

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

---

**PHẠM THỊ HIÊN**

**MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP ĐẾM**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC**

Hà Nội – Năm 2014

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

---

**PHẠM THỊ HIÊN**

**MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP ĐẾM**

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60460113

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**

**PGS.TS. Lê Anh Vinh**

Hà Nội – Năm 2014

## MỤC LỤC

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>MỞ ĐẦU .....</b>                                                                  | <b>1</b>  |
| <b>CHƯƠNG 1 - CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TỔ HỢP .....</b>                                    | <b>2</b>  |
| 1.1 Nhắc lại về tập hợp.....                                                         | 2         |
| 1.2 Quy tắc cộng và quy tắc nhân .....                                               | 3         |
| 1.3 Giai thừa và hoán vị .....                                                       | 5         |
| 1.4 Chỉnh hợp, tổ hợp.....                                                           | 5         |
| 1.5 Chỉnh hợp lặp, hoán vị lặp và tổ hợp lặp .....                                   | 6         |
| 1.5.1 Chỉnh hợp lặp .....                                                            | 6         |
| 1.5.2 Hoán vị lặp .....                                                              | 7         |
| 1.5.3 Tổ hợp lặp .....                                                               | 8         |
| <b>CHƯƠNG 2 - MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP CƠ BẢN .....</b>                                | <b>9</b>  |
| 2.1 Một số bài toán đếm không lặp .....                                              | 9         |
| 2.1.1 Bài toán lập số.....                                                           | 9         |
| 2.1.2 Bài toán chọn vật, chọn người, sắp xếp. ....                                   | 17        |
| 2.1.3 Bài toán tương tự.....                                                         | 26        |
| 2.2 Một số bài toán đếm có lặp .....                                                 | 29        |
| 2.2.1 Bài toán lập số.....                                                           | 29        |
| 2.2.2 Bài toán đếm sử dụng tổ hợp lặp. ....                                          | 33        |
| 2.2.3 Bài toán đếm sử dụng chỉnh hợp lặp.....                                        | 37        |
| 2.2.4 Bài toán đếm sử dụng hoán vị lặp.....                                          | 37        |
| 2.2.5 Bài toán phân bố các đồ vật vào trong hộp.....                                 | 39        |
| 2.2.6 Bài toán tương tự.....                                                         | 40        |
| <b>CHƯƠNG 3 - MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP SỬ DỤNG</b>                                     |           |
| <b>PHÉP ĐẾM NÂNG CAO .....</b>                                                       | <b>42</b> |
| 3.1 Một số bài toán sử dụng nguyên lý bù trừ. ....                                   | 42        |
| 3.1.1 Nguyên lý bù trừ. ....                                                         | 42        |
| 3.1.2 Các bài toán giải bằng phương pháp bù trừ. ....                                | 43        |
| 3.2 Một số bài toán giải bằng phương pháp song ánh .....                             | 49        |
| 3.2.1 Phương pháp song ánh .....                                                     | 49        |
| 3.2.2 Các bài toán tổ hợp giải bằng phương pháp song ánh .....                       | 50        |
| 3.3 Một số bài toán giải bằng phương pháp hàm sinh .....                             | 52        |
| 3.3.1 Bài toán chọn các phần tử riêng biệt.....                                      | 52        |
| 3.3.2 Bài toán chọn các phần tử có lặp .....                                         | 53        |
| 3.4 Một số bài toán giải bằng phương pháp hệ thức truy hồi. ....                     | 57        |
| 3.4.1 Khái niệm mở đầu và mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi.....                     | 57        |
| 3.4.2 Các bài toán tổ hợp giải bằng hệ thức truy hồi .....                           | 57        |
| 3.4.3 Các bài toán tương tự .....                                                    | 60        |
| 3.5 Bài toán giải bằng nguyên lý cực hạn - khả năng xảy ra nhiều nhất, ít nhất. .... | 60        |

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.6 Bài toán giải bằng phương pháp sắp xếp thứ tự.....          | 61        |
| 3.7 Bài toán giải bằng phương pháp liệt kê các trường hợp. .... | 62        |
| <b>KẾT LUẬN .....</b>                                           | <b>65</b> |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>                                 | <b>66</b> |

## MỞ ĐẦU

Toán học tổ hợp là một trong những lĩnh vực được nghiên cứu từ khá sớm. Hiện nay trong giáo dục phổ thông, toán học tổ hợp là một trong những nội dung quan trọng, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi đại học và cao đẳng ở nước ta. Mặc dù ở mức độ không khó nhưng học sinh vẫn gặp khó khăn khi giải quyết các bài toán này. Còn trong các kỳ thi Quốc gia và Quốc tế, các bài toán tổ hợp luôn có mặt và là một thử thách thực sự với các thí sinh, thậm chí quyết định thành tích đối với các đội tuyển dự thi.

Trong luận văn này đã đề cập đến một số bài toán tổ hợp trong toán học phổ thông, cụ thể là các bài toán tổ hợp sử dụng các phương pháp đếm từ cơ bản đến nâng cao. Đây có thể coi là tài liệu tham khảo hữu ích cho giáo viên và học sinh THPT về chủ đề này.

Luận văn gồm ba chương:

Chương 1- Cơ sở lý thuyết về tổ hợp.

Chương 2- Một số bài toán tổ hợp cơ bản.

Chương 3- Một số bài toán tổ hợp sử dụng phép đếm nâng cao.

Do sự hạn chế về trình độ kiến thức và thời gian nên các bài toán tổ hợp trong luận văn còn ít, chưa có nhiều bài toán khó. Ngoài ra khoá luận cũng không thể tránh khỏi những sai sót ở nhiều góc độ, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô và các bạn.

# CHƯƠNG 1 - CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TỔ HỢP

Chương này sẽ nhắc lại một số lý thuyết về tập hợp và hệ thống lý thuyết cơ bản của toán tổ hợp như: Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp. Các nội dung này cũng được giảng dạy cho học sinh trung học phổ thông hệ cơ bản, nâng cao và hệ chuyên ngành toán.

## 1.1 Nhắc lại về tập hợp

### Tập hợp con

**Định nghĩa:** Cho tập hợp  $A$ . Tập hợp  $B$  gọi là tập con của tập  $A$  khi mọi phần tử của tập  $B$  đều thuộc  $A$ .

$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$$

### Tính chất:

- Mọi tập hợp  $A$  đều có 2 tập con là  $\emptyset$  và  $A$ .
- Tập  $A$  có  $n$  phần tử thì số tập con của  $A$  là  $2^n$ .

### Tập hợp sắp thứ tự

Một tập hợp hữu hạn có  $m$  phần tử được gọi là sắp thứ tự nếu với mỗi phần tử của tập hợp đó ta cho tương ứng một số tự nhiên từ 1 đến  $m$ , sao cho với những phần tử khác nhau ứng với những số khác nhau.

Khi đó bộ sắp thứ tự  $m$  phần tử là một dãy hữu hạn  $m$  phần tử và hai bộ sắp thứ tự  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  và  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  bằng nhau khi mọi phần tử tương ứng bằng nhau.

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \Leftrightarrow a_i = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

### Số phần tử của một số tập hợp

Tập hợp  $A$  có hữu hạn phần tử thì số phần tử của  $A$  được kí hiệu là:  $|A|$  hoặc  $n(A)$ .

$A, B, C$  là 3 tập hợp hữu hạn, khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

**Tổng quát:** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  tập hợp hữu hạn ( $n > 1$ ).

Khi đó

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < k \leq n} |A_i \cap A_k| + \\ & + \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} |A_i \cap A_k \cap A_l| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

## 1.2 Quy tắc cộng và quy tắc nhân

### Quy tắc cộng

**Định nghĩa** (Tài liệu chuẩn kiến thức 12).

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có  $m$  cách thực hiện, hành động kia có  $n$  cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có  $m + n$  cách thực hiện.

### Tổng quát

Một công việc được hoàn thành bởi một trong các hành động  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

$T_1$  có  $m_1$  cách thực hiện.

$T_2$  có  $m_2$  cách thực hiện

...

$T_n$  có  $m_n$  cách thực hiện.

Giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời thì công việc đó có  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  cách thực hiện.

### Biểu diễn dưới dạng tập hợp:

Nếu  $X, Y$  là hai tập hợp hữu hạn, không giao nhau thì

$$|X + Y| = |X| + |Y|$$

Nếu  $X_1, X_2, \dots, X_n$  là  $n$  tập hữu hạn, từng đôi một không giao nhau thì

$$|X_1 + X_2 + \dots + X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$$

Nếu  $X, Y$  là hai tập hữu hạn và  $X \subseteq Y$  thì

$$|\overline{X}| = |Y \setminus X| = |Y| - |X|$$

**Quy tắc nhân** (Tài liệu chuẩn kiến thức 12).

Giả sử để hoàn thành một nhiệm vụ  $H$  cần thực hiện hai công việc nhỏ là  $H_1$  và  $H_2$ . Trong đó:

$H_1$  có thể làm bằng  $n_1$  cách.

$H_2$  có thể làm bằng  $n_2$  cách, sau khi đã hoàn thành công việc  $H_1$ .

Khi đó để thực hiện công việc  $H$  sẽ có  $n_1 \cdot n_2$  cách.

### **Tổng quát**

Giả sử để hoàn thành một nhiệm vụ  $H$  cần thực hiện  $k$  công việc nhỏ là  $H_1, H_2, \dots, H_k$  trong đó:

$H_1$  có thể làm bằng  $n_1$  cách.

$H_2$  có thể làm bằng  $n_2$  cách, sau khi đã hoàn thành công việc  $H_1$ .

...

$H_k$  có thể làm bằng  $n_k$  cách, sau khi đã hoàn thành công việc  $H_{k-1}$ .

Khi đó để thực hiện công việc  $H$  sẽ có  $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$  cách.

### **Biểu diễn dưới dạng tập hợp:**

Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là  $n$  tập hợp hữu hạn ( $n > 1$ ), khi đó số phần tử của tích đề các các tập hợp này bằng tích của số các phần tử mọi tập thành phần.

Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích đề các  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử

của  $A_1$ , một phần tử của  $A_2, \dots$ , một phần tử của  $A_n$ . Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức:  $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_n|$ .

### 1.3 Giai thừa và hoán vị

#### Giai thừa

**Định nghĩa:** Giai thừa  $n$ , kí hiệu là  $n!$  là tích của  $n$  số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến  $n$ .

$$n! = 1.2.3 \dots (n-1).n, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Quy ước :  $0! = 1$ .

$$1! = 1.$$

#### Hoán vị

##### Định nghĩa

Cho tập hợp  $A$ , gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Một cách sắp thứ tự  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử đó.

Kí hiệu:  $P_n$  là số các hoán vị của  $n$  phần tử.

$$P_n = n! = 1.2 \dots (n-1).n$$

### 1.4 Chỉnh hợp, tổ hợp

#### Chỉnh hợp

##### Định nghĩa

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Kết quả của việc lấy  $k$  phần tử khác nhau từ  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho.

Kí hiệu:  $A_n^k$  là số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử.

$$\text{Công thức: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1) \dots (n-k+1) \quad (\text{với } 1 \leq k \leq n).$$

#### Chú ý

Một chỉnh hợp  $n$  chập  $n$  được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử.

$$A_n^n = P_n = n!.$$

## Tổ hợp

### Định nghĩa

Giả sử tập  $A$  có  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Mỗi tập con gồm  $k$  phần tử của  $A$  được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho ( $1 \leq k \leq n$ ).

Kí hiệu:  $C_n^k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) là số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử.

Công thức: 
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

### Chú ý

$$C_n^0 = 1.$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (1 \leq k \leq n).$$

## 1.5 Chỉnh hợp lặp, hoán vị lặp và tổ hợp lặp

### 1.5.1 Chỉnh hợp lặp

#### Định nghĩa (Phương pháp giải toán tổ hợp)

Một cách sắp xếp có thứ tự  $r$  phần tử có thể lặp lại của một tập  $n$  phần tử được gọi là một chỉnh hợp lặp chập  $r$  từ tập  $n$  phần tử. Nếu  $A$  là tập gồm  $n$  phần tử đó thì mỗi chỉnh hợp như thế là một phần tử của tập  $A^r$ . Ngoài ra, mỗi chỉnh hợp lặp chập  $r$  từ tập  $n$  phần tử là một hàm từ tập  $r$  phần tử vào tập  $n$  phần tử. Vì vậy số chỉnh hợp lặp chập  $r$  từ tập  $n$  phần tử là  $n^r$ .

#### Định lý 1.5.1 Số các chỉnh hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử bằng $n^r$

*Chứng minh*

Rõ ràng có  $n$  cách chọn một phần tử từ tập  $n$  phần tử cho mỗi một trong  $r$  vị trí của chỉnh hợp khi cho phép lặp. Vì vậy theo quy tắc nhân, có  $n^r$  chỉnh hợp lặp chập  $r$  từ tập  $n$  phần tử.

**Chú ý.**

Số các chỉnh hợp lặp chập  $p$  của  $n$  phần tử là  $n^p$ .

Như vậy chỉnh hợp có lặp lại là khi giữa các phần tử yếu tố thứ tự là cốt lõi, còn yếu tố khác biệt không quan trọng.

### 1.5.2 Hoán vị lặp

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần.

**Định lý 1.5.2** *Số hoán vị của  $n$  phần tử trong đó có  $n_1$  phần tử như nhau thuộc loại 1, có  $n_2$  phần tử như nhau thuộc loại 2, ... và có  $n_k$  phần tử như nhau thuộc loại  $k$  bằng  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ .*

*Chứng minh*

Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có  $C_n^{n_1}$  cách giữ  $n_1$  số cho  $n_1$  phần tử loại 1, còn lại  $n - n_1$  chỗ trống.

Sau đó có  $C_{n-n_1}^{n_2}$  cách đặt  $n_2$  phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại  $n - n_1 - n_2$  chỗ trống.

Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, ..., loại  $k - 1$  vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có  $C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$  cách đặt  $n_k$  phần tử loại  $k$  vào hoán vị.

Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

### 1.5.3 Tổ hợp lặp

Một tổ hợp lặp chập  $k$  của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự  $k$  phần tử có thể lặp lại của tập đã cho. Như vậy một tổ hợp lặp kiểu này là một dãy không kể thứ tự gồm  $k$  thành phần lấy từ tập  $n$  phần tử. Do đó có thể là  $k > n$ .

**Định lý 1.5.3** *Số tổ hợp lặp chập  $k$  từ tập  $n$  phần tử bằng  $C_{n+k-1}^k$ .*

*Chứng minh*

Mỗi tổ hợp lặp chập  $k$  từ tập  $n$  phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy  $n-1$  thanh đứng và  $k$  ngôi sao. Ta dùng  $n-1$  thanh đứng để phân cách các ngăn. Ngăn thứ  $i$  chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ  $i$  của tập xuất hiện trong tổ hợp.

Mỗi dãy  $n-1$  thanh và  $k$  ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Do đó mỗi dãy ứng với một cách chọn  $k$  chỗ cho  $k$  ngôi sao từ  $n+k-1$  chỗ chứa  $n-1$  thanh và  $k$  ngôi sao. Đó là điều cần chứng minh.

**Chú ý.**

Số tổ hợp có lặp chập  $p$  của  $n$  là  $\overline{C_n^p} = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1}$ .

Tổ hợp có lặp lại khi một phần tử có thể xuất hiện nhiều lần và thứ tự của các phần tử không cần để ý.

## CHƯƠNG 2 - MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP CƠ BẢN

Chương 1 đã trình bày lý thuyết cơ bản của toán tổ hợp. Dựa trên cơ sở lý thuyết đó trong chương này khóa luận sẽ tập trung trình bày một số bài toán tổ hợp cơ bản, phù hợp với học sinh THPT khi tham gia các kì thi tốt nghiệp, cao đẳng, đại học.

### 2.1 Một số bài toán đếm không lặp

Trong các bài toán về phép đếm không lặp, mỗi phần tử cần đếm chỉ có thể xuất hiện tối đa một lần. Để giải các bài toán đếm không lặp người ta sử dụng hai quy tắc chính của phép đếm là quy tắc cộng và quy tắc nhân, cũng như sử dụng hai phương pháp đếm trực tiếp hoặc đếm gián tiếp.

#### 2.1.1 Bài toán lập số

**Bài 1:**

*Cho tập hợp các chữ số  $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ . Từ tập hợp  $X$  có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 6 chữ số khác nhau từng đôi một.*

Giải:

Gọi số cần lập là  $\overline{n} = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ,  $a_i \in X$ .

Vì  $\overline{n}$  là số chẵn nên  $a_6 \in \{2; 4; 6; 8\}$  có 4 cách chọn. Còn  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  là một bộ phân biệt có thứ tự được chọn từ  $X$  do đó nó là một chỉnh hợp chập 5 của 8 (Trừ đi số  $a_6$  đã chọn). Có  $A_8^5$  cách chọn.

Vậy có  $4 \cdot A_8^5 = 224$  số thỏa mãn bài toán.

**Bài 2:**

*Cho tập hợp các chữ số  $X = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ . Từ tập hợp  $X$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau từng đôi một thỏa mãn :*

*a. Là số chẵn.*

***b. Là số tiến (chữ số sau lớn hơn chữ số đứng trước nó).***

Giải:

Gọi số cần lập là  $\overline{n} = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ,  $a_i \in X$ ,  $a_1 \neq 0$ .

Vì  $\overline{n}$  là số chẵn nên  $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$ .

Trường hợp 1: Nếu  $a_5 = 0$  thì  $a_5$  có 1 cách chọn.

Khi đó  $a_1, a_2, a_3, a_4$  là một bộ phân biệt có thứ tự được chọn từ  $X \setminus \{0\}$

do đó nó là một chỉnh hợp chập 4 của 7. Có  $A_7^4$  cách chọn.

Vậy có  $A_7^4 = 840$  số thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: Nếu  $a_5$  được chọn từ  $\{2, 4, 6\}$  thì  $a_5$  có 3 cách chọn.

$a_1$  được chọn từ tập  $X \setminus \{0, a_5\}$  nên  $a_1$  có 6 cách chọn.

$a_2, a_3, a_4$  là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ  $X \setminus \{a_1, a_5\}$  do đó

nó là một chỉnh hợp chập 3. Có  $A_6^3$  cách chọn.

Vậy có  $3 \cdot 6 \cdot A_6^3 = 2160$  số thỏa mãn bài toán.

Vậy số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ  $X$  là:

$$840 + 2160 = 3000 \text{ số.}$$

b) Vì  $\overline{n}$  là số tiến nên  $a_1 < a_2 < \dots < a_5$  và do  $a_1 \neq 0$

nên  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_5$ .

Mỗi cách chọn ra 5 chữ số thì chỉ có 1 cách sắp xếp từ nhỏ đến lớn.

Vậy số các số cần tìm là số cách chọn ra 5 chữ số từ tập  $X \setminus \{0\}$ .

Vậy có  $C_7^5 = 21$  số thỏa mãn điều kiện.

**Bài 3:**

***Cho  $A = \{0, 1, \dots, 5\}$ , có bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3.***

Giải:

Ta “dán” hai chữ số 2 và 3 thành một chữ số kép. Có hai cách dán 23 hoặc 32. Bài toán trở thành: “Từ năm chữ số thuộc  $B = \{0; 1; 4; 5; \text{số kép}\}$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau”

Gọi số có năm chữ số được lập từ B là  $\overline{n} = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ,  $a_i \in B$ ,  $a_1 \neq 0$ .

$a_1$  được chọn từ tập  $B \setminus \{0\}$  nên  $a_1$  có 4 cách chọn.

$a_2, a_3, a_4, a_5$  là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ  $X \setminus \{a_1\}$  do đó nó là một hoán vị của 4. Có  $4!$  cách chọn.

Vậy có  $2.4.4! = 192$  số thỏa mãn bài toán.

#### **Bài 4:**

*Từ tập  $A = \{0, 1, \dots, 5\}$  có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho mỗi chữ số xuất hiện nhiều nhất một lần. Tính tổng tất cả các số đó.*

Giải:

Xét trường hợp các số lập được từ  $A$  có 6 chữ số (cả trường hợp số 0 đứng đầu).

Có  $P_6 = 6! = 720$  số.

Ta thấy các số trong tập  $A$  đều xuất hiện 120 lần trên các hàng trăm nghìn, hàng chục nghìn, hàng nghìn, hàng trăm hàng chục và hàng đơn vị.

Vậy tổng tất cả các số lập được trong trường hợp này là:

$$\begin{aligned} T &= 120(0+1+2+3+4+5)10^5 + 120(0+1+2+3+4+5)10^4 + \dots \\ &\quad + 120(0+1+2+3+4+5) = 120.15. \frac{10^6 - 1}{10 - 1}. \end{aligned}$$

Xét trường hợp số 0 đứng đầu  $\overline{0a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ,  $a_i \in A \setminus \{0\}$ ,  $i = \overline{2, 6}$ .

Có  $P_5 = 5! = 120$  số.

Ta thấy các số 1, 2, 3, 4, 5 đều xuất hiện 24 lần trên các hàng chục nghìn, hàng nghìn, hàng trăm hàng chục và hàng đơn vị.

Vậy tổng các số lập được trong trường hợp này là:

$$K = 24.15 \frac{10^5 - 1}{10 - 1}.$$

Tổng các số lập được có 6 chữ số là:  $P_6 - P_5 = 600$  số.

Tổng tất cả các số đó là:

$$S = T - K = 120.15 \cdot \frac{10^6 - 1}{10 - 1} - 24.15 \frac{10^5 - 1}{10 - 1} = 195999840.$$

### Bài 5:

*Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau và lớn hơn 685000 lập từ  $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ .*

Giải:

Gọi số cần tìm là:

$$\bar{n} = \overline{a_1 a_2 \dots a_7}, \bar{n} > 685000, a_i \in A, a_1 \neq 0, i = \overline{1, 7}.$$

Trường hợp 1: Số có dạng  $\overline{68a_3 a_4 \dots a_7}$  ( $a_3 \geq 5, a_3 \neq 6, 8$ ).

$a_3$  có thể nhận 3 giá trị 5, 7, 9 nên có 3 cách chọn.

$a_4, a_5, a_6, a_7$  là một bộ 4 số có thứ tự lập từ  $A \setminus \{6, 8, a_3\}$ .

Có  $A_7^4$  cách chọn bộ 4 số có kể thứ tự.

Vậy có 3.  $A_7^4$  số thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: Số có dạng  $\overline{69a_3 a_4 \dots a_7}$ .

$a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  là một bộ 5 phần tử từ  $A \setminus \{6, 9\}$  và có kể thứ tự các phần tử.

Có  $A_8^5$  số.

Trường hợp 3: số có dạng  $\overline{a_1 a_2 \dots a_7}$  với  $a_1 > 6$ .

$a_1$  có 3 cách chọn là 7, 8, 9.

$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  là một bộ 6 phần tử từ  $A \setminus \{a_1\}$  và có kể thứ tự các phần tử.

Có  $A_9^6$  số.

Vậy có  $3.A_7^4 + A_8^5 3.A_7^4 + A_8^5 + A_9^6 = 69720$  số thỏa mãn bài toán.

#### **Bài 6:**

*Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau trong đó mỗi số có tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị.*

Giải:

Gọi số cần tìm là:

$$\overline{n} = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}, \quad a_1 \neq 0.$$

Ta có  $1+2+3+4+5+6=21$ . Vậy tổng của ba chữ số đầu là 10.

Dễ thấy  $1+3+6=1+4+5=2+3+5$ .

Vậy có 3 cách chọn 3 nhóm 3 chữ số đầu (1,3,6 hoặc 1,4,5 hoặc 2,3,5).

Với 1 cách chọn nhóm 3 chữ số thì có  $3!$  cách để lập ra số  $\overline{a_1 a_2 a_3}$ .

Với 3 số còn lại thì có  $3!$  cách để lập ra số  $\overline{a_4 a_5 a_6}$ .

Vậy có  $3.3!.3!=108$  số cần tìm.

#### **Bài 7:**

*Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.*

Giải:

Gọi số cần tìm là:

$$\overline{n} = \overline{a_1 a_2 \dots a_6}, \quad a_1 \neq 0, a_i \in \{1, 2, \dots, 9\}, i = \overline{1, 6}.$$

Theo bài ra  $a_3 + a_4 + a_5 = 8$ .

Ta có  $1+2+5=1+3+4=8$ . Vậy có hai cách chọn nhóm 3 số để tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

Với mỗi nhóm có  $3! = 6$  cách lập ra số  $a_3, a_4, a_5$ .

Với 3 chữ số còn lại  $a_1, a_2, a_6$  là 1 bộ số có thứ tự được chọn từ tập  $\{1, 2, \dots, 9\} \setminus \{a_3, a_4, a_5\}$ . Có  $A_6^3$  cách.

Vậy có  $2.3!A_6^3 = 1440$  số thỏa mãn bài toán.

#### **Bài 8:**

*Từ tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1 và 5.*

Giải:

Trong 5 chữ số thì có 2 chữ số là 1 và 5. Ta chỉ cần chọn ra ba số thuộc tập hợp  $\{2, 3, 4, 6, 7\}$ . Số cách chọn là  $C_5^3 = 10$ .

Với 5 số được chọn ra có  $5!$  cách thành lập số thỏa mãn.

Vậy có  $5!C_5^3 = 1200$ .

#### **Bài 9:**

*Từ tập  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ này đứng cạnh nhau.*

Giải:

Vì có 3 số lẻ nên có 6 ‘số kép’ sau 13, 31, 15, 51, 35, 53. Bài toán trở thành có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau được lập từ tập  $B = \{0, 2, 4, 6, \text{số kép}\}$ .

Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là tập hợp các số chẵn có 4 chữ số khác nhau được lập từ tập  $B$  trong đó ‘số kép’ đứng ở vị trí thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

Trường hợp 1 : số kép đứng ở vị trí thứ nhất.

Ba chữ số còn lại được chọn từ tập  $\{0, 2, 4, 6\}$ : Có  $A_4^3$  cách chọn

$$n(A_1) = A_4^3 = 24$$

Trường hợp 2 : số kép đứng ở vị trí thứ hai hoặc thứ ba .

Số đứng đầu được chọn từ tập  $\{2, 4, 6\}$  : có 3 cách chọn

Hai chữ số còn lại được chọn từ tập  $\{0, 2, 4, 6\} \setminus \{\text{chữ số đầu}\}$ : Có  $A_3^2$  cách chọn.

$$\text{Vậy } n(A_2) = n(A_3) = 3 \cdot A_3^2 = 18$$

Vậy có  $6(24+18+18) = 360$  số thỏa mãn bài toán.

### **Bài 10:**

***Số 360 có bao nhiêu ước tự nhiên ?***

Giải :

Phân tích 360 ra thừa số nguyên tố :  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Số d là ước của 360 phải có dạng  $d = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$  với  $0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 2, 0 \leq p \leq 1$ .

Vậy theo quy tắc nhân, ta có  $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$  ước tự nhiên của 360.

### ***Tổng quát hóa***

Để tìm số các ước của số A ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1 : Phân tích A ra thành thừa số nguyên tố.

$$A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k} \text{ với } p_i \neq 1, i = \overline{1, k} \text{ và đôi một khác nhau.}$$

Bước 2 : Số d là ước của A phải có dạng

$$d = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k} \text{ với } 0 \leq a_1 \leq n_1, 0 \leq a_2 \leq n_2, 0 \leq a_3 \leq n_3, \dots, 0 \leq a_k \leq n_k.$$

Bước 3 : Số các ước tự nhiên của A là  $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)\dots(n_k+1)$ .

### **Bài 11:**

***Có bao nhiêu số nguyên dương là ước của ít nhất một trong hai số 5400 và 18000?***

Giải :

$$\text{Đặt } A = \{x \in \mathbb{N}, x|5400\} ; B = \{x \in \mathbb{N}, x|18000\}.$$

Yêu cầu bài toán là tìm  $|A \cup B|$

Trước hết ta tìm  $|A|, |B|, |A \cap B|$

Ta có

$$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$18000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

Vận dụng kết quả tổng quát của bài 10 ta có

$$|A| = (3+1)(3+1)(2+1) = 48$$

$$|B| = (4+1)(2+1)(3+1) = 60$$

Mặt khác tập hợp  $A \cap B$  là tập các ước nguyên dương của 5400 và 18000, vì thế  $A \cap B$  cũng là tập hợp của các ước dương của ước chung lớn nhất của 5400 và 18000.

$$\text{Mà } (5400, 18000) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

Vậy ta có

$$|A \cap B| = (3+1)(2+1)(2+1) = 36.$$

Cuối cùng ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 48 + 60 - 36 = 72$$

## Bài 12:

***Có bao nhiêu số nguyên của tập hợp  $\{1; 2; \dots; 1000\}$  mà chia hết cho 3 hoặc 5?***

Giải :

$$\text{Đặt } S = \{1; 2; \dots; 1000\} ; A = \{x \in S | x : 3\} ; B = \{x \in S | x : 5\}$$

Yêu cầu bài toán là tìm  $|A \cup B|$

Ta có

$$|A| = \left[ \frac{1000}{3} \right] = 333$$

$$|B| = \left[ \frac{1000}{5} \right] = 200$$

Mặt khác ta thấy  $A \cap B$  là tập các số nguyên trong S chia hết cho cả 3 và 5 nên nó phải chia hết cho BCNN của 3 và 5, mà  $BCNN(3,5)=15$  nên

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66.$$

Vậy ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 200 - 66 = 467$$

### 2.1.2 Bài toán chọn vật, chọn người, sắp xếp.

**Bài 13:**

*Có 12 cây giống 3 loại : xoài, mít, ổi trong đó 6 xoài, 4 mít, 2 ổi. Muốn chọn ra 6 cây giống đã trồng. Hỏi có bao nhiêu cách :*

- Chọn ra mỗi loại đúng 2 cây.*
- Chọn ra mỗi loại có ít nhất một cây.*

Giải :

- Chọn 2 cây xoài có  $C_6^2 = 15$  cách.

Chọn 2 cây mít có  $C_4^2 = 6$  cách.

Chọn 2 cây ổi có  $C_2^2 = 1$  cách.

Vậy theo quy tắc nhân có  $15.6.1=90$  cách

- Gọi A là tập hợp cách chọn 6 cây trong 12 cây.

$$n(A) = C_{12}^6 = 924$$

Gọi B là tập hợp cách chọn 6 cây không đủ 3 loại.

Cách chọn chỉ có xoài: 1 cách chọn.

Cách chọn chỉ có xoài và mít:  $C_{10}^6 - 1 = 209$  cách chọn.

Cách chọn chỉ có xoài và ổi:  $C_8^6 - 1 = 27$  cách chọn.

Cách chọn chỉ có mít và ổi: 1 cách chọn.

$$\text{Do đó } n(B) = 1 + 209 + 27 + 1 = 238$$

Vậy số cách chọn có đủ các loại là:  $924 - 238 = 686$  cách.

**Bài 14:**

*Một thầy giáo có 20 cuốn sách đôi một khác nhau. Trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn sách hội họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba thể loại văn học, âm nhạc và hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng ?*

Giải:

Có  $C_{12}^6$  cách chọn 6 cuốn sách bất kỳ trong 12 cuốn trong đó.

Có  $C_5^5 C_7^1$  cách chọn 6 cuốn có 5 cuốn văn học.

Có  $C_4^4 C_8^2$  cách chọn 6 cuốn có 4 cuốn âm nhạc.

Có  $C_3^3 C_9^3$  cách chọn 6 cuốn có 3 cuốn hội họa.

Vậy có  $C_{12}^6 - (C_5^5 C_7^1 + C_4^4 C_8^2 + C_3^3 C_9^3) = 805$  cách chọn thỏa mãn điều kiện.

Với mỗi cách chọn ta có 6! Cách tặng.

Vậy số cách tặng thỏa mãn là  $805 \cdot 6! = 579600$  cách.

**Chú ý:** Đối với bài này ta có thể dùng cách phân chia trường hợp thỏa mãn điều kiện (cách giải trực tiếp).

**Bài 15:**

*Đội thanh niên xung kích của trường A có 12 học sinh, gồm 5 học sinh khối lớp 10, 4 học sinh khối lớp 11 và 3 học sinh khối lớp 12.*

- a. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho học sinh thuộc không quá 2 khối lớp.*
- b. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 6 người sao cho tổ nào cũng có học sinh khối lớp 12 và có ít nhất hai học sinh khối lớp 10.*

Giải:

a. Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh là  $C_{12}^4 = 495$ .

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi khối lớp có ít nhất 1 em được tính như sau:

Khối lớp 10 có 2 học sinh, các khối lớp 11, 12 có 1 học sinh có  $C_5^2 C_4^1 C_3^1 = 120$  cách.

Khối lớp 11 có 2 học sinh, các khối lớp 10, 12 có 1 học sinh có  $C_5^1 C_4^2 C_3^1 = 90$  cách.

Khối lớp 12 có 2 học sinh, các khối lớp 10, 11 có 1 học sinh có  $C_5^1 C_4^1 C_3^2 = 60$  cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi khối lớp có ít nhất 1 học sinh là  $120 + 90 + 60 = 270$ .

Vậy số cách chọn thỏa mãn là  $495 - 270 = 225$ .

b. Ta chọn 6 học sinh thỏa mãn đề bài vào tổ 1, 6 học sinh còn lại tạo thành tổ 2.

Có  $C_5^2 C_4^3 C_3^1$  cách chọn tổ 1 trong đó có 2 học sinh khối lớp 10, 3 học sinh khối lớp 11, 1 học sinh khối lớp 12.

Có  $C_5^2 C_4^2 C_3^2$  cách chọn tổ 1 trong đó có 2 học sinh khối lớp 10, 2 học sinh khối lớp 11, 2 học sinh khối lớp 12.

Có  $C_5^3 C_4^2 C_3^1$  cách chọn tổ 1 trong đó có 3 học sinh khối lớp 10, 2 học sinh khối lớp 11, 1 học sinh khối lớp 12.

Có  $C_5^3 C_4^1 C_3^2$  cách chọn tổ 1 trong đó có 3 học sinh khối lớp 10, 1 học sinh khối lớp 11, 2 học sinh khối lớp 12.

Vậy có  $C_5^2 C_4^3 C_3^1 + C_5^2 C_4^2 C_3^2 + C_5^3 C_4^2 C_3^1 + C_5^3 C_4^1 C_3^2 = 600$  cách chia tổ thỏa mãn đề bài.

**Bài 16:**

*Có  $n$  nam,  $n$  nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:*

*a.  $2n$  người ngồi quanh một bàn tròn.*

*b.  $2n$  người ngồi vào hai dãy ghế đối diện sao cho nam nữ ngồi đối diện.*

Giải:

a. Người thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi vì chỗ ngồi nào cũng không phân biệt so với bàn tròn.

Sau khi có chuẩn của người thứ nhất thì  $n - 1$  người còn lại có  $(n - 1)!$  cách xếp chỗ ngồi.

Vậy có  $(n - 1)!$  Cách.

b. Xếp  $n$  nam vào 1 dãy ghế có  $n!$  cách.

Xếp  $n$  nữ vào 1 dãy ghế có  $n!$  cách.

Đôi chỗ  $n$  cặp nam nữ đối diện có  $2.2 \dots 2 = \underbrace{2.2 \dots 2}_n = 2^n$  cách.

Vậy có  $(n!)^2 2^n$  cách xếp nam nữ ngồi đối diện nhau.

**Bài 17:**

*Một hộp đựng 2 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng, 5 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó số viên bi lấy ra không đủ cả 3 màu, biết rằng các viên bi là khác nhau.*

Giải:

Có  $C_5^4$  cách chọn 4 viên chỉ có màu vàng.

Có  $C_5^4$  cách chọn 4 viên không có màu vàng.

Có  $C_7^4$  cách chọn 4 viên không có màu trắng.

Có  $C_8^4$  cách chọn 4 viên không có màu đỏ.

Trong  $C_7^4$  cách chọn 4 viên bi không có bi trắng có chứa  $C_5^4$  cách chọn 4 viên chỉ có màu vàng.

Trong  $C_8^4$  cách chọn 4 viên không có bi đỏ có chứa  $C_5^4$  cách chọn 4 viên chỉ có màu vàng.

Vậy có  $C_5^4 + C_5^4 + C_7^4 + C_8^4 - C_5^4 - C_5^4 = 105$  cách chọn.

#### **Bài 18:**

*Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình, 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.*

Giải:

Gọi A là tập hợp cách chọn đề có 3 câu dễ, 1 câu khó, 1 câu trung bình.

Gọi B là tập hợp cách chọn đề có 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình.

Gọi C là tập hợp cách chọn đề có 2 câu dễ, 1 câu khó, 2 câu trung bình.

Gọi D là tập hợp cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Ta có  $D = A \cup B \cup C$

Ngoài ra A, B, C đôi một không giao nhau.

Theo quy tắc cộng ta có :  $|D| = |A| + |B| + |C|$  (1).

Theo quy tắc nhân ta có :

$$|A| = C_{15}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^1 = 22750$$

$$|B| = C_{15}^2 \cdot C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10500$$

$$|C| = C_{15}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 23625$$

Thay vào (1) ta có  $|D| = 56875$ .

Vậy có 56875 cách chọn đề kiểm tra thỏa mãn bài toán.

#### **Bài 19:**

*Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.*

Giải:

Đầu tiên ta chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất. Theo quy tắc nhân số cách chọn là :  $n_1 = C_{12}^4.C_3^1 = 1485$

Sau đó chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ 2. 4 nam được chọn trong 8 nam còn lại và 1 nữ sẽ được chọn trong 2 nữ còn lại. Theo quy tắc nhân số cách chọn là :

$$n_1 = C_8^4.C_2^1 = 140$$

Số còn lại thuộc tỉnh thứ 3.

Vậy số cách phân công là  $n = n_1.n_2 = 1485.140 = 207900$

**Bài 20:**

*Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp T, 4 học sinh lớp L và 3 học sinh lớp H. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh không thuộc quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?*

Giải:

Gọi A là tập hợp mọi cách chọn 4 học sinh trong 12 học sinh.

Gọi B là tập hợp cách chọn không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Gọi C là tập hợp cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có  $A = B \cup C; B \cap C = \emptyset$

Theo quy tắc cộng ta có  $|A| = |B| + |C| \Leftrightarrow |C| = |A| - |B|$  (1)

Dễ thấy  $|A| = C_{12}^4 = 495$

Để tính  $|B|$ , ta nhận thấy sẽ chọn 1 lớp có 2 học sinh, hai lớp còn lại mỗi lớp 1 học sinh. Theo quy tắc cộng và quy tắc nhân ta có

$$|B| = C_5^2.C_4^1.C_3^1 + C_5^1.C_4^2.C_3^1 + C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 120 + 90 + 60 = 270$$

Thay vào (1) ta có  $|C| = 495 - 270 = 225$ .

Vậy có 225 cách chọn.

**Bài 21:**

***Có bao nhiêu cách phân bố 100 sản phẩm cho 12 cửa hàng biết rằng mỗi cửa hàng phải có ít nhất một sản phẩm.***

Giải:

Ta có thể dùng 99 vách ngăn để ngăn 100 sản phẩm. Chọn 11 vách ngăn trong số 99 vách ngăn trên ta được một cách phân bố sản phẩm cho 12 cửa hàng thỏa mãn bài toán.

Vậy có  $C_{99}^{11}$  cách phân bố

***Tổng quát:*** Số cách phân bố  $k$  sản phẩm cho  $n$  cửa hàng trong đó mỗi cửa hàng có ít nhất một sản phẩm là  $C_{n-1}^{k-1}$

**Bài 22:**

***Một lớp học có 45 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn nhóm 5 bạn vào ban cán sự của lớp sao cho có một bạn làm lớp trưởng.***

Giải:

Trước hết ta chọn 5 học sinh trong 45 học sinh của lớp. Có  $C_{45}^5$  cách.

Sau đó trong 5 học sinh này ta chọn một bạn làm lớp trưởng. Có 5 cách.

Vậy có 5.  $C_{45}^5$  cách chọn thỏa mãn bài toán.

***Tổng quát:*** Số cách chọn nhóm  $k$  bạn trong số  $n$  bạn vào một nhóm sao cho có một bạn làm trưởng nhóm là  $kC_n^k$

**Bài 23:**

***Có bao nhiêu cách chọn một nhóm người trong số  $n$  người sao cho có một người làm nhóm trưởng.***

Giải:

Giả sử nhóm có  $k$  người ( $k \geq 1$ ) (vì phải luôn có một người làm trưởng nhóm).

Trước hết ta chọn  $k$  người trong  $n$  người. Có  $C_n^k$  cách.

Sau đó trong  $k$  người này ta chọn một bạn làm trưởng nhóm. Có  $k$  cách.

Do đó có  $kC_n^k$  cách chọn nhóm có  $k$  người ( $k \geq 1$ ) trong đó luôn có một người làm nhóm trưởng.

Vậy có  $\sum_{k=1}^n kC_n^k$  cách chọn một nhóm người trong số  $n$  người sao cho có một người làm nhóm trưởng.

**Bài 24:**

***Có bao nhiêu cách chọn một nhóm người trong số  $n$  người sao cho có một người làm nhóm trưởng, một người là nhóm phó.***

Giải:

Giả sử nhóm có  $k$  người ( $k \geq 2$ ) (vì phải luôn có một người làm nhóm trưởng, một người là nhóm phó).

Trước hết ta chọn  $k$  người trong  $n$  người. Có  $C_n^k$  cách.

Sau đó trong  $k$  người này ta chọn một bạn làm nhóm trưởng. Có  $k$  cách.

Trong  $k-1$  người còn lại ta chọn một bạn làm nhóm phó. Có  $k-1$  cách.

Do đó có  $k(k-1)C_n^k$  cách chọn nhóm có  $k$  người ( $k \geq 1$ ) trong đó luôn có một người làm nhóm trưởng, một người là nhóm phó.

Vậy có  $\sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k$  cách chọn một nhóm người trong số  $n$  người sao cho có một người làm nhóm trưởng, một người là nhóm phó.

**Bài 25 : ( Hoán vị vòng quanh)**

***a. Tính số hoán vị vòng quanh của  $n$  phần tử khác nhau.***

***b. Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước : Anh 3 người, Nga 5 người, Mỹ 2 người, Pháp 3 người, Trung Quốc 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch thì ngồi cạnh nhau.***

Giải :

- Nếu sắp xếp một phần tử vào một vị trí nào đó (chú ý vị trí đầu tiên không đóng vai trò gì do đây là hoán vị theo đường tròn), thì  $n-1$

phần tử còn lại được sắp xếp vào  $n-1$  vị trí còn lại. Số cách chọn đó là  $(n-1)!$

Vậy số hoán vị vòng quanh của  $n$  là  $(n-1)!$

- b. Nếu một phái đoàn nào ngồi vào chỗ trước thì theo phần a bốn phái đoàn còn lại có  $4!$  Cách sắp xếp.

Như vậy có 24 cách sắp xếp các phái đoàn ngồi theo quốc gia mình. Bây giờ ta xem có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho nội bộ từng phái đoàn. Từ giả thiết ta có

3! Cách sắp xếp cho phái đoàn Anh.

5! Cách sắp xếp cho phái đoàn Nga.

2! Cách sắp xếp cho phái đoàn Mỹ.

3! Cách sắp xếp cho phái đoàn Pháp.

4! Cách sắp xếp cho phái đoàn Trung Quốc.

Theo quy tắc nhân số cách sắp xếp cho hội nghị là

$$n = 4!3!5!2!3!4! = 4976640 \text{ cách sắp xếp.}$$

**Chú ý :** Ta có thể mở rộng phần 1 của bài 25 như sau :

Số cách sắp xếp  $m$  số khác nhau từ tập hợp  $n$  số  $\{1;2;...;n\}$  lên một đường

tròn bằng  $\frac{n!}{m(n-m)!}$ .

Thật vậy

Chọn  $m$  phần tử khác nhau trong  $n$  phần tử đã cho (không kể thứ tự sắp xếp).

$$\text{Số cách chọn là } n_1 = C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Với  $m$  phần tử được chọn xếp  $m$  số đó lên đường tròn . Theo hoán vị vòng quanh số cách sắp xếp là  $n_2 = (m-1)!$

Theo quy tắc nhân số cách sắp xếp  $m$  số khác nhau lên đường tròn là

$$n = n_1.n_2 = \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot (m-1)! = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

### **Bài 26: ( Bài toán vui)**

*Một cửa hàng có 10 lon nước giải khát đôi một khác nhau dùng để bày hàng. Người ta xếp các lon đó thành hình quả núi, số lon từ hàng dưới cùng đến hàng trên cùng lần lượt là 4, 3, 2, 1. Hàng ngày người ta đổi vị trí các lon cho nhau sao cho không có hai ngày bày như nhau. Hỏi bắt đầu từ ngày 1.1.2000 thì có thể tiến hành đến ngày nào ?*

Giải :

Có 10 vị trí khác nhau, bày 10 lon nước giải khát đôi một khác nhau, vậy số cách bày là

$$10! = 3628800$$

Vậy cần có 3628800 ngày để bày hết tất cả các cách.

Do cứ 4 năm thì có một năm nhuận, nên số ngày của chu kì 4 năm là  $365.4 + 1 = 1461$  ngày

$$\text{Ta thấy } 3628800 = 2483.1461 + 1137$$

Ta lại lưu ý rằng những năm chia hết cho 400 không phải năm nhuận. như vậy không kể năm 2000, trong 2483. 4 năm có thêm 24 năm chia hết cho 4 mà không phải năm nhuận.

$$\text{Vậy } 3628800 \text{ ngày} = 2483.4 \text{ năm} + 1137 + 24 = 9935 \text{ năm} + 66 \text{ ngày.}$$

Như vậy có thể bày tới ngày thứ 66 của năm 11936.

$$\text{Do năm này là năm nhuận nên } 66 = 31 + 29 + 6.$$

Vậy ngày cuối cùng có thể bày là mùng 6 tháng 3 năm 11936.

### **2.1.3 Bài toán tương tự**

**Bài 27:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại quá 1 lần.

**Bài 28:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chữ số đứng sau bé hơn chữ số đứng trước.

**Bài 29:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau là số lẻ và nhỏ hơn 600000.

**Bài 30:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau là số chẵn và nhỏ hơn 25000.

**Bài 31:** Từ  $A = \{1, 2, \dots, 9\}$  được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau và không lớn hơn 789.

**Bài 32:** Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  sao cho một trong ba chữ số đầu tiên là 1.

**Bài 33:** Có 20 học sinh (8 nữ trong đó có Lan, 12 nam trong đó có Nam và Tí).

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ 7 người trong đó có nhiều nhất 2 trong 3 bạn Tí, Nam và Lan.

b) Có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc sao cho Lan đứng đầu và các bạn nam luôn đứng cạnh nhau nhưng Tí và Nam không đứng cạnh nhau.

**Bài 34:** Một hộp đựng 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

a) Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu cùng màu, 3 quả cầu cùng số.

b) Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu khác màu, 3 quả cầu khác màu và khác số?

**Bài 35:** Trong kỳ thi kết thúc môn toán học rời rạc có 10 câu hỏi. Có bao nhiêu cách gán điểm cho các câu hỏi nếu tổng số điểm là 100 và mỗi câu hỏi ít nhất 5 điểm.

**Bài 36:** Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn sắp chỗ ngồi cho 6 học sinh nam và 6 học sinh nữ vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bất kỳ hai học sinh ngồi cùng nhau hoặc đối diện nhau đều không cùng giới tính.

b) Bất kỳ hai học sinh ngồi đối diện nhau đều không cùng giới tính.

**Bài 37:** Ở một trường tiểu học có 50 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong 50 em nói trên đi dự trại hè. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 3 em được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào.

**Bài 38:** có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lí nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách.

**Bài 39:** Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ 3 màu.

**Bài 40 :** Trong một lớp học có 7 nam sinh và 4 nữ sinh ưu tú ( trong đó có nam sinh Cường và nữ sinh Hoa). Cần lập một ban cán sự lớp gồm 6 người với tiêu cầu có ít nhất 2 nữ, ngoài ra biết Cường và Hoa không thể làm việc cùng nhau trong ban cán sự.

**Bài 41:** Đội dự tuyển bóng bàn có 10 , 7 nam trong đó có danh thủ nam là Vũ Mạnh Cường và danh thủ nữ là Ngô Thị Thu Thủy. Người ta cần lập một đội tuyển bóng bàn quốc gia từ đội dự tuyển nói trên. Đội tuyển quốc gia có 3 nữ và 4 nam. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội tuyển quốc gia sao cho trong đội tuyển quốc gia có mặt chỉ một và một trong 2 danh thủ nói trên.

**Bài 42:** Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu, vừa khác số.

## 2.2 Một số bài toán đếm có lặp

Trong các bài toán đếm có lặp, mỗi phần tử cần đếm có thể xuất hiện nhiều lần. Để giải các bài toán đếm có lặp, người ta thường quy về các bài toán đếm không lặp và sử dụng thêm một số kiến thức khác.

### 2.2.1 Bài toán lặp số.

**Bài 43:**

**Cho tập hợp**  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

**Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số được lập từ A?**

Giải:

Vì các chữ số có thể trùng nhau nên mỗi số tương ứng với một phép biến đổi có lặp 5 phần tử bớt đi trường hợp có số 0 đứng đầu (bằng một phép biến đổi có lặp 4 phần tử từ 0;1;2;3;4;5;6;7)

Vậy số các số bằng  $8^5 - 8^4 = 28672$

**Bài 44:**

**Cho tập hợp**  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

**Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số sao cho mỗi số tạo thành chia hết cho 4.**

Giải:

Ta đã biết để một số có từ hai chữ số trở lên chia hết cho 4 thì điều kiện cần và đủ là hai số cuối của số đó phải chia hết cho 4.

Từ tập A có thể lập được các số sau chia hết cho 4:

12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64

Để chọn được các số thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta cần tiến hành qua các bước:

Bước 1 chọn hai số cuối. Theo trên có 9 cách chọn.

Bước 2 chọn số hàng trăm có 6 cách chọn.

Bước 3 chọn số hàng nghìn có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân số cách chọn là  $9.6.6=324$

Vậy có 324 số thỏa mãn bài toán.

**Bài 45:**

***Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho số 1 có mặt tối đa 5 lần, các số 2,3,4 có mặt tối đa 1 lần.***

Giải:

Vì các số 2, 3,4 có mặt tối đa 1 lần nên ta phải lập ra số có 6 chữ số từ  $\{1;2;3;4\}$  nên số 1 phải có mặt tối thiểu 3 lần.

Gọi  $A_3$  là tập hợp các số có 6 chữ số trong đó số 1 có mặt 3 lần. Khi đó mỗi số 2, 3, 4 có mặt đúng một lần.

$A_4$  là tập hợp các số có 6 chữ số trong đó số 1 có mặt 4 lần. Khi đó mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa một lần.

$A_5$  là tập hợp các số có 6 chữ số trong đó số 1 có mặt 5 lần. Khi đó mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa một lần.

Khi đó  $A_3, A_4, A_5$  đôi một rời nhau nên theo quy tắc cộng

$|A_3|+|A_4|+|A_5|$  là số các số có 6 chữ số thỏa mãn điều kiện đề bài.

Tính  $A_3$

Bước 1 chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để đặt 3 chữ số 1

Số cách chọn là  $n_1 = C_6^3 = 20$

Bước 2 ba vị trí còn lại đặt ba số 2, 3, 4

Số cách chọn  $n_2 = 3! = 6$

Vậy  $|A_3| = n_1.n_2 = 20.6 = 120$

Tính  $A_4$

Bước 1 chọn 4 vị trí trong 6 vị trí để đặt 4 chữ số 1.

Số cách chọn là  $n_1 = C_6^4 = 15$

Bước 2 hai vị trí còn lại đặt hai trong ba số 2, 3, 4.

Số cách chọn  $n_2 = A_3^2 = 6$

Vậy  $|A_4| = n_1.n_2 = 15.6 = 90$

Tính  $A_5$

Bước 1 chọn 5 vị trí trong 6 vị trí để đặt 5 chữ số 1.

Số cách chọn là  $n_1 = C_6^5 = 6$

Bước 2 một vị trí còn lại đặt một trong ba số 2, 3, 4.

Số cách chọn  $n_2 = A_3^1 = 3$

Vậy  $|A_5| = n_1.n_2 = 6.3 = 18$ .

Vậy số các số có 6 chữ số cần tìm là  $120+90+18=228$  số.

**Bài 46:**

**Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$**

***Cần lập ra các số tự nhiên có 7 chữ số thoả mãn đồng thời các tính chất sau:***

***a. Chữ số ở vị trí thứ 3 ( hàng vạn) là một số chẵn.***

***b. Đó là số không chia hết cho 5.***

***c. Các chữ số ở vị trí 4,5,6 ( hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục) đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu số như vậy?***

**Giải:**

Ta giải bài toán đếm có lặp trên bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1 chọn số ở vị trí thứ 3 . Có 5 cách chọn.

Bước 2 chọn số ở vị trí cuối cùng. Do số cần chọn không chia hết cho 5 nên có 8 cách chọn (loại 0 và 5).

Bước 3 chọn số ở vị trí thứ nhất. Có 9 cách chọn (loại 0).

Bước 4 chọn số ở vị trí thứ 2. Có 10 cách chọn.

Bước 5 chọn ba số ở vị trí 4, 5, 6. Đó là cách chọn 3 phần tử (kể cả thứ tự sắp xếp) trong 10 phần tử. Có  $A_{10}^3 = 720$  cách chọn.

Theo quy tắc nhân số các số thỏa mãn là:  $5.8.9.10.720=2592000$  số thỏa mãn bài toán.

**Bài 47:**

***Số điện thoại ở một thành phố có 6 chữ số***

***a. Có bao nhiêu số điện thoại mà các chữ số xếp theo thứ tự tăng dần.***

***b. Có bao nhiêu số điện thoại gồm 3 cặp 2 số giống nhau.***

***c. Có bao nhiêu số điện thoại mà số 6 có mặt đúng 2 lần, số 2 và số 5 mỗi số có mặt đúng một lần và hai số còn lại có tổng chia hết cho 3.***

Giải:

a. Ứng với một cách chọn ra 6 phần tử phân biệt từ tập  $A = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$  thì có đúng một cách sắp xếp 6 phần tử ấy theo thứ tự tăng dần. Vì vậy số dãy số có 6 chữ số sắp xếp theo thứ tự tăng dần chính bằng số cách chọn ra 6 phần tử phân biệt tại tập hợp A.

Do đó số các số điện thoại mà các chữ số xếp theo thứ tự tăng dần là  $C_{10}^6 = 210$ .

b. Số dãy số gồm 6 chữ số dạng ababab bằng số các dãy số có hai chữ số ab. Đây là phép đếm có lặp nên số dãy số ab là  $10.10=100$  số.

c. Bước 1 chọn hai vị trí để đặt hai con số 6. Số cách chọn là  $C_6^2 = 15$ .

Bước 2 chọn hai vị trí trong bốn vị trí còn lại để xếp hai số 2 và 5. Cách xếp này kể cả thứ tự nên số cách chọn là  $A_4^2 = 12$

Bước 3 để ý rằng  $A \setminus \{6; 2; 5\} = \{0; 1; 3; 4; 7; 8; 9\}$ . Tổng hai số trong tập nói trên chia hết cho 3 là các tổng sau

$$0+0; 0+3; 0+9; 1+8; 3+3; 3+9; 4+8; 7+8; 9+9$$

Với hai vị trí còn lại có 3 cách đặt hai số 0,0; 3,3; 9,9.

Với hai vị trí còn lại có 12 cách đặt các cặp số  $(0,3); (0,9); (1,8); (3,9); (4,8); (7,8)$ .

Vậy số cách chọn ở bước 3 là:  $3+12=15$ .

Theo quy tắc nhân số máy điện thoại có 6 chữ số thỏa mãn yêu cầu là  $15.12.15=2700$  số

### 2.2.2 Bài toán đếm sử dụng tổ hợp lặp.

**Bài 48:**

*Một ông bố có 15 chiếc kẹo định phân phát cho 6 đứa con của mình.*

*a. Có bao nhiêu cách phát.*

*b. Có bao nhiêu cách phát sao cho mỗi con nhận được ít nhất một chiếc.*

**Giải**

a. Chúng ta giả thiết những chiếc kẹo là giống hệt nhau nên hai cách phân phát được gọi là khác nhau nếu có một vài đứa con nhận được số kẹo khác nhau.

Khi đó mỗi cách phân phát tương ứng với một tổ hợp lặp gồm 15 phần tử của tập A gồm 6 đứa con.

Ta tìm được số cách phân phát bằng  $C_{20}^{15}$

b. Trước hết ông bố phát cho mỗi đứa con một chiếc kẹo, 9 chiếc còn lại ông bố lại phát cho 6 đứa con như ở phần a.

Ta có số cách phân phát là  $C_{14}^9$

**Bài 49:**

*Có bao nhiêu cách phân phát 7 quyển vở và 5 cái bút cho 3 học sinh?*

**Giải**

Vì những quyển vở được xem là giống hệt nhau và những cái bút cũng được xem là giống hệt nhau nên các cách phân phát được xem là khác nhau nếu có học sinh nhận được số vở khác nhau hoặc số bút khác nhau.

Mỗi cách phân phát 7 quyển vở ứng với một tổ hợp lặp 7 phần tử của tập A ứng với 3 em học sinh.

Do đó có  $C_9^7$  cách phân phát vở.

Mỗi cách phân phát 5 chiếc bút ứng với một tổ hợp lặp 5 phần tử của tập A ứng với 3 em học sinh.

Do đó có  $C_7^5$  cách phân phát bút.

Vậy số cách phân phát cuối cùng cho 3 học sinh là  $C_9^7 \cdot C_7^5 = 756$

**Bài 50:**

*Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử là ta chỉ quan tâm đến loại bánh mà ta không quan tâm đến hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.*

Giải:

Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử.

Ta có  $C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = 84$  cách chọn 6 hộp bánh bích quy.

**Bài 51:**

*Giả sử trong một đĩa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu giả sử rằng thứ tự các quả được chọn không quan trọng, và các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.*

Giải:

Mỗi phương án chọn 4 quả từ 3 loại quả nêu trên là một tổ hợp lặp chập 4 từ tập 3 phần tử {táo, cam, lê}

Ta có  $C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = 15$  cách chọn

**Bài 51:**

*Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$  có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?*

Giải

Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 15 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có  $x_1$  phần tử loại 1,  $x_2$  phần tử loại 2 và  $x_3$  phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 15 từ tập có 3 phần tử và bằng  $C_{3+15-1}^{15} = 136$ .

**Bài 52:**

**Phương trình**  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n, n \in \mathbb{N}$  **(1) có bao nhiêu nghiệm tự nhiên.**

Giải:

Nếu  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  là một nghiệm tự nhiên của phương trình (1) thì ta có thể cho ứng với nó một tổ hợp lặp chập  $n$  của  $m$  phần tử  $k_1, k_2, \dots, k_m$ .

Đảo lại nếu có một tổ hợp lặp chập  $n$  của  $m$  phần tử kiểu  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  thì ta tìm được nghiệm tự nhiên của phương trình đã cho bằng cách đặt  $x_i = k_i$ , với  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Vậy số nghiệm tự nhiên của (1) là  $\overline{C_m^n} = C_{n+m-1}^n$ .

**Bài 53:**

**Tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình:**  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$

**(với  $n \in \mathbb{N}$ ) (1) với  $x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \dots, x_m \geq a_m, 1 \leq a_i \leq n, \sum_{i=1}^m a_i \leq n$ .**

Giải:

Ta thấy một nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn những điều kiện đã cho ứng với một cách chọn mười một phần tử trong đó  $x_1$  phần tử loại một,  $x_2$  phần tử loại hai, ...,  $x_m$  phần tử loại  $m$ . Trước tiên ta chọn  $a_1$  phần tử loại một,  $a_2$  phần tử loại hai, ...,  $a_m$  phần tử loại  $m$ . Sau đó chọn thêm

$(n - \sum_{i=1}^m a_i)$  phần tử thuộc một trong  $m$  loại.

Như vậy có: 
$$\overline{C_m^{n-\sum_{i=1}^m a_i}} = C_{m+n-1-\sum_{i=1}^m a_i}^{n-\sum_{i=1}^m a_i} = C_{m+n-1-\sum_{i=1}^m a_i}^{m-1}.$$

**Bài 54:**

*Một xe đưa  $p$  công nhân từ xí nghiệp về nhà, xe dừng ở  $n$  trạm (tại mỗi trạm số công nhân xuống xe từ 0 đến  $p$  người). Hỏi có bao nhiêu khả năng khác nhau để tất cả các công nhân xuống xe ở  $n$  trạm.*

Giải:

Ta giả sử  $n$  trạm là  $A_1, A_2, \dots, A_n$  và số người xuống tại mỗi trạm là  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Mỗi cách giải phóng  $p$  người ở  $n$  trạm có thể biểu diễn bằng đơn thức  $A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n}$  với  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = p$ .

Số khả năng khác nhau để tất cả các công nhân xuống là tổ hợp có lặp chập  $p$  của  $n$  phần tử  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Có  $\overline{C_n^p} = C_{n+p-1}^p$  khả năng khác nhau để  $n$  công nhân xuống xe.

**Bài 55:**

*Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn  $10^n$  và có tổng các chữ số bằng  $p$  ( $p \leq 9$ ).*

Giải:

Mỗi số  $\overline{x_1 x_2 \dots x_n}$  có thể đồng nhất với một nghiệm của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ .

Ta có  $\overline{C_n^p} = C_{n+p-1}^p$  số.

### 2.2.3 Bài toán đếm sử dụng chỉnh hợp lặp.

#### Bài 56:

*Tính xác suất lấy liên tiếp được 3 quả cầu đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả cầu ra lại bỏ nó trở lại bình.*

Giải:

Ta thấy số cách lấy được 3 quả cầu đỏ là  $5^3$ , vì mỗi lần lấy ta có 5 quả cầu đỏ trong bình.

Số cách lấy 3 quả cầu bất kì trong bình là  $12^3$ , vì mỗi lần lấy cầu trong bình đều có 12 quả.

Như vậy xác suất cần tìm là  $\frac{5^3}{12^3}$

#### Bài 57:

*Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài n.*

Giải:

Theo quy tắc nhân, vì có 26 chữ cái và vì mỗi chữ có thể được dùng lại nên chúng ta có  $26^n$  xâu với độ dài n.

### 2.2.4 Bài toán đếm sử dụng hoán vị lặp.

#### Bài 58:

*Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?*

Giải

Vì một số chữ cái của từ SUCCESS là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta

nhận thấy có  $C_7^3$  cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có  $C_4^2$  cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ C, còn lại 2 chỗ trống. Có thể đặt chữ U bằng  $C_2^1$  cách và  $C_1^1$  cách đặt chữ E vào xâu. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là:

$$C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{7!4!2!1!}{3!4!2!2!1!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

### **Bài 59:**

*Có bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó số 1 lặp lại 3 lần, số 2 lặp lại 2 lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần được lập từ tập  $A=\{0, 1, \dots, 9\}$ .*

Giải:

Tất cả các số có 8 chữ số trong đó số 1 lặp lại 3 lần, số 2 lặp lại 2 lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần được lập từ (a,b,c,1,1,1,2,2) là

$$\frac{8!}{1!1!1!3!2!} = 3360 \text{ số.}$$

Chọn 3 số a, b, c từ  $A \setminus \{1, 2\}$  có  $C_8^3$  cách.

Có  $C_8^3 \cdot 3360 = 188160$  số kể cả số 0 đứng đầu.

Ta xét trường hợp số 0 đứng đầu:

Chọn 2 số trong  $A \setminus \{0, 1, 2\}$  có  $C_7^2$  cách.

Trong trường hợp số 0 đứng đầu có  $C_7^2 \frac{7!}{1!1!3!2!} = 8820$  số.

Có  $188160 - 8820 = 179340$  số.

### 2.2.5 Bài toán phân bố các đồ vật vào trong hộp

Một số bài toán đếm có thể giải bằng cách liệt kê những cách đặt các đối tượng khác nhau vào trong những hộp khác nhau. Tùy vào từng bài cụ thể mà chúng ta đặt các đối tượng vào những cái hộp.

#### Định lý 2.2.5

*Số cách phân chia  $n$  đồ vật khác nhau vào trong  $k$  hộp khác nhau sao cho có  $n_i$  vật được đặt vào hộp thứ  $i$ , với  $i = 1, 2, \dots, k$  bằng  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ .*

#### Bài 60:

*Có bao nhiêu cách chia 6 người vào mỗi toa tàu hạng 1, hạng 2, hạng 3, hạng 4 trong tổng số 48 người đã mua vé.*

Giải:

Trước tiên chúng ta thấy toa tàu hạng 1 có thể nhận được 6 người lên bằng  $C_{48}^6$  cách, còn lại 42 người.

Toa tàu hạng 2 có thể nhận được 6 người lên bằng  $C_{42}^6$  cách, còn lại 36 người.

Toa tàu hạng 3 có thể nhận được 6 người lên bằng  $C_{36}^6$  cách, còn lại 30 người.

Cuối cùng toa tàu hạng 4 có thể nhận được 6 người lên bằng  $C_{30}^6$  cách.

Vì vậy tổng cộng có  $C_{48}^6 \cdot C_{42}^6 \cdot C_{36}^6 \cdot C_{30}^6 = \frac{48!}{6!6!6!6!}$  cách chia.

#### Bài 61:

*Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?*

Giải:

Trước tiên chúng ta thấy người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng  $C_{52}^5$  cách

Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng  $C_{47}^5$  vì chỉ còn 47 quân.

Người thứ ba có thể được chia 5 quân bài bằng  $C_{42}^5$  vì chỉ còn 42 quân.

Cuối cùng người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng  $C_{37}^5$  cách.

Vì vậy tổng cộng có  $C_{52}^5 \cdot C_{47}^5 \cdot C_{42}^5 \cdot C_{37}^5 = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$  cách chia.

### 2.2.6 Bài toán tương tự

**Bài 62:** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số sao cho mỗi số tạo thành chia hết cho 8.

**Bài 63:** Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho số 3 có mặt tối đa 3 lần, số 2 có mặt tối đa 2 lần, các số còn lại có mặt tối đa 1 lần.

**Bài 64:** Một bàn cờ hình chữ nhật chứa  $n$  cột và  $p$  dòng.

a. Có bao nhiêu cách đặt  $n$  vật giống nhau vào  $n$  ô của bàn cờ sao cho không có hai vật nào ở trong cùng một cột.

b. Cũng câu hỏi trên trong trường hợp  $n$  vật là khác nhau.

**Bài 65:** Tìm số cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 hộp khác nhau sao cho hộp 1 có ít nhất 5 bi, biết rằng hộp 2 và hộp 3 không chứa quá 6 bi.

**Bài 66:** Có bao nhiêu cách phân chia 10 người thành 3 nhóm trong đó nhóm 1 có 2 người, nhóm 2 có 3 người, nhóm 3 có 5 người.

**Bài 67:** Có bao nhiêu cách phân bố 6 đồ vật khác nhau cho 6 người (không phân biệt thứ tự các đồ vật mà mỗi người nhận được) sao cho các điều kiện sau thỏa mãn: Người thứ nhất nhận được 1 đồ vật, người thứ hai nhận được 2 đồ vật, người thứ ba nhận được 3 đồ vật, người thứ tư nhận được 1 đồ vật. Hai người còn lại không nhận được đồ vật nào.

**Bài 68:** Có bao nhiêu số có 6 chữ số trong đó số 1 xuất hiện 2 lần, và chữ số hàng nghìn là số chẵn lập từ  $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ .

**Bài 69:** Có bao nhiêu số tạo ra từ tất cả các chữ số của số 1234321 sao cho các chữ số lẻ luôn chiếm hàng lẻ.

**Bài 70:** (Đề thi đại học 2007) Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm  $(x_1, x_2, x_3)$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$ , với  $x_1 > 2, x_2 < 4$ .

**Bài 71:** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \text{ thỏa mãn điều kiện } x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4.$$

## CHƯƠNG 3 - MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP SỬ DỤNG PHÉP ĐẾM NÂNG CAO

Chương này trình bày một số bài toán sử dụng các phương pháp đếm nâng cao thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi quốc gia, thi quốc tế.

### 3.1 Một số bài toán sử dụng nguyên lý bù trừ.

#### 3.1.1 Nguyên lý bù trừ.

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho  $A_1, A_2$  là hai tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Từ đó với ba tập hợp hữu hạn  $A_1, A_2, A_3$ , ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Và bằng quy nạp, với  $k$  tập hữu hạn  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{k-1} N_k,$$

trong đó  $N_m$  ( $1 \leq m \leq k$ ) là tổng phần tử của tất cả các giao  $m$  tập lấy từ  $k$  tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$$

Bây giờ ta đồng nhất tập  $A_m$  ( $1 \leq m \leq k$ ) với tính chất  $A_m$  cho trên tập vũ trụ hữu hạn  $U$  nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của  $U$  sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất  $A_m$  nào. Gọi  $\overline{N}$  là số cần đếm,  $N$  là số phần tử của  $U$ . Ta có:

$$\overline{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^k N_k,$$

trong đó  $N_m$  là tổng các phần tử của  $U$  thỏa mãn  $m$  tính chất lấy từ  $k$  tính chất đã cho. Công thức này được gọi là **nguyên lý bù trừ**. Nó cho phép tính  $\overline{N}$  qua các  $N_m$  trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.

### 3.1.2 Các bài toán giải bằng phương pháp bù trừ.

**Bài 72:**

*Một chuyến bay có 67 hành khách. Trong đó có 47 người sử dụng tốt Anh, 35 người sử dụng tốt tiếng Đức, 20 người sử dụng tốt tiếng Pháp. Hơn nữa có 23 người sử dụng tốt hai thứ tiếng Anh và Đức, 12 người sử dụng tốt hai tiếng Anh và Pháp, 11 người sử dụng tốt hai tiếng Đức và Pháp. Và có 5 người sử dụng tốt cả ba thứ tiếng. Tìm số hành khách không sử dụng được bất kì ngoại ngữ nào?*

Giải

Gọi A, B, C lần lượt là các hành khách sử dụng tốt ngoại ngữ là tiếng Anh, tiếng Đức, tiếng Pháp.

Số các hành khách biết ít nhất một ngoại ngữ là:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \\ &= 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61 \end{aligned}$$

Vậy số hành khách không sử dụng được bất kì ngoại ngữ nào là  $67 - 61 = 6$

**Bài 73:**

*Giáo viên chủ nhiệm của một lớp tiểu học yêu cầu lớp trưởng báo cáo thống kê theo mẫu và đọc trước lớp. Bản báo cáo như sau:*

*Lớp có 45 học sinh, 30 học sinh nam.*

*Lớp có 30 học sinh đạt điểm tốt, trong đó có 16 học sinh nam.*

*Có 28 học sinh chơi thể thao, trong số này có 18 học sinh nam và 17 học sinh đạt điểm tốt.*

*Có 15 em đạt điểm tốt và tham gia chơi thể thao.*

*Hãy chỉ ra rằng lớp trưởng đã thống kê sai.*

Giải:

Đặt

$R$  là tập hợp học sinh cả lớp.

$A$  là tập hợp học sinh nam.

$B$  là tập hợp học sinh có điểm tốt.

$C$  là tập hợp học sinh chơi thể thao.

Khi đó số học sinh nữ, không chơi thể thao, có kết quả không tốt bằng

$$\begin{aligned}n &= |R| - |A \cup B \cup C| \\&= |R| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C| \\&= 45 - 30 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 \\&= -7\end{aligned}$$

Kết quả trên là vô lí.

Vậy lớp trưởng đó báo cáo sai.

**Bài 74:**

***Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào.***

Giải:

Có 8! Cách sắp xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế sao cho không có con nào ăn con nào. Ta cần đếm số cách xếp không hợp lệ, tức là số cách xếp có ít nhất một con xe nằm trên đường chéo.

Gọi  $A_i$  là tập hợp các cách xếp có quân xe nằm ở ô  $(i, j)$ . ta cần tìm  $|A_1 \cup \dots \cup A_8|$ . Nhưng dễ dàng thấy rằng  $|A_i| = 7!, |A_i \cap A_j| = 6!, \dots, |A_1 \cap \dots \cap A_8| = 1$  nên theo nguyên lý bù trừ ta có

$$|A_1 \cup \dots \cup A_8| = C_8^1 \cdot 7! - C_8^2 \cdot 6! + C_8^3 \cdot 5! - \dots - C_8^8 \cdot 0! = 8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \dots - \frac{8!}{8!}.$$

Như vậy số cách sắp xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào bằng :

$$8! - \left( 8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \dots - \frac{8!}{8!} \right) = 8! \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \right)$$

**Bài 75:**

***Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.***

Giải

Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả n! cách bỏ thư. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và  $A_m$  là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^n N_n,$$

trong đó  $N_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ. Nhận xét rằng,  $N_m$  là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có  $(n-m)!$  cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được:

$$N_m = C_n^m (n-m)! = \frac{n!}{m!} \quad \text{và} \quad \overline{N} = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right), \text{ trong đó}$$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m đối

tượng trong n đối tượng được cho). Từ đó xác suất cần tìm là:  $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$

$- \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ . Một điều lý thú là xác suất này dần đến  $e^{-1}$  (nghĩa là còn >

$\frac{1}{3}$ ) khi n khá lớn.

Số  $\overline{N}$  trong bài toán này được gọi là số mất thứ tự và được ký hiệu là  $D_n$ . Dưới đây là một vài giá trị của  $D_n$ , cho ta thấy  $D_n$  tăng nhanh như thế nào so với n:

|   |   |   |   |    |     |      |      |       |         |         |
|---|---|---|---|----|-----|------|------|-------|---------|---------|
| n | 2 | 3 | 4 | 5  | 6   | 7    | 8    | 9     | 10      | 11      |
| D | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 | 1483 | 13349 | 1334961 | 1468457 |
| n |   |   |   |    |     |      | 3    | 6     |         | 0       |

**Bài 76:**

**Trong tập  $S = \{1, 2, \dots, 280\}$  có bao nhiêu số không chia hết cho 2, 3, 5, 7.**

**Giải:**

Ta đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7.

Kí hiệu  $A_1 = \{k \in S \mid k:2\}$ ,  $A_2 = \{k \in S \mid k:3\}$ ,  $A_3 = \{k \in S \mid k:5\}$ ,  $A_4 = \{k \in S \mid k:7\}$ .

Khi đó  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$  là tập hợp các số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7

$$\text{Ta có } |A_1| = \left\lfloor \frac{280}{2} \right\rfloor = 140; |A_2| = \left\lfloor \frac{280}{3} \right\rfloor = 93; |A_3| = \left\lfloor \frac{280}{5} \right\rfloor = 56; \left\lfloor \frac{280}{7} \right\rfloor = 40;$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{280}{2.3} \right\rfloor = 46; |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{280}{2.5} \right\rfloor = 28; |A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{2.7} \right\rfloor = 20;$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{280}{15} \right\rfloor = 18; |A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{21} \right\rfloor = 13; |A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{35} \right\rfloor = 8;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{280}{30} \right\rfloor = 9; |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{42} \right\rfloor = 6;$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{70} \right\rfloor = 4; |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{105} \right\rfloor = 2;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{280}{210} \right\rfloor = 1.$$

Do đó theo nguyên lý bù trừ ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216.$$

Vậy trong tập S có  $280 - 216 = 64$  số không chia hết cho 2, 3, 5, 7.

**Bài 77:**

*Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau không vượt quá 1000 mà là bội của 10, 15, 35 hoặc 55.*

Giải

Đặt

$$S_1 = \{1 \leq n \leq 1000 : 10 / n\}$$

$$S_2 = \{1 \leq n \leq 1000 : 15 / n\}$$

$$S_3 = \{1 \leq n \leq 1000 : 35 / n\}$$

$$S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 55 / n\}$$

Khi đó ta có

$$|S_1| = \left[ \frac{1000}{10} \right] = 100$$

$$|S_2| = \left[ \frac{1000}{15} \right] = 66$$

$$|S_3| = \left[ \frac{1000}{35} \right] = 28$$

$$|S_4| = \left[ \frac{1000}{55} \right] = 18$$

Mặt khác

$$S_1 \cap S_2 = \{1 \leq n \leq 1000 : 10 / n, 15 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 30 / n\}$$

$$S_1 \cap S_3 = \{1 \leq n \leq 1000 : 10 / n, 35 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 70 / n\}$$

$$S_1 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 10 / n, 55 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 110 / n\}$$

$$S_2 \cap S_3 = \{1 \leq n \leq 1000 : 15 / n, 35 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 105 / n\}$$

$$S_2 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 15 / n, 55 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 165 / n\}$$

$$S_3 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 35 / n, 55 / n\} = \{1 \leq n \leq 1000 : 385 / n\}$$

Vì vậy

$$|S_1 \cap S_2| = \left[ \frac{1000}{30} \right] = 33$$

$$|S_1 \cap S_3| = \left[ \frac{1000}{70} \right] = 14$$

$$|S_1 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{110} \right] = 9$$

$$|S_2 \cap S_3| = \left[ \frac{1000}{105} \right] = 9$$

$$|S_2 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{165} \right] = 6$$

$$|S_3 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{385} \right] = 2$$

Lại có

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{1 \leq n \leq 1000 : 210 / n\}$$

$$S_1 \cap S_2 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 330 / n\}$$

$$S_1 \cap S_3 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 770 / n\}$$

$$S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 1155 / n\}$$

Vì vậy

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = \left[ \frac{1000}{210} \right] = 4$$

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{330} \right] = 3$$

$$|S_1 \cap S_3 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{770} \right] = 1$$

$$|S_2 \cap S_3 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{1155} \right] = 0$$

Và ta có

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{1 \leq n \leq 1000 : 2310 / n\}$$

Vì vậy

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = \left[ \frac{1000}{2310} \right] = 0$$

Cuối cùng ta áp dụng nguyên lí bù trừ

$$\begin{aligned}
|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= \sum_{i=1}^4 |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |S_i \cap S_j \cap S_k| - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| \\
&= (100 + 66 + 28 + 18) - (33 + 14 + 9 + 9 + 6 + 2) + (4 + 3 + 1 + 0) - 0 \quad \mathbf{3.} \\
&= 147
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Các bài toán tương tự

**Bài 78:** Tìm số các số nguyên từ 1 đến 10000 mà không chia hết cho 4, 6, 7, và 10.

**Bài 79:** Tìm số lượng các số nguyên dương từ 1 đến 10000 mà không phải là một bình phương hoặc lập phương của số nguyên.

**Bài 80:** Một số được gọi là “không chính phương” nếu nó không chia hết cho bình phương của một số nguyên dương bất kì lớn hơn 1.

Tìm số lượng các số nguyên “không chính phương” nhỏ hơn 200.

**Bài 81:** Có bao nhiêu chuỗi số có 6 chữ số mà không chứa “123” hoặc “456”.

**Bài 82:** Xác định tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

Trong đó  $x_1, x_2, x_3, x_4$  không vượt quá 8

**Bài 83:** Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ thua 420 và nguyên tố cùng nhau với 420.

## 3.2 Một số bài toán giải bằng phương pháp song ánh

### 3.2.1 Phương pháp song ánh

**Định nghĩa** (*Giải tích toán học rời rạc*).

Cho ánh xạ  $f: A \rightarrow B$

Ánh xạ  $f$  được gọi là một đơn ánh nếu với hai phần tử bất kì  $a_1, a_2 \in A$  mà  $a_1 \neq a_2$  thì  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , tức là  $f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ .

Ảnh xạ  $f$  được gọi là một toàn ánh nếu với mọi  $b \in B$  đều tồn tại  $a \in A$  để cho  $f(a) = b$ .

Ảnh xạ  $f$  được gọi là một song ánh (tương ứng 1 – 1) nếu với mọi  $b \in B$  đều tồn tại duy nhất  $a \in A$  để cho  $f(a) = b$ . Nói cách khác  $f$  là song ánh khi và chỉ khi nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

### **Định lý 3.2.1**

*Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hữu hạn. Khi đó:*

*Nếu có một đơn ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| \leq |B|$*

*Nếu có một toàn ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| \geq |B|$*

*Nếu có một song ánh  $f : A \rightarrow B$  thì  $|A| = |B|$*

Phương pháp song ánh dựa vào một ý tưởng rất đơn giản: Nếu tồn tại một song ánh từ  $A$  vào  $B$  thì  $|A| = |B|$ . Do đó muốn chứng minh hai phần tử có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp  $A$  bằng cách xây dựng một song ánh từ  $A$  vào một tập hợp  $B$  mà ta đã biết cách đếm số phần tử. Bởi  $B$  có cùng số phần tử với  $A$  nhưng có cấu trúc được mô tả khác  $A$  nên ta có thể đếm được số phần tử của  $B$  dễ dàng hơn việc đếm số phần tử của  $A$ .

### **3.2.2 Các bài toán tổ hợp giải bằng phương pháp song ánh**

**Bài 84: (Vô địch Liên Xô).**

*Có một nhóm người mà trong đó mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh số người quen của mỗi người là như nhau.*

Giải:

Nếu  $a$  quen  $b$  và tập các người quen của  $a$  và  $b$  (không kể  $a, b$ ) lần lượt là  $A$  và  $B$ . Mỗi người  $a'$  thuộc  $A$  sẽ quen với một người duy nhất thuộc  $B$  (do  $a'$  và  $b$  không quen nhau, hơn nữa họ đã có một người quen chung là

a). Tương tự mỗi người thuộc B cũng quen với duy nhất một người thuộc A. Vậy tồn tại một song ánh đi từ A tới B, tức a và b có số người quen bằng nhau.

Nếu a không quen b thì tồn tại c quen cả a và b. Do đó số người quen của a và b bằng nhau do cùng bằng số người quen của c (suy ra từ trên)

### **Bài 85:**

**Xét tập  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Đối với mỗi tập con không trống của A chúng ta xác định duy nhất một tổng đan dấu theo quy tắc sau:**

**Xếp các số của tập con theo thứ tự tăng dần và gán luân phiên các dấu cộng, trừ cho các số liên tiếp theo thứ tự của tập con sao cho số lớn nhất có dấu cộng. Hãy tìm tổng của tất cả các tổng đan dấu.**

Giải:

Quy ước tổng đan dấu của tập trống có giá trị 0. Mỗi tập con của A được chia làm hai loại:

Loại 1: Có chứa n.

Loại 2: Không chứa n.

Các tập con loại 1 và loại 2 có số phần tử bằng nhau vì tồn tại một song ánh giữa chúng như sau:

$$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_i)}_{\text{loại 1}} \leftrightarrow \underbrace{(n, a_1, a_2, \dots, a_i)}_{\text{loại 2}}$$

Giả sử  $a_1 > a_2 > \dots > a_i$ .

Khi đó tổng đan dấu của một tập con trên bằng

$$(a_1 - a_2 + a_3 - \dots) + (n - a_1 + a_2 - a_3 + \dots) = n$$

Có  $2^n$  tập con của A suy ra có  $2^{n-1}$  cặp tập hợp con loại 1 và loại 2 theo định nghĩa trên.

Vậy tổng của tất cả các tổng đan dấu bằng  $S = 2^{n-1} \cdot n$

### 3.3 Một số bài toán giải bằng phương pháp hàm sinh

Hàm sinh có thể được áp dụng trong các bài toán đếm. Nói riêng các bài toán chọn các phần tử từ một tập hợp thông thường sẽ dẫn đến các hàm sinh. Khi hàm sinh được áp dụng theo cách này, hệ số của  $x^n$  chính là số cách chọn  $n$  phần tử, tức là với  $a_n$  là hệ số của  $x^n$  với mọi  $n$  lớn hơn hoặc bằng 2 thì hàm sinh của số cách chọn sẽ là  $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

#### 3.3.1 Bài toán chọn các phần tử riêng biệt.

**Bài 86:**

*Có bao nhiêu cách chọn  $n$  phần tử phân biệt từ tập hợp  $k$  phần tử.*

Giải:

Bài toán này có thể giải quyết dễ dàng bằng công thức tổ hợp.

Nhưng lần này chúng ta sẽ sử dụng hàm sinh. Cụ thể

Đầu tiên ta xét tập hợp có một phần tử  $\{a_1\}$ . Ta có:

1 cách chọn 0 phần tử.

1 cách chọn 1 phần tử.

0 cách chọn 2 phần tử trở lên.

Suy ra hàm sinh cho số cách chọn  $n$  phần tử từ tập  $\{a_1\}$  là  $1+x$ .

Tương tự như vậy, hàm sinh cho số cách chọn  $n$  phần tử từ tập  $\{a_i\} (1 \leq i \leq k)$  cũng là  $1+x$  (không phụ thuộc vào sự khác biệt giữa các  $\{a_i\}$ ).

Tiếp tục xét tập 2 phần tử  $\{a_1, a_2\}$  ta có

1 cách chọn 0 phần tử.

2 cách chọn 1 phần tử.

1 cách chọn 2 phần tử.

0 cách chọn 3 phần tử trở lên.

Suy ra hàm sinh cho số cách chọn  $n$  phần tử từ tập  $\{a_1, a_2\}$  là

$$1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2 = (1 + x)(1 + x)$$

Tiếp tục áp dụng quy tắc này ta sẽ được hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ tập  $k$  phần tử.

$$(1 + x)(1 + x) \dots (1 + x) = (1 + x)^k$$

Ta có  $C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = (1 + x)^k$ .

Như vậy hệ số của  $x^n$  trong  $(1 + x)^k$  là  $C_k^n$  và bằng số cách chọn  $n$  phần tử phân biệt từ tập  $k$  phần tử.

### 3.3.2 Bài toán chọn các phần tử có lặp

Để hiểu cách giải bài toán này trước tiên ta phải mở rộng, ta có quy tắc xoắn

Gọi  $A(x)$  là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp  $A$  và  $B(x)$  là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp  $B$ . Nếu  $A$  và  $B$  rời nhau thì hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập  $A \cup B$  là  $A(x)B(x)$

Quy tắc này đúng cho cả trường hợp chọn các phần tử phân biệt, cũng đúng cho trường hợp chọn nhiều lần cùng một phần tử.

**Bài 87:**

*Có bao nhiêu cách chọn  $k$  phần tử từ tập hợp có  $n$  phần tử, trong đó cho phép một phần tử có thể được chọn nhiều lần.*

Giải:

Chia tập  $n$  phần tử thành hợp của  $n$  tập  $A_i, 1 \leq i \leq n$ ; mỗi tập gồm duy nhất một phần tử thuộc tập  $n$  phần tử.

Với mỗi tập  $A_i$  ta có:

1 cách chọn 0 phần tử.

1 cách chọn 1 phần tử.

1 cách chọn 2 phần tử.

Suy ra hàm sinh của cách chọn có lặp từ tập  $A_i$  là

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Áp dụng quy tắc xoắn suy ra hàm sinh của cách chọn có lặp các phần tử từ tập hợp  $n$  phần tử sẽ là :

$$\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x} \dots \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Bây giờ ta cần tính hệ số của  $x^k$  trong  $\frac{1}{(1-x)^n}$

Áp dụng khai triển Taylor

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

Suy ra hệ số của  $x^k$  là  $\frac{f^{(k)}}{k!} = C_{n+k-1}^k$ .

Như vậy số cách chọn  $k$  phần tử có lặp từ tập hợp có  $n$  phần tử là  $C_{n+k-1}^k$ .

**Bài 88 :**

*Có 5 loại kẹo : kẹo sữa, kẹo chanh, kẹo socola, kẹo dâu và kẹo cà phê. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 12 cái kẹo từ 5 loại kẹo này.*

Giải :

Theo bài tập trên số cách chọn 12 cái kẹo từ 5 loại kẹo này là  $C_{16}^{12}$ .

**Bài 89 :**

*Bài toán chọn quả*

*Có bao nhiêu cách sắp xếp một giỏ  $n$  trái cây thỏa mãn các điều kiện sau :*

*Số táo phải chẵn.*

*Số chuối phải chia hết cho 5.*

*Chỉ có thể có nhiều nhất 4 quả cam.*

*Chỉ có thể có nhiều nhất một quả đào.*

Bài toán có những điều kiện ràng buộc rất phức tạp và ta có cảm giác như việc giải bài toán là vô vọng. Nhưng hàm sinh lại cho ta cách giải nhanh gọn.

Giải:

Trước tiên ta đi tìm hàm sinh cho từng loại quả

Chọn táo

1 cách chọn 0 quả táo.

0 cách chọn 1 quả táo.

1 cách chọn 2 quả táo.

0 cách chọn 3 quả táo.

.....

Như thế ta có hàm sinh  $A(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$ .

Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn chuối là :

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

Hàm sinh cho cách chọn cam và đào hơi khác một chút.

Chọn cam

1 cách chọn 0 quả cam.

1 cách chọn 1 quả cam.

1 cách chọn 2 quả cam.

1 cách chọn 3 quả cam.

1 cách chọn 4 quả cam.

0 cách chọn 5 quả cam.

Như thế ta có hàm sinh  $C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$ .

Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn đào là :

$$D(x) = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

Áp dụng Quy tắc xoắn suy ra hàm sinh cho cách chọn từ cả 4 loại quả là:

$$A(x)B(x)C(x)D(x) = \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^5} \frac{1-x^5}{1-x} \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Như vậy cách xếp giỏ trái cây gồm  $n$  trái đơn giản là  $n+1$  cách.

### Bài 90:

*Tìm hàm sinh để xác định số cách chia 10 quả bóng giống nhau cho 4 đứa trẻ để mỗi đứa nhận ít nhất hai quả.*

Giải:

Để giải bài toán ta tìm hàm sinh cho số cách chia bóng cho một đứa trẻ.

Giả thiết cho mỗi đứa nhận ít nhất hai quả bóng nên ta suy ra

0 cách đứa trẻ nhận 0 quả.

0 cách đứa trẻ nhận 1 quả.

1 cách đứa trẻ nhận 2 quả.

1 cách đứa trẻ nhận 3 quả.

Vậy hàm sinh cho cách chia đó là  $x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho cách chia bóng cho 4 đứa trẻ là

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4 \\ &= x^8 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^4 \\ &= \frac{x^8}{(1-x)^4} \\ &= x^8 \sum_{n \geq 0} C_{4+n-1}^n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} C_{3+n}^n x^{n+8} \end{aligned}$$

Suy ra số cách chia 10 quả bóng chính là hệ số của  $x^{10}$  và bằng  $C_5^2 = 10$  cách.

### 3.4 Một số bài toán giải bằng phương pháp hệ thức truy hồi.

#### 3.4.1 Khái niệm mở đầu và mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Đôi khi ta rất khó định nghĩa một đối tượng một cách tường minh. Nhưng có thể dễ dàng định nghĩa đối tượng này qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là đệ quy. Định nghĩa đệ quy của một dãy số định rõ giá trị của một hay nhiều hơn các số hạng đầu tiên và quy tắc xác định các số hạng tiếp theo từ các số hạng đi trước. Định nghĩa đệ quy có thể dùng để giải các bài toán đếm. Khi đó quy tắc tìm các số hạng từ các số hạng đi trước được gọi là các hệ thức truy hồi.

**Định nghĩa :** Hệ thức truy hồi (hay công thức truy hồi) đối với dãy số  $\{a_n\}$  là công thức biểu diễn  $a_n$  qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy. Dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

#### 3.4.2 Các bài toán tổ hợp giải bằng hệ thức truy hồi

**Bài 91 (Lãi kép):**

*Giả sử một người gửi 10.000 đô la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?*

Giải:

Gọi  $P_n$  là tổng số tiền có trong tài khoản sau  $n$  năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau  $n$  năm bằng số có sau  $n - 1$  năm cộng lãi suất của năm thứ  $n$ , nên ta thấy dãy  $\{P_n\}$  thỏa mãn hệ thức truy hồi sau:

$$P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = (1,11)P_{n-1}$$

với điều kiện đầu  $P_0 = 10.000$  đô la. Từ đó suy ra  $P_n = (1,11)^n \cdot 10.000$ . Thay  $n = 30$  cho ta  $P_{30} = 228922,97$  đô la.

**Bài 92.**

***Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài  $n$  và không có hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu nhị phân như thế có độ dài bằng 5?***

Giải:

Gọi  $a_n$  là số các xâu nhị phân độ dài  $n$  và không có hai số 0 liên tiếp. Để nhận được hệ thức truy hồi cho  $\{a_n\}$ , ta thấy rằng theo quy tắc cộng, số các xâu nhị phân độ dài  $n$  và không có hai số 0 liên tiếp bằng số các xâu nhị phân như thế kết thúc bằng số 1 cộng với số các xâu như thế kết thúc bằng số 0. Giả sử  $n \geq 3$ .

Các xâu nhị phân độ dài  $n$ , không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bằng số 1 chính là xâu nhị phân như thế, độ dài  $n - 1$  và thêm số 1 vào cuối của chúng. Vậy chúng có tất cả là  $a_{n-1}$ . Các xâu nhị phân độ dài  $n$ , không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 0, cần phải có bit thứ  $n - 1$  bằng 1, nếu không thì chúng có hai số 0 ở hai bit cuối cùng. Trong trường hợp này chúng có tất cả là  $a_{n-2}$ . Cuối cùng ta có được:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{với } n \geq 3.$$

Điều kiện đầu là  $a_1 = 2$  và  $a_2 = 3$ . Khi đó  $a_5 = a_4 + a_3 = a_3 + a_2 + a_3 = 2(a_2 + a_1) + a_2 = 13$ .

### **Bài 93. (Bài toán tháp Hà Nội)**

***Có 3 cọc 1,2,3. Ở cọc 1 có  $n$  đĩa xếp chồng lên nhau sao cho đĩa nằm dưới lớn hơn đĩa nằm trên. Hãy chuyển tất cả các đĩa từ cọc 1 sang cọc 3 có thể dùng cọc 2 làm cọc trung gian với điều kiện mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa từ cọc này sang cọc khác và luôn đảm bảo đĩa nằm dưới lớn hơn đĩa nằm trên.***

***Bài toán đặt ra là: Tìm số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để giải xong bài toán trên.***

Giải:

Phương pháp di chuyển như sau: Gọi  $S_n$  là số lần di chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện.

Chuyển  $n - 1$  đĩa từ cọc 1 sang cọc 2 (lấy cọc 3 làm trung gian) ta có  $S_{n-1}$  phép chuyển.

Chuyển đĩa lớn nhất từ cọc 1 sang cọc 3. Ta có 1 phép chuyển.

Chuyển  $n - 1$  đĩa từ cọc 2 sang cọc 3 (lấy cọc 1 làm trung gian) ta có  $S_{n-1}$  phép chuyển.

Do vậy để chuyển  $n$  chiếc đĩa từ cọc 1 sang cọc 3, ta cần ít nhất  $S_{n-1} + 1 + S_{n-1} = 2S_{n-1} + 1$  phép chuyển. Vậy ta có công thức truy hồi của dãy số

$$S_0, S_1, S_2, \dots \text{ là } \begin{cases} S_n = 2S_{n-1} + 1 \\ S_1 = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_{n-1} + 1 = 2(2S_{n-2} + 1) = 2^2(2S_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 S_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \dots = 2^{n-1} S_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 = 2 \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} + 1 = 2^n - 1 \end{aligned}$$

#### **Bài 94. (Olympic Bungari, 1995)**

**Cho số nguyên  $n \geq 2$ . Hãy tìm số các hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  của  $1, 2, \dots, n$  sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  thỏa mãn  $a_i > a_{i+1}$ .**

**Giải:**

Gọi  $S_n$  là số các hoán vị thỏa mãn điều kiện bài toán. Để ý rằng số các hoán vị mà  $a_n = n$  là  $S_{n-1}$ . (Bởi vì số các hoán vị  $S_{n-1}$  là số các hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  của  $1, 2, \dots, n-1$  sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số  $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  thỏa mãn  $a_i > a_{i+1}$ ). Còn số các hoán vị  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  thỏa mãn điều kiện bài toán với  $a_i = n (1 \leq i \leq n-1)$  là  $C_{n-1}^{i-1}$ .

Do đó  $S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1$ . (Do  $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = 2^{n-1}$ ).

Hiện nhiên  $S_2 = 1$ . Tương tự bài trên ta có  $S_n = 2^n - n - 1$

### 3.4.3 Các bài toán tương tự

**Bài 95:** Bạn A viết 6 lá thư cho 6 người khác nhau và đã chuẩn bị sẵn 6 phong bì ghi sẵn địa chỉ của họ. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ thư vào phong bì sao cho không có một bức thư nào gửi đúng đến người có địa chỉ được ghi trên phong bì.

**Bài 96:** Xét đa giác đều 12 đỉnh  $A_1; A_2; \dots; A_{12}$  với tâm O. Chúng ta tô màu các miền đa giác  $OA_iA_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ( $A_{13} = A_1$ ) bằng 4 màu đỏ, xanh da trời, xanh thẫm, vàng sao cho hai miền đa giác kề nhau được tô bởi hai màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

### 3.5 Bài toán giải bằng nguyên lý cực hạn - khả năng xảy ra nhiều nhất, ít nhất.

**Bài 97.**

*Cho 1985 tập hợp, mỗi tập hợp trong số đó gồm 45 phần tử, hợp của hai tập hợp bất kì gồm 89 phần tử. Có bao nhiêu phần tử chứa trong tất cả 1985 tập hợp đó.*

Giải:

Ta sẽ chứng minh rằng có tồn tại số  $a \in A_1$  mà a thuộc ít nhất 45 tập hợp khác  $A_2, A_3, \dots, A_{46}$ .

Giả sử ngược lại: Mọi phần tử của A đều thuộc nhiều nhất 44 tập hợp nên các phần tử của A thuộc nhiều nhất  $44 \cdot 45 + 1 = 1981$  tập hợp

Vì hợp của hai tập hợp bất kì có số phần tử là 89 nên giao của hai tập hợp bất kì là một phần tử.

Suy ra A giao với 1984 tập hợp khác.

Suy ra các phần tử thuộc A thuộc 1984 tập hợp khác (mâu thuẫn).

Vậy các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_{46}$  giao nhau bởi một phần tử a duy nhất.

(a là duy nhất vì nếu tồn tại b thuộc vào các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_{46}$  thì khi đó giao của hai tập hợp bất kì có hai phần tử)

Giả sử  $A^*$  không chứa a. Suy ra  $A^*$  giao với  $A_1, A_2, \dots, A_{46}$  tại 46 phần tử khác nhau. Do đó  $A^*$  có ít nhất 46 phần tử (mâu thuẫn với giả thiết).

### 3.6 Bài toán giải bằng phương pháp sắp xếp thứ tự.

#### Bài 98.

**Cho  $2n+1$  số thực có tính chất tổng của  $n$  số bất kì nhỏ thua tổng của  $n+1$  số còn lại. Chứng minh rằng tất cả các số đều dương.**

Giải:

Sắp xếp các số đã cho theo thứ tự tăng dần, ta có

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2n+1}$$

Theo giả thiết ta suy ra

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+1} < a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}$$

Suy ra

$$a_1 > (a_{n+2} - a_2) + (a_{n+3} - a_3) + \dots + (a_{2n+1} - a_{n+1}) \geq 0$$

Vì giả thiết  $a_i$  là nhỏ nhất nên ta có điều phải chứng minh.

#### Bài 99.

**Cho  $2n$  số nguyên dương phân biệt không vượt quá  $n^2$ . Chứng minh rằng tồn tại 3 hiệu  $a_i - a_j$  bằng nhau.**

Giải:

Vì  $2n$  số đã cho phân biệt nên ta có thể sắp xếp

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}.$$

$$\text{Đặt } S = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1})$$

Giả sử không tồn tại ba hiệu  $a_i - a_j$  nào bằng nhau, khi đó

$$S > 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (n-1) + (n-1) + n$$

Suy ra

$$S \geq 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2$$

Hơn nữa

$$S = a_{2n} - a_1 \leq n^2 - 1$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra mâu thuẫn.

### 3.7 Bài toán giải bằng phương pháp liệt kê các trường hợp.

#### Bài 100.

*Người đưa thư phân phát thư tới 19 nhà ở một dãy phố. Người đưa thư phát hiện ra rằng không có hai nhà liên tiếp nhau cùng nhận thư trong cùng một ngày và không có nhiều hơn hai nhà cùng không nhận thư trong cùng một ngày. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối thư?*

Giải:

Từ giả thiết thứ nhất ta thấy cứ hai nhà liên tiếp có một nhà không nhận thư.

Suy ra số nhà không nhận thư ít nhất là 9 và số nhà nhận thư nhiều nhất là 10.

Suy ra có nhiều nhất 10 người nhận thư trong cùng một ngày

Từ giả thiết thứ hai cứ ba nhà liên tiếp có một nhà nhận thư. Vậy ít nhất có 6 nhà nhận thư trong cùng một ngày.

Ta liệt kê các trường hợp của bài toán:

- Trường hợp 1: Có 6 nhà nhận thư

Gán số 1 vào 6 vị trí nhận thư và gán số 0 vào những nhà không nhận thư.

Mà giữa hai vị trí 1 phải có một nhà số 0 nên suy ra có 5 nhà không nhận thư.

Còn 8 nhà không nhận thư được sắp xếp như sau:

Hai nhà không nhận thư ở hai vị trí đầu, và ở hai vị trí cuối, bốn nhà còn lại được sắp xếp vào 5 vị trí xen kẽ với các nhà nhận thư.

Vậy trường hợp này có  $C_5^4 = 5$  cách xếp.

- Trường hợp 2: Có 7 nhà nhận thư

7 nhà này xen kẽ với 6 nhà không nhận thư nên còn 6 nhà không nhận thư được sắp xếp như sau:

2 nhà đầu, 2 nhà cuối, 2 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^2 = 15$ .

2 nhà đầu, 1 nhà cuối, 3 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^3 = 20$ .

1 nhà đầu, 2 nhà cuối, 3 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^3 = 20$ .

1 nhà đầu, 1 nhà cuối, 4 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^4 = 15$ .

2 nhà đầu, 0 nhà cuối, 4 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^4 = 15$ .

0 nhà đầu, 2 nhà cuối, 4 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^4 = 15$ .

1 nhà đầu, 0 nhà cuối, 5 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^5 = 6$ .

0 nhà đầu, 1 nhà cuối, 5 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có  $C_6^5 = 6$ .

0 nhà đầu, 0 nhà cuối, 6 nhà còn lại xếp vào 6 vị trí xen kẽ. Có 1 cách.

Vậy trong trường hợp này có 113 cách.

- Trường hợp 3: Có 8 nhà nhận thư

8 nhà này xen kẽ với 7 nhà không nhận thư nên còn 4 nhà không nhận thư được sắp xếp như sau:

2 nhà đầu, 2 nhà cuối. Có 1 cách.

2 nhà đầu, 1 nhà cuối, 1 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí. Có  $C_7^1 = 7$  cách.

1 nhà đầu, 2 nhà cuối, 1 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí. Có  $C_7^1 = 7$  cách.

1 nhà đầu, 1 nhà cuối, 2 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí. Có  $C_7^2 = 21$  cách.

2 nhà đầu, 0 nhà cuối, 2 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí. Có  $C_7^2 = 21$  cách.

0 nhà đầu, 2 nhà cuối, 2 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí. Có  $C_7^2 = 21$  cách.

0 nhà đầu, 1 nhà cuối, 3 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí . Có  $C_7^3 = 35$  cách.

1 nhà đầu, 0 nhà cuối, 3 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí . Có  $C_7^3 = 35$  cách.

0 nhà đầu, 0 nhà cuối, 4 nhà còn lại xếp vào 7 vị trí . Có  $C_7^4 = 35$  cách.

Vậy trong trường hợp này có 183 cách.

Bằng cách chứng minh tương tự ta có kết quả cho 2 trường hợp còn lại:

- Trường hợp 4: Có 9 nhà nhận thư. Có 47 cách.
- Trường hợp 5: Có 10 nhà nhận thư. Có 1 cách.

Vậy người đưa thư có  $5 + 113 + 183 + 47 + 1 = 349$  cách phân phối thư.

## KẾT LUẬN

Luận văn MỘT SỐ BÀI TOÁN TỔ HỢP ĐẾM đã phân loại được một số dạng bài tập tổ hợp sử dụng các phép đếm từ cơ bản đến nâng cao. Ngoài ra cũng đã chọn lọc được một số bài toán tổ hợp hay phù hợp với học sinh trung học phổ thông khi ôn tập chuẩn bị tham gia vào các kì thi tốt nghiệp, cao đẳng, đại học hay tham gia các kì thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế.

Rõ ràng các bài toán tổ hợp là rất khó, không có khuôn mẫu nhất định cho việc giải, do vậy luôn đòi hỏi sự sáng tạo, tư duy không ngừng từ phía người đọc. Mặt khác các bài toán này thường kích thích cho việc hình thành tư duy toán học và kĩ năng trình bày, giải quyết vấn đề của học sinh. Ngoài việc phát triển những kĩ năng này, các bài toán tổ hợp còn mang tính thực tế và tính thẩm mỹ cao, vì thế đem lại cho học sinh sự đam mê, hứng thú. Tôi tin rằng một bài toán tổ hợp sẽ luôn thú vị và đem đến những cuộc tranh luận hấp dẫn hơn bất cứ thể loại toán nào khác.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Văn Như Cương (1994), *Tài liệu chuẩn kiến thức lớp 12*, NXB Giáo dục.
2. Lê Hồng Đức, Lê Bích Ngọc, Lê Hữu Trí (2003), *Phương pháp giải toán tổ hợp*, Nhà xuất bản Hà Nội .
3. Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành (2009), *Giải tích toán học rời rạc*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
4. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2007), *Đại số và giải tích 11 nâng cao*, Nhà xuất bản giáo dục.
5. *Tạp chí toán học tuổi trẻ* , Nhà xuất bản Giáo dục.