\ c=6 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-4 \end{cases} \right.$$

Nguyễn Bảo Vương

Vì $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) nên $M(2;5;-4)$.

Câu 38. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h;k;1)$. Giá trị $h-k$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** –2.

Lời giải

Chọn A

$H \in \Delta_1 \Leftrightarrow H(3+2t;t;1+t)$.

$K \in \Delta_2 \Leftrightarrow K(1+m;2+2m;m)$.

Ta có $\overrightarrow{HK} = (m-2t-2;2m-t+2;m-t-1)$.

Đường thẳng d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (1;1;-2)$.

$\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{HK} = 0 \Leftrightarrow m-t+2=0 \Leftrightarrow m = t-2 \Rightarrow \overrightarrow{HK} = (-t-4;t-2;-3)$.

Ta có $HK^2 = (-t-4)^2+(t-2)^2+(-3)^2 = 2(t+1)^2+27 \geq 27, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow minHK=\sqrt{27}$, đạt được khi $t=-1$.

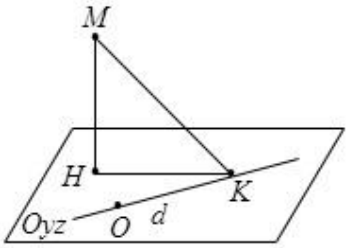
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK}=(-3;-3;-3)$, suy ra $\vec{u}(1;1;1)\Rightarrow h=k=1\Rightarrow h-k=0$.

Câu 39. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O, thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) và trên đường thẳng d.

Ta có: $d(M,d)=MK\geq MH=1$, $H(0;-2;1)$.

Suy ra $d(M,d)$ nhỏ nhất khi $K\equiv H$. Khi đó d có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{OH}=(0;-2;1)$.

$$\cos(d,Oy)=\frac{\left|\overrightarrow{OH}.\vec{j}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right|\left|\vec{j}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

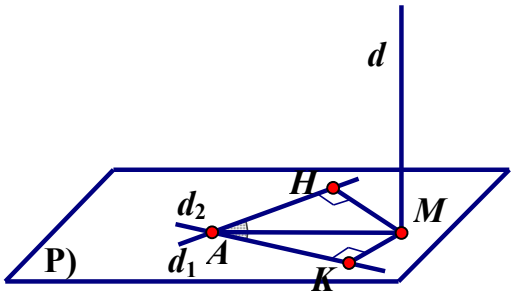
Nguyễn Bảo Vương

Câu 40. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P):x-z-1=0$ và đường thẳng $(d):\begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi $d_1;d_2$ là các đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



* Ta có: $\vec{n}_P=(1;0;-1)$, $\vec{u}_d=(-1;0;1)\Rightarrow d\perp(P)$ và $d\cap(P)=M(0;2;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}=(2;-1;2)\Rightarrow MA=3$

* Gọi H; K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên d_1 và d_2, ta có

$d\left(d_1;d\right)=d\left(M;d_1\right)=MH,\ d\left(d_2;d\right)=d\left(M;d_2\right)=MK\Rightarrow MH=MK=\sqrt{6}$

$\Rightarrow \sin\widehat{MAK}=\sin\widehat{MAH}=\dfrac{HM}{AM}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \cos\left(d_1;d_2\right)=\left|\cos\left(2.\widehat{MAH}\right)\right|=\left|1-2\sin^2\widehat{MAH}\right|=\left|1-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{1}{3}.$

Câu 41. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\left(d\right):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z+3=0$ và điểm $A\left(1;2;-1\right)$. Cho đường thẳng $\left(\Delta\right)$ đi qua A, cắt $\left(d\right)$ và song song với mặt phẳng $\left(P\right)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến $\left(\Delta\right)$

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M=\left(\Delta\right)\cap\left(d\right)\Rightarrow M\left(t+3;3t+3;2t\right)\left(t\in R\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(t+2;3t+1;2t+1\right).$

Gọi $\vec{n}\left(1;1;-1\right)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$.

Ta có $\left(\Delta\right)//\left(P\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow t+2+3t+1-2t-1=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}\left(1;-2;-1\right)\Rightarrow d\left(O;\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 42. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và

$d_2:\begin{cases}x=1+4t\\y=-1-2t\\z=2+2t\end{cases}.$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận $\overrightarrow{u_1}=\left(2;-1;1\right)$ làm VTCP.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{u_2}=\left(4;-2;2\right)$ làm VTCP.

Dễ thấy: $\overrightarrow{u_2}=2.\overrightarrow{u_1}$ nên đường thẳng d_1 song song hoặc trùng với đường thẳng d_2.

Lại có điểm $M\left(1;-2;0\right)\in d_1$ nhưng $M\left(1;-2;0\right)\notin d_2$ nên suy ra $d_1\ //\ d_2$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng khoảng cách từ điểm $M\left(1;-2;0\right)$ đến đường thẳng d_2.

$\mathrm{d}\left(M;d_2\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}.$

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;1;2)$, $\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{u_2}=(6;8;-4)$.

$\Rightarrow d(M;d_2)=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2+(-4)^2}}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{174}}{6}\Rightarrow d(d_1;d_2)=\dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+3z-14=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông tại M. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy).

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

$\overrightarrow{AM}=(x-3;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x+3;y+1;z)$.

Vì ΔMAB vuông tại M nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)+(y-1)(y+1)+z(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2-9+y^2-1+z^2-2z=0\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=11$.

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$.

Nhận xét thấy $d(I,(P))=\dfrac{|0+0+3.1-14|}{\sqrt{1^2+1^2+3^3}}=\sqrt{11}=R$.

$\Rightarrow(P)$ tiếp xúc với (S) tại M

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ \overrightarrow{IM}\text{ cïng ph-¬ng }\overrightarrow{n_{(P)}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+3z=14\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=4\end{cases}\Rightarrow M(1;1;4)$.

Vậy $d(M,(Oxy))=|4|=4$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(4;3;7)$. **B.** $(-1;-2;1)$. **C.** $(7;5;3)$. **D.** $(3;4;3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 3x+2y+z-6=0$, dễ thấy $D\in(ABC)$.

Ta thấy $P=d(A,\Delta)+d(B,\Delta)+d(C,\Delta)\le AD+BD+CD$.

Vậy P lớn nhất khi và chỉ khi các hình chiếu vuông góc của các điểm A,B,C trên Δ trùng D hay $\Delta\perp(ABC)$ tại D.

Phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases}$, ta thấy Δ đi qua điểm có tọa độ $(7;5;3)$.

Câu 45. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1;d_2$ tới mặt phẳng (P) trong đó: $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3};d_2:\frac{-x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1};(P):2x+4y-4z-3=0$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của hai đường thẳng d_1,d_2 như sau:

$d_1:\begin{cases}x=-1+2t\\y=3t\\z=1+3t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=1-2t'\\y=t'\\z=1+t'\end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}-1+2t=1-2t'\\3t=t'\\1+3t=1+t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+2t'=2\\3t-t'=0\\3t-t'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{4}\\t'=\frac{3}{4}\end{cases}$.

Suy ra giao điểm của d_1,d_2 là $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là: $d(A;(P))=\frac{\left|2.\left(-\frac{1}{2}\right)+4.\left(\frac{3}{4}\right)-4.\left(\frac{7}{4}\right)-3\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{4}{3}$.

Câu 46. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $(\Delta):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa (Δ) và (P) là

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Đường thẳng $(\Delta):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$ và đi qua điểm $M=(1;-1;1)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\M\notin(P)\end{cases}$ suy ra (Δ) song song với (P).

Khi đó $d((\Delta),(P))=d(M,(P))=\frac{|2+1+2-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=3-t\\z=t\end{cases}$.Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc $45°$.Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $M(3;2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(3;-1;2)$. **D.** $M(3;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta viết phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y+z-3=0\end{cases}$.

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d nên có dạng: $mx+n(y+z-3)=0, m^2+n^2\neq 0$

$\Leftrightarrow mx+ny+nz-3n=0\Rightarrow (P)$ có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(m;n;n)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có: $\cos((P);(Oxy))=\left|\cos(\overrightarrow{n_P};\vec{k})\right|\Leftrightarrow \cos 45°=\dfrac{|\overrightarrow{n_P}.\vec{k}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\vec{k}|}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+n^2+n^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+2n^2}=\sqrt{2}|n|\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$.

Chọn $n=1\Rightarrow (P): y+z-3=0$.

Do đó: $M(3;2;1)\in(P)$.

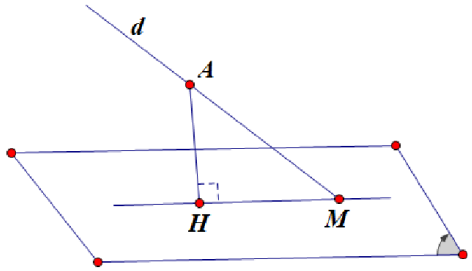
Bình luận: Đối với những bài toán viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng cho trước ta nên sử dụng khái niệm chùm mặt phẳng như sau: Mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ có phương trình dạng $m(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+n(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0, m^2+n^2\neq 0$.

Câu 48. **(Chuyên Hà Tĩnh 2019))** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-3=0$. Gọi M là giao điểm của d và (α), A thuộc d sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α).

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng $(\alpha):x+2y-3z-3=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$.

Ta có: $\sin(d;(\alpha))=\dfrac{|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{u_d}|.|\overrightarrow{n_\alpha}|}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α).

Khi đó tam giác ΔMAH vuông tại H nên $\sin(d;(\alpha))=\sin\widehat{AMH}=\dfrac{AH}{AM}$.

$\Rightarrow AH=AM.\sin(d;(\alpha))=3$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng 3.

Câu 49. **(Hội 8 trường chuyên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P):x+ay+bz+c=0(c>0)$ song song với d_1,d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P). Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 14. **B.** 6. **C.** –4. **D.** –6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $\vec{u}_1=(1;1;2)$, $\vec{u}_2=(2;1;1)$ lần lượt là một vectơ chỉ phương của d_1, d_2.

Gọi $\vec{n}_1=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;3;-1)$, có $\vec{n}_1$ cùng phương $\vec{n}_2=(1;-3;1)$.

$\vec{n}=(1;a;b)$ là một vec-tơ chỉ phương của (P).

Do (P) song song với d_1,d_2 nên chọn $\vec{n}=(1;-3;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $x-3y+z+c=0$.

Lấy $M_1(1;-2;1)\in d_1$, $M_2(1;1;-2)\in d_2$

Có $d(d_1;(P))=2d(d_2;(P))\Leftrightarrow d(M_1;(P))=2d(M_2;(P))$

$\Leftrightarrow\dfrac{|1-3(-2)+1+c|}{\sqrt{11}}=2\dfrac{|1-3-2+c|}{\sqrt{11}}\Leftrightarrow|8+c|=2|-4+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8+c=2(-4+c)\\8+c=2(4-c)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=16\ (\text{nhận})\\c=0\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Nên $(P):x-3y+z+16=0$, suy ra $a=-3$, $b=1$, $c=16$.

Vậy $a+b+c=14$.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=4t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

+ Các điểm cách đều hai điểm A, B thì nằm trên mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$

+ Phương trình mặt phẳng (α) là $3x+y-7=0$.

Do đó đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (α)

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;7;0) \in (P) \cap (\alpha)$ và nhận

$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (1;-3;2)$ làm một vectơ chỉ phương là $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 51. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh **A.**

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $C \in BC$ nên $C(4+t;5+t;-7-4t)$.

BC có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-4)$. Mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;0;1)$.

Gọi φ là góc giữa BC và (α). Ta có $\sin\varphi = \left|\cos(\vec{u};\vec{n})\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$. Tức là A là hình chiếu của C lên (α).

Vậy $\frac{3\sqrt{2}}{2} = CA = d(C;(\alpha)) = \frac{|4+t-7-4t-3|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(3;4;-3) \\ C(1;2;5) \end{array}\right.$

Mà C có cao độ âm, suy ra $C(1;2;5)$.

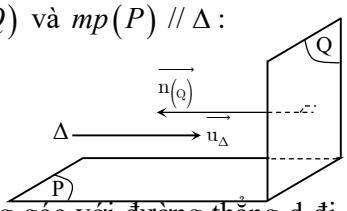
Lúc này AC qua $C(1;2;5)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;0;1)$. Nên $A(3+t;4;-3+t)$.

Mặt khác A nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow x_A=\frac{9}{2}$.

Dạng 4. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng

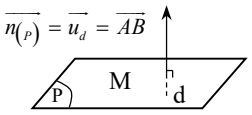
Dạng 1. Viết phương trình mp(P) đi qua M, vuông góc mp(Q) và $mp(P)$ // Δ:

$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M(x_o,y_o,z_o)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{n_{(Q)}},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\end{cases}$$



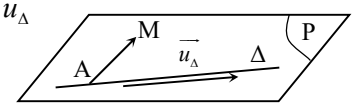
Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi qua hai điểm A và B, với:

$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$$



Dạng 3. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng Δ:

$\xrightarrow{PP}$ ***Trên đường thẳng Δ lấy điểm A và xác định VTCP*** $\overrightarrow{u_\Delta}$



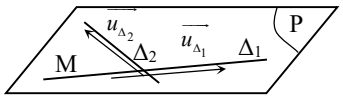
Khi đó $mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\end{cases}$

Dạng 4. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2:

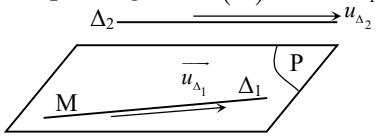
$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$$

Dạng 5. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2:

$$\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$$



Dạng 6. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2. Hãy viết phương trình (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2 $\xrightarrow{PP} mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\in\Delta_1,\ (hay\ M\in\Delta_2)\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right]\end{cases}$



Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β)

$\xrightarrow{PP}$ ***Chọn*** A,B ***thuộc giao tuyến hai mặt phẳng*** (α) ***và*** $(\beta)\Rightarrow A,B\in(P)$***. Cụ thể:***

Cho: $z=z_o\Rightarrow\begin{cases}A_1x+B_1y=-(C_1z_o+D_1)\\ A_2x+B_2y=-(C_2z_o+D_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=...\\ y=...\end{cases}\Rightarrow A(...;...;...)\in(P)$

Cho: $x=x_o\Rightarrow\begin{cases}B_1y+C_1z=-(A_1x_o+D_1)\\ B_2y+C_2z=-(A_2x_o+D_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=...\\ z=...\end{cases}\Rightarrow B(...;...;...)\in(P)$

Khi đó $mp(P):\begin{cases}\bullet\ \text{Đi qua } M\\ \bullet\ VTPT:\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\end{cases}$

Câu 52. **(Đề Minh Họa 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $m=2$ **B.** $m=-52$ **C.** $m=52$ **D.** $m=-2$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta:\frac{x-10}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;1;1)$

Mặt phẳng $(P):10x+2y+mz+11=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(10;2;m)$

Để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n}$

$\Rightarrow \frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{1}{m}\Leftrightarrow m=2$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P):x-y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O, song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+z=0$. **B.** $x-2y+z=0$. **C.** $x+2y+z-4=0$. **D.** $x-2y+z+4=0$.

Lời giải

Δ có VTCP $\vec{u}=(-1;2;-3)$ và (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

(α) qua O và nhận $\vec{n'}=-\left[\vec{u};\vec{n}\right]=(1;2;1)$

Suy ra $(\alpha):x+2y+z=0$.

Câu 54. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;-2)$ và đi qua điểm $M(1;-3;2)$, $d_2:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax+by+cz+11=0$. Giá trị $a+2b+3c$ bằng

A. -42. **B.** -32. **C.** 11. **D.** 20.

Lời giải

Đường thẳng d_2 có véctơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;3)$ và đi qua điểm $N(-3;1;-4)$

Ta có: $\left[\vec{v},\vec{u}\right]=(4;5;2)\neq\vec{0}$; $\overrightarrow{MN}=(-4;4;-6)$; $\left[\vec{v},\vec{u}\right].\overrightarrow{MN}=-16+20-12=-8\neq 0$

$\Rightarrow$ d_1 và d_2 chéo nhau.

Mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 nên (P) nhận $\left[\vec{v},\vec{u}\right]=(4;5;2)$ làm một vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-1;-1;-1)$ của đoạn MN

Suy ra phương trình của (P): $4(x+1)+5(y+1)+2(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+5y+2z+11=0$

$\Rightarrow a=4;b=5;c=2\Rightarrow a+2b+3c=20$.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$

A. $(P):2x-2z+1=0$ **B.** $(P):2y-2z+1=0$ **C.** $(P):2x-2y+1=0$

D. $(P):2y-2z-1=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$

d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$

Vì (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB

Do đó $(P):2y-2z+1=0$

Câu 56. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ và $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có phương trình là

A. $-2x-y+9z-36=0$. **B.** $2x-y-z=0$.

C. $6x+9y+z+8=0$. **D.** $6x+9y+z-8=0$.

Lời giải

Đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}$ đi qua điểm $M(1;-2;4)$, có một VTCP là $\vec{u_1}=(-2;1;3)$.

Đường thẳng $d_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$ có một VTCP là $\vec{u_2}=(1;-1;3)$.

Mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1,d_2 \Rightarrow (P)$ qua điểm $M(1;-2;4)$, có một VTPT là $\vec{n}=\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=(6;9;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là :

$(P):6(x-1)+9(y+2)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 6x+9y+z+8=0$.

Câu 57. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q):x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=5-t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và vuông góc với (Q) là :

A. $3x+y+z-1=0$. **B.** $3x-y-z+1=0$. **C.** $x+3y+z-3=0$. **D.** $x+y+z-1=0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-4)$.

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(0;1;-1)$.

Gọi VTPT của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}$.

Ta có: $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}$ và $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_d}$ nên chọn $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;1;1)$.

(P) đi qua điểm $A(0;1;0)$, VTPT $\overrightarrow{n_P}=(3;1;1)$ có phương trình là: $3x+y+z-1=0$.

Câu 58. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x+y-z-2=0$. **C.** $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A đến d. Khi đó $H(2-t;-1+2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow-(-1-t)+2.2t+1+t=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi $AH\perp(\alpha)$.

Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-z=0$.

Câu 59. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

A. $(P):x+5y+8z-16=0$. **B.** $(P):x+5y+8z+16=0$.

C. $(P):x+4y+6z-12=0$. **D.** $(P):2x+y-6=0$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Do mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;5;8)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

Câu 60. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng: $(d):\begin{cases}x=t+2\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$ và $(\Delta):\begin{cases}x=m+3\\y=3m-2\\z=2m+1\end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P=a+2b+3c$.

A. $P=-10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=-8$. **D.** $P=0$.

Lời giải

Ta có $d//\Delta$.

Chọn $A(2;-1;1)\in(d), B(3;-2;1)\in(\Delta)$.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$

Phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d) và (Δ) qua $A(2;-1;1)$ và có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_{(d)}}\right]=(-2;-2;4)=-2(1;1;-2)$ là:

$1(x-2)+1(y+1)-2(z-1)=0\Leftrightarrow x+y-2z+1=0$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\Rightarrow P=a+2b+3c=1+2.(-2)+3.1=0\\c=1\end{cases}.$$

Câu 61. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - 2018)** Tìm tất cả các mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P):\ 2x-z+1=0$ góc $45°$.

A. $(\alpha):\ 3x+z=0$. **B.** $(\alpha):\ x-y-3z=0$.

C. $(\alpha):\ x+3z=0$. **D.** $(\alpha):\ 3x+z=0$ hay $(\alpha):\ 8x+5y+z=0$.

Lời giải

d đi qua điểm $O(0;0;0)$ có vtcp $\vec{u}=(1;-1;-3)$.

(α) qua O có vtpt $\vec{n}=(a;b;c)$ có dạng $ax+by+cz=0$, do $\vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow a-b-3c=0$.

$(P):\ 2x-z+1=0$ vtpt $\vec{k}=(2;0;-1)$.

Ta có $\cos 45°=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|}=\frac{|2a-c|}{\sqrt{5(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 10(a^2+b^2+c^2)=(4a-2c)^2$

$\Leftrightarrow 10(b^2+6bc+9c^2+b^2+c^2)=(4b+12c-2c)^2\Leftrightarrow 10(2b^2+6bc+10c^2)=(4b+10c)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2-20bc=0\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\b=5c\end{cases}$.

+ $b=0\Rightarrow a=3c\ \Rightarrow(\alpha):\ x+3z=0$.

+ $b=5c$, chọn $c=1\Rightarrow b=5,\ a=8\Rightarrow(\alpha):\ 8x+5y+z=0$.

Câu 62. **(Quảng Nam - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng

bằng $\sqrt{3}$. Véctơ nào trong các véctơ dưới đây là một véctơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

A. $\vec{n}=(1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n}=(1;-1;5)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua hai điểm A, O có dạng $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$.

Gọi (P) là mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O nên (P): $m(x-y)+nz=0$, $m^2+n^2>0$. Khi đó véctơ pháp tuyến của (P) có dạng $\vec{n}=(m;-m;n)$.

Ta có $d(B,(P))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|m+2n|}{\sqrt{m^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2m^2-4mn-n^2=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{n}=1\\\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$.

Vậy một véctơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó là $\vec{n}=\left(\frac{1}{5}n;\frac{-1}{5}n;n\right)=\frac{n}{5}(1;-1;5)$.

Câu 63. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

A. $14x-4y-8z+1=0$. **B.** $14x-4y-8z+3=0$.

C. $14x-4y-8z-3=0$. **D.** $14x-4y-8z-1=0$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}=(2;1;3)$ và $\vec{b}=(2;-1;4)$ là véc tơ chỉ phương của d_1, d_2

Nên $\vec{n}=\vec{a}\wedge\vec{b}=(7;-2;-4)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Do đó $(P):7x-2y-4z+D=0$

Lấy $M(2;2;3)\in d_1$ và $N(1;2;1)\in d_2$.

Do (P) cách đều d_1 và d_2 nên $d(M,(P))=d(N,(P))$.

$\Leftrightarrow\dfrac{|7.2-2.2-4.3+D|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}=\dfrac{|7.1-2.2-4.1+D|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}\Leftrightarrow|D-2|=|D-1|\Leftrightarrow D=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $(P):7x-2y-4z+\dfrac{3}{2}=0\Leftrightarrow(P):14x-4y-8z+3=0$.

Câu 64. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d?

A. $(P):5x+2y+4z-5=0$. **B.** $(P):2x+1y+2z-1=0$.

C. $(P):5x-2y-4z-5=0$. **D.** $(P):2x+1y+2z-2=0$.

Lời giải

VTCP của d là $\vec{a}=(2;1;2)$ và $B(1;-2;1)\in d$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(0;-2;1)$.

Do đó véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(5,-2;-4)$.

Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $5(x-1)-2(y-0)-4(z-0)=0$ hay $5x-2y-4z-5=0$.

Câu 65. **(Chuyên Nguyễn Đình Triểu - Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3},d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1,d_2.

A. $14x+4y+8z+13=0$. **B.** $14x-4y-8z-17=0$.

C. $14x-4y-8z-13=0$. **D.** $14x-4y+8z-17=0$.

Lời giải

Chọn B

d_1,d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{n_1}(2;1;3),\overrightarrow{n_2}(2;-1;4)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(7;-2;-4)$.

Gọi $A(2;2;3)\in d_1,B(1;-2;-1)\in d_2$.

Gọi phương trình mặt phẳng $(P):7x-2y-4z+d=0$.

Do mặt phẳng (P) cần tìm cách đều d_1,d_2 nên

$$d\left(A,(P)\right)=d\left(B,(P)\right)\Leftrightarrow\frac{|d-2|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}=\frac{|15+d|}{\sqrt{7^2+2^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow|d-2|=|15+d|\Leftrightarrow d-2=-15-d\Leftrightarrow d=-\frac{13}{2}.$$

Vậy $(P):7x-2y-4z-\frac{13}{2}=0\Leftrightarrow 14x-4y-8z-13=0.$

Câu 66. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$ là:

A. $2y-2z+1=0$. **B.** $2y-2z-1=0$.

C. $2x-2z+1=0$. **D.** $2x-2z-1=0$.

Lời giải

Ta có: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(-1;1;1)$ và đường thẳng d_2 đi qua điểm $A(0;1;2)$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;1)$

Mặt phẳng (P) song song $d_1;d_2$ nên (P) có VTPT là $n=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(0;-1;1)$

Do đó: Mặt phẳng (P) có dạng $y-z+m=0$

Mặt khác: (P) cách đều hai đường thẳng $d_1;d_2$ nên

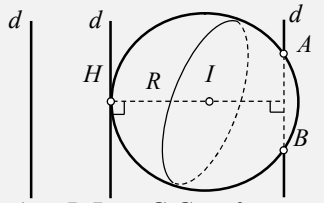
$$d\left(d_1;(P)\right)=d\left(d_2;(P)\right)\Leftrightarrow d\left(A;(P)\right)=d\left(B;(P)\right)\Leftrightarrow|m|=|m-1|\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Vậy $(P):y-z+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2y-2z+1=0$.

Dạng 5. Bài toán liên quan đến vị trí tương đối

1. *Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)*

Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I,\Delta)$ rồi so sánh với bán kính R.

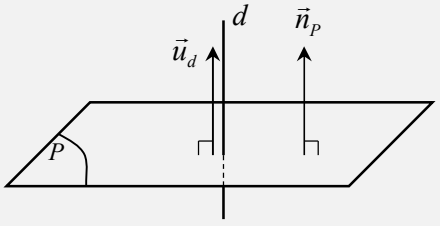


- *Nếu $d(I,\Delta)>R$: Δ không cắt (S).*
- *Nếu $d(I,\Delta)=R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H.*
- *Nếu $d(I,\Delta)<R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B.*
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

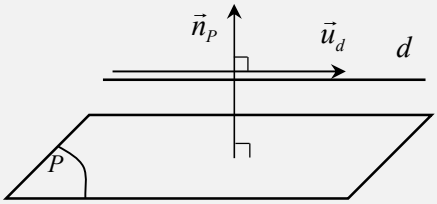
2. *Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)*

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases}$ *và mặt phẳng* $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x=x_\circ+a_1t & (1)\\ y=y_\circ+a_2t & (2)\\ z=z_\circ+a_3t & (3)\\ Ax+By+Cz+D=0 & (4)\end{cases}$ (*)



- *Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α).*
- *Nếu (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d\parallel(\alpha)$.*
- *Nếu (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d\subset(\alpha)$.*



3. *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'*

Cho hai đường thẳng: $d:\begin{cases}x=x_\circ+a_1t\\ y=y_\circ+a_2t\\ z=z_\circ+a_3t\end{cases}$ *và* $d':\begin{cases}x=x'_\circ+a'_1t'\\ y=y_\circ+a'_2t'\\ z=z_\circ+a'_3t'\end{cases}$ *lần lượt qua điểm hai điểm M, N và có véctơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_d$, $\vec{a}_{d'}$.*

- *d song song $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d=k\vec{a}_{d'}\\ M\notin d'\end{cases}$.*
- *d trùng $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d=k\vec{a}_{d'}\\ M\in d'\end{cases}$.*
- *d cắt $d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}_d \text{ ko}\uparrow\uparrow \vec{a}_{d'}\\ [\vec{a},\vec{a}'].\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$*
- *d chéo $d'\Leftrightarrow[\vec{a}_d,\vec{a}_{d'}].\overrightarrow{MN}\neq 0$.*

***Lưu ý**: Nếu d cắt d' ta tìm tọa độ giao điểm bằng giải hệ phương trình:* $\begin{cases}x_\circ+a_1t=x'_\circ+a'_1t'\\ y_\circ+a_2t=y'_\circ+a'_2t'\\ z_\circ+a_3t=z'_\circ+a'_3t'\end{cases}$.

Câu 67. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$, $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

A. Chéo nhau **B.** Trùng nhau **C.** Song song **D.** Cắt nhau

Lời giải

Chọn C

$d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-2}\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=(2;1;-2)$; $d_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}\Rightarrow\overrightarrow{u_2}=(-2;-1;2)$

$\overrightarrow{u_1}=-\overrightarrow{u_2}\Rightarrow d_1//d_2\vee d_1\equiv d_2$

Điểm $M(1;0;-2)\in d_1$; $M\notin d_2$ nên $d_1//d_2$

Câu 68. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\quad \Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2. **C.** Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Lời giải

Vì $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;1)$ của Δ_2. Tức là Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0)\in\Delta_1$, $N(3;3;-2)\in\Delta_2$. Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;4;-2)$.

Khi đó: $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$. Suy ra $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P). **B.** d vuông góc với (P).

C. d song song với (P). **D.** d nằm trong (P).

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}(1;-3;-1)$

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(3;-3;2)$

Ta có $\vec{u}.\vec{n}=3+9-2=10\neq0$ nên loại trường hợp $d//(P)$ và $d\subset(P)$.

Lại có $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không cùng phương nên loại trường hợp $d\perp(P)$.

Vậy d cắt và không vuông góc với (P).

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta\subset(P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

A. $T=2$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=14$. **D.** $T=-14$.

Lời giải

Cách 1: Lấy $\begin{cases}A(0;2;-1)\in\Delta\\B(-2;3;2)\in\Delta\end{cases}$

Mà $\Delta\subset(P)\Rightarrow\begin{cases}A\in(P)\\B\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-n-16=0\\11.(-2)+3m+2n-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=10\\n=4\end{cases}$

$\Rightarrow T = m+n = 14$.

Cách 2: Đường thẳng Δ đi qua $A(0;2;-1)$ có VTCP $\vec{u} = (-2;1;3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (11;m;n)$.

$$\Delta \subset (P) \Rightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n - 16 = 0 \\ -22 + m + 3n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases}.$$

$\Rightarrow T = m+n = 14$.

Câu 71. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x - my - 2z + 19 = 0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d // (\alpha)$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{2\}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;3;-1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (m^2;-m;-2)$.

Để $d // (\alpha)$ thì $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M(1;2;9) \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 2m - 18 + 19 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 72. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x + y - m^2z + m = 0$

A. $m = 1$. **B.** $m \in \varnothing$ **C.** $m \in \{-1;1\}$. **D.** $m = -1$

Lời giải

Chọn D

Một véctơ chỉ phương của d: $\vec{u} = (1;-1;1)$; $A(1;-1;2) \in d$.

Một véctơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = (2;1;-m^2)$.

$$d // (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ A \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot m^2 = 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 - 2m^2 + m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ 1 - 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 - 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 73. Gọi m,n là hai giá trị thực thỏa mãn: giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$.

A. $m + n = 0$. **B.** $m + n = 2$. **C.** $m + n = 1$. **D.** $m + n = 3$.

Lời giải

Chọn D

$(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_P} = (m;2;n)$.

$(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_Q} = (1;-m;n)$.

$(\alpha): 4x-y-6z+3=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(4;-1;-6)$.

Do giao tuyến của (P_m) và (Q_n) vuông góc với (α)

$$\Rightarrow \begin{cases}(P_m)\perp(\alpha)\\(Q_n)\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\\\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}4m-2-6n=0\\4+m-6n=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}4m-6n=2\\m-6n=-4\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$$

Vậy $m+n=3$.

Câu 74. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=m\end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Lời giải

d_1 đi qua điểm $M(1;0;0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1;2;m)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1;0)$.

$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;3;1)$; $\overrightarrow{MN}=(0;2;m)$.

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\neq 0\Leftrightarrow m\neq -6$.

Mặt khác $d(d_1,d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{|m+6|}{\sqrt{19}}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-11\end{array}\right.$.

Khi đó tổng các phần tử của m là -12.

Câu 75. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $(d_2):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_3):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $(d_4):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1=(3;-1;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2=(0;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;1)$.

Do $\overrightarrow{u_1}=\vec{u}_2$ và $M_1\notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;1;2)$, $\left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=(-5;-5;-5)=-5(1;1;1;)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 khi đó (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) là $x+y+z-1=0$.

Gọi $A=d_3\cap(\alpha)$ thì $A(1;-1;1)$. Gọi $B=d_4\cap(\alpha)$ thì $B(-1;2;0)$.

Do $\overrightarrow{AB}=(-2;3;-1)$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$ nên đường thẳng AB cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

Câu 76. **(Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(1;-1;0)$ **B.** $H(-3;0;-2)$ **C.** $H(-1;4;4)$ **D.** $H(3;0;2)$

Lời giải

Chọn D

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$.

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P), ta có:

$2(1+2t)-2(2-2t)-(3-t)-4=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;0;2)$.

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** −1. **C.** 1. **D.** −2.

Lời giải

$\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng $OH \Rightarrow OH: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=2t \end{cases}$

$\Rightarrow H(t;-2t;2t)$

$H \in (P) \Rightarrow t-2.(-2t)+2.2t+9=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(-1;2;-2) \Rightarrow a+b+c=-1$

Câu 78. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I, tiếp xúc với đường thẳng d. Bán kính của (S) bằng

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(1+2t;-t;t)$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d.

Có $\overrightarrow{IH}=(2t;-t;t-2)$; vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;-1;1)$.

Vì H là hình chiếu vuông góc của I trên d nên $\overrightarrow{IH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow 2t.2+(-t).(-1)+(t-2).1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow IH=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R=IH=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M, song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S)?

A. $2x-2y+5z-22=0$. **B.** $2x+y+2z-13=0$.

C. $2x+y-2z-1=0$. **D.** $2x-y+2z-7=0$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $\vec{n}=(2a;b;c)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;2;2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow -6a+2b+2c=0\Leftrightarrow c=3a-b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:

$2a(x-4)+b(y-3)+(3a-b)(z-1)=0\Leftrightarrow 2ax+by+(3a-b)z-11a-2b=0\ (*)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I,(P))=1\Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{4a^2+b^2+(3a-b)^2}}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3|b|}{\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}}=1\Leftrightarrow 3|b|=\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}$.

$\Leftrightarrow 9b^2=13a^2+2b^2-6ab\Leftrightarrow 13a^2-6ab-7b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(13a+7b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\13a=-7b\end{array}\right.$.

Với $a=b$, chọn $a=1,b=1$, thay vào $(*)$ ta được pt$(P_1):2x+y+2z-13=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$. Dễ thấy $N\notin(P_1)$, suy ra $(P_1):2x+y+2z-13=0$ song song với Δ.

Với $13a=-7b$, chọn $a=7,b=-13$, thay vào $(*)$ ta được pt$(P_2):14x-13y+34z-51=0$.

Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$, dễ thấy $N\notin(P_2)$, suy ra $(P_2):14x-13y+34z-51=0$ song song với Δ.

Vậy **chọn B.**

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Vì (P) đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án **A**, **C** bị loại.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;2;2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $\vec{n}.\vec{u}=0$. Do đó phương án **D** bị loại.

Vậy phương án **B** là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80. **(Mã 104 2018)** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$ và điểm $A(-1;-1;-1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S). M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

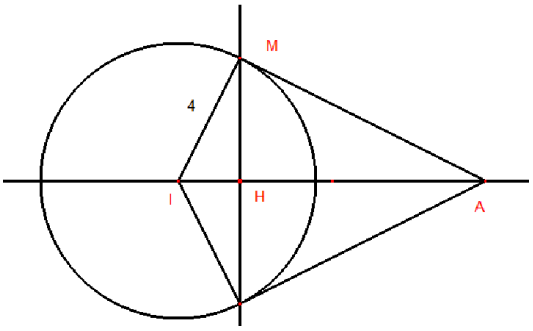
A. $6x+8y+11=0$ **B.** $6x+8y-11=0$ **C.** $3x+4y-2=0$ **D.** $3x+4y+2=0$

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(2;3;-1)$; bán kính $R=4$

$A(-1;-1;-1)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$, tính được $IA=5$.



Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA}=(-3;-4;0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2=IH.IA\Rightarrow IH=\dfrac{IM^2}{IA}=\dfrac{16}{5}$, từ đó tính được $\overrightarrow{IH}=\dfrac{16}{25}\overrightarrow{IA}$ tìm được $H\left(\dfrac{2}{25};\dfrac{11}{25};-1\right)$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $-3\left(x-\dfrac{2}{25}\right)-4\left(y-\dfrac{11}{25}\right)=0\Leftrightarrow 3x+4y-2=0.$

Câu 81. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S), song song với d và Δ?

A. $y+z+3=0$ **B.** $x+z+1=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $x+z-1=0$

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1-2)$; $R=\sqrt{2}$.

Véctơ chỉ phương của d: $\vec{u}_d=(1;2;-1)$. Véctơ chỉ phương của Δ: $\vec{u}_\Delta=(1;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{u}_\Delta\right]=(-1;0;-1)$ nên chọn một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x+z+D=0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=R\Leftrightarrow\dfrac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow|D-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=5\\D=1\end{array}\right.$.

Chọn (P): $x+z+1=0$.

Câu 82. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$. **B.** $-2x+2y-z+4=0$.

C. $x+y+z=0$ **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;1;-4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}$.

Mặt cầu (S)có tâm $I(3;-3;1)$ và bán kính $R=3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u}.\vec{n}=0$ và (P)tiếp xúc với (S) nên $d(I;(P))=3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u}.\vec{n}=0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$.

Ta nhận thấy: $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$ không thỏa mãn đáp án $A;B;C$.

Vậy, đáp án là D.

Câu 83. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$ **C.** $x+y+2z+9=0$ **D.** $x-y+2z+9=0$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\overrightarrow{u_1}(3;-1;-1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1;1;-1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1,d_2 nên $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_1}$ và $\vec{n}\perp\overrightarrow{u_2}$, từ đó ta chọn $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(2;2;4)$. Suy ra $(\alpha):x+y+2z+c=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

(α) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\dfrac{|c-3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c-3=6\\c-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=9\\c=-3\end{array}\right.$.

Câu 84. **(Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian *Oxyz*, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\left\{\begin{array}{l}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{array}\right.$ **B.** $\left\{\begin{array}{l}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{array}\right.$ **C.** $\left\{\begin{array}{l}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{array}\right.$ **D.** $\left\{\begin{array}{l}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{array}\right.$

Lời giải

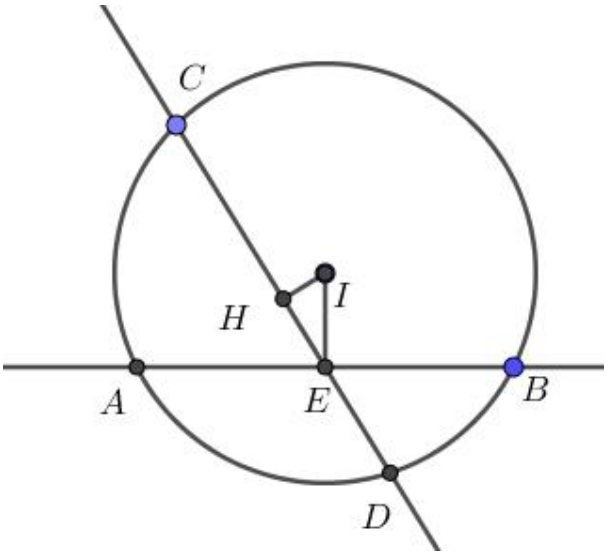
Chọn C

Ta có tâm và bán kính mặt cầu (S) là $I(3;2;5);R=6$

$IE=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}<R$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua E

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ



Dây cung càng nhỏ khi khoảng cách từ tâm tới đường thẳng Δ càng lớn

Ta có $d(I,\Delta)=IH\le IE$

Vậy dây cung nhỏ nhất khi đường thẳng Δ vuông góc với $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;;-2)$

Dựa vào các đáp án ta thấy trong các vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(9;9;8)$ $\overrightarrow{u_3}=(-5;3;0)$ $\overrightarrow{u_3}=(1;-1;0)$ $\overrightarrow{u_4}=(4;3;-3)$

Thì chỉ có $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{IE}=0$

Nhận xét: ta hoàn toàn có thể viết được pt đường thẳng Δ bằng cách viết pt mặt phẳng (Q) đi qua E nhận $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;;-2)$ làm một vecto pháp tuyến, khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)$

Câu 85. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2):x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

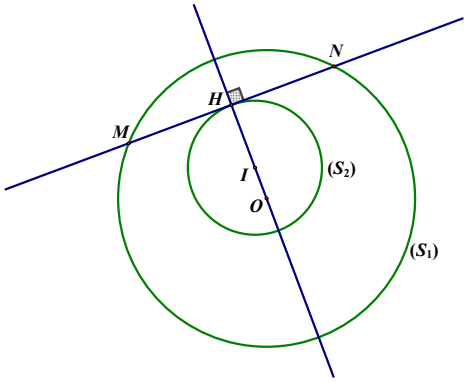
A. $\vec{u}_1=(1;1;\sqrt{3})$ **B.** $\vec{u}_2=(1;1;\sqrt{6})$ **C.** $\vec{u}_3=(1;1;0)$ **D.** $\vec{u}_4=(1;1;-\sqrt{3})$

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1=5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2=2$.

Có $OI=1<R_1-R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1).



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N. Gọi K là trung điểm MN.

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \ge OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1$, $IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \ge OH \ge OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI.

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1;-1;0)$ và vuông góc với $\overrightarrow{OI} = (0;0;1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = \left[\overrightarrow{OI}, \vec{u}\right] = (1;1;0)$.

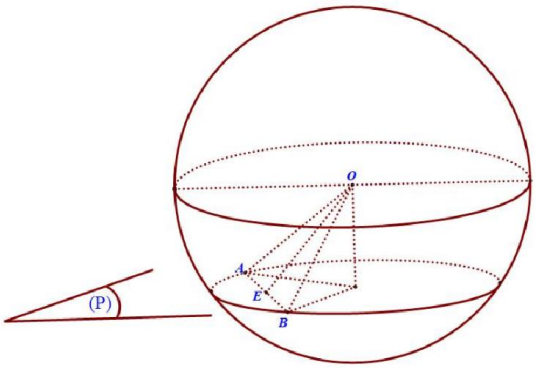
Câu 86. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R = 2$. Tam giác OAB là tam giác đều có cạnh bằng 2.

Gọi M là trung điểm AB ta có $OM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, mặt khác $\overrightarrow{OE}(1;1;1) \Rightarrow OE = \sqrt{3}$. Vậy điểm M trùng điểm E. Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ ta có: $\vec{u} \perp \overrightarrow{OE}$ và $\vec{u} \perp \vec{n}$ (với $\vec{n}(1;-3;5)$ là vectơ pháp tuyến của (P) vì $\Delta \subset (P)$).

$\left[\vec{n}, \overrightarrow{OE}\right] = (-8;4;4)$, chọn $\vec{u} = -\dfrac{1}{4}\left[\vec{n}, \overrightarrow{OE}\right] = (2;-1;-1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua E, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;-1;-1)$ có phương trình là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Câu 87. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a;1;2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

A. $a=-1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$.

Phương trình tham số đường thẳng d_2 qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$ là:

$$d_2:\begin{cases}x=1+at'\\y=0+t'\\z=-1+2t'\end{cases}$$

d_1 nhận $\vec{u}=(1;-2;1)$ làm vectơ chỉ phương và d_2 nhận $\vec{v}=(a;1;2)$ làm vectơ chỉ phương

Đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}1+t=1+at'\\2-2t=0+t'\\3+t=-1+2t'\end{cases}$ có đúng một nghiệm.

Nguyễn Bảo Vương

Ta có:

$$\begin{cases}1+t=1+at'\\2-2t=0+t'\\3+t=-1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-at'=0\\-2t-t'=-2\\t-2t'=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=2\\0-a.2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=2\cdot\\a=0\end{cases}$$

Vậy $a=0$.

Câu 88. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1,(S_2):x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$ và $(S_3):x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

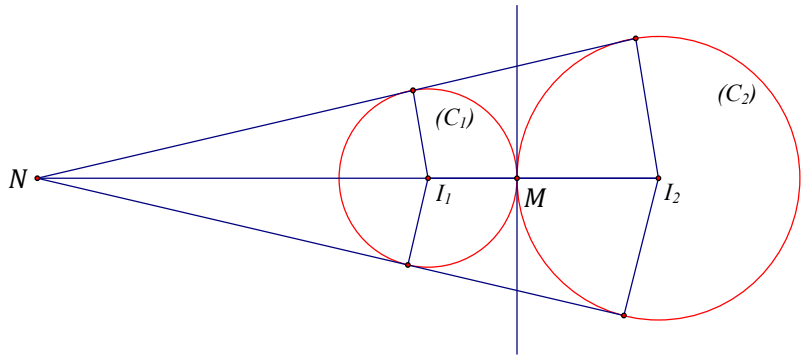
Chọn A

Ta có: $(S_1):\begin{cases}I_1(-3;2;4)\\R_1=1\end{cases}$, $(S_2):\begin{cases}I_2(0;2;4)\\R_2=2\end{cases}$, $(S_3):\begin{cases}I_3(-2;2;0)\\R_2=3\end{cases}$

$\Rightarrow I_1I_2=3=R_1+R_2\Rightarrow(S_1),(S_2)$ tiếp xúc với nhau tại M.

Ta có $\overrightarrow{MI_2}=2\overrightarrow{I_1M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{I_1I_2}\Rightarrow M(-2;2;4)$

Cắt hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1),(C_2)$.



Trường hợp 1: Mặt phẳng qua M vuông góc với I_1I_2 có phương trình là $(\alpha): x+2=0$ mà $d(I_3;(\alpha))=0 \Rightarrow (\alpha)$ không tiếp xúc với $(S_3) \Rightarrow$ **LOẠI.**

Trường hợp 2: N là tâm vị tự ngoài của $(C_1),(C_2) \Rightarrow \overrightarrow{NI_2}=2\overrightarrow{NI_1}=2\overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow N(-6;2;4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu. (P) qua N và có vtpt là $\vec{n}(1;a;b)$

$\Rightarrow (P): x+6+a(y-2)+b(z-4)=0 \Leftrightarrow (P): x+ay+bz-2a-4b+6=0$.

Có: $\begin{cases} d(I_1;(P))=1 \\ d(I_2;(P))=2 \\ d(I_3;(P))=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{1+a^2+b^2} \\ 6=2\sqrt{1+a^2+b^2} \\ |4b-4|=3\sqrt{1+a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{13}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Với $b=\dfrac{13}{4} \Rightarrow a^2=-\dfrac{41}{16}$ (loại)

Với $b=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow a^2=\dfrac{103}{16} \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{103}}{4}$

Vậy có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(1;2;-1)$.

C. $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên có tọa độ dang: $I(1+2t;-t;-2+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I,Oy)=R \Leftrightarrow \sqrt{(1+2t)^2+(-2+t)^2}=5$

$\Leftrightarrow\sqrt{5t^2+5}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $I(5;-2;0)$ (Loại).

Với $t=-2$ ta có $I(-3;2;-4)$ (Thỏa mãn).

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.

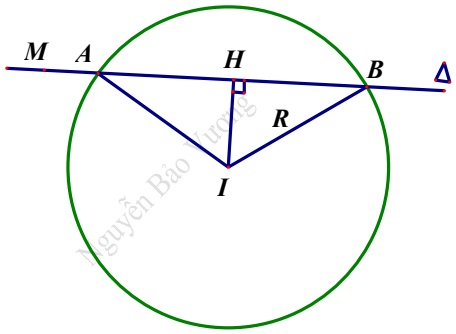
Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm $N(1;2;-1)$ thỏa mãn.

Câu 90. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta:\left\{\begin{array}{l}x=4+2t\\y=3+t\\z=3+2t\end{array}\right.$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB\Rightarrow IH\perp AB$, $HA=4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2\,;3\,;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$, $(m<13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4\,;3\,;3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2\,;1\,;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6\,;0\,;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6\,;6)\Rightarrow IH=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$.

Ta có: $R^2=IH^2+HA^2\Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2\Leftrightarrow m=-12$.

Câu 91. **(SGD Bến Tre 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\left\{\begin{array}{l}x=4-2t\\y=t\\z=3\end{array}\right.,(t\in\mathbb{R}),d_2:\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=t'\\z=-t'\end{array}\right.,(t'\in\mathbb{R})$.

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ là:

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{9}{4}$. **B.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{3}{2}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$. **D.** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chon C

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1),(d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Lấy $A(4-2t;t;3)\in d_1; B(1;t';-t')\in d_2$. A,B là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5t+t'=-6\\ -t+2t'=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ t'=-1\end{cases}$.

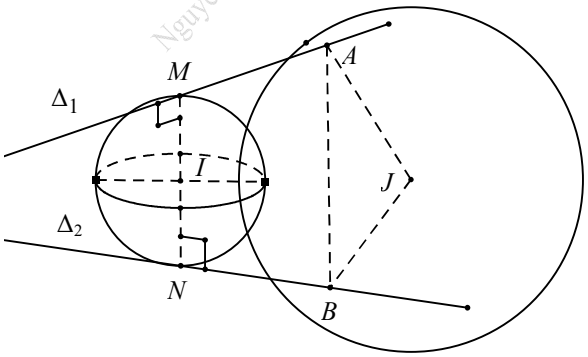
Khi đó $A(2;1;3); B(1;-1;1)$. Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$, bán kính $R=\frac{3}{2}$.

Câu 92. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\Delta_1:\begin{cases}x=4+3t_1\\ y=1-t_1\\ z=-5-2t_1\end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=2+t_2\\ y=-3+3t_2\\ z=t_2\end{cases}$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$, gọi $\vec{u}_1(3;-1;-2),\vec{u}_2(1;3;1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng.

Gọi $M\in\Delta_1\Rightarrow M(4+3t_1;1-t_1;-5-2t_1); N\in\Delta_2\Rightarrow N(2+t_2;3t_2-3;t_2)$.

Suy $\overrightarrow{MN}=(t_2-3t_1-2;3t_2+t_1-4;t_2+2t_1+5)$.

MN là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7t_1+t_2=-6\\ 2t_1+11t_2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=-1\\ t_2=1\end{cases}$.

$\overrightarrow{MN} = (2;-2;4) \Rightarrow MN = 2\sqrt{6}.$

Giả sử (S) là mặt cầu tâm J đường kính d tiếp xúc với lần lượt Δ_1, Δ_2 tại A, B. Khi đó $JA + JB \geq AB$. Hay $d \geq AB \geq MN \Rightarrow d \geq MN$. Vậy đường kính d nhỏ nhất khi $d = MN$. Suy ra mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $r = \dfrac{MN}{2} = \sqrt{6}$.

Cách khác

Hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1, Δ_2 là (P), (Q). Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên đường kính cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ hay là khoảng cách từ Δ_2 đến (P).

Gọi $\vec{u}_1(3;-1;-2), \vec{u}_2(1;3;1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng, $N(2;-3;0) \in \Delta_2$.

$\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = (5;-5;10) \Rightarrow \vec{n}_p = \left(1;-1;2\right)$, phương trình $(P): x - y + 2z + 7 = 0$.

$d((P),(Q)) = d(\Delta_2,(P)) = d(N,(P)) = \dfrac{\left|2 + 3 + 7\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính cần tìm là $\sqrt{6}$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán liên quan đến mặt cầu – mặt phẳng – đường thẳng

Câu 1. **(Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{3}$ **B.** $R=2$ **C.** $R=1$ **D.** $R=\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;2;1)$

$d(I;(P))=\dfrac{|3+2+1|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R'=\dfrac{AB}{2}=3\sqrt{2}$

Ta có $H\in(S)$. Mặt khác $H\in(P)$ nên $H\in(C)=(S)\cap(P)$

Bán kính của đường tròn (C) là $R=\sqrt{(R')^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P):2x+6y+z-3=0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36.$ **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9.$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9.$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36.$

Lời giải

Chọn B

$(P)\cap Oz=A(0;0;3)$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\ 2x-y-10=0\\ y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-2\\ z=7\end{cases}\Rightarrow B(4;-2;7)$. Gọi I là trung điểm của

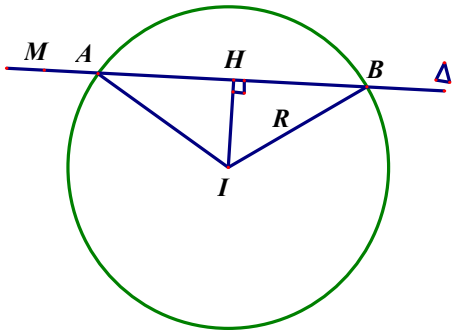
$AB\Rightarrow I(2;-1;5)\Rightarrow IA=\sqrt{4+1+4}=3.$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9.$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ (m là tham số) và đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=4+2t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=8$. Giá trị của m là

A. $m=5$. **B.** $m=12$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=-10$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$, $HA=4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2\,;3\,;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$, $(m<13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4\,;3\,;3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2\,;1\,;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(6\,;0\,;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-3;-6\,;6)\Rightarrow IH=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$.

Ta có: $R^2=IH^2+HA^2\Leftrightarrow 13-m=3^2+4^2\Leftrightarrow m=-12$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0$; $(Q):x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(S):(x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I\in(d)\Rightarrow I(2t;3+t;2+t)$.

$I\in(P)\Rightarrow(P):2t-2(3+t)+2(2+t)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;4;3)$

(Q) tiếp xúc với (S) nên $R=d(I,(Q))=\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

Vậy $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha):x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S). Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ?

A. $\vec{u}=(4;-2;1)$. **B.** $\vec{v}=(2;0;-1)$. **C.** $\vec{m}=(-3;1;0)$. **D.** $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.

Ta có $d(I,(\alpha))=\sqrt{14}=R\Rightarrow(\alpha)$ tiếp xúc với (S).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha)\Rightarrow H(1;0;2)$

Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A(a;0;0)$ và $\overrightarrow{AH}=(a-1;0;-2)$

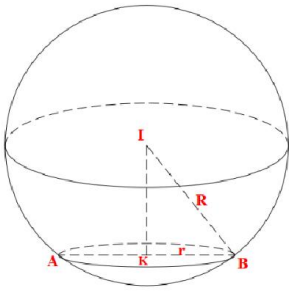
Đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$. Tức là

$a-1+0-4=0\Leftrightarrow a=5\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(4;0;-2)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;0;-1)$.

Câu 6. **(Bình Dương - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B.** $K(-1;2;3)$, $r=8$. **C.** $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D.** $K(1;2;3)$, $r=6$.

Lời giải



- Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$; $R=10$.
- Khoảng cách từ I đến (P) là $IK=d(I;(P))=\dfrac{|6+4-1+9|}{3}=6$.
- Đường thẳng qua $I(3;-2;1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\end{cases}$ khi đó

Tọa độ tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\\2x-2y-z+9=0\end{cases}\Rightarrow K(-1;2;3)$.

- Bán kính: $r=\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{100-36}=8$.

Câu 7. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Có $A(1;1;1), B(2;2;1) \Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1;-1;1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H.

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 8. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. **B.** $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$. **D.** $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x+3y-12z+c=0\,(c\neq 10)$.

(β) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I;(\beta)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4.1+3.2-12.3+c|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{|-26+c|}{13} = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26+c=52 \\ -26+c=-52 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=78 \\ c=-26 \end{array}\right.$

Nếu $c=78$ thì $(\beta): 4x+3y-12z+78=0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;\dfrac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c=-26$ thì $(\beta): 4x+3y-12z-26=0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0;0;-\dfrac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

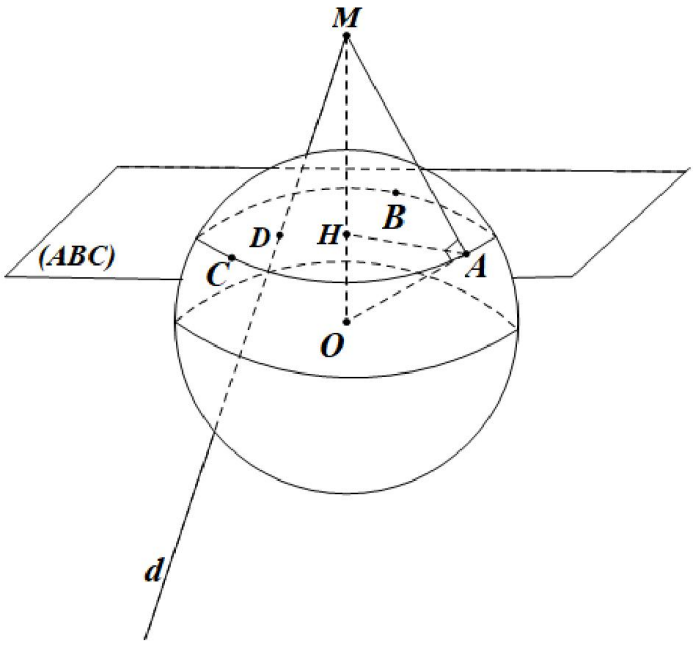
Vậy $(\beta): 4x+3y-12z+78=0$.

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B



* Ta có: $M(x_0;y_0;z_0)\in d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$.

* Mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow$ tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

* MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO\perp(ABC)$.

$\Rightarrow (ABC)$ đi qua $D(1;1;2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình dạng:

$x_0(x-1)+y_0(y-1)+z_0(z-2)=0$.

* MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A\Rightarrow \Delta MOA$ vuông tại $A\Rightarrow OH.OM=OA^2=R^2=9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) $(OH+OM=HM)$, ta có:

$$d(O;(ABC))=OH=\frac{|-x_0-y_0-2z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|x_0+y_0+z_0+z_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=\frac{|z_0+4|}{OM}\Rightarrow OH.OM=|z_0+4|.$$

$\Rightarrow |z_0+4|=9\Leftrightarrow z_0=5\vee z_0=-13$.

* Với $z_0=5\Rightarrow M(0;-1;5)\Rightarrow T=26$ nhận do: $OM=\sqrt{26};OH=\frac{|z_0+4|}{OM}=\frac{9}{\sqrt{26}}$;

$pt(ABC):-y+5z-9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\frac{17}{\sqrt{26}}$.

$\Rightarrow OH+HM=OM$.

* Với $z_0=-13\Rightarrow M(6;11;-13)\Rightarrow$ loại do: $OM=\sqrt{326};OH=\dfrac{9}{\sqrt{326}}$;

$(ABC):6x+11y-13z+9=0\Rightarrow MH=d(M;(ABC))=\dfrac{335}{\sqrt{326}}$.

$\Rightarrow OH+HM\neq OM$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, ta có $K(t;2+t;-t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$.

Vì $IK\perp d$ nên $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IK}=0\Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1)=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow\overrightarrow{IK}(-1;2;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng IK là $\begin{cases}x=1-t'\\y=2t'\\z=-1+t'\end{cases}$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t';2t';-1+t')\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(-t';2t';t')$. Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}=IT^2\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}=1\Leftrightarrow t'+4t'+t'=1\Leftrightarrow t'=\dfrac{1}{6}\Rightarrow H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$ và bán kính $R=6$.

$IE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R\Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp OE$, mà $AB\perp IH$ nên $AB\perp(HIE)\Rightarrow AB\perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EI}\right]=(5;-5;0)=5(1;-1;0)$.

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$.

Câu 12. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t, t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$. **C.** $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Lời giải

Chon A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu $I(3;1;0)$ lên d, từ đó ta tìm được $H(3;0;-1)$. Thấy $IH\le R$ nên d cắt (S). Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ làm VTPT nên pt mặt phẳng là $y+z+1=0$.

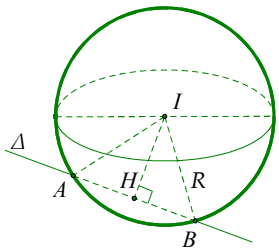
Câu 13. (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P):x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \\ z=5+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D



$(S):x^2+y^2+z^2=4\Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R=2$.

$(P):x-3y+5z-3=0\Rightarrow$ véctơ pháp tuyến của $(P):\vec{n}_P=(1;-3;5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta\Rightarrow AH=BH=\dfrac{AB}{2}=1$.

Xét ΔIAH vuông tại $H\Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{IE}=(1;1;1)\Rightarrow IE=\sqrt{3}=IH\Rightarrow H\equiv E\Rightarrow IE\perp\Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Véctơ chỉ phương của $\Delta:\vec{n}_\Delta=\left[\vec{n}_P;\overrightarrow{IE}\right]=(-8;4;4)$.

$\Rightarrow$ véctơ $\vec{u}=(2;-1;-1)$ cũng là véctơ chỉ phương của Δ.

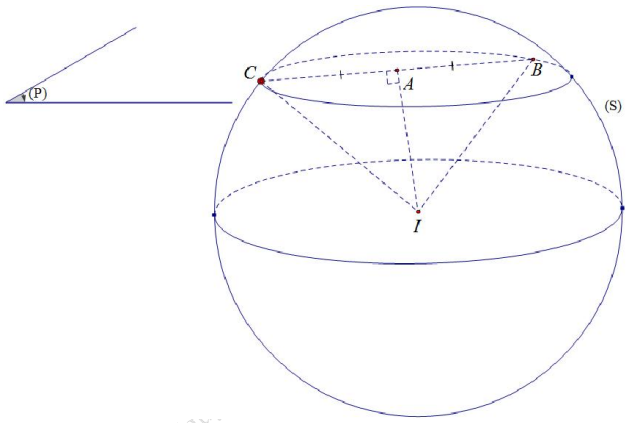
Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 14. **(SGD Cần Thơ 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-7=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S). Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-2-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm $I(1;2;0)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+7}=2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AI}=(1;1;2) \Rightarrow AI=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) và A nằm trên dây cung BC (1).

$S_{\Delta IBC}=\frac{1}{2}IB.IC.\sin\widehat{BIC}=\frac{R^2}{2}\sin\widehat{BIC}\le\frac{R^2}{2}$ nên diện tích ΔIBC đạt giá trị lớn nhất là

$\frac{R^2}{2} \Leftrightarrow \sin\widehat{BIC}=1 \Rightarrow \widehat{BIC}=90^\circ \Rightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại $I \Rightarrow BC=IC\sqrt{2}=R\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

Gọi J là trung điểm của BC. Ta có $IJ \perp BC$ và $IJ=\frac{BC}{2}=\sqrt{6}$ (2).

ΔAIJ vuông tại $J \Rightarrow AI \ge IJ$, kết hợp thêm với (1) và (2) ta có $IJ=AI \Rightarrow A \equiv J \Rightarrow A$ là trung điểm của BC và $IA \perp BC$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ có giá vuông góc với Δ.

Vậy Δ nhận $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(P)},\overrightarrow{AI}\right]=(1;-1;0)$ làm vectơ chỉ phương và đi qua $A(0;1;-2)$

$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z+2=0$, $K(0;0;-2)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K, bán kính $r=\sqrt{5}$ là

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$.

B. $x^2+y^2+z^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-2)^2=9$.

D. $x^2+y^2+z^2=9$.

Lời giải

Chọn D

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I\in d$ nên giả sử $I(t;t;t)$. Có $\overrightarrow{IK}=(-t;-t;-2-t)$.

Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng (P) là đường tròn tâm K nên ta có $IK\perp(P)$. Suy ra $\overrightarrow{IK}$ và $\vec{n}=(0;0;1)$ cùng phương. Do đó tồn tại số thực k để $\overrightarrow{IK}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -t=k.0 \\ -t=k.0 \\ -2-t=k.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ k=-2 \end{cases}$.

Suy ra $I(0;0;0)$. Tính được $d(I,(P))=2$.

Gọi R là bán kính mặt cầu. Ta có: $R=\sqrt{r^2+\left[d(I,(P))\right]^2}=3$.

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2+y^2+z^2=9$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

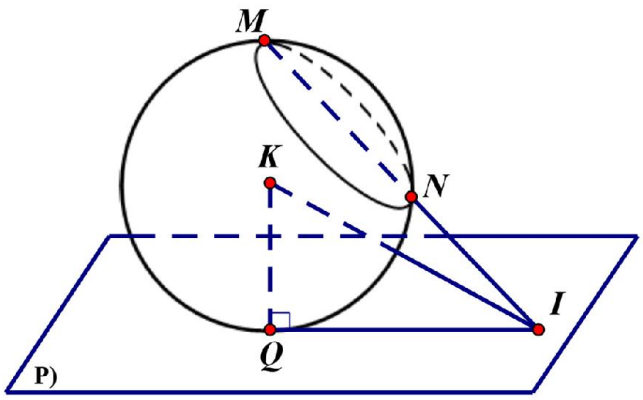
B. $R=6$.

C. $R=\frac{2\sqrt{33}}{3}$.

D. $R=4$.

Lời giải

Chọn B



* Đường thẳng MN có phương trình là: $MN:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

* Gọi $I=MN\cap(P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$1+t+1+t-1-t-3=0\Leftrightarrow t-2=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow I(3;3;3)\Rightarrow IM=2\sqrt{3},\ IN=6\sqrt{3}$.

* Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$IQ^2=IM.IN=KI^2-R^2\Rightarrow IQ^2=IM.IN=36\Leftrightarrow IQ=6$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R=6$.

Câu 17. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;0)$, bán kính $R=3$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\\(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9\end{cases}\Rightarrow 9t^2+2t-6=0\ (1)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$d(I,(P))=\dfrac{|2.1-2.(-3)+0+3|}{3}=\dfrac{11}{3}>R\Rightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung.

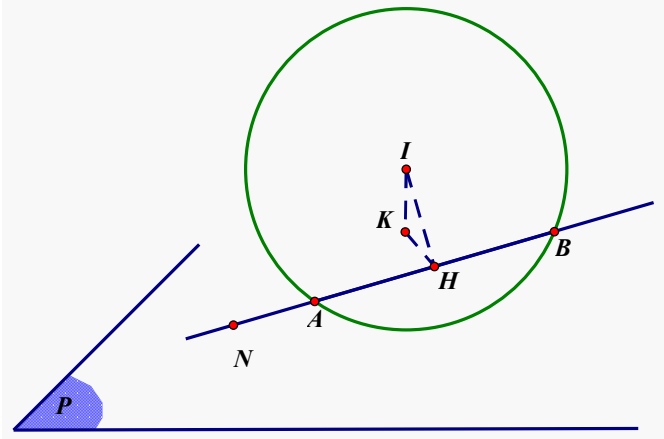
Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=-2t\\y=-2+t\\z=-1+2t\\2x-2y+z+3=0\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{3}{2}$. d cắt (P) tại một điểm.

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Câu 18. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3^2$, mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P). Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c>0)$ là một vecto chỉ phương của Δ, tổng $b+c$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 45.

Lời giải



Chọn D

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Suy ra H là trung điểm của đoạn AB nên $AH=2\Rightarrow d(I,\Delta)=IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5}$ và $IK=d(I,(P))=\dfrac{|1-2+1+3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Ta có $\left.\begin{matrix}IK\perp(P)\\ \Delta\subset(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow IK\perp\Delta$ mà $IH\perp\Delta\Rightarrow\Delta\perp KH$

hay $KH=d(K,\Delta)$ và $KH=\sqrt{IH^2-IK^2}=\sqrt{2}$.

Do $IK\perp(P)$ nên phương trình tham số đường thẳng $IK:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=1+t\end{cases}\Rightarrow K(1+t;2-t;1+t)$.

Mà $K\in(P)\Rightarrow 1+t-2+t+1+t+3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow K(0;3;0)$

Từ đây ta có $KH=d(K,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{KN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{(4b-3c)^2+(-c-4)^2+(b+3)^3}}{\sqrt{1+b^2+c^2}}=\sqrt{2}$ (*).

Mặt khác ta có $\Delta\subset(P)\Rightarrow\vec{u}\perp\overrightarrow{n_P}\Rightarrow\vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 1-b+c=0\Leftrightarrow b=c+1$.

Thay vào (*) ta được

$\sqrt{(c+4)^2+(-c-4)^2+(c+4)^3}=\sqrt{2}\sqrt{1+(c+1)^2+c^2}$

$\Leftrightarrow 3c^2-24c+48=4c^2+4c+4$

$\Leftrightarrow c^2-20c-44=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=22\,(N) \\ c=-2\,(L) \end{array}\right.$

Suy ra $b=23\Rightarrow b+c=45$.

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **D.** $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Lời giải

Gọi $A;B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường. Gọi M là trung điểm AB. Dễ có mặt cầu tâm M bán kính $R=\frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A;B$ lần lượt là:

$A(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1)$ và $B(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2)$.

Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).1+(t_2-2t_1+2).2=0 \\ (2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).2+(t_2-2t_1+2).1=0 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8t_2-9t_1+10=0 \\ 9t_2-8t_1+10=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1=\frac{10}{17} \\ t_2=\frac{-10}{17} \end{array}\right.\Rightarrow A(\frac{3}{17};\frac{-7}{17};\frac{3}{17});\mathrm{B}(\frac{-3}{17};\frac{-3}{17};\frac{7}{17})\ \overrightarrow{AB}(\frac{-6}{17};\frac{4}{17};\frac{4}{17})$.

$R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{(-6)^2+4^2+4^2}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Diện tích mặt cầu cần tính là $S=4\pi.R^2=4.\pi.\frac{1}{\sqrt{17}^2}=\frac{4\pi}{17}$ (đvdt).

Câu 20. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\left\{\begin{array}{l} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{array}\right.$ và $d_2:\left\{\begin{array}{l} x=3-t' \\ y=t' \\ z=0 \end{array}\right.$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$. **B.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;0)$.

Đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2, đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t;t;4)$ thuộc d_1; gọi điểm $N(3-t';t';0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(3-t'-2t;t'-t;-4)$.

MN là đoạn thẳng vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2.(3-t'-2t)+t'-t=0\\ (-1).(3-t'-2t)+t'-t=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'+5t=6\\ 2t'+t=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t'=1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}M(2;1;4)\\ N(2;1;0)\end{cases}$.

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S), do đó điểm I là trung điểm MN.

$\Rightarrow I(2;1;2)\Rightarrow R=IM=IN=2$.

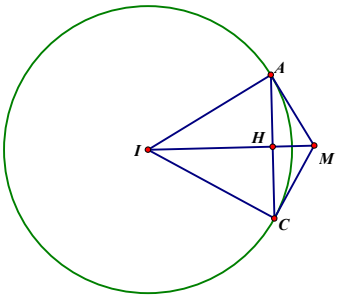
Suy ra mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

Câu 21. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0$, $\widehat{BMC}=60^0$, $\widehat{CMA}=120^0$. Tính $a^3+b^3+c^3$.

A. $a^3+b^3+c^3=\dfrac{173}{9}$. **B.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$. **C.** $a^3+b^3+c^3=-8$. **D.** $a^3+b^3+c^3=\dfrac{23}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+13}=3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).

Đặt $MA=MB=MC=x$ khi đó $AB=x;BC=x\sqrt{2};CA=x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC}=120^0$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3}=R\Leftrightarrow x=3$ suy ra $IM=2AM=2x=6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t;-2+t;1+t),(t>1)$ mà $IM=6$ nên $(t-2)^2+(t-4)^2+(t+4)^2=36$

$\Leftrightarrow 3t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

Mà a > 0 nên $t=\dfrac{4}{3}$ suy ra $H\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ nên $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}$.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. **B.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

C. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$. **D.** $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{8}$.

Lời giải

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\dfrac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R \Rightarrow (\alpha)\cap(S)=C(H;r), H$ là hình chiếu của I lên (α).

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1: \left\{\begin{array}{l} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{array}\right.$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\left\{\begin{array}{l} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=7 \\ z=3 \end{array}\right. \Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

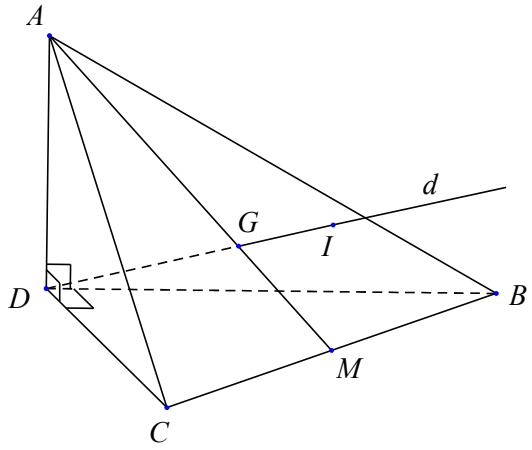
Suy ra phương trình $\Delta: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 23. **(Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-4$ **B.** $S=-1$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-3$

Lời giải

Chọn B



Gọi d là trục của ΔABC, ta có $(ABC): x+y+z+2=0$.

Do ΔABC đều nên d đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;1;1)$, suy ra

$$d:\begin{cases}x=-\frac{2}{3}+t\\ y=-\frac{2}{3}+t\\ z=-\frac{2}{3}+t\end{cases}.$$

Ta thấy $\Delta DAB=\Delta DBC=\Delta DCA$, suy ra $DA=DB=DC\Rightarrow D\in d$ nên giả sử $D\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t\right)$

Có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{2}{3}\Rightarrow D\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)\\ t=\frac{2}{3}\Rightarrow D(0;0;0)(loai)\end{array}\right.$.

Ta có $I\in d\Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$, do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm I nên

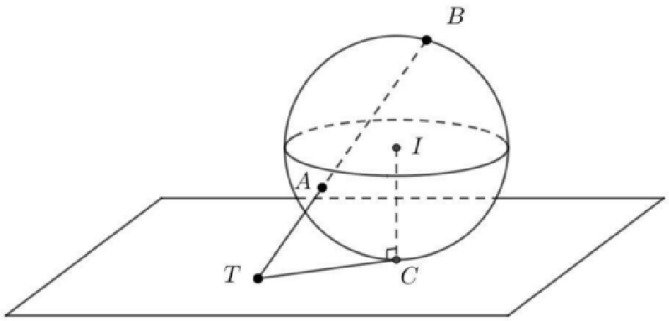
$IA=ID\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow S=-1$.

Câu 24. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. Đáp án khác. **B.** $r=\frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\frac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Lời giải

Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4-2t \end{cases}$.

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T \in (P): 2x+y+2z-1=0 \Rightarrow t = \dfrac{-7}{3}$.

Khi đó

$T\left(-7;\dfrac{-7}{3};\dfrac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7;\dfrac{7}{3};\dfrac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA = \dfrac{7\sqrt{14}}{3}; \overrightarrow{TB}\left(10;\dfrac{10}{3};\dfrac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB = \dfrac{10\sqrt{14}}{3}$.

Ta có $TC^2 = TA.TB = \dfrac{980}{9} \Rightarrow TC = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\dfrac{TA}{TB} = \dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{7}{10}$; $AB = \sqrt{14}$.

Giả sử AB cắt (P) tại T. Suy ra A nằm giữa B và T (vì A,B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \dfrac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \dfrac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \dfrac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA.TB = \dfrac{980}{9} \Rightarrow TC = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 25. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1;-1;6)$, $A(1;2;3)$, $B(3;1;2)$, $C(4;2;3)$, $D(2;3;4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;1;1)$ và $\overrightarrow{DC} = (2;-1;-1)$.

Ta thấy: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=2.1-1.1-1.1=0$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi M là trung điểm của AC. Ta có: $M\left(\frac{5}{2};2;3\right)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(0;-3;3)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}=(0;-1;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ y=2-t\\ z=3+t\end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=(0;3;-3)$. Ta thấy $\overrightarrow{SA}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên suy ra $SA\perp(ABCD)$.

Gọi N là trung điểm của SA, ta có: $N\left(1;\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Do $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ nên $\begin{cases}I\in d\\ NI\perp d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I\left(\frac{5}{2};2-t;3+t\right)\\ \overrightarrow{NI}\perp\vec{u}\end{cases}$.

Mà: $\overrightarrow{NI}=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}-t;-\frac{3}{2}+t\right)$. Suy ra: $\overrightarrow{NI}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t-\frac{3}{2}+t-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AD}\right]=(6;-3;-3)$.

Một vectơ pháp tuyến của (SAD) là: $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AD}\right]=(2;-1;-1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (SAD) là:

$2(x-1)-(y-2)-(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y-z+3=0$.

Vậy $d(I,(SAD))=\frac{\left|2.\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+3\right|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R=d(I,(\alpha))=d(I,(\beta))$.

Mà $d(I,(\beta))=\frac{\left|\frac{a}{m}+\frac{b}{1-m}+c-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}}$

Ta có

$$\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(1-m)^2}+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{1-m}\right)^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)}\right]^2-2\frac{1}{m}.\frac{1}{1-m}+1}=\frac{1}{m(1-m)}-1(\text{do } m\in(0;1)$$

Nên

$$R=\frac{\left|\frac{a(1-m)+bm+cm(1-m)-m(1-m)}{m(1-m)}\right|}{\frac{1}{m(1-m)}-1}$$

$$\Leftrightarrow R=\frac{|a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2|}{m^2-m+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R-Rm+Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\\-R+Rm-Rm^2=a-am+bm+cm-cm^2-m+m^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2(R+c-1)+m(a-b-c-R+1)+R-a=0(1)\\m^2(R+c-1)+m(b+c-a-R-1)+R+a=0(2)\end{array}\right.$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ với mọi $m\in(0;1)$ nên pt (1) nghiệm đúng với mọi $m\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\a-b-c-R+1=0\\R-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=R\\b=R\\c=1-R\end{cases}\Rightarrow I(R;R;1-R).$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|2R-R+2(1-R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12-R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=3\\R=-6(l)\end{array}\right.$

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow\begin{cases}R+c-1=0\\b+c-a-R-1=0\\R+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-R\\b=-R\\c=R+1\end{cases}\Rightarrow I(-R;-R;R+1)$$

Mà $R=d(I,(\alpha))\Leftrightarrow R=\frac{|-2R+R+2(1+R)+10|}{3}\Leftrightarrow 3R=|12+R|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=6\\R=-3(l)\end{array}\right.$.

Vậy $R_1+R_2=9$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B. Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là: $d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|5-2.(-3)+2.5-3\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=6$.

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có:

$IA=\sqrt{IB^2+AB^2}=\sqrt{R^2+AB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2+4^2}=6=d\left(I;(P)\right)\Rightarrow A$ là hình chiếu của I lên (P)

Đường thẳng IA đi qua $I\left(5;-3;5\right)$ có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_{(P)}}=\left(1;-2;2\right)$ có phương trình $\begin{cases}x=5+t\\y=-3-2t\\z=5+2t\end{cases}$

Có $A=IA\cap(P)\Rightarrow 5+t-2(-3-2t)+2(5+2t)-3=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow A(3;1;1)\Rightarrow OA=\sqrt{11}$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng $\left(ABC\right)$ đi qua $D\left(1;1;2\right)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $O\left(0;0;0\right)$ và bán kính R. Gọi $M\left(1+t_0;1+2t_0;2-3t_0\right)\in d$.

Gỉa sử $T\left(x;y;z\right)\in\left(S\right)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu $\left(S\right)$. Khi đó

$OT^2+MT^2=OM^2$

$\Leftrightarrow 9+\left[x-\left(1+t_0\right)\right]^2+\left[y-\left(1+2t_0\right)\right]^2+\left(z-\left(2-3t_0\right)\right)^2=\left(1+t_0\right)^2+\left(1+2t_0\right)^2+\left(2-3t_0\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)+\left(2-3t_0\right)z-9=0$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ có dạng $\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)y+\left(2-3t_0\right)z-9=0$

Do $D\left(1;1;2\right)\in\left(ABC\right)$ nên $1+t_0+1+2t_0+2.\left(2-3t\right)-9=0\Leftrightarrow t_0=-1\Rightarrow M\left(0;-1;5\right)$.

Vậy $T=0^2+\left(-1\right)^2+5^2=26$.

Câu 29. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A\left(0;0;3\right),B\left(-2;0;1\right)$ và mặt phẳng $\left(\alpha\right):2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ sao cho tam giác ABC đều?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Gọi $\left(P\right)$ mặt phẳng trung trực của AB, khi đó phương trình của $\left(P\right)$ là: $x+z-1=0$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=\left(1;0;1\right),\overrightarrow{n_\alpha}=\left(2;-1;2\right)$ nên $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_\alpha}\right]=\left(1;0;-1\right)$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ với mặt phẳng $\left(\alpha\right)$. Chọn $\overrightarrow{u_d}=\left(1;0;-1\right)$

và điểm $M\left(1;10;0\right)\in d$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=10\\z=-t\end{cases}$.

Do tam giác ABC đều nên $CA=CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C\in\left(\alpha\right)$ nên $C\in\left(P\right)\cap\left(\alpha\right)=d$ suy ra tọa độ C có dạng $C\left(1+t;10;-t\right)$.

Do ΔABC đều nên $AC = AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$\sqrt{(1+t-0)^2+(10-0)^2+(-t-3)^2} = \sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(1-3)^2} \Leftrightarrow t^2+4t+51=0(*)$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. **B.** 26. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=9$ có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R_1=3$.

$M\in d \Leftrightarrow M(1+a; 1+2a; 2-3a)$.

Do MA, MB, MC là những tiếp tuyến tại A, B, C với mặt cầu (S_1).

Suy ra $MA^2=MB^2=MC^2=OM^2-9$.

Khi đó A, B, $C\in(S_2)$ có tâm là M, bán kính $R_2=\sqrt{OM^2-9}$.

Ta có phương trình $(S_2): (x-(a+1))^2+(y-(2a+1))^2+(z-(2-3a))^2=OM^2-9$.

$\Leftrightarrow (S_2): x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0$.

Mặt khác theo giả thiết A, B, C cùng thuộc mặt cầu (S_1).

Suy ra tọa độ A, B, C thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-9=0\\x^2+y^2+z^2-2(a+1)x-2(2a+1)y-2(2-3a)z+9=0\end{cases}$.

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2(a+1)x+2(2a+1)y+2(2-3a)z-18=0$.

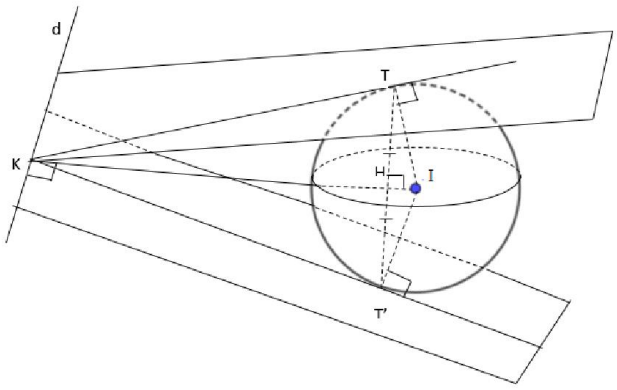
$D\in(ABC) \Leftrightarrow 2(a+1)+2(2a+1)+4(2-3a)-18=0 \Leftrightarrow a=-1$.

Với $a=-1$, ta có $M(0;-1;5)$. Khi đó $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2=26$.

Câu 31. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$

$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0.\Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2=IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(IK=\sqrt{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{1}{6}.(-1)\\ y-0=\dfrac{1}{6}.2\\ z+1=\dfrac{1}{6}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{6}\\ y=\dfrac{1}{3}\\ z=\dfrac{-5}{6}\end{cases}$$ Vậy $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{-5}{6}\right)$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 32. Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Do d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) khi đó d' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-3;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;0;2)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(-3;2;-1)$ là $3x-2y+z+4=0$.

Do Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) khi đó Δ' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;-2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $B(3;1;4)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(0;-2;-2)$ là $y+z-5=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+y-z+2=0\\3x-2y+z+4=0\\y+z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=3\end{cases}$.

Vậy $M(-1;2;3)\Rightarrow a+b.c=-1+2.3=5$.

Câu 33. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x-my+z+2m-1=0$ và $(\beta):mx+y-mz+m+2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy). Biết rằng với mọi số thực m thay đổi thì đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(\alpha):x-my+z+2m-1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-m;1)$.

Mặt phẳng $(\beta):mx+y-mz+m+2=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(m;1;-m)$.

Ta có $M\left(-m-\frac{1}{m};0;-m+\frac{1}{m}+1\right)\in d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=\left(m^2-1;2m;m^2+1\right)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Oxy). Khi đó (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=\left(2m;1-m^2;0\right)$(với $\vec{k}=(0;0;1)$).

Phương trình mặt phẳng (P) là $2mx+\left(1-m^2\right)y+2m^2+2=0$.

Trong mặt phẳng (Oxy), gọi $I(a;b;0)$ là tâm đường tròn.

Theo giả thiết Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Rightarrow d(I;d)=d\left(I;(P)\right)=R$ (cố định)

$$\Leftrightarrow\frac{\left|2ma+\left(1-m^2\right)b+2m^2+2\right|}{\sqrt{4m^2+\left(1-m^2\right)^2}}=R>0\Leftrightarrow\frac{\left|2am+(2-b)m^2+b+2\right|}{m^2+1}=R>0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2am+(2-b)m^2+b+2=R\left(m^2+1\right)\\2am+(2-b)m^2+b+2=-R\left(m^2+1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a=0\\2-b=R\\b+2=R\end{cases}\\\begin{cases}2a=0\\2-b=-R\\b+2=-R\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=0\\R=2>0\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=0\\R=-2<0\end{cases}\end{array}\right.$$

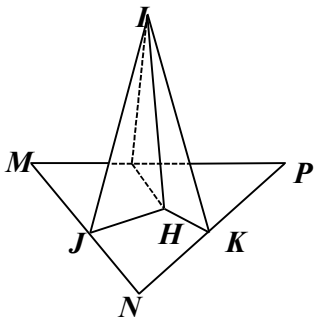
Vậy $R=2$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Nếu điểm $A(x;y;z)$ thuộc (C) thì

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow 3x-2y-z=0.$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x-2y-z=0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x+y+z-6=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP), J, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN, NP, PM. Ta có $IJ=IK=IL \Rightarrow HJ=HK=HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Phương trình đường thẳng d là $x=y=z$.

Dễ thấy $d \subset (\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Câu 35. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2): x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

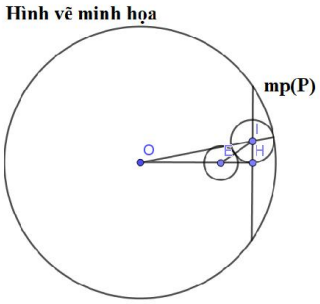
A. $\frac{7}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{9}\pi$. **C.** $\frac{9}{7}\pi$. **D.** $\frac{7}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1=5$. Mặt cầu (S) có tâm $E(-2;0;2)$ bán kính $R_2=1$. Ta có $d(O,(P))=\frac{6}{\sqrt{2}}<R_1$ và $d(E,(P))=\sqrt{2}>R_2$, $OE=2\sqrt{2}$, $OE+R_2<R_1$ nên mặt cầu (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1). Như vậy mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với cả (S_1) và (S_2) thì

(S) tiếp xúc trong mặt cầu (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2). Gọi R là bán kính của (S) khi đó ta có hệ $\begin{cases} OI + R = R_1 \\ EI - R = R_2 \end{cases} \Rightarrow OI + EI = R_1 + R_2 \Rightarrow OI + EI = 6$.



Nhận xét: $\overrightarrow{OE} = (-2;0;2)$ nên OE vuông góc với $(P): x - z + 6 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P), đặt $IH = x$, điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$OI + EI = 6 \Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + HI^2} + \sqrt{EH^2 + HI^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{18 + x^2} + \sqrt{2 + x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm H bán kính $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn là: $S = \pi r^2 = \frac{7\pi}{9}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$.

Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r = \frac{1}{3}$. **D.** $r = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S_m) có tâm $I\left(-\frac{m+2}{2}; -m; m\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{9m^2 + 8m + 16}}{2}$.

Với m_1, m_2 tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_1 + 2)x + 2m_1 y - 2m_1 z - m_1 - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + (m_2 + 2)x + 2m_2 y - 2m_2 z - m_2 - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được:

$(m_1 - m_2)x + 2(m_1 - m_2)y - 2(m_1 - m_2)z - (m_1 - m_2) = 0$

$\Leftrightarrow (m_1 - m_2).(x + 2y - 2z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad (3)$.

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu (S_m) có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) cố định có phương trình: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

Mặt khác, đặt $d = d\left[I,(P)\right] = \dfrac{\left|-\dfrac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-9m-4|}{6}$.

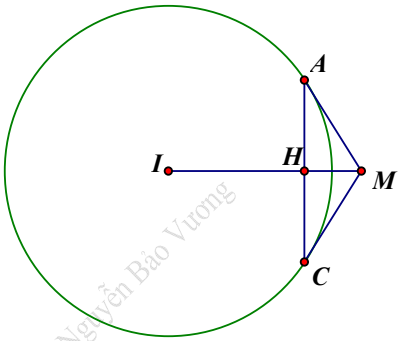
$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \dfrac{9m^2+8m+16}{4} - \dfrac{(-9m-4)^2}{36} = \dfrac{32}{9}$ $\forall m \in \mathbb{R}$. Vậy $r = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt câu $(S): x^2+y^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60°$, $\widehat{BMC} = 90°$, $\widehat{CMA} = 120°$. Tính $Q = a+b+c$.

A. $Q = 3$. **B.** $Q = \dfrac{10}{3}$. **C.** $Q = 2$. **D.** $Q = 1$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+13} = 3\sqrt{3}$.

Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (ABC) với mặt câu (S).

Đặt $MA = MB = MC = x\ (x>0)$.

Áp dụng định lý cosin trong ΔAMB và ΔCMA, ta có:

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB.\cos\widehat{AMB} = 2x^2 - 2x^2\cos 60° = x^2 \Rightarrow AB = x$.

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos\widehat{AMC} = 2x^2 - 2x^2\cos 120° = 3x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{3}$.

Vì ΔBMC vuông tại M nên: $BC = \sqrt{MB^2+MC^2} = x\sqrt{2}$.

Mặt khác $AB^2 + BC^2 = x^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 3x^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2 = AC^2$ nên ΔABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm của đường tròn (C) và ba điểm H, I, M thẳng hàng.

Do $\widehat{AMC} = 120°$ nên $\widehat{AIC} = 60°$, suy ra ΔAIC đều và $AC = IA = IC = R = 3\sqrt{3}$.

Suy ra $x\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$ và $IA = IM\cos 30° \Leftrightarrow IM = \dfrac{2IA}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

Điểm $M \in d$ nên $M(t-1;t-2;t+1) \Rightarrow IM^2 = (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 3t^2 - 4t + 36$.

Mà $IM^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 36 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow M(-1;-2;1) \\ t = \dfrac{4}{3} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right) \end{array}\right.$

Vì $x_M > 0$ nên điểm cần tìm là $M\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$, suy ra $Q = 2$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 31 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

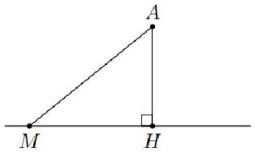
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 2 Bài toán cực trị

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \ge AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \ge AC$.

Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, ...A_n$ ta luôn có

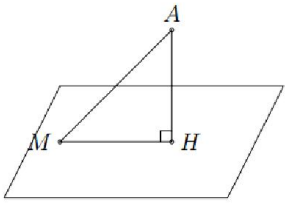
$A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \ge A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \ge 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) ((H) là đường thẳng, mặt phẳng). Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

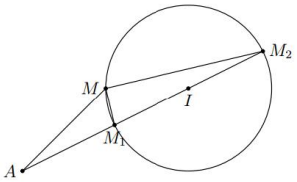


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H). Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại . M ta có $AM \ge AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R, M là điểm di động trên (S). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S). Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu $(S)\left(AM_1 < AM_2\right)$ và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI. Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C). Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$AI - R = AM_1 \le AM \le AM_2 = AI + R$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$R - AI \le AM \le R + AI$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1**: Nếu A và B nằm về hai phía so với (P). Khi đó

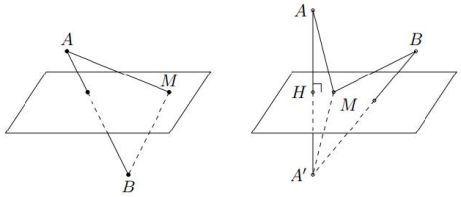
$AM+BM \geq AB$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2**: Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P). Khi đó

$AM+BM=A'M+BM \geq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P). Khi đó

$|AM-BM| \leq AB$

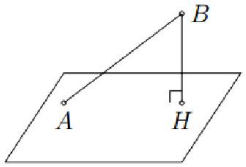
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P).

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P). Gọi A' đối xứng với A qua (P), Khi đó

$|AM-BM|=|A'M-BM| \leq A'B$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

Bài toán 4. Viết phương trinh măt phẳng (P) di qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P), khi đó

$\mathrm{d}(B,(P))=BH \leq BA$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α,β và ba điểm $A,B,$ C. Viết phương trình măt phẳng (P) đi qua C và $T=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}(B,(P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A,B nằm về cùng phía so với (P).

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$P=(\alpha+\beta)\mathrm{d}(A,(P)) \leq (\alpha+\beta)AC$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I. Gọi D là điểm thỏa mãn $I\vec{B}=\dfrac{\alpha}{\beta}I\vec{D}$ và E là trung điểm BD. Khi đó

$$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot \mathrm{d}(D,(P))=2\alpha \mathrm{d}(E,(P)) \leq 2(\alpha+\beta)EC$$

2. Xét A,B nằm về hai phía so với (P). Gọi I là giao điểm của AB và (P), B' là điểm đối xứng với B qua I. Khi đó

$P=\alpha \mathrm{d}(A,(P))+\beta \mathrm{d}\left(B',(P)\right)$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và diểm A. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1,n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nằm cùng phía so với (P). Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

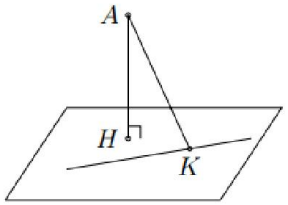
$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(A_i,(P)\right) = n\mathrm{d}(G,(P)) \le nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác $(m+k=n)$. Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A. Khi đó

$$P = m\mathrm{d}\left(G_3,(P)\right) + k\mathrm{d}\left(G_2,(P)\right)$$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ. Khi đó

$\mathrm{d}(A,(P)) = AH \le AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK.

Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét véc tơ

$$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 M\overrightarrow{A_2} + \cdots + \alpha_n M\overrightarrow{A_n}$$

Trong đó $\alpha_1; \alpha_2 \ldots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm M thuộc măt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có đô dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$$

(điểm G hoàn toàn xác định).

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$$\vec{w} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)\vec{MG} + \alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n\right)\overrightarrow{MG}$$

Do đó

$$|\vec{w}| = \left|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\right| \cdot |\vec{MG}|$$

Vi $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z, cho các diểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Xét biểu thức:

$$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc măt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$.
2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 G\vec{A}_1 + \alpha_2 G\vec{A}_2 + \cdots + \alpha_n G\vec{A}_n = \vec{0}$$

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + G\vec{A}_k$ với $k = 1;2;\ldots;n,$ nên

$$MA_k^2 = \left(\overrightarrow{MG} + G\vec{A}_k\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot G\vec{A}_k + GA_k^2$$

Do đó

$T=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)MG^2+\alpha_1GA_1^2+\alpha_2GA_2^2+\cdots+\alpha_nGA_n^2$

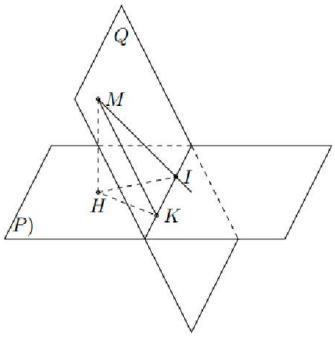
Vì $\alpha_1GA_1^2+\alpha_2GA_2^2+\cdots+\alpha_nGA_n^2$ không đổi nên

• với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

• với $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M\in(P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P).

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M\in d, M\neq I$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q).

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có $\phi=\widehat{MKH}$, do đó

$\tan\phi=\dfrac{HM}{HK}\geq\dfrac{HM}{HI}$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI), nên (Q) đi qua M và nhận $(\vec{n}_P\wedge\vec{u}_d)\wedge\vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

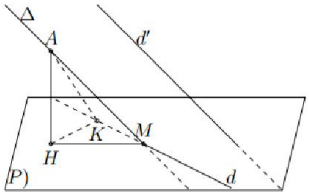
- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q), ta có

$\cos\phi=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_P|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_P|}=f(t)$

với $t=\dfrac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trinh mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d, lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d'. Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P).

Trên đường thẳng Δ, lấy điểm A. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d,ϕ là góc giữa Δ và (P).

Khi đó $\phi=\widehat{AMH}$ và $\cos\phi=\dfrac{HM}{AM}\geq\dfrac{KM}{AM}$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK). Do đó (P) đi qua M và nhận $\left(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}\right) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Goi $\vec{n}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một VTPT của mặt phẳng (P). Khi đó $\vec{n}\cdot\vec{u}_d=0$ từ đây ta rút được a theo b,c (hoặc b theo a,c hoặc c theo a,b).

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d', ta có

$$\sin\phi=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}_{d'}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{u}_{d'}\right|}=f(t)$$

với $t=\frac{b}{c}, c\neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

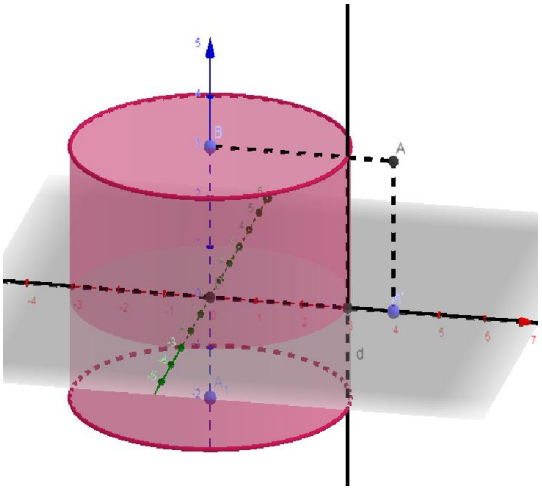
Dạng 2.1. Cực trị liên quan đến khoảng cách, góc

Câu 1. **(Mã 101 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(0;5;-3)$. **B.** $P(-3;0;-3)$. **C.** $M(0;-3;-5)$. **D.** $N(0;3;-5)$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục là Oz và bán kính bằng 3.

Gọi I là hình chiếu của A lên Oy, khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất khi d đi qua giao điểm của Oy với mặt trụ là điểm $I(0;3;0)$ nên d đi qua điểm $N(0;3;-5)$.

Câu 2. **(Mã 103 2019)** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất. d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(0;2;-5)$. **B.** $M(0;4;-2)$. **C.** $P(-2;0;-2)$. **D.** $N(0;-2;-5)$.

Lời giải

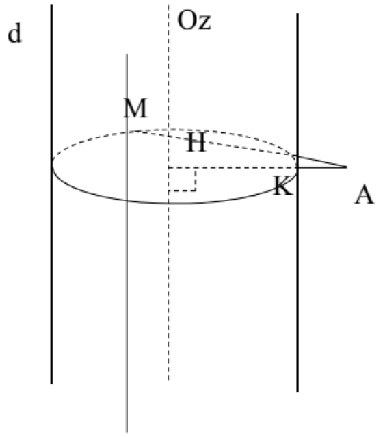
Chọn A

Vì d song song với Oz và cách Oz một khoảng bằng 2 nên d thuộc mặt trụ trục Oz và bán kính bằng 2. Có $H(0;0;-2)$ là hình chiếu vuông góc của $A(0;3;-2)$ trên Oz.

Có $\overrightarrow{HA}(0;3;0) \Rightarrow HA = 3$ nên A nằm ngoài mặt trụ.

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Oz. M là hình chiếu vuông góc của A trên d

Gọi K là giao điểm của AH và mặt trụ (K nằm giữa A và H).



Dễ thấy $d(A;d) = AM \geq AK;\ AK = AH - d(A;d) = 1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HA} \Rightarrow K(0;2;-2) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in R)$

Với $t = -3$ ta thấy d đi qua điểm Q.

Câu 3. **(Mã 102 - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(0;3;-5)$. **B.** $M(0;-3;-5)$. **C.** $P(-3;0;-3)$. **D.** $Q(0;11;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Vì d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3 nên d là đường sinh của hình trụ có trục là Oz và có bán kính đáy $r = 3$.

Gọi A' là hình chiếu của A lên trục $Oz \Rightarrow A'(0;0;-3)$ và $AA' = 4$.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của A lên d.

AH lớn nhất khi A, A', H thẳng hàng và $AH = AA' + A'H = AA' + r = 4 + 3 = 7$.

Khi đó $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (x;y-4;z+3) = \frac{7}{4}(0;-4;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow H(0;-3;-3).$

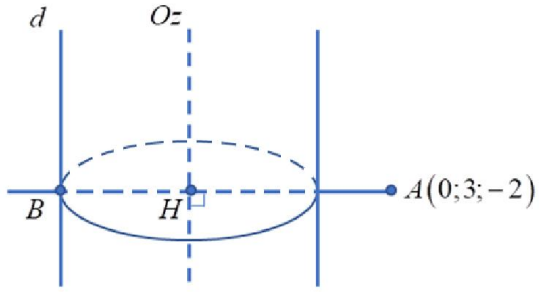
Vậy d qua $H(0;-3;-3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -3 + t \end{cases}$ suy ra d đi qua điểm $M(0;-3;-5)$.

Câu 4. **(Mã 104 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;3;-2)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 2. Khi khoảng cách từ A đến d lớn nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;8;-5)$. **B.** $N(0;2;-5)$. **C.** $P(0;-2;-5)$. **D.** $Q(-2;0;-3)$.

Lời giải

Chọn C



Do đường thẳng $d//Oz$ nên d nằm trên mặt trụ có trục là Oz và bán kính trụ là $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của A trên trục Oz, suy ra tọa độ $H(0;0;-2)$.

Do đó $d_{(A,Oz)}=AH=3$.

Gọi B là điểm thuộc đường thẳng AH sao cho $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow B(0;-2;-2)$.

Vậy $d(A,d)_{\max}=5\Leftrightarrow d$ là đường thẳng đi qua B và song song với Oz.

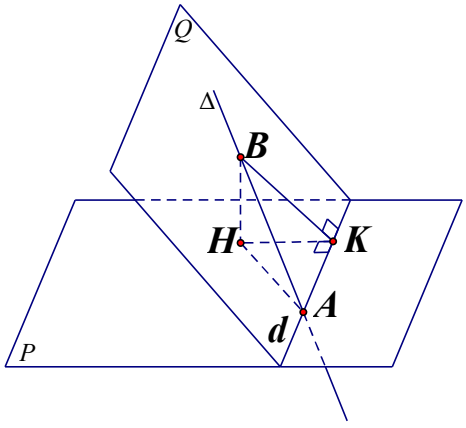
Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=0\\y=-2\\z=-2+t\end{cases}$.

Kết luận: d đi qua điểm $P(0;-2;-5)$.

Câu 5. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A. $x-2y+z=0$. **B.** $x+22y+10z=0$. **C.** $x-2y-z=0$. **D.** $x+10y-22z=0$.

Lời giải



Đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ được viết lại dưới dạng tham số $\Delta:\begin{cases}x=2t\\y=2t\\z=t\end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=t \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Do đó Δ cắt (P) tại điểm $A(0;0;0) \equiv O$.

Lại có Δ và (P) không vuông góc nhau nên ta đi chứng minh góc nhỏ nhất giữa (P) và (Q) là góc giữa Δ và (P). Thật vậy trên Δ lấy B khác A, kẻ BH vuông góc với (P) tại H và BK vuông góc d tại K (d là giao tuyến của (P) và (Q)) tại K. Khi đó góc giữa (Q) và (P) là góc $\widehat{BKH}$.

$HA \geq HK \Rightarrow \tan\widehat{BKH} = \dfrac{BH}{HK} \geq \dfrac{BH}{HA} = \tan\widehat{BAH}$

$\begin{cases} \widehat{BKH},\ \widehat{BAH} < 90^\circ \\ \tan\widehat{BKH} \geq \tan\widehat{BAH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BKH} \geq \widehat{BAH} = \left(\widehat{\Delta,(P)}\right) = \arcsin\dfrac{4}{9}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv A \Leftrightarrow \Delta \perp d$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa (Δ) và cắt (P) theo một giao tuyến vuông góc Δ.

***)Viết phương trình của (Q)**

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2;2;1)$, (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (1;2;-2)$ nên d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_1}\right] = (-6;5;2)$.

(Q) chứa Δ và d nên nhận $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_1}\right] = (1;10;-22)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(0;0;0)$ và nhận $\overrightarrow{n_2} = (1;10;-22)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $x+10y-22z=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2<m<6$. **B.** $m>6$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-6<m<2$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $d\left(A;(P)\right) = \dfrac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}} = \sqrt{\dfrac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)}}$.

Xét $f(m) = \dfrac{(3m-1)^2}{2(m^2-m+1)} \Rightarrow f'(m) = \dfrac{(5-m)(3m-1)}{2(m^2-m+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{3} \\ m=5 \end{array}\right.$.

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$

Vậy $\max d\left(A;(P)\right)=\sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m=5\in(2;6)$.

Cách 2:

Ta đi tìm đối tượng cố định của mặt phẳng (P):

$(P):(m-1)x+y+mz-1=0\Leftrightarrow(x+z)m-x+y-1=0$.

Với mọi $m\in\mathbb{R}$ mặt phẳng (P) luôn đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $\begin{cases}x+z=0\\-x+y-1=0\end{cases}$ tức luôn đi qua đường thẳng $(d):\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$.

Gọi $H(t;1+t;-t)\in(d)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(t-1;t;-t-2)$. Để khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất thì $AH\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{AH}$ cùng phương với VTPT của (P) là $\vec{n}_P=(m-1;1;m)$, suy ra:

$$\frac{t-1}{m-1}=\frac{t}{1}=\frac{-t-2}{m}\Leftrightarrow\begin{cases}mt-t=t-1\\mt=-t-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{3}\\m=5\in(2;6)\end{cases}.$$

Câu 7. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+2=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất.

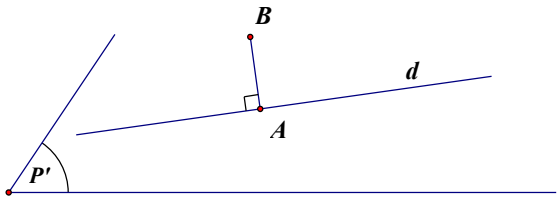
A. $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

B. $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$.

C. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$.

D. $d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

Lời giải



Gọi (P') chứa A và song song (P) suy ra $(P'):x+y+2z-4=0$.

Ta thấy $B\in(P')$ do đó $d(B,d)$ đạt giá trị lớn nhất là AB.

Khi đó d vuông góc với AB và d vuông góc với giá của $\vec{n}$ là VTPT của (P).

Suy ra một VTCP của d là $\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(2;2;-2)$.

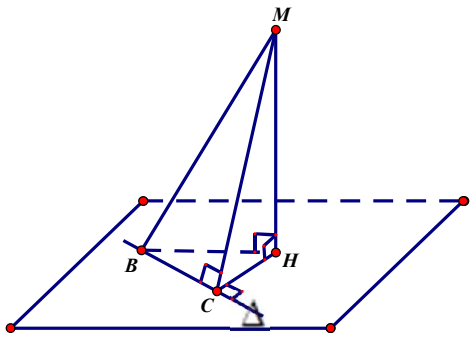
Kết hợp với điểm A thuộc d nên ta chọn đáp án **C.**

Câu 8. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{2-z}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ một góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{7\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{2-z}{1}$ có VTCP $\vec{u}=(1;-2;-1)$.

$(Q):2x-y-2z-2=0$ có VTPT $\vec{n}=(2;-1;-2)$.

Gọi α là góc tạo bởi d và (Q), ta có $\sin\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{n})\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Từ hình vẽ, ta có $(d,(P))=\widehat{MBH}$ và $((P),(Q))=\widehat{MCH}$.

Ta thấy $\sin\widehat{MCH}=\frac{MH}{MC}\geq\frac{MH}{MB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy góc $((P),(Q))=\widehat{MCH}$ nhỏ nhất khi $\sin\widehat{MCH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ hay $\cos\widehat{MCH}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

*Viết phương trình mặt phẳng (P)

-CÁCH 1:

Mặt phẳng $(P):Ax+By+Cz+D=0$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{n_{(Q)}}.\vec{u}=0\\ \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A-2B-C=0\\ \frac{|2A-B-2C|}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=2B+C\\ |3B|=\sqrt{3(2B+C)^2+B^2+C^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2B+C\\ 6B^2+6C^2+12BC=0\ (1)\end{cases}$

Nếu $B=0$ suy ra $A=C=0$ loại.

Nếu $B\neq0$ từ (1) suy ra $\left(\frac{C}{B}\right)^2+2\frac{C}{B}+1=0\Leftrightarrow\frac{C}{B}=-1\Rightarrow C=-B$ suy ra $A=B$.

Mặt phẳng $(P):Bx+By-Bz+D=0$ đi qua điểm $N(0;-1;2)\in d$ suy ra $D=3B$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):x+y-z+3=0$. Suy ra $d(A;(P))=\sqrt{3}$.

-CÁCH 2

Gọi $\Delta = (P) \cap (Q)$ thì góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\Delta \perp d$. Do đó, mặt phẳng (P) thỏa đề bài là mặt phẳng chứa d và cắt (Q) theo giao tuyến Δ sao cho $\Delta \perp d$.

• $\begin{cases} \Delta \subset (Q) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_Q\right]$ làm vec tơ chỉ phương.

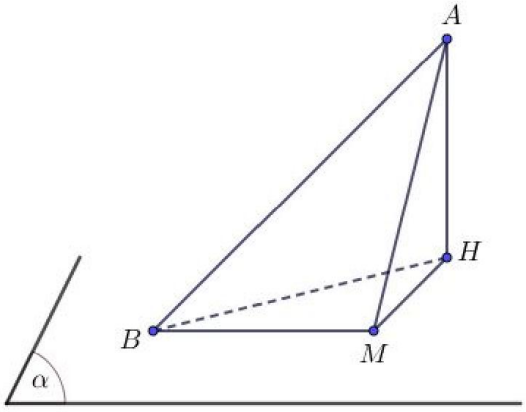
• (Q) chứa d và $\Delta \Rightarrow (P)$ qua $M(0;-1;2) \in d$ và nhận $\vec{n} = \left[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta\right] = (6;6;-6)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow \boxed{(P): x+y-z+3=0}$. Vậy $d\left(A;(P)\right) = \sqrt{3}$.

Câu 9. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng (α): $2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2-t \\ z=1+2t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2-t \\ z=1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2.(-2)+2.(-2)-1+9=0 \Rightarrow B \in (\alpha)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) thì $AH \perp MB$, $AM \perp MB \Rightarrow MH \perp MB$

$\Rightarrow MB \le BH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$, lúc đó M là hình chiếu của A trên (α).

Gọi $H(x;y;z)$, $\overrightarrow{AH} = (x-1;y-2;z+3)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x+2y-z+9=0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=-9 \\ x-y=-1 \\ x+2z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow M(-3;-2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1;0;2) \Rightarrow MB: \begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases}$.

Câu 10. **-(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Viết phương trình đường thẳng a đi qua $M(4;-2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x-4y+z-12=0$ và cách $A(-2;5;0)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\begin{cases} x=4-t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AM}=(6;-7;1)$, vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(3;-4;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên a.

$d(A;a)=AH\le AM=\sqrt{86}\Rightarrow d(A;a)$ lớn nhất khi $H\equiv M$.

Khi đó a là đường thẳng đi qua M, song song với (α) và vuông góc với AM.

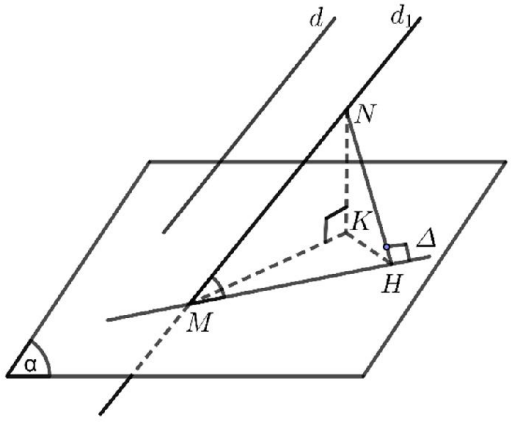
Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $a\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{n}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AM}\end{cases}$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{n}\right]=(-3;-3;-3)=-3(1;1;1)$.

Chọn $\vec{u}=(1;1;1)$. **Đáp án D thỏa mãn.**

Câu 11. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Lời giải



Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n}=0.1+3.1+(-2).(-1)=5\ne 0$ nên d cắt (α).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1//d$, suy ra d_1 có phương trình: $\begin{cases} x=3 \\ y=1+3t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lấy $N(3;4;-1)\in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $\widehat{(d,\Delta)}=\widehat{NMH}$ và $\sin\widehat{NMH}=\dfrac{NH}{MN}\geq\dfrac{NK}{MN}$.

Do vậy $\widehat{(d,\Delta)}$ nhỏ nhất khi $K\equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=-1-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$$(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}.$$ Suy ra $K\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, song song với (P) và cách điểm $B(-1;0;2)$ một khoảng ngắn nhất. Hỏi Δ nhận vecto nào dưới đây là vecto chỉ phương ?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Lời giải

Gọi (Q) chứa Δ và song song với (P). Suy ra (Q) có phương trình:

$x-1+2(y-1)=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$.

Khi đó $d(B;\Delta)_{\min}=BH$ với H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (Q).

Đường thẳng BH đi qua B, vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình $\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Tọa độ giao điểm H của đường thẳng BH và mặt phẳng (Q) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2\end{cases}\\x+2y-3=0\end{cases}$$. Giải hệ trên ta được $H\left(-\frac{1}{5};\frac{8}{5};2\right)$.

Do đó Δ là đường thẳng AH có $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{6}{5};-\frac{3}{5};-1\right)$.

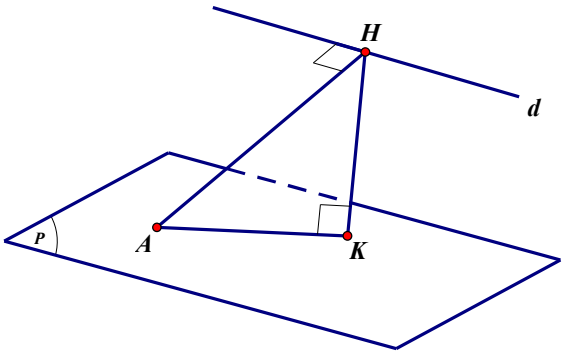
Suy ra $\vec{u}=(6;-3;-5)$ cũng là một vecto chỉ phương của Δ.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do $d \,//\, (P)$ nên ta có $d(d,(P)) = d(H,(P)) = HK$.

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH.

Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x-2y-3z-10=0$.

Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x+z+2=0$.

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;-7;-8)$, $B(2;-5;-9)$ sao cho khoảng cách từ điểm $M(7;-1;-2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. Biết (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;4)$, khi đó giá trị của tổng $a+b$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -7+2t \\ z = -8-t \end{cases}$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và đường thẳng AB.

Ta tìm được điểm $K(3;-3;-10)$. Ta luôn có bất đẳng thức $d(M,(P)) = MH \le MK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Khi đó $\overrightarrow{MH} = (-4;-2;-8) = -2(2;1;4)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;1;4)$. Vậy ta có $a+b=3$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d. Khi đó ta có $AH \le AK$.

Vì $H \in d$ nên $H(2-t;-1+2t;1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH \perp d$ nên ta có $-(-1-t)+2.2t+1+t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH=AK$. Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$. Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$.

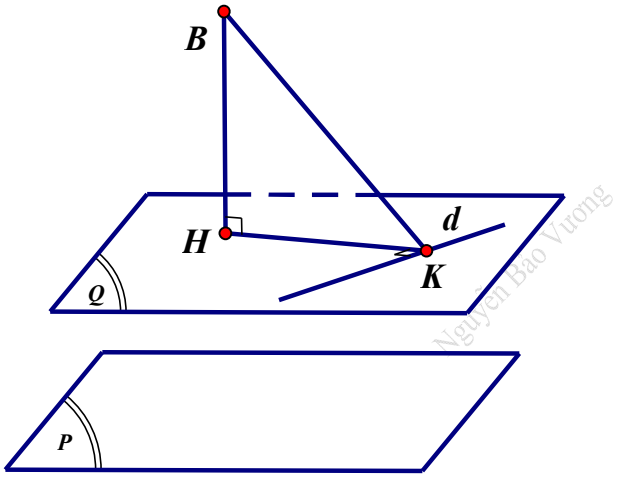
Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH \le AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$. **B.** $d: \frac{x+3}{26}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{2}$.

C. $d: \frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $d: \frac{x+3}{-26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Lời giải



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và (Q) // (P). Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P). Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y-2z+1=0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d. Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B;d)=BK \ge BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH.

Đường thẳng d bây giờ đi qua A, H nên có phương trình $\frac{x+3}{26}=\frac{y}{11}=\frac{z-1}{-2}$.

Câu 17. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là một vectơ pháp tuyến của (P), với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

Điểm $M(1;0;2)\in d\Rightarrow M\in(P)$.

Phương trình của $(P): ax+by+cz-(a+2c)=0$.

Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;2)\Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0$.

$$\Rightarrow b=-(2a+2c)\Rightarrow d\left(A,(P)\right)=\frac{|a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}}.$$

Ta có $(a+c)^2\le 2(a^2+c^2)\Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{2}\le a^2+c^2$ với $\forall a,c\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $a^2+c^2+4(a+c)^2\ge\frac{(a+c)^2}{2}+4(a+c)^2=\frac{9}{2}(a+c)^2$.

Do đó $d\left(A,(P)\right)=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+c^2+4(a+c)^2}}\le\frac{9|a+c|}{\sqrt{\frac{9}{2}(a+c)^2}}=\frac{9|a+c|\sqrt{2}}{3|a+c|}=3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow Max\, d\left(A,(P)\right)=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=-4a\end{cases}$. Chọn $a=c=1\Rightarrow b=-4$.

Phương trình $(P): x-4y+z-3=0\Rightarrow d\left(O,(P)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 18. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;-4;-1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d_{(B,(P))}=2d_{(A,(P))}$, (P) cắt AB tại $I(a;b;c)$ nằm giữa AB. Tính $a+b+c$

A. 8 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 4

Lời giải

Do mặt phẳng (P) qua Ox nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $by+cz=0\ (b^2+c^2>0)$

$$d_{(B,(P))}=2d_{(A,(P))}\Leftrightarrow\frac{|-4b-c|}{\sqrt{b^2+c^2}}=2.\frac{|2b+3c|}{\sqrt{b^2+c^2}}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-4b-c=4b+6c\\ -4b-c=-4b-6c\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}8b+7c=0\\ c=0\end{bmatrix}$$

Trường hợp 1: $8b+7c=0$ chọn $b=7; c=-8$ khi đó $(P): 7y-8z=0$

Xét $f(y,z)=7y-8z$

Thay tọa độ A,B vào ta được $(7.2-8.3)(7.(-4)-8.(-1))>0$ suy ra A,B nằm cùng phía so với (P) (loại)

Trường hợp 2: $c=0$ suy ra phương trình $(P): y=0$

Thay tọa độ A,B vào ta được $2.(-4)<0$ suy ra A,B nằm khác phía so với (P). Do đó đường thẳng AB cắt (P) tại I nằm giữa AB

Phương trình tham số của đường thẳng AB: $\begin{cases}x=1+4t\\ y=2-6t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=3-4t\end{cases}$

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

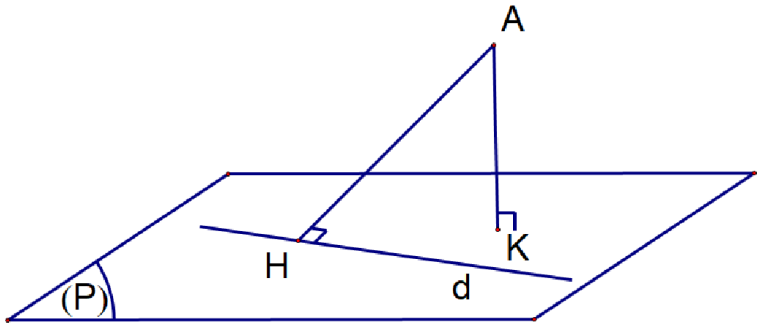
$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=2-6t \\ z=3-4t \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{7}{3} \\ y=0 \\ z=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{3};0;\frac{5}{3}\right)$$

Vậy $a+b+c=\dfrac{7}{3}+0+\dfrac{5}{3}=4$

Câu 19. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P).

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d, gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Do đó khoảng cách từ A đến (P) là: $d\left(A;(P)\right)=AK$.

Ta có $d:\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases}$. Vì $H\in d$ nên $H\left(-2t-1;t;t+1\right)$.

$\overrightarrow{AH}\left(-2t-2;t-2;t-2\right)$, $VTCP$ của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}\left(-2;1;1\right)$.

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow-2(-2\,t-2)+t-2+t-2=0\Leftrightarrow t=0$.

Do đó $H\left(-1;0;1\right)$ và $\overrightarrow{AH}\left(-2;-2;-2\right)\Rightarrow AH=2\sqrt{3}$ (không đổi).

Vì $AK\le AH$ (đường vuông góc luôn ngắn hơn đường xiên) nên AK lớn nhất khi $AK=AH$ hay $K\equiv H$.

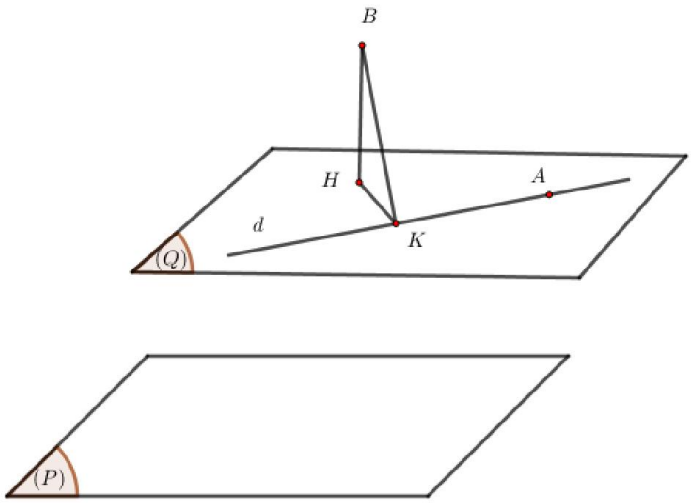
Ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AH}=(-2;-2;-2)=-2(1;1;1)$. Vậy, một vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Câu 20. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(-3;0;1\right)$, $B\left(1;-1;3\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right):x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng $\left(P\right)$ sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$. **B.** $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$. **D.** $d:\dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Lời giải



Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P). Khi đó phương trình của mặt phẳng (Q) là $1(x+3)-2(y-0)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z+1=0$.

Gọi H là hình chiếu của điểm B lên mặt phẳng (Q), khi đó đường thẳng BH đi qua $B(1;-1;3)$ và nhận $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$.

Vì $H=BH\cap(Q)\Rightarrow H\in BH\Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$ và $H\in(Q)$ nên ta có $(1+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{-2}{9}\right)=\dfrac{1}{9}(26;11;-2)$.

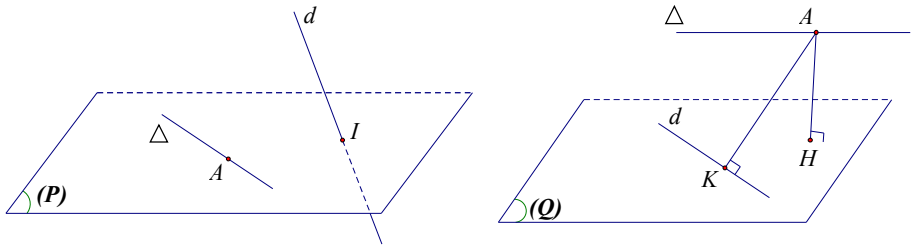
Gọi K là hình chiếu của B lên đường thẳng d, khi đó

Ta có $d(B;d)=BK\geq BH$ nên khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi $BK=BH$, do đó đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(26;11;-2)$ có phương trình chính tắc: $d:\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 21. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-4z=0$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;3;1)$ thuộc mặt phẳng (P). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và cách đường thẳng d một khoảng cách lớn nhất. Gọi $\vec{u}=(a;b;1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=-3$. **B.** $a+2b=0$. **C.** $a+2b=4$. **D.** $a+2b=7$.

Lời giải



Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;3)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;1)$.

Nhận xét rằng, $A\notin d$ và $d\cap(P)=I(-7;3;-1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với Δ. Khi đó $d(\Delta,d)=d(\Delta,(Q))=d(A,(Q))$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên (Q) và d. Ta có $AH\le AK$.

Do đó, $d(\Delta,d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow AH_{\max}\Leftrightarrow H\equiv K$. Suy ra AH chính là đoạn vuông góc chung của d và Δ.

Mặt phẳng (R) chứa A và d có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(R)}}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_1}\right]=(-2;4;8)$.

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (R) nên có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{n_{(R)}},\overrightarrow{u_1}\right]=(12;18;-6)$.

Đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) và song song với mặt phẳng (Q) nên có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(R)}}\right]=(66;-42;6)=6(11;-7;1)$.

Suy ra, $a=11;b=-7$. Vậy $a+2b=-3$.

Câu 22. **(Bắc Giang 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất ?

A. $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

$x+my+(2m+1)z-m-2=0\Leftrightarrow m(y+2z-1)+x+z-2=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm với $\forall m$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y+2z-1=0\\x+z-2=0\end{cases}$.

Suy ra (P) luôn đi qua đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1-2t\\z=t\end{cases}$.

$K\in d\Rightarrow K(2-t;1-2t;t)$, $\overrightarrow{AK}(-t;-2t;t-3)$

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(-1;-2;1)$

$\overrightarrow{AK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t+4t+t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow K\left(\dfrac{3}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$

Ta có $AH\le AK\Rightarrow AH_{\max}=AK\Leftrightarrow H\equiv K$.

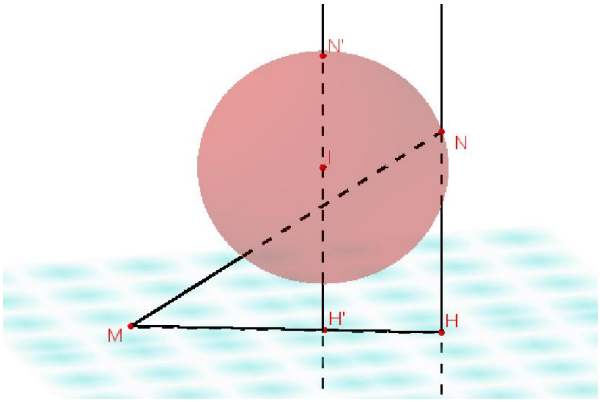
Vậy $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$ **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$ **C.** $MN=3\sqrt{2}$ **D.** $MN=14$

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-2;2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $r=1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45°. Vì $d(I;(P))=2>1=r$ nên (P) không cắt (S).

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH}=45^o$ và $MN=\dfrac{NH}{\sin 45^o}=NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N\equiv N'$ và $H\equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I, vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P).

Lúc đó $NH_{\max}=N'H'=r+d(I;(P))=3$ và $MN_{\max}=\dfrac{NH_{\max}}{\sin 45^o}=3\sqrt{2}$.

Câu 24. **(SGD&ĐT Đồng Tháp - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ có tâm I và mặt phẳng $(P):2x-y+2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất.

A. $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{11}{9};-\dfrac{8}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$ **C.** $(1;-2;2)$. **D.** $(1;-2;-3)$.

Lời giải

Ta có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) ngắn nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=2t \end{cases}$.

Khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình

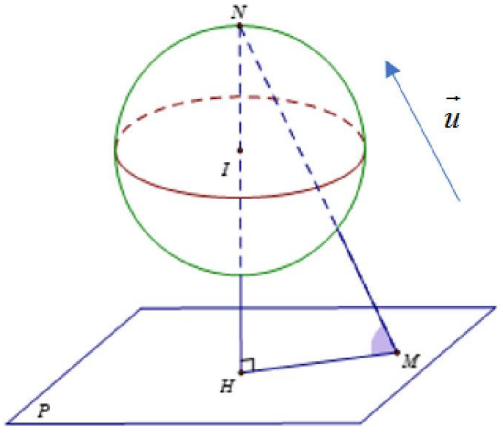
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=2t \\ 2x-y+2z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=2t \\ 2(1+2t)-(-2-t)+2(2t)+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{4}{3} \\ z=-\dfrac{4}{3} \\ t=-\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Câu 25. **(THPT Ba Đình 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha=\widehat{HNM}$.

Có $HN=MN.\cos\alpha \Rightarrow MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất

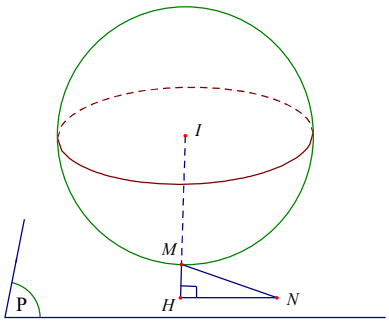
$\Leftrightarrow HN=d(I,(P))+R=3$.

Có $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\overrightarrow{n_P})\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}HN=3\sqrt{2}$.

Câu 26. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$. Điểm M thay đổi trên (S), điểm N thay đổi trên (P). Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=3$; $d\left(I;(P)\right)=4>R\Rightarrow$ mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Dựng $IH\perp(P),(H\in(P))$. Ta có: MN nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn IH với (S) và $N\equiv H$.

Phương trình đường thẳng $IH:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-t\\z=-1+2t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

Điểm $M\left(1+2t;-2-t;-1+2t\right)\in(S)$ nên $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2+\left(z+1\right)^2=9$

$\Leftrightarrow\left(2t\right)^2+\left(-t\right)^2+\left(2t\right)^2=9\Leftrightarrow t=\pm1$. Khi đó $M_1\left(3;-3;1\right),M_2\left(-1;-1;-3\right)$.

Thử lại: $d\left(M_1;(P)\right)=1$; $d\left(M_2;(P)\right)=7>IH=4$ (loại).

Vậy $MN_{\min}=MH=1$ khi $M\left(3;-3;1\right);\mathrm{N}\left(\frac{11}{3};-\frac{10}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;1)$; bán kính $R=4$ và đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

A. $O(0;0;0)$. **B.** $A\left(1;\frac{3}{5};-\frac{1}{4}\right)$. **C.** $B(-1;-2;-3)$. **D.** $C(2;1;0)$.

Lời giải

Gọi $H\left(2t;1-2t;-1-t\right)$ là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow2\left(2t-1\right)-2\left(3-2t\right)-\left(-2-t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Vì $IH=\sqrt{10}<4=R\Rightarrow$ d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

Mặt phẳng (Q) bất kì chứa d luôn cắt (S) theo một đường tròn bán kính r.

Khi đó $r^2=R^2-d^2\left(I,(Q)\right)\geq R^2-d^2\left(I,d\right)=16-10=6$.

Do vậy mặt phẳng (P) chứa d cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $d\left(I,(P)\right)=d\left(I,d\right)$ hay mặt phẳng (P) đi qua H nhận $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};-\frac{8}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến, do đó (P) có phương trình $x+5y-8z-13=0$.

Khi đó điểm $O(0;0;0)$ có khoảng cách đến (P) lớn nhất.

Câu 28. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M,d)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Gọi $I=d\cap(P)\Rightarrow I(1;2-t;1)$

$I\in(P)\Rightarrow 2-t-1=0\Rightarrow t=1\Rightarrow I(1;1;1)$

Ta có $d\perp(P)\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(1;1;1), R_1=2$.

$N(x;y;z)\Rightarrow \overrightarrow{NA}(-1-x;-3-y;11-z); \overrightarrow{NB}\left(\frac{1}{2}-x;-y;8-z\right)$

$NA=2NB\Leftrightarrow (1+x)^2+(3+y)^2+(11-z)^2=4\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+y^2+(8-z)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-6x-6y-42z+126=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-14z+42=0$

Vậy $N\in S(J(1;1;7);R_2=3)$ và $J\in(P): y=1$

Nên N thuộc đường tròn tâm $J(1;1;7); R_2=3$

Ta có $IJ=6>R_1+R_2\Rightarrow MN_{\min}=IJ-R_1-R_2=1$

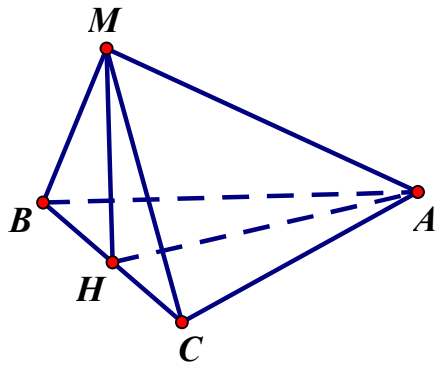
Nguyễn Bảo Vương

Câu 29. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(3;2;0)$, $C(-1;2;4)$. Gọi M là điểm thay đổi sao cho đường thẳng MA, MB, MC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau; N là điểm thay đổi nằm trên mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{1}{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;2;4)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow \Delta ABC$ suy ra ΔABC vuông tại A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (ABC). Ta có:

$\left(MA,(ABC)\right)=(MA,HA)=\widehat{MAH}$

$\left(MB,(ABC)\right)=(MB,HB)=\widehat{MBH}$

$\left(MC,(ABC)\right)=(MC,HC)=\widehat{MCH}$

Theo giả thiết $\widehat{MAH}=\widehat{MBH}=\widehat{MCH}\Rightarrow \Delta MAH=\Delta MBH=\Delta MCH\,(g.c.g)$

Do đó: $HA=HB=HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

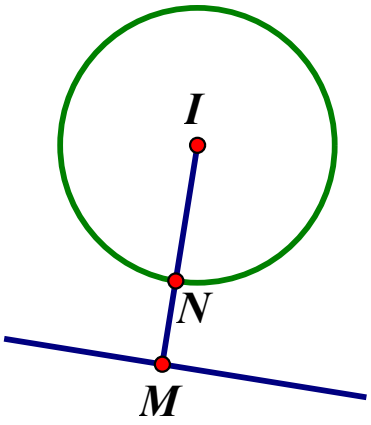
Suy ra: H là trung điểm của $BC\Rightarrow H(1;2;2)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;-8;8)$, Chọn vecto chỉ phương của đường thẳng MH là $\overrightarrow{u_{MH}}=(1;-1;1)$.

Phương trình đường thẳng MH có dạng: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=2+t\end{cases}$,$t\in\mathbb{R}$

Nguyễn Bảo Vương

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;3)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Gọi $K(1+t;2-t;2+t)$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng MH.

Ta có: $\overrightarrow{IK}=(t-2;-t;t-1),\overrightarrow{u_{MH}}=(1;-1;1)$

Do $IK\perp MH$ nên $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_{MH}}=0$, ta được: $t=1$. Khi đó: $K(2;1;3)$ và $IK=\sqrt{2}$

Do IK > R nên đường thẳng MH không cắt mặt cầu.

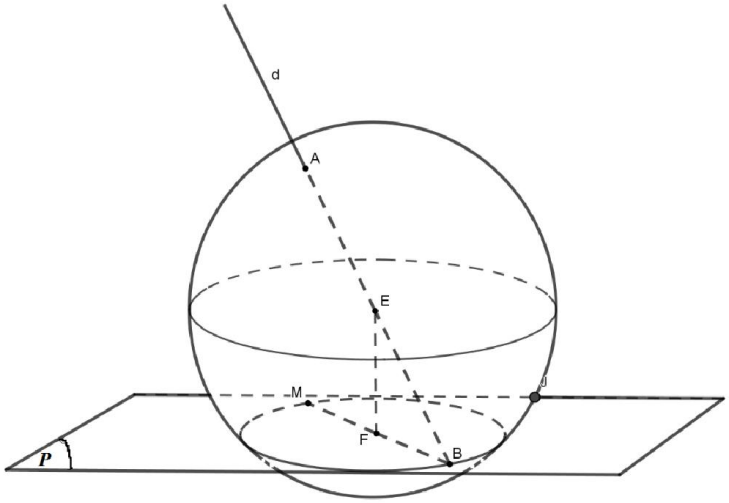
Ta có: $MN\ge d(I,MH)-IN=IK-IN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30. **(Sở Bình Phước - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P): $2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại điểm B. Điểm M thay đổi trong (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới góc $90°$. Khi độ dài MB lớn nhất, đường thẳng MB đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $J(-3;2;7)$. **B.** $K(3;0;15)$. **C.** $H(-2;-1;3)$. **D.** $I(-1;-2;3)$.

Lời giải



- Đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ có phương trình là:

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-4}\Rightarrow$ giao điểm của d và (P) là $B=(-2;-2;1)$.

- Do M luôn nhìn đoạn AB dưới góc $90°$ nên M nằm trên mặt cầu (S) đường kính AB.

Gọi E là trung điểm của $AB\Rightarrow E=\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)\Rightarrow AE^2=\frac{41}{4}$

$\Rightarrow (S): x^2+y^2+z^2+x+2z-9=0$.

- Lại do $M\in(P)$ nên M nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), gọi là đường tròn (C).

- Mặt khác B là điểm cố định trên đường tròn (C) nên độ dài MB lớn nhất khi MB là đường kính của đường tròn (C).

- Gọi F là tâm của $(C)\Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của E trên (P).

Đường thẳng EF nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;-1)$ của (P) làm vectơ pháp tuyến

$\Rightarrow EF: \frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}\Rightarrow F=\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$ (là giao điểm của (P) và EF).

- Vì MB là đường kính của (C) nên $M=(-3;-2;-1)\Rightarrow \overrightarrow{MB}=(1;0;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $MB\Rightarrow$ phương trình đường thẳng MB là:

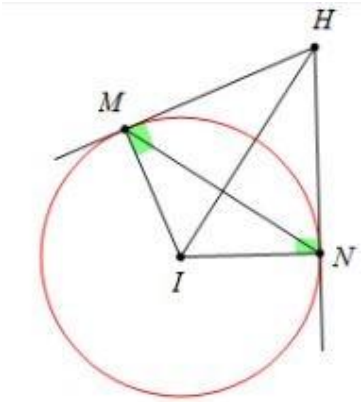
$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

- Trong các điểm đã cho ở các đáp án A, B, C, D chỉ có điểm $I(-1;-2;3)$ (đáp án D) thuộc đường thẳng MB.

Câu 31. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=2$. Xét đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-mt \\ z=(m-1)t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P),(Q)$ là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M,N. Khi đó đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1;0;4)$ đến đường thẳng d.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. **D.** $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Lời giải



Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm I,M,N cắt đường thẳng d tại $H \Rightarrow IH\perp d, d(I,d)=IH$.

Ta có $MN=2MK=2.\frac{MH.MI}{IH}=2.\frac{\sqrt{IH^2-r^2}.r}{IH}=\frac{4\sqrt{IH^2-4}}{IH}=\frac{4\sqrt{x^2-4}}{x}=f(x)$ với $x=IH>2$.

Ta có $f'(x)=\frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}>0,\forall x>2$, suy ra hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Do đó $MN_{\min}\Leftrightarrow IH_{\min}$. Ta có $\vec{u}_d=(1;-m;m-1), A(1;0;0)\in d$, suy ra $d(I,d)=\frac{\left|\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{IA}\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}$

$\frac{\sqrt{25m^2-20m+17}}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

Xét hàm số $f(m)=\frac{25m^2-20m+17}{2m^2-2m+2}$ có bảng biến thiên là

m	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		3		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{25}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{3}$	$\nearrow$	13	$\searrow$	$\frac{25}{2}$

Suy ra $IH_{\min}$ khi $m=\frac{1}{5}$. Đường thẳng d có phương trình là $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=-\frac{1}{5}t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
$z=-\frac{4}{5}t$

Khoảng cách $d(B,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|}=\frac{\sqrt{416}}{\sqrt{42}}=\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Câu 32. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(1;2;-3)$. Đường thẳng d đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;-4)$ cắt (P) tại B. Điểm M thay đổi trên (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$. Độ dài đoạn MB lớn nhất bằng

A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 6. **D.** $\sqrt{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+4t\\ z=-3-4t\end{cases}$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+4t\\ z=-3-4t\\ 2x+2y-z+9=0\end{cases}\Rightarrow 2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow B(-2;-2;1).$$

Do M nhìn đoạn AB dưới một góc $90°$ nên M thuộc mặt cầu (S) có đường kính $AB=\sqrt{41}$.
Lại do $M\in(P)$ nên M thuộc đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).
Do MB là một dây cung của đường tròn này nên MB lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Gọi $I\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$ là trung điểm AB thì I là tâm mặt cầu (S) và $d(I;(P))=3$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là

$r=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2-d^2(I;(P))}=\sqrt{\frac{41}{4}-9}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Vậy $MB_{\max}=2r=\sqrt{5}$.

Câu 33. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=4+3t \\ z=-3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là:

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Hình.

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (α), khi đó góc $\widehat{(d,d')}$ là góc nhỏ nhất trong các góc tạo bởi d với đường thẳng bất kỳ trong (α).

d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(0;3;-2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$, gọi $\vec{n}_\beta$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) tạo bởi d và d' thì $\vec{n}_\beta \perp \vec{u}_d, \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha$ ta chọn

$\vec{n}_\beta=[\vec{n}_\alpha,\vec{u}_d]=(1;2;3)$

Gọi $\vec{u}_{d'}$ là véc tơ chỉ phương của d' thì $\vec{u}_{d'} \perp \vec{n}_\alpha, \vec{u}_{d'} \perp \vec{n}_\beta$, ta chọn $\vec{u}_{d'}=[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta]=(5;-4;1)$.

Đường thẳng Δ song song hoặc trùng với d' nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\vec{u}_{d'}=(5;-4;1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.

Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$\begin{cases} 3=8+5t' \\ 1=-3-4t' \Leftrightarrow t'=-1 \\ 1=-3-2t' \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2.

d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(0;3;-2)$, (α) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$,

Giả sử Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=(a;b;c), (a^2+b^2+c^2>0)$

Do $\Delta \subset (\alpha)$ ta có: $\vec{n}_\alpha.\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow a+b-c=0 \Leftrightarrow c=a+b$.

Gọi φ là góc giữa Δ và d, $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, khi đó:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{u}_\Delta,\vec{u}_d)\right|=\frac{|3b-2c|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|b-2a|}{\sqrt{13}.\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}}$$

Góc φ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\varphi$ lớn nhất, ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a=0$ ta được $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Trường hợp 2. Nếu $a\neq 0$ ta được: $\cos\varphi=\frac{|t-2|}{\sqrt{26(t^2+t+1)}}, \left(t=\frac{b}{a}\right)$

Ta có $26\cos^2\varphi=\dfrac{t^2-4t+4}{t^2+t+1}$, đặt $f(t)=\dfrac{t^2-4t+4}{t^2+t+1}, t\in\mathbb{R}$, có:

$f'(t)=\dfrac{5t^2-6t-8}{\left(t^2+t+1\right)^2}, f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$:

t	$-\infty$		$-4/5$		2		$+\infty$
f'(t)		$+$	0	$-$	0	$+$	
f(t)	1	↗	$28/3$	↘	$2/3$	↗	1

Do $\cos\varphi\ge 0$ nên $\cos\varphi$ lớn nhất khi $f(t)$ lớn nhất, từ bảng biến thiên ta được

$\max\limits_{\mathbb{R}} f(t)=f\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

Khi đó $\dfrac{b}{a}=-\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 5b=-4a$, chọn $a=5\Rightarrow b=-4$ và ta được và ta được $c=1$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}=(5;-4;1)$.

Trong các đáp án A, B, C, D cho ở đề bài thì chỉ có đáp án B có véc tơ chỉ phương thỏa điều kiện.
Thay tọa độ của M vào phương trình của Δ trong đáp án B ta được:

$\begin{cases}3=8+5t'\\1=-3-4t'\Leftrightarrow t'=-1\\1=-3-2t'\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy đáp án B thỏa yêu cầu bài toán.

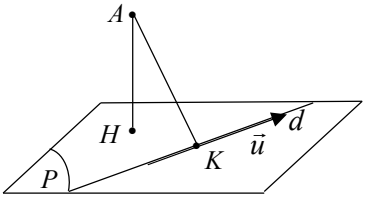
Nguyễn Bảo Vương

Câu 34. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Biết rằng (P): $ax+by+cz-3=0$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ là mặt phẳng chứa d và khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C



Đường thẳng d đi qua $M(1;0;2)$, có 1VTCP $\vec{u}=(2;1;2)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và trên d thì $AH\le AK$ (cố định).

Do đó, khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $H\equiv K$ hay $(P)\perp AK$.

$K(2t+1;t;2t+2)\in d$ là hình chiếu của A trên d khi $\overrightarrow{AK}\perp\vec{u}$, với $\overrightarrow{AK}=(2t-1;t-5;2t-1)$.

$\overrightarrow{AK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-5)+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1$.

(P) qua $M(1;0;2)$, có một VTPT $\overrightarrow{AK}=(1;-4;1)$ nên (P): $x-4y+z-3=0$.

Suy ra $T=a+b+c=1+(-4)+1=-2$.

Câu 35. **(ĐH - Quốc Tế - 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(-3;2;1)$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $M(1;2;3)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến (d) và từ B đến (d) là lớn nhất. Khi đó phương trình đường thẳng (d) là

A. $\frac{x-1}{-5}=y-2=\frac{z}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-2}$. **D.** $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d(A,(d))\le AM$, $d(B,(d))\le BM$.

$d(A,(d))+d(B,(d))$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}AM\perp(d)\\BM\perp(d)\end{cases}$.

$\overrightarrow{MA}=(1;-1;-6)$ và $\overrightarrow{MB}=(-4;0;-2)$.

Khi đó (d) có vecto chỉ phương $\vec{u}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]=(2;26;-4)\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=(1;13;-2)$.

Phương trình (d): $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 36. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mp(P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a-b=-1$. **B.** $a+b=-2$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$.

Theo giả thiết, $d\subset(Q)$ và $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q) nên ta có $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_Q}=0\Leftrightarrow -a+2b+1=0\Leftrightarrow a=2b+1$. (1)

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-2)$.

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}}\right)\right|=\frac{|2a-b-2|}{3.\sqrt{a^2+b^2+1}}$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\frac{|b|}{\sqrt{5b^2+4b+2}}$

Khi góc giữa (P) và (Q) nhỏ nhất thì $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $f(b)=\dfrac{b}{\sqrt{5b^2+4b+2}}$, có $f'(b)=\dfrac{b+1}{\sqrt{\left(5b^2+4b+2\right)^3}}=0\Leftrightarrow b=-1$.

Bảng biến thiên

b	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Từ đó suy ra với hàm số $g(b)=\dfrac{|b|}{\sqrt{5b^2+4b+2}}$ có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(b)=g(-1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ khi $b=-1\Rightarrow a=-1$

Vậy: $a+b=-2$.

Câu 37. **(Chuyên Bắc Giang 2019)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=6$. **B.** $T=12$. **C.** $T=\sqrt{5}$. **D.** $T=21$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$. Vì $H\in d$ nên tọa độ điểm H có dạng $H(1+2t;-1+t;-t)$. Độ dài MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M lên d.

Ta có $\vec{u}(2;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của d, $\overrightarrow{MH}(-1+2t;-2+t;-t)$.

H là hình chiếu của M lên $d\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(-1+2t)+(-2+t)+t=0$

$\Leftrightarrow 6t-4=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$. Tọa độ điểm $H\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ suy ra $\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\\b=-\dfrac{1}{3}\\c=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=\left(\dfrac{7}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=6$.

Câu 38. **(SGD Điện Biên - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mp(P): $2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp(Q): $3x+4y-4z+5=0$, cắt

mp(P) tại B. Điểm M nằm trong mp(P) sao cho M luôn nhìn AB dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của MB.

A. $M=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. **B.** $MB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $MB=\sqrt{5}$. **D.** $MB=\sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng d qua A và vuông góc với mp(Q): $3x+4y-4z+5=0 \Rightarrow d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=-3-4t\end{cases}$

B là giao điểm của d và mặt phẳng $(P) \Rightarrow B(-2;-2;1)$.

$\widehat{AMB}=90^\circ \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu (S) có đường kính AB.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P).

$\Rightarrow BM$ lớn nhất bằng đường kính của đường tròn (C).

Ta có (S) có tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0;-1\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

$d\left(I,(P)\right)=3$.

Bán kính của đường tròn (C) là: $r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{\dfrac{41}{4}-9}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy BM lớn nhất bằng $2r=\sqrt{5}$.

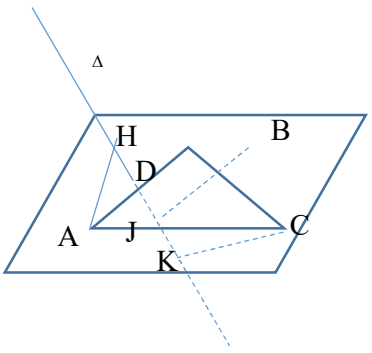
Câu 39. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(5;7;3)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(7;13;5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua 3 điểm A,B,C



Ta có phương trình của (P): $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$

Ta thấy $D(1;1;1)\in(P)$

Gọi H,J,K lần lượt là hình chiếu của A,B,C lên Δ

Khi đó: $AH\le AD, BJ\le BD, CK\le CD$ Suy ra tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất bằng $AD+BD+CD$ hay Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với (P)

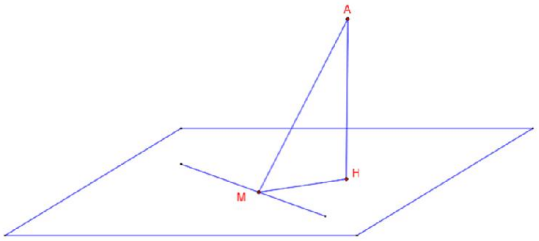
Suy ra phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+3t\\z=1+t\end{cases}$ khi đó Δ đi qua $M(5;7;3)$

Câu 40. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và cách điểm A một khoảng cách lớn nhất. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{n}=(1;0;-2)$. **C.** $\vec{n}=(1;1;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (P). Từ H kẻ $HM\perp d$. Dễ thấy $AM\perp d$.

Ta có $AH\le AM$. Suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi $M\equiv H$, hay $IM\perp(P)$.

Phương trình tham số của d: $\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$, véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;1;1)$.

$M\in d \Rightarrow M(-1-2t;t;1+t) \Rightarrow \overrightarrow{MA}=(2-2t;2-t;2-t)$.

$\overrightarrow{MA}\perp\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (-2).(2+2t)+1.(2-t)+1.(2-t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Suy ra $M(-1;0;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA}=(2;2;2)$.

Do $\vec{n}=(1;1;1)$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ nên $\vec{n}=(1;1;1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P).

Câu 41. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta'=\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Xét điểm M thay đổi. Gọi a,b lần lượt là khoảng cách từ M đến Δ và Δ'. Biểu thức a^2+2b^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_0(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó giá trị x_0+y_0 bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử PQ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và Δ'

Với $P\in\Delta$ và $Q\in\Delta'$ có $P(0,0,1)$ và $Q(1,0,0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ và Δ'

Khi đó ta có $a+b=ME+MF\geq EF\geq PQ$ hay $a+b\geq\sqrt{2}$.

Nhận thấy $\frac{1}{3}(a-2b)^2=(a^2+2b^2)-\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{4}{3}ab+\frac{2}{3}b^2\right)=(a^2+2b^2)-\frac{2}{3}(a+b)^2$

Do đó ta có $\frac{1}{3}(a-2b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+2b^2\geq\frac{2}{3}(a+b)^2$ hay $a^2+2b^2\geq\frac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a^2+2b^2 bằng $\frac{4}{3}$ đạt được khi dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}M\in EF\\EF\equiv PQ\\a=2b\end{cases}$ hay

$\overrightarrow{MP}=-2\overrightarrow{MQ}$ hay $M\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right)$.

Câu 42. **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A song song với (P) và cách $B(-1;0;2)$ một khoảng nhỏ nhất. Hỏi Δ nhận vectơ nào dưới đây làm vecto chỉ phương?

A. $\vec{u}=(6;3;-5)$. **B.** $\vec{u}=(6;-3;5)$. **C.** $\vec{u}=(6;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(6;-3;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $\vec{u}=(a;b;c),a^2+b^2+c^2>0$ là một vecto chỉ phương của Δ.

Mặt phẳng $(P):x+2y=0$ có một vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;0)$.

Δ song song với (P) nên $\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow a+2b=0\Leftrightarrow a=-2b.\Rightarrow\vec{u}=(-2b;b;c)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;1),\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=(b+c;2b-2c;4b)$.

Khoảng cách từ $B(-1;0;2)$ đến Δ là $d(B,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{\frac{21b^2-6bc+5c^2}{5b^2+c^2}}$.

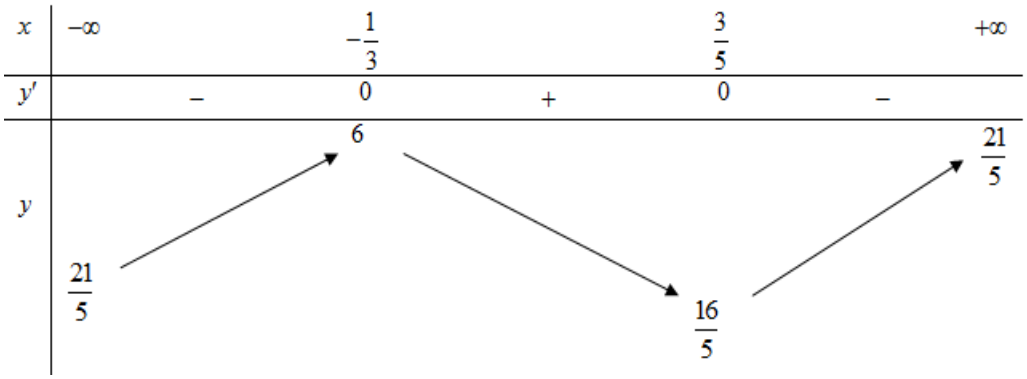
Nếu $c=0\Rightarrow b\neq 0\Rightarrow d(B,\Delta)=\sqrt{\frac{21}{5}}$.

Nếu $c\neq 0$ $d(B,\Delta)=\sqrt{\frac{21\left(\frac{b}{c}\right)^2-6\frac{b}{c}+5}{5\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}}$, đặt $t=\frac{b}{c}\Rightarrow d(B,\Delta)=\sqrt{\frac{21t^2-6t+5}{5t^2+1}}$.

Xét $f(t)=\frac{21t^2-6t+5}{5t^2+1}$, $f'(t)=\frac{30t^2-8t-6}{(5t^2+1)^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{1}{3}\\ t=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ bằng $\dfrac{16}{5}$ khi $t=\dfrac{3}{5}$.

$\Rightarrow \left(d\left(B,\Delta\right)\right)_{\min}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ khi $t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\dfrac{b}{c}=\dfrac{3}{5}$.

Chọn $b=-3,c=-5\Rightarrow a=6$. Vậy Δ nhận vecto $\vec{u}=(6;-3;-5)$ làm vecto chỉ phương

Câu 43. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(1;-1;-2)$ và VTCP của trục Oy là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi α là góc giữa d và Oy, ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}_d.\vec{j}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|\left|\vec{j}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\neq 0$ với

Gọi β là góc giữa mặt phẳng (P) và Oy, do (P) chứa d nên ta có $\beta\le\alpha$. Dấu bằng xảy ra khi mặt phẳng (P) tạo với Oy một góc β thỏa mãn $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

(P) chứa d nên (P) có dạng $m(x+y+1)+n(2x+z-2)=0,\ m^2+n^2>0$

$\Leftrightarrow (m+2n)x+my+nz+m-2n=0,\ m^2+n^2>0$

$\sin\beta=\dfrac{|m|}{\sqrt{(m+2n)^2+m^2+n^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\Rightarrow 4m^2+20mn+25n^2=0\Leftrightarrow 2m+5n=0$.

Chọn $m=5,\ n=-2$ suy ra phương trình mặt phẳng $(P):x+5y-2z+9=0$.

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)\in(P)$.

Câu 44. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{5}{6}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. Điểm M thay đổi trên đường tròn giao tuyến của (P) và (S). Giá trị lớn nhất của $d(M;\Delta)$ là

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;-1;0)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Ta có: $d(I;(P))=\frac{1}{3}<R$. Khi đó bán kính đường tròn giao tuyến là: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;1)\Rightarrow\overrightarrow{OI}=(1;-1;0),\left[\overrightarrow{OI},\vec{a}\right]=(-1;-1;2)$.

Ta có: $d\left(I;\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OI},\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{2}$.

Mặt khác $\Delta\perp(P)$, gọi H là tâm của đường tròn (C) giao tuyến của (P) và (S).

Ta có: $IH//\Delta$. Do đó $d(M;\Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(M;\Delta)=r+d\left(IH;\Delta\right)=r+d(I;\Delta)$

Khoảng cách lớn nhất của $d(\mathrm{M};\Delta)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

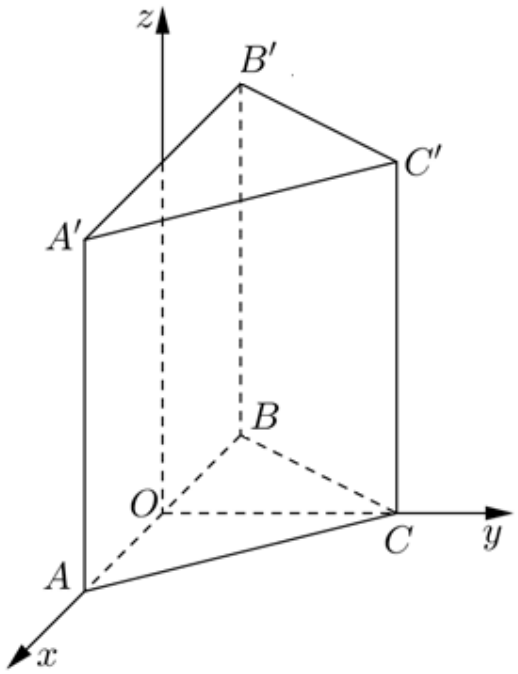
Vậy đáp án cần chọn là **A.**

Câu 45. **(SP Đồng Nai - 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A\left(x_0;0;0\right)$ $B\left(-x_0;0;0\right)$, $C\left(0;1;0\right)$ và $B'\left(-x_0;0;y_0\right)$ trong đó $x_0;y_0$ là các số thực dương và thỏa mãn $x_0+y_0=4$. Khi khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ lớn nhất thì bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu?

A. $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$. **B.** $R=\frac{29}{4}$. **C.** $R=\frac{\sqrt{41}}{4}$. **D.** $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Xác định tọa độ các đỉnh hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$A(x_0;0;0)$, $B(-x_0;0;0)$, $C(0;1;0)$

$A'(x_0;0;y_0)$, $B'(-x_0;0;y_0)$, $C'(0;1;y_0)$

+ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$.

$\overrightarrow{AC'}=(-x_0;1;y_0)$, $\overrightarrow{B'C}=(x_0;1;-y_0)$ và $\overrightarrow{CC'}=(0;0;y_0)$

$$d(AC',B'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{CC'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{|x_0y_0|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\sqrt{\frac{(x_0y_0)^2}{(x_0+y_0)^2-2x_0y_0}}$$

Đặt $t=x_0y_0\le\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)^2=4\Rightarrow t\in(0;4]$

Xét $f(t)=\frac{t^2}{16-2t}\Rightarrow f'(t)=\frac{32t-2t^2}{(16-2t)^2}$.

Cho $f'(t)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=16\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(t)$				$+$		
$f(t)$				$\nearrow$		

Giá trị lớn nhất của $d(AC',B'C)$ bằng $f(4)$ nên $x_0y_0=4$ (1)

Mặt khác $x_0+y_0=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $x_0=y_0=2$.

Khi đó, $AB=4$, $AC=BC=\sqrt{5}$ và chiều cao hình lăng trụ là $h=CC'=2$

Ta có $r=\dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=\dfrac{5}{2}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ΔABC.

Vậy $R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Câu 46. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2)$, $B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=-2+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\y=1-4t\\z=-2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-2t\\z=-2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1+4t\\z=-2-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-3;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+6^2-9}=6$.

Vì $IA=R$ nên $A\in(S)\Rightarrow d$ đi qua A và vuông góc với $IA\Rightarrow d$ nằm trong (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với IA. Ta có $(P):x+2y+2z=0$.

Mặt khác, ta luôn có: $\mathrm{d}(B,d)\ge \mathrm{d}(B,(P))=3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow d$ là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).

Ta tìm hình chiếu H của B trên (P):

Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với $(P)\Rightarrow \Delta:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Vì H là giao điểm của Δ và (P) nên tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}\\x+2y+2z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow H(4;-1;-1)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2;-2;1)$.

Do đó, d là đường thẳng đi qua hai điểm A và H nên có phương trình: $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-2t\\z=-2+t\end{cases}$.

Dạng 2.2. Cực trị lên quan đến giá trị biểu thức

Câu 47. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=-t\end{cases}$ và ba điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho biểu thức $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Vì $M\in d$ nên giả sử $M(1-t;2+t;-t)$.

Ta có: $MA^2=3t^2+14t+29; MB^2=3t^2-4t+2; MC^2=3t^2+10t+21$

$\Rightarrow P=MA^2+2MB^2+3MC^2=18t^2+36t+96=18(t+1)^2+78\ge 78$

Do đó $P=MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=-1$, khi đó:

$M(2;1;1)\Rightarrow a+b+c=4$.

Câu 48. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3;-2;3)$, $B(1;0;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;2;3)$. **B.** $M(2;0;5)$. **C.** $M(3;-2;7)$. **D.** $M(3;0;4)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I=(2;-1;4)$.

Khi đó: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2MI^2+IA^2+IB^2=MI^2+6$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d là

$1.(x-2)-2.(y+1)+2.(y-4)=0$ hay $(P):x-2y+2z-12=0$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+2t\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

$\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+2t\\x-2y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=5\\t=1\end{cases}$. Vậy $M(2;0;5)$.

Câu 49. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{57}$. **B.** $T_{\max}=3$. **C.** $T_{\max}=2\sqrt{6}-3$. **D.** $T_{\max}=3\sqrt{6}$.

Lời giải

Do M thuộc Δ nên $M(t;1+t;t)$.

Khi đó $MA=\sqrt{3t^2-6t+27}=\sqrt{3(1-t)^2+24}$, $MB=\sqrt{3t^2+6}$.

Do đó $|MA-MB|=\left|\sqrt{3(1-t)^2+24}-\sqrt{3t^2+6}\right|$.

Xét hai véc tơ $\vec{u}=\left(\sqrt{3}(1-t);\sqrt{24}\right)$ và $\vec{v}=\left(\sqrt{3}t;-\sqrt{6}\right)$.

Ta có $\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|\le|\vec{u}+\vec{v}|=3$ nên $T_{\max}=3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}=\left(\sqrt{3}(1-t);\sqrt{24}\right)$ và $\vec{v}=\left(\sqrt{3}t;-\sqrt{6}\right)$ ngược hướng hay $t=1$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0.

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=2$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó ta có

$$MA^4+MB^4=\left(MA^2+MB^2\right)^2-2MA^2.MB^2=\left(2MI^2+\frac{AB^2}{2}\right)^2-2\left(MI^2-\frac{AB^2}{4}\right)^2$$

$$=4MI^4+2MI^2AB^2+\frac{AB^4}{4}-2MI^4+MI^2AB^2-\frac{AB^4}{8}$$

$$=2MI^4+3MI^2AB^2+\frac{AB^4}{4}=2\left(MI^2+\frac{3AB^2}{4}\right)^2-\frac{7}{10}AB^4$$

Do đó, MA^4+MB^4 đạt GTNN khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I lên d.

Điểm $I(2;-1;0)$. Lấy $M(2+t;-1+2t;3t)\in$ d. $\overrightarrow{IM}=(t;2t;3t)$

$\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t+4t+9t=0\Leftrightarrow t=0$

Suy ra $M\equiv I$.

Vậy $x_0=2$

Câu 51. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(5;3;7)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $MA=MB$ và $MB+MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$

A. $P=4$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $I(1;1;1)$; $\overrightarrow{AB}=(4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của AB: $(\alpha):2x+y-3=0$.

Vì $(2.3+1.2-3).(2.5+1.3-3)=50>0$ nên B, C nằm về một phía so với (α), suy ra A, C nằm về hai phía so với (α).

Điểm M thỏa mãn $MA=MB$ khi $M\in(\alpha)$. Khi đó $MB+MC=MA+MC\geq AC$.

$MB+MC$ nhỏ nhất bằng AC khi $M=AC\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AC:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=1+2t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương

Câu 52. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3),B(0;1;1),C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+3=0$?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{121}{54}$ **C.** 24 **D.** $\frac{91}{54}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(1-a;2-b;3-c),\overrightarrow{IB}(-a;1-b;1-c),\overrightarrow{IC}(1-a;-b;-2-c)$

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a-2a+3-3a=0\\2-b+2-2b-3b=0\\3-c+2-2c-6-3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=4\\6b=4\\6c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=\frac{2}{3}\\c=-\frac{1}{6}\end{cases}\quad I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$. Do đó T đạt $GTNN$ khi MI đạt $GTNN\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P).

Ta có $MI:\begin{cases}x=\frac{2}{3}+t\\y=\frac{2}{3}+t\\z=-\frac{1}{6}+t\end{cases}$, $M\in MI\Rightarrow M\left(t+\frac{2}{3};t+\frac{2}{3};t-\frac{1}{6}\right),M\in(P)\Rightarrow 3t+\frac{19}{6}=0\Leftrightarrow t=-\frac{19}{18}$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{7}{18};-\frac{7}{18};-\frac{11}{9}\right)\Rightarrow d(M;(Q))=\frac{\left|-\frac{7}{9}+\frac{7}{18}+\frac{22}{9}+3\right|}{3}=\frac{91}{54}.$$

Câu 53. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1).$

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI = d\left(I,\left(P\right)\right) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng

$$6MI^2 + 228 = 6.9 + 228 = 282.$$

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên $\left(P\right)$.

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với $\left(P\right)$. Phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$.

Ta có $M = \Delta \cap \left(P\right)$. Xét phương trình

$t + 2\left(1 + 2t\right) - 2\left(1 - 2t\right) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M\left(1;3;-1\right)$.

Câu 54. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $\left(P\right): x + y + z - 3 = 0$ và ba điểm $A\left(3;1;1\right)$, $B\left(7;3;9\right)$ và $C\left(2;2;2\right)$. Điểm $M\left(a;b;c\right)$ trên $\left(P\right)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $2a - 10b + c$.

A. $\frac{62}{9}$. **B.** $\frac{27}{9}$. **C.** $\frac{46}{9}$. **D.** $\frac{43}{9}$.

Lời giải

+ Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = \left(3 - x;1 - y;1 - z\right) \\ \overrightarrow{IB} = \left(7 - x;3 - y;9 - z\right) \\ \overrightarrow{IC} = \left(2 - x;2 - y;2 - z\right) \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

$$+\ \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 6x = 0 \\ 13 - 6y = 0 \\ 25 - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{6} \\ y = \frac{13}{6} \\ z = \frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right).$$

$$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \left|6\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}\right)\right| = \left|6\overrightarrow{MI}\right| = 6MI.$$

$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng $\left(P\right)$.

+ Gọi đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua I và vuông góc $\left(P\right)$.

Ta có $\left(d\right)$ đi qua $I\left(\frac{23}{6};\frac{13}{6};\frac{25}{6}\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_p} = \left(1;1;1\right)$ làm véc tơ chỉ phương.

Suy ra phương trình $\left(d\right): \begin{cases} x = \frac{23}{6} + t \\ y = \frac{13}{6} + t \\ z = \frac{25}{6} + t \end{cases}$.

$M \in (d) \Leftrightarrow M\left(\frac{23}{6}+t;\frac{13}{6}+t;\frac{25}{6}+t\right)$

$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{23}{6}+t+\frac{13}{6}+t+\frac{25}{6}+t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{-43}{18} \Leftrightarrow M\left(\frac{13}{9};\frac{-2}{9};\frac{16}{9}\right).$

Do đó $\begin{cases} a=\frac{13}{9} \\ b=\frac{-2}{9} \\ c=\frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow 2a-10b+c=\frac{62}{9}.$

Câu 55. **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-8;1;1)$, $B(2;1;3)$ và $C(6;4;0)$. Một điểm M di động trong không gian sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34$. Cho biết $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi điểm M trùng với điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Tính tích số $x_0y_0z_0$.

A. 16. **B.** 18. **C.** 14. **D.** 12.

Lời giải

Gọi $M=(a;b;c)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=34 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=34$

Mặt khác $\overrightarrow{MA}=(-8-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{BC}=(4;3;-3)$

Suy ra $4(-8-a)+3(1-b)-3(1-c)=34 \Leftrightarrow -4a-3b+3c-66=0$.

Vậy $M \in (P)$ có phương trình $-4x-3y+3z-66=0$.

Ký hiệu $f(M)=f(x;y;z)=-4x-3y+3z-66$, với $M(x;y;z)$

Ta có $f(A).f(B)=(-4(-8)-3.1+3.1-66)((-4.2-3.1+3.3-66)=(-34).(-68)=2312>0$

Suy ra điểm $A(-8;1;1)$ và điểm $B(2;1;3)$ nằm về cùng 1 phía so với mặt phẳng (P).

Khi đó $|MA-MB| \le AB$ (tính chất 3 cạnh của tam giác) suy ra $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất khi M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB hay M là giao điểm của đường thẳng AB với (P).

Đường thẳng AB có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(10;0;2)$ và qua điểm $B(2;1;3)$ nên có phương trình $\begin{cases} x=2+5t \\ y=1 \\ z=3+t \end{cases}$.

Suy ra $-4(2+5t)-3.1+3(3+t)-66=0 \Leftrightarrow -17t=68 \Leftrightarrow t=-4$.

Vậy $M(-18;1;-1)$ hay $x_0y_0z_0=18$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

A. $P=6$. **B.** $P=2$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Với mọi điểm I ta có

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=4NI^2+2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+2IA^2+IB^2+IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là $I(0;1;2)$.

Khi đó $S=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

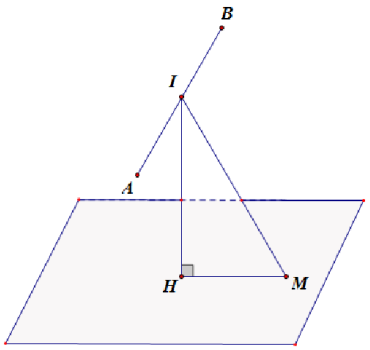
Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là $\begin{cases}x=0+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t)\in(P)\Rightarrow t-1+t+2+t+2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow N(-1;2;1)$.

Câu 57. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha): x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(3;1;4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)-IA^2=MI^2-IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI=IH\Leftrightarrow M\equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α). Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=4-3t\end{cases}$.

$H\in\Delta\Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H\in(\alpha)\Leftrightarrow(3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho hai điểm $A(1;0;2),B(3;1;-1)$. và mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=9a+3b+6c$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Gọi $I(m;n;p)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-m;-n;2-p);\overrightarrow{IB}=(3-m;1-n;-1-p)$.

$$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-m)-2(3-m)=0\\3(-n)-2(1-n)=0\\3(2-p)-2(-1-p)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\n=-2\\p=8\end{cases}\Rightarrow I(-3;-2;8).$$

Ta có $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Khi đó, $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $M\in(P)\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất, $M\in(P)$

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Khi đó Δ nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vecto chỉ phương $\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\end{cases}$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+t\\y=-2+t\\z=8+t\\x+y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{8}{3}\\z=\dfrac{22}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{11}{3}\\b=-\dfrac{8}{3}\\c=\dfrac{22}{3}\end{cases}\Rightarrow S=9a+3b+6c=3.$

Câu 59. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5),B(3;4;0),C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(\alpha):3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(1-x;4-y;5-z)\\ \overrightarrow{IB}=(3-x;4-y;-z)\\ \overrightarrow{IC}=(2-x;-1-y;-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(1-x;4-y;5-z)\\ \overrightarrow{IB}=(3-x;4-y;-z)\\ 3\overrightarrow{IC}=(6-3x;-3-3y;-3z)\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=(10-5x;5-5y;5-5z)$

Do đó: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow I(2;1;1).$

Mặt khác: $MA^2+MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=5MI^2+2.MI.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right)+IA^2+IB^2+3IC^2$

Vì I,A,B,C cố định nên $IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi

Do đó: $MA^2+MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}.$

Gọi $\{M\}=d\cap(\alpha)$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+6=3y-3\\ -2x+4=3z-3\\ 3x-3y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right).$

Vậy $a=\dfrac{7}{2},b=-\dfrac{1}{2},c=0\Rightarrow S=a+b+c=3.$

Câu 60. **(Dề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;2;0),B(1;-1;3),C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P):3x-3y+2z-15=0$. Xét $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI})-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{2}\Rightarrow I(1;2;-2)$

Ta có $2MA^2=2\overrightarrow{MA}^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

$MC^2=\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IB}\right)$

Suy ra $2MA^2-MB^2+MC^2=2MI^2+2IA^2+IC^2-IB^2$. Do I cố định nên $2IA^2+IC^2-IB^2$ không đổi. Vậy $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P).

• Đường thẳng Δ qua $I(1;2;-2)$ và vuông góc với (P) là: $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=-2+2t\end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=-2+2t\\3x-3y+2z-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\\z=0\\t=1\end{cases}\Rightarrow M(4;-1;0)$

Suy ra $a+b+c=3$

Câu 61. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;1;2)$ và mặt phẳng $(Q):3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2+MB^2+2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+5c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 14.

Lời giải

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Rightarrow E(3;0;1)$.

Ta có: $S=MA^2+MB^2+2MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2=4ME^2+EA^2+EB^2+2EC^2$.

Vì $EA^2+EB^2+2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của E lên (Q).

Phương trình đường thẳng $ME:\begin{cases}x=3+3t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=3+3t\\y=t\\z=1-t\\3x+y-z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\\z=2\\t=-1\end{cases}$.

$\Rightarrow M(0;-1;2)\Rightarrow a=0$, $b=-1$, $c=2$.

$\Rightarrow a+b+5c=0-1+5.2=9$.

Câu 62. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;1;4)$ và mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\frac{4}{3};2;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N(-2;0;1)$. **C.** $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$. **D.** $N(-1;2;1)$.

Lời giải

Với mọi điểm I ta có

$S=2NA^2+NB^2+NC^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=4NI^2+2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+2IA^2+IB^2+IC^2$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ Suy ra tọa độ điểm I là: $I(0;1;2)$.

Khi đó $S=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2$, do đó S nhỏ nhất khi N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là: $\begin{cases}x=0+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$

Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t)\in(P)\Rightarrow t-1+t+2+t+2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow N(-1;2;1)$.

Câu 63. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m,n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

Lời giải

Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Giả sử $I(x;y;z)$, ta có:

$\overrightarrow{IA}(4-x;3-y;1-z),\overrightarrow{IB}(3-x;1-y;3-z)$.

Do đó: $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}2(4-x)=3-x\\2(3-y)=1-y\\2(1-z)=3-z\end{cases}\Leftrightarrow I(5;5;-1)$.

Do đó: $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2+4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IA}^2-\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+2IA^2-IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)$

$=MI^2+2IA^2-IB^2$.

Do I cố định nên IA^2,IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất).

$\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1;2;-1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S).

Ta có: MI đi qua $I(5;5;-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4;3;0)$.

Phương trình của MI là: $\begin{cases}x=1+4t\\y=2+3t\\z=-1.\end{cases}$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$(1+4t-1)^2+(2+3t-2)^2+(-1+1)^2=9\Leftrightarrow 25t^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{5}\\t=-\dfrac{3}{5}.\end{array}\right.$

Với $t=\frac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5};\frac{19}{5};-1\right)\Rightarrow M_1I=2$ (min).

Với $t=-\frac{3}{5}\Rightarrow M_1\left(-\frac{7}{5};\frac{1}{5};-1\right)\Rightarrow M_2I=8$ (max). Vậy $\begin{cases}m=P_{\max}=48\\ n=P_{\min}=-12\end{cases}\Rightarrow m-n=60.$

Câu 64. **(Chuyên KHTN 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11),B(5;3;-4),C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN.$$

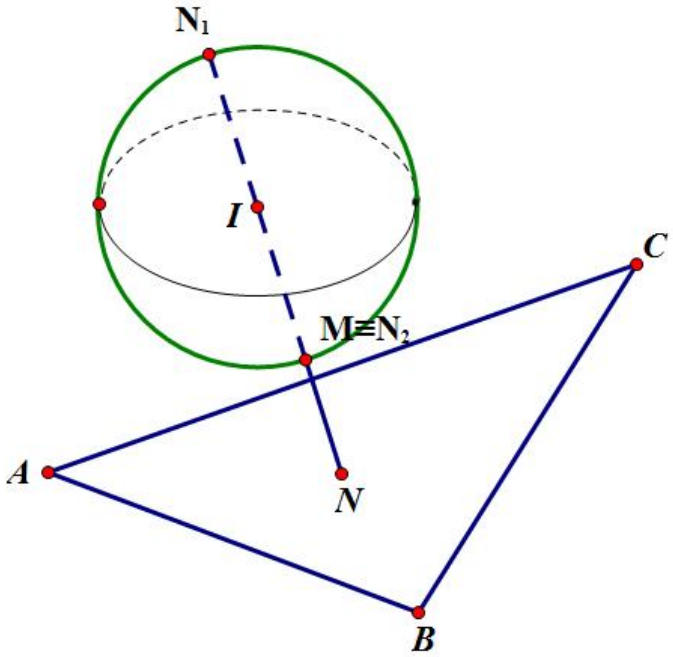
Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\ y=4+2t\\ z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S) ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\end{array}\right.$.

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2),N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.



Câu 65. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1\,;\,1\,;3)$, $B(21\,;\,9\,;\,-13)$. Điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Lời giải

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(6\,;3\,;-1)$.

Khi đó $3MA^2+MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=4MI^2+3IA^2+IB^2$.

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A;B;I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S), ($J(2\,;1\,;3)$ là tâm của mặt cầu (S)).

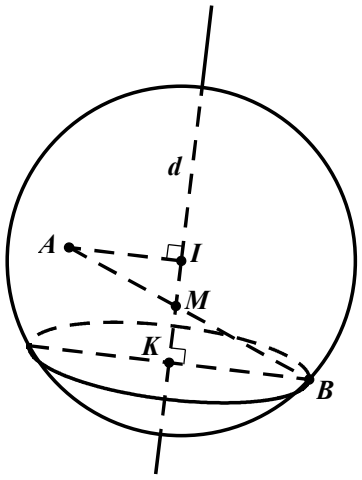
Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3-2t\end{cases}\Rightarrow IJ\cap(S)=\left[\begin{array}{l}M_1(4;\,2\,;1)\\M_2(0\,;\,0\,;5)\end{array}\right.$.

Kiểm tra $IM_1<IM_2\,(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T=a.b.c=8$.

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK = \mathrm{d}\left(I,(P)\right) = \dfrac{\left|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107\right|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = 5\sqrt{29}$ và $KB = \sqrt{R^2 - IK^2} = 2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap d$.

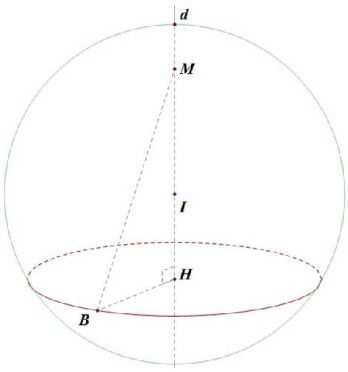
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK} = \dfrac{IA}{KB} = \dfrac{3}{2}$ và $MI + MK = IK = 5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI = 3\sqrt{29}$, $MK = 2\sqrt{29}$.

Ta có $AM = \sqrt{IA^2 + MI^2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow BM = \dfrac{2}{3}AM = 2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là $AM + BM = 3\sqrt{30} + 2\sqrt{30} = 5\sqrt{30}$.

Cách 2:



Ta có (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R = 27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3;-4;-5)$ và vuông góc với (P).

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r = 2$.

$M \in d \Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.

Ta có $T = MA + MB = MA + \sqrt{MH^2 + r^2}$.

Lại có $MH = d(M;(P)) = \dfrac{|29t - 87|}{\sqrt{29}} = \left|\sqrt{29}t - 3\sqrt{29}\right|$.

Suy ra $T = \sqrt{29t^2 + 116t + 125} + \sqrt{29(t-3)^2 + 4} = \sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2 + \dfrac{9}{29}} + \sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2 + \dfrac{4}{29}}$.

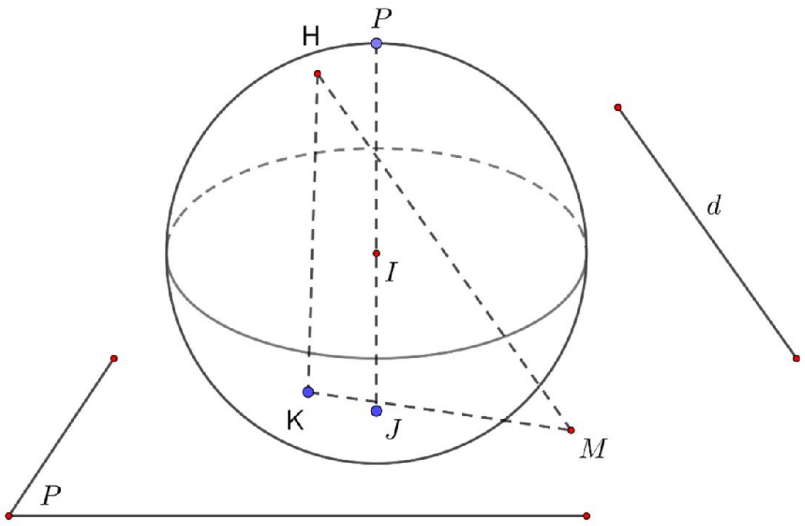
Xét $\vec{u} = \left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right), \vec{v} = \left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Do đó $T = \sqrt{29}\left(|\vec{u}| + |\vec{v}|\right) \geq \sqrt{29}|\vec{u} + \vec{v}| = 5\sqrt{50}$.

Câu 67. **(THPT Chuyên Thái Bình - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $(d): \dfrac{x-15}{1} = \dfrac{y-22}{2} = \dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với (d). Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

A. $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $IH \perp AB$ và $IH=3$ nên H thuộc mặt cầu (S') tâm I bán kính $R'=3$.

Gọi M là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, M nằm trên mặt phẳng (P).

Mặt khác ta có $d(I;(P))=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<R$ nên (P) cắt mặt cầu (S) và $\sin(d;(P))=\sin\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi K là hình chiếu của H lên (P) thì $HK=HM.\sin\alpha$.

Vậy để $AA'+BB'$ lớn nhất thì HK lớn nhất

$\Leftrightarrow HK$ đi qua I nên $HK_{\max}=R'+d(I;(P))=3+\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Vậy $AA'+BB'$ lớn nhất bằng $2\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).\dfrac{3\sqrt{3}}{5}=\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$.

Câu 68. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3;1;1)$, $B(5;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$, $(Q):-x+y+z-1=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. 5. **B.** 29. **C.** 13. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;1)$. Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(-1;1;1)$. Khi đó đường thẳng d đi qua $N(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là

$\vec{u}_d = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = (1;-2;3)$ nên có phương trình tham số là $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+3t \end{cases}$ suy ra

$M(1+t;1-2t;1+3t)$.

$MA + MB = \sqrt{(t+4)^2 + 4t^2 + 9t^2} + \sqrt{(t-4)^2 + 4t^2 + 9t^2} = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(t) = \sqrt{14t^2 + 8t + 16} + \sqrt{14t^2 - 8t + 16} = \sqrt{14}\left[\sqrt{t^2 + \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}} + \sqrt{t^2 - \frac{4}{7}t + \frac{8}{7}}\right]$

$= \sqrt{14}\left[\sqrt{\left(t + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} + \sqrt{\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}\right]$.

Đặt $\vec{u} = \left(t + \frac{2}{7}; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{2}{7} - t; \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Khi đó $f(t) = \sqrt{14}\left[\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|\right] \geq \sqrt{14}\left|\vec{u} + \vec{v}\right|$. Suy ra $f(t) \geq \sqrt{14}.\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{7}}{49}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng hay $\frac{t + \frac{2}{7}}{\frac{2}{7} - t} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{2}{\sqrt{7}}} > 0 \Rightarrow t = 0$.

Do đó $M(1;1;1)$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

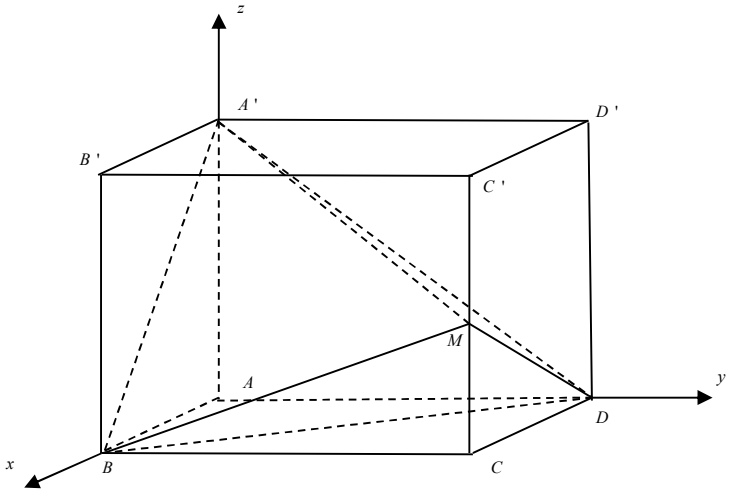
Dạng 2.3. Cực trị liên quan đến chu vi, diện tích, bán kính, thể tích

Câu 69. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{27}$. **B.** $\frac{32}{27}$. **C.** $\frac{8}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chon C



Tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $C'(a;a;b)$, $M(a;a;\frac{b}{2})$.

$\overrightarrow{BA'}=(-a;0;b)$, $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$, $\overrightarrow{BM}=(0;a;\frac{b}{2})$.

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-ab;-ab;-b^2)$ nên $V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{a^2b}{4}$.

Ta có: $a.a.(2b)\le\left(\frac{a+a+2b}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\Rightarrow a^2b\le\frac{32}{27}\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{8}{27}$.

Câu 70. **(THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên (d) sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=3$. **D.** $P=-1$.

Lời giải

$M\in d\Rightarrow M(-1+2t;1-t;2t)$.

Chu vi tam giác MAB là: $AM+BM+AB$. Vì $AB=const$ nên chu vi nhỏ nhất khi $(AM+BM)$ nhỏ nhất.

$\overrightarrow{AM}(2t-2;-t-4;2t)$, $\overrightarrow{BM}(2t-4;-t-2;2t-6)$.

$AM+BM=\sqrt{9t^2+20}+\sqrt{9t^2-36t+56}=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(6-3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$

Đặt $\vec{u}=(3t;2\sqrt{5})$, $\vec{v}=(6-3t;2\sqrt{5})\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=(6;4\sqrt{5})$.

Áp dụng bất đẳng thức vecto: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

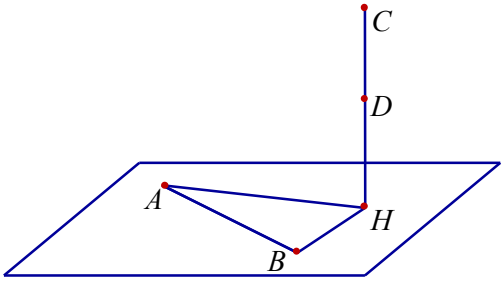
Ta có: $AM+BM=|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}=|=\sqrt{6^2+(4\sqrt{5})^2}=2\sqrt{29}$. Do đó $(AM+BM)$ nhỏ nhất khi tồn tại số k dương sao cho $\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}3t=k(6-3t)\\2\sqrt{5}=2\sqrt{5}k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\k=1\end{cases}$. Khi đó $M(1;0;2)$.

Vậy $P=a+b+c=1+0+2=3$.

Câu 71. **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)\Rightarrow AB=\sqrt{113}$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-2+12-10=0\Rightarrow AB\perp CD$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD.

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$ là:

$x-4y+z-1=0$.

Phương trình đường thẳng CD: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$.

$H\in CD\Leftrightarrow H(1+t;2-4t;-1+t)$.

$H\in(P)\Leftrightarrow 1+t-4(2-4t)-1+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Với $\forall M\in CD$, ta có $\begin{cases}AM\geq AH\\BM\geq BH\end{cases}\Rightarrow AM+BM\geq AH+BH$.

$C_{ABM}=AB+AM+BM\geq\sqrt{113}+AH+BH$, $\forall M\in CD$.

Suy ra $minC_{ABM}=\sqrt{113}+AH+BH$, đạt được $M\equiv H\Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $C_{\Delta ABM}=AM+BM+AB$ mà AB không đổi suy ra $C_{\Delta ABM}$ nhỏ nhất khi $AM+BM$ nhỏ nhất.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$.

Xét $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow AB\perp CD$. Gọi (α) qua AB và vuông góc với CD.

(α) đi qua $A(-1;1;6)$ và nhận $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Suy ra (α) có phương trình là: $x-4y+z-1=0$.

Vì điểm M thuộc CD sao cho $AM+BM$ nhỏ nhất nên $M=CD\cap(\alpha)$.

$(\alpha):x-4y+z-1=0$, CD có phương trình: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$

$M=CD\cap(\alpha)\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=\frac{3}{2}+0+\frac{-1}{2}=1$.

Câu 73. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1);B(7;-4;-3)$. Điểm $M(a;b;c)(a>2)$ thuộc

(P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T=a+b+c$ bằng:

A. $T=6$. **B.** $T=8$. **C.** $T=4$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S_{ABM}=\frac{1}{2}AB.MH$ với H là hình chiếu vuông góc của M lên A**B.**

Do AB không đổi nên S_{ABM} nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(4;-8;-4)\\ \overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Rightarrow AB//(P)$

MH nhỏ nhất khi M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P);

với (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp(P).

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(4;-8;-4)\\ \overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_Q}=(3;0;3)\Rightarrow$ phương trình mp (Q) là $x+z-4=0$.

M nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (Q) và (P) nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases}x+z-4=0\\ x+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=2-2t\\ z=4-t\end{cases}\Rightarrow M(t;2-2t;4-t)$ với $t>2$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(t-3;-2-2t;3-t);\overrightarrow{BM}=(t-7;6-2t;7-t)$.

Tam giác ABM vuông tại M nên

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(t-3)(t-7)+(-2-2t)(6-2t)+(3-t)(7-t)=0$

$\Leftrightarrow(t-3)(t-7)+2(t-3)(t+1)=0\Leftrightarrow(t-3)(3t-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\ (n)\\ t=\frac{5}{3}\ (l)\end{array}\right.$.

+ $t=3\Rightarrow M(3;-4;1)\Rightarrow a+b+c=3-4+1=0$.

Câu 74. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+3y+5z+2=0$.

C. $x-2y-3=0$. **D.** $3x-2y-4z-8=0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d.

$H\in d\Leftrightarrow H(1+2t;-1+t;-t)$; $\overrightarrow{IH}=(-2+2t;-2+t;-t)$.

Véctơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

$\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(-2+2t)+1(-2+t)+t=0\Leftrightarrow t=1$. Suy ra $H(3;0;-1)\Rightarrow IH=\sqrt{2}$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính r.

Ta có $r=\sqrt{R^2-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}=\sqrt{4-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}$.

Mà $d\left(I,(P)\right)\le IH=\sqrt{2}$ nên $r=\sqrt{4-\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2}\ge\sqrt{4-IH^2}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.

Suy ra $\min r=\sqrt{2}$, đạt được khi $IH\perp(P)$.

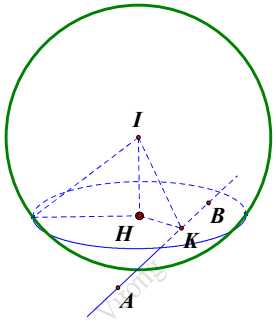
Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $H(3;0;-1)$ nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ làm một véctơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $0(x-3)-1(y-0)-1(z+1)=0\Leftrightarrow y+z+1=0$.

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz-2=0$ đi qua A, B và cắt theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3$ **B.** $T=5$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(a;b;c)$

Theo giả thiết $B(0;1;0)\in(P):b-2=0\Leftrightarrow b=2$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-6)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến. K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB, H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K\in AB\Rightarrow K(t;1-t;2t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t-1;-t-1;2t-3)$

$IK\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}=0\Rightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(0;-2;-1)$.

$r=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{25-d^2\left(I,(P)\right)}=\sqrt{25-IH^2}$.

Ta có: $r_{\min}\Leftrightarrow IH_{\max}$.

Mà $IH\le IK\Rightarrow IH_{\max}=IK\Leftrightarrow H\equiv K\Rightarrow(P)\perp IK\Rightarrow\vec{n}_P$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow\vec{n}_P=k.\overrightarrow{IK}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-2k\\c=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\k=-1\\c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\c=1\end{cases}\Rightarrow t=a+b+c=0+2+1=3.$$

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=48$ Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4), B(2;0;0)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S), đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{128\pi}{3}$ **B.** 39π **C.** $\frac{88\pi}{3}$ **C.** $\frac{215\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có tâm cầu $I(1;-2;3); \mathrm{R}=4\sqrt{3}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu I lên mặt phẳng (α)

Vậy chiều cao của khối nón (N) là $h=d(I,P)=IH\le IK$, trong đó K là hình chiếu vuông góc của I lên AB

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua I và vuông góc với ta có $(Q):x+2z-7=0$

Phương trình $AB:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-4+2t\end{cases}$ thế vào (Q) ta được $t-8+4t-7=0\Rightarrow t=3$

Tọa độ $K(3;0;2)\Rightarrow IK=3$

Bán kính của khối nón $r=\sqrt{48-h^2}$

Vậy thể tích của khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi(48-h^2).h=\frac{1}{3}\pi(48-h^2).h \quad \forall h\in[0;3]$

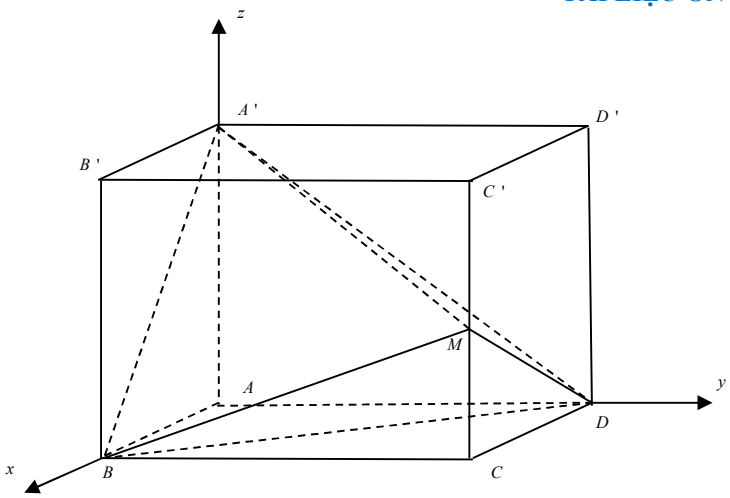
Khảo sát V ta tìm được $V_{\max}=39\pi$

Câu 77. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{27}$. **B.** $\frac{32}{27}$. **C.** $\frac{8}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ điểm $C(a;a;0),\ C'(a;a;b),\ M(a;a;\frac{b}{2})$.

$\overrightarrow{BA'}=(-a;0;b),\ \overrightarrow{BD}=(-a;a;0),\ \overrightarrow{BM}=(0;a;\frac{b}{2})$.

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-ab;-ab;-b^2)$ nên $V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{a^2b}{4}$.

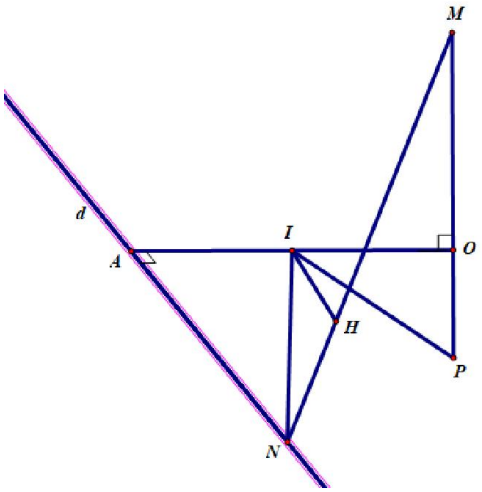
Ta có: $a.a.(2b)\le\left(\frac{a+a+2b}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\Rightarrow a^2b\le\frac{32}{27}\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{8}{27}$.

Câu 78. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $(4;3;5\sqrt{2})$. **B.** $(4;3;10\sqrt{2})$. **C.** $(4;3;5\sqrt{10})$. **D.** $(4;3;10\sqrt{10})$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $A(4-3t;3+4t;0)$ là hình chiếu vuông góc của O trên d

$\Leftrightarrow OA \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow A(4;3;0)$.

Trên Oz lấy điểm P sao cho $OP = AN \Rightarrow MP = OM + OP = MN$

và $\Delta AIN = \Delta OIP \Rightarrow IN = IP$

Ta có $\Delta IMP = \Delta IMN$, kẻ $IH \perp MN \Rightarrow IH = IO \Rightarrow S_{\Delta IMN} = \frac{1}{2} IH.MN \Rightarrow S_{\Delta IMN}$ min $\Leftrightarrow MN_{\min}$

Ta có $MN^2 = MO^2 + OA^2 + AN^2 \geq 2\left(\frac{MO + AN}{2}\right)^2 + 25 \Rightarrow MN \geq 5\sqrt{2}$

Vậy $MN_{\min} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow OM = AN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M\left(0;0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) là $\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u_d}\right] = \left(10\sqrt{2};\frac{15}{\sqrt{2}};25\right)$

Chọn $\vec{n} = \left(4;3;5\sqrt{2}\right)$

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S = \sqrt{7}$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 2\sqrt{7}$. **D.** $S = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $O = (0;0;0)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $OM = 1 \Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Đặt $x = OI \leq OM \Rightarrow 0 < x \leq 1$.

Khi đó $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OI.AB = OI\sqrt{R^2 - OI^2} = x\sqrt{8 - x^2} = f(x)$.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}} (0 < x \leq 1)$, ta có bảng biến thiên

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{7}$

Vậy $\max S_{\Delta OAB} = \sqrt{7}$ khi $OI = 1$ hay $I \equiv M$.

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y - z = 0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1;4;0)$

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy), ta tìm được $A_1(1;4;-3)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của $A(1;4;3)$ lên mặt phẳng (P)

Ta có phương trình đường thẳng $AK: \begin{cases} x=1 \\ y=4+2t \\ z=3-t \end{cases}$, Gọi $K(1;4+2t;3-t) \in AK$

Mặt khác, $K \in (P) \Rightarrow 5t+5=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow K(1;2;4)$

Gọi A_2 là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) thì K là trung điểm của AA_2.

Ta có $\begin{cases} x_{A_2}=2x_K-x_A=1 \\ y_{A_2}=2y_K-y_A=0 \\ z_{A_2}=zx_K-z_A=5 \end{cases} \Rightarrow A_2(1;0;5)$

Ta có chu vi tam giác ABC là $P_{\Delta ABC}=AC+AB+BC=A_1C+A_2B+BC \geq A_1A_2$.

Dấu bằng xảy ra khi A_1, A_2, B, C thẳng hàng

Suy ra $(P_{\Delta ABC})_{\min}=A_1A_2=4\sqrt{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 32 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

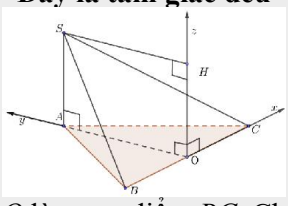
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI MỨC ĐỘ 8-9-10 ĐIỂM

Phương pháp giải một số bài toán

1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

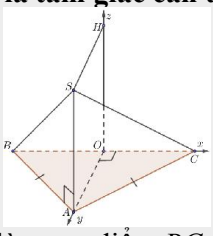
Đáy là tam giác đều



- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

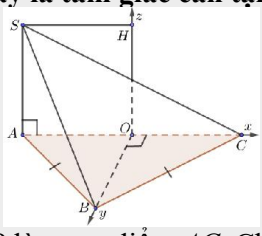
Đáy là tam giác cân tại A



- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

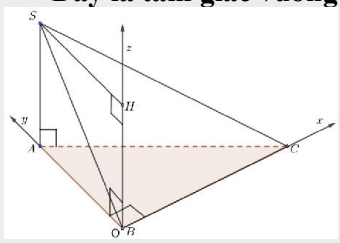
$O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại *B*



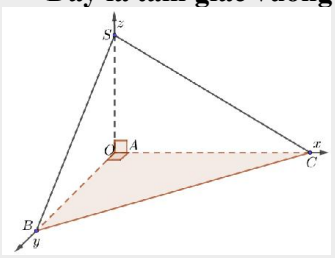
- Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại *B*



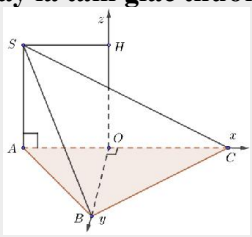
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$, $A(0;AB;0)$, $C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại *A*



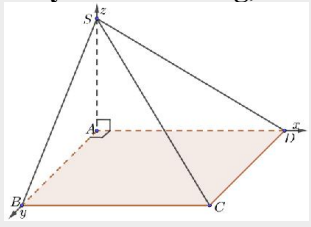
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác thường



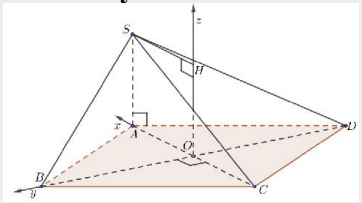
- Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật



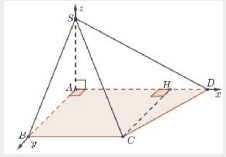
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

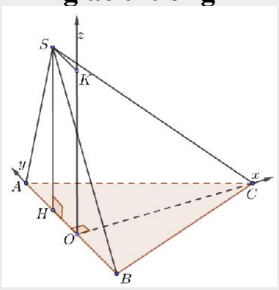
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường

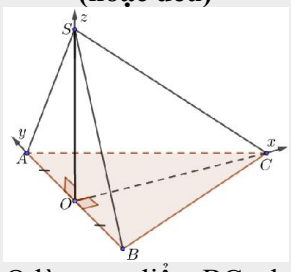


- Vẽ đường cao CO trong ΔABC. Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có:

$O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

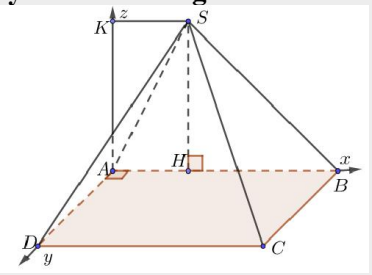
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,

$B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



- Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.
- Ta có: $A \equiv O(0;0;0), B(AB;0;0)$

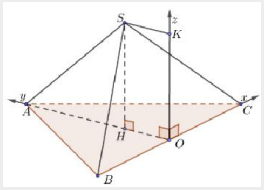
$C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

1.3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$. Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

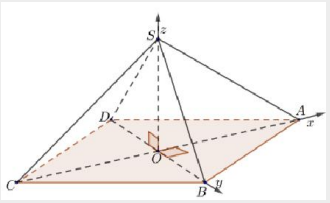


$C\left(\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với $a = 1$. Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$,



$C\left(\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$,

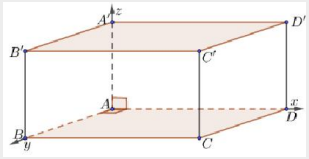
$D\left(0;\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$ $S(0;0;SO)$.

2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:



$A \equiv O(0;0;0)$,

$B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$,

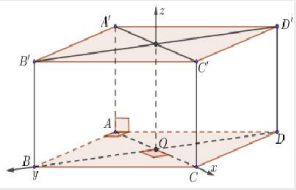
$D(AD;0;0)$,

$A'(0;0;AA')$,

$B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với



$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$,

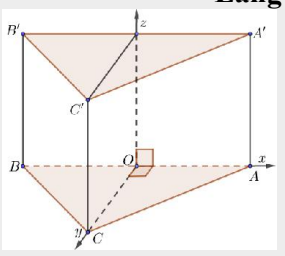
$B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$,

$D(0;-OD;0)$,

$A'(-OA;0;AA')$,

$B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

Lăng trụ tam giác đều

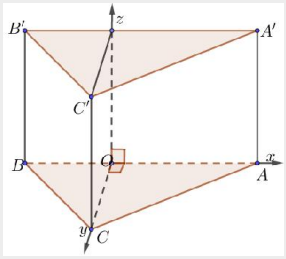


Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$O(0;0;0)$, $A\left(\dfrac{AB}{2};0;0\right)$,

$B\left(-\dfrac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$,

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường



Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm là:

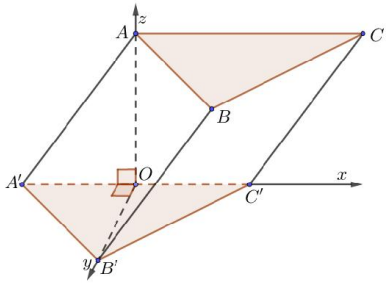
$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$,

$B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$,

$A'(OA;0;AA'), B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$	$A'(OA;0;AA'), B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$

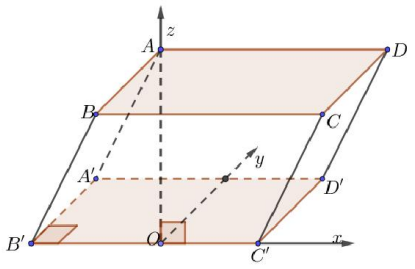
2.2. Lăng trụ nghiêng:

Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.

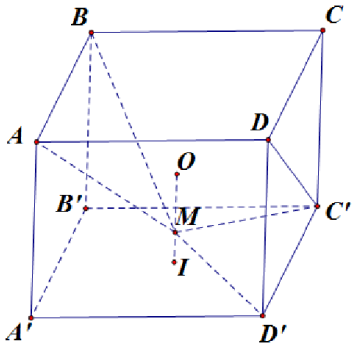
Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}$.

Dạng 1. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm GÓC

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO=2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$ **B.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$ **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

Câu 2. **(Mã 102 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=\frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Câu 3. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB=a, AD=a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạp bởi (SAC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Câu 5. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Câu 7. **(Sở Bắc Ninh -2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $135°$. **B.** $150°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Câu 8. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

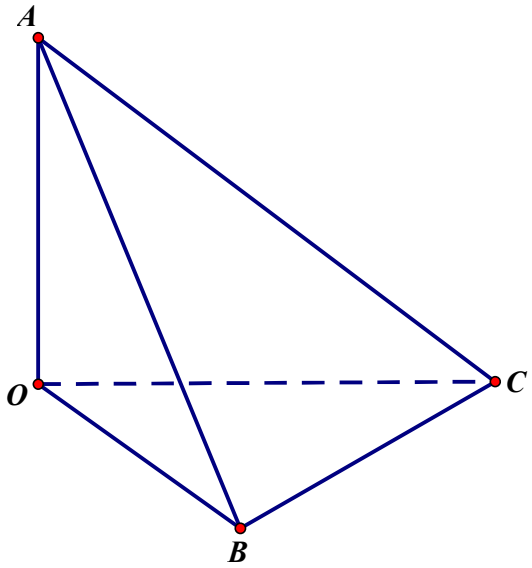
Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

A. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 10. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Câu 11. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\left(3+\cot^2\alpha\right).\left(3+\cot^2\beta\right).\left(3+\cot^2\gamma\right)$ là

A. 48. **B.** 125. **C.** Số khác. **D.** $48\sqrt{3}$.

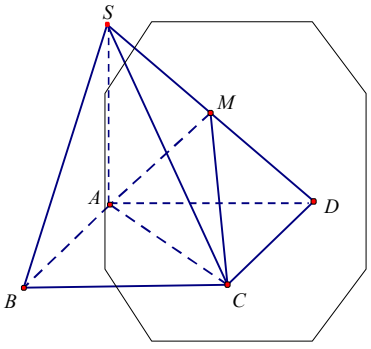
Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

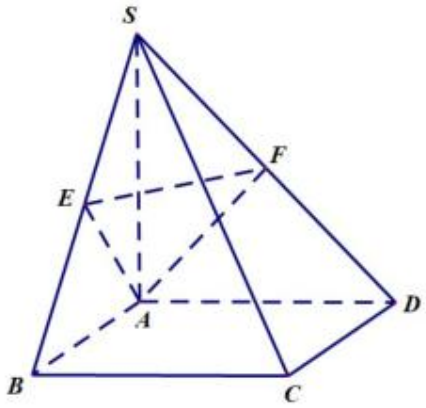


A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 15. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3$, $CD=4$, $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{BCD}=90^0$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Côsin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $\frac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB, SD. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.



A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H=a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi=\frac{7\sqrt{3}}{48}$. **B.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. **D.** $\cos\varphi=\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN\perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng:

A. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Dạng 2. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm KHOẢNG CÁCH

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{30}{19}$.

Câu 21. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

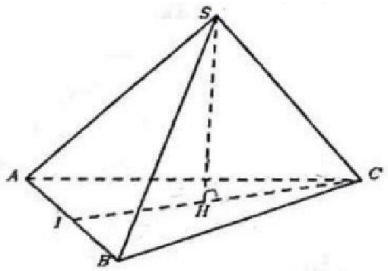
A. $d\left(B,(CDM)\right)=2$. **B.** $d\left(B,(CDM)\right)=2\sqrt{2}$.

C. $d\left(B,(CDM)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $d\left(B,(CDM)\right)=\sqrt{2}$.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$, $AA'=h$ $(a,h>0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h.

A. $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$. **B.** $\dfrac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **C.** $\dfrac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Câu 23. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

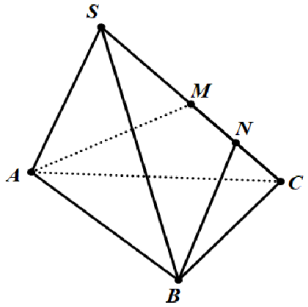


A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{8}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{77}}{22}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 25. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB}=120^0$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN.

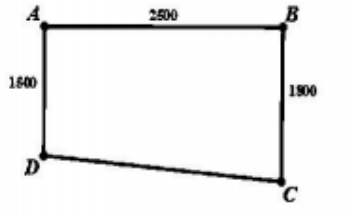


A. $\dfrac{2\sqrt{327}a}{79}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{237}a}{79}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{237}a}{79}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{237}a}{316}$

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=1\text{cm}$, $AC=\sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$.

Câu 27. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25\text{m}$, $AD=15\text{m}$, $BC=18\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, $a\text{cm}$, 6cm tương ứng. Giá trị của a là số nào sau đây?

A. $15,7\text{cm}$. **B.** $17,2\text{cm}$. **C.** $18,1\text{cm}$. **D.** $17,5\text{cm}$.

Câu 28. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tứ diện $OABC$, có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=5,OB=2,OC=4$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

A. $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. **B.** $\frac{20}{\sqrt{129}}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, $\Delta A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 30. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB=2a$, $AD=DC=a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE).

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** a. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Dạng 3. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

Câu 31. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B,C,D thuộc (S) sao cho AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 64 **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{64}{3}$ **D.** 32

Câu 32. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{8}{3}$ **B.** 4 **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 8

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{27}$. **B.** $\frac{32}{27}$. **C.** $\frac{8}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 34. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H). Tính thể tích khối (H).

A. $\frac{55a^3}{72}$. **B.** $\frac{55a^3}{144}$. **C.** $\frac{181a^3}{486}$. **D.** $\frac{55a^3}{48}$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O các đỉnh $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** $\frac{75}{32}$. **D.** $\frac{245}{108}$.

Câu 36. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của $AB,BC,C'D',DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a+b$.

A. 9. **B.** 25. **C.** 13. **D.** 11.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$,tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn $|x|+|y|+|z|\le 2$ và $|x-2|+|y|+|z|\le 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 38. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1; AD=2; AA'=3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia $AB; AD; AA'$ lần lượt tại $E;F;G$ (khác A) sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tổng của $AE+AF+AG$ bằng.

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 39. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm AB, gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD,AC. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 40. **(Chuyên Thái Bình -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

Câu 41. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz, gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 42. **(Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 43. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1):\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$, $(d_2):\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$, $(d_3):\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3). Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=10$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=13$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ cs đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chuyên đề 32 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

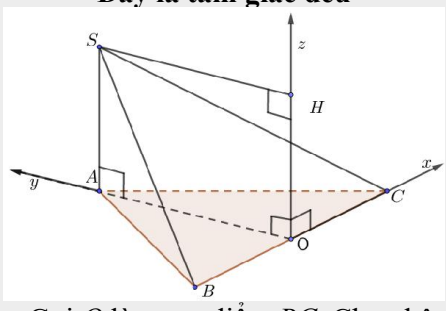
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI MỨC ĐỘ 8-9-10 ĐIỂM

Phương pháp giải một số bài toán

1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều

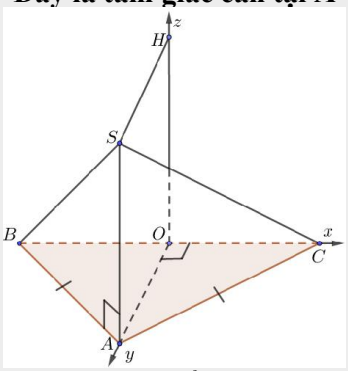


- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$,

$C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A

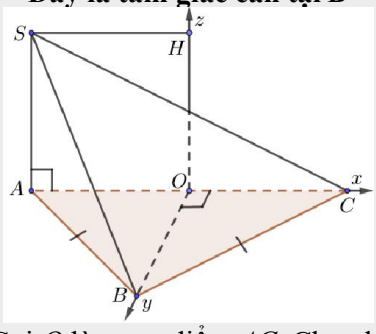


- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

$O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$,

$C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác cân tại *B*

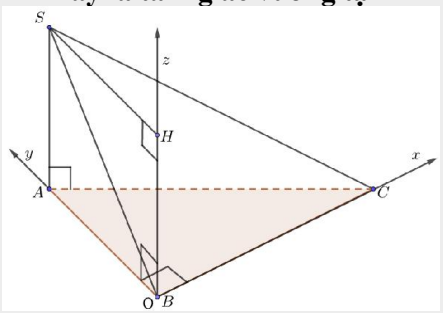


- Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$,

$C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại *B*

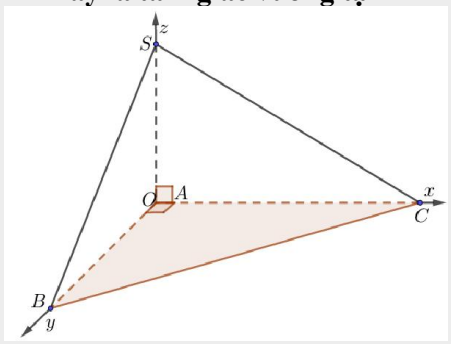


- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$,

$A(0;AB;0)$, $C(BC,0;0)$,

$S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại *A*

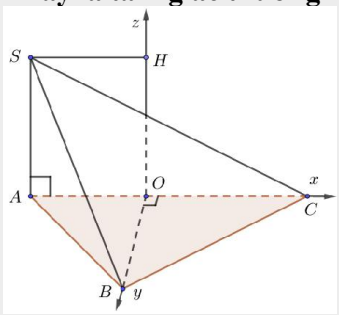


- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,

$B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$,

$S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác thường



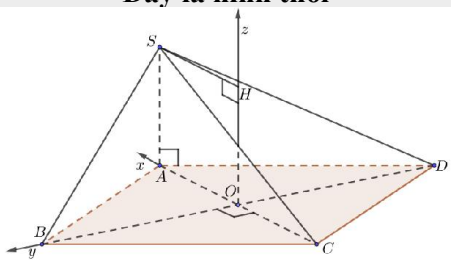
- Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$,

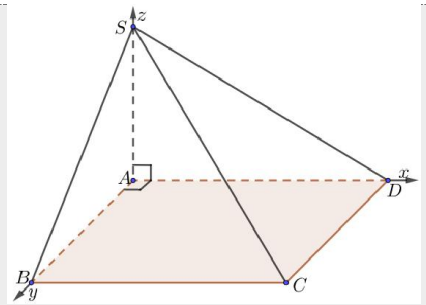
$C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật

Đáy là hình thoi

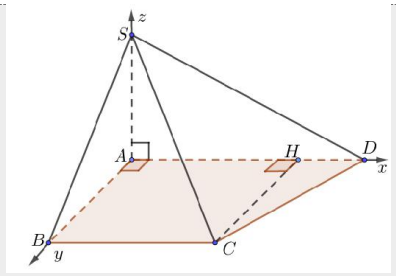


Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $A\equiv O(0;0;0), B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0), D(AD;0;0), S(0;0;SA)$.

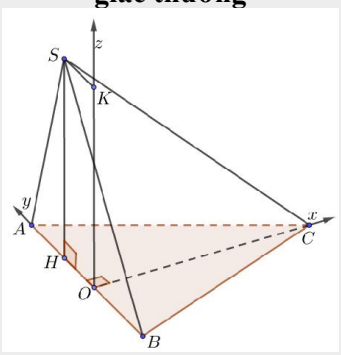
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $A\equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

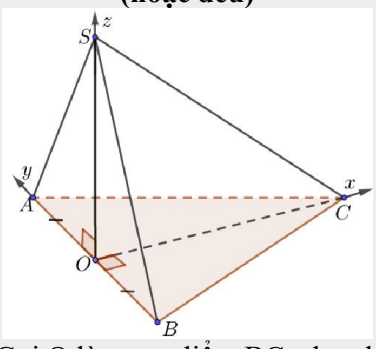
1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



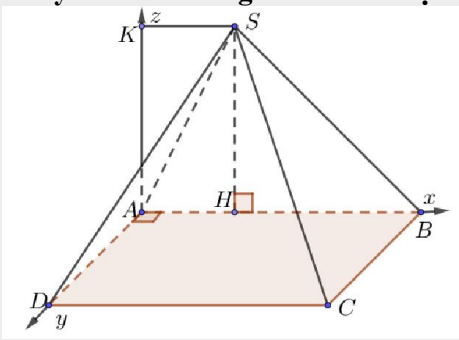
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC. Chọn hệ trục như hình, $a=1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a=1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



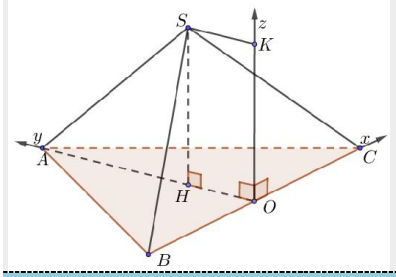
- Dựng hệ trục như hình, chọn $a=1$.
- Ta có: $A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0)$, $C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

1.3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a=1$. Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

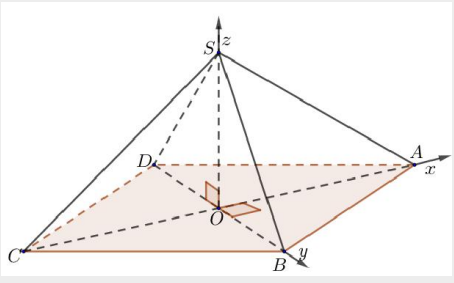


$C\left(\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với $a=1$. Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$, $A\left(\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$,



$C\left(\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$,

$D\left(0;\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$

$S(0;0;SO)$.

2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

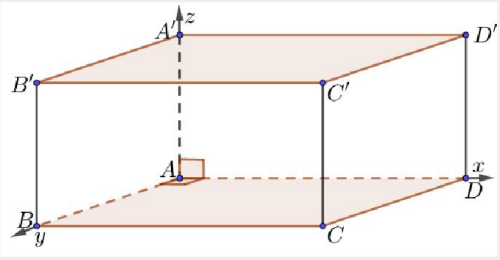
2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với $a=1$. Tọa độ điểm:

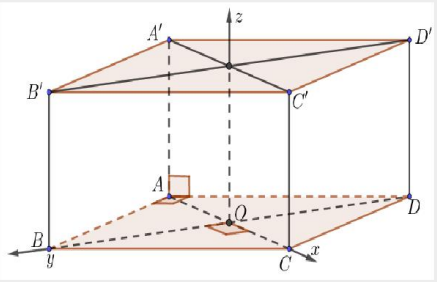
Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình



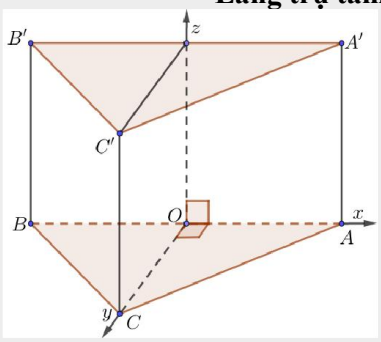
$A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.

với



$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

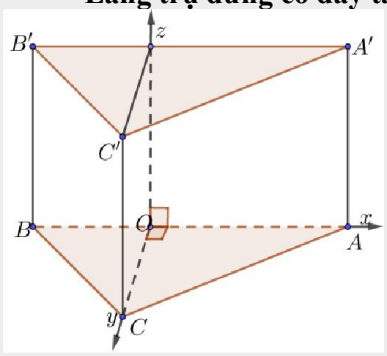
Lăng trụ tam giác đều



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:

$O(0;0;0)$, $A\left(\frac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

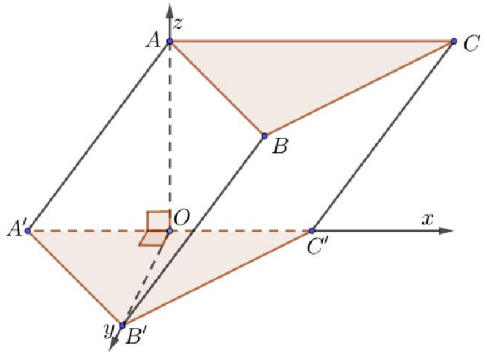


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm là:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

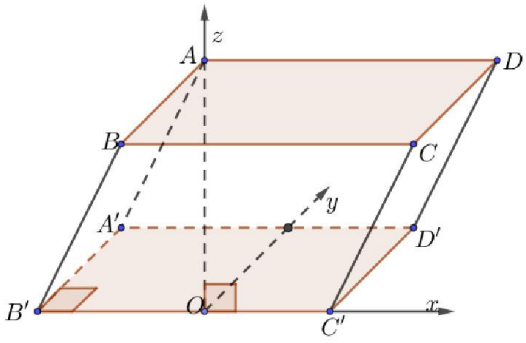
2.2. Lăng trụ nghiêng:

Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

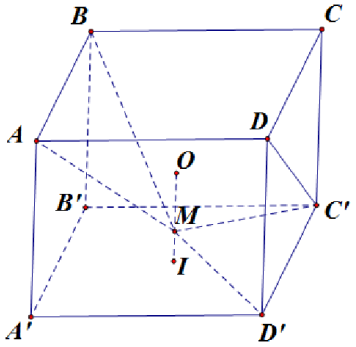
Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

Dạng 1. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm GÓC

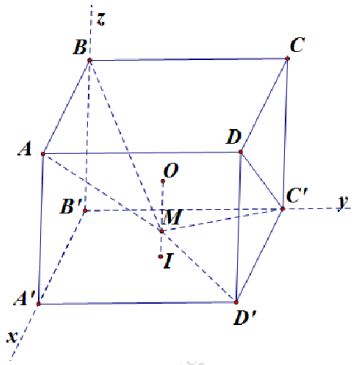
Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$ **B.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$ **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

Lời giải

Chọn C



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 1, ta được tọa độ các điểm như sau :

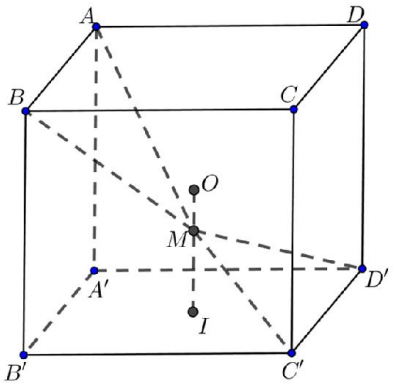
$M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right), C'(0;1;0), D'(1;1;0)$ và $A(1;0;1), B(0;0;1)$.

Khi đó $\vec{n}_{(MC'D')}=(0;1;3); \vec{n}_{(MAB)}=(0;5;3)$ nên $\cos\widehat{((MAB),(MC'D'))}=\frac{|5.1+3.3|}{\sqrt{5^2+3^2}.\sqrt{1^2+3^2}}$

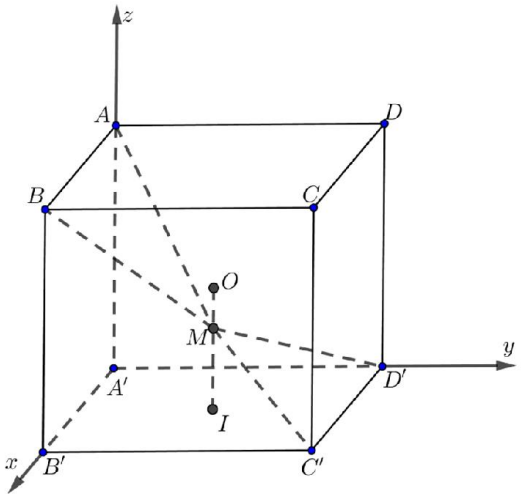
$=\frac{7\sqrt{85}}{85}$. Suy ra $\sin\widehat{((MAB),(MC'D'))}=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2}=\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

Câu 2. **(Mã 102 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO=\frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. **C.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. **D.** $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải



Không mất tính tổng quát ta đặt cạnh của khối lập phương là 1.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$ (như hình vẽ).

Khi đó ta có: $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}=(1;0;0), \overrightarrow{MA}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MA}\right]=\left(0;-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_1=(0;-4;3)$ là VTPT của mặt phẳng (MAB).

$\overrightarrow{D'C'}=(1;0;0), \overrightarrow{MD'}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{D'C'},\overrightarrow{MD'}\right]=\left(0;\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_2=(0;2;-3)$ là VTPT của mặt phẳng $(MC'D')$.

cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng:

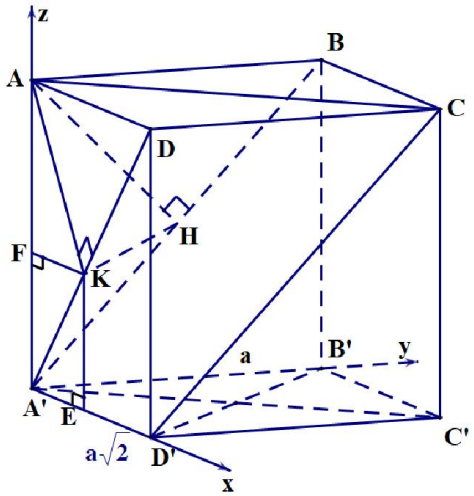
$$\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\frac{|0.0-4.2+3.(-3)|}{\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}.\sqrt{0^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{17\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 3. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB=a, AD=a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc

của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD) \Rightarrow (A'C,(ABCD)) = (A'C,A'C') = \widehat{CA'C'} = 30^0$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}; \tan\widehat{CA'C'} = \dfrac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a.$

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có H là tâm.

Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của K trên $A'D' \& A'A.$

Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3};\ A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}};$

$\dfrac{1}{KF^2} = \dfrac{1}{KA^2} + \dfrac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \dfrac{a}{3}.$

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn D', B', A theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là:

$A(0;0;a), B'(0;a;0), H(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}), K(\dfrac{a\sqrt{2}}{3};0;\dfrac{a}{3}), E(\dfrac{a\sqrt{2}}{3};0;0), F(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3}).$

Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng (yOz) nên có VTPT là $\vec{n}_1 = (1;0;0);$

Ta có $\left[\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AH}\right] = \dfrac{a^2}{6}\vec{n}_2,\ \vec{n}_2(2;\sqrt{2};\sqrt{2}).$

Mặt phẳng (AKH) có VTPT là $\vec{n}_2 = (2;\sqrt{2};\sqrt{2});$

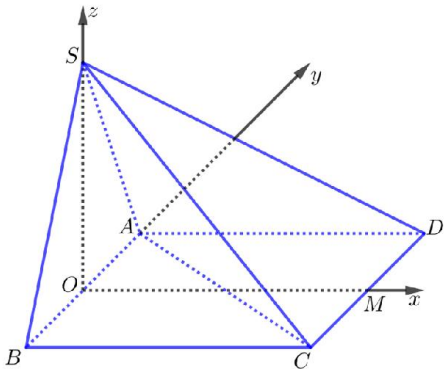
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

Ta có $\cos\alpha = \left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0.$

Câu 4. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với φ là góc tạp bởi (SAC) và (SCD).

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$. **C.** $\frac{5}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải



Chú ý: Ta có thể giải bài toán với cạnh hình vuông $a=1$.

Gọi O,M lần lượt là trung điểm của AB,CD. Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0),M(1;0;0),A\left(0;\frac{1}{2};0\right),S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó

$C\left(1;\frac{-1}{2};0\right),D\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}=\left(0;\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{AC}(1;-1;0),\overrightarrow{SC}=\left(1;\frac{-1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{CD}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2}\right)$.

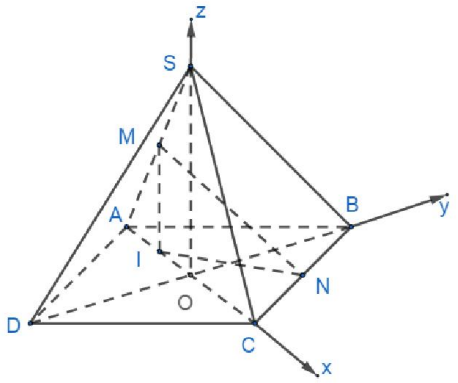
Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$.

Vậy $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{5}{7}$.

Câu 5. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO.

Khi đó $CI=\frac{3}{4}AC=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔCNI có: $CN=\frac{a}{2}$, $\widehat{NCI}=45^o$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI=\sqrt{CN^2+CI^2-2CN.CI.\cos 45^o}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{8}-2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét ΔMIN vuông tại I nên $MI=\sqrt{MN^2-NI^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-\frac{5a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI//SO, MI=\frac{1}{2}SO\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$,

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

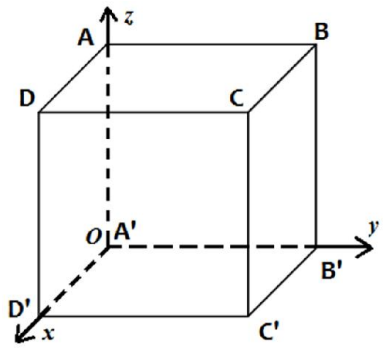
Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (SBD): $\vec{n}=\overrightarrow{SB}\wedge\overrightarrow{SD}=\left(-\sqrt{7};0;0\right)$.

Suy ra $\sin\left(MN,(SBD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{7}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{7}.\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 75°.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A', Ox \equiv A'D', Oy \equiv A'B', Oz \equiv A'A.$

Khi đó: $A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $C'(a;a;0)$,

$A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C(a;a;a)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;a;0), \overrightarrow{A'D} = (a;0;a), \overrightarrow{A'A} = (0;0;a), \overrightarrow{A'C'} = (a;a;0).$

$\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D}\right] = (a^2;0;-a^2).$

Chọn $\overrightarrow{n_1} = (1;0;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$\left[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}\right] = (-a^2;a^2;0).$

Chọn $\overrightarrow{n_2} = (-1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

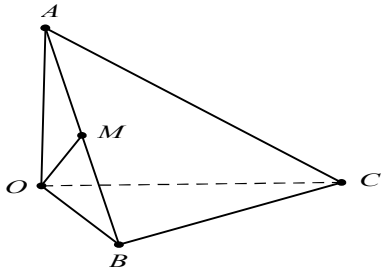
$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. **(Sở Bắc Ninh -2019)** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $135°$. **B.** $150°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải



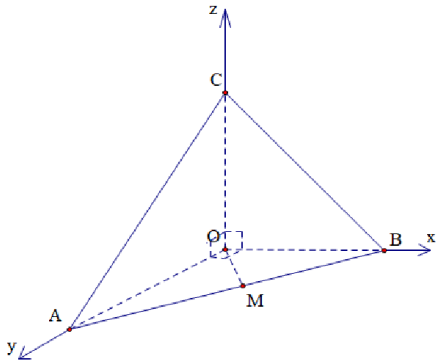
Cách 1:

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}OB^2 = -\frac{a^2}{2}.$

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{2}$ và $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Do đó: $\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{OM.BC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}\right) = 120°.$

Cách 2:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

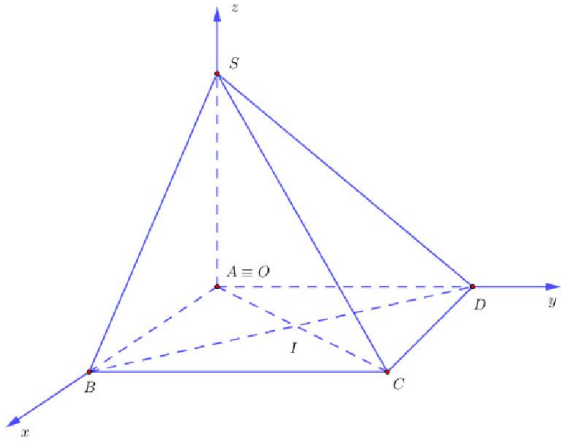
Khi đó ta có: $\overrightarrow{BC}=(-a;0;a), \overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OM}}{BC.OM}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a.\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=120^\circ.$$

Câu 8. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha=\sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải



Gọi $I=AC\cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\SI\perp BD\\AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SBD);(ABCD))}=\widehat{(SI;AI)}=\widehat{SIA}$.

Ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{SIA}=\frac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;0;1)$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right)=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right)=60°$.

Câu 9. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

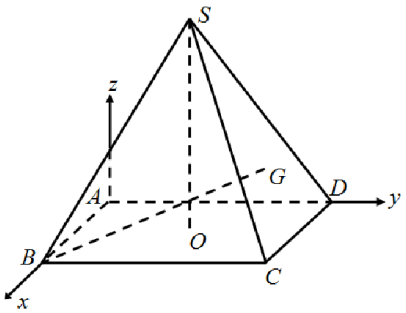
A. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD$.

Tam giác SAO vuông : $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Gắn tọa độ như hình vẽ



$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có : $\overrightarrow{AS}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{a}{2}\left(1;1;\sqrt{6}\right)$, $\overrightarrow{BG}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)=\dfrac{a}{6}\left(-3;5;\sqrt{6}\right)$.

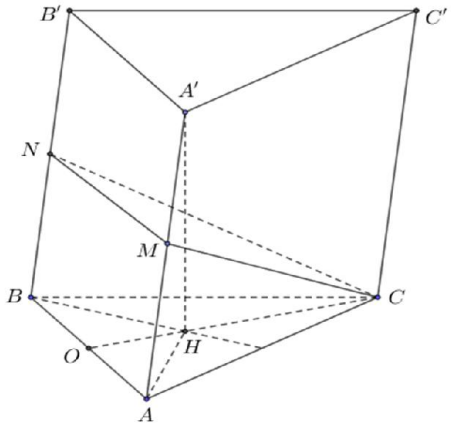
Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

$\cos(BG;SA)=\dfrac{|\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AS}|}{BG.AS}=\dfrac{|-3+5+6|}{\sqrt{40}.\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{13}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AB. Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$,

$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$, $A'H=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow A'\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow B'\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Dễ thấy (ABC) có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

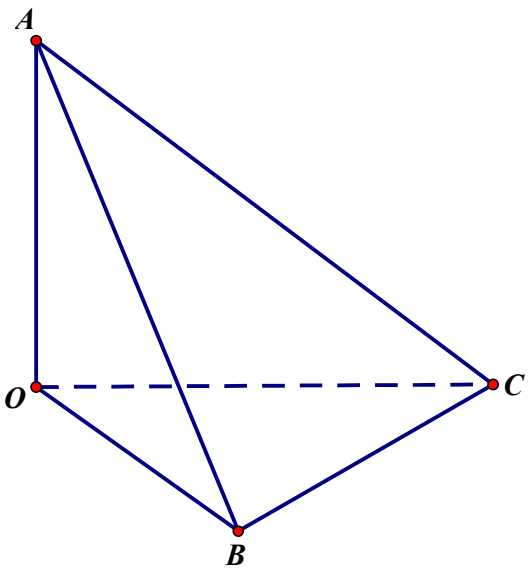
M là trung điểm $AA'\Rightarrow M\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, N là trung điểm $BB'\Rightarrow N\left(\frac{-3}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\overrightarrow{MN}=(-1;0;0)$, $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{4};\frac{-5\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow (CMN)$ có vtpt $\overrightarrow{n_2}=\left(0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(0;2\sqrt{2};5\right)$

$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{33}}\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Câu 11. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\left(3+\cot^2\alpha\right).\left(3+\cot^2\beta\right).\left(3+\cot^2\gamma\right)$ là

A. 48. **B.** 125. **C.** Số khác. **D.** $48\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có $OH \perp (ABC)$ và $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ta có $\alpha=\widehat{(OA;(ABC))}=\widehat{OAH}$, $\beta=\widehat{(OB;(ABC))}=\widehat{OBH}$, $\gamma=\widehat{(OC;(ABC))}=\widehat{OCH}$.

Nên $\sin\alpha=\frac{OH}{OA}$, $\sin\beta=\frac{OH}{OB}$, $\sin\gamma=\frac{OH}{OC}$.

Đặt $a=OA$, $b=OB$, $c=OC$, $h=OH$ thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ và

$$M=(3+\cot^2\alpha).(3+\cot^2\beta).(3+\cot^2\gamma)=\left(2+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\beta}\right).\left(2+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)$$

$$=\left(2+\frac{a^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{b^2}{h^2}\right).\left(2+\frac{c^2}{h^2}\right)=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}.$$

Ta có: $(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}=(a^2+b^2+c^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 3\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}.3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}}=9$.

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.b^2c^2.c^2a^2}.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^2=3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}.9\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}}=27.$$

$$a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}=a^2b^2c^2.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3\geq a^2b^2c^2.\left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}.\frac{1}{b^2}.\frac{1}{c^2}\right)}\right)^3=27.$$

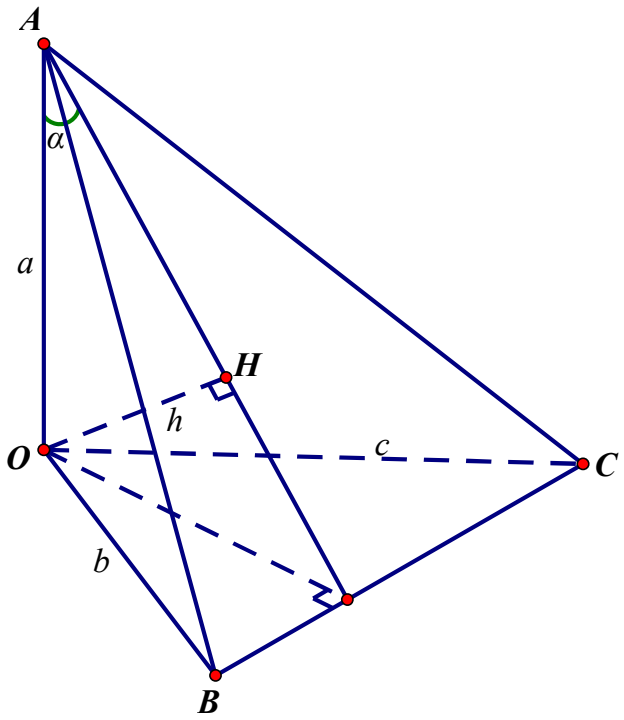
Do đó:

$$M=8+4(a^2+b^2+c^2).\frac{1}{h^2}+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).\frac{1}{h^4}+a^2b^2c^2.\frac{1}{h^6}$$

$\geq 8+4.9+2.27+27=125$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay $OA=OB=OC$.

Vậy $\min M=125$.



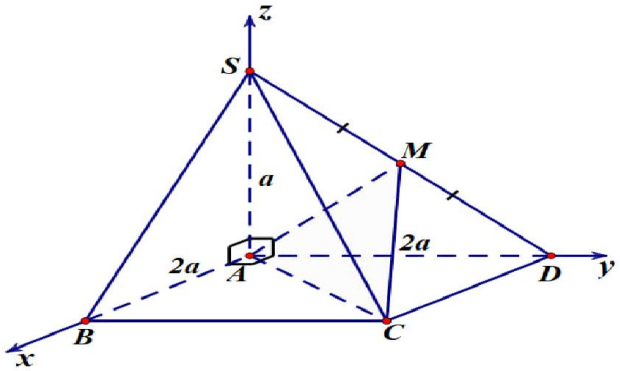
Câu 12. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A\equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$$A(0;0;0),\ B(2a;0;0),\ D(0;2a;0),\ C(2a;2a;0),\ S(0;0;a),\ M\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$

$\overrightarrow{SB}=(2a;0;-a), \overrightarrow{SC}=(2a;2a;-a), \overrightarrow{MA}=\left(0;-a;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC}=\left(2a;a;-\frac{a}{2}\right).$

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(2a^2;0;4a^2\right)$ và $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right]=\left(a^2;-a^2;2a^2\right).$

Gọi α ($0°\le\alpha\le 90°$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

ta có $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|2a^2.a^2+4a^2.2a^2\right|}{\sqrt{\left(2a^2\right)^2+\left(4a^2\right)^2}.\sqrt{\left(a^2\right)^2+\left(-a^2\right)^2+\left(2a^2\right)^2}}$

$=\frac{10a^4}{\sqrt{20.6.\left(a^4\right)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}}.$

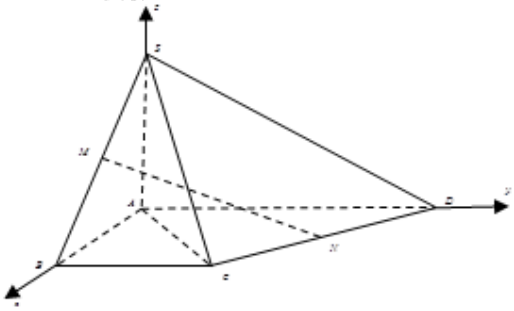
Mà $\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2-1=\frac{5}{25}$. Suy ra $\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a, AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD), SA=a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt không gian $Oxyz$ với $A\equiv O(0;0;0), AB\equiv Ox, AD\equiv Oy, AS\equiv Oz$.

Ta có: $S(0;0;a), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$.

$M(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}), N(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0)$

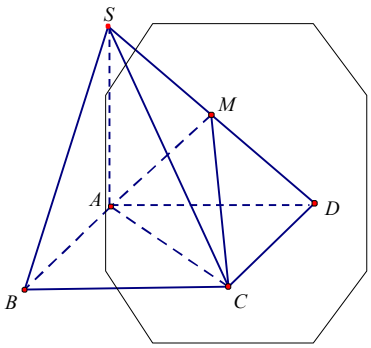
$\overrightarrow{MN}=(0;\frac{3a}{2};\frac{-a}{2})$

$\overrightarrow{AS}=(0;0;a), \overrightarrow{AC}=(a;a;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=(-a^2;a^2;0)$ là vtpt của mặt phẳng (SAC).

$\sin(MN;(SAC))=\frac{\overrightarrow{MN}.\vec{n}_{(SAC)}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}_{(SAC)}\right|}=\frac{\frac{3a^3}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}.\sqrt{a^4+a^4}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$

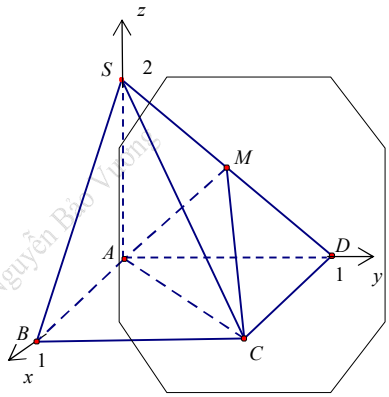
Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ Oxyz. $O\equiv A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $D(0;1;0)$; $C(1;1;0)$; $S(0;0;2)$

Do M là trung điểm của SD nên $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{BC}=(0;1;0);\overrightarrow{SB}=(1;0;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{SB}\right]=(2;0;1)$

$\overrightarrow{MA}=\left(0;\frac{1}{2};1\right);\overrightarrow{AC}=(1;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC}\right]=\left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$. VTPT của (AMC) là: $\vec{n}=(2;-2;1)$

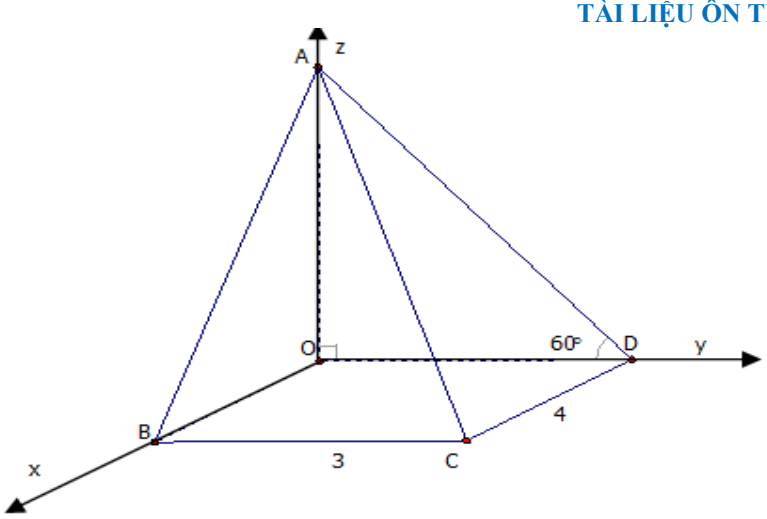
$\cos\left((SBC);(AMC)\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\tan\left((SBC);(AMC)\right)=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}-1}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Câu 15. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC=3$, $CD=4$, $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{BCD}=90^0$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60^0. Côsin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) bằng

A. $\frac{\sqrt{43}}{86}$. **B.** $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. **C.** $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. **D.** $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $AO \perp (BCD)$ khi đó O là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BCDO$.

Góc giữa đường thẳng AD và BC là góc giữa đường thẳng AD và OD và bằng $\widehat{ADO} = 60^0$

Xét tam giác ADO vuông tại O: $\tan 60^0 = \dfrac{OA}{OD} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3}.$

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào hình chóp như hình vẽ.

Ta có:

$O(0;0;0)$; $B(4;0;0)$; $D(0;3;0)$; $C(4;3;0)$; $A(0;0;3\sqrt{3})$.

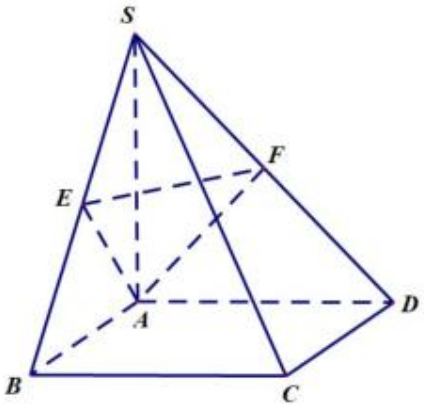
$\overrightarrow{AB} = (4;0;-3\sqrt{3})$; $\overrightarrow{BC} = (0;3;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;3;-3\sqrt{3})$; $\overrightarrow{CD} = (-4;0;0)$.

Mặt phẳng (ABC) nhận véctơ $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (9\sqrt{3};0;12)$ làm véctơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ADC) nhận véctơ $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}] = (0;12\sqrt{3};12)$ làm véctơ pháp tuyến.

Nên $\cos((ABC);(ADC)) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{4}{\sqrt{43}.2} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}.$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB, SD. Côsin của góc hợp bới hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.



A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in Ox$, $D \in Oy$, $S \in Oz$.

$\Rightarrow B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$. Khi đó $E\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $F\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AF} = \left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến của mp(AEF) là $\vec{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right] = \left(\frac{-a}{4};\frac{-a}{4};\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \vec{n_1} = (1;1;-1)$..

Vectơ pháp tuyến của mp$(ABCD)$ là $\vec{n_2} = \overrightarrow{AS} = (0;0;a) \Rightarrow \vec{n_2} = (0;0;1)$..

Vậy côsin góc giữa 2 mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.

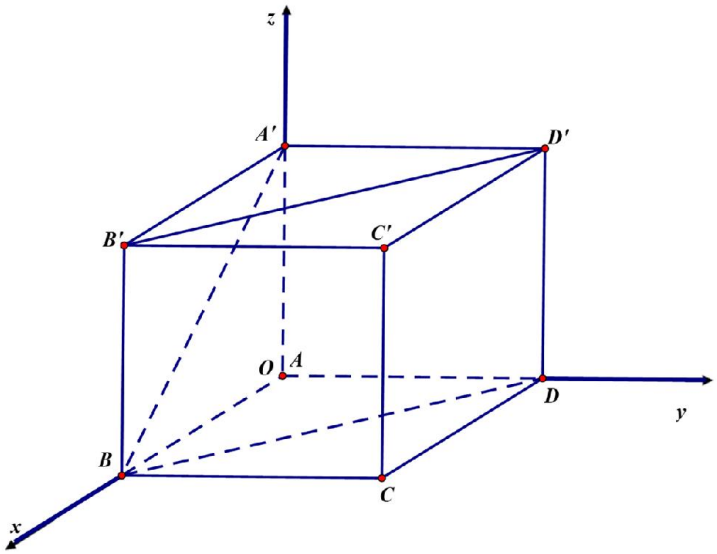
$$\cos\left((AEF),(ABCD)\right) = \frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot.$$

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



+Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a), D'(0;a;a)$.

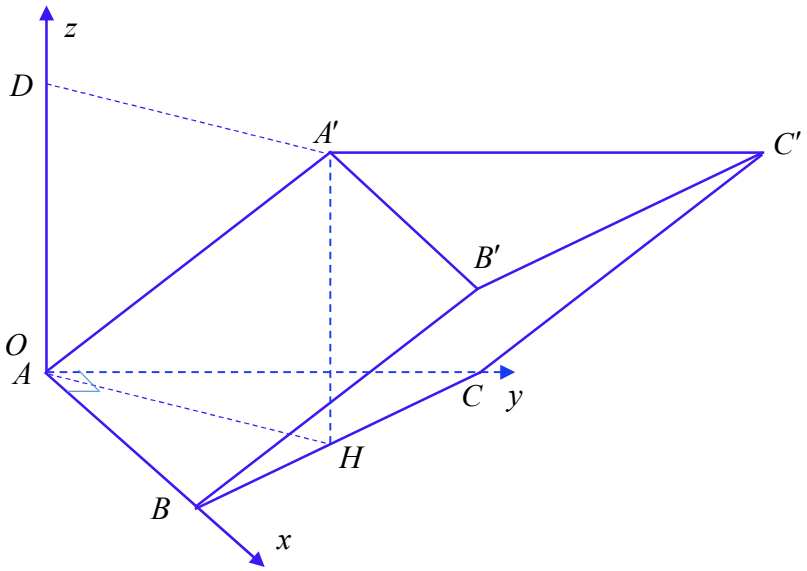
+Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0.)$.

+Đường thẳng $A'B$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

+Ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{|1.1+1.0+0.(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}.\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{7\sqrt{3}}{48}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.



Lời giải

Chọn D

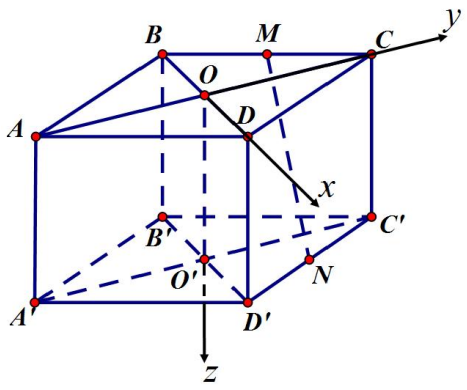
Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ, chọn $a=1$ đơn vị, khi đó ta có tọa độ điểm $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$ suy ra trung điểm của BC là $H\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, vì H là hình chiếu của A' nên suy ra tọa độ của $A'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$. Ta tìm tọa độ B', gọi tọa độ $B'(x;y;z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB}$ nên tọa độ $B'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$. Ta cũng có $\overrightarrow{B'C}=\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$ và $\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$. Từ đó ta có $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C}\right|}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|.\left|\overrightarrow{B'C}\right|}=\frac{7}{2.\sqrt{6}.\sqrt{8}}=\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng:

A. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



* Chọn $AB=2 \Rightarrow BD=2; AC=2\sqrt{3}$, đặt

$AA'=h$, chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có: $D(1;0;0)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $D'(1;0;h)$, $C'(0;\sqrt{3};h)$, $B'(-1;0;h)$.

$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};h\right)$, $\overrightarrow{MN}=(1;0;h)$, $\overrightarrow{B'D}=(2;0;-h)$.

* Do $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{B'D}=0 \Leftrightarrow 2-h^2=0 \Rightarrow h=\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(1;0;\sqrt{2})$. Ta có:

$MN // \vec{u}=\overrightarrow{MN}=(1;0;\sqrt{2})$, $(ABCD) \perp \vec{n}=\vec{j}=(0;0;1)$.

* Do α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$ nên ta có:

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

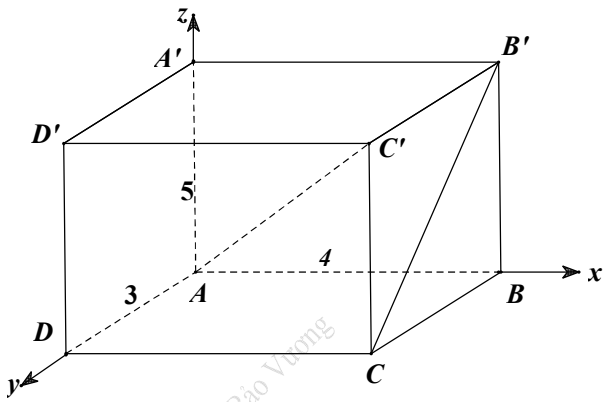
Dạng 2. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm KHOẢNG CÁCH

Câu 20. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB=4, AD=3, AA'=5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{30}{19}$.

Lời giải

Chọn D



Nguyễn Bảo Vương

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Có $A(00;0), C'(4;3;5), C(4;3;0), B'(4;0;5)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}=(4;3;5), \overrightarrow{B'C}=(0;3;-5), \left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]=(-30;20;12), \overrightarrow{CC'}=(0;0;5)$,

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng cần tìm là:

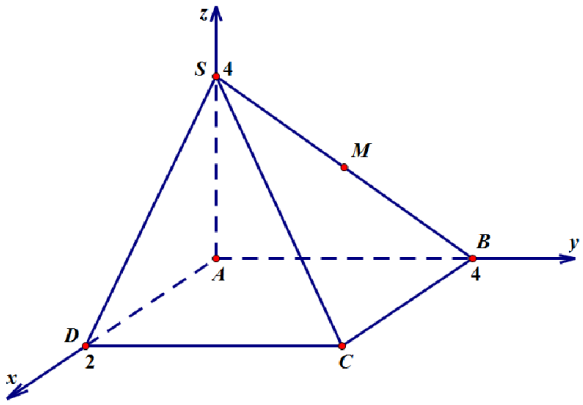
$$d\left(AC',B'C\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{CC'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{60}{\sqrt{1444}}=\frac{30}{19}.$$

Câu 21. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A. $d\left(B,(CDM)\right)=2$. **B.** $d\left(B,(CDM)\right)=2\sqrt{2}$.

C. $d\left(B,(CDM)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $d\left(B,(CDM)\right)=\sqrt{2}$.

Lời giải



Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 4 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2;4;0)$.

M là trung điểm của $SB \Rightarrow M(0;2;2)$.

Viết phương trình mặt phẳng (CDM):

$\overrightarrow{CD} = (0;-4;0)$, $\overrightarrow{CM} = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CM} = (-8;0;-8)$.

(CDM) có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;0;1)$.

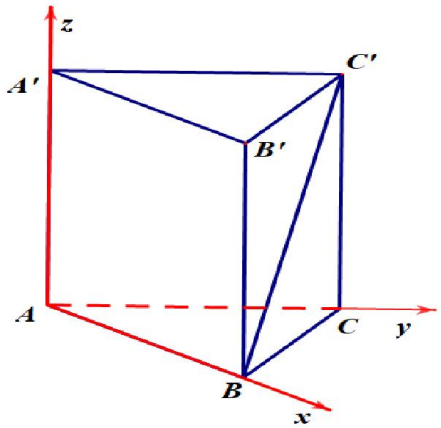
Suy ra (CDM) có phương trình: $x + z - 2 = 0$.

Vậy $d(B;(CDM)) = \dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \sqrt{2}$.

Câu 22. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = h$ $(a, h > 0)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h.

A. $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$. **B.** $\dfrac{ah}{\sqrt{5a^2+h^2}}$. **C.** $\dfrac{ah}{\sqrt{2a^2+h^2}}$. **D.** $\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Lời giải



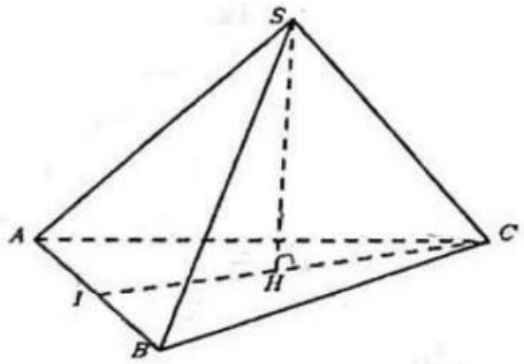
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$A(0;0;0)$; $A'(0;0;h)$; $C(0;a;0)$; $B(a;0;0)$; $B'(a;0;h)$; $C'(0;a;h)$.

$\overrightarrow{AB'} = (a;0;h)$; $\overrightarrow{BC'} = (-a;a;h)$; $\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right] = (-ah;-2ah;a^2)$; $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$.

$$\mathrm{d}\left(AB';BC'\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{BC'}\right]\right|}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}.$$

Câu 23. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AB, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI, góc giữa SA và mặt đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng



A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{8}$ **C.** $\frac{a\sqrt{77}}{22}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $I(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $CI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, $AH=\frac{a\sqrt{7}}{4}$

H là trung điểm CI suy ra $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$.

$45^0=\left(SA,(ABC)\right)=\left(SA,AH\right)=\widehat{SAH}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{7}}{4}\Rightarrow S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CG}=\left(-\frac{a}{6};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{7}}{12}\right)$, $\overrightarrow{CA}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]=\left(\frac{a\sqrt{21}}{12};0;\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]\right|=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Khoảng cách giữa SA và CG: $\frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right].\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CG}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{14}}{8}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

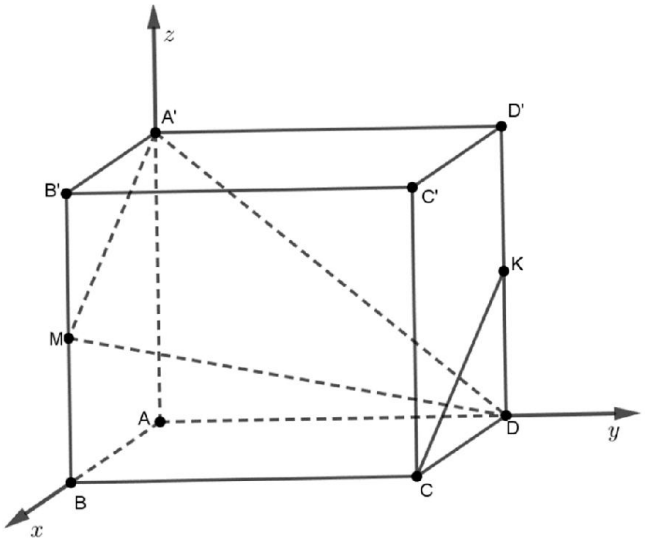
A. $\frac{4a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB'. Ta có: $CK\,//\,A'M\Rightarrow CK\,//\,(A'MD)$.

Khi đó: $d\left(CK,A'D\right)=d\left(CK,\left(A'MD\right)\right)=d\left(C,\left(A'MD\right)\right)$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $D\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;a\right)$, $B'\left(a;0;a\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

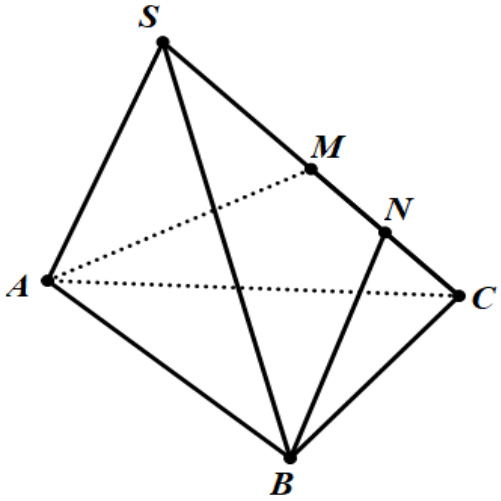
$\overrightarrow{A'M}=\left(a;0;-\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{A'D}=\left(0;a;-a\right)$, $\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(\frac{a^2}{2};a^2;a^2\right)$.

Vậy mặt phẳng $\left(A'MD\right)$ nhận $\vec{n}=\left(1;2;2\right)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mp$\left(A'MD\right)$: $x+2y+2z-2a=0$.

Do đó: $d\left(C,\left(A'DM\right)\right)=\frac{\left|a+2a-2a\right|}{3}=\frac{a}{3}$.

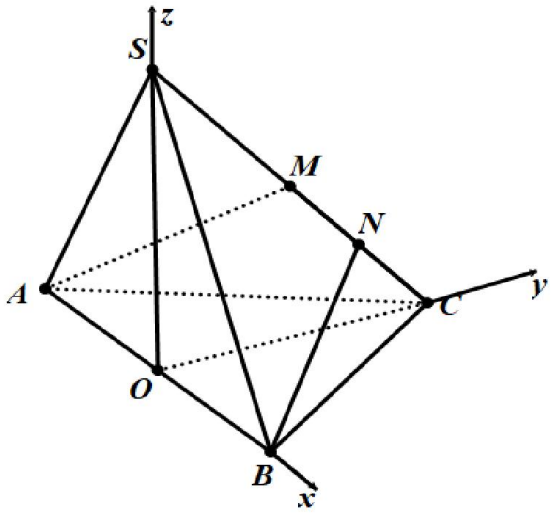
Câu 25. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB}=120^0$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN.



A. $\frac{2\sqrt{327}a}{79}$. **B.** $\frac{\sqrt{237}a}{79}$. **C.** $\frac{2\sqrt{237}a}{79}$. **D.** $\frac{5\sqrt{237}a}{316}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm AB, ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC)(gt) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SO \perp (ABC). \\ SO \perp AB(cmt) \end{cases}$$

Xét ΔSOB vuông tại O có $\widehat{OSB} = 60^0 \Rightarrow SO = \dfrac{OB}{\tan 60^0} = a$

Ta có: OC là đường cao của tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên: $OC = 3a$

Gắn hình chóp $S.ABC$ lên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó ta có:

$O(0;0;0), B\left(a\sqrt{3};0;0\right), A\left(-a\sqrt{3};0;0\right); C(0;3a;0); S(0;0;a) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(2a\sqrt{3};0;0\right)$

M là trung điểm SC nên M có tọa độ: $\left(0;\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

N là trung điểm MC nên N có tọa độ: $\left(0;\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$.

AM có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}\left(a\sqrt{3};\dfrac{3a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ hoặc $\vec{a}\left(2\sqrt{3};3;1\right)$

BN có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BN}\left(-a\sqrt{3};\dfrac{9a}{4};\dfrac{a}{4}\right)$ hoặc $\vec{b}\left(-4\sqrt{3};9;1\right)$

Ta có: $d\left(AM;BN\right) = \dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|} = \dfrac{2\sqrt{237}}{79}a$

Câu 26. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C nên $IA=IS=IB=IC$. Vậy I là tâm cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$.

Vì cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3 \Rightarrow R=IA=IS=IB=IC=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $SA=\sqrt{5};SB=2,SC=\sqrt{2}$.

Gán hệ trục tọa độ gốc A. ta có $A(0,0,0);\text{B}(1,0,0);\text{C}\left(0,\sqrt{3},0\right)$

Giả sử $S(a,b,c),c>0$. Ta có hệ phương trình

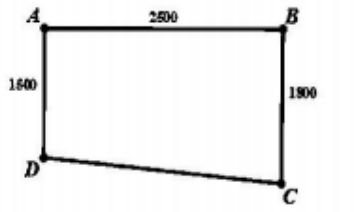
$$\begin{cases} SA=\sqrt{5} \\ SB=2 \\ SC=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=5 \\ (a-1)^2+b^2+c^2=4 \\ a^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2+c^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=5 \\ a^2+b^2+c^2-2a=3 \\ a^2+b^2+c^2-2\sqrt{3}b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow S\left(1,\sqrt{3},1\right)$$

Mặt phẳng (SAB) qua $A(0,0,0)$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}\left(0,1,-\sqrt{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng (SAB) là: $y-\sqrt{3}z=0$

Vậy $d\left(C,(SAB)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

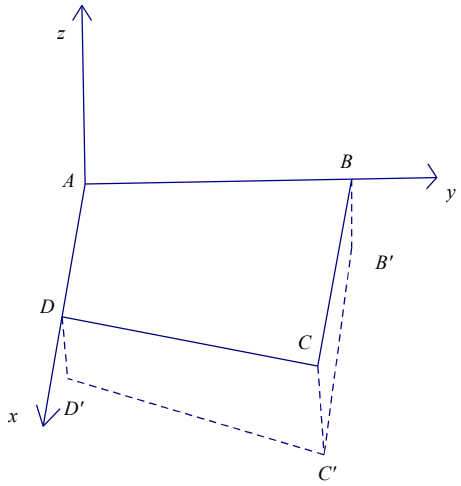


Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB=25\text{m}$, $AD=15\text{m}$, $BC=18\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm, $a\text{cm}$, 6cm tương ứng. Giá trị của a là số nào sau đây?

A. $15,7\text{cm}$. **B.** $17,2\text{cm}$. **C.** $18,1\text{cm}$. **D.** $17,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x + y + 250z = 0$.

Do $C'(1800;\ 2500;-a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Vậy $a = 17,2\,\text{cm}$.

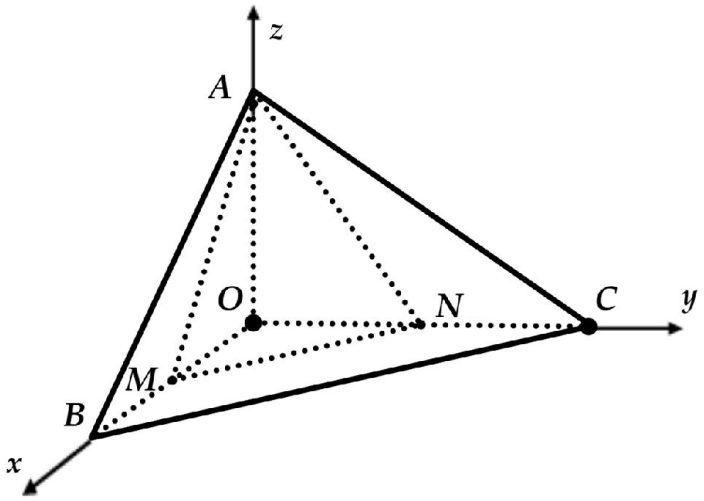
Câu 28. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

A. $\dfrac{20}{3\sqrt{129}}$. **B.** $\dfrac{20}{\sqrt{129}}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $O(0;0;0)$, $A \in Oz, B \in Ox, C \in Oy$ sao cho $AO=5, OB=2, OC=4$

$\Rightarrow A(0;0;5), B(2;0;0), C(0;4;0)$.

Khi đó: G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

M là trung điểm OB nên $M(1;0;0)$

N là trung điểm OC nên $N(0;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng (AMN) là: $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$ hay $10x+5y+2z-10=0$

Vậy khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

$$d\left(G,(AMN)\right)=\frac{\left|\frac{20}{3}+\frac{20}{3}+\frac{10}{3}-10\right|}{\sqrt{100+25+4}}=\frac{20}{3\sqrt{129}}.$$

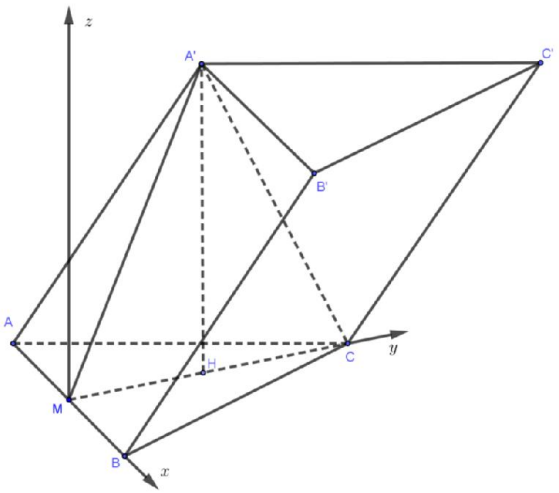
Câu 29. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, gọi M là trung điểm của AB, $\Delta A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $MC \Rightarrow A'H \perp MC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Ta có $V = S_{\Delta ABC}.A'H \Rightarrow A'H = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{V} = a$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho:

$O \equiv M(0;0;0)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy$ và $Mz // A'H$.

$\Rightarrow A'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$.

Ta có. $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{3}}{4};a\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

$\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{CC'} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

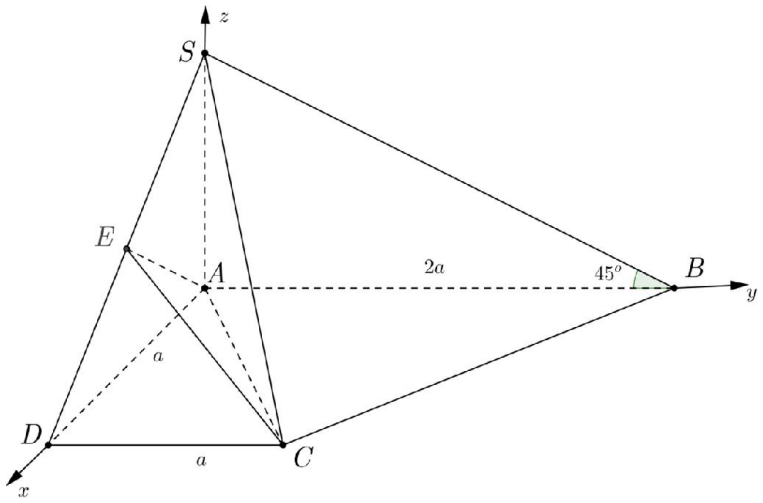
Vậy $d(AB,CC') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CC'}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CC'}\right]\right|} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 30. **(Sở Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45°, E là trung điểm của SD, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE).

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB $\Rightarrow$ Góc giữa SB và mặt đáy là góc giữa SB và AB và bằng góc $\widehat{SBA}=45^{\circ}$.

Tam giác SAB vuông cân tại A $\Rightarrow SA=2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;2a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $E\left(\frac{a}{2};0;a\right)$.

$\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2};0;a\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE}=\left(a^2;-a^2;-\frac{a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (ACE) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;-1)\Rightarrow(ACE):2x-2y-z=0$.

Vậy $d\left(B,(ACE)\right)=\frac{|2.2a|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4a}{3}$.

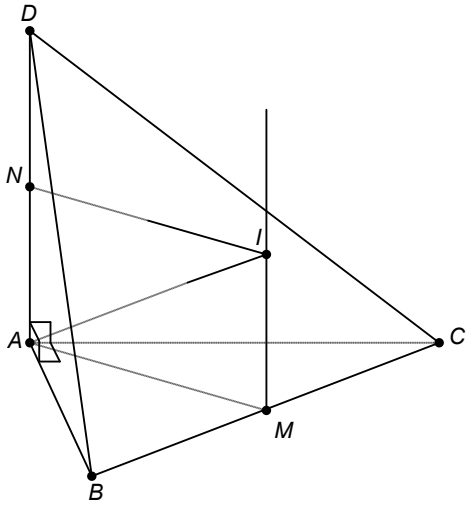
Dạng 3. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

Câu 31. **(Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và đi qua điểm $A(1;0;-1)$. Xét các điểm B,C,D thuộc (S) sao cho AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 64 **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{64}{3}$ **D.** 32

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có bán kính $r = IA = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$.

Đặt $AB = a; AC = b; AD = c$

Ta có $IA^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}$

Do đó $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} = 12$

Theo BĐT Cô-si ta có: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4} \ge \dfrac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{4}$

Do đó $V = \dfrac{1}{6}abc \le \dfrac{1}{6}\sqrt{16^3} = \dfrac{32}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$..

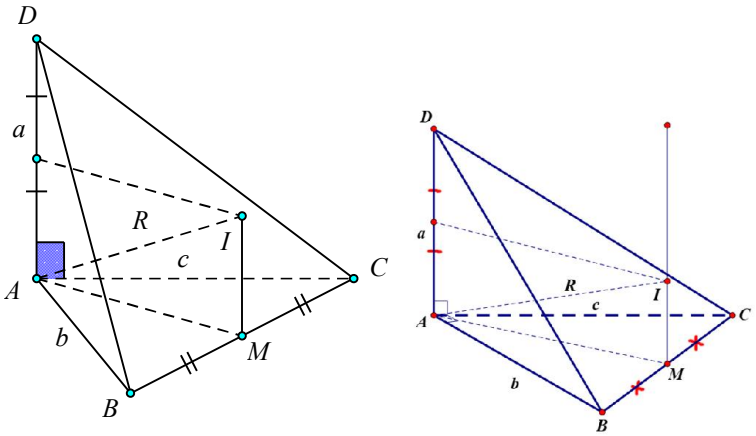
Nguyễn Bảo Vương

Câu 32. **(Mã 104 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** 4 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 8

Lời giải

Chọn C



Đặt: $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$.

Ta có:

• $R = IA = \sqrt{3}$.

• $AM = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}; IM = \dfrac{a}{2} \Rightarrow R^2 = IA^2 = \dfrac{b^2+a^2+c^2}{4} = 3$.

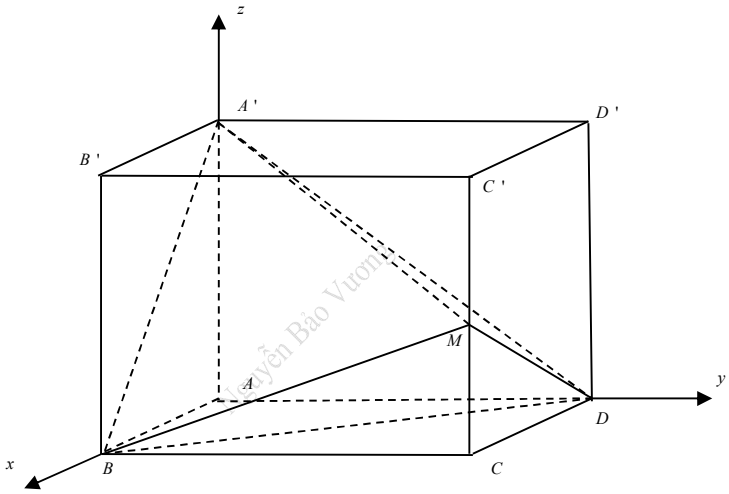
AD BĐT Cosi: $b^2+a^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{b^2a^2c^2} \Rightarrow b^2a^2c^2 \le \dfrac{\left(b^2+a^2+c^2\right)^3}{27} \Leftrightarrow abc \le 8$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{6}abc \le \dfrac{1}{6}.8 = \dfrac{4}{3}$.

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a,b>0$ và $a+b=2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{64}{27}$. **B.** $\dfrac{32}{27}$. **C.** $\dfrac{8}{27}$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

Lời giải



Tọa độ điểm $C(a;a;0)$, $C'(a;a;b)$, $M(a;a;\dfrac{b}{2})$.

$\overrightarrow{BA'} = (-a;0;b)$, $\overrightarrow{BD} = (-a;a;0)$, $\overrightarrow{BM} = (0;a;\dfrac{b}{2})$.

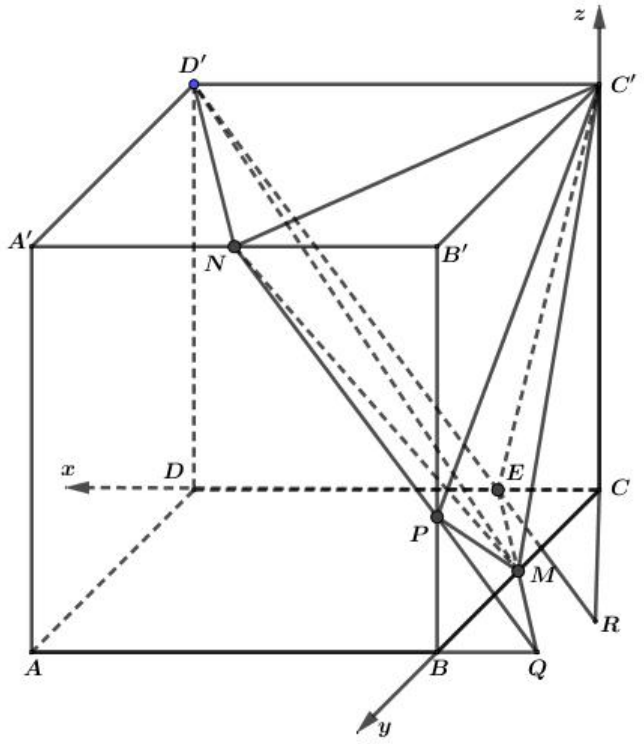
$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right] = (-ab;-ab;-b^2)$ nên $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right| = \dfrac{a^2b}{4}$.

Ta có: $a.a.(2b) \le \left(\dfrac{a+a+2b}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} \Rightarrow a^2b \le \dfrac{32}{27} \Rightarrow V_{BDA'M} \le \dfrac{8}{27}$.

Câu 34. **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H). Tính thể tích khối (H).

A. $\dfrac{55a^3}{72}$. **B.** $\dfrac{55a^3}{144}$. **C.** $\dfrac{181a^3}{486}$. **D.** $\dfrac{55a^3}{48}$.

Lời giải



Thể tích khối lập phương bằng a^3.

Mặt phẳng (MND') cắt cạnh DC tại E thỏa $EC=\frac{1}{4}DC$; cắt BB' tại P sao cho $BP=\frac{1}{3}BB'$.

Khi đó $V_{(H)}=V_{C'.D'NPME}+V_{C'.CEM}+V_{C'.B'PN}$.

Có $V_{B'.C'NP}=\frac{1}{6}a.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}=\frac{a^3}{18}$

$V_{C.C'ME}=\frac{1}{6}a.\frac{a}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{48}$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ; lấy đơn vị trên trục 1 đơn vị bằng a.

Ta có $C(0;0;0)$, $C'(0;0;1)$, $E\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $M\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $R\left(0;0;-\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{4};1;0\right)$, $D'(1;0;1)$.

Mặt phẳng $(MND'):\frac{x}{\frac{1}{4}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{-\frac{1}{3}}=1\Leftrightarrow 4x+2y-3z-1=0\Rightarrow d\left(C',(MND')\right)=\frac{4\sqrt{29}}{29}$

$S_{MPND'E}=S_{EQND'}-S_{PMQ}=\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{12}\frac{\sqrt{29}}{4}=\frac{11\sqrt{29}}{48}$

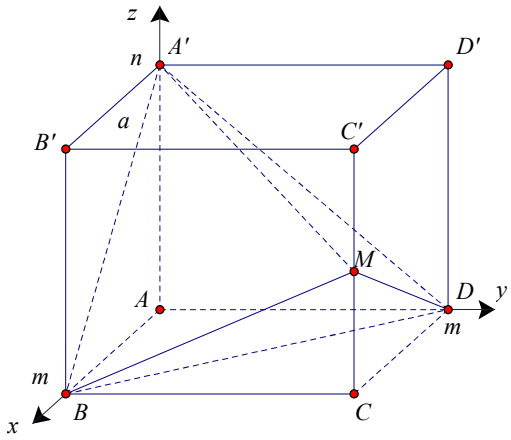
$V_{C'.D'NPME}=\frac{1}{3}d\left(C',(MND')\right).S_{D'NPME}=\frac{11}{36}a^3$.

Vậy $V_{(H)}=\frac{55}{144}a^3$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O các đỉnh $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{64}{27}$. **C.** $\frac{75}{32}$. **D.** $\frac{245}{108}$.

Lời giải



$M\left(m;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n)$

Ta có $\overrightarrow{BD}=(-m;m;0)$

$\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right]=(-mn;-mn;-m^2)$

$\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}=-m^2n-m^2.\dfrac{n}{2}=-\dfrac{3}{2}m^2n$

$V_{BA'DM}=\dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{BA'};\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{1}{4}m^2n=\dfrac{1}{4}m^2(4-m)=\dfrac{1}{8}m.m(8-2m)\le\dfrac{1}{8}.\left(\dfrac{8}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}.$

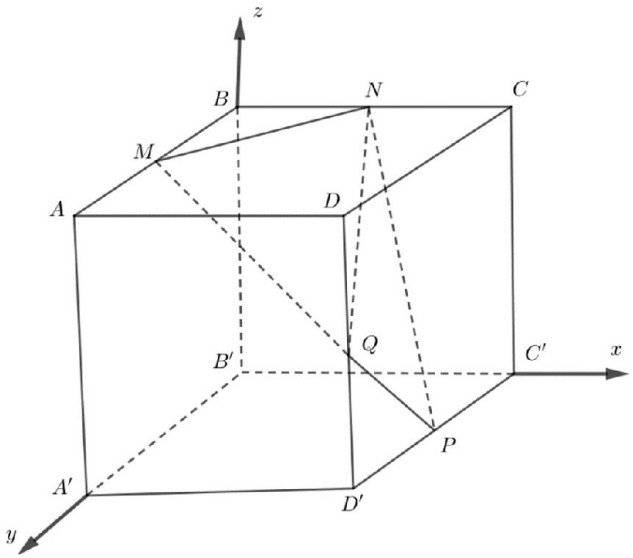
Nguyễn Bảo Vương

Câu 36. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của $AB,BC,C'D',DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $a+b$.

A. 9. **B.** 25. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc $O \equiv B'$. Khi đó:

$M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $P\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{MP}=(1;0;-1)$, $\overrightarrow{MQ}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

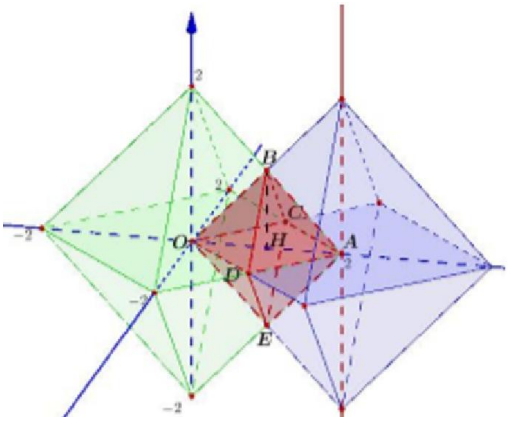
Suy ra $V_{MNPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|=\frac{1}{12}\Rightarrow a=1;b=12\Rightarrow a+b=13$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$,tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn $|x|+|y|+|z|\le 2$ và $|x-2|+|y|+|z|\le 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tập các điểm $M(x;y;z)$ có tọa độ thỏa $|x|+|y|+|z|\le 2$ là bát diện đều tâm O, các đỉnh có tọa độ $(2;0;0),(-2;0;0),(0;2;0),(0;-2;0),(0;0;2),(0;0;-2)$.

Tập các điểm $M(x;y;z)$ có tọa độ thỏa $|x-2|+|y|+|z|\le 2$ là bát diện đều tâm $A(2;0;0)$, các đỉnh có tọa độ $(0;0;0),(4;0;0),(2;2;0),(2;-2;0),(2;0;2),(2;0;-2)$

Giao của hai bát diện đều trên là một bát diện đều có tâm $H(1;0;0)$, các đỉnh là:

$O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(1;0;1)$, $C(1;-1;0)$, $D(1;1;0)$, $E(1;0;-1)$.

Ta có $AD=\sqrt{2}, BH=1$.

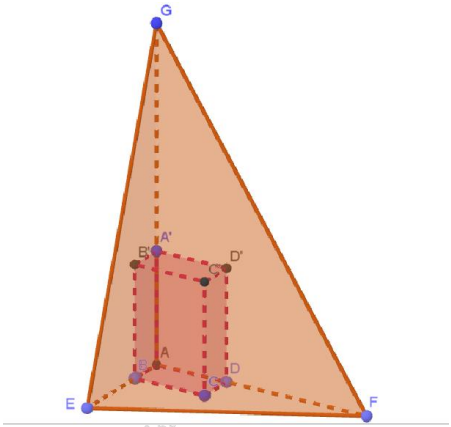
Thể tích khối đa diện: $V=2.\frac{1}{3}.BH.AD^2=\frac{4}{3}$.

Câu 38. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1; AD=2; AA'=3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia $AB; AD; AA'$ lần lượt tại $E; F; G$ (khác A) sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tổng của $AE+AF+AG$ bằng.

A. 18. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Trong không gian xây dựng hệ toạ độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O; B(1;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;3)$

Khi đó ta có $C'(1;2;3)$

Giả sử mặt phẳng (P) cắt các trục $Ox; Oy; Oz$ lần lượt tại $E(a;0;0); F(0;b;0); G(0;0;c)$, với $a>0; b>0; c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,

Do mặt phẳng (P) đi qua $C'(1;2;3)$.

Nên ta có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ hay $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow abc\geq 162$.

Mặt khác thể tích khối tứ diện $AEFG$ là $V=\frac{1}{6}abc\geq 27$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\end{cases}$.

Tức là $a=3; b=6; c=9$.

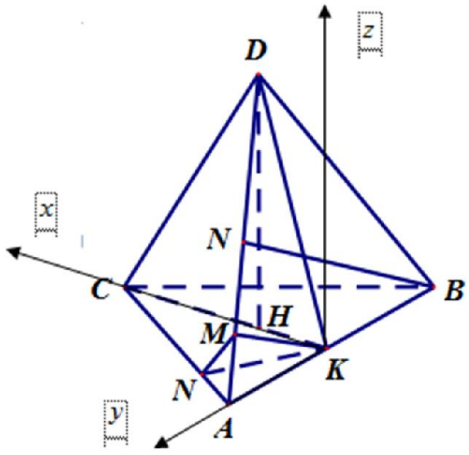
Vậy tổng $AE+AF+AG=18$.

Câu 39. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm AB, gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD,AC. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Coi $a=1$, ta có: $KC=\frac{\sqrt{3}}{2}, DH=\frac{\sqrt{6}}{3}; AN=\frac{1}{4}AC; HK=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $K\equiv O(0;0;0), A\left(0;\frac{1}{2};0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{6};0;\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow N\left(\frac{\sqrt{3}}{8};\frac{3}{8};0\right)$.

Ta có: Tứ giác $CDMN$ là hình thang cân. Do đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $KCDN$.

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $KCDN$ có phương trình:

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right).(1)$

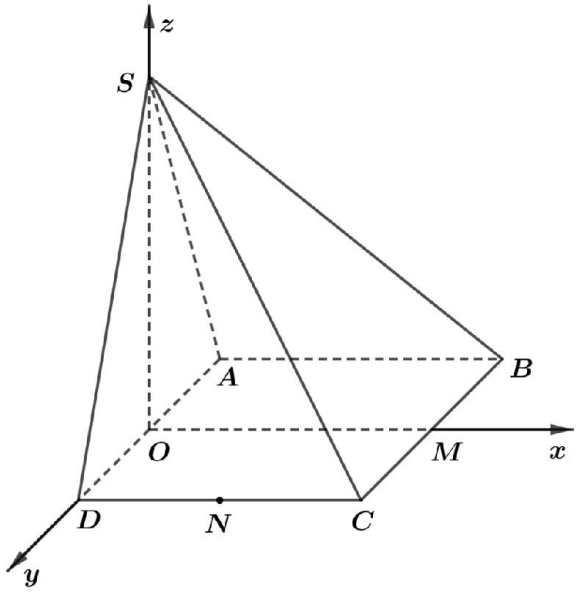
Vì $K,C,D,N\in(S)\Rightarrow\begin{cases}d=0\\ \sqrt{3}a=-\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}a+\frac{2\sqrt{6}}{3}c=-\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{4}b=-\frac{3}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ b=0\\ c=-\frac{\sqrt{6}}{8}\\ d=0\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Vậy $R=\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 40. **(Chuyên Thái Bình -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M\left(1;0;0\right),\ N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\ C\left(1;\frac{1}{2};0\right),\ S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI = NI = CI = SI$.

Ta có: $\overrightarrow{MI} = \left(x-1;y;z\right),\ \overrightarrow{NI} = \left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2};z\right),\ \overrightarrow{CI} = \left(x-1;y-\frac{1}{2};z\right),\ \overrightarrow{SI} = \left(x;y;z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Từ $MI = NI = CI = SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} \left(x-1\right)^2+y^2+z^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 = \left(x-1\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ \left(x-1\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 = x^2+y^2+\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \\ z=\frac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

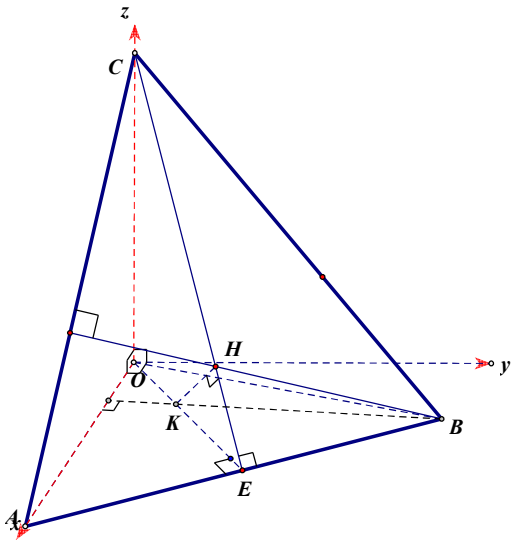
$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12}\right).$

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R = IM = \frac{\sqrt{93}}{12}.$

Câu 41. **(Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(5;0;0\right)$ và $B\left(3;4;0\right)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz, gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $C(0;0;c)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C. Gọi $E=(4;2;0)$ là trung điểm của AB. Ta có mặt phẳng (OCE) vuông góc với AB (do $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp CE \end{cases}$) và là mặt phẳng cố định.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB, do A, B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên $\begin{cases} \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{OA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x.(-2)+y.4=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm được $K=\left(3;\dfrac{3}{2};0\right)$.

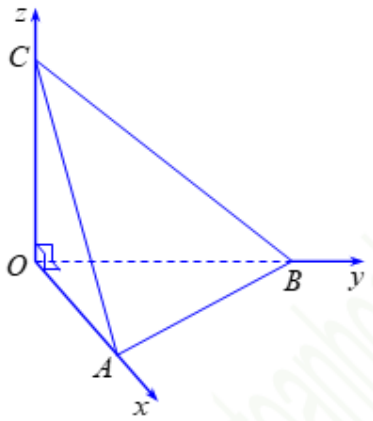
Ta chứng minh được $KH \perp (CAB)$ do $\begin{cases} AB \perp (OEC) \\ CA \perp (BHK) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ HK \perp CA \end{cases}$.

Suy ra $\widehat{KHE}=90°$. Suy ra H thuộc mặt cầu đường kính $KE=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ và $\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,(SCD)\right)$ thuộc mặt phẳng (OCE) cố định. Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\dfrac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}}=\frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(O,(ABC)\right)}=\frac{3}{d\left(O,(ABC)\right)}$

Mà $\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}}=\frac{3}{2}$ nên $d\left(O,(ABC)\right)=2$.

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O, bán kính $R=2$.

Câu 43. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1):\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$, $(d_2):\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$, $(d_3):\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3). Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=10$. **B.** $S=11$. **C.** $S=12$. **D.** $S=13$.

Lời giải

(d_1) đi qua điểm $A(1;1;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-2)$.

(d_2) đi qua điểm $B(3;-1;2)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;2;2)$.

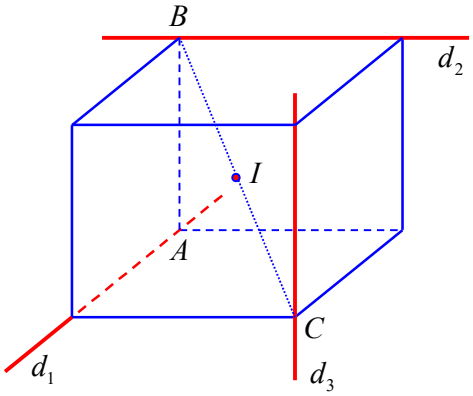
(d_3) đi qua điểm $C(4;4;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(2;-2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$, $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}=0$, $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1}=0$

$\Rightarrow (d_1)$, (d_2), (d_3) đôi một vuông góc với nhau.

$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right].\overrightarrow{BC}\neq 0$, $\left[\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{CA}\neq 0$

$\Rightarrow (d_1)$, (d_2), (d_3) đôi một chéo nhau.



Lại có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2;1)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0$ nên (d_1), (d_2), (d_3) chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.

Vì mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) nên bán kính

$R=d(I,d_1)=d(I,d_2)=d(I,d_3)\Leftrightarrow R^2=d^2(I,d_1)=d^2(I,d_2)=d^2(I,d_3)$

$\Leftrightarrow R^2=\left(\frac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\right)^2=\left(\frac{\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\right)^2=\left(\frac{\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_3}\right|}\right)^2$, với $\left|\overrightarrow{u_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{u_3}\right|^2=9$,

$\overrightarrow{AI}=(a-1;b-1;c-1)$, $\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]=(-2b-c+1;2a+2c-4;a-2b+1)$.

$\overrightarrow{BI}=(a-3;b+1;c-2)$, $\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]=(2b-2c+6;-2a+c+4;2a-b-7)$.

$\overrightarrow{CI}=(a-4;b-4;c-1)$, $\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]=(b+2c-6;-a+2c+2;-2a-2b+16)$.

$$\begin{cases}9R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2\\ 9R^2=\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2\\ 9R^2=\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2\end{cases}\Leftrightarrow 27R^2=\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{u_1}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{u_2}\right]\right|^2+\left|\left[\overrightarrow{CI},\overrightarrow{u_3}\right]\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 27R^2=18\left(a^2+b^2+c^2\right)-126a-54b-54c+423$$

$$\Leftrightarrow 27R^2=18\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+18\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+18\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{243}{2}\geq\frac{243}{2}$$

$$\Rightarrow R_{\min}=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ khi }a=\frac{7}{2},\ b=c=\frac{3}{2}\Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right).$$

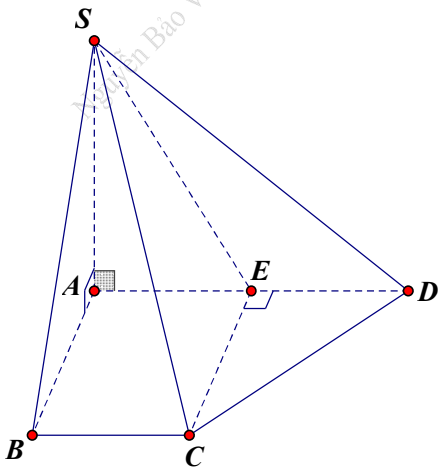
Khi đó $S=a+2b+3c=11$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ cs đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ tính được $AB=BC=AE=a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O\equiv A$, $\overrightarrow{AB}=\vec{i},\overrightarrow{AE}=\vec{j},\overrightarrow{AS}=2\vec{k}$

Khi đó ta có $E(0;1;0),C(1;1;0),D(0;2;0),S(0;0;2)$

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta có:

$$IE=IC\Leftrightarrow\sqrt{a^2+(b-1)^2+c^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+c^2}\Leftrightarrow 2a-1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$IE = ID \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2 + c^2} \Leftrightarrow 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$IE = IS \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (c-2)^2} \Leftrightarrow 4c - 2b - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{2b+3}{4} = \frac{3}{2}$$

Vậy $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ suy ra bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IE = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Nguyễn Bảo Vương