

VƯỢT VŨ MÔN TOÁN



ĐỀ SỐ 3

A. Phần trắc nghiệm (8 điểm)

Câu 1: Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Hỏi từ tập A có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

- A. 2802. B. 65. C. 2520. D. 2280.

Câu 2: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $(\cos x + 1)(4\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ là :

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 3: Kết quả $(b; c)$ của việc gieo con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần (trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai) được thay vào phương trình $\frac{x^2 + bx + c}{x + 1} = 0 (*)$. Xác suất để phương trình (*) vô nghiệm là :

- A. $\frac{17}{36}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{19}{36}$.

Câu 4: Cho dãy hình vuông $H_1; H_2; \dots; H_n; \dots$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, P_n và S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

- A. Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác không thì (P_n) cũng là cấp số cộng.
B. Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (P_n) cũng là cấp số nhân.
C. Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác không thì (S_n) cũng là cấp số cộng.
D. Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (S_n) cũng là cấp số nhân.

Câu 5: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288dm^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu ?

- A. 1,08 triệu đồng. B. 0,91 triệu đồng. C. 1,68 triệu đồng. D. 0,54 triệu đồng

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, góc hợp bởi đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 45° , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{9}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. C. a^3 . D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ trên đoạn $[-1;3]$.

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{3}$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = 3\sqrt{2}$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = 2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m - 2x$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

- A. $|m| \geq 4$. B. $|m| \leq 4$. C. $|m| > 4$. D. $|m| < 4$.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là giao điểm của (C) và trục hoành. Số điểm $M \in (C)$ không trùng với A và B sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$ là :

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 10: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 11: Tính giới hạn : $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 12: Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$

Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất ?

- A. $t = 22(h)$. B. $t = 15(h)$. C. $t = 14(h)$. D. $t = 10(h)$.

Câu 13: Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

- A. 249. B. 1500. C. 3204. D. 2942.

Câu 14: Biết rằng hàm số $y = a \sin 2x + b \cos 2x - x$ ($0 < x < \pi$) đạt cực trị tại các điểm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a - b$.

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. C. $\sqrt{3}-1$. D. $\sqrt{3}+1$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{x}$; điểm M có hoành độ $x_M = 2 - \sqrt{3}$ thuộc (C) . Biết tiếp tuyến của (C) tại M lần lượt cắt Ox , Oy tại A, B. Tính diện tích tam giác OAB .

- A. $S_{\Delta OAB} = 1$. B. $S_{\Delta OAB} = 4$. C. $S_{\Delta OAB} = 2$. D. $S_{\Delta OAB} = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m < 1$.

Câu 17: Một sợi dây không dẫn dài 1 mét được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được cuốn thành đường tròn, đoạn thứ hai được cuốn thành hình vuông. Tính tỉ số độ dài đoạn thứ nhất trên độ dài đoạn thứ hai khi tổng diện tích của hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất.

- A. $\frac{\pi}{\pi+4}$. B. $\frac{4}{\pi}$. C. 1. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy , tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$.

- A. $(x+2)^2 + y^2 = 1$. B. $x^2 + (y+2)^2 = 1$. C. $(x-2)^2 + y^2 = 1$. D. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

Câu 19: Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147m, cạnh đáy dài 230m. Thể tích của nó là :

- A. 7776300 m^3 . B. 3888150 m^3 . C. 2592100 m^3 . D. 2592100 m^2 .

Câu 20: Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{6}$. D. 1.

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật là :

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = 8$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 6$.

Câu 22: Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2 \sin(x+y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}.$$

A. $\min P = \frac{3}{\pi}$. B. $\min P = \frac{2}{\pi}$. C. $\min P = \frac{2}{3\pi}$. D. $\min P = \frac{5}{\pi}$.

Câu 23: Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập các tam giác có các đỉnh là các đỉnh của đa giác trên. Tính xác suất để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều.

A. $\frac{23}{136}$. B. $\frac{144}{136}$. C. $\frac{3}{17}$. D. $\frac{7}{816}$.

Câu 24: Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$. Tìm a để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $a \geq \frac{12}{7}$. B. $a < -3$. C. $a \leq -3$. D. $a > \frac{12}{7}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \ln 2017 - \ln \frac{x+1}{x}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2018)$.

A. $S = \frac{4037}{2019}$. B. $S = \frac{2018}{2019}$. C. $S = \frac{2017}{2018}$. D. $S = 2018$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, biết $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Một mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với SC tại H , cắt SB tại K . Tính thể tích khối chóp $S.AHK$ theo a .

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{30}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{60}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{60}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + 2(2-m)x + 4$. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. B. $-2 < m < 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ -\frac{5}{2} \neq m \leq -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ -\frac{5}{2} \neq m < -2 \end{cases}$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và có thể tích $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Gọi J là điểm cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính khoảng cách d từ J đến mặt phẳng đáy.

A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có nghiệm $x \in [1;2]$.

$$x^4 + \frac{16}{x^4} - 4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 12\left(x - \frac{2}{x}\right) = m.$$

A. $-13 \leq m \leq 11$. B. $-15 \leq m \leq 9$. C. $-15 < m < 9$. D. $-16 \leq m \leq 9$.

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD gần nhất với giá trị nào sau đây.

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt.

- A. $4 < m < 5$. B. $m \leq 4$. C. $m \geq 5$. D. $m = 1$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

B. Phần tự luận (2 điểm)

Bài 1. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lên bảng. Tính xác suất để số vừa viết thỏa mãn trong số đó mỗi chữ số đều lớn hơn chữ số đứng trước nó.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \frac{2 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 2 \cos x + 4} \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của AB . Biết rằng $SA = 2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 4. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình sau có nghiệm thực

$$(2\sqrt{x} + \sqrt{x-2}) \left(m^2 \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)} \right) = 3x + 2.$$

-----Hết-----

II - BẢNG ĐÁP ÁN

1-D	2-C	3-B	4-C	5-A	6-B	7-C	8-C	9-A	10-A
11-B	12-D	13-B	14-B	15-C	16-B	17-D	18-C	19-C	20-C
21-B	22-B	23-A	24-A	25-B	26-C	27-D	28-C	29-B	30-C
31-A	32-B								

III - LỜI GIẢI CHI TIẾT

A. Phần trắc nghiệm (8 điểm)

Câu 1: Đáp án D

Phương pháp: Xét từng trường hợp: chữ số đầu tiên bằng 1, chữ số thứ hai bằng 1, chữ số thứ ba bằng 1.

Cách giải: Gọi số đó là $\overline{abcde}$

- TH1: $a = 1$

+ b có 7 cách chọn.

+ c có 6 cách chọn.

+ d có 5 cách chọn.

+ e có 4 cách chọn.

Nên có: $7.6.5.4 = 840$ số

- TH2: $b = 1$

+ $a \neq b, a \neq 0$ nên có 6 cách chọn.

+ c có 6 cách chọn.

+ d có 5 cách chọn.

+ e có 4 cách chọn.

Nên có: $6.6.5.4 = 720$ số.

- TH3: $c = 1$.

+ $a \neq c, a \neq 0$ nên có 6 cách chọn.

+ b có 6 cách chọn.

+ d có 5 cách chọn.

+ e có 4 cách chọn.

Nên có $6.6.5.4 = 720$ số.

Vậy có tất cả $840 + 720 + 720 = 2280$ số.

Câu 2: Đáp án C

Phương pháp: Biến đổi, đưa phương trình trên về dạng phương trình tích, sử dụng công thức nhân đôi của cos.

Cô lập m đưa phương trình về dạng $f(x) = m$. Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$ song song với trục hoành.

Cách giải: $(\cos x + 1)(4 \cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4 \cos 2x - m \cos x) = m(1 - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4 \cos 2x - m \cos x) = m(1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4 \cos 2x - m \cos x - m(1 - \cos x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(4 \cos 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = 0 \\ 4 \cos 2x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ \cos 2x = \frac{m}{4} (*) \end{cases}$$

Xét nghiệm $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \notin \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \forall k \in \mathbb{Z}$

Để phương trình ban đầu có đúng 2 nghiệm thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Xét hàm số $y = \cos 2x$ trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ ta có: $y' = -2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Mà $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

BBT:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y'	-	+	
y	1	-1	$-\frac{1}{2}$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $-1 < \frac{m}{4} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < m \leq -2$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2\}$

Câu 3: Đáp án B

Phương pháp: Xác suất của biến cố A là $\frac{n_A}{n_\Omega}$ trong đó n_A là số khả năng mà biến cố A có thể xảy ra, n_Ω là tất cả các khả năng có thể xảy ra.

Cách giải: $\frac{x^2 + bx + c}{x + 1} = 0 (*)$

Để phương trình (*) vô nghiệm thì phương trình $x^2 + bx + c = 0 (**)$ có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: PT (**) có 1 nghiệm $x = -1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4c = 0 \\ 1 - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4c \\ c = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 = 4b - 4 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow (b; c) = (2; 1)$$

$$\text{TH2: PT (**) vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4c < 0 \Rightarrow b^2 < 4c \Leftrightarrow b < 2\sqrt{c}$$

Vì c là số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ 2 nên $c \leq 6 \Rightarrow b \leq 2\sqrt{6} \approx 4,9$.

Mà b là số chấm xuất hiện ở lần gieo đầu nên $b \in \{1; 2; 3; 4\}$

Với $b = 1$ ta có: $c > \frac{1}{4} \Rightarrow c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 6 cách chọn c.

Với $b = 2$ ta có: $c > 1 \Rightarrow c \in \{2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 5 cách chọn c.

Với $b = 3$ ta có: $c > \frac{9}{4} \Rightarrow c \in \{3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ có 4 cách chọn c.

Với $b = 4$ ta có: $c > 4 \Rightarrow c \in \{5; 6\} \Rightarrow$ có 2 cách chọn c.

Do đó có $6 + 5 + 4 + 2 = 17$ cách chọn $(b; c)$ để phương trình (**) vô nghiệm.

Gieo con súc sắc 2 lần nên số phần tử của không gian mẫu $n_\Omega = 6.6 = 36$

Vậy xác suất để phương trình (*) vô nghiệm là $\frac{1+17}{36} = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Đáp án C

Phương pháp: Dãy số $\{u_n\}_{n=1,2,\dots}$ là cấp số cộng với công sai d thì $u_{n+1} = u_n + d \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Dãy số $\{u_n\}_{n=1,2,\dots}$ là cấp số nhân với công bội k thì $u_{n+1} = ku_n \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Cách giải

+) Giả sử dãy u_n là $u_1; u_2; \dots; u_n$ là CSC có công sai $d \neq 0 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\Rightarrow 4u_n = 4u_1 + (n-1)4d$$

Dãy P_n có dạng $4u_1; 4u_2; \dots; 4u_n$ là CSC có công sai $4d \neq 0 \Rightarrow A$ đúng

+) Giả sử dãy u_n là CSN có công bội $k \neq 0 \Rightarrow u_n = k^{n-1}u_1$

$$\Rightarrow u_n^2 = k^{2n-2}u_1^2 = (k^2)^{n-1}u_1^2$$

Dãy S_n có dạng $u_1^2; u_2^2; \dots; u_n^2$ cũng là CSN có công bội $k^2 \neq 0 \Rightarrow D$ đúng.

$u_n = k^{n-1}u_1 \Rightarrow 4u_n = 4k^{n-1}u_1 = k^{n-1}.4u_1 \Rightarrow$ Dãy P_n có dạng $4u_1; 4u_2; \dots; 4u_n$ là CSN với công bội k. Suy ra B đúng.

Câu 5: Đáp án A

• Gọi $x (x > 0)$ chiều rộng của đáy bể.

Ta có:

+ Chiều dài của đáy bể là: $2x$.

+ Chiều cao của bể là: $\frac{0,144}{x^2}$.

- Diện tích cần xây: $2x^2 + \frac{0,864}{x}$.

Xét $f(x) = 2x^2 + \frac{0,864}{x}$. Ta có: $f'(x) = 4x - \frac{0,864}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,6$.

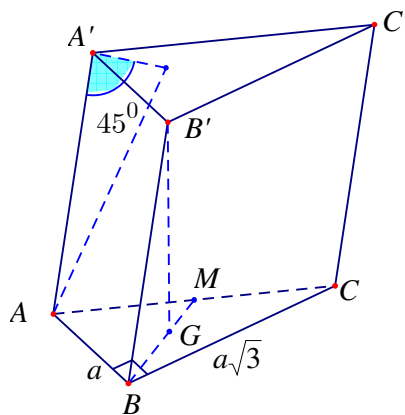
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	0.6	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	2,16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = 2,16$.

Vậy: chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $2,16.500000 = 1080000$ đồng

Câu 6: Đáp án B



- $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$; $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 2a$.

• Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow B'G \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của AC

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{2a}{3}.$$

• $(\widehat{AA', (A'B'C')}) = 45^\circ \Rightarrow (\widehat{BB', (ABC)}) = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B'BG} = 45^\circ \Rightarrow \Delta B'BG$ vuông cân tại G

$$\Rightarrow B'G = GB = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = B'G \cdot S_{ABC} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

Câu 7: Đáp án C

• Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$

• Tính được: $y(-1) = 2$; $y(3) = 2$; $y(1) = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 3]} y = 2\sqrt{2}.$$

Câu 8: Đáp án C

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{2x+4}{x+1} = m - 2x \quad (x \neq -1) \Leftrightarrow 2x^2 - (m-4)x - m + 4 = 0. \quad (1)$$

- Đường thẳng $y = m - 2x$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-4)^2 - 8(-m+4) > 0 \\ 2 - (m-4)(-1) - m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |m| > 4.$$

Câu 9: Đáp án A

Xét PT: $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow A(1;0), B(-5;0)$

$M(x; y) \in (C) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x-1; y), \overrightarrow{BM} = (x+5; y)$ điều kiện góc $AMB = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+5) + (x-1)^4(x+5)^2 = 0$$

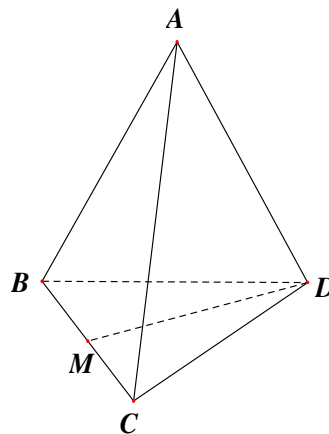
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+5) \left[1 + (x-1)^3(x+5) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + (x-1)^3(x+5) = 0 \quad (\text{do } x \neq 1, x \neq -5)$$

Xét hàm số $f(x) = 1 + (x-1)^3(x+5)$ có:

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+5) + (x-1)^3 = (x-1)^2(4x+14)$$

Dễ thấy hàm số có một cực tiểu duy nhất $x = -\frac{7}{2}$ với GTCT là $y < 0$. Do vậy PT $f(x) = 0$ có hai nghiệm hay tồn tại hai điểm M thỏa mãn điều kiện.

Câu 10: Đáp án A

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2 - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}a^2$$

$$\Rightarrow a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DM}) = \frac{1}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos(AB; DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Câu 11: Đáp án B

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim S_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Câu 12: Đáp án D

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$$

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq h \leq 15$$

$$\max h = 15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Thời gian ngắn nhất } \Rightarrow t = -2 + 12 = 10(h)$$

Câu 13: Đáp án B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcdef}$.

- Số cần tìm có dạng $\overline{154def}$. Khi đó d có 7 cách chọn, e có 6 cách chọn, f có 5 cách chọn.
 $\Rightarrow$ có 210 cách chọn.
- Số cần tìm có dạng $\overline{a154ef}$. Khi đó a có 6 cách chọn, e có 6 cách chọn, f có 5 cách chọn.
 $\Rightarrow$ có 180 cách chọn.

Hai khả năng $\overline{ab154f}$ và $\overline{abc154}$ cũng có số cách chọn như $\overline{a154ef}$.

Suy ra có tổng số cách chọn là: $(210 + 180 \cdot 3) \cdot 2 = 750$

Câu 14: Đáp án B

Ta có $y' = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x - 1$. Để hàm số đạt cực trị các điểm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{2}$ thì

$$\begin{cases} y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \sqrt{3}b - 1 = 0 \\ -2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Câu 15: Đáp án C**Phương pháp:**

- Viết phương trình tiếp tuyến với C tại M.
- + Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Tìm tọa độ hai giao điểm A, B của tiếp tuyến với các trục tọa độ Ox, Oy.
- Diện tích tam giác OAB là: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB$.

Cách giải:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}. \text{ Ta có: } x_M = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow M(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}).$$

Phương trình tiếp tuyến với C tại $M(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ là:

$$d: y = -y'(x_M)(x - x_M) + y_M = -\frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2}x - 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}^2 x + 4 + 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow B(0; 4 + 2\sqrt{3})$$

$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow A(4 - 2\sqrt{3}; 0)$$

$$\text{Vậy } S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |4 + 2\sqrt{3}| |4 - 2\sqrt{3}| = 2.$$

Câu 16: Đáp án B

Phương pháp: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ, xét hàm.

Cách giải:

Khi $m = 1$ ta có: $y = 1$ là hàm hằng nên $m = 1$ không thỏa mãn.

Khi $m \neq 1$. Đặt $t = \cos x$. Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1)$

$$\text{Xét hàm } y = \frac{t-1}{t-m} \text{ có } y' = \frac{t-m-t+1}{t-m^2} = \frac{1-m}{t-m^2}.$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số $y = \frac{t-1}{t-m}$ nghịch biến trên $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ 1 < 1-m \Leftrightarrow \\ 1-m < 0 \end{cases} \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \Leftrightarrow m > 1. \\ m > 1 \end{cases}$$

Câu 17: Đáp án D

Phương pháp:

- Công thức tính diện tích và chu vi hình tròn: $S = \pi R^2, C = 2\pi R$.

- Công thức tính diện tích và chu vi hình vuông: $S = a^2, C = 4a$.

Cách giải: Gọi chiều dài đoạn uốn thành hình vuông là x mét thì chiều dài đoạn uốn thành hình tròn là $1-x$ mét.

Cạnh hình vuông là $\frac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\frac{x^2}{16}$.

Bán kính hình tròn là $\frac{1-x}{2\pi}$ nên diện tích hình tròn là $\pi \cdot \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{1-x^2}{4\pi}$.

Xét hàm $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1-x^2}{4\pi}$ có $f'(x) = \frac{x}{8} + \frac{x-1}{2\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi+4}$.

Do đó $f(x)$ đạt GTNN tại $x = \frac{4}{\pi+4} \Rightarrow 1-x = 1 - \frac{4}{\pi+4} = \frac{\pi}{\pi+4}$.

Vậy tỉ số đoạn thứ nhất và đoạn thứ hai là $\frac{\pi}{\pi+4} : \frac{4}{\pi+4} = \frac{\pi}{4}$.

Câu 18: Đáp án C

$$(C): x^2 + y^2 = 1$$

$$O(0;0), R=1$$

$$D_I(O) = O' \Rightarrow O'(2;0)$$

$$(C'): (x-2)^2 + y^2 = 1$$

Câu 19: Đáp án C

$$V = \frac{1}{3} 230.230.147 = 2592100$$

Câu 20: Đáp án C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x(ax+2a+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)} = \frac{2}{2a+1}$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x=0 \Leftrightarrow \frac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

Câu 21: Đáp án B

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài kích thước ba cạnh lần lượt là $AA'=a, AB=b, AD=c$ và có đường chéo AC' .

Theo bài ra, ta có a, b, c lập thành cấp số nhân có công bội $q=2$. Suy ra $\begin{cases} b=2a \\ c=4a \end{cases}$.

Mặt khác, độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{21} \Rightarrow AA'^2 + AB^2 + AD^2 = 21 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 21..$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + b^2 + c^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ a^2 + (2a)^2 + (4a)^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b = 4a \\ 21a^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = abc = 8$

Câu 22: Đáp án B

Ta có $\cos 2x + \cos 2y + 2\sin(x+y) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$. Suy ra: $x+y = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Áp dụng bất: } \frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{(\sin^2 x + \sin^2 y)^2}{x+y} = \frac{2}{\pi}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó } \min P = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 23: Đáp án A

Số các tam giác bất kỳ là $n(\omega) = C_{18}^3$

Số các tam giác đều là $\frac{18}{3} = 6$

Có 18 các chọn một đỉnh của đa giác, mỗi đỉnh có 8 các chọn 2 đỉnh còn lại để được một tam giác cân

Số các tam giác cân là: $18.8 = 144$

Số các tam giác cân không đều là: $144 - 6 = 138 \Rightarrow n(A) = 138$

$$\text{Xác suất } \Rightarrow P(A) = \frac{138}{C_{18}^3} = \frac{23}{136}$$

Câu 24: Đáp án A

$$y = -\frac{x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$$

$$y' = -x^2 + 2(a-1)x + (a+3)$$

$$\text{Để hàm số đồng biến trên khoảng } (0;3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(0) \geq 0 \\ y'(3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + a + 3 > 0 \\ a + 3 \geq 0 \\ -9 + 6(a-1) + a + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + 4 > 0 \\ a \geq -3 \\ 7a - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -3 \\ a \geq \frac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{12}{7}$$

Câu 25: Đáp án B

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{x}{(x+1)} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{6} a^3 = \frac{1}{3} SO \cdot a^2 \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\text{Xét tam giác } SMO \text{ ta có } SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a$$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SMN . Khi đó ta có MJ là đường phân giác của tam giác SMN .

$$\text{Suy ra: } \frac{SJ}{JO} = \frac{MS}{MO} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \Rightarrow SJ = 2JO.$$

$$\text{Mà } SO = SJ + JO = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Leftrightarrow 3JO = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Leftrightarrow JO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 29: Đáp án B (Học sinh được hưởng điểm)

$$\text{Đặt } t = x - \frac{2}{x}, x \in [1; 2]. \text{ Đạo hàm } t' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0, \forall x \in [1; 2].$$

$$\text{Do đó } t(1) \leq t \leq t(2), \forall x \in [1; 2], \text{ suy ra } -1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4, x^4 + \frac{16}{x^4} = \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^2 - 8 = (t^2 + 4)^2 - 8 = t^4 + 8t^2 + 8.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t^4 + 8t^2 + 8 - 4(t^2 + 4) - 12t = m \Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 12t = m + 8 \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm trong đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm trong $[-1; 1]$. Xét hàm số $y = f(t) = t^4 + 4t^2 - 12t$ trên $[-1; 1]$.

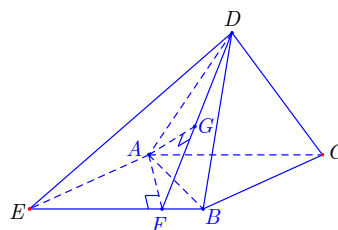
$$\text{Đạo hàm } y' = 4t^3 + 8t - 12, t \in (-1; 1). y' = 4(t-1)(t^2 + t + 3) < 0, \forall t \in (-1; 1).$$

Bảng biến thiên:

x	-1	1
y'		-
y	-7	17

$$\text{Do đó để phương trình đã cho có nghiệm trên } [1; 2] \text{ thì } -7 \leq m + 8 \leq 17 \Leftrightarrow -15 \leq m \leq 9.$$

Câu 30: Đáp án C



$$\text{Ta có: } AD^2 + AC^2 = DC^2 \text{ nên tam giác } ADC \text{ vuông tại } A \text{ hay } AD \perp AC.$$

$AD^2 + AB^2 = DB^2$ nên tam giác ADB vuông tại A hay $AD \perp AB$.

Khi đó $AD \perp (ABC)$.

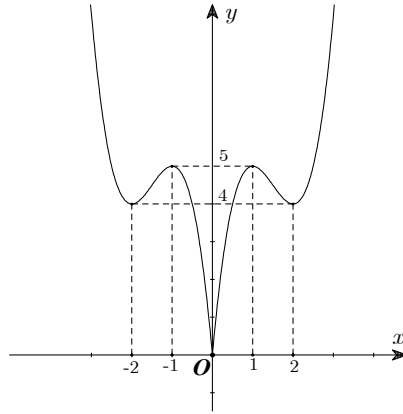
Dựng hình bình hành $ACBE$. Khi đó $AC \parallel (BDE)$

Suy ra $d(AC, BD) = d(AC, (BDE)) = d(A, (BDE))$.

Kẻ $AF \perp BE$. Khi đó $BE \perp (DAF)$. Kẻ $AG \perp DF$ thì $AG \perp (DBE)$.

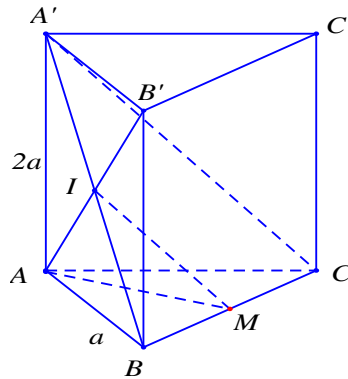
$$P_{ABE} = \frac{9}{2} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} AF \cdot BE \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{DA^2} \Rightarrow AG = \sqrt{\frac{240}{79}}.$$

Câu 31: Đáp án A



Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x|$ tại 6 điểm phân biệt thì $4 < m < 5$.

Câu 32: Đáp án B



• Gọi I, M lần lượt là trung điểm của $A'B, BC$. $\Rightarrow IM \parallel A'C \Rightarrow A'C \parallel (AB'M)$

$$\Rightarrow d(AB', A'C) = d(A'C, (AB'M)) = d(C, (AB'M)) = \frac{3V_{B'AMC}}{S_{AB'M}}.$$

$$\bullet V_{B'AMC} = \frac{1}{3} BB' \cdot S_{AMC} = \frac{1}{6} BB' \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$\bullet B'M = \sqrt{BM^2 + BB'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4a^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'M \\
& \bullet S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot B'M = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{a^2\sqrt{51}}{8} . \\
& \bullet d(AB', A'C) = \frac{3V_{B'AMC}}{S_{AB'M}} = \frac{3 \cdot a^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}}{a^2 \frac{\sqrt{51}}{8}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17} .
\end{aligned}$$

B. Phần tự luận (mỗi bài đúng 0,5 điểm)

Bài 1. (0,5 điểm)

Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lên bảng. Tính xác suất để số vừa viết thỏa mãn trong số đó mỗi chữ số đều lớn hơn chữ số đứng trước nó.

Phân tích

Gọi A là biến cố số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số được viết ra thỏa mãn mỗi chữ số lớn hơn chữ số đứng trước nó. Khi đó

$$\Omega = \{\overline{abcd} : a \neq 0, d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}\};$$

$$\Omega_A = \{\overline{abcd} : 0 < a < b < c < d, d \text{ là số chẵn}\}.$$

Để tính $|\Omega|$ ta xét các trường hợp sau

+) $d = 0$. Trường hợp này có A_9^3 số.

+) $d \in \{2, 4, 6, 8\}$. Trường hợp này có $(A_9^3 - A_8^2) \cdot 4$ số.

$$\text{Suy ra } |\Omega| = A_9^3 + 4(A_9^3 - A_8^2) = 2296.$$

Để tính $|\Omega_A|$ ta xét các trường hợp sau

+) $d = 4$. Trường hợp này có 1 số.

+) $d = 6$. Trường hợp này có C_5^3 số.

+) $d = 8$. Trường hợp này có C_7^3 số.

$$\text{Suy ra } |\Omega_A| = 1 + C_5^3 + C_7^3 = 46.$$

$$\text{Do đó } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{46}{2296} \approx 0,02.$$

Bài giải

♥ Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = A_9^3 + 4(A_9^3 - A_8^2) = 2296$.

♥ Gọi A là biến cố: “số vừa viết thỏa mãn trong số đó mỗi chữ số đều lớn hơn chữ số đứng trước nó”

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $|\Omega_A| = 1 + C_5^3 + C_7^3 = 46$.

♥ Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{46}{2296} = \frac{23}{1148}$. $\square$

Bài 2. (0,5 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \frac{2\sin x - \cos x}{2\sin x + 2\cos x + 4} \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Bài giải

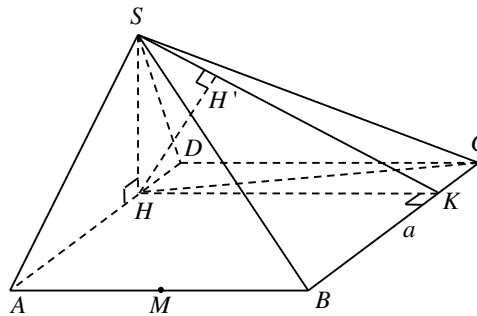
Xét hàm số $f(x) = \frac{2\sin x - \cos x}{2\sin x + 2\cos x + 4}$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{6 + 4\sin x + 8\cos x}{(2\sin x + 2\cos x + 4)^2} > 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Do đó } \min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{6}; \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Bài 3. (0,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của AB . Biết rằng $SA = 2\sqrt{3}a$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Bài giải

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SCH} = (\widehat{SC}, (ABCD)) = 30^\circ$. Trong tam giác vuông SAD ta có $SA^2 = AH \cdot AD$

$$\Leftrightarrow 12a^2 = \frac{3}{4}AD^2 \Rightarrow AD = 4a; HA = 3a; HD = a$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{HA \cdot HD} = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = SH \cdot \cot 30^\circ = 3a$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{HC^2 - HD^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCD} = AD \cdot CD = 8\sqrt{2}a^2. \text{ Suy ra } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{6}a^3}{3}.$$

Vì M là trung điểm AB và $AH \parallel (SBC)$ nên

$$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}d(H, (SBC)). \quad (1)$$

Kẻ $HK \perp BC$ tại K , $HH' \perp SK$ tại H' . Vì $BC \perp (SHK)$ nên $BC \perp HH' \Rightarrow HH' \perp (SBC)$. (2)

$$\text{Trong tam giác vuông } SHK \text{ ta có } \frac{1}{HH'^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{24a^2} \Rightarrow HH' = \frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}a. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $d(M, (SBC)) = \frac{\sqrt{66}}{11}a$.

Bài 4. (0,5 điểm)

Tìm các giá trị của m sao cho phương trình sau có nghiệm thực

$$\left(2\sqrt{x} + \sqrt{x-2}\right) \left(m^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)}\right) = 3x+2 \quad (1)$$

Bài giải

♥ Điều kiện: $x > 2$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } (1) &\Leftrightarrow m^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} \\ &\Leftrightarrow m^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{x(x-2)} = (2-m^2)\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - 3\sqrt[4]{\frac{x-2}{x}} = 2-m^2 \end{aligned} \quad (2)$$

♥ Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x}}$ với $t \in (0;1)$ (do $x > 2$). Phương trình (2) trở thành

$$\frac{1}{t^2} - 3t = 2 - m^2 \quad (3)$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t \in (0;1)$

(Lưu ý: Nếu HS sai điều kiện $t \in (0;1)$ thì không chấm phần còn lại)

♥ Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t^2} - 3t$ với $t \in (0;1)$, ta có:

$$f'(t) = -\frac{2}{t^3} - 3 < 0, \forall t \in (0;1)$$

Bảng biến thiên:

t	0	1
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$+\infty$	-2

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra:

$$\text{Phương trình (3) có nghiệm } t \in (0;1) \Leftrightarrow 2 - m^2 > -2 \Leftrightarrow 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

♥ Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $-2 < m < 2$.

-----Hết-----