

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

DẠNG 1. Phương trình đường thẳng

Phương pháp

Ta có:

1. Phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases} t \in \mathbb{R}$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là phương trình *tham số* của một

đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vector vtcp là $\vec{u}(a; b; c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

2. Phương trình: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ với điều kiện $abc \neq 0$ là phương trình *chính tắc* của một đường thẳng (d). Khi đó, đường thẳng (d) có vector vtcp là $\vec{u}(a; b; c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

3. Phương trình: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2 \Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq \vec{0}.$$

Khi đó, vector $\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ là một vtcp của (d).

Chú ý:

Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng họ (d_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Câu hỏi 2: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số đường thẳng của họ (d_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định, để thực hiện yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử m từ hệ của phương trình (d), ta được: $Ax + By + Cz + D = 0$ (1)

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m) .

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chùm mặt phẳng tạo bởi trục (d_m) có phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m)] + \beta[A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + D_2(m)] = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β , đưa (2) về dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (3)

Bước 3: Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m) .

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phương trình: $\begin{cases} x = 2 + (m+1)t \\ y = 1 + (m-1)t, \\ z = mt \end{cases} t \in \mathbb{R}. \quad (1)$

- Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình của một họ đường thẳng kí hiệu là (d_m) , từ đó chỉ ra điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.
- Điểm $A(3; 1; 1)$ có thuộc đường thẳng nào của họ (d_m) không.

- c. Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng (P) cố định, tìm phương trình mặt phẳng (P).
- d. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ (d_m) và có tâm thuộc mặt phẳng (Q): $x + y + 2z - 1 = 0$.
- e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = 2\sqrt{6}$ tiếp xúc với mọi đường thẳng của họ (d_m).

Ví dụ 2. Cho phương trình: $\frac{x-1}{2m} = \frac{my}{2} = \frac{z+1}{m}$. (1)

- a. Tìm điều kiện của m để phương trình (1) là phương trình chính tắc của một đường thẳng, gọi là họ (d_m).
- b. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.
- c. Chứng tỏ rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Nhận xét: Với mặt phẳng (Q) chúng ta còn gặp một dạng toán là "Tìm đường thẳng cố định luôn thuộc họ mặt phẳng (Q)". Thí dụ với mặt phẳng (Q): $x + my - 3mz - m - 1 = 0$ ta thực hiện phép biến đổi:

$$(Q): x - 1 + m(y - 3z - 1) = 0$$

Từ đó, suy ra đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng (Q) có phương trình: (d): $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

Như vậy, để chứng minh họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Biến đổi phương trình của họ (P_m) về dạng: $f(x, y, z) + mg(x, y, z) = 0$.

Bước 2. Vậy, họ (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d): \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

DẠNG 2. Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp

Để viết phương trình đường thẳng (d), ta sử dụng các kết quả:

Cách 1: Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp hoặc đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt đã được trình bày trong phần phương trình đường thẳng.

Cách 2: Đường thẳng được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) chứa nó. Từ đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Viết phương trình mặt phẳng (P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

Bước 2. Viết phương trình mặt phẳng (P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Bước 3. Đường thẳng (d) gồm những điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 4. Chọn một điểm M_0 thỏa mãn hệ (*) và một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được xác định bởi: $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$.

Bước 5. Viết dạng phương trình đường thẳng (d) theo yêu cầu của bài toán (trong nhiều trường hợp chúng ta có thể bỏ qua bước 4 nếu bài toán yêu cầu về phương trình tham số của đường thẳng).

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ và:

- Song song với đường thẳng (Δ): $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{2z+1}{2}$.
- Vuông góc với mặt phẳng (P): $3x - 2y + z - 6 = 0$.
- Song song với hai mặt phẳng: (P_1): $2x + 2y + z - 4 = 0$, (P_2): $2x - y - z + 5 = 0$.

Ví dụ 2. Cho điểm $M(1; 2; 1)$ và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{2-z}{1}, \quad (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{1}.$$

- Tìm góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1), (d_2).
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với cả (d_1), (d_2).

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình: (P): $3x + 3y - 4z = 0$,

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

- Tính cosin góc giữa mặt phẳng (P) với các đường thẳng (d_1), (d_2).
- Viết phương trình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Ví dụ 4. Cho điểm $M(1; 2; -1)$ và đường thẳng (d) có phương trình: $(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

- Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (d). Từ đó, suy ra tọa độ điểm M_1 đối xứng với M qua (d).
- Lập phương trình đường thẳng đi qua M vuông góc với (d) và cắt (d).

Ví dụ 5. Lập phương trình đường thẳng đi qua $A(4; 1; -1)$ cắt (Δ) và tạo với (Δ) một góc bằng 45° , biết:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Ví dụ 6. Cho điểm $A(4; -1; -1)$ và hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình:

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

- Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) chéo nhau.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (Δ_1) và cắt (Δ_2).

DẠNG 3. Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) (hoặc xác định điều kiện về vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)), ta thường lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phương pháp đại số): Thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).
- Bước 2.** Biện luận:
 - Nếu hệ có nghiệm duy nhất, khi đó $(d) \cap (P) = \{A\}$ có tọa độ là nghiệm của hệ.
 - Nếu hệ vô nghiệm, khi đó $(d) \cap (P) = \emptyset \Leftrightarrow (d) // (P)$.
 - Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó $(d) \subset (P)$.

Cách 2: (Phương pháp hình học): Thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Giả sử:

- (d) có vtcp $\vec{u}$ (a; b; c) và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
- (P) có vtpt $\vec{n}$ (A; B; C).

Bước 2. Khi đó:

1. Để (d) cắt (P) điều kiện là: $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0$.
2. Để (d) song song với (P) điều kiện là:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

3. Để (d) nằm trong (P) điều kiện là: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$.

Hoặc có thể lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc (d) và thiết lập điều kiện M, N thuộc (P).

4. Để (d) vuông góc với (P) điều kiện là $\vec{u} = k\vec{n}$.

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm các câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α .
3. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) và (P) tại điểm M.
4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P)*", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
 Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

$$\text{Gọi } \vec{n_Q} \text{ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có: } \begin{cases} \vec{n_Q} \perp \vec{u} \\ \vec{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{n_Q} = [\vec{u}, \vec{n}].$$

Bước 2. Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi: (Q): $\begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n_Q} \end{cases}$.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và tạo với (P) một góc α* ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
 Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Gọi $\vec{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\vec{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n_Q} \cdot \vec{u} = 0. \quad (1)$$

$$g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{|\vec{n_Q} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n_Q}| \cdot |\vec{n}|} = \cos \alpha. \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\vec{n_Q}$.

Bước 2. Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi: (Q): $\begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n_Q} \end{cases}$.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính R tiếp xúc với (d) và (P) tại điểm M*" thì bài toán được chuyển về dạng "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (P) tại điểm M*", đây là dạng toán mà chúng ta đã biết cách thực hiện.

Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn*", chúng ta có thể lựa chọn một trong các cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu (S), khi đó:
$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2. Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng (Δ) nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Bước 2. Giả sử I là tâm mặt cầu (S), khi đó: toạ độ tâm I thoả mãn phương trình tham số của (Δ).

Sử dụng điều kiện:

$$MI = R \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu (S), khi đó:
$$\begin{cases} MI \perp (d) \\ MI = R \\ d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2. Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình: (P): $x + 2y + 2z - 5 = 0$, (d): $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$.

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).
- Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa (d) và tạo với (P) một góc α có $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{18}$ tiếp xúc với (d) tại điểm $M(1; 2; 0)$ và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.
- Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{3}$ tiếp xúc với (d) tại điểm $N(1; 3; -1)$ và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có diện tích bằng $\frac{2\pi}{9}$.

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

- Tính khoảng cách giữa (d) và (P).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P).
- Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α .
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm M.
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M.

✚ Với yêu cầu "Tính khoảng cách giữa (d) và (P)", chúng ta có ngay: $d(d, (P)) = d(A, (P))$, với $A \in (d)$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P)", chúng ta có ngay: (Q): $\begin{cases} \text{Qua } A \in (d) \\ \text{vtpt } \vec{n}_P \end{cases}$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Lấy điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .
- Bước 2.** Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi: $(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) \parallel (d) \end{cases}$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P) .
- Bước 2.** Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q) .

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α ", chúng ta thực hiện tương tự như trong trong hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) .

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm M ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính MN với N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) .

Bước 2. Xác định toạ độ điểm N .

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN .

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I , bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại N . Vì $N \in (d)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (d) .

Bước 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với (P) . Vì $I \in (\Delta)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (Δ) .

Bước 3. Thiết lập điều kiện $IN \perp (d)$ và $R = IM = IN$ chúng ta sẽ nhận được toạ độ tâm I và độ dài bán kính R .

Bước 4. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R .

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình: $(P): x + y - 6 = 0$, $(d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) . Tính khoảng cách giữa (d) và (P) .

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P) .

c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) .

d. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α có $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm $A(1; 1; 1)$.

f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = 2\sqrt{2}$ tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm $A(1; 1; 1)$.

g. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm $E(5; 1; 1)$.

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (d) và (P) .
2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) .
3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A , nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d) .
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R , tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P) .
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M .
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P) .
8. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P) .

✚ Với yêu cầu "Tính góc giữa (d) và (P)", chúng ta có ngay:

- Mặt phẳng (P) có vtp $\vec{n}(A; B; C)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$.

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc tạo bởi (P) và (d), ta có: } \sin \alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Xác định tọa độ giao điểm A của (d) và (P)
- Bước 2.** Lấy điểm $M \in (d)$, từ đó xác định tọa độ điểm H_M là hình chiếu vuông góc của M lên (P).
- Bước 3.** Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi: $(d_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH_M} \end{cases}$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).
- Bước 2.** Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d)", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Gọi $\vec{u}_\Delta$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có: $\begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{u} \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{u}, \vec{n}]$.
- Bước 2.** Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi: $(\Delta): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{u}_\Delta \end{cases}$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và vuông góc với (d).
- Bước 2.** Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất", chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng: $g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$
 $\Rightarrow \min[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha$.

- Bước 2.** Gọi $\vec{n}_Q$ là một vtp của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\vec{n}_Q \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{u} = 0. \quad (1)$$

$$g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \cos \alpha. \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1), (2) chúng ta nhận được tọa độ của $\vec{n}_Q$.

- Bước 3.** Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi: $(Q): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n}_Q \end{cases}$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1.** Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng: $g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$
 $\Rightarrow \min[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha$.

Bước 2. Gọi $\vec{n}_Q$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:
$$\begin{cases} \vec{n}_Q \perp \vec{u} \\ \vec{n}_Q \perp \vec{u}_A \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_A, \vec{u}].$$

Bước 3. Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:
$$(Q): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtpt } \vec{n}_Q \end{cases}.$$

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu có bán kính R, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I.

Vì $I \in (d)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

Bước 2. Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là $d(I, (P)) = R \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

✚ Các yêu cầu (6), (7) được thực hiện tương tự như trong trường hợp (d) song song với (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Mặt cầu (S) với tâm I cần dựng sẽ tiếp xúc với hình chiếu vuông góc (d') của (d) trên (P).

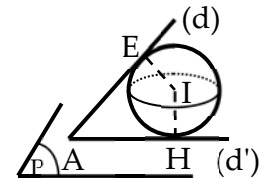
Bước 2. Ta lần lượt có:

▪ Mặt phẳng ((d), (d')) với vtpt $\vec{n}'$ được cho bởi:
$$\begin{cases} \vec{n}' \perp \vec{u} \\ \vec{n}' \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}' = [\vec{n}, \vec{u}].$$

▪ Đường thẳng (EI) với vtcp $\vec{v}$ được cho bởi:
$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{n}' \\ \vec{v} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = [\vec{u}, \vec{n}'].$$

▪ Phương trình đường thẳng (EI) được cho bởi:

$$(EI): \begin{cases} \text{Qua E} \\ \text{vtcp } \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số (theo t) của (EI)}.$$



Bước 3. Từ đó, vì I thuộc (EI) nên thoả mãn phương trình tham số của (EI), ta có điều kiện:

$EI = IH = d(I, (P)) \Leftrightarrow EI^2 = d^2(I, (P)) \Rightarrow$ Tham số t $\Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

Bước 4. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính $R = EI$.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad (P): 2x + 2y + z - 5 = 0.$$

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm toạ độ A, tính góc giữa (d) và (P).
- Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
- Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P).

DẠNG 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Thực hiện:

- Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\vec{u}_1$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\vec{u}_2$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2. Kiểm tra:

- Nếu $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận (d_1) và (d_2) trùng nhau.

- Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận (d₁) và (d₂) song song với nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, thực hiện bước 3.

Bước 3. Xác định $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận (d₁) và (d₂) cắt nhau.
- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận (d₁) và (d₂) chéo nhau.

Chú ý: Với hai đường thẳng (d₁) và (d₂) song song với nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính khoảng cách giữa (d₁) và (d₂).
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d₁) và (d₂).
3. Viết phương trình đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng chứa (d₁), (d₂) và song song, cách đều (d₁), (d₂).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d₁) và cách (d₂) một khoảng bằng h.
5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d₁) tại điểm E và tiếp xúc với (d₂).
6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d₁), (d₂) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ).

✚ Với yêu cầu "Tính khoảng cách giữa (d₁) và (d₂)", chúng ta có ngay: $d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{|\overrightarrow{[M_1M_2, \overrightarrow{u_2}]}|}{|\overrightarrow{u_2}|}$,

với $M_1 \in (d_1)$, $M_2 \in (d_2)$ và $\overrightarrow{u_2}$ là một vtcp của (d₂).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song (d₁) và (d₂)", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d₁) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2. Mặt phẳng (P) được cho bởi: $(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}] \end{cases}$.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2. Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình: $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Bước 3. Vì ba điểm A, $M_1, M_2 \in (P) \Rightarrow$ Phương trình của (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng chứa (d₁), (d₂) và song song, cách đều (d₁), (d₂)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d₁) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$. Suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2 .

Bước 2. Đường thẳng (d) được cho bởi: $(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1} \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d₁) và cách đường thẳng (d₂) một khoảng bằng h", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2. Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Bước 3. Vì điểm A, $M_1 \in (P)$ và $d(M_2, (P)) = h$, suy ra phương trình của (P).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d₁) tại điểm E và tiếp xúc với (d₂)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi F là hình chiếu vuông góc của E trên (d₂) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính EF.

Bước 2. Ta lần lượt:

- Tìm tọa độ điểm F.
- Viết phương trình mặt cầu đường kính EF.

✚ Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với cả (d_1) , (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ)* ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1) , (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1) , (d_2) .
Viết phương trình mặt phẳng (R).

Bước 2. Khi đó:

- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ) .
- Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu (S).

Lưu ý: Chúng ta còn có một phương pháp tổng quát để thực hiện yêu cầu này sẽ được trình bày trong chú ý của hai đường thẳng chéo nhau.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình: $(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $(d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{3-z}{2}$.

- Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2) .
- Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) và song song, cách đều (d_1) , (d_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng 1.
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d_1) và tiếp xúc với (d_2) tại điểm B(3; 0; 1).
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1) , (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Chú ý: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại M, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

- Tính góc giữa (d_1) và (d_2) .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2) .
- Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2) .
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1) , (d_2) tại điểm M.
- Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1) , (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) .
- Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2) .

✚ Với yêu cầu "*Tính góc giữa (d_1) và (d_2)* ", chúng ta có ngay:

- Với (d_1) có vtcp $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1)$ và (d_2) có vtcp là $\vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.
- Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Lưu ý: Để $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

✚ Với yêu cầu "*Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau (d_1) và (d_2)* ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Giả sử $(d_1) \cap (d_2) = \{M\}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Xác định các vtcp $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của đường thẳng (d_1) và (d_2) .

Bước 2. Mặt phẳng (P) được cho bởi: (P): $\begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u}_1 \text{ và } \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases}.$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Lấy hai điểm $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$ không trùng với giao điểm M của (d_1) và (d_2) .

Bước 2. Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình: $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.
Vì ba điểm $M, M_1, M_2 \in (P)$, suy ra phương trình của (P) .

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường phân giác của (d_1) và (d_2) ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Xác định tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) . Lấy điểm $A \in (d_1)$, với $A \neq M$.

Bước 2. Lấy điểm $B \in (d_2)$ thỏa mãn $AI = BI$, Từ đó, nhận được tọa độ hai điểm B_1, B_2 .

Bước 3. Ta có:

- Với B_1 thì suy ra tọa độ trung điểm K_1 của AB_1 .

Khi đó, phương trình đường phân giác thứ nhất là: $(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overline{MK_1} \end{cases}$.

- Với B_2 thì suy ra tọa độ trung điểm K_2 của AB_2 .

Khi đó, phương trình đường phân giác thứ hai là: $(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overline{MK_2} \end{cases}$.

Lưu ý: Với cách giải này, ta có các lưu ý sau:

1. Ta có kết quả:

- Nếu $\overline{MA} \cdot \overline{MB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi $(d_1), (d_2)$.
- Nếu $\overline{MA} \cdot \overline{MB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi $(d_1), (d_2)$.

2. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi $(d_1), (d_2)$, ta có: $(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtp } \overline{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Xác định tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) .

Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$, với $A, B \neq I$.

Bước 2. Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ M xuống AB .
Ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $t = \frac{IA}{IB} \Leftrightarrow \frac{\overline{AK_1}}{\overline{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow$ Tọa độ K_1 .

Khi đó, phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi: $(IK_1): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overline{IK_1} \end{cases}$.

- Điểm $K_2(x_2; y_2; z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\frac{IA}{IB} \Leftrightarrow \frac{\overline{AK_2}}{\overline{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Rightarrow$ Tọa độ K_2 .

Khi đó, phương trình đường phân giác trong được xác định bởi: $(IK_2): \begin{cases} \text{qua } I \\ \text{vtcp } \overline{IK_2} \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với $(d_1), (d_2)$ tại điểm M ", chúng ta thấy ngay đó chính là "Mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm M " và đây là dạng toán chúng ta đã biết cách thực hiện.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với cả $(d_1), (d_2)$ và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi $(d_1), (d_2)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) .

Bước 2. Khi đó:

- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
- Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

Bước 3. Viết phương trình mặt cầu (S).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính R tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2)", chúng ta lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Ta thấy ngay tâm I của mặt cầu (S) thuộc đường thẳng (a) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R), (T) với:

- (R) là mặt phẳng qua E và vuông góc với (d_1).
- (T) là mặt phẳng qua F và vuông góc với (d_2), biết F thuộc (d_2) sao cho $ME = MF$.

Từ phân tích đó chúng ta thực hiện bài toán theo các bước:

Bước 1. Viết phương trình mặt phẳng (R) qua E và vuông góc với (d_1).

Bước 2. Tìm điểm F thuộc (d_2) sao cho $ME = MF$.

Bước 3. Viết phương trình mặt phẳng (T) qua F và vuông góc với (d_2).

Bước 4. Thiết lập phương trình tham số của giao tuyến (a) của hai mặt phẳng (R), (T).

Bước 5. Từ điều kiện tâm I thuộc (a) sao cho $IE = R$ suy ra tọa độ của I.

Bước 6. Viết phương trình mặt cầu (S).

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng với tâm $I(a; b; c)$ tiếp xúc với (d_2) tại F, suy ra tọa độ của F thỏa mãn phương trình tham số của (d_2).

Bước 2. Ta có các điều kiện:

$$EI = R \Leftrightarrow EI^2 = R^2. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0. \quad (2)$$

$$ME = MF \Leftrightarrow ME^2 = MF^2 \Rightarrow \text{Toạ độ của F.}$$

Bước 3. Với F tìm được thiết lập điều kiện: $\overrightarrow{FI} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0. \quad (3)$

Bước 4. Kết hợp (2) và (3), để thực hiện việc biểu diễn hai trong số ba ẩn a, b, c theo ẩn còn lại. Rồi thay vào (1) chúng ta sẽ nhận được tọa độ của tâm I.

Bước 5. Viết phương trình mặt cầu tâm I bán kính R.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình: (d_1): $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$ và (d_2): $\begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 + u, u \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2u \end{cases}$.

- a. Chứng minh rằng (d_1) cắt (d_2) tại điểm M. Tìm tọa độ của M và tính góc giữa (d_1), (d_2).
- b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
- c. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc lớn nhất.
- d. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc α biết $\sin \alpha = 4/9$.
- e. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2).
- f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{17}$ tiếp xúc với (d_1), (d_2) tại điểm M.
- g. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Chú ý: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
3. Viết phương trình mặt phẳng (Q_1) chứa (d_1) và song song với (d_2).

4. Viết phương trình các mặt phẳng (Q_1) , (Q_2) theo thứ tự chứa (d_1) , (d_2) và song song với nhau.
5. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1) , (d_2) .
6. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) .
8. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1) , (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) .

✚ Với yêu cầu "Tính góc giữa (d_1) và (d_2) ", chúng ta thực hiện tương tự như trong phần chú ý về hai đường thẳng cắt nhau.

✚ Với yêu cầu "Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) ", chúng ta có kết quả:

- (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1)$.
- (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.

$$\text{Khi đó, khoảng cách giữa } (d_1), (d_2) \text{ được cho bởi: } d((d_1), (d_2)) = \frac{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \right] \right|}.$$

Ngoài ra, còn có thể sử dụng kết quả trong yêu cầu (3) hoặc yêu cầu (6).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q_1) chứa (d_1) và song song với (d_2) ", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là vtcp của (d_1) và (d_2) và lấy điểm $M_1 \in (d_1)$.

Bước 2. Mặt phẳng (Q_1) được cho bởi: $(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2) cho trước", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là vtcp của (d_1) và (d_2) .

Lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$, suy ra tọa độ trung điểm M của $M_1 M_2$.

Bước 2. Mặt phẳng (Q) được cho bởi: $(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) ", chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) .

Bước 2. Chuyển phương trình (d_1) và (d_2) về dạng tham số, suy ra tọa độ của A, B theo phương trình tham số của (d_1) và (d_2) .

Bước 3. Từ điều kiện: $\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \\ u \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ } A, B$

Bước 4. Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi: $(d): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là vtcp của (d_1) và (d_2) . Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d) ,

$$\text{ta có: } \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2].$$

Bước 2. Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1) , khi đó: $(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \vec{u}_1 \end{cases} \Leftrightarrow (P_1):$

$$\begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{u}, \vec{u}_1] \end{cases} \Rightarrow (P_1).$$

Bước 3. Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2) , khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{vtpt } \vec{n}_2 = [\vec{u}, \vec{u}_2] \end{cases} \Rightarrow (P_2).$$

Bước 4. Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P₁) và (P₂) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ: $\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Tìm $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ là vtcp của (d₁) và (d₂). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2].$

Bước 2. Gọi (P₁) là mặt phẳng chứa (d) và (d₁), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \vec{u}_1 \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_1 = [\vec{u}, \vec{u}_1] \end{cases} \Rightarrow (P_1).$$

Bước 3. Giả sử (d) ∩ (d₂) = {B} suy ra (P₁) ∩ (d₂) = {B} ⇒ toạ độ B.

Bước 4. Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi: $(d): \begin{cases} \text{qua B} \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$

Cách 4: (Áp dụng trong trường hợp hai đường thẳng (d₁), (d₂) chéo nhau và vuông góc với nhau): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Dựng mặt phẳng (P₁) thoả mãn: $\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$

Bước 2. Dựng mặt phẳng (P₂) thoả mãn: $\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}.$

Bước 3. Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P₁) và (P₂) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ: $\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d₁) và (d₂)", chúng ta đi viết phương trình mặt cầu đường kính AB với A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d₁) và (d₂).

✚ Với yêu cầu "Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với cả (d₁), (d₂) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Chuyển phương trình các đường thẳng (Δ), (d₁) và (d₂) về dạng tham số và tìm các vtcp tương ứng $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

Bước 2. Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d₁), (d₂) theo thứ tự tại A và B, suy ra toạ độ I, A, B theo các phương trình tham số.

Bước 3. Ta có điều kiện: $\begin{cases} \vec{IA} \perp (d_1) \\ \vec{IB} \perp (d_2) \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IA} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{IB} \perp \vec{u}_2 \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IA} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{IB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Toạ độ I} \\ R = IA \end{cases}$

Bước 4. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng (d₁) và (d₂) có phương trình: $(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$

- Chứng minh rằng hai đường thẳng (d₁), (d₂) chéo nhau. Tính khoảng cách và góc giữa chúng.
- Viết phương trình các mặt phẳng (Q₁), (Q₂) theo thứ tự chứa (d₁), (d₂) và song song với nhau.
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d₁), (d₂).

- d. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0; 1; 0)$ cắt cả (d_1) , (d_2) .
- e. Viết phương trình đường thẳng cắt cả (d_1) , (d_2) và song song với đường thẳng (Δ_1) : $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.
- f. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $B(2; 1; 2)$ và vuông góc với cả (d_1) , (d_2) .
- g. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .
- h. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) .
- i. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1) , (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ_2) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.
- j. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{5}/2$ tiếp xúc với (d_1) tại điểm $C_1(1; 1; 1)$ và tiếp xúc với (d_2) .

DẠNG 5. Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Phương pháp

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

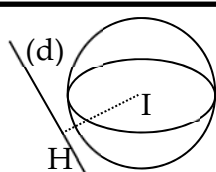
Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S) , từ đó tính:

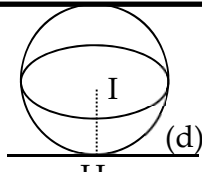
$$d = d(I, (d)).$$

Bước 2. So sánh d với R để đưa ra kết luận:

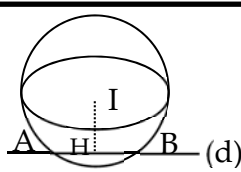
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \emptyset$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow (d)$ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t .

Bước 2. Thay x, y, z của (d) vào (S) , ta được: $At^2 + Bt + C = 0$ (1)

Bước 3. Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (S) = \emptyset$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $t_0 \Leftrightarrow (S)$ tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0); y(t_0); z(t_0))$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ với $A(x(t_1); y(t_1); z(t_1))$ và $B(x(t_2); y(t_2); z(t_2))$.

Với các bài toán không chứa tham số, khi sử dụng cách 1 chúng ta dễ dàng kết luận được về vị trí tương đối của (d) và (S) , tuy nhiên:

- Trong trường hợp $(d) \cap (S) = \{A, B\}$ hoặc $(d) \cap (S) = \{M\}$ chúng ta không nhận được tọa độ của A, B và M .
- Với các bài toán có chứa tham số khi sử dụng cách 1 sẽ rất phức tạp, do vậy, tốt nhất hãy chọn cách 2.

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) tại hai điểm A, B chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm tọa độ A, B (hoặc độ dài đoạn AB).
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B.
4. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
 - a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
 - b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
 - c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính.
7. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

✚ Với yêu cầu (1) thì trong phần xét vị trí tương đối giữa (d) và (S) chúng ta sử dụng cách 2.

✚ Với yêu cầu (2) thì đường thẳng (Δ) cần dựng sẽ đi qua I và song song với (d).

✚ Với yêu cầu (3) thì chúng ta có ngay:

- Mặt phẳng (P_A) đi qua A và có vtpt $\overline{IA}$.
- Mặt phẳng (P_B) đi qua B và có vtpt $\overline{IB}$.

Lưu ý: Nếu chỉ với yêu cầu tính góc α giữa (P_A), (P_B) thì $\alpha = g(IA, IB)$.

✚ Với yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a; b; c)$.
- Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

Bước 2. Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên: (P): $ax + by + cz + \underline{D} = 0$.

Bước 3. Ta lần lượt:

- a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là: $d(I, (P)) = R \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).
- b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:
 $I \in (P) \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P).
- c. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:

$$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow \text{Phương trình các mặt phẳng } (P_1), (P_2).$$

✚ Với yêu cầu (5), gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì $(Q) = (I, (d)) = (IAB)$ và chúng ta đã biết hai cách để viết được phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

✚ Với yêu cầu (6), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi H là trung điểm AB, suy ra tọa độ của H.

Bước 2. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì $IH \perp (Q)$. Do đó: (Q): $\begin{cases} \text{Qua H} \\ \text{vtpt } \overline{IH} \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu (7), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, giả sử: (Q): $Ax + By + Cz + D = 0$.
 Vì (Q) chứa (d) nên A, B thuộc (Q). (1)

Bước 2. Để (Q) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) chúng ta nhận được giá trị tương ứng của A, B, C, D.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2},$$

$$(S): (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

- a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Tính độ dài AB.
- b. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
- c. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P_A), (P_B).
- d. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
 - a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
 - b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn lớn của (S).
 - c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có diện tích bằng 18π .
- e. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
- f. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính.
- g. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng $r = \sqrt{54/5}$.

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) (tâm I, bán kính R) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm tọa độ tiếp điểm A.
2. Viết phương trình đường thẳng song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
 - a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
 - b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
 - c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
4. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S).
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
7. Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
8. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
9. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc α .

✚ Với yêu cầu các câu (1), (2), (3), (6), chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết trong phần chú ý về trường hợp đường thẳng cắt mặt cầu.

✚ Với yêu cầu các câu (4) ta thấy ngay mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua A và có vtpt là $\overline{IA}$.

✚ Với yêu cầu các câu (7) ta thực hiện viết phương trình đường thẳng (IA).

✚ Với yêu cầu các câu (8), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử đường thẳng (d') cần dựng có vtcp $\vec{u}'$, ta có:
$$\begin{cases} (d') \perp (d) \\ (d') \perp IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}' \perp \vec{u} \\ \vec{u}' \perp \overline{IA} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}' = [\vec{u}, \overline{IA}].$$

Bước 2. Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi: $(d'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{u}' \end{cases}$.

✚ Với yêu cầu các câu (9), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1. Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\vec{u}_\Delta$ (a; b; c), ta có:

$$\vec{u}_\Delta \perp \vec{IA} \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{IA} = 0. \quad (1)$$

$$g((\Delta), (d)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{u}|} = \cos \alpha. \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được tọa độ của $\vec{u}_\Delta$.

Bước 2. Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi: $(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{u}_\Delta \end{cases}$.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình: $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3.$

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A. Tìm tọa độ tiếp điểm A.
- Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S).
- Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
- Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
- Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc 30° .

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

- Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
 - Tiếp xúc với mặt cầu (S).
 - Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
 - Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
- Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
- Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Giả sử các tiếp điểm là T_1, T_2 , hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

✚ Với các yêu cầu (1), (2), (3), chúng ta thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.

✚ Với các yêu cầu (4), chúng ta thực hiện theo các bước lớn sau:

Bước 1. Lập phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) chứa (d) và tiếp xúc với (S).

Bước 2. Tìm tọa độ các tiếp điểm T_1, T_2 với cách hiểu chúng chính là hình chiếu vuông góc của I trên các mặt phẳng (P_1), (P_2).

Bước 3. Viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

Ví dụ 3. Cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình: $(d): \frac{x-3}{9} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}, (S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 14.$

- Chứng minh rằng đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S).
- Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S).
- Giả sử các tiếp điểm của (S) với các mặt phẳng trong câu b) là T_1, T_2 , hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

11. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+3}{7}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 2; -3)$. B. $\vec{u}_2 = (-1; -2; 3)$.
C. $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$. D. $\vec{u}_4 = (7; -8; 5)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng có phương trình sau:

- (I): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. (II): $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 6t \\ z = -3 - 10t \end{cases}$.
(III): $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{5}$.

Trong các phương trình trên phương trình nào là phương trình của đường thẳng qua $M(2; 0; -3)$ và nhận $\vec{a} = (2; -3; 5)$ làm một VTCP:

- A. Chỉ có (I) B. Chỉ có (III)
C. (I) và (II) D. (I) và (III)

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1)$, $B(1; 2; 4)$ và ba đường thẳng có phương trình sau:

- (I): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$. (II): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-5}$.
(III): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Chỉ có (I) là phương trình của đường thẳng AB .
B. Chỉ có (III) là phương trình của đường thẳng AB .
C. Chỉ có (I) và (II) là phương trình của đường thẳng AB .
D. Cả (I), (II), (III) đều là phương trình của đường

thẳng AB .

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}$. Xét các khẳng định sau:

- (I). d có một VTCP là $\vec{a} = (2; 7; 4)$.
(II). Điểm $M(0; -8; -4)$ thuộc đường thẳng (d) .
(III). Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -8 + 7t \\ z = -4 + 4t \end{cases}$.

Trong các khẳng định trên, khẳng định nào **đúng**?

- A. (I) B. (II) C. (III) D. Cả (I), (II) và (III).

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

- A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$ B. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$
C. $x-2 = y = z+3$ D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giao điểm của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và

$$d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 2 - 8t' \end{cases}$$
 có tọa độ là:

- A. $(-3; -2; 6)$ B. $(3; 7; 18)$ C. $(5; -1; 20)$ D. $(3; -2; 1)$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là:

- A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$$C. \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1; 3)$ và $B(0; 2; 1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d ?

$$A. \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 6t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; -1; 1)$?

$$A. \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

$$B. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$$

$$C. \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

$$D. \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là:

$$A. d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$B. d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$C. d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$D. d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình tham số của d là:

$$A. \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; 1)$, $B(-1; -2; 0)$ và $C(2; 1; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

$$A. \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 5t \\ y = -\frac{1}{3} + 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 5t \\ y = -\frac{1}{3} - 4t \\ z = -3t \end{cases}$$

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O , vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.

Phương trình của d là:

$$A. \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$$

$$C. \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$$

$$D. \begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$.

Trong các phương trình sau đây, phương trình nào là phương trình của đường thẳng d_3 qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 .

$$A. \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{7}$$

$$B. \frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$$

$$C. \frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{3}$$

$$D. d_3: \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-14} = \frac{z-2}{9}$$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = -\frac{9}{5} - t \\ y = 5t \\ z = \frac{7}{5} + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{mặt phẳng} \\ (P): 3x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

Gọi d' là hình chiếu của d trên mặt phẳng (P) . Trong các vectơ sau, vectơ nào không phải là vectơ chỉ phương của d' ?

- A. $(5; -51; -39)$ B. $(10; -102; -78)$
C. $(-5; 51; 39)$ D. $(5; 51; 39)$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}. \text{ Đường thẳng nào sau đây} \\ \text{vuông góc và cắt } d?$$

- A. $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ B. $d_2: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$
C. $d_3: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ D. $d_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}.$$

Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

- A. $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-2}$ B. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$
C. $\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ D. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 1)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}, \quad d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình:

- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \quad d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

và điểm $A(1; 2; 3)$.

Đường thẳng Δ qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là:

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

Câu 20. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong

không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và

đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$
C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases}, \text{ điểm } M(1; 2; 1) \text{ và mặt phẳng}$$

$(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua M , song song với (P) và vuông góc với d có phương trình:

- A. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-3}$ B. $\Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$
C. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ D. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt

phẳng $(P): x + 2y = 0$. Phương trình nào sau đây là

phương trình đường thẳng qua $A(-1; 3; -4)$ cắt trục Ox và song song với mặt phẳng (P) :

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -3t \\ z = 4t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \\ \text{C. } \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{4} & \text{D. } \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+4}{4} \end{array}$$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua A cắt d và song song với mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1} & \text{B. } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1} \\ \text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1} & \text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1} \end{array}$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1} & \text{B. } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1} \\ \text{C. } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1} & \text{D. } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1} \end{array}$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 3; 1)$, $B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \end{array}$$

Vấn đề 2. HÌNH CHIẾU – KHOẢNG CÁCH

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm

$$M(2; -6; 3) \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên d là:

$$\text{A. } (1; -2; 0) \quad \text{B. } (-8; 4; -3) \quad \text{C. } (1; 2; 1) \quad \text{D. } (4; -4; 1)$$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với A qua d là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } A'(3; 1; -5) & \text{B. } A'(-3; 0; 5) \\ \text{C. } A'(3; 0; -5) & \text{D. } A'(3; 1; 5) \end{array}$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 5y + 4z - 36 = 0$. Tọa độ hình chiếu H của A trên (P) là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } H(-1; -2; 6) & \text{B. } H(1; 2; 6) \\ \text{C. } H(1; -2; 6) & \text{D. } H(1; -2; -6) \end{array}$$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3; 0; 0)$, $B(0; -6; 0)$, $C(0; 0; 6)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của trọng tâm tam giác ABC lên mặt phẳng (α) là:

$$\text{A. } (2; -1; 3) \quad \text{B. } (2; 1; 3) \quad \text{C. } (-2; -1; 3) \quad \text{D. } (2; -1; -3)$$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z - 7 = 0$ và điểm $A(3; 5; 0)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P) . Điểm A' có tọa độ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } A'(1; -1; 2) & \text{B. } A'(-1; -1; 2) \\ \text{C. } A'(1; 1; 2) & \text{D. } A'(-1; -1; -2) \end{array}$$

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I tiếp xúc với (α) tại H . Tọa độ điểm H là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \left(\frac{23}{9}, \frac{4}{9}, \frac{20}{9} \right) & \text{B. } \left(-\frac{23}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{20}{9} \right) \\ \text{C. } \left(\frac{23}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{20}{9} \right) & \text{D. } \left(\frac{23}{9}, \frac{20}{9}, \frac{4}{9} \right) \end{array}$$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết rằng mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 3 = 0$ cắt mặt cầu (S) có tâm $I(3, -1, -4)$ theo giao tuyến là một đường tròn. Tâm H của đường tròn giao tuyến là điểm nào sau đây:

- A. $H(1, 1, 3)$ B. $H(1, 1, -3)$
C. $H(-1, 1, 3)$ D. $H(-3, 1, 1)$

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + y + z - 7 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) là:

- A. $\begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -8 - 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t. \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = t. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t. \end{cases}$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$.

Khoảng cách từ $A(0; -1; 3)$ đến đường thẳng Δ bằng:

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{14}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\sqrt{8}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Khoảng cách từ $A(1; 0; 3)$ đến Δ bằng:

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 0)$, $B(1; 0; -2)$, $C(3; -1; -1)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC .

- A. $\frac{\sqrt{21}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, bán kính của mặt cầu tâm $I(1; 3; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-1} \text{ bằng:}$$

- A. $\sqrt{14}$ B. 14 C. $\sqrt{7}$ D. 7

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d cho trước, một học sinh đã trình bày bài giải theo thứ tự các bước như sau:

Bước 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa A và vuông góc với d .

Bước 2. Tìm tọa độ giao điểm H của (α) và d .

Bước 3. Tính toán và kết luận $d[A, d] = AH$.

Bài giải trên **sai** ở bước nào?

- A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Không sai

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 2y - z + 5 = 0$. Khoảng cách giữa d và (P) bằng:

- A. $\frac{9\sqrt{14}}{14}$. B. $\frac{14\sqrt{14}}{9}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$\Delta': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' bằng:

A. $\frac{\sqrt{79}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{386}$. C. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{-5}$ và

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng:

A. $\sqrt{5}$. B. 3. C. $\frac{45}{\sqrt{14}}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là:

A. $\sqrt{14}$. B. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. C. $\sqrt{7}$. D. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-1;-1;-2)$ và $D(-3;5;-3)$.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. $\frac{15}{\sqrt{113}}$. B. $\frac{20}{\sqrt{113}}$. C. $\frac{10}{\sqrt{113}}$. D. $\frac{5}{\sqrt{113}}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$, $B(1;0;0)$, $C(2;2;0)$ và $D(0;m;0)$. Điều kiện cần và đủ của m để khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 2 là:

A. $\begin{cases} m=4 \\ m=-2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m=-4 \\ m=2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m=4 \\ m=2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m=-4 \\ m=-2 \end{cases}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng lần lượt có phương trình là $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}$

và $d_2: \begin{cases} x=3-t \\ y=4+t \\ z=4 \end{cases}$.

Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng:

A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 4.

Vấn đề 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$.

Khi đó giá trị của m, n lần lượt là:

A. $m=-2; n=1$ B. $m=2; n=-1$

C. $m=-4; n=7$ D. $m=0; n=7$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases}$ và

$$d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là:

A. Song song. B. Trùng nhau.

C. Cắt nhau. D. Chéo nhau.

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=-t \\ z=1-2t \end{cases}$ và

$$d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là:

A. Song song. B. Trùng nhau.

C. Cắt nhau. D. Chéo nhau.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=2+t \end{cases}$.

Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là:

A. Song song. B. Trùng nhau.

C. Cắt nhau.

D. Chéo nhau.

Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = -3-t \\ z = 0 \end{cases}$$

Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. d_1 song song d_2 .B. d_1 và d_2 chéo nhau.C. d_1 cắt d_2 và vuông góc với nhau.D. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -2+3t \\ z = 6-4t \end{cases} \text{ và}$$

$$d_2: \frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{3}.$$

Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. d_1 song song d_2 .B. d_1 và d_2 chéo nhau.C. d_1 cắt d_2 và vuông góc với nhau.D. d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = -2-t \end{cases}. \text{ Trong các đường thẳng sau,}$$

đường thẳng nào vuông góc với d ?

$$\text{A. } d_1: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1+t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\text{B. } d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$\text{C. } d_3: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}. \quad \text{D. } d_4: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}. \text{ Trong các đường thẳng}$$

sau, đường thẳng nào song song với d ?

$$\text{A. } d_1: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 2-t \\ z = 1+4t \end{cases}$$

$$\text{B. } d_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1+t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\text{C. } d_3: \frac{x+2}{-4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-4}. \quad \text{D. } d_4: \frac{x}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{6}.$$

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 2+t \end{cases}. \text{ Trong các đường thẳng sau, đường}$$

thẳng nào cắt d ?

$$\text{A. } d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}. \quad \text{B. } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

$$\text{C. } d_3: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}. \quad \text{D. } d_4: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2 \\ z = 3+2t \end{cases}.$$

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1+at \\ y = -2+t \\ z = -2t \end{cases} \text{ và } d': \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

Với giá trị nào sau đây của a thì d và d' song song với nhau?

A. $a = 0$ B. $a = 1$ C. $a = -2$

D. Không tồn tại.

Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{đường thẳng } d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \text{ và}$$

$$d_2: \begin{cases} x = n+2t \\ y = -1-2t \\ z = 3+mt \end{cases}.$$

Với giá trị nào của m, n thì hai đường thẳng đó trùng nhau?

A. $m = 2, n = 5$.B. $m = -2, n = 5$.C. $m = 5, n = 2$.D. $m = -5, n = 2$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

$$\text{thẳng lần lượt có phương trình } d_1: \begin{cases} x = 1+at \\ y = t \\ z = -1+2t \end{cases} \text{ và}$$

$$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Với giá trị nào của a thì d_1 và d_2 cắt nhau?

- A. $a = 0$. B. $a = 1$. C. $a = \frac{1}{2}$. D. $a = 2$.

Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

Khẳng định nào sau đây **đúng**:

- A. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .
 B. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .
 C. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) .
 D. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (\alpha): x + y + z - 1 = 0.$$

Vị trí tương đối của d và (α) là:

- A. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) .
 B. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) .
 C. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) .
 D. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) .

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 9x + 3y - 10z + 26 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $d \parallel (P)$. B. $d \subset (P)$. C. $d \perp (P)$.
 D. d chỉ cắt (P) nhưng không vuông góc.

Câu 62. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}. \quad \text{Xét mặt phẳng}$$

$(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ với m là tham số thực.

Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. $m = -2$. B. $m = 2$ C. $m = -52$. D. $m = 52$.

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 3 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = n + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

Với giá trị nào của m, n thì d nằm trong (P) ?

- A. $m = -\frac{5}{2}, n = 6$. B. $m = \frac{5}{2}, n = 6$.
 C. $m = \frac{5}{2}, n = -6$. D. $m = -\frac{5}{2}, n = -6$.

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - n = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + (2m-1)t \end{cases}.$$

Với giá trị nào của m, n thì d song song (P) ?

- A. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 7 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ n = 7 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n \neq 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ n \neq 7 \end{cases}$.

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S) \text{ có phương trình } (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4 \text{ và}$$

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}.$$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **đúng** nhất?

- A. d không cắt (S) B. d cắt (S)

C. d là tiếp tuyến của (S) D. d cắt (S) và đi qua tâm của (S) .

Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4. \text{ Đường thẳng nào}$$

sau đây cắt mặt cầu (S) ?

A. $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$ B. $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$

C. $d_3: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ D. $d_4: \begin{cases} x = -2+3t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \begin{cases} x = -3 \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-2)$,

đi qua gốc tọa độ O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. d là tiếp tuyến của mặt cầu (S) .

B. d cắt (S) tại hai điểm.

C. d và (S) không cắt nhau.

D. d song song với đường thẳng qua I và O .

Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases}$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng** nhất:

A. (d) tiếp xúc với (S) tại $M(-2;2;3)$.

B. (d) và (S) không cắt nhau.

C. (d) cắt (S) tại hai điểm.

D. (d) cắt (S) và đi qua tâm của (S) .

Vấn đề 4. GÓC

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -t \\ y = -1+4t \\ z = 3t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z+3}{-3}$.

Xác định góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. 0° B. 30° C. 60° D. 90°

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 5-2t \\ z = 14-3t \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 1-4t \\ y = 2+t \\ z = -1+5t \end{cases}$.

Xác định góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' .

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm

$A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ và $D(-2;1;-1)$. Góc giữa hai cạnh AB và CD có số đo là:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -1+t \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = 2+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+\sqrt{2}t \\ z = 2+mt \end{cases}$.

Để hai đường thẳng hợp với nhau một góc bằng 60° thì giá trị của m bằng:

A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 6+5t \\ y = 2+t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+1=0$.

Tính góc hợp bởi giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường

thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z+8=0$. Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) có số đo là:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

mặt phẳng (P) .

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và đường thẳng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

$d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Tính $\sin$ của góc giữa đường thẳng d và