

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DÀNH CHO HỌC SINH YẾU-TB

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

- **CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**
- **CẬP NHẬT THÊM NHIỀU DẠNG TOÁN MỚI**
- **CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG**

ÔN THI THPT QUỐC GIA

NGUYÊN HÀM

A - KIẾN THỨC CHUNG

1- Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý:

+ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

+ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$.

+ Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2 - Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

3 - Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

4 – Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int d(ax+b) = \frac{1}{a}(ax+b) + C$	$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$
$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \left(\frac{ax+b}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int \operatorname{tg}(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \ln a} a^{px+q} + c$	$\int \operatorname{cotg}(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax+b) + c$

B - BÀI TẬP**DẠNG 1: CÁC CÂU HỎI LÝ THUYẾT**

Câu 1: Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (1): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có đạo hàm trên $[a; b]$.
 (2): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (4): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

B. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

C. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ($k \neq 0; k \in \mathbb{R}$).

Câu 3: Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

B. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.

C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

D. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.

D. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k \in \mathbb{R}$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (II) và (III). B. Cả 3 mệnh đề. C. (I) và (III). D. (I) và (II).

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x)$, $\forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x)$, $\forall x \in K$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K .

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Câu 9: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**:

A. Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thì $F(x) + 1$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$.

B. Mọi hàm liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

C. Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thì $\int f(x) dx = F(x) + C$, với C là một hằng số.

D. Nếu $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) + G(x) = C$, với C là một hằng số.

Câu 10: Cho f, g là các hàm số liên tục trên K . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**.

A. $\int [f(x).g(x)] dx = \int f(x) dx - \int f(x) dx \int g(x) dx$.

- B. $\int f'(x) f^2(x) dx = \frac{f^3(x)}{3} + C.$
 C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
 D. $k \int f(x) dx = k \int f(x) dx, (k : \text{hằng số}).$

DẠNG 2: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN**Câu 11:** Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\int dx = x + C.$
 B. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
 C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$
 D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

Câu 12: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x + C.$
 B. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\tan x + C.$
 C. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
 D. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Câu 13: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).
 B. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số).
 C. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số).
 D. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số, $n \in \mathbb{Z}$).

Câu 14: Biết $\int f(u) du = F(u) + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(2x-1) dx = 2F(2x-1) + C.$
 B. $\int f(2x-1) dx = 2F(x) - 1 + C.$
 C. $\int f(2x-1) dx = \frac{1}{2} F(2x-1) + C.$
 D. $\int f(2x-1) dx = F(2x-1) + C.$

Câu 15: Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\int a^x dx = a^x \ln a + C$ ($a > 0; a \neq 1$).
 B. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
 C. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C.$
 D. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x + C.$
 B. $\int \sin x dx = \cos x + C.$
 C. $\int 2x dx = x^2 + C.$
 D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

Câu 17: Công thức nguyên hàm nào sau đây sai?

- A. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$
 B. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
 C. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
 D. $\int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + C.$

Câu 18: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}(2x+1)^2 + C.$
 B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + C.$
 C. $\int f(x) dx = 2(2x+1)^2 + C.$
 D. $\int f(x) dx = (2x+1)^2 + C.$

Câu 19: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

A. $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$. B. $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$. C. $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$. D. $4x + 1$.

Câu 20: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 10x^4 - 3x + 2$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$. B. $\int f(x) dx = 10x^5 - 3x^2 + 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$. D. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2C$.

Câu 21: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ là

A. $\ln(3x+1) + C$. B. $\ln(-3x-1) + C$. C. $\ln|3x+1| + C$ D. $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$

A. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$. B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$. D. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x}$ là

A. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x+1}}{\ln 2} + C$. B. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x}}{\ln 2} + C$.
C. $\int 2^{2x} dx = \frac{4^x}{\ln 2} + C$. D. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + C$.

Câu 24: Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+1}{x^2} dx$?

A. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln|x| + \ln x^2 + C$. B. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$.
C. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \frac{\frac{x^2}{2} + x + C}{\frac{x^3}{3} + C}$. D. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$.

Câu 25: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C$. B. $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$. C. $\frac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$. D. $\frac{3\sqrt{(2x+1)^3}}{4} + C$.

Câu 26: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+3}$ là

A. $\int f(x) dx = e^{2x+3} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$.
C. $\int f(x) dx = 2e^{2x+3} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{2x+3} + C$.

Câu 27: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

A. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -2 \tan \frac{x}{2} + C$. B. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C$.

$$\text{C. } \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} + C.$$

$$\text{D. } \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -2 \cot \frac{x}{2} + C.$$

Câu 28: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

$$\text{A. } \int f(x) dx = \sqrt{2x} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = 2\sqrt{2x} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = -\frac{1}{2x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \ln \sqrt{2x} + C.$$

Câu 29: Nếu $\int f(x) dx = \sin x - e^x + C$ thì

$$\text{A. } f(x) = -\cos x - e^x.$$

$$\text{B. } f(x) = \cos x + e^x.$$

$$\text{C. } f(x) = \cos x - e^x.$$

$$\text{D. } f(x) = -\cos x - e^x + C.$$

Câu 30: Tìm khẳng định sai?

$$\text{A. } \int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C.$$

$$\text{B. } \int 2^x dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C.$$

$$\text{C. } \int e^{-x} dx = C - e^{-x}$$

$$\text{D. } \int \tan^2 x dx = \tan x - x - C.$$

Câu 31: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

$$\text{A. } F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3\ln|x| + C.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{2x^3}{3} + 3\ln|x| + C.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

Câu 32: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

$$\text{A. } x^2 + 2\cos 2x + C. \quad \text{B. } x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C. \quad \text{C. } x^2 - 2\cos 2x + C. \quad \text{D. } x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Câu 33: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x+2)}$ là

$$\text{A. } \cot(x+2) + C.$$

$$\text{B. } -\cot(x+2) + C.$$

$$\text{C. } -\frac{2\cos(x+2)}{\sin^3(x+2)} + C.$$

$$\text{D. } -\frac{\cos(x+2)}{\sin^3(x+2)} + C.$$

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2018$ là

$$\text{A. } F(x) = e^x + \sin x + 2018x + C.$$

$$\text{B. } F(x) = e^x - \sin x + 2018x + C.$$

$$\text{C. } F(x) = e^x + \sin x + 2018x.$$

$$\text{D. } F(x) = e^x + \sin x + 2018 + C.$$

Câu 35: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

$$\text{A. } \int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$$

Câu 36: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -e^{-x}$ là

$$\text{A. } e^{-x} + C.$$

$$\text{B. } e^x + C.$$

$$\text{C. } -e^{-x} + C.$$

$$\text{D. } -e^x + C.$$

Câu 37: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin(x-1)$?

$$\text{A. } \int \sin(x-1) dx = -\cos(x-1) + C.$$

$$\text{B. } \int \sin(x-1) dx = \cos(x-1) + C.$$

C. $\int \sin(x-1)dx = (x-1)\cos(x-1) + C.$

D. $\int \sin(x-1)dx = (1-x)\cos(x-1) + C.$

Câu 38: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 2xe^{x^2}.$

B. $f(x) = 2x^2e^{x^2} + C.$

C. $f(x) = xe^{x^2}.$

D. $f(x) = x^2e^{x^2} + 3.$

Câu 39: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x+3).$

A. $F(x) = -\sin(2x+3) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x+3) + C.$

D. $F(x) = \sin(2x+3) + C.$

Câu 40: Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \cos^2 x.$

B. $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}.$

C. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin^2 x.$

D. $f(x) = \tan^2 x, g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2}.$

Câu 41: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là

A. $-\ln|\cos x| + C.$

B. $-\frac{1}{\cos^2 x} + C.$

C. $\ln|\cos x| + C.$

D. $\frac{1}{\cos^2 x} + C.$

Câu 42: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3.$ Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F(x) = 2\tan x + 3.$

B. $F(x) = \tan x - 4.$

C. $F(x) = 2\tan x - 5.$

D. $F(x) = -2\cot x - 5.$

Câu 43: Tìm khẳng định sai?

A. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x - C.$

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C.$

C. $\int 2^x dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int e^{-x} dx = C - e^{-x}$

Câu 44: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x}$ là

A. $\ln|1-x| + C.$

B. $\frac{1}{2}\ln(1-x)^2 + C.$

C. $-\ln|2-2x| + C.$

D. $-\frac{1}{2}\ln|1-x| + C.$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = \frac{6}{3-2x}$ và $f(2) = 0.$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3\ln|3-2x|.$

B. $f(x) = 2\ln|3-2x|.$

C. $f(x) = -3\ln|3-2x|.$

D. $f(x) = -2\ln|3-2x|.$

Câu 46: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$ Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right).$

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$

C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}.$

Câu 47: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int \frac{1}{3x} dx = \ln|3x| + C.$

B. $\int e^x dx = e^x + C.$

C. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

D. $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Câu 48: Tìm nguyên hàm $I = \int \sqrt{2x+1} \, dx$

A. $I = \frac{2}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C.$

B. $I = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} + C.$

C. $I = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C.$

D. $I = \frac{1}{4\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 49: Tìm $a + b$ biết $\int \frac{7x+11}{(x+1)(x+2)} \, dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+1| + C?$

A. $a + b = 7.$

B. $a + b = 5.$

C. $a + b = 11.$

D. $a + b = -5.$

Câu 50: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

A. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = -\cos 2x.$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = 2x - \pi + 1.$

Câu 51: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}.$

A. $\int f(x) \, dx = x^3 + x^2 + C.$

B. $\int f(x) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + C.$

C. $\int f(x) \, dx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

D. $\int f(x) \, dx = x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 52: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} \, dx.$

A. $I = 2x^2 - x - 2 \ln|x-3| + C.$

B. $I = x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C.$

C. $I = x^2 - x - 2 \ln|x-3| + C.$

D. $I = 2x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C.$

Câu 53: Hàm số $F(x) = \frac{1}{27} e^{3x+1} (9x^2 - 24x + 17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x-1}.$

B. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{3x+1}.$

C. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x+1}.$

D. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{3x+1}.$

Câu 54: Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x \, dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C.$ Khi đó $a - b$ bằng:

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. 2.

Câu 55:) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

A. $1 + \cos x + C.$

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C.$

C. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C.$

D. $x^2 - \cos x + C.$

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1.$ Tìm $f(x).$

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x.$

Câu 57: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7.$

A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1.$

B. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4.$

C. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 10.$

D. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}.$

Câu 58: Cho $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm phương án **sai**?

A. $F(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}.$

B. $F(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}.$

C. $F(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{x+1}.$

Câu 59: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x \cdot \ln 9$ thỏa $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 6.$

B. $F(1) = 3.$

C. $F(1) = 12(\ln 3)^2.$

D. $F(1) = 4.$

Câu 60: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $(1; -2)$,

A. $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} - 1.$

B. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3.$

C. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + 3.$

D. $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + 1.$

Câu 61: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 6x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 6x}{6} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 6x}{6} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C.$

Câu 62: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $F(1) = 3$. Tính $F(4)$.

A. $F(4) = 5.$

B. $F(4) = 3.$

C. $F(4) = 3 + \ln 2.$

D. $F(4) = 4.$

Câu 63: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \sin 2x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - \cos 2x + C.$

D. $\int f(x) dx = 3x^2 + 2 \cos 2x + C.$

Câu 64: Hàm số $F(x)$ nào sau đây là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3}$?

A. $2 \ln|x+3| - \ln|x+1| + C.$

B. $\ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + 2.$

C. $\ln[(x+1)(x+3)].$

D. $\ln(2|x+1|).$

Câu 65: Tìm giá trị m để hàm số $F(x) = m^2 x^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4.$

A. $m = \pm 1.$

B. $m = -1.$

C. $m = 1.$

D. $m = 2.$

Câu 66: Cho hàm số $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tổng $a+b$ là

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

DẠNG 3: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN TÌM HẸNG SỐ C

Câu 67: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là

- A. $2x^3 - 4x^4$. B. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$. C. $x^3 - x^4 + 2x$. D. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$.

Câu 68: Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

- A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$ B. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$
C. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$ D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

Câu 69: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.
C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

Câu 70: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) = 2x - 3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

- A. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$ B. $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$
C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$ D. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Câu 71: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $F(2) = 3 + \frac{1}{2}\ln 3$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = 2\ln 5 + 3$. B. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 5$. C. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 3$. D.

$$F(3) = -2\ln 5 + 5.$$

Câu 72: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (2x+1)(x-2)$, biết $F(1) = 2$.

- A. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{29}{6}$. B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$.
C. $F(x) = (x^2 + x)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + 2$. D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$.

Câu 73: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

- A. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$ B. $F(x) = \cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$
C. $F(x) = -\cot x + x^2$ D. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 74: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

- A. $F(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x$. B. $F(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{\pi}{6}$.

C. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

Câu 75: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị của hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 76: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$

A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 4$.

B. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$.

C. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} - 10$.

D. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

Câu 77: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x^2} (x \neq 0)$. Biết rằng $F(1) = 1$ thì $F(x)$ là

A. $F(x) = 2x - \frac{3}{x} + 2$.

B. $F(x) = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + 4$.

C. $F(x) = 2x + \frac{3}{x} - 4$.

D. $F(x) = 2\ln|x| + \frac{3}{x} + 2$.

Câu 78: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x(1 - e^{-x})$ và $F(0) = 3$ thì $F(x)$ là?

A. $e^x - x$

B. $e^x - x + 2$

C. $e^x - x + C$

D. $e^x - x + 1$

Câu 79: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8(1-2x)^3$. Tính $I = F(1) - F(0)$.

A. $I = 0$.

B. $I = -2$.

C. $I = -16$.

D. $I = 2$.

DẠNG 4: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN HÀM HỮU TỈ

Dạng: $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}$

– Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.

– Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $f(x)$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn: $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$.

b. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Giải

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+3x+3}{x+1} dx = \int \left(x+2 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x+1| + C.$$

b. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C.$$

Nhận xét: Qua thí dụ trên:

Câu a) chúng ta chỉ cần thực hiện phép chia đa thức là đã biến đổi phân thức hữu tỉ ban đầu thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.

Câu b) chúng ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

Ta được đồng nhất thức $1 = (A+B)x + 2A+B$. (1)

Để xác định A, B trong (1) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Phương pháp đồng nhất hệ số: Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Câu 80: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$.

A. $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$

B. $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C. $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$

D. $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

Câu 81: Tìm $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx$.

A. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

B. $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$

C. $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

D. $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$

Câu 82: Nguyên hàm $\int \frac{x^2-x+1}{x-1} dx$

A. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

B. $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

C. $x + \frac{1}{x-1} + C.$

D. $x^2 + \ln|x-1| + C.$

Câu 83: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ là

A. $-\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

C. $-\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

D. $\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$

Câu 84: Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(2x+1)(x-2)}$?

A. $F(x) = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x-2}{x+\frac{1}{2}}\right| + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + C$

C. $F(x) = -\frac{1}{5} \ln\left|\frac{2x+1}{x-2}\right| + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{15} \ln\left|\frac{3x-6}{2x+1}\right| + C.$

Câu 85: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

A. $F(x) = \ln|x| - \ln|x-1|$.

B. $F(x) = \ln|x| + \ln|x-1|$.

C. $F(x) = -\ln|x| - \ln|x-1|$.

D. $F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|$.

Câu 86: Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. $a+b=1$.

B. $a+b=5$.

C. $a+b=-5$.

D. $a+b=-1$.

Câu 87: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2}$ là:

A. $\ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

B. $\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

C. $e^x + \frac{1}{x} + C$.

D. $\ln x + \frac{1}{x} + C$.

Câu 88: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2-4| + C$.

B. $\frac{1}{2(x^2-4)} + C$.

C. $\frac{-1}{4(x^2-4)^2} + C$.

D. $2 \ln|x^2-4| + C$.

Câu 89: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

A. $\int f(x) dx = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + C$.

D. $\int f(x) dx = -\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

Câu 90: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$.

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| + C$.

C. $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$.

Câu 91: Nguyên hàm $\int \frac{dx}{x^2+4x-5} =$

A. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$.

B. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+5}{x-1} \right| + C$.

C. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$.

D. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x-5} \right| + C$.

Câu 92: Biết rằng $\int \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\frac{b}{a} = 2$.

B. $\frac{2a}{b} = -1$.

C. $a = 2b$.

D. $\frac{a}{2b} = -\frac{1}{2}$.

Câu 93: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2-x-1}$.

A. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-1| + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-1| + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|2x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-1| + C$.

D. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| - \frac{5}{3} \ln|x-1| + C$.

DẠNG 5: NGUYÊN HÀM LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A – CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC THƯỜNG DÙNG

1. Công thức cộng

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad ; \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

3. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad ; \quad \cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Hệ quả:

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

B – BÀI TẬP

Câu 94: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ là

- A. $\cos x + x + C$. B. $\frac{\sin^2 x}{2} + x + C$. C. $-\cos x + x + C$. D. $\cos x + C$.

Câu 95: Cho $a \in \mathbb{R}$, hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

A. $F(x) = \sin x$.

B. $F(x) = 2 \cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2}$.

C. $F(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + a \right) \cos \left(\frac{x}{2} - a \right)$.

D. $F(x) = 2 \sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2}$.

Câu 96: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

A. $-\sin^2 x + C$.

B. $-\cos 2x + C$.

C. $\cos 2x + C$.

D. $-\cos^2 x + C$.

Câu 97: Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

(I) $f(x) = \tan^2 x + 2$ (II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$

A. (III).

B. (II).

C. (II), (III).

D. (I), (II), (III).

Câu 98: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \int (\sin 2x - \cos 3x) dx$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

C. $\int f(x) dx = -\cos 2x - \sin 3x + C$.

D. $\int f(x) dx = \cos 2x + \sin 3x + C$.

Câu 99: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là:

A. $-\sin x \cos x$.

B. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

C. $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

D. $\frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Câu 100: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

B. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

C. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

D. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Câu 101: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \tan x + x + C$.

B. $\int f(x) dx = \tan x - x + C$.

C. $\int f(x) dx = \tan x + C$.

D. $\int f(x) dx = x - \tan x + C$.

Câu 102: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 5x$ là.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 8x + C$.

Câu 103: Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Câu 104: Nguyên hàm $\int \sin^2 2x dx$ là

A. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

B. $\frac{1}{3} \sin^3 2x + C$.

C. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 4x + C$.

D. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

DẠNG 6: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ MŨ LÔGARIT**Câu 105:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$.

B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.

C. $\int 5^{2x} dx = 2.5^{2x} \ln 5 + C.$

D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 106: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2018x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2018} \cdot e^{2018x} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^{2018x} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2018e^{2018x} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^{2018x} \ln 2018 + C.$

Câu 107: Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{1-4x}$?

A. $y = -4e^{1-4x}.$

B. $y = \frac{1}{4}e^{1-4x}.$

C. $y = \frac{-1}{4}e^{1-4x}.$

D. $y = e^{1-4x}.$

Câu 108: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1.$

B. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1.$

C. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1.$

D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1.$

Câu 110: Tính $\int (2 + e^{3x})^2 dx$

A. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

B. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$

C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$

D. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

Câu 111: Hàm số $F(x) = e^x + e^{-x} + x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^{-x} + e^x + 1$

B. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

C. $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$

D. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Câu 112: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$ là :

A. $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2x}}{2} + C.$

B. $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

C. $\frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} + C.$

D. $\frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{2} + C.$

Câu 113: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2^{-3x}$ là :

A. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \ln 2} + C.$

B. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{2^{-3x}}{3 \ln 2} + C.$

C. $\frac{3^{-2x}}{2 \ln 3} + \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.$

D. $\frac{3^{-2x}}{2 \ln 3} - \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.$

Câu 114: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

A. $\int f(x)dx = e^{-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^x + x + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = e^x + C.$

Câu 115: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Câu 116: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x} \right).$

A. $F(x) = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}}{4^x} \right).$

D. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x} \ln 4}{4^x} \right).$

Câu 117: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

A. $\int f(x)dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x)dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Câu 118: Tính $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$

C. $84^x + C$

D. $84^x \ln 84 + C$

Câu 119: Nguyên hàm $\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}} dx$ là:

A. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

B. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

C. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

D. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

Câu 120: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$ là

A. $S = \{2\}.$

B. $S = \{-2; 2\}.$

C. $S = \{1; 2\}.$

D. $S = \{-2; 1\}.$

Câu 121: Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

A. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{3x+1}.$

B. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x+1}.$

C. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{3x+1}.$

D. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x-1}.$

Câu 122: Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7.$

B. $a = -1, b = -7.$

C. $a = -1, b = 7.$

D. $a = 1, b = 7.$

Câu 123: Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

- A. $T = -3035$. B. $T = 1007$. C. $T = -5053$. D. $T = 1011$.

Câu 124: Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $f[F(0)]$.

- A. $-e^{-1}$. B. $20e^2$. C. $9e$. D. $3e$.

DẠNG 7: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN BIẾT HÀM $f'(x)$

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$, $f(1) = 1$. Tính $f(5)$

- A. $f(5) = 2\ln 3 + 1$. B. $f(5) = \frac{1}{2}\ln 3$. C. $f(5) = \ln 2$. D. $f(5) = \ln 3 + 1$.

Câu 126: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

- A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$. B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.
C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$. D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$. B. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.
C. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$. D. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

Câu 128: Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x^2 - x)(x + 1)$ và $f(0) = 3$.

- A. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 3$. B. $f(x) = 3x^2 - 1$.
C. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3$. D. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3$.

Câu 129: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

Tính $S = f(3) - f(-1)$.

- A. $S = 4$. B. $S = \ln 2$. C. $S = \ln 4035$. D. $S = 1$.

Câu 130: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $f(0) = 1$ và $f(-4) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(2) + f(-3)$ bằng:

- A. $3 - 20\ln 2$. B. $\ln 2$. C. 12 . D. $10 + \ln 2$.

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{x+1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) + f(-2) = 2$.

Giá trị $f(-3)$ bằng

- A. $2 + \ln 2$. B. $1 + 2\ln 2$. C. $1 - \ln 2$. D. 1 .

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3}$, $f(-1) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(2)$ bằng

A. $\frac{27}{4} + 4\ln 2$.

B. $\frac{3}{4} + 4\ln 2$.

C. $4\ln 2$.

D. $\frac{15}{4} + 4\ln 2$.

Câu 133: Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$.

Tính $f(2) + f(4)$?

A. 10.

B. 12.

C. 4.

D. 11.

Câu 134: Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là

A. $x^3 + x^2 - 3x - 5$.

B. $x^3 + 2x^2 - 5x - 5$.

C. $2x^3 + x^2 - 7x - 5$.

D. $x^3 + x^2 + 4x - 5$.

Câu 135: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ và $f(-3) - f(3) = 0$.

Giá trị của biểu thức $f(-4) - f(4)$ bằng

A. 0.

B. $-\frac{1}{3}\ln 2$.

C. $\frac{1}{3}\ln 2$.

D. $\frac{1}{3}\ln 5$.

Câu 136: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết rằng

$$f(-3) + f(3) = 0 \text{ và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính } T = f(-2) + f(0) + f(4).$$

A. $T = 1 + \ln \frac{9}{5}$.

B. $T = 1 + \ln \frac{6}{5}$.

C. $T = 1 + \frac{1}{2}\ln \frac{9}{5}$.

D. $T = 1 + \frac{1}{2}\ln \frac{6}{5}$.

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM ĐỔI BIẾN

2. Đổi biến dạng 1

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C.$$

2.1. Phương pháp chung

- Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Tính vi phân hai vế : $dt = \varphi'(t)dt$.
- Bước 3: Biểu thị : $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$.
- Bước 4: Khi đó : $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f\left(x; \sqrt{\varphi(x)}\right)$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan \frac{x}{2}; \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0\right)$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với : $x+a > 0$ và $x+b > 0$. Đặt : $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$. Đặt : $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

1. Đổi biến dạng 2

Nếu : $\int f(x)dx = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì :

$$\int f(u)du = F(\varphi(t)) + C$$

1.1. Phương pháp chung

- Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$
- Bước 3: Biến đổi : $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- Bước 4: Khi đó tính : $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a \sin t$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x = a \cos t$; với $t \in [0; \pi]$.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{ a }{\sin t}$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x = a \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.

$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = atant$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI TẬP**DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐƯA VÀO VI PHÂN**

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = 2\ln(1+x^2) + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\ln(1+x^2) + C.$

C. $\int f(x)dx = 4\ln(1+x^2) + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln(1+x^2) + C.$

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2+x}{x^2+4x-4}$ là:

A. $\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C.$

B. $\ln|x^2+4x-4| + C.$

C. $2\ln|x^2+4x-4| + C.$

D. $4\ln|x^2+4x-4| + C.$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3\ln|x^3+4| + C$

B. $-3\ln|x^3+4| + C$

C. $\ln|x^3+4| + C$

D. $-\ln|x^3+4| + C$

Câu 4. Tính $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

A. $F(x) = \ln|x^4-1| + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4-1| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^4-1| + C$

D. $F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^4-1| + C$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x-3}$ là

A. $-\ln|\cos x-3| + C$

B. $2\ln|\cos x-3| + C$

C. $-\frac{\ln|\cos x-3|}{2} + C$

D. $4\ln|\cos x-3| + C$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$

B. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C.$

C. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C.$

D. $-\cos^2 x + C.$

Câu 7. Tính $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$

A. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{12} + C$

B. $\frac{3\cos x - \cos 3x}{12} + C$

C. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

D. $\sin x \cdot \cos^2 x + C$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là:

A. $\ln|\cos x| + C$

B. $-\ln|\cos x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\ln(\cos x) + C$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ là:

A. $-e^x - 3 + C$

B. $3e^x + 9 + C$

C. $-2\ln|e^x + 3| + C$

D. $\ln|e^x + 3| + C$

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x2^{x^2}$ là:

A. $\frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{x^2}} + C$

B. $\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

C. $\frac{\ln 2}{2^{x^2}} + C$

D. $\ln 2 \cdot 2^{x^2} + C$

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x^2}$ là:

A. $\frac{-e^x}{2} + C$

B. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$

C. $-e^x + C$

D. $e^{x^2} + C$

Câu 12. Tính $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$

A. $e^{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

C. $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

D. $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

C. $\int f(x) dx = \ln x + C$

D. $\int f(x) dx = e^x + C$

Câu 14. Nguyên hàm $\int \frac{1+\ln x}{x} dx (x > 0)$ bằng

A. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$

B. $x + \ln^2 x + C$

C. $\ln^2 x + \ln x + C$

D. $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1)$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

B. $\ln(x^2+1) + C$

C. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

D. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

Câu 16. Tính $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

A. $\ln x + C$

B. $\ln|x| + C$

C. $\ln(\ln x) + C$

D. $\ln|\ln x| + C$

Câu 17. Họ nguyên hàm $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)} + C$

B. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)} + C$

C. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C$

D. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C$

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐỔI BIẾN SỐ

Loại 1: Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$, suy ra $dt = u'(x)dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 18. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a}F(ax+b) + C$

B. $a.F(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a}F(ax+b) + C$

D. $F(ax+b) + C$

Câu 19. Hàm số $f(x) = x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} - \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

B. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

C. $\frac{(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

D. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

Câu 20. Tính $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ thu được kết quả là:

A. $\ln|x|(x^2+1) + C$.

B. $\ln|x|\sqrt{1+x^2} + C$.

C. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C$.

Câu 21. Tính $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Câu 22. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt: $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$.

B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$.

C. $I = \int u^5 du$.

D. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$.

Câu 23. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$.

B. $\frac{241}{252}$.

C. $\frac{52}{9}$.

D. $\frac{7}{9}$.

Câu 24. Nguyên hàm của $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ là:

A. $\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

B. $-\ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

C. $\frac{1}{2} \ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

D. $-\frac{1}{2} \ln|t| + C$, với $t = x^2+1$.

HÀM CHỨA CĂN THỨC

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2x+3} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+3} + C.$

Câu 26. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C.$

Câu 27. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Câu 28. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3$

B. $F(x) = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2})^2$

Câu 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

B. $-\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

C. $2\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

D. $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

Câu 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{21}\sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x-1)^5} + C.$

B. $\frac{1}{18}\sqrt[3]{(3x-1)^6} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + C.$

C. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x-1)^3} + \sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

D. $\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-1)} + C.$

Câu 31. Cho $I = \int x^3\sqrt{x^2+5}dx$, đặt $u = \sqrt{x^2+5}$ khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = \int (u^4 - 5u^2)du.$

B. $I = \int u^2du.$

C. $I = \int (u^4 - 5u^3)du.$

D. $I = \int (u^4 + 5u^3)du.$

Câu 32. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2-1)dx.$

B. $I = \int_1^3 u^2(u^2-1)du.$

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3.$

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1)du.$

Câu 33. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u(u^2-4)du.$

B. $\int (u^2-4)du.$

C. $\int 2(u^2-4)du.$

D. $\int (u^2-3)du.$

Câu 34. Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Tổng $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

B. $-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$

C. $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$

D. $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

HÀM LƯỢNG GIÁC**Một số dạng tích phân lượng giác**

- Nếu gặp $I = \int_a^b f(\sin x) \cdot \cos x dx$ ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cos x) \cdot \sin x dx$ ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t = \tan x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cot x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t = \cot x$.

Câu 36. Theo phương pháp đổi biến số với $t = \cos x, u = \sin x$, nguyên hàm của $I = \int (\tan x + \cot x) dx$ là:

A. $-\ln|t| + \ln|u| + C$.

B. $\ln|t| - \ln|u| + C$.

C. $\ln|t| + \ln|u| + C$.

D. $-\ln|t| - \ln|u| + C$.

Câu 37. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Câu 38. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$. Kết quả là

A. $\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2} + C$.

B. $\sqrt{1+\sin^2 x} + C$.

C. $-\sqrt{1+\sin^2 x} + C$.

D. $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$.

Câu 39. Theo phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm của $I = \int \frac{2\sin x + 2\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}} dx$ là:

A. $2\sqrt[3]{t} + C$.

B. $6\sqrt[3]{t} + C$.

C. $3\sqrt[3]{t} + C$.

D. $12\sqrt[3]{t} + C$.

HÀM MŨ - LÔGARIT

Câu 40. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$.

B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 41. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

A. $I = x - \ln|1-e^x| + C$.

B. $I = x + \ln|1+e^x| + C$.

C. $I = -x - \ln|1 + e^x| + C.$

D. $I = x - \ln|1 + e^x| + C.$

Câu 42. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C.$

B. $t^2 + C.$

C. $2t^2 + C.$

D. $4t^2 + C.$

Câu 43. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x)$?

A. $y = 2^{\sin x + \cos x} + C.$

B. $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}.$

C. $y = \ln 2 \cdot 2^{\sin x + \cos x}.$

D. $y = -\frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C.$

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C.$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C.$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C.$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$

Câu 45. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|\ln x| + C.$

B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x^2 \cdot \ln x| + C.$

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x + \ln x| + C.$

D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln|x \cdot \ln x| + C.$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$.

Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

BÀI TẬP

DẠNG 1.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$.

Câu 2: Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 3: Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C$.

B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C$.

C. $\frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x \right) + C.$

D. Đáp án A và C đúng.

Câu 4: Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

Câu 5: Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C.$

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C.$

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C.$

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$

Câu 6: Nguyên hàm của $I = \int x \sin x \cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

B. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

C. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

D. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

Câu 7: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là:

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 8: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là:

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

DẠNG 2.

Câu 9: Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

A. $I = e^x + x e^x + C.$

B. $I = e^x + \frac{1}{2} x e^x + C.$

C. $I = \frac{1}{2} e^x + x e^x + C.$

D. $I = 2e^x + x e^x + C.$

Câu 10: Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = -\frac{1}{4}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = \frac{1}{8}.$

Câu 11: Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 12: Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

A. $S = 10.$

B. $S = 5.$

C. $S = 65.$

D. $S = 41.$

Câu 13: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 11e - 3.$

B. $F(1) = e + 3.$

C. $F(1) = e + 7.$

D. $F(1) = e + 2.$

DẠNG 3.

Câu 14: Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x \ln x + x + C$

C. $x \ln x + C$

B. Đáp án khác

D. $x \ln x - x + C$

Câu 15: Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C.$

B. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

D. $x^2 \ln x - \int x dx + C.$

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2).$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

Câu 17: Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}?$

A. $\frac{-\ln 2x - x \ln 2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1999.$

B. $\frac{-\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1998.$

C. $\frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2016.$

D. $\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2017.$

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

Câu 19: $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ.

Giá trị a bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Câu 20: Cho $F(x) = \frac{a}{x} (\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính

$$S = a + b.$$

A. $S = -2.$

B. $S = 1.$

C. $S = 2.$

D. $S = 0.$

DẠNG 4:

Câu 21: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Câu 22: Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?

A. $J = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C.$

B. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

C. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

D. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x + 1) + C.$

TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$.
 Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ ($a < b < c$) 4. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$ ($k \in \mathbb{R}$)
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

B. BÀI TẬP

DẠNG 1: ĐỊNH NGHĨA TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b xf(x)dx = x \int_a^b f(x)dx$.

C. $\int_a^a kf(x)dx = 0$.

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. B. $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$.

$$\text{C. } \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

$$\text{A. } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad \text{B. } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx. \quad \text{D. } \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Câu 4: Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

$$\text{A. } \int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a).$$

$$\text{B. } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a).$$

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $c \in [a; b]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

$$\text{A. } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

$$\text{B. } \int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$\text{A. } \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

$$\text{B. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\text{D. } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

$$\text{A. } F(a) - F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{B. } \int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_a^b.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \Big|_a^b.$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

$$\text{A. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{B. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\text{C. } \int_a^b k dx = k(a - b), \forall k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b).$$

Câu 9: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

$$\text{A. } \int_a^a f(x)dx = 1. \quad \text{B. } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$\text{C. } \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in (a; b). \quad \text{D. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

$$\text{A. } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad \text{B. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{C. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \quad \text{D. } \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

$$\text{A. } \int_0^1 f(x)dx. \quad \text{B. } \int_0^1 -f(x)dx. \quad \text{C. } \int_0^1 -F(x)dx. \quad \text{D. } \int_0^1 -f(x)dx.$$

Câu 12: Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)]dx$ là:

$$\text{A. } m - n. \quad \text{B. } n - m. \quad \text{C. } m + n. \quad \text{D. } \text{Không thể xác định}.$$

Câu 13: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được phân tích thành:

$$\text{A. } \int_c^b f(x)dx + \int_c^a -f(x)dx. \quad \text{B. } \int_c^b f(x)dx - \int_c^a -f(x)dx.$$

$$\text{C. } \int_c^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx. \quad \text{D. } -\int_c^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx.$$

DẠNG 2: TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Câu 14: Tích phân $I = \int_1^2 2x \cdot dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = 1. \quad \text{B. } I = 2. \quad \text{C. } I = 3. \quad \text{D. } I = 4.$$

Câu 15: Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2)dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = 1. \quad \text{B. } I = 2. \quad \text{C. } I = 3. \quad \text{D. } I = 4.$$

Câu 16: Tính tích phân $I = \int_1^{2^{2018}} \frac{dx}{x}$.

$$\text{A. } I = 2018 \cdot \ln 2 - 1. \quad \text{B. } I = 2^{2018}. \quad \text{C. } I = 2018 \cdot \ln 2. \quad \text{D. } I = 2018.$$

Câu 17: Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

$$\text{A. } 2 + \ln \sqrt{3}. \quad \text{B. } 4 + \ln 3. \quad \text{C. } 2 + \ln 3. \quad \text{D. } 1 + \ln \sqrt{3}.$$

Câu 18: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx$

A. $I = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}$. B. $I = \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}$. C. $I = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$. D. $I = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}$.

Câu 19: Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x-6)dx = 0$?

A. $b = 0$ hoặc $b = 3$. B. $b = 0$ hoặc $b = 1$ C. $b = 5$ hoặc $b = 0$. D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của AD để có $\int_0^a (2x+5)dx = a-4$

A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Câu 21: Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$. B. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$. C. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. D. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

Câu 22: Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1)dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.

A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 23: Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. B. $I = -\frac{3}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. C. $I = -\frac{5}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. D. $I = -\frac{7}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 26: Cho $\int_0^3 f(x)dx = a$, $\int_2^3 f(x)dx = b$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng:

A. $-a-b$. B. $b-a$. C. $a+b$. D. $a-b$.

Câu 27: Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\int_a^2 (2x+1)dx = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 28: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3)dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x)dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

A. $P = -\frac{4}{65}$. B. $P = \frac{12}{65}$. C. $P = -\frac{12}{65}$. D. $P = \frac{4}{65}$.

Câu 29: Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x|dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = \frac{1}{6}$. C. $I = -\frac{3}{2}$. D. $I = -\frac{1}{6}$.

Câu 30: Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

- A. $I = -\frac{15a}{16} + \ln 2$. B. $I = \frac{15a}{16} - \ln 2$. C. $I = \frac{15a}{16} + \ln 2$. D. $I = -\frac{15a}{16} - \ln 2$.

Câu 31: Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

- A. $I_2 = \frac{17}{3}$. B. $I_2 = \frac{19}{3}$. C. $I_2 = \frac{16}{3}$. D. $I_2 = \frac{13}{3}$.

Câu 32: Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

- A. -9 . B. -3 . C. 3 . D. 5 .

Câu 33: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 3]$ đồng thời $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. Tính $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

- A. -3 . B. 7 . C. 10 . D. 3 .

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) = -2$, $f(b) = -4$. Tính

$$T = \int_a^b f'(x) dx.$$

- A. $T = -6$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = -2$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f'(x) dx$.

- A. $I = -1$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = 0$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$.

Khi đó $f(4)$ bằng

- A. 5 . B. 29 . C. 19 . D. 9 .

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị

của $I = \int_{-1}^3 5f'(x) dx$ bằng

- A. $I = 20$. B. $I = 3$. C. $I = 10$. D. $I = 15$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3\ln 2$. Tính

$$T = a + b.$$

- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$.

DẠNG 3: TÍCH PHÂN HỮU TỈ CƠ BẢN

Câu 39: Biết $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx = a + \ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $ab = \frac{8}{81}$. B. $a + b = \frac{7}{24}$. C. $ab = \frac{9}{8}$. D. $a + b = \frac{3}{10}$.

Câu 40: Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(8; 10)$. B. $(6; 8)$. C. $(4; 6)$. D. $(2; 4)$.

Câu 41: Nhận xét: Không thể dùng máy tính để tính ra kết quả như trên mà ta chỉ có thể dùng để kiểm tra mà Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{9}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Câu 42: Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

- A. $I = a \ln|a| + \frac{a^2+1}{2a}$. B. $I = a \ln a + \frac{a^2+1}{2a}$.
C. $I = a \ln|a| + \frac{a^2-1}{2a}$. D. $I = a \ln a + \frac{a^2-1}{2a}$.

Câu 43: Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{7}{3}a - b \ln 2$. B. $I = 3a - b \ln 2$. C. $I = \frac{7}{3}a + b \ln 2$. D. $I = 3a + b \ln 2$.

Câu 44: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

- A. $P = 1 - \ln 2$. B. $P = 2 - 2 \ln 2$. C. $P = 1 - 2 \ln 2$. D. $P = 2 - \ln 2$.

Câu 45: Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x} \right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

- A. $P = e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. B. $P = -e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$.
C. $P = -e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. D. $P = e + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^4$.

Câu 46: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}$.

- A. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. B. $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. C. $I = \frac{1}{6} \ln 2$. D. $I = \ln \sqrt[6]{2}$.

Câu 47: Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$; $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab$.

- A. $P = 8$. B. $P = -6$. C. $P = -4$. D. $P = -5$.

Câu 48: Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

- A. $a+b=1$. B. $a+b=5$. C. $a+b=-1$. D. $a+b=-5$.

Câu 49: Biết $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3$.

- A. $T = 4$. B. $T = 6$. C. $T = 3$. D. $T = 5$.

Câu 50: Giả sử $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó giá trị $a+2b$ là:

- A. 30. B. 40. C. 50. D. 60.

Câu 51: Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a+2b=0$. B. $2a-b=0$.

C. $a - b = 0$. D. $a + b = 0$.

Câu 52: Nếu $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $P = 2a - b$ là

A. $P = 1$. B. $P = 7$. C. $P = -\frac{15}{2}$. D. $P = \frac{15}{2}$.

Câu 53: Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Hỏi giá trị $2a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8; 10)$. B. $(6; 8)$. C. $(4; 6)$. D. $(2; 4)$.

Câu 54: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 6$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

Câu 55: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7; 3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x^2 - x - 1 = 0$. B. $x^2 + 4x - 12 = 0$. C. $x^2 - 5x + 6 = 0$. D. $x^2 - 9 = 0$.

Câu 56: Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = -2$. B. $S = 5$. C. $S = 2$. D. $S = 10$.

Câu 57: Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 58: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = 2$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + 2b = 0$.

Câu 59: Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

A. 3. B. -14. C. -2. D. -11.

DẠNG 4: TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ CƠ BẢN

Câu 60: Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$.

A. 13. B. $\frac{13}{3}$. C. 4. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 61: Biết rằng $I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}$. Giá trị của $a - \frac{3}{4}b$ là:

A. -1. B. -2. C. -3. D. -4.

Câu 62: Tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx$ bằng

A. $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $I = 2\sqrt{2}$. C. $I = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $I = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 63: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 7$. B. $a + 2b = 8$. C. $a + 2b = -1$. D. $a + 2b = 5$.

Câu 64: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = -10$. B. $T = -4$. C. $T = 15$. D. $T = 8$.

Câu 65: Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}$. B. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}$.

C. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}$. D. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}$.

Câu 66: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2$. B. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2$. C. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1$. D. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 1$.

DẠNG 5: TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Câu 67: Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$.

A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 68: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Câu 69: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$. B. $\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. C. $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. D. $-\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

Câu 70: Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

A. $T = 3$. B. $T = -1$. C. $T = -4$. D. $T = 2$.

Câu 71: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$. B. $I = 0$. C. $I = -1$. D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 72: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 73: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = -2$.

D. $I = -1$.

Câu 74: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = \frac{3}{4}$.

C. $I = -\frac{3}{4}$.

D. $I = -\frac{2}{3}$.

Câu 75: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$ được viết ở dạng $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a + 2b = 8$.

B. $a + b = 5$.

C. $2a - 3b = 2$.

D. $a - b = 2$.

Câu 76: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1 + \cos x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + c, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $a - b + c$

A. -3

B. 1 .

C. -2 .

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 77: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + 4 \sin^2 x) dx = \frac{a\pi}{b} - \frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b + c$.

A. 8 .

B. 16 .

C. 12 .

D. 14 .

Câu 78: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a, I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị của $a + b$ là:

A. $P = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$.

B. $P = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $P = \frac{3}{4} - \sqrt{3}$.

D. $P = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 79: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

B. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

C. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(-a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

D. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[-\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x) = a \sin 2x - b \cos 2x$ thỏa mãn $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -2$ và $\int_a^b a dx = 3$. Tính tổng $a + b$ bằng:

A. 3 .

B. 4 .

C. 5 .

D. 8 .

Câu 81: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$

A. -2.

B. -3.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 0.

Câu 82: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.B. $I = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.C. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$.D. $I = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$.

Câu 83: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + bx \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

A. -1.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

DẠNG 6: TÍCH PHÂN HÀM MŨ – LÔGARIT CƠ BẢN

Câu 84: Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e - 1$.B. $\frac{1}{e} - 1$.C. $\frac{e-1}{e}$.D. $\frac{1}{e}$.

Câu 85: Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $2^{2018} - 1$.B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$.D. 2^{2018} .

Câu 86: Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

A. $I = 2e^8$.B. $I = 4e^8 - 2$.C. $I = 4e^8$.D. $I = 2e^8 - 4$.

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$	$I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$	$I = \int_0^1 x(x+1)^{2016} dx$. Đặt $t = x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x + 3}}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x + 3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 1)}$. Đặt $t = \ln x + 1$
5	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} \sqrt{3e^x + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{3e^x + 1}$
6	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{2\cos x + 1} dx$. Đặt $t = 2\cos x + 1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và $u(x) \in [\alpha, \beta] \forall x \in [a, b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x = a$

A. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

B. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

C. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

D. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(x)du.$

HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỈ

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-1)^{1000} dx.$

$$\text{A. } I = \frac{2003.2^{1002}}{1003002}. \quad \text{B. } I = \frac{1502.2^{1001}}{501501}. \quad \text{C. } I = \frac{3005.2^{1002}}{1003002}. \quad \text{D. } I = \frac{2003.2^{1001}}{501501}.$$

Câu 3: Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx$ bằng

$$\text{A. } \frac{1}{2} \log \frac{7}{3}. \quad \text{B. } \ln \frac{7}{3}. \quad \text{C. } \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}. \quad \text{D. } \frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}.$$

Câu 4: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}$ được kết quả $I = a \ln 2 - b$. Giá trị $a+b$ là:

$$\text{A. } \frac{3}{16} \quad \text{B. } \frac{13}{16} \quad \text{C. } \frac{14}{17} \quad \text{D. } \frac{4}{17}$$

Câu 5: Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln a$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

$$\text{A. } 2. \quad \text{B. } 3. \quad \text{C. } 4. \quad \text{D. } 5.$$

Câu 6: Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2+2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:

$$\begin{aligned} \text{A. } I &= \frac{\ln 2 + \ln |a+2|}{2}. & \text{B. } I &= \frac{\ln 2 - \ln |a+2|}{2}. \\ \text{C. } I &= \frac{-\ln 2 - \ln |a+2|}{2}. & \text{D. } I &= \frac{-\ln 2 + \ln |a+2|}{2}. \end{aligned}$$

HÀM VÔ TỈ

Câu 7: Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

$$\text{A. } 3 \int_0^1 t dt. \quad \text{B. } \int_0^1 t^3 dt. \quad \text{C. } 3 \int_0^1 t^2 dt. \quad \text{D. } 3 \int_0^1 t^3 dt.$$

Câu 8: Trong các tích phân sau, tích phân nào có cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

$$\text{A. } \frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt. \quad \text{B. } \int_1^4 t \sqrt{t-1} dt \quad \text{C. } \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1) t^2 dt. \quad \text{D. } \int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1) x^2 dx.$$

Câu 9: Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$, với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây ?

$$\text{A. } f(t) = 2t^2 + 2t \quad \text{B. } f(t) = t^2 - t \quad \text{C. } f(t) = t^2 + t \quad \text{D. } f(t) = 2t^2 - 2t$$

Câu 10: Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

$$\text{A. } \frac{4}{3}. \quad \text{B. } \frac{3}{2}. \quad \text{C. } \frac{1}{3}. \quad \text{D. } \frac{2}{3}.$$

Câu 11: Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = a + b \ln 2$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a + b$.

$$\text{A. } S = 3. \quad \text{B. } S = -3. \quad \text{C. } S = 5. \quad \text{D. } S = 7.$$

Câu 12: Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = a + b \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } a - b = 3. \quad \text{B. } a - b = 5. \quad \text{C. } a + b = 5. \quad \text{D. } a + b = 3.$$

Câu 13: Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{2}{3}(a-\sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a = 2b$. B. $a < b$. C. $a = b$. D. $a = 3b$.

Câu 14: Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị $a.b$ là:

A. -1. B. -2. C. 1. D. 2.

Câu 15: Với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Đặt $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = a - \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của tích abc là :

A. $\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Câu 16: Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a-7b$ bằng

A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 17: Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 91.

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 18: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx$.

B. $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx$.

C. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

D. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 19: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.

D. $I = \frac{9}{4}$.

Câu 20: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \ln a - \frac{b}{8}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $a+b=4$

B. $a-b=2$

C. $ab=6$

D. $a^b=4$

Câu 21: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a là:

A. 3

B. 2

C. 4

D. 6

Câu 22: Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 23: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$$

$$\text{B. } I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$$

$$\text{C. } I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$$

Câu 24: Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1+\cos x}$, khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

$$\text{A. } I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt.$$

$$\text{B. } I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt.$$

$$\text{C. } I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

$$\text{D. } I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

Câu 25: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 7.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12.

B. 12.

C. 6.

D. -6.

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 27: Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Câu 28: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

$$\text{A. } \sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C.$$

$$\text{B. } \frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C.$$

$$\text{C. } e^{\sin^2 x} + C.$$

$$\text{D. } \frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C.$$

Câu 29: Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T = 6$.

B. $T = 9$.

C. $T = 10$.

D. $T = 5$.

Câu 30: Tích phân $I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = 2 - \ln 3 + \ln 5.$$

$$\text{B. } I = 2 - 2\ln 3 + 2\ln 5.$$

$$\text{C. } I = 2 - 2\ln 3 + \ln 5.$$

$$\text{D. } I = 2 - \ln 3 - 2\ln 5.$$

Câu 31: Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính

$$T = a + b + c.$$

A. $T = -1$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 1$.

Câu 32: Với cách đổi biến $u = \sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}} dx$ trở thành

$$\text{A. } \frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

$$\text{B. } \frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

$$\text{C. } 2 \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

$$\text{D. } \frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du.$$

Câu 33: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{2}{9}t^3 \Big|_1^2$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = \frac{14}{9}$.

Câu 34: Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

A. $I = -2e$. B. $I = -e$. C. $I = e$. D. $I = 2e$.

Câu 35: Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. B. $I = \frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. C. $I = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$. D. $I = \frac{2\sqrt{2}+2}{3}$.

Câu 36: Biết $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = \frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A. $S = 13$. B. $S = 28$. C. $S = 25$. D. $S = 16$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ (*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

$\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích

phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi biến dạng

1.

Câu 37: Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

Câu 38: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 39: Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b} \pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=ab$.

A. $T=35$.B. $T=24$.C. $T=12$.D. $T=36$.

Câu 40: Đổi biến $x=2\sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Câu 41: Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a+\sqrt{b} < 5$. Tổng $a+b$ bằng

A. 5.

B. 7.

C. 4.

D. 6.

Câu 42: Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

C. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

D. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 43: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{2}$.

B. $I = \frac{\pi}{3}$.

C. $I = \frac{\pi}{4}$.

D. $I = \frac{\pi}{6}$.

Câu 44: Khi đổi biến $x=\sqrt{3}\tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} dt$.

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} t dt$.

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$.

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Định lý

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

2. Phương pháp chung

- Bước 1: Viết $f(x)dx$ dưới dạng $u dv = uv' dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- Bước 2: Tính $du = u' dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- Bước 3: Tính $\int v u'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

* Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: <u>Lôc-đa-mũ-lượng</u>	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x) \ln x dx$	$\int_a^b P(x) \cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x dx$	$P(x) dx$	$\cos x dx$	$\cos x dx$

Chú ý: Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v' dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

BÀI TẬP

DẠNG 1:

Câu 1: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}$. B. $I = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{6a}$. C. $I = \frac{\pi + 6 + 3\sqrt{3}}{6a}$. D. $I = \frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6a}$.

Câu 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .

A. $ab = 32$. B. $ab = 2$. C. $ab = 4$. D. $ab = 12$.

Câu 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. B. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.
C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. D. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Câu 4: Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{24}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $-\frac{1}{24}$.

Câu 5: Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2a + b + c = -1$. B. $a + 2b + c = 0$. C. $a - b + c = 0$. D. $a + b + c = 1$.

Câu 6: Tính nguyên hàm $I = \int (x-2) \sin 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{a} + b \sin 3x + C$. Tính $M = a + 27b$. Chọn đáp án đúng:

A. 6 B. 14 C. 34 D. 22

Câu 7: Tính tích phân $\int_0^\pi x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi$. Tính tích ab :

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 6 D. $\frac{2}{3}$

Câu 8: Tích phân $\int_0^\pi (3x+2) \cos^2 x dx$ bằng

A. $\frac{3}{4}\pi^2 - \pi$. B. $\frac{3}{4}\pi^2 + \pi$. C. $\frac{1}{4}\pi^2 + \pi$. D. $\frac{1}{4}\pi^2 - \pi$.

Câu 9: Tính $\int_0^\pi x(1 + \cos x) dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi^2}{2} - 2$. B. $\frac{\pi^2}{3} + 3$. C. $\frac{\pi^2}{3} - 3$. D. $\frac{\pi^2}{2} + 2$.

Câu 10: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a+b$ là ?

A. 0 B. -1 C. 1 D. -2

Câu 11: Cho $I = \int_0^{\frac{x}{4}} x \tan^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \ln \sqrt{b} - \frac{\pi^2}{32}$ khi đó tổng $a+b$ bằng

A. 4 B. 8 C. 10 D. 6

Câu 12: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$. B. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$. C. $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}$. D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

Câu 13: Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$. Tính $A = a - b$

Chọn đáp án đúng:

A. 7 B. 10 C. 6 D. 2

DẠNG 2:

Câu 14: Cho $\int_0^a x e^x dx = 1 (a \in \mathbb{R})$. Tìm a ?

A. 0. B. 1. C. 2. D. e .

Câu 15: Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = ae^2 + b (a, b \text{ là các số hữu tỷ})$. Khi đó tổng $a+b$ là

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 16: Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích ab bằng:

- A. 1. B. -1. C. -15. D. 20.

Câu 17: Tìm a sao cho $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx = 4$, chọn đáp án đúng

- A. 1 B. 0 C. 4 D. 2

Câu 18: Cho tích phân $I = \int_0^1 (x+1)(e^x - 3) dx$. Kết quả tích phân này dạng $I = e - a$. Đáp án nào sau đây đúng?

- A. $a = \frac{9}{2}$ B. $a = \frac{9}{4}$ C. $a = \frac{9}{5}$ D. $a = \frac{8}{3}$

Câu 19: Tìm m để $\int_0^1 (mx+1)e^x dx = e$?

- A. 0 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

DẠNG 3.

Câu 20: Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a.e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 21: Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$ được biểu diễn dạng $a.\ln 3 + b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. 1. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 22: Biết tích phân $\int_1^2 (4x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $2a+b$ bằng

- A. 5. B. 8. C. $A(1; -2; 1)$ D. 13.

Câu 23: Tính tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$.

- A. $I = \frac{2 \ln 2 + 6}{9}$. B. $I = \frac{6 \ln 2 + 2}{9}$. C. $I = \frac{2 \ln 2 - 6}{9}$. D. $I = \frac{6 \ln 2 - 2}{9}$.

Câu 24: Kết quả tích phân $\int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3 \ln 3 + b$. Giá trị $3+b$ là:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

Câu 25: Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

- A. $P = 4$. B. $P = -8$. C. $P = -4$. D. $P = 8$.

Câu 26: Cho biết tích phân $I = \int_0^1 (x+2) \ln(x+1) dx = a \ln 2 + \frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $a = b$. B. $a < b$. C. $a > b$. D. $a = b + 3$.

Câu 27: Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = ae^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a - 3b$ là:

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{13}{2}$.

Câu 28: Giả sử $\int_1^2 \frac{4\ln x + 1}{x} dx = a \ln^2 2 + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó tổng $4a + b$ bằng.

A. 3.

B. 5

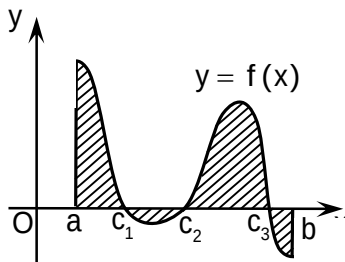
C. 7.

D. 9.

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

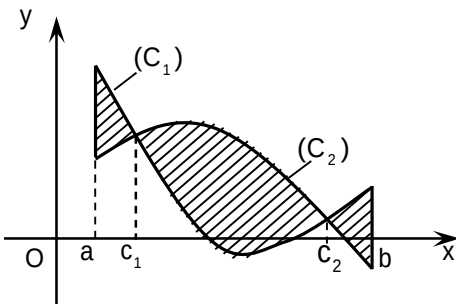
1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx}$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ PHƯƠNG PHÁP:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a; b]$, giả sử α thì $S = \left| \int_a^\alpha (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_\alpha^b (f(x) - g(x)) dx \right|$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$).

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β .

Bước 2. Tính $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ như trường hợp 1.

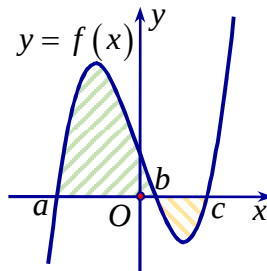
BÀI TẬP

DẠNG 1: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẶNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$, TRỤC HOÀNH VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG $x = a, x = b$ ($a < b$)

Câu 1: Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

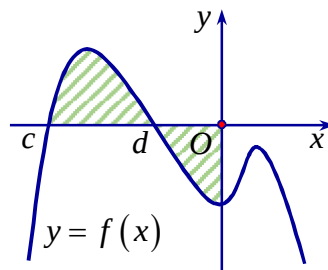
- A. $\int_a^b |f(x)| dx$. B. $\int_a^b f^2(x) dx$. C. $\int_a^b f(x) dx$. D. $\pi \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



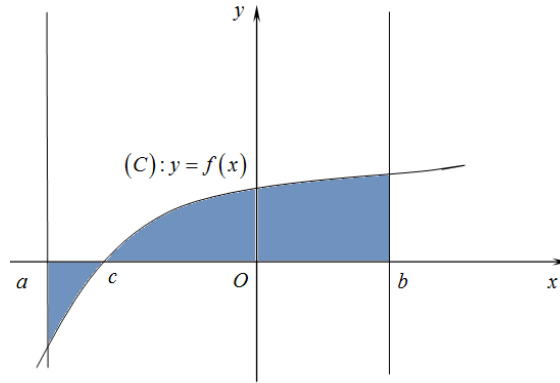
- A. $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
C. $-\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



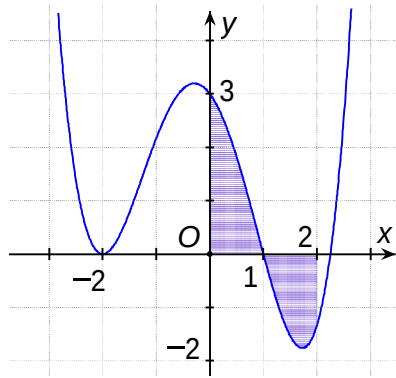
- A. $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx$. B. $S = -\int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx$.
C. $S = -\int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx$. D. $S = \int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx$.

Câu 4: Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



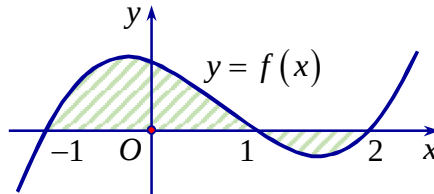
- A. $S = \int_a^b f(x) dx$. B. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
 C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$. D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phần tô đen) là



- A. $\int_0^2 f(x) dx$. B. $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.
 C. $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. D. $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

Câu 6: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



- A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.
 C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$. D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

- A. $\frac{53}{4}$ B. $\frac{51}{4}$ C. $\frac{49}{4}$ D. $\frac{25}{2}$

Câu 8: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

- A. $3 + 2\ln 2$ B. $3 - \ln 2$ C. $3 - 2\ln 2$ D. $3 + \ln 2$

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

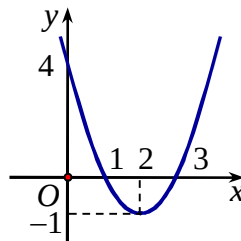
Câu 10: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x + e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$.

- A. $S = \frac{e^4 + 1}{e^2}$ (đvdt). B. $S = \frac{e^4 - 1}{e}$ (đvdt). C. $S = \frac{e^2 - 1}{e}$ (đvdt). D. $S = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ (đvdt).

Câu 11: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

- A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = 7$. D. $S = 8$.

Câu 12: Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

- A. 4. B. 2. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 13: Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- A. $S = \frac{31}{4}$. B. $S = \frac{49}{4}$. C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{39}{4}$.

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ D. $\frac{23}{3}$

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{2}$ C. $\frac{e^2 - 1}{4}$ D. $\frac{e^2 + 1}{4}$

Câu 16: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. 2.

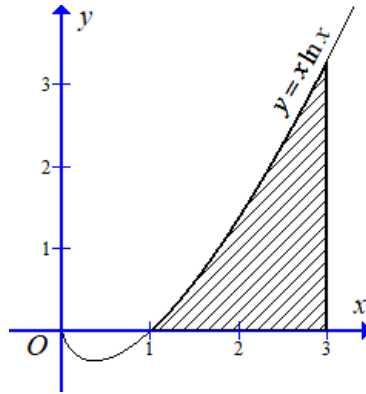
Câu 17: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích là

- A. 8. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

Câu 18: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng

- A. $S = \frac{16}{3}$. B. $S = 3$. C. $S = \frac{15}{4}$. D. $S = \frac{17}{3}$.

Câu 19: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H) .



- A. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$. B. 1. C. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{2} \ln 3 + 2$.

Câu 20: Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

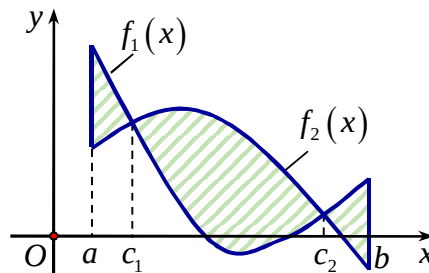
- A. $S = \frac{2000}{3}$. B. $S = 2008$. C. $S = \frac{2008}{3}$. D. 2000.

DẠNG 2: DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

- A. $S_H = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |g(x)| dx$. B. $S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
C. $S_H = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. D. $S_H = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Câu 22: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là

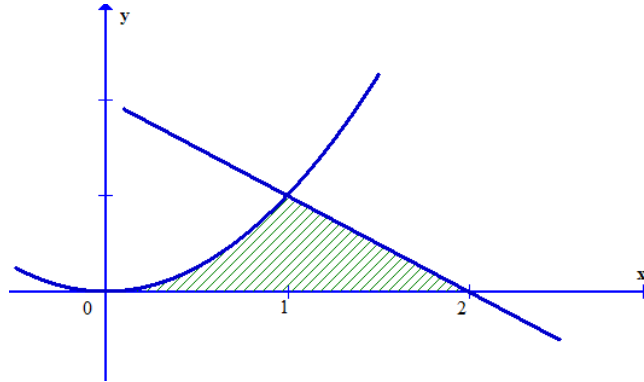


- A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$. B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$.
C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$. D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào trong các công thức dưới đây?

- A. $S = \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_1^2 f^2(x) dx$. C. $S = \int_1^2 |f(x)| dx$. D. $S = \pi \int_1^2 f^2(x) dx$.

Câu 24: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 25: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{87}{5}$ B. $\frac{87}{4}$ C. $\frac{87}{3}$ D. $\frac{87}{5}$

Câu 26: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C): $y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = a$ ($a < 0$) có diện tích bằng 5 Khi đó a bằng

- A. $1 - e^5$ B. $1 + e^5$ C. $1 + 2e^5$ D. $1 - 2e^5$

Câu 27: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức:

- A. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx$. B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$. C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$. D. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx$.

DẠNG 3: DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG $y = f(x)$, $y = g(x)$

Câu 28: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là:

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{1}{15}$

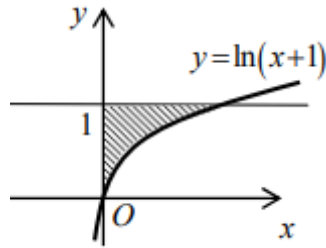
Câu 31: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2; 0)$ và trục Oy là

- A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 2$. C. $S = \frac{8}{3}$. D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 32: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

- A. $\frac{11}{6}$. B. $\frac{61}{3}$. C. $\frac{343}{162}$. D. $\frac{39}{2}$.

Câu 33: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $e - 2$.

B. $e - 1$.

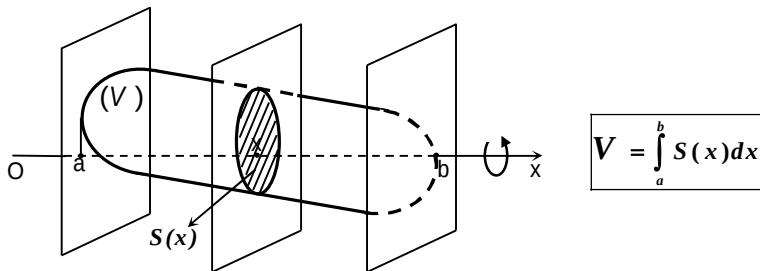
C. 1.

D. $\ln 2$.

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

1) Thể tích vật thể:

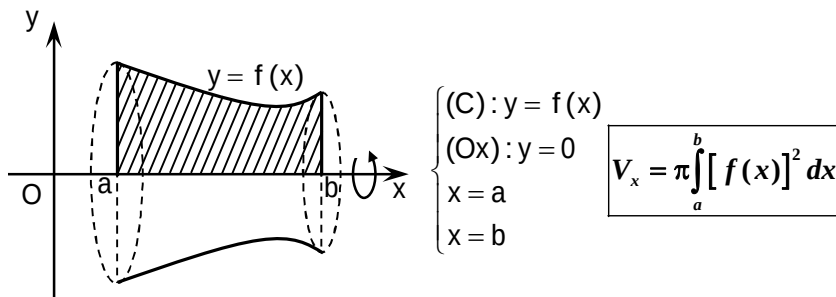
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$

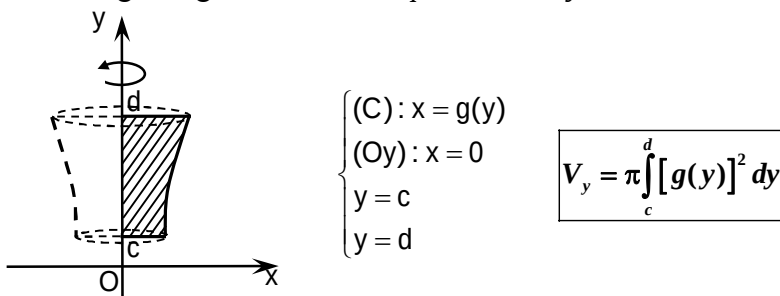
2) Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

3) Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay)

PHƯƠNG PHÁP:

. Tính thể tích khối tròn xoay:

Trường hợp 1. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Trường hợp 2. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) **quay quanh trục Ox** là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

BÀI TẬP

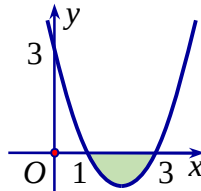
DẠNG 1: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY SINH BỞI MIỀN (D) GIỚI HẠN BỞI

$y = f(x)$; $y = 0$ **VÀ** $x = a, x = b$ **KHI QUAY QUANH TRỤC Ox.**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **B.** $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.
C. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **D.** $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$. **B.** $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.
C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx$. **B.** $V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx$. **C.** $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx$.

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx$. **B.** $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$. **D.** $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V = \frac{8\pi}{15}$

B. $V = \frac{4\pi}{3}$

C. $V = \frac{15\pi}{8}$

D. $V = \frac{7\pi}{8}$

Câu 7: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

A. $V = 60\pi$.

B. 30π .

C. $\frac{1188}{25}\pi$.

D. $\frac{1416}{25}\pi$.

Câu 8: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

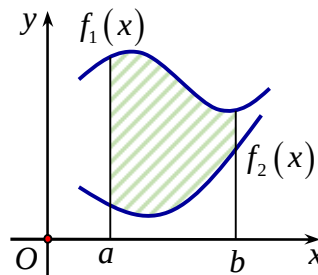
B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

C. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

D. $\frac{\pi e^2}{2}$.

DẠNG 2: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY KHI CHO HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI:
 $y = f(x)$ VÀ $y = g(x)$ QUAY QUANH TRỤC Ox.

Câu 9: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$.

B. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$.

C. $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$.

D. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$.

Câu 10: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

B. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.

C. $V = \int_0^1 (2x+1) dx$.

D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

Câu 11: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx$.

B. $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$.

C. $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|$.

D. $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx$.

Câu 12: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

- A. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. B. $V = \pi \int_0^1 xe^x dx$. C. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. D. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$.

Câu 13: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{32}{5}$. C. $V = \frac{8\pi}{3}$. D. $\frac{32\pi}{5}$

Câu 14: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x + 2$ quanh trục Ox là

- A. $\frac{72\pi}{10}$ (đvtt). B. $\frac{72\pi}{5}$ (đvtt). C. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). D. $\frac{81\pi}{5}$ (đvtt).

Câu 15: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $V = \int_0^1 e^{2x} dx$. B. $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx$. C. $V = \int_0^1 e^{x^2} dx$. D. $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

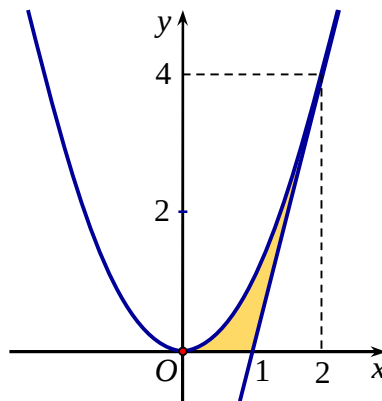
Câu 16: Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Khi đó $a+b$ có kết quả là:

- A. 11 B. 17 C. 31 D. 25

Câu 18: Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{32\pi}{5}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 19: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$. B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$. C. $\frac{e^4\pi}{2}$. D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$.

Câu 20: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 11. B. 17. C. 31. D. 25.

Câu 21: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox .

- A. $\frac{32\pi}{5}$. B. $\frac{32\pi}{7}$. C. $\frac{32\pi}{15}$. D. $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 22: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

- A. $2\pi \ln 2$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{3}{4} - 1$. D. $2 \ln 2$.

Câu 23: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, $(a > 1)$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)$. B. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$. C. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\pi$. D. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

Câu 24: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{32\pi}{15}$. B. $\frac{64\pi}{15}$. C. $\frac{21\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

ĐẢNG VIỆT ĐỒNG

DÀNH CHO HỌC SINH YẾU-TB

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

- **CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**
- **CẬP NHẬT THÊM NHIỀU DẠNG TOÁN MỚI**
- **CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG**

ÔN THI THPT QUỐC GIA

NGUYÊN HÀM

A - KIẾN THỨC CHUNG

1- Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lý:

+ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

+ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$.

+ Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2 - Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

3 - Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

4 – Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int d(ax+b) = \frac{1}{a}(ax+b) + C$	$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$
$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \left(\frac{ax+b}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int \operatorname{tg}(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \ln a} a^{px+q} + c$	$\int \operatorname{cotg}(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg}(ax+b) + c$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax+b) + c$

B - BÀI TẬP**HƯỚNG DẪN GIẢI****DẠNG 1: CÁC CÂU HỎI LÝ THUYẾT****Câu 1:** Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- (1): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có đạo hàm trên $[a; b]$.
 (2): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (3): Mọi hàm số đạo hàm trên $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên $[a; b]$.
 (4): Mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.

A. 2.**B.** 3.**C.** 1.**D.** 4.**Hướng dẫn giải****Chọn B**

Khẳng định (1): Sai, vì hàm số $y = |x|$ liên tục trên $[-1; 1]$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$ nên không thể có đạo hàm trên $[-1; 1]$

Khẳng định (2): đúng vì mọi hàm số **liên tục** trên $[a; b]$ đều có **nguyên hàm** trên $[a; b]$.

Khẳng định (3): Đúng vì mọi hàm số có **đạo hàm** trên $[a; b]$ thì đều liên tục trên $[a; b]$ nên đều có **nguyên hàm** trên $[a; b]$.

Khẳng định (4): Đúng vì mọi hàm số liên tục trên $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

B. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx.$

$$C. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

$$D. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \neq 0; k \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Câu 3: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

$$A. \int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx. \quad B. \int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx.$$

$$C. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad D. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm. Hoặc B, C, D đúng do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm nên A sai.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

$$A. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

$$B. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \text{ với } f(x); g(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$C. \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \text{ với } \alpha \neq -1.$$

$$D. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \in \mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 5: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x), g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

$$(I). F(x) + G(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) + g(x).$$

$$(II). k.F(x) \text{ là một nguyên hàm của } k.f(x) \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

$$(III). F(x).G(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x).g(x).$$

Các mệnh đề đúng là

$$A. (II) \text{ và } (III). \quad B. \text{ Cả 3 mệnh đề. } \quad C. (I) \text{ và } (III). \quad D. (I) \text{ và } (II).$$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây sai?

$$A. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx, \text{ với mọi hàm số } f(x), g(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$B. \int f'(x) dx = f(x) + C \text{ với mọi hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm trên } \mathbb{R}.$$

$$C. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \text{ với mọi hàm số } f(x), g(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

$$D. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với mọi hằng số } k \text{ và với mọi hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Mệnh đề: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì khi $k = 0$ thì $\int kf(x)dx \neq k \int f(x)dx$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

B. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

C. $F(x) = f(x), \forall x \in K$.

D. $F'(x) = f'(x), \forall x \in K$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(x) = \int f(x)dx, \forall x \in K \Rightarrow [F(x)]' = f(x), \forall x \in K$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên K thì nó có nguyên hàm trên K .

C. Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì hàm số $F(-x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Hướng dẫn giải

Chọn D

Dựa theo định lí 1 trang 95 SGK 12 CB suy ra khẳng định A đúng.

Dựa theo định lí 3 Sự tồn tại nguyên hàm trang 97 SGK 12 CB kết luận B đúng.

Và C đúng dựa vào định nghĩa của nguyên hàm.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**:

A. Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thì $F(x) + 1$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$.

B. Mọi hàm liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

C. Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ thì $\int f(x)dx = F(x) + C$, với C là một hằng số.

D. Nếu $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) + G(x) = C$, với C là một hằng số.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 10: Cho f, g là các hàm số liên tục trên K . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**.

A. $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx - \int f(x)dx \int g(x)dx$.

B. $\int f'(x)f^2(x)dx = \frac{f^3(x)}{3} + C$.

C. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

D. $k \int f(x)dx = k \int f(x)dx, (k: \text{hằng số})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

DẠNG 2: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN**Câu 11:** Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\int dx = x + C$.

B. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.

D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có: $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$.

Câu 12: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int e^x dx = e^x + C$.

B. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\tan x + C$.

C. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

D. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

Câu 13: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số).

B. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số).

C. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số).

D. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số, $n \in \mathbb{Z}$).

Hướng dẫn giải:.**Chọn D**Công thức trên cần có thêm điều kiện $n \neq -1$.**Câu 14:** Biết $\int f(u) du = F(u) + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(2x-1) dx = 2F(2x-1) + C$.

B. $\int f(2x-1) dx = 2F(x) - 1 + C$.

C. $\int f(2x-1) dx = \frac{1}{2} F(2x-1) + C$.

D. $\int f(2x-1) dx = F(2x-1) + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có $\int f(2x-1) dx = \frac{1}{2} \int f(2x-1) d(2x-1) = \frac{1}{2} F(2x-1) + C$.

Câu 15: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\int a^x dx = a^x \ln a + C$ ($a > 0; a \neq 1$).

B. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

C. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$.

D. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Vì $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0; a \neq 1$)

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. $\int e^x dx = e^x + C$.

B. $\int \sin x dx = \cos x + C$.

C. $\int 2x dx = x^2 + C$.

D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Theo bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Câu 17: Công thức nguyên hàm nào sau đây sai?

A. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

B. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

C. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

D. $\int \frac{dx}{\cos x} = \tan x + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Vì $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ nên $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

Câu 18: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}(2x+1)^2 + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + C$.

C. $\int f(x) dx = 2(2x+1)^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = (2x+1)^2 + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x+1) dx = x^2 + x + C_1 = \frac{1}{4}(4x^2 + 4x + 1) - \frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + C$.

Câu 19: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

A. $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$.

B. $\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

C. $\frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$.

D. $4x + 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$\int (2x^2 + x + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

Câu 20: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 10x^4 - 3x + 2$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

B. $\int f(x) dx = 10x^5 - 3x^2 + 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2C$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$\int f(x) dx = \int (10x^4 - 3x + 2) dx = 2x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 21: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ là

A. $\ln(3x+1) + C$.

B. $\ln(-3x-1) + C$.

C. $\ln|3x+1| + C$

D. $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có $\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx$

A. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}.$

D. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x}$ là

A. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x+1}}{\ln 2} + C.$

B. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x}}{\ln 2} + C.$

C. $\int 2^{2x} dx = \frac{4^x}{\ln 2} + C.$

D. $\int 2^{2x} dx = \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int 2^{2x} dx = \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C = \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + C.$

Câu 24: Tìm nguyên hàm $\int \frac{x+1}{x^2} dx$?

A. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln|x| + \ln x^2 + C.$

B. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

C. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \frac{\frac{x^2}{2} + x + C}{\frac{x^3}{3} + C}.$

D. $\int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

Câu 25: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} + C.$

B. $\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C.$

C. $\frac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C.$

D. $\frac{3\sqrt{(2x+1)^3}}{4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C.$

Câu 26: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+3}$ là

A. $\int f(x) dx = e^{2x+3} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2e^{2x+3} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{2x+3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C \quad (a \neq 0) \Rightarrow \int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$$

Câu 27: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

A. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -2 \tan \frac{x}{2} + C.$

B. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \tan \frac{x}{2} + C.$

C. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} + C.$

D. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -2 \cot \frac{x}{2} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -2 \cot \frac{x}{2} + C.$$

Câu 28: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

A. $\int f(x) dx = \sqrt{2x} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x} + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2x} + C.$

D. $\int f(x) dx = \ln \sqrt{2x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \int d(\sqrt{2x}) = \sqrt{2x} + C.$$

Câu 29: Nếu $\int f(x) dx = \sin x - e^x + C$ thì

A. $f(x) = -\cos x - e^x.$

B. $f(x) = \cos x + e^x.$

C. $f(x) = \cos x - e^x.$

D. $f(x) = -\cos x - e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có : } \int f(x) dx = \sin x - e^x + C \Rightarrow f(x) = (\sin x - e^x + C)' = \cos x - e^x.$$

Câu 30: Tìm khẳng định sai?

A. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C.$

B. $\int 2^x dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C.$

C. $\int e^{-x} dx = C - e^{-x}$

D. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x - C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C \text{ đúng}$$

$$\int e^{-x} dx = C - e^{-x} \text{ đúng}$$

$$\text{Sử dụng công thức } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ suy ra } \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x - C$$

Nên $\int \tan^2 x dx = \tan x - x - C$ đúng.

Câu 31: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

A. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$.

B. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3\ln|x| + C$.

C. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 3\ln|x| + C$.

D. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

Câu 32: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

A. $x^2 + 2\cos 2x + C$. B. $x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. C. $x^2 - 2\cos 2x + C$. D. $x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int f(x) dx = \int (2x + \sin 2x) dx = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Câu 33: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x+2)}$ là

A. $\cot(x+2) + C$.

B. $-\cot(x+2) + C$.

C. $-\frac{2\cos(x+2)}{\sin^3(x+2)} + C$.

D. $-\frac{\cos(x+2)}{\sin^3(x+2)} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

Ta có $\int \frac{1}{\sin^2(x+2)} dx = -\cot(x+2) + C$

Câu 34: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x + 2018$ là

A. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x + C$.

B. $F(x) = e^x - \sin x + 2018x + C$.

C. $F(x) = e^x + \sin x + 2018x$.

D. $F(x) = e^x + \sin x + 2018 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$F(x) = \int (e^x + \cos x + 2018) dx = e^x + \sin x + 2018x + C$ (với C là hằng số).

Câu 35: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

A. $\int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C$.

C. $\int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int f(x) dx = \int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} + C$.

Câu 36: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -e^{-x}$ là

A. $e^{-x} + C$.

B. $e^x + C$.

C. $-e^{-x} + C$.

D. $-e^x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int -e^{-x} dx = e^{-x} + C$$

Câu 37: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin(x-1)$?

A. $\int \sin(x-1) dx = -\cos(x-1) + C$.

B. $\int \sin(x-1) dx = \cos(x-1) + C$.

C. $\int \sin(x-1) dx = (x-1) \cos(x-1) + C$.

D. $\int \sin(x-1) dx = (1-x) \cos(x-1) + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 38: Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$.

B. $f(x) = 2x^2 e^{x^2} + C$.

C. $f(x) = xe^{x^2}$.

D. $f(x) = x^2 e^{x^2} + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có : } F'(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2xe^{x^2}.$$

Câu 39: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x+3)$.

A. $F(x) = -\sin(2x+3) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$.

D. $F(x) = \sin(2x+3) + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$F(x) = \int \cos(2x+3) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+3) + C.$$

Câu 40: Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \cos^2 x$.

B. $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$.

C. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin^2 x$.

D. $f(x) = \tan^2 x, g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C = \sin^2 x - \frac{1}{2} + C$$

Câu 41: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là

A. $-\ln|\cos x| + C$.

B. $-\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

C. $\ln|\cos x| + C$.

D. $\frac{1}{\cos^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Có } \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Câu 42: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F(x) = 2 \tan x + 3$.

B. $F(x) = \tan x - 4$.

C. $F(x) = 2 \tan x - 5$.

D. $F(x) = -2 \cot x - 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$F(x) = \int \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x + C.$$

$$\text{Ta lại có } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3 \Rightarrow 2 \tan \frac{\pi}{4} + C = -3 \Leftrightarrow C = -5.$$

$$\text{Vậy } F(x) = 2 \tan x - 5.$$

Câu 43: Tìm khẳng định sai?

A. $\int \tan^2 x dx = \tan x - x - C$.

B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C$.

C. $\int 2^x dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C$.

D. $\int e^{-x} dx = C - e^{-x}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + 2C \text{ đúng}$$

$$\int e^{-x} dx = C - e^{-x} \text{ đúng}$$

$$\text{Sử dụng công thức } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ suy ra } \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x - C$$

$$\text{Nên } \int \tan^2 x dx = \tan x - x - C \text{ đúng.}$$

Câu 44: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-x}$ là

A. $\ln|1-x| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln(1-x)^2 + C$.

C. $-\ln|2-2x| + C$.

D. $-\frac{1}{2} \ln|1-x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C = -\ln|2-2x| + C'$$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = \frac{6}{3-2x}$ và $f(2) = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3 \ln|3-2x|$.

B. $f(x) = 2 \ln|3-2x|$.

C. $f(x) = -3 \ln|3-2x|$.

D. $f(x) = -2 \ln|3-2x|$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{6}{3-2x} dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{-2} \right) \ln|3-2x| + C = -3 \ln|3-2x| + C.$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } f(x) = -3 \ln|3-2x|.$$

Câu 46: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$. C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Biết $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} + C = 1 \Rightarrow C = 1$. Do đó $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1$.

Suy ra: $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} + 1 = \frac{3}{4}$.

Cách khác: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{1}{4} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 1 - F\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Câu 47: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int \frac{1}{3x} dx = \ln|3x| + C$. B. $\int e^x dx = e^x + C$.
C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \ln|x| + C$, do đó chọn $\int \frac{1}{3x} dx = \ln|3x| + C$.

Câu 48: Tìm nguyên hàm $I = \int \sqrt{2x+1} dx$

- A. $I = \frac{2}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C$. B. $I = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} + C$.
C. $I = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C$. D. $I = \frac{1}{4\sqrt{2x+1}} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C$

Câu 49: Tìm $a+b$ biết $\int \frac{7x+11}{(x+1)(x+2)} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+1| + C$?

- A. $a+b=7$. B. $a+b=5$. C. $a+b=11$. D. $a+b=-5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{7x+11}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = 4 \ln|x+1| + 3 \ln|x+2| + C$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}. \text{ Vậy } a+b=7.$$

Câu 50: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

A. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$

B. $F(x) = -\cos 2x.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}.$

D. $F(x) = 2x - \pi + 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ nên $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos \pi + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$ Vậy $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$

Câu 51: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2}.$

A. $\int f(x) dx = x^3 + x^2 + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + C.$

C. $\int f(x) dx = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

D. $\int f(x) dx = x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\int f(x) dx = \int \left(3x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + C = x^3 + \frac{x^2}{4} + C.$

Câu 52: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx.$

A. $I = 2x^2 - x - 2\ln|x-3| + C.$

B. $I = x^2 - x + 2\ln|x-3| + C.$

C. $I = x^2 - x - 2\ln|x-3| + C.$

D. $I = 2x^2 - x + 2\ln|x-3| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} = \frac{2(x-3)^2 + 5(x-3) + 2}{x-3} = 2(x-3) + 5 + \frac{2}{x-3} = 2x - 1 + \frac{2}{x-3}.$

Vậy $\int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx = \int \left(2x - 1 + \frac{2}{x-3}\right) dx = x^2 - x + 2\ln|x-3| + C.$

Câu 53: Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x-1}.$

B. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{3x+1}.$

C. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x+1}.$

D. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{3x+1}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $F'(x) = \frac{1}{27} \left[3e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + e^{3x+1}(18x - 24) \right] = \frac{1}{27} e^{3x+1} (27x^2 - 72x + 51 + 18x - 24)$

$$= \frac{1}{27} e^{3x+1} (27x^2 - 54x + 27) = (x^2 - 2x + 1) e^{3x+1}.$$

Câu 54: Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x \, dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó $a - b$ bằng:

- A. 3. B. -1. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int 8 \sin 3x \cos x \, dx = \int 4(\sin 4x + \sin 2x) \, dx = -\cos 4x - 2 \cos 2x + C.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = -2 \text{ nên } a - b = 1.$$

Câu 55:) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

- A. $1 + \cos x + C$. B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$. C. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$. D. $x^2 - \cos x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int (x + \sin x) \, dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

- A. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$. B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.
C. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$. D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = x + \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \text{ nên } 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$$

Câu 57: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$.

- A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$. B. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4$.
C. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 10$. D. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) \, dx = \int \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \, dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$$

$$\text{Mà } F(5) = 7 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy: } F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1.$$

Câu 58: Cho $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm phương án **sai**?

A. $F(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}$.

B. $F(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

C. $F(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}$.

D. $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì ta có $\left(\frac{x^2 - x + 1}{x+1} \right)' = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} \neq \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

Câu 59: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x \cdot \ln 9$ thỏa $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 6$.

B. $F(1) = 3$.

C. $F(1) = 12(\ln 3)^2$.

D. $F(1) = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$F(x) = \int f(x) dx = \ln 9 \int 3^x dx = \ln 9 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C = 2 \cdot 3^x + C$.

$F(0) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$. Vậy $F(x) = 2 \cdot 3^x \Rightarrow F(1) = 2 \cdot 3^1 = 6$.

Câu 60: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $(1; -2)$,

A. $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} - 1$.

B. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3$.

C. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + 3$.

D. $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

Mà ta có: $F(1) = -2 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{1}{1} + C = -2 \Leftrightarrow C = -3 \Rightarrow F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3$.

Câu 61: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 6x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 6x}{6} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 6x}{6} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 6x}{6} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int (x - \sin 6x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 6x}{6} + C$.

Câu 62: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $F(1) = 3$. Tính $F(4)$.

A. $F(4) = 5$.

B. $F(4) = 3$.

C. $F(4) = 3 + \ln 2$.

D. $F(4) = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = F(4) - F(1) \Rightarrow F(4) = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + F(1) = 5.$$

Câu 63: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \sin 2x$.

$$\text{A. } \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - \cos 2x + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = 3x^2 + 2 \cos 2x + C.$$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int (x^3 + \sin 2x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Câu 64: Hàm số $F(x)$ nào sau đây là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3}$?

$$\text{A. } 2 \ln|x+3| - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{B. } \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + 2.$$

$$\text{C. } \ln[(x+1)(x+3)].$$

$$\text{D. } \ln(2|x+1|).$$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3} = \frac{x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1}$$

$\Rightarrow$ Hàm số $F(x)$ nào có đạo hàm bằng $\frac{1}{x+1}$ thì đó là 1 nguyên hàm của $f(x)$

$$\text{Chọn } F(x) = \ln(2|x+1|)$$

Câu 65: Tìm giá trị m để hàm số $F(x) = m^2 x^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

$$\text{A. } m = \pm 1.$$

$$\text{B. } m = -1.$$

$$\text{C. } m = 1.$$

$$\text{D. } m = 2.$$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } F'(x) = 3m^2 x^2 + 2(3m+2)x - 4.$$

$$\text{Khi đó } F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 = 3 \\ 2(3m+2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 66: Cho hàm số $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tổng $a+b$ là

$$\text{A. } 4.$$

$$\text{B. } 2.$$

$$\text{C. } 5.$$

$$\text{D. } 3.$$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có: } F'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3ax^2 + 2(a+b)x + 2a-b+c = 3x^2 + 6x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2(a+b) = 6 \\ 2a-b+c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = c = 2 \end{cases} \Rightarrow a+b = 3.$$

DẠNG 3: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN TÌM HẸNG SỐ C**Câu 67:** Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x^2 + x^3 - 4$ thỏa mãn điều kiện $F(0) = 0$ là

- A. $2x^3 - 4x^4$. B. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$. C. $x^3 - x^4 + 2x$. D. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int (2x^2 + x^3 - 4) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - 4x + C$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{0^4}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} - 4x.$$

Chọn D**Câu 68:** Tìm hàm số $F(x)$ biết rằng $F'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $F(-1) = 3$

- A. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x - 3$ B. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$
C. $F(x) = x^4 - x^3 - 2x + 3$ D. $F(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int F'(x) dx = \int (4x^3 - 3x^2 + 2) dx = x^4 - x^3 + 2x + C$$

$$F(-1) = 3 \Leftrightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + C = 3 \Leftrightarrow C = 3$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$$

Chọn B**Câu 69:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.
C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$$

$$\text{Do } F(0) = \frac{3}{2} \text{ nên } e^0 + 0^2 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 70: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) = 2x - 3\cos x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

- A. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 + \frac{\pi^2}{4}$ B. $F(x) = x^2 - 3\sin x - \frac{\pi^2}{4}$
C. $F(x) = x^2 - 3\sin x + \frac{\pi^2}{4}$ D. $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int (2x - 3\cos x) dx = x^2 - 3\sin x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3\sin \frac{\pi}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 6 - \frac{\pi^2}{4}$$

Vậy $F(x) = x^2 - 3\sin x + 6 - \frac{\pi^2}{4}$

Chọn D

Câu 71: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $F(2) = 3 + \frac{1}{2}\ln 3$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = 2\ln 5 + 3$. B. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 5$. C. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 3$. D.

$F(3) = -2\ln 5 + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có: $\int f(x)dx = F(x)$

Có: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$.

Theo đề: $F(2) = 3 + \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow C = 3$.

$\Rightarrow F(3) = \frac{1}{2}\ln 5 + 3$.

Câu 72: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (2x+1)(x-2)$, biết $F(1) = 2$.

A. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{29}{6}$. B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$.
C. $F(x) = (x^2 + x)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) + 2$. D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (2x+1)(x-2)dx = \int (2x^2 - 3x - 2)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$.

Mà $F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{29}{6}$.

Vậy $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{29}{6}$.

Câu 73: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là:

A. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$ B. $F(x) = \cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$
C. $F(x) = -\cot x + x^2$ D. $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $F(x) = \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x^2 - \cot x + C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot \frac{\pi}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = \frac{\pi^2}{16}$

Vậy $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Chọn A

Câu 74: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 2x$, biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

A. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x$.

B. $F(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{\pi}{6}$.

C. $F(x) = \cos^2 x - \frac{1}{4}$.

D. $F(x) = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có : $F(x) = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$; $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$.

Vậy $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{4} = \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

Câu 75: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị của hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C$.

Vì đồ thị của hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M(0;1) \Rightarrow -\cos 0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = -\cos x + 2$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + 2 = 2$.

Câu 76: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5) = 7$

A. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 4$.

B. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$.

C. $F(x) = 2\sqrt{2x-1} - 10$.

D. $F(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{2x-1}} dx = 2 \int (2x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{2x-1} + C$.

$F(5) = 7 \Leftrightarrow 2.3 + C = 7 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = 2\sqrt{2x-1} + 1$.

Câu 77: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x^2} (x \neq 0)$. Biết rằng $F(1) = 1$ thì $F(x)$ là

A. $F(x) = 2x - \frac{3}{x} + 2$.

B. $F(x) = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + 4$.

C. $F(x) = 2x + \frac{3}{x} - 4$.

D. $F(x) = 2\ln|x| + \frac{3}{x} + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$$

$$F(1) = 1 \Leftrightarrow C - 3 = 1 \Leftrightarrow C = 4.$$

Câu 78: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x(1 - e^{-x})$ và $F(0) = 3$ thì $F(x)$ là?

- A. $e^x - x$ B. $e^x - x + 2$ C. $e^x - x + C$ D. $e^x - x + 1$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int e^x \cdot (1 - e^{-x}) dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C$$

$$F(0) = 3 \Leftrightarrow e^0 - 0 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = e^x - x + 2$$

Chọn B

Câu 79: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8(1 - 2x)^3$. Tính $I = F(1) - F(0)$.

- A. $I = 0$. B. $I = -2$. C. $I = -16$. D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$F(x) = \int 8(1 - 2x)^3 dx = -(1 - 2x)^4 + C$$

$$F(1) = -1 + C$$

$$F(0) = -1 + C$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = 0.$$

$$\text{Cách 2: } I = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 8(1 - 2x)^3 dx = -(1 - 2x)^4 \Big|_0^1 = 0.$$

Câu 80: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$.

$$\text{A. } F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{D. } F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \int (ax + bx^{-2}) dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^{-1}}{-1} + C = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + C$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + C = 1 \\ \frac{a}{2} - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases} \text{ Vậy } F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

DẠNG 4: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN HÀM HỮU TỈ

$$\text{Dạng: } I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

– Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.

– Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $f(x)$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn: $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

Ví dụ: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a. $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$.

b. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Giải

a. Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+3x+3}{x+1} dx = \int \left(x+2 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x+1| + C.$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Nhận xét: Qua thí dụ trên:

Câu a) chúng ta chỉ cần thực hiện phép chia đa thức là đã biến đổi phân thức hữu tỉ ban đầu thành tổng các nhân tử mà nguyên hàm của mỗi nhân tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm.

Câu b) chúng ta nhận thấy:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{Ta được đồng nhất thức } 1 = (A+B)x + 2A+B. \quad (1)$$

Để xác định A, B trong (1) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Phương pháp đồng nhất hệ số: Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Câu 81: Tìm $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx$.

A. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

B. $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$

C. $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

D. $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\int \frac{6x+2}{3x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{3x-1} \right) dx = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C.$$

Câu 82: Nguyên hàm $\int \frac{x^2-x+1}{x-1} dx$

A. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C$. B. $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C$. C. $x + \frac{1}{x-1} + C$. D. $x^2 + \ln|x-1| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x-1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$$

Câu 83: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ là

A. $-\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C$. B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. C. $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. D. $\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Câu 84: Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{(2x+1)(x-2)}$?

A. $F(x) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+\frac{1}{2}} \right| + C$. B. $F(x) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| + C$
 C. $F(x) = -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| + C$. D. $F(x) = \frac{1}{15} \ln \left| \frac{3x-6}{2x+1} \right| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} &+ \text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{(2x+1)(x-2)} dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{5} (\ln|x-2| - \ln|2x+1|) + C \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| + C = -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+\frac{1}{2}} \right| + C_1. \end{aligned}$$

Câu 85: Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$.

A. $F(x) = \ln|x| - \ln|x-1|$. B. $F(x) = \ln|x| + \ln|x-1|$.
 C. $F(x) = -\ln|x| - \ln|x-1|$. D. $F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

- Phân tích hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$.
- Các nguyên hàm là $\ln|x-1| - \ln|x| + C \Rightarrow$ một nguyên hàm là $F(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|$.

Câu 86: Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. $a+b=1$. B. $a+b=5$. C. $a+b=-5$. D. $a+b=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx.$$

$$= 2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C.$$

Vậy $a=2, b=-3$. Vậy $a+b=-1$.

Câu 87: Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2}$ là:

A. $\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

B. $\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

C. $e^x + \frac{1}{x} + C.$

D. $\ln x + \frac{1}{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

Câu 88: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

A. $\frac{1}{2} \ln|x^2-4| + C.$

B. $\frac{1}{2(x^2-4)} + C.$

C. $\frac{-1}{4(x^2-4)^2} + C.$

D. $2\ln|x^2-4| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \frac{x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + C$$

Câu 89: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

A. $\int f(x) dx = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

C. $\int f(x) dx = -\ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + C.$

D. $\int f(x) dx = -\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Câu 90: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$.

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| + C.$

C. $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

D. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$$

Câu 91: Nguyên hàm $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5} =$.

- A. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C.$ B. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+5}{x-1} \right| + C.$ C. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C.$ D. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x-5} \right| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5} = \int \frac{1}{(x-1)(x+5)} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C.$$

Câu 92: Biết rằng $\int \frac{x-3}{x^2 - 2x + 1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $\frac{b}{a} = 2.$ B. $\frac{2a}{b} = -1.$ C. $a = 2b.$ D. $\frac{a}{2b} = -\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int \frac{x-3}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{x-3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{x-3}{x^2 - 2x + 1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C \Leftrightarrow a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2.$$

Câu 93: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2 - x - 1}$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-1| + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-1| + C.$
 C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|2x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-1| + C.$ D. $\int f(x) dx = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| - \frac{5}{3} \ln|x-1| + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int \frac{2x+3}{2x^2 - x - 1} dx &= \int \frac{2x+3}{(2x+1)(x-1)} dx = \int \left[-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-1} \right] dx. \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} + \frac{5}{3} \int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{2}{3} \ln|2x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

DẠNG 5: NGUYÊN HÀM LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Câu 94: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ là

- A. $\cos x + x + C.$ B. $\frac{\sin^2 x}{2} + x + C.$ C. $-\cos x + x + C.$ D. $\cos x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int \sin x + 1 = -\cos x + x + C$$

Câu 95: Cho $a \in \mathbb{R}$, hàm số nào sau đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

A. $F(x) = \sin x$.

B. $F(x) = 2 \cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2}$.

C. $F(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + a \right) \cos \left(\frac{x}{2} - a \right)$.

D. $F(x) = 2 \sin \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Ta có $2 \cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} = \cos x + \cos a$. Đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

Câu 96: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

A. $-\sin^2 x + C$.

B. $-\cos 2x + C$.

C. $\cos 2x + C$.

D. $-\cos^2 x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C = -\frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) + C = -\cos^2 x + \frac{1}{2} + C.$$

Câu 97: Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

(I) $f(x) = \tan^2 x + 2$ (II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$

A. (III).

B. (II).

C. (II), (III).

D. (I), (II), (III).

Hướng dẫn giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } \int (\tan^2 x + 1) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

Câu 98: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \int (\sin 2x - \cos 3x) dx$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

C. $\int f(x) dx = -\cos 2x - \sin 3x + C$.

D. $\int f(x) dx = \cos 2x + \sin 3x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$f(x) = \int (\sin 2x - \cos 3x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

Câu 99: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là:

A. $-\sin x \cos x$.

B. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

C. $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

D. $\frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{\sin 2x dx}{2} = -\frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Câu 100: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

B. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

C. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

D. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có:

$$\int f(x) dx = \int (4^x + \sin^2 x) dx = \int \left(4^x + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(4^x + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Câu 101: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$.

A. $\int f(x) dx = \tan x + x + C.$

B. $\int f(x) dx = \tan x - x + C.$

C. $\int f(x) dx = \tan x + C.$

D. $\int f(x) dx = x - \tan x + C.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có : } \int f(x) dx = \int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \tan x - x + C.$$

Câu 102: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 5x$ là.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 8x + C.$

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

Câu 103: Tính $I = \int 8 \sin 3x \cos x dx = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$I = \int 8 \sin 3x \cos x dx = 4 \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\cos 4x - 2 \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = -1, b = -2. \text{ Vậy } a - b = 1.$$

Câu 104: Nguyên hàm $\int \sin^2 2x dx$ là

A. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$

B. $\frac{1}{3} \sin^3 2x + C.$

C. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 4x + C.$

D. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \int \sin^2 2x dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

DẠNG 6: NGUYÊN HÀM HÀM SỐ MŨ LÔGARIT**Câu 105:** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C.$

B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C.$

C. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C.$

D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C.$$

Câu 106: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2018x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2018} \cdot e^{2018x} + C$.

B. $\int f(x) dx = e^{2018x} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2018e^{2018x} + C$.

D. $\int f(x) dx = e^{2018x} \ln 2018 + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng.

Câu 107: Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{1-4x}$?

A. $y = -4e^{1-4x}$.

B. $y = \frac{1}{4}e^{1-4x}$.

C. $y = -\frac{1}{4}e^{1-4x}$.

D. $y = e^{1-4x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int e^{1-4x} dx = -\frac{1}{4}e^{1-4x} + C.$$

Câu 108: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x \ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đúng?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$.

B. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$.

C. $f(x) = \frac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$.

D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \int (2018^x \ln 2018 - \cos x) dx = 2018^x - \sin x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2018^0 - \sin 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2018^x - \sin x + 1.$$

Câu 110: Tính $\int (2 + e^{3x})^2 dx$

A. $3x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

B. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{5}{6}e^{6x} + C$

C. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{6x} + C$

D. $4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (2 + e^{3x})^2 dx = \int (4 + 4e^{3x} + e^{6x}) dx = 4x + \frac{4e^{3x}}{3} + \frac{e^{6x}}{6} + C.$

Chọn D

Câu 111: Hàm số $F(x) = e^x + e^{-x} + x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^{-x} + e^x + 1$

B. $f(x) = e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

C. $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$

D. $f(x) = e^x + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (e^x + e^{-x} + 1) dx = e^x - e^{-x} + x + C.$

Chọn C

Câu 112: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} - e^{-3x}$ là :

A. $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2x}}{2} + C.$

B. $\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

C. $\frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} + C.$

D. $\frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{2} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (e^{2x} - e^{-3x}) dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + C.$

Chọn B

Câu 113: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x} - 2^{-3x}$ là :

A. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \ln 2} + C.$

B. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{2^{-3x}}{3 \ln 2} + C.$

C. $\frac{3^{-2x}}{2 \ln 3} + \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.$

D. $\frac{3^{-2x}}{2 \ln 3} - \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (3^{2x} - 2^{-3x}) dx = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + \frac{2^{-3x}}{3 \ln 2} + C.$

Chọn A

Câu 114: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

A. $\int f(x) dx = e^{-x} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + C.$

Câu 115: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

D. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = -xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y = xe^{x^2}$.

Câu 116: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right).$

A. $F(x) = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

B. $F(x) = 12^x + x\sqrt{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x}}{4^x} \right).$

D. $F(x) = \frac{2^{2x}}{\ln 2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x\sqrt{x} \ln 4}{4^x} \right).$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 2^{2x} \left(3^x - \frac{\sqrt{x}}{4^x}\right) = 12^x - \sqrt{x}$

Nên $F(x) = \int (12^x - \sqrt{x}) dx = \frac{12^x}{\ln 12} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

Câu 117: Tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5}\right).$

A. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\int f(x) dx = \int (2017e^x - 2018x^{-5}) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 118: Tính $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx$

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$

C. $84^x + C$

D. $84^x \ln 84 + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C.$

Chọn A

Câu 119: Nguyên hàm $\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}} dx$ là:

A. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

B. $\frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$

$$C. \frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$$

$$D. \frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{\frac{x}{3}} + C.$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\int \frac{e^{2x+1} - 2}{\sqrt[3]{e^x}} dx = \int \left(\frac{e^{2x+1}}{e^{\frac{x}{3}}} - \frac{2}{e^{\frac{x}{3}}} \right) dx = \int \left(e^{2x+1-\frac{x}{3}} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \int \left(e^{\frac{5}{3}x+1} - 2e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \frac{5}{3}e^{\frac{5}{3}x+1} + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + C.$$

Chọn D

Câu 120: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 3}$ và $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm S của phương trình $3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2$ là

A. $S = \{2\}$. B. $S = \{-2; 2\}$. C. $S = \{1; 2\}$. D. $S = \{-2; 1\}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{dx}{e^x + 3} = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 3} \right) dx = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3)) + C.$$

$$\text{Do } F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4 \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy } F(x) = \frac{1}{3} (x - \ln(e^x + 3)).$$

$$\text{Do đó: } 3F(x) + \ln(e^x + 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Chọn A

Câu 121: Hàm số $F(x) = \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + C$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây.

A. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{3x+1}$. B. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x+1}$.
C. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{3x+1}$. D. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{3x-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) \right)' = \frac{1}{27} \left[3e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17)' \right] \\ &= \frac{1}{27} \left[3e^{3x+1}(9x^2 - 24x + 17) + e^{3x+1}(18x - 24) \right] = \frac{1}{27}e^{3x+1}(27x^2 - 54x + 27) = e^{3x+1}(x^2 - 2x + 1). \end{aligned}$$

Câu 122: Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ và $f(x) = (-x^2 + 3x + 6)e^{-x}$. Tìm a và b để $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

A. $a = 1, b = -7$. B. $a = -1, b = -7$. C. $a = -1, b = 7$. D. $a = 1, b = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a-b)e^{-x} = f(x) \text{ nên } \begin{cases} 2-a=3 \\ a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-7 \end{cases}.$$

Câu 123: Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

A. $T = -3035$. B. $T = 1007$. C. $T = -5053$. D. $T = 1011$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Vì $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ nên ta có: $(F(x))' = f(x)$, với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$.
 $\Leftrightarrow (2ax^2 + x(2b + 2a) - 2c + b)e^{2x} = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$, với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2018 \\ 2b + 2a = -3 \\ -2c + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\frac{2021}{2} \\ c = -\frac{2023}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b + 4c = 1009 + 2 \cdot \left(-\frac{2021}{2}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{2023}{4}\right) = -3035.$$

Câu 124: Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$.

Tính giá trị của biểu thức $f[F(0)]$.

A. $-e^{-1}$.

B. $20e^2$.

C. $9e$.

D. $3e$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$F'(x) = (ax^2 + bx + c)'e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(e^{-x})' = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$F'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

Vì $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$ nên:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Như vậy } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x} \Rightarrow F(0) = (-2 \cdot 0^2 + 0 - 1)e^{-0} = -1.$$

$$\text{Bởi vậy } f[F(0)] = f(-1) = (2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2)e = 9e.$$

DẠNG 7: NGUYÊN HÀM CƠ BẢN BIẾT HÀM $f'(x)$

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$, $f(1) = 1$. Tính $f(5)$

A. $f(5) = 2\ln 3 + 1$.

B. $f(5) = \frac{1}{2}\ln 3$.

C. $f(5) = \ln 2$.

D. $f(5) = \ln 3 + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

$$\text{Lại có } f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + 1.$$

$$\text{Vậy } f(5) = \ln 3 + 1$$

Câu 126: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

B. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - 2$.

C. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x$.

D. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x + \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$; $f(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\sin x + 2$.

B. $f(x) = 3x - 5\sin x - 5$.

C. $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

D. $f(x) = 3x + 5\sin x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3 - 5\cos x \Rightarrow f(x) = \int (3 - 5\cos x) dx = 3x - 5\sin x + C$.

Lại có: $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 5\sin 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Vậy $f(x) = 3x - 5\sin x + 5$.

Câu 128: Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x^2 - x)(x + 1)$ và $f(0) = 3$.

A. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 3$.

B. $f(x) = 3x^2 - 1$.

C. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3$.

D. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = (x^2 - x)(x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - x = x^3 - x$.

Suy ra $f(x) = \int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$ mà $f(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3$. Vậy $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3$.

Câu 129: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = 4$.

B. $S = \ln 2$.

C. $S = \ln 4035$.

D. $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(|x-1|) + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$ nên $\begin{cases} f(x) = \ln(|x-1|) + 2017 & \text{ khi } x < 1 \\ f(x) = \ln(|x-1|) + 2018 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.

Do đó $S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2018 - \ln 2 - 2017 = 1$.

Câu 130: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, $f(0) = 1$ và $f(-4) = 2$. Giá

trị của biểu thức $f(2) + f(-3)$ bằng:

A. $3 - 20 \ln 2$.B. $\ln 2$.C. 12 .D. $10 + \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int \frac{3x-1}{x+2} dx = \int \frac{3(x+2)-7}{x+2} dx = \int \left(3 - \frac{7}{x+2} \right) dx$$

$$= 3x - 7 \ln|x+2| + C = \begin{cases} 3x - 7 \ln(x+2) + C_1, & x > -2 \\ 3x - 7 \ln(-x-2) + C_2, & x < -2 \end{cases}$$

Xét trên $(-2; +\infty)$, ta có $f(0) = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 7 \ln 2 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 + 7 \ln 2$

$$\Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 - 7 \ln 4 + (1 + 7 \ln 2) = 7 - 7 \ln 2.$$

Xét trên $(-\infty; -2)$, ta có $f(-4) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (-4) - 7 \ln 2 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 14 + 7 \ln 2$

$$\Rightarrow f(-3) = 3 \cdot (-3) - 7 \ln 1 + (14 + 7 \ln 2) = 5 + 7 \ln 2.$$

$$\text{Do đó } f(2) + f(-3) = 12.$$

Câu 131: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{x+1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) + f(-2) = 2$.

Giá trị $f(-3)$ bằng

A. $2 + \ln 2$.B. $1 + 2 \ln 2$.C. $1 - \ln 2$.D. 1 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3}{x+1} dx = 3 \ln|x+1| + C$$

$$+) \text{ Với } x > -1 \Rightarrow f(x) = 3 \ln(x+1) + C_1$$

$$\text{Ta có: } f(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \ln 2 + 1$$

$$+) \text{ Với } x < -1 \Rightarrow f(x) = 3 \ln(-x-1) + C_2$$

$$\text{Ta có: } f(-2) = 3 \ln 1 + C_2 = C_2$$

$$\text{Từ } f(1) + f(-2) = 2 \Leftrightarrow 3 \ln 2 + 1 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 1 - 3 \ln 2$$

$$\Rightarrow f(-3) = 3 \ln 2 + 1 - 3 \ln 2 = 1.$$

Câu 132: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3}$, $f(-1) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(2)$ bằng

A. $\frac{27}{4} + 4 \ln 2$.B. $\frac{3}{4} + 4 \ln 2$.C. $4 \ln 2$.D. $\frac{15}{4} + 4 \ln 2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có

$$f'(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \ln x - \frac{1}{2x^2} + C_1 & (x > 0) \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 \ln(-x) - \frac{1}{2x^2} + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

Theo giả thiết

$$f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \text{ và } f(-1) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln x - \frac{1}{2x^2} + 2 \quad (x > 0) \text{ và } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln(-x) - \frac{1}{2x^2} + 1 \quad (x < 0)$$

$$\text{Từ đó suy ra } f(-2) = \frac{23}{8} + 2\ln 2 \text{ và } f(2) = \frac{31}{8} + 2\ln 2$$

$$\Rightarrow f(-2) + f(2) = \frac{27}{4} + 4\ln 2.$$

Câu 133: Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = |x-1|$. Biết rằng $f(0) = 3$.

Tính $f(2) + f(4)$?

A. 10.

B. 12.

C. 4.

D. 11.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi } x \geq 1 \text{ thì } f(x) = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

$$\text{Khi } x < 1 \text{ thì } f(x) = -\int (x-1) dx = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_2.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } f(0) = 3 \text{ nên } C_2 = 3 \Rightarrow f(x) = -\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3 \text{ khi } x < 1.$$

$$\text{Mặt khác do hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x=1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + 3\right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) + C_1\right] \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 3 = \frac{1}{2} - 1 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 4.$$

$$\text{Vậy khi } x \geq 1 \text{ thì } f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4 \Rightarrow f(2) + f(4) = 12.$$

Câu 134: Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là

A. $x^3 + x^2 - 3x - 5$.

B. $x^3 + 2x^2 - 5x - 5$.

C. $2x^3 + x^2 - 7x - 5$.

D. $x^3 + x^2 + 4x - 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1-m)x + C.$$

$$\text{Theo đề bài, ta có } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-m) + C + 12 = 1 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$$

Câu 135: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$ và $f(-3) - f(3) = 0$.

Giá trị của biểu thức $f(-4) - f(4)$ bằng

A. 0.

B. $-\frac{1}{3}\ln 2$.

C. $\frac{1}{3}\ln 2$.

D. $\frac{1}{3}\ln 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \int f'(x) dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{3} \ln(1-x) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C_2 & \text{khi } -2 < x < 1 \\ \frac{1}{3} \ln(1-x) - \frac{1}{3} \ln(-2-x) + C_3 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(-3) - f(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 + C_3 - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 - C_1 = 0 \Rightarrow C_3 - C_1 = -\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 5.$$

$$\Rightarrow f(-4) - f(4) = \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 2 + C_3 - \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{1}{3} \ln 6 - C_1 = -\frac{1}{3} \ln 2.$$

Câu 136: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết rằng

$$f(-3) + f(3) = 0 \text{ và } f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Tính } T = f(-2) + f(0) + f(4).$$

A. $T = 1 + \ln \frac{9}{5}.$

B. $T = 1 + \ln \frac{6}{5}.$

C. $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$

D. $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Trên khoảng } (-\infty; -1) \cup (1; +\infty): f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1.$$

$$\text{Trên khoảng } (-1; 1): f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2.$$

$$\text{Theo đề } \begin{cases} f(-3) + f(3) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{x+1} + 1 & \text{khi } x \in (-1; 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = f(-2) + f(0) + f(4) = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 1 + 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$

Cách 2:

$$\text{Với mọi } x \neq \pm 1, \text{ ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

Vì hàm số có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } f(x) = \begin{cases} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1, & x < -1 \\ \ln \frac{1-x}{x+1} + C_2, & -1 < x < 1 \\ \ln \frac{x-1}{x+1} + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} f(-3) + f(3) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 2 + C_1 + \ln \frac{1}{2} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } T = f(-2) + f(0) + f(4) = \ln 3 + C_1 + \ln 1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = 1 + \ln \frac{9}{5}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Đổi biến dạng 1

Nếu : $\int f(x)dx = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì :

$$\int f(u)du = F(\varphi(t)) + C$$

1.1. Phương pháp chung

- Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$
- Bước 3: Biến đổi : $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- Bước 4: Khi đó tính : $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a \sin t$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x = a \cos t$; với $t \in [0; \pi]$.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{ a }{\sin t}$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x = a \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = atant$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Đổi biến dạng 2

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C.$$

2.1. Phương pháp chung

- Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Tính vi phân hai vế : $dt = \varphi'(x)dx$.
- Bước 3: Biểu thị : $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = g(t)dt$.
- Bước 4: Khi đó : $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f(x; \sqrt{\varphi(x)})$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan \frac{x}{2}; \left(\cos \frac{x}{2} \neq 0 \right)$
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với : $x+a > 0$ và $x+b > 0$. Đặt : $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x+a < 0$ và $x+b < 0$. Đặt : $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐƯA VÀO VI PHÂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = 2\ln(1+x^2) + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\ln(1+x^2) + C.$

C. $\int f(x)dx = 4\ln(1+x^2) + C.$

D. $\int f(x)dx = \ln(1+x^2) + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x \cdot dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C.$

Chọn D

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2+x}{x^2+4x-4}$ là :

A. $\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C.$

B. $\ln|x^2+4x-4| + C.$

C. $2\ln|x^2+4x-4| + C.$

D. $4\ln|x^2+4x-4| + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{x+2}{x^2+4x-4} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2+4x-4)}{x^2+4x-4} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x-4| + C.$

Chọn A

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3\ln|x^3+4| + C$

B. $-3\ln|x^3+4| + C$

C. $\ln|x^3+4| + C$

D. $-\ln|x^3+4| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{3x^2 \cdot dx}{x^3+4} = \int \frac{d(x^3+4)}{x^3+4} = \ln|x^3+4| + C$

Chọn C

Câu 4. Tính $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4-1} dx$

A. $F(x) = \ln|x^4 - 1| + C$

B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 - 1| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^4 - 1| + C$

D. $F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^4 - 1| + C$

Ta có: $\int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 1)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \ln|x^4 - 1| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 1)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \ln|x^4 - 1| + C$

Chọn B**Câu 5.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 3}$ là

A. $-\ln|\cos x - 3| + C$

B. $2\ln|\cos x - 3| + C$

C. $-\frac{\ln|\cos x - 3|}{2} + C$

D. $4\ln|\cos x - 3| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{\sin x}{\cos x - 3} dx = \int \frac{-d(\cos x - 3)}{\cos x - 3} = -\ln|\cos x - 3| + C$

Chọn A**Câu 6.** Nguyên hàm của hàm số: $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

B. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$

C. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

D. $-\cos^2 x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

Chọn B**Câu 7.** Tính $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx$

A. $\frac{3\sin x - \sin 3x}{12} + C$

B. $\frac{3\cos x - \cos 3x}{12} + C$

C. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

D. $\sin x \cdot \cos^2 x + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \cos x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Chọn C**Câu 8.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ là:

A. $\ln|\cos x| + C$

B. $-\ln|\cos x| + C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

D. $\ln(\cos x) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

Chọn B**Câu 9.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$ là:

A. $-e^x - 3 + C$

B. $3e^x + 9 + C$

C. $-2\ln|e^x + 3| + C$

D. $\ln|e^x + 3| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx = \int \frac{d(e^x + 3)}{e^x + 3} = \ln|e^x + 3| + C$

Chọn D

Câu 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x2^{x^2}$ là:

A. $\frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{x^2}} + C$

B. $\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

C. $\frac{\ln 2}{2^{x^2}} + C$

D. $\ln 2 \cdot 2^{x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2x \cdot 2^{x^2} dx = \frac{1}{\ln 2} \int 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 = \frac{1}{\ln 2} \int d(2^{x^2}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{x^2} + C$

Chọn B

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2xe^{x^2}$ là:

A. $\frac{-e^x}{2} + C$

B. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$

C. $-e^x + C$

D. $e^{x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int d(e^{x^2}) = e^{x^2} + C$

Chọn D

Câu 12. Tính $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$

A. $e^{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

C. $\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

D. $\frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int d(e^{x^2+1}) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

Chọn C

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

C. $\int f(x) dx = \ln x + C$

D. $\int f(x) dx = e^x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

Câu 14. Nguyên hàm $\int \frac{1+\ln x}{x} dx (x > 0)$ bằng

A. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$

B. $x + \ln^2 x + C$

C. $\ln^2 x + \ln x + C$

D. $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int \frac{1+\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln x d(\ln x) = \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

Câu 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1)$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

B. $\ln(x^2+1) + C$

C. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

D. $\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) dx = \int \ln(x^2+1) d(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + C$

Chọn D

Câu 16. Tính $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

A. $\ln x + C$

B. $\ln |x| + C$

C. $\ln(\ln x) + C$

D. $\ln |\ln x| + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C$

Chọn D

Câu 17. Họ nguyên hàm $\int x \sqrt[3]{x^2+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)} + C.$

B. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)} + C.$

C. $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C.$

D. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int x \sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) = \frac{3}{8} (x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C.$

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH ĐỔI BIẾN SỐ

Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C.$

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x)) u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x)$, suy ra $dt = u'(x) dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t) dt = G(t) + C = G[u(x)] + C.$

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

HÀM ĐA THỨC, PHÂN THỨC

Câu 18. Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, ta có $\int f(ax+b) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a} F(ax+b) + C$

B. $a F(ax+b) + C$

C. $\frac{1}{a} F(ax+b) + C$

D. $F(ax+b) + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int f(ax+b) dx$

Đặt: $t = ax + b \Rightarrow dt = adx \Rightarrow \frac{1}{a} dt = dx$.

Khi đó: $I = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) + C$

Suy ra: $I = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Chọn C

Câu 19. Hàm số $f(x) = x(1-x)^{10}$ có nguyên hàm là:

A. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} - \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

B. $F(x) = \frac{(x-1)^{12}}{12} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + C$.

C. $\frac{(x-1)^{11}}{11} + \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

D. $F(x) = \frac{(x-1)^{11}}{11} - \frac{(x-1)^{10}}{10} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x(1-x)^{10} dx$. Đặt: $t = 1-x \Rightarrow -dt = dx, x = 1-t$.

Khi đó $I = \int (1-t)t^{10} dt = \int (t^{11} - t^{10}) dt = \frac{1}{12} t^{12} - \frac{1}{11} t^{11} + C$

Suy ra $I = \frac{1}{12} (1-x)^{12} - \frac{1}{11} (1-x)^{11} + C$.

Chọn A

Câu 20. Tính $\int \frac{dx}{(1+x^2)x}$ thu được kết quả là:

A. $\ln|x|(x^2+1) + C$.

B. $\ln|x|\sqrt{1+x^2} + C$.

C. $\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int \frac{dx}{(1+x^2)x} = \int \frac{xdx}{(1+x^2)x^2}$. Đặt: $t = 1+x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} dt = x dx, x^2 = t-1$.

Khi đó: $I = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t(t-1)} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{1+x^2} \right| + C$.

Chọn D

Câu 21. Tính $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x(x+1)^3 dx$

Đặt: $t = x+1 \Rightarrow dt = dx, x = t-1$

Khi đó: $I = \int (t-1)t^3 dt = \int (t^4 - t^3) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + C$

Suy ra: $I = \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

Chọn B

Câu 22. Xét $I = \int x^3(4x^4 - 3)dx$. Bằng cách đặt: $u = 4x^4 - 3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du$. B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du$. C. $I = \int u^5 du$. D. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$u = 4x^4 - 3 \Rightarrow du = 16x^3 dx \Rightarrow \frac{1}{16} du = x^3 dx.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$$

Câu 23. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$. B. $\frac{241}{252}$. C. $\frac{52}{9}$. D. $\frac{7}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{t+2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} dt = dx.$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3} \int \frac{t+2}{3} t^6 dt = \frac{2}{9} \int (t^7 + 2t^6) dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{36} (3x-2)^8 + \frac{4}{63} (3x-2)^7 + C.$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{1}{36}, B = \frac{4}{63}, 12 \cdot \frac{1}{36} + 7 \cdot \frac{4}{63} = \frac{7}{9}.$$

Câu 24. Nguyên hàm của $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ là:

A. $\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$. B. $-\ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$.
C. $\frac{1}{2} \ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$. D. $-\frac{1}{2} \ln|t| + C$, với $t = x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+1} dx = \dots = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C.$$

Chọn C

HÀM CHỨA CĂN THỨC

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{2x+3} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x+3) \sqrt{2x+3} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x+3) \sqrt{2x+3} + C$. D. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+3} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int (\sqrt{2x+3}) dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+3} = t \Leftrightarrow t^2 = 2x+3 \Leftrightarrow 2t dt = 2dx.$$

$$I = \int t \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\sqrt{2x+3})^3 + C \Leftrightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x+3) \sqrt{2x+3} + C.$$

Câu 26. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int \sqrt[3]{x+1} dx.$

Đặt: $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow 3t^2 dt = dx.$

$$\Rightarrow I = \int t \cdot 3t^2 dt = \int 3t^3 dt = \frac{3}{4} t^4 + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C = \frac{3}{4} (x+1) \sqrt[3]{x+1} + C.$$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4} (x+1) \sqrt[3]{x+1} + C.$

Câu 27. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}.$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt.$

Khi đó ta có $\int \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C.$

Câu 28. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3$

B. $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} (\sqrt{1+x^2})^2$

D. $F(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{1+x^2})^2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x\sqrt{1+x^2} dx$

Đặt: $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t \cdot dt = x \cdot dx$ Khi đó: $I = \int t \cdot t \cdot dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$

Suy ra: $I = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 + C$

Chọn A

Câu 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$

B. $-\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

C. $2\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

D. $-\frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int 2x\sqrt{1-x^2} dx$

Đặt: $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow -2tdt = 2xdx$.

Khi đó: $I = \int t \cdot (-2t) \cdot dt = \int -2t^2 \cdot dt = -\frac{2t^3}{3} + K$

Suy ra: $I = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$.

Chọn D

Câu 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{3x-1}$ là:

A. $\frac{1}{21}\sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x-1)^5} + C$.

B. $\frac{1}{18}\sqrt[3]{(3x-1)^6} + \frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + C$.

C. $\frac{1}{9}\sqrt[3]{(3x-1)^3} + \sqrt[3]{(3x-1)} + C$.

D. $\frac{1}{12}\sqrt[3]{(3x-1)^4} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-1)} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int x\sqrt[3]{3x-1} dx$. Đặt: $t = \sqrt[3]{3x-1} \Rightarrow t^3 = 3x-1 \Rightarrow t^2 \cdot dt = dx$

Khi đó: $I = \int \frac{t^3+1}{3} \cdot t \cdot t^2 \cdot dt = \frac{1}{3} \int (t^6 + t^4) dt = \frac{1}{3} \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} \right) + C$

Suy ra $I = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} \sqrt[3]{(3x-1)^7} + \frac{1}{5} \sqrt[3]{(3x-1)^5} \right) + C$.

Chọn A

Câu 31. Cho $I = \int x^3\sqrt{x^2+5} dx$, đặt $u = \sqrt{x^2+5}$ khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = \int (u^4 - 5u^2) du$.

B. $I = \int u^2 du$.

C. $I = \int (u^4 - 5u^3) du$.

D. $I = \int (u^4 + 5u^3) du$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A

Đặt $u = \sqrt{x^2+5} \Rightarrow u^2 = x^2+5 \Rightarrow udu = xdx$

Khi đó: $I = \int x^3\sqrt{x^2+5} dx = \int x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2+5} dx = \int (u^2 - 5) \cdot u \cdot udu = \int (u^4 - 5u^2) du$

Câu 32. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 (x^2 - 1) dx$.

B. $I = \int_1^3 u^2 (u^2 - 1) du$.

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$.

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2 (u^2 - 1) du$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 - 1) \Rightarrow dx = u du$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 4 \Rightarrow u = 3$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^2 - 1) u^2 du$.

Câu 33. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u(u^2 - 4)du$. B. $\int (u^2 - 4)du$. C. $\int 2(u^2 - 4)du$. D. $\int (u^2 - 3)du$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $u \geq 0$ nên $u^2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u du \\ x = u^2 - 1 \end{cases}$.

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u^2-1-3}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du$.

Câu 34. Tính tích phân: $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Tổng $a+b$ là

A. 2. B. 3. C. -1. D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$$

Đặt $u = \sqrt{3x+1} \rightarrow x = \frac{u^2-1}{3} \rightarrow dx = \frac{1}{3} 2u du$

Đổi cận: $x=1 \rightarrow u=2$ $x=5 \rightarrow u=4$

Vậy $I = \int_2^4 \frac{2}{u^2-1} du = \int_2^4 \frac{u+1-(u-1)}{(u+1)(u-1)} du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|_2^4 = \ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{3} = 2 \ln 3 - \ln 5$

Do đó $a=2$; $b=-1 \rightarrow a+b=1$.

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ là:

A. $\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ B. $-\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$
C. $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1-x^2} + C$ D. $-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow -tdt = xdx$

Khi đó: $I = -\int \frac{(1-t^2)}{t} tdt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C$.

Thay $t = \sqrt{1-x^2}$ ta được $I = \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2} + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$.

Chọn D

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 36. Theo phương pháp đổi biến số với $t = \cos x, u = \sin x$, nguyên hàm của $I = \int (\tan x + \cot x) dx$ là:

A. $-\ln|t| + \ln|u| + C$. B. $\ln|t| - \ln|u| + C$.
C. $\ln|t| + \ln|u| + C$. D. $-\ln|t| - \ln|u| + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (\tan x + \cot x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$.

Xét $I_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow I_1 = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C_1$.

Xét $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow I_2 = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C_2$.

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = -\ln|t| + \ln|u| + C$

Chọn A

Câu 37. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 0}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} + \pi = \frac{1}{4} + \pi$.

Câu 38. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$. Kết quả là

A. $\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2} + C$. B. $\sqrt{1+\sin^2 x} + C$. C. $-\sqrt{1+\sin^2 x} + C$. D. $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{1+\sin^2 x}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + \sin^2 x \Rightarrow 2t dt = \sin 2x dx \Rightarrow \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int \frac{2t}{t} dt$

$= \int 2 dt = 2t + C = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$

Câu 39. Theo phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm của $I = \int \frac{2\sin x + 2\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}} dx$ là:

A. $2\sqrt[3]{t} + C$. B. $6\sqrt[3]{t} + C$. C. $3\sqrt[3]{t} + C$. D. $12\sqrt[3]{t} + C$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$I = \int \frac{2\sin x + 2\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin 2x}} dx = \int \frac{2(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2}} dx$.

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\sin x + \cos x) dx$.

$$\Rightarrow I = \int \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} dt = 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)} t^{\frac{1}{3}} + C = 6\sqrt[3]{t} + C.$$

Chọn B**HÀM MŨ – LÔGARIT****Câu 40.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A. $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C.$ **B.** $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$ **D.** $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C.$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$

Do đó, ta có $\int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

Vậy $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

Câu 41. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}.$

A. $I = x - \ln|1 - e^x| + C.$

B. $I = x + \ln|1 + e^x| + C.$

C. $I = -x - \ln|1 + e^x| + C.$

D. $I = x - \ln|1 + e^x| + C.$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}.$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x+1| + C = x - \ln|e^x+1| + C$$

Câu 42. Với phương pháp đổi biến số ($x \rightarrow t$), nguyên hàm $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}t^2 + C.$

B. $t^2 + C.$

C. $2t^2 + C.$

D. $4t^2 + C.$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \ln 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot \frac{1}{2x} dx \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln 2x}{x} dx = \dots = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Chọn A**Câu 43.** Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x)$?

A. $y = 2^{\sin x + \cos x} + C.$

B. $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}.$

C. $y = \ln 2 \cdot 2^{\sin x + \cos x}.$

D. $y = -\frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I = \int 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x) dx = \int 2^{\sin x + \cos x} (\cos x - \sin x) dx$.

Đặt: $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x) dx$.

$$\Rightarrow I = \int 2^t dt = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2} + C.$$

Vậy hàm số đã cho có 1 nguyên hàm là hàm số: $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$.

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$.

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$.

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^t \ln 2 dt = 2 \cdot 2^t + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C \text{ nên A sai.}$$

Ngoài ra:

+ D đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C$.

+ B đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 2 + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C'$.

+ C đúng vì $F(x) = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 + C = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + C'$.

Cách 2: Ta thấy B, C, D chỉ khác nhau một hằng số nên theo định nghĩa nguyên hàm thì chúng phải là nguyên hàm của cùng một hàm số. Chỉ còn mình A “lẻ loi” nên chắc chắn sai thì A sai thôi.

Cách 3: Lấy các phương án A, B, C, D đạo hàm cũng tìm được A sai.

Câu 45. Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x}$ là

A. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$.

B. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C$.

C. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$.

D. $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $I = \int f(x) dx = \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$.

Đặt $x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt$. Khi đó ta có $I = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \ln x| + C$

PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u , v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.** $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$.

• **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

• **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

• **Dạng 4.** $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int f(x) dx = \int x \sin x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \text{ Ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

$$I = \int f(x) \, dx = \int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 2: Biết $\int x \cos 2x \, dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$. B. $ab = \frac{1}{4}$. C. $ab = -\frac{1}{8}$. D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 3: Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x \, dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C$. B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C$.

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x\right) + C$. D. Đáp án A và C đúng.

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi:

$$I = \int x \sin^2 x \, dx = \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\int x \cos 2x \, dx}_{I_1} + C_1$$

$$I_1 = \int x \cos 2x \, dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x \right) + C = \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} (x^2 + x \sin 2x) + C$$

Chọn C

Câu 4: Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x \, dx$

A. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$. B. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{2} + C$.

C. $I = \frac{(1-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$. D. $I = \frac{(2-2x) \cos 2x + \sin 2x}{4} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \int (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x-1) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Câu 5: Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$

A. $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C.$

B. $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C.$

C. $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C.$

D. $\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, \text{ ta có } \int \sin \sqrt{x} dx = \int 2t \sin t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = 2 dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$\int 2t \sin t dt = -2t \cos t + \int 2 \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

Câu 6: Nguyên hàm của $I = \int x \sin x \cos^2 x dx$ là:

A. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

B. $I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

C. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

D. $I_1 = x \cos^3 x + t - \frac{2}{3} t^3 + C, t = \sin x.$

Hướng dẫn giải

Ta đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ du = \sin x \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ u = -\cos^3 x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int x \sin x \cos^2 x dx = -x \cos^3 x + \underbrace{\int \cos^3 x dx}_{I_1} + C_1.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C_2.$$

$$\Rightarrow I = -x \cos^3 x + I_1 = -x \cos^3 x + t - \frac{1}{3} t^3 + C.$$

Chọn A

Câu 7: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là:

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

Chọn C

Câu 8: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là :

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = uv - \int v du = -x \cot x + \int \cot x dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

Chọn B**DẠNG 2.**

Câu 9: Họ nguyên hàm của $\int e^x (1+x) dx$ là:

A. $I = e^x + xe^x + C.$

B. $I = e^x + \frac{1}{2} xe^x + C.$

C. $I = \frac{1}{2} e^x + xe^x + C.$

D. $I = 2e^x + xe^x + C.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$I = \int e^x (1+x) dx = \int e^x dx + \int e^x x dx = e^x + C_1 + \underbrace{\int x e^x dx}_{I_1}.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int x e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = x e^x - \int x e^x dx \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} x e^x + C_2.$$

$$\Rightarrow I = e^x + \frac{1}{2} x e^x + C.$$

Chọn B

Câu 10: Biết $\int x e^{2x} dx = a x e^{2x} + b e^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = -\frac{1}{4}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = \frac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$\text{Vậy: } a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow ab = -\frac{1}{8}.$$

- Câu 11:** Biết $F(x) = (ax+b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x+3)e^x$. Khi đó $a+b$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\int (2x+3)e^x dx = (ax+b)e^x$, nghĩa là:

$$[(ax+b)e^x]' = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow a.e^x + e^x(ax+b) = (2x+3)e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x(ax+a+b) = (2x+3)e^x$$

Đồng nhất hệ số ta được: $a=2$ và $b=1$

Vậy $a+b=3$.

Chọn B

- Câu 12:** Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m} e^{-2x} (2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Tính $S = m^2 + n^2$.
A. $S=10$. **B.** $S=5$. **C.** $S=65$. **D.** $S=41$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int (x+3).e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+3) + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x+3) - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+6+1) + C = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x+7) + C \Rightarrow m=4; n=7. \end{aligned}$$

$$S = m^2 + n^2 = 65.$$

- Câu 13:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.
A. $F(1) = 11e - 3$. **B.** $F(1) = e + 3$. **C.** $F(1) = e + 7$. **D.** $F(1) = e + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } F(x) = \int (5x+1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 5x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$F(x) = (5x+1)e^x - \int 5e^x dx = (5x+1)e^x - 5e^x + C = (5x-4)e^x + C.$$

$$\text{Mặt khác } F(0) = 3 \Leftrightarrow -4 + C = 3 \Leftrightarrow C = 7.$$

$$\Rightarrow F(x) = (5x-4)e^x + 7.$$

$$\text{Vậy } F(1) = e + 7.$$

DẠNG 3.

- Câu 14:** Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

$$\text{A. } x \ln x + x + C$$

$$\text{B. Đáp án khác}$$

$$\text{C. } x \ln x + C$$

$$\text{D. } x \ln x - x + C$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $I = \int \ln x dx$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Khi đó: $I = uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Chọn D

Câu 15: Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C.$

B. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

D. $x^2 \ln x - \int x dx + C.$

Hướng dẫn giải

Ta đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx.$$

Chọn B

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2).$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } \int f(x) dx &= \int x \ln(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{2} + C. \end{aligned}$$

Câu 17: Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của $g(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}?$

A. $\frac{-\ln 2x - x \ln 2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1999.$

B. $\frac{-\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 1998.$

C. $\frac{\ln x}{x+1} - \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2016.$

D. $\frac{\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + 2017.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{-\ln x}{x+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|) + C = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

Chọn A

Câu 18: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int f(x) dx = \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

Đặt: $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2t dt = dx.$

$$\Rightarrow I = 2 \int t^2 \ln t^2 dt = 4 \int t^2 \ln t dt.$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = t^2 dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \frac{t^3}{3} \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt \right) = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 \ln t - \frac{1}{9} t^3 + C \right) = \frac{2}{9} t^3 (3 \ln t - 1) + C$$

$$= \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln \sqrt{x} - 1) + C$$

$$= \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C.$$

Câu 19: $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ. Giá trị a bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Theo đề, ta cần tìm $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$. Sau đó, ta xác định giá trị của a .

Ta có:

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx + \int x \ln x dx.$$

Đề tìm $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ ta đặt $I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ và $I_2 = \int x \ln x dx$ và tìm I_1, I_2 .

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, $t \geq 1$ ta được $t^2 = x^2+1$, $x dx = t dt$.

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_1 = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

$$* I_2 = \int x \ln x dx.$$

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}, \text{ ta được:}$$

$$I_2 = \int x \ln x dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_2.$$

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_2$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$ thì $a = 2 \in \mathbb{Q}$, $b = 3 \in \mathbb{Q}$.

Chọn B

Cách 2: Dùng phương pháp loại trừ.

Ta thay giá trị của a ở các đáp án vào $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$. Sau đó, với mỗi a của các đáp án ta lấy đạo hàm của $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$.

Không khuyến khích cách này vì việc tìm đạo hàm của hàm hợp phức tạp và có 4 đáp án nên việc tìm đạo hàm trở nên khó khăn.

Sai lầm thường gặp:

A. Đáp án A sai.

Một số học sinh không đọc kỹ đề nên chỉ tìm giá trị của b . Học sinh khoanh đáp án A và đã sai lầm.

C. Đáp án C sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$, $t \geq 1$ ta được $t^2 = x^2+1$, $tdt = 2x dx$.

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a=1, b=3$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án C và đã sai lầm.

D. Đáp án D sai.

Một số học sinh chỉ sai lầm như sau:

$$* I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx.$$

Dùng phương pháp đổi biến.

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1$ ta được $t^2 = x^2+1, tdt = 2xdx$.

Suy ra:

$$I_1 = \int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1, \text{ trong đó } C_1 \text{ là 1 hằng số.}$$

Học sinh tìm đúng $I_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$ theo phân tích ở trên.

$$\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + C_1 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Suy ra để $\int (2x\sqrt{x^2+1} + x \ln x) dx$ có dạng $\frac{a}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 + \frac{b}{6}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ thì $a=1 \in \mathbb{Q}, b=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}$.

Thế là, học sinh khoanh đáp án D và đã sai lầm do tính sai giá trị của b .

Câu 20: Cho $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$.

Tính $S = a + b$.

A. $S = -2$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1+\ln x}{x^2} \right) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 1+\ln x = u \\ \frac{1}{x^2} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ -\frac{1}{x} = v \end{cases} \text{ khi đó}$$

$$I = -\frac{1}{x}(1+\ln x) + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 2) + C \Rightarrow a = -1; b = 2.$$

Vậy $S = a + b = 1$.

DẠNG 4:

Câu 21: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Câu 22: Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?

A. $J = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C.$

B. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

C. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

D. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x + 1) + C.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u_1 = e^x \\ dv_1 = \sin x \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = e^x \cdot dx \\ v_1 = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + T \quad \left(T = \int e^x \cdot \cos x dx \right)$$

Tính $T = \int e^x \cdot \cos x dx$:

$$\Rightarrow T = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J$$

$$\Rightarrow J = -e^x \cos x + e^x \sin x - J \Leftrightarrow 2J = e^x (\sin x - \cos x) \Leftrightarrow J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Chọn C

TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$), kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng

$x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0 \quad 2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c) \quad 4. \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

B. BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: ĐỊNH NGHĨA TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b xf(x)dx = x \int_a^b f(x)dx$.

C. $\int_a^a kf(x)dx = 0$.

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$. D. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 4: Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$. B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$. D. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo định nghĩa, ta có $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $c \in [a; b]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = F(b) - F(a) + F(a) - F(c) = F(b) - F(c) = \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

C. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. D. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Câu 7: Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $F(a) - F(b) = \int_a^b f(t)dt$.

B. $\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b$.

C. $\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt \right)\Big|_a^b$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Bài giải

Chọn A

Theo định nghĩa ta có: $\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Suy ra phương án A sai.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kdx = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R}$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_a^b kdx = kx\Big|_a^b = kb - ka = k(b-a)$.

Câu 9: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x)dx = 1$. B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in (a; b)$. D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. D. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

- A. $\int_0^1 f(x) dx$. B. $\int_0^1 -F(x) dx$. C. $\int_0^1 -f(x) dx$. D. $\int_0^1 f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 -f(x) dx = -F(x) \Big|_0^1 = -[F(1) - F(0)] = F(0) - F(1)$.

Câu 12: Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x) dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x) dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)] dx$ là:

- A. $m - n$. B. $n - m$. C. $m + n$. D. Không thể xác định.

Hướng dẫn giải

Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x) dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x) dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)] dx$ là:

Ta có ngay kết quả: $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)] dx = \int_{-a}^a f(x) dx - \int_{-a}^a g(x) dx = m - n$.

Chọn A

Câu 13: Tích phân $\int_a^b f(x) dx$ được phân tích thành:

- A. $\int_c^b f(x) + \int_c^a -f(x) dx$. B. $\int_c^b f(x) - \int_c^a -f(x) dx$.
C. $\int_c^b f(x) + \int_c^a f(x) dx$. D. $-\int_c^b f(x) + \int_c^a f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $\int_a^b f(x) dx$ được phân tích thành:

Ta có: $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a -f(x) dx$.

Chọn A

DẠNG 2: TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Câu 14: Tích phân $I = \int_1^2 2x dx$ có giá trị là:

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 2x dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_1^2 2x dx = 2 \cdot \int_1^2 x dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3$.

Chọn C

Cách 2: Kiểm tra bằng máy tính, dễ dàng thu được kết quả như cách 1.

Câu 15: Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = 4$.

Chọn D

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 16: Tính tích phân $I = \int_1^{2^{2018}} \frac{dx}{x}$.

A. $I = 2018 \cdot \ln 2 - 1$.

B. $I = 2^{2018}$.

C. $I = 2018 \cdot \ln 2$.

D. $I = 2018$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có: $I = \ln |x| \Big|_1^{2^{2018}} = \ln(2^{2018}) - \ln 1 = 2018 \cdot \ln 2$.

Câu 17: Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

A. $2 + \ln \sqrt{3}$.

B. $4 + \ln 3$.

C. $2 + \ln 3$.

D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx + 3 \int_0^1 \sqrt{x} dx$
 $= \frac{1}{2} \ln |2x+1| \Big|_0^1 + 3 \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = \ln \sqrt{3} + 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx$

Câu 18:

A. $I = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}$.

B. $I = \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}$.

C. $I = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$.

D. $I = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có: $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx = \int_0^1 (x^{2018} + x^{2019}) dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019} + \frac{x^{2020}}{2020} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$.

Câu 19: Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x-6) dx = 0$?

A. $b = 0$ hoặc $b = 3$.

B. $b = 0$ hoặc $b = 1$.

C. $b = 5$ hoặc $b = 0$.

D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có $\int_1^b (2x-6) dx = (x^2 - 6x) \Big|_1^b = (b^2 - 6b) - (1 - 6) = b^2 - 6b + 5$.

Theo bài ra, có $b^2 - 6b + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 5 \end{cases}$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của AD để có $\int_0^a (2x+5)dx = a-4$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\int_0^a (2x+5)dx = a-4 \Leftrightarrow (x^2+5x)\Big|_0^a = a-4 \quad (H) \quad y = \sqrt{x}-1$

Câu 21: Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2+bx)dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$.B. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$.C. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.D. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2+bx)dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 (ax^2+bx)dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

Chọn D

Câu 22: Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1)dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.

A. $m = -1$.B. $m = -2$.C. $m = 1$.D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $I = \int_1^2 (2mx+1)dx = (mx^2+x)\Big|_1^2 = (4m+2)-(m+1) = 3m+1$.

$$I = 4 \Leftrightarrow 3m+1 = 4 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 23: Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.B. $I = -\frac{3}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.C. $I = -\frac{5}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.D. $I = -\frac{7}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + x^2 \right) \Big|_2^a = a^2 - \frac{1}{a} - \frac{7}{2}.$$

Chọn D

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2) dx + \int_1^2 (4-x) dx = \frac{3x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\text{Ta có, } \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Câu 26: Cho $\int_0^3 f(x) dx = a$, $\int_2^3 f(x) dx = b$. Khi đó $\int_0^2 f(x) dx$ bằng:

A. $-a-b$.

B. $b-a$.

C. $a+b$.

D. $a-b$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Do } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = a - b$$

Câu 27: Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\int_a^2 (2x+1) dx = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \int_a^2 (2x+1) dx = \left(x^2 + x\right) \Big|_a^2 = 6 - a^2 - a. \text{ Theo đề: } \begin{cases} |a| < 2 \\ 6 - a^2 - a = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy } 1+a^3 = 2.$$

Câu 28: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3) dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x) dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

A. $P = -\frac{4}{65}$.

B. $P = \frac{12}{65}$.

C. $P = -\frac{12}{65}$.

D. $P = \frac{4}{65}$.

Hướng dẫn giải

Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3) dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x) dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3) dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{13}{6} \Rightarrow b = -\frac{13}{6}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{a}{b} = -\frac{12}{65}.$$

Chọn C

Câu 29: Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{1}{6}$.

C. $I = -\frac{3}{2}$.

D. $I = -\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\underbrace{x^2 - x}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^2 (-x^2 + x) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Chọn A

Câu 30: Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{15a}{16} + \ln 2$.

B. $I = \frac{15a}{16} - \ln 2$.

C. $I = \frac{15a}{16} + \ln 2$.

D. $I = -\frac{15a}{16} - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{a}{2} x^4 + \ln |x| \right) \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{15a}{16} - \ln 2.$$

Chọn C

Câu 31: Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

A. $I_2 = \frac{17}{3}$.

B. $I_2 = \frac{19}{3}$.

C. $I_2 = \frac{16}{3}$.

D. $I_2 = \frac{13}{3}$.

Hướng dẫn giải

Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^1 2x dx = (x^2) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx = \int_1^2 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

Chọn C

Câu 32: Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

A. -9.

B. -3.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_{-2}^1 1 dx = 6 - x \Big|_{-2}^1 = 3.$$

- Câu 33:** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2)=2$, $f(3)=5$. Tính $\int_2^3 f'(x)dx$ bằng
- A. -3 . B. 7 . C. 10 D. 3 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_2^3 f'(x)dx = f(x)\Big|_2^3 = f(3) - f(2) = 3.$$

- Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)=-2$, $f(b)=-4$. Tính $T = \int_a^b f'(x)dx$.
- A. $T = -6$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } T = \int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = -2.$$

- Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f'(x)dx$.
- A. $I = -1$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 2.$$

- Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng
- A. 5 . B. 29 . C. 19 . D. 9 .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x)dx = 17 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29.$$

- Câu 37:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1)=4$; $f(3)=7$. Giá trị của $I = \int_{-1}^3 5f'(x)dx$ bằng
- A. $I = 20$. B. $I = 3$. C. $I = 10$. D. $I = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_{-1}^3 5f'(x)dx = 5f(x)\Big|_{-1}^3 = 5f(3) - 5f(-1) = 5.7 - 5.4 = 15.$$

- Câu 38:** Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 2 - 3\ln 2$. Tính $T = a + b$.
- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2 \right) dx = \left(-\frac{a}{x} + b \ln|x| + 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = a + 1 + b \ln 2.$$

Theo giả thiết, ta có $2 - 3 \ln 2 = a + 1 + b \ln 2$. Từ đó suy ra $a = 1, b = -3$.

Vậy $T = a + b = -2$.

DẠNG 3: TÍCH PHÂN HỮU TỈ CƠ BẢN

Câu 39: Biết $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx = a + \ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab = \frac{8}{81}$.

B. $a + b = \frac{7}{24}$.

C. $ab = \frac{9}{8}$.

D. $a + b = \frac{3}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(1 - \frac{6}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x - 6 \ln|x+1| \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 6 \ln 2 - \frac{1}{3} + 6 \ln \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \ln \frac{8}{27}. \text{ Vậy } ab = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{81}. \end{aligned}$$

Câu 40: Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8; 10)$.

B. $(6; 8)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(2; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^2 = \ln 3 = a + \ln b \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 3.$$

Vậy $S \in (2; 4)$.

Câu 41: Nhận xét: Không thể dùng máy tính để tính ra kết quả như trên mà ta chỉ có thể dùng để kiểm tra

mà Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{9}{2}$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

$$\text{Cách 1: } I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Chọn B

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 42: Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = a \ln|a| + \frac{a^2+1}{2a}$. B. $I = a \ln a + \frac{a^2+1}{2a}$.
 C. $I = a \ln|a| + \frac{a^2-1}{2a}$. D. $I = a \ln a + \frac{a^2-1}{2a}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx = \left(a \ln|x| + \frac{x^2}{2a} \right) \Big|_1^a = a \ln|a| + \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} = a \ln|a| + \frac{a^2-1}{2a}.$$

Chọn C

Câu 43: Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{7}{3}a - b \ln 2$. B. $I = 3a - b \ln 2$. C. $I = \frac{7}{3}a + b \ln 2$. D. $I = 3a + b \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + b \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \frac{7a}{3} + b \ln 2.$$

Chọn C

Câu 44: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

A. $P = 1 - \ln 2$. B. $P = 2 - 2 \ln 2$. C. $P = 1 - 2 \ln 2$. D. $P = 2 - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(x - \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 \Rightarrow a = 1 - \ln 2 \Rightarrow P = 2a - 1 = 1 - 2 \ln 2.$$

Chọn C

Câu 45: Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x} \right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

A. $P = e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. B. $P = -e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$.
 C. $P = -e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. D. $P = e + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^4$.

Hướng dẫn giải

Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x} \right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x} \right) dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + 1 + x \right) dx = \left(\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_e^{e^2} = 1 - e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2}.$$

$$\Rightarrow a = 1 - e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \Leftrightarrow a - 1 = -e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \Leftrightarrow P = -e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2}.$$

Chọn B

Câu 46: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}.$

A. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}.$

B. $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}.$

C. $I = \frac{1}{6} \ln 2.$

D. $I = \ln \sqrt[6]{2}.$

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9} = I = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln 1 \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}.$

Câu 47: Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3; a, b \in \mathbb{Q}.$ Tính $P = ab.$

A. $P = 8.$

B. $P = -6.$

C. $P = -4.$

D. $P = -5.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \left(-\ln|x+1| + 2\ln|x+3| \right) \Big|_0^2 = 2\ln 5 - 3\ln 3$$

Suy ra: Do đó: $P = ab = -6.$

Câu 48: Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C, a, b \in \mathbb{Z}.$ Tính giá trị của biểu thức $a+b.$

A. $a+b=1.$

B. $a+b=5.$

C. $a+b=-1.$

D. $a+b=-5.$

Hướng dẫn giải:**Chọn C**

$$\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx.$$

$$= 2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C.$$

Vậy $a=2, b=-3.$ Vậy $a+b=-1.$

Câu 49: Biết $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}.$ Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3.$

A. $T = 4.$

B. $T = 6.$

C. $T = 3.$

D. $T = 5.$

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right) dx = \left(x - \ln |x^2 - x + 1| \right) \Big|_2^3 = -\ln 7 + \ln 3 + 1, \text{ suy ra } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b^2 + 3c^3 = 4.$$

Câu 50: Giả sử $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \cdot \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó giá trị $a + 2b$ là:

A. 30.

B. 40.

C. 50.

D. 60.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left(3x + 11 + \frac{21}{x - 2} \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln |x - 2| \right) \Big|_{-1}^0 = 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2}$$

Câu 51: Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 0$.B. $2a - b = 0$.C. $a - b = 0$.D. $a + b = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3} \right) dx = (\ln |x| - \ln |x + 3|) \Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 2.$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = -1.$$

Câu 52: Nếu $\int_2^3 \frac{x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $P = 2a - b$ là

A. $P = 1$.B. $P = 7$.C. $P = -\frac{15}{2}$.D. $P = \frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 1} dx + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 3x + 1} d(2x^2 - 3x + 1) + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{(x - 1)(2x - 1)} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln |2x^2 - 3x + 1| \Big|_2^3 + \frac{11}{4} \int_2^3 \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln |2x^2 - 3x + 1| \Big|_2^3 + \frac{11}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{2x - 1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{4} (\ln 10 - \ln 3) + \frac{11}{4} \left(\ln \frac{2}{5} - \ln \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{10}{3} + \frac{11}{4} \ln \frac{6}{5} = \frac{1}{4} (\ln 5 + \ln 2 - \ln 3) + \frac{11}{4} (\ln 2 + \ln 3 - \ln 5) = -\frac{5}{2} \ln 5 + \frac{5}{2} \ln 3 + 3 \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a = -\frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}, P = -\frac{15}{2}.$$

Câu 53: Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. Hỏi giá trị $2a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (8;10). B. (6;8). C. (4;6). D. (2;4).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = \ln 3 \Rightarrow a = 0, b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3.$

Câu 54: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$

- A. $S = 6$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_3^4 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{3}{4} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $a = 4, b = c = -1 \Rightarrow S = 2$.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_3^4 \frac{1}{x} dx - \int_3^4 \frac{1}{x+1} dx = \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 + \ln 4 = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$$

Suy ra $a = 4, b = c = -1 \Rightarrow S = 2$.

Câu 55: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7; 3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $2x^2 - x - 1 = 0$. B. $x^2 + 4x - 12 = 0$. C. $x^2 - 5x + 6 = 0$. D. $x^2 - 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-1)^{-2} d(2x-1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{-6} + \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} a = -6 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$ và a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Câu 56: Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- A. $S = -2$. B. $S = 5$. C. $S = 2$. D. $S = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5 = \frac{25}{2} + \ln 6 - \frac{9}{2} - \ln 4 = 8 + \ln \frac{3}{2}.$$

Vậy $a = 8, b = 3$. Suy ra $S = a - 2b = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.

Câu 57: Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln|x+2| - \ln|x+4| \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Khi đó: $2a + 3b - c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$

Câu 58: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a + b = 2.$ B. $a - 2b = 0.$ C. $a + b = -2.$ D. $a + 2b = 0.$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có: $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2$ và $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$

Do đó $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2, b = -1.$

Vậy $a + 2b = 0.$

Câu 59: Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6.$ Tính $S = 3a + 2b + c.$

- A. 3. B. -14. C. -2. D. -11.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có: $\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A + 2B}{x^2+5x+6}.$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A+2B=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}.$$

Nên $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = \int_2^3 \frac{2}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{3}{x+3} dx = 2 \ln|x+2| \Big|_2^3 + 3 \ln|x+3| \Big|_2^3$
 $= 3 \ln 6 - \ln 5 - 2 \ln 4 = -4 \ln 2 - \ln 5 + 3 \ln 6.$ Vậy $S = 3a + 2b + c = -11.$

DẠNG 4: TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ CƠ BẢN

Câu 60: Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx.$

- A. 13. B. $\frac{13}{3}.$ C. 4. D. $\frac{4}{3}.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{13}{3}.$

Câu 61: Biết rằng $I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}.$ Giá trị của $a - \frac{3}{4}b$ là:

- A. -1. B. -2. C. -3. D. -4.

Hướng dẫn giải

Biết rằng $I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}.$ Giá trị của $a - \frac{3}{4}b$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a = -1, b = \frac{4}{3} \Rightarrow a - \frac{3}{4}b = -2.$$

Chọn B

Câu 62: Tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx$ bằng

A. $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$ B. $I = 2\sqrt{2}.$ C. $I = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$ D. $I = 2 - \sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có: $I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx = \sqrt{x+2} \Big|_0^2 = 2 - \sqrt{2}.$

Câu 63: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}, (a, b \in \mathbb{N}^*)$. Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 7.$ B. $a + 2b = 8.$ C. $a + 2b = -1.$ D. $a + 2b = 5.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}.$

Do đó $a = 2, b = 3, a + 2b = 8.$

Câu 64: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = -10.$ B. $T = -4.$ C. $T = 15.$ D. $T = 8.$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx = \int_0^1 \frac{x(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1})}{x} dx = \int_0^1 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}) dx$
 $= \int_0^1 \left[(3x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1$
 $= \left(\frac{16}{9} - \sqrt{3} \right) - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{17}{9} - \sqrt{3} = \frac{17 - 9\sqrt{3}}{9}.$

Câu 65: Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}.$ B. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}.$
C. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}.$ D. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a x\sqrt{x+1}dx = \int_0^a (x+1)\sqrt{x+1}dx - \int_0^a \sqrt{x+1}dx = \int_0^a (x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^a (x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\
 &= \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} \right]_0^a - \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{4}{15}
 \end{aligned}$$

Chọn B

Câu 66: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2$. B. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2$. C. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1$. D. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 1$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{x+1} + 1 \Rightarrow I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{x+1} + 1) dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2.$$

Chọn A**DẠNG 5: TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN**

Câu 67: Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$.

A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}.$$

Câu 68: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Câu 69: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$. B. $\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. C. $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. D. $-\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$.

Câu 70: Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

A. $T = 3$.B. $T = -1$ C. $T = -4$.D. $T = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $2a + 6b = 2 - 3 = -1$.

Câu 71: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.B. $I = 0$.C. $I = -1$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 72: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.B. $I = 2$.C. $I = -2$.D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

Cách 1 $m \in (0; 2017): I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2.$

Chọn C

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 74: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2}{3}.$

B. $I = \frac{3}{4}.$

C. $I = -\frac{3}{4}.$

D. $I = -\frac{2}{3}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{3}{4}.$

Chọn C

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 75: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$ được viết ở dạng $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a + 2b = 8.$

B. $a + b = 5.$

C. $2a - 3b = 2.$

D. $a - b = 2.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx = \left(x^2 - x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1 = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 1.$

Vậy $a = 4, b = 2$. Suy ra $a + b = 6$. Vậy B sai.

Câu 76: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1 + \cos x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + c, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $a - b + c$

A. -3

B. $1.$

C. $-2.$

D. $\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1 + \cos x) dx = \left(2x^2 - x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) + 1.$

Suy ra $a = 2, b = 2, c = 1$ nên $a - b + c = 1$.

Câu 77: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + 4 \sin^2 x) dx = \frac{a\pi}{b} - \frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b + c$.

A. $8.$

B. $16.$

C. $12.$

D. $14.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + 4\sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [3 + 2(1 - \cos 2x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 - 2\cos 2x) dx$$

$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{6}.$$

Suy ra $a = 5$, $b = 6$, $c = 3$.Vậy $a + b + c = 14$.

Câu 78: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a$, $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị của $a + b$ là:

A. $P = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$. B. $P = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = \frac{3}{4} - \sqrt{3}$. D. $P = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a$, $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị của $a + b$ là:

Cách 1:

Ta có:

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow P = a + b = \frac{3}{4} + \sqrt{3}.$$

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay vì các giá trị rất quen thuộc học sinh có thể nhận ra.

Câu 79: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

B. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

C. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(-a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

D. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[-\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx = \left(-\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{a} \sin ax \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{a} \sin \left(ax - \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Chọn B

Câu 80: Cho hàm số $f(x) = a \sin 2x - b \cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b dx = 3$. Tính tổng $a + b$ bằng:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f'(x) = 2a \cos 2x + 2b \sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\int_a^b dx = \int_1^b dx = 3 \Leftrightarrow b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = 4$$

Vậy $a + b = 1 + 4 = 5$.

Câu 81: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$

A. -2. B. -3. C. $\frac{1}{8}$. D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (\cos 6x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{1}{8} \sqrt{3}.$$

Do đó ta có $a = 0, b = -\frac{1}{8}$. Vậy $e^a + \log_2 |b| = e^0 + \log_2 \frac{1}{8} = -2$.

Câu 82: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$. B. $I = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$. C. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$. D. $I = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$$

, với $t = \sin x$.

Chọn D

Câu 83: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + bx \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

A. -1.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + bx \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 3x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4} \Rightarrow 3a + 2b + 4c = 1$$

Chọn B**DẠNG 6: TÍCH PHÂN HÀM MŨ – LÔGARIT CƠ BẢN**

Câu 84: Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e - 1$.B. $\frac{1}{e} - 1$.C. $\frac{e - 1}{e}$.D. $\frac{1}{e}$.**Hướng dẫn giải****Chọn C**

Ta có: $\int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{e} - 1 \right) = \frac{e - 1}{e}$.

Câu 85: Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $2^{2018} - 1$.B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$.C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$.D. 2^{2018} .**Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$I = \int_0^{2018} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^{2018} = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$$

Câu 86: Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

A. $I = 2e^8$.B. $I = 4e^8 - 2$.C. $I = 4e^8$.D. $I = 2e^8 - 4$.**Hướng dẫn giải****Chọn A**

Ta có $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx = 4 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^4 + 2 \int_0^4 f(x) dx + 2 \int_{-1}^0 f(x) dx$.

$$\Leftrightarrow I = 2(e^8 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2e^8.$$

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$	$I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$	$I = \int_0^1 x(x+1)^{2016} dx$. Đặt $t = x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x + 3}}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x + 3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 1)}$. Đặt $t = \ln x + 1$
5	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} \sqrt{3e^x + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{3e^x + 1}$
6	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{2\cos x + 1} dx$. Đặt $t = 2\cos x + 1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và $u(x) \in [\alpha, \beta] \forall x \in [a, b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x = a$

A. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

B. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

C. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

D. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(x)du.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u(x) = t \Rightarrow u'(x)dx = dt.$

Đổi cận

Khi $x = a$ thì $t = u(x)$; khi $x = b$ thì $t = u(b)$.

$$\text{Do đó } \int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỈ

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-1)^{1000} dx$.

A. $I = \frac{2003.2^{1002}}{1003002}$. **B.** $I = \frac{1502.2^{1001}}{501501}$. **C.** $I = \frac{3005.2^{1002}}{1003002}$. **D.** $I = \frac{2003.2^{1001}}{501501}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x-1=t$, khi $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=3 \Rightarrow t=2$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } I &= \int_0^2 (t+1)t^{1000}d(t+1) = \int_0^2 (t^{1001} + t^{1000})dt = \left(\frac{t^{1002}}{1002} + \frac{t^{1001}}{1001} \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{2^{1002}}{1002} + \frac{2^{1001}}{1001} = 2^{1001} \left(\frac{2}{1002} + \frac{1}{1001} \right) = \frac{1502.2^{1001}}{501501}. \end{aligned}$$

Chọn B

Câu 3: Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$. **B.** $\ln \frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$. **D.** $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{x^2+3} d(x^2+3) = \frac{1}{2} \ln |x^2+3| \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}.$$

Câu 4: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}$ được kết quả $I = a \ln 2 - b$. Giá trị $a+b$ là:

A. $-\frac{3}{16}$ **B.** $\frac{13}{16}$ **C.** $\frac{14}{17}$ **D.** $\frac{4}{17}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{đặt } t = (1+x^2) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Câu 5: Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln a$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

$$\text{Cho } \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln a. \text{ Giá trị của } a \text{ là:}$$

Ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \dots = \int_1^2 \frac{1}{3t} dt = \frac{1}{3} (\ln |t|) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2 \Rightarrow a = 2.$$

Chọn A

Câu 6: Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2 + 2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\ln 2 + \ln|a+2|}{2}$.

B. $I = \frac{\ln 2 - \ln|a+2|}{2}$.

C. $I = \frac{-\ln 2 - \ln|a+2|}{2}$.

D. $I = \frac{-\ln 2 + \ln|a+2|}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2 + 2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:

Ta nhận thấy: $(ax^2 + 2)' = 2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = ax^2 + 2 \Rightarrow dt = 2ax dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=-1 \Rightarrow t=a+2 \end{cases}$.

$$I = \int_{a+2}^2 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} (\ln|t|) \Big|_{a+2}^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln|a+2|).$$

Chọn B

HÀM VÔ TỈ

Câu 7: Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

A. $3 \int_0^1 t dt$.

B. $\int_0^1 t^3 dt$.

C. $3 \int_0^1 t^2 dt$.

D. $3 \int_0^1 t^3 dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x = 1-t^3 \Rightarrow dx = -3t^2 dt$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó ta có $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx = 3 \int_0^1 t^3 dt$.

Câu 8: Trong các tích phân sau, tích phân nào có cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

A. $\frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt$.

B. $\int_1^4 t \sqrt{t-1} dt$

C. $\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)t^2 dt$.

D. $\int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1)x^2 dx$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow t^2 = x^2-1 \Rightarrow t dt = x dx$

$x=1 \Rightarrow t=0$, $x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3}$

$$I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)t^2 dt$$

Chọn C

Câu 9: Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$, với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(t) = 2t^2 + 2t$

B. $f(t) = t^2 - t$

C. $f(t) = t^2 + t$

D. $f(t) = 2t^2 - 2t$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{1+x}$, suy ra $t^2 = 1+x$, $2t dt = dx$

$$\text{Ta có } \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} \cdot 2tdt = \int_1^2 (t-1) \cdot 2tdt = \int_1^2 (2t^2-2t)dt$$

Câu 10: Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx \Rightarrow \frac{2t}{3} dt = dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot t dt = \frac{2}{3} \int_1^2 dt = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cách khác: Sử dụng công thức } \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C \text{ thì } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Câu 11: Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = a+b \ln 2$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a+b$.

A. $S = 3$.

B. $S = -3$.

C. $S = 5$.

D. $S = 7$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = \int_1^3 \frac{t}{t-5} dt = \int_1^3 \left(1 + \frac{5}{t-5} \right) dt = (t + 5 \ln |t-5|) \Big|_1^3 = 2 - 5 \ln 2.$$

$$\text{Suy ra: } a=2; b=-5 \Rightarrow S = a+b = -3.$$

Câu 12: Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = a+b \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=3$.

B. $a-b=5$.

C. $a+b=5$.

D. $a+b=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow dx = t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=4 \Rightarrow t=3$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{tdt}{3+t} = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+3} \right) dt = (t - 3 \ln |t+3|) \Big|_1^3 = 2 + 3 \ln \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } a+b=5.$$

Câu 13: Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(a-\sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a=2b$.

B. $a < b$.

C. $a=b$.

D. $a=3b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow tdt = xdx. \text{ Đổi cận } x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2.$$

Khi đó $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \int_{\sqrt{2}}^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$. Vậy $a = 2b$.

Câu 14: Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị a, b là:

A. - 1.

B. - 2.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị a, b là:

Ta có:

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow a.b = -1.$$

Chọn A

Câu 15: Với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Đặt $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = a - \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của tích abc là :

A. $\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đây là dạng toán tính tích phân để tránh tình trạng bấm máy tính nên chúng ta cần phải nhớ phương pháp làm. Có hai cách để làm bài toán này là chuyển về lượng giác hoặc phá căn. Dưới đây là một cách

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t(-tdt)}{4-t^2} = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t^2}{t^2-4} dt = \int_{\sqrt{3}}^0 \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt = \left(t + \ln \left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) \Big|_{\sqrt{3}}^0 = -\sqrt{3} - \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Suy ra $abc = -\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

Câu 16: Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a-7b$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Tính $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow \frac{3}{2}u^2 du = x dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=\sqrt{7} \Rightarrow u=2$.

$$\text{Vậy } I = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{(u^3-1)u^2}{u} du = \frac{3}{2} \int_1^2 (u^4 - u) du = \frac{141}{20}.$$

Suy ra: $a=141, b=20$.

Vậy $a-7b=1$.

Cách 2: Dùng MTCT $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 7.01 = \frac{141}{20}$.

Suy ra: $a=141, b=20$.

Vậy $a - 7b = 1$.

Câu 17: Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m - 7n$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 91.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{3t^2 dt}{2}.$$

Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; khi $x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 2$

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{t^3-1}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \frac{3}{2} \int_1^2 (t^4 - t) dt = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{141}{20}.$$

$$\Rightarrow m - 7n = 141 - 7 \cdot 20 = 1.$$

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 18: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx.$

B. $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

D.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét tích phân $\int_0^1 \sin(1-x) dx$

Đặt $1-x = t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_1^0 \sin t (-dt) = \int_0^1 \sin t dt = \int_0^1 \sin x dx.$$

Câu 19: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = \frac{3}{2}.$

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}.$

D. $I = \frac{9}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^3} dt = \left. \frac{-1}{2t^2} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 20: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \ln a - \frac{b}{8}$. Chọn mệnh đề **đúng**:

A. $a + b = 4$

B. $a - b = 2$

C. $ab = 6$

D. $a^b = 4$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ u = 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u^2)(-du)}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u} - u \right) du = \left[\ln u - \frac{u^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Câu 21: Cho $I = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a là:

A. 3

B. 2

C. 4

D. 6

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = 1 + 2 \sin 2x$ đưa đến $I = \frac{1}{4} \int_1^{1+2 \sin 2\pi/a} \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln t \Big|_1^{1+2 \sin 2\pi/a} = \frac{1}{4} \ln 3$

suy ra $1 + 2 \sin 2/a = 3$ suy ra $a = 4$.

Câu 22: Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$. Giá trị của $a + b + c$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots = \int_0^1 t dt = 1, \text{ với } t = \tan x.$$

$$I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3} \Rightarrow a + b + c = 2.$$

Chọn B

Câu 23: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

B. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$

C. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

D. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx = \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right) \Big|_1^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 2} - \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)$$

với $t = \cos x$.

Chọn C

Câu 24: Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1 + \cos x}$, khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt.$ **B.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt.$ **C.** $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$ **D.**

$$I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow dt = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}} dx \Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = -2dt$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow \cos x = t^2 - 1$$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x \sin x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_{\sqrt{2}}^1 2(t^2 - 1)(-2)dt = -4 \int_{\sqrt{2}}^1 (t^2 - 1)dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)dt.$$

Câu 25: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 7.$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12, \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2 \cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \cos x \Rightarrow dt = -2 \sin x dx.$

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
t	1	-1

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x) \sin x dx = \int_1^{-1} f(t) \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 6.$$

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 27: Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$\text{Vì } I = \frac{ae-b}{2} \Rightarrow a=1; b=1. \text{ Vậy } a+b=2.$$

Câu 28: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C$.B. $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C$.**C. $e^{\sin^2 x} + C$.**D. $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C$.**Hướng dẫn giải****Chọn C**

$$\text{Ta có } \int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$$

Câu 29: Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T = 6$.B. $T = 9$.**C. $T = 10$.**D. $T = 5$.**Hướng dẫn giải****Chọn C**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1+3x \Rightarrow 2t dt = 3dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = 2 \int_1^2 t e^t dt = 2 \left(t e^t \Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) = 2 \left(t e^t \Big|_1^2 - e^t \Big|_1^2 \right) = 2(2e^2 - e - e^2 + e) = 2e^2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=c=0 \end{cases} \Rightarrow T=10 \text{ nên câu C đúng.}$$

Câu 30: Tích phân $I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx$ có giá trị là:

A. $I = 2 - \ln 3 + \ln 5$.**B. $I = 2 - 2\ln 3 + 2\ln 5$.**C. $I = 2 - 2\ln 3 + \ln 5$.D. $I = 2 - \ln 3 - 2\ln 5$.**Hướng dẫn giải**

$$\text{Tích phân } I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx \text{ có giá trị là:}$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{e^x + 4} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 4 \Rightarrow 2t dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{t^2 - 4}.$$

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x = \ln 5 \Rightarrow x = 3 \\ x = \ln 12 \Rightarrow x = 4 \end{cases}.$$

$$I = \int_3^4 \frac{2t^2}{t^2 - 4} dt = 2 \left(t - 2 \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| \right) \Big|_3^4 = 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 5.$$

Chọn B

Câu 31: Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính

$$T = a + b + c.$$

A. $T = -1.$

B. $T = 0.$

C. $T = 2.$

D. $T = 1.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2t dt = e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x = \ln 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = \int_2^3 \frac{2t dt}{1+t} = \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = (2t - 2 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (6 - 2 \ln 4) - (4 - 2 \ln 3)$$

$$= 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = 0.$$

Câu 32: Với cách đổi biến $u = \sqrt{1 + 3 \ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx$ trở thành

A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$ **B.** $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$ **C.** $2 \int_1^2 (u^2 - 1) du.$ **D.** $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$u = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow u^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{u^2 - 1}{3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2u}{3} du.$$

$$\text{Khi đó } \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{u^2 - 1}{3}}{u} \frac{2u}{3} du = \frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

Câu 33: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1 + 3 \ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2.$ **B.** $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt.$ **C.** $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt.$ **D.** $I = \frac{14}{9}.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx, \text{ đặt } t = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{3}{x} dx \Rightarrow \frac{2t}{3} dt = \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2.$$

$$I = \int_1^2 \frac{2t^2}{3} dt = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2 = \frac{14}{9}.$$

Câu 34: Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

A. $I = -2e$.

B. $I = -e$.

C. $I = e$.

D. $I = 2e$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx = \int_1^e x \ln x (\ln x + 1) dx$.

Đặt $t = x \ln x \Rightarrow dt = (\ln x + 1) dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=e \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^e dt = e$.

Chọn C

Câu 35: Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

B. $I = \frac{4\sqrt{2}+2}{3}$.

C. $I = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$.

D. $I = \frac{2\sqrt{2}+2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

Ta nhận thấy: $(\ln^2 x + 1)' = \frac{2 \ln x}{x}$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = \ln^2 x + 1 \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=e \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$I = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

Chọn A

Câu 36: Biết $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = \frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A. $S = 13$.

B. $S = 28$.

C. $S = 25$.

D. $S = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{3+\ln x} \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi: Với $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=e \Rightarrow t=2$.

$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{16-6\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow a=16, b=6, c=3 \Rightarrow S = a + b + c = 25$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$$\sqrt{a^2 - x^2} : \text{đặt } x = |a| \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} : \text{đặt } x = \frac{|a|}{\sin t}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} : x = |a| \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \text{ hoặc } \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} : \text{đặt } x = a \cos 2t$$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Câu 37: Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó : } \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos t |\cos t| dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2 \cos 2t) dt \\ &= (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 38: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Cho tích phân } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi. \text{ Giá trị của } a \text{ là:}$$

Ta có:

$$\text{Đặt } x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{6}.$$

Chọn D

Câu 39: Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b} \pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

A. $T = 35$.**B.** $T = 24$.**C.** $T = 12$.**D.** $T = 36$.**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Đặt $x = 3 \sin t \Leftrightarrow dx = 3 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \rightarrow t = 0$; $x = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - (3 \sin t)^2} \cdot 3 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{4} \pi. \text{ Vậy } T = 9 \cdot 4 = 36.$$

Câu 40: Đổi biến $x = 2 \sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Đặt $x = 2 \sin t$, khi đó $dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{\sqrt{4 \cos^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t}{2 \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$$

Câu 41: Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a + \sqrt{b} < 5$. Tổng $a + b$ bằng

A. 5.**B.** 7.**C.** 4.**D.** 6.**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Ta có $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}} dx.$

Đặt $x-3 = 2 \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận $x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = a + \sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin \frac{a + \sqrt{b} - 3}{2} = m$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^m \frac{2 \cos t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^m dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^m = m - \frac{\pi}{6}.$$

Theo đề ta có $m - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin \frac{a + \sqrt{b} - 3}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{a + \sqrt{b} - 3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a + \sqrt{b} = \sqrt{3} + 3.$

Do đó $a = 3, b = 3, a + b = 6$.

Câu 42: Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. **C.** $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{-3-x^2+2x} dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{1-(x-2)^2} dx.$$

Đặt $x-2 = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn C

Câu 43: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = \frac{\pi}{3}$. **C.** $I = \frac{\pi}{4}$. **D.** $I = \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn C

Câu 44: Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} dt.$

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} t dt.$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt.$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$; Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}.$

Ta có $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} (1 + \tan^2 t)}{3(1 + \tan^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt.$

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Định lý

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

2. Phương pháp chung

- Bước 1: Viết $f(x)dx$ dưới dạng $u dv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- Bước 2: Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- Bước 3: Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

* Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: <u>Lôc-đa-mũ-lượng</u>	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x) \ln x dx$	$\int_a^b P(x) \cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x dx$	$P(x) dx$	$\cos x dx$	$\cos x dx$

Chú ý: Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1:

Câu 1: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **B.** $I = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **C.** $I = \frac{\pi + 6 + 3\sqrt{3}}{6a}$. **D.** $I = \frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6a}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin ax dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{-1}{a} x \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{a} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(\frac{-1}{a} x \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{a} \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}.$$

Chọn A

Câu 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .

- A.** $ab = 32$. **B.** $ab = 2$. **C.** $ab = 4$. **D.** $ab = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \left((1+x) \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}.$$

$$\Rightarrow a = 4; b = 8 \Rightarrow ab = 32.$$

Câu 3: Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. **B.** $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.
C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. **D.** $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx.$$

Câu 4: Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

- A.** $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $-\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Biết } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx. \text{ Giá trị của } \frac{a}{b} \text{ là:}$$

Ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{\pi\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{24} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{12}.$$

Chọn A

Câu 5: Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4} (a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $2a + b + c = -1$. **B.** $a + 2b + c = 0$. **C.** $a - b + c = 0$. **D.** $a + b + c = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2x dx = \frac{1}{4} (2 \sin 2 + \cos 2 - 1).$$

Vậy $a - b + c = 0$.

Câu 6: Tính nguyên hàm $I = \int (x-2) \sin 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{a} + b \sin 3x + C$. Tính $M = a + 27b$.

Chọn đáp án **đúng**:

A. 6

B. 14

C. 34

D. 22

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-2 \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \text{ ta được: } \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{cases}$$

Do đó:

$$I = -\frac{(x-2) \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + c \Rightarrow a = 3; b = \frac{1}{9} \Rightarrow m = 6$$

Câu 7: Tính tích phân $\int_0^{\pi} x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi$. Tính tích ab :

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. 6

D. $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x^2 dx - \int_0^{\pi} x d(\cos x) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} - (x \cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} \pi^3 + \pi \end{aligned}$$

Câu 8: Tích phân $\int_0^{\pi} (3x+2) \cos^2 x dx$ bằng

A. $\frac{3}{4} \pi^2 - \pi$.

B. $\frac{3}{4} \pi^2 + \pi$.

C. $\frac{1}{4} \pi^2 + \pi$.

D. $\frac{1}{4} \pi^2 - \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $I = \int_0^{\pi} (3x+2) \cos^2 x dx$. Ta có:

$$\square I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3x+2)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi} (3x+2) dx + \int_0^{\pi} (3x+2) \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2).$$

$$\square I_1 = \int_0^{\pi} (3x+2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi.$$

$$\square I_2 = \int_0^{\pi} (3x+2) \cos 2x dx. \text{ Dùng tích phân từng phần}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x + 2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I_2 = \frac{1}{2} (3x + 2) \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = 0 + \frac{3}{4} (\cos 2x) \Big|_0^\pi = 0.$$

$$\square \text{ Vậy } I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi \right) = \frac{3}{4} \pi^2 + \pi.$$

Câu 9: Tính $\int_0^\pi x(1 + \cos x) \, dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi^2}{2} - 2.$

B. $\frac{\pi^2}{3} + 3.$

C. $\frac{\pi^2}{3} - 3.$

D. $\frac{\pi^2}{2} + 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = (1 + \cos x) \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x + \sin x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = x(x + \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x + \sin x) \, dx = \pi^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \cos x \right) \Big|_0^\pi = \pi^2 - \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 \right) = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

Câu 10: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a + b$ là ?

A. 0

B. -1

C. 1

D. -2

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đối với bài toán này, chúng ta sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có: } I = \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

$$= \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow I = \left(x \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{\sqrt{3}}; b = -\ln 2.$$

$$\text{Tổng } a + b = \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln 2 \approx -0,1157969114$$

Lưu ý khái niệm phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , vậy đáp án đúng là đáp án **B.**

Nhận xét: Bài toán trên đòi hỏi khả năng biến đổi của thí sinh và nhắc lại kiến thức về khái niệm phần nguyên, sẽ có thí sinh khi đi thi đã tìm ra kết quả phân tích nhưng lúng túng trong việc lựa chọn đáp án vì không nhớ rõ khái niệm phần nguyên.

Câu 11: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \ln \sqrt{b} - \frac{\pi^2}{32}$ khi đó tổng $a + b$ bằng

A. 4

B. 8

C. 10

D. 6**Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi}{2} \left| \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\pi^2}{32}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$I_1 = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

Câu 12: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$.B. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.C. $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}$.**D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.****Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x + \sin^2 x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Tính } I_1: \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Nên } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$= (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Tính I_2 : Đặt $u = \sin x$. Ta có $du = \cos x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$.

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Câu 13: Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$. Tính $A = a - b$

Chọn đáp án đúng:

A. 7

B. 10

C. 6

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn B

* Đặt $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$; $dv = \sin t dt$ chọn $v = -\cos t$

$$\text{Vậy } I = 2 \left[-t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt \right]$$

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$ $dv = \cos t dt$ chọn $v = \sin t$

$$I_1 = \int_0^{\pi} t \sin t dt = t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt = \cos t \Big|_0^{\pi} = -2$$

$$* \text{ Do đó: } I = 2 \left[-t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} - 4 \right] = 2\pi^2 - 8 \Rightarrow a = 2; b = -8 \Rightarrow A = 10$$

DẠNG 2:

Câu 14: Cho $\int_0^a x e^x dx = 1$ ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. e.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_0^a x e^x dx = 1 \Leftrightarrow (x-1)e^x \Big|_0^a = (a-1)e^a + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 15: Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = ae^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a + b$ là

A. 0.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 16: Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích ab bằng:

A. 1.**B.** -1.**C.** -15.**D.** 20.**Hướng dẫn giải****Chọn A**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 = e+1.$$

$$\text{Suy ra } a=1; b=1 \Rightarrow ab=1.$$

Câu 17: Tìm a sao cho $I = \int_0^a x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = 4$, chọn đáp án đúng

A. 1**B.** 0**C.** 4**D.** 2**Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^a x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2x \cdot e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a - 2 \int_0^a e^{\frac{x}{2}} dx = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a = 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4$$

$$\text{Theo đề ra ta có: } I = 4 \Leftrightarrow 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Câu 18: Cho tích phân $I = \int_0^1 (x+1)(e^x - 3) dx$. Kết quả tích phân này dạng $I = e - a$. Đáp án nào sau đây đúng?

A. $a = \frac{9}{2}$ **B.** $a = \frac{9}{4}$ **C.** $a = \frac{9}{5}$ **D.** $a = \frac{8}{3}$ **Hướng dẫn giải****Chọn A**

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = (e^x - 3) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int (e^x - 3) dx = (e^x - 3x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (x+1)(e^x - 3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x - 3x) dx$$

$$= (x+1)(e^x - 3x) \Big|_0^1 - \left(e^x - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = e - \frac{9}{2}$$

Câu 19: Tìm m để $\int_0^1 (mx+1)e^x dx = e$?

A. 0**B.** -1**C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Ta có

$$\int_0^1 (mx+1)e^x dx = \int_0^1 (mx+1) dx (e^x) = (mx+1)e^x \Big|_0^1 - m \int_0^1 e^x d(mx+1) = (mx+1)e^x \Big|_0^1 - m \int_0^1 e^x dx$$

$$= [(mx+1)e^x]_0^1 - [me^x]_0^1 = (m+1)e - 1 - me + m = e + m - 1$$

DẠNG 3.

Câu 20: Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a.e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.**Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Câu 21: Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$ được biểu diễn dạng $a \ln 3 + b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 1.

D. $-\frac{3}{2}$.**Hướng dẫn giải****Chọn D**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^1 \ln(2x+1) dx = x \ln(2x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} dx = \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx \\ &= \ln 3 - \left(x - \frac{1}{2} \ln|2x+1|\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1. \end{aligned}$$

Khi đó $a = \frac{3}{2}; b = -1$. Vậy $ab^3 = -\frac{3}{2}$.

Câu 22: Biết tích phân $\int_1^2 (4x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $2a + b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. $A(1; -2; 1)$

D. 13.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (4x-1) dx \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 (4x-1) \ln x dx = x(2x-1) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 (2x-1) dx = 6 \ln 2 - (x^2 - x) \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - 2.$$

Vậy $2a + b = 10$.

Câu 23: Tính tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$.

A. $I = \frac{2\ln 2 + 6}{9}$.

B. $I = \frac{6\ln 2 + 2}{9}$.

C. $I = \frac{2\ln 2 - 6}{9}$.

D. $I = \frac{6\ln 2 - 2}{9}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Cách 1: $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 - 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$

Do đó $I = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{9} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{6\ln 2 + 2}{9}$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx &= \int_1^2 \ln x d\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right) d(\ln x) \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx = \frac{2}{3} - \left(\frac{x^3}{9} - x\right) \Big|_1^2 = \frac{2 + 6\ln 2}{9}. \end{aligned}$$

Câu 24: Kết quả tích phân $\int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3\ln 3 + b$. Giá trị $3 + b$ là:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 7

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = A + B$

Tính $A = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$

Tính $B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx$

Xem: $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases}$ ta chọn được $\begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases}$

Dùng công thức tích phân từng phần

$B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx = (x+1) \cdot \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x+1}{x+1} dx = 3\ln 3 - x \Big|_0^2 = 3\ln 3 - 2$

Vậy: $I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3\ln 3 + 2$

Câu 25: Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

A. $P = 4$.

B. $P = -8$.

C. $P = -4$.

D. $P = 8$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$

Suy ra $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = -2\sqrt{e} + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$.

Vậy $P = ab = -8$.

Câu 26: Cho biết tích phân $I = \int_0^1 (x+2) \ln(x+1) dx = a \ln 2 + \frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a = b$.

B. $a < b$.

C. $a > b$.

D. $a = b + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x+2)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + 2x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 4x}{x+1} dx = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x+3 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln(x+1) \right]_0^1 = 4 \ln 2 + \frac{-7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4, b = 4$.

Vậy $a = b$.

Câu 27: Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = ae^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a - 3b$ là:

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{13}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = ae^2 + b$. Giá trị của $2a - 3b$ là:

Ta có:

$$I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx + \int_0^1 dt = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}, \text{ với } t = \ln x.$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{4} \Rightarrow 2a - 3b = -\frac{13}{4}.$$

Chọn C

Câu 28: Giả sử $\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = a \ln^2 2 + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó tổng $4a + b$ bằng.

A. 3.

B. 5

C. 7.

D. 9.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{4 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = 4 \int_1^2 \ln x d(\ln x) + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 \ln^2 x \Big|_1^2 + \ln |x| \Big|_1^2 = 2 \ln^2 2 + \ln 2.$$

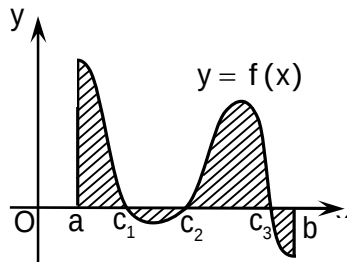
Chọn D

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và

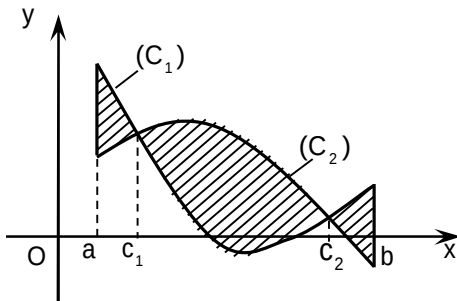
hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx}$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

- Nhớ vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$,

$y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn

bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a; b]$, giả sử α thì $S = \left| \int_a^\alpha (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_\alpha^b (f(x) - g(x)) dx \right|$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$).

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β .

Bước 2. Tính $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ như trường hợp 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f(x)$, TRỤC HOÀNH VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG $x = a, x = b$ ($a < b$)

Câu 1: Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

A. $\int_a^b |f(x)| dx$.

B. $\int_a^b f^2(x) dx$.

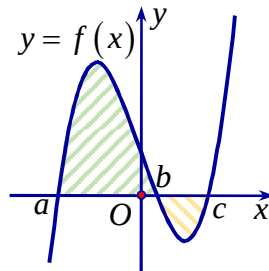
C. $\int_a^b f(x) dx$.

D. $\pi \int_a^b f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$. **B.** $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

C. $-\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

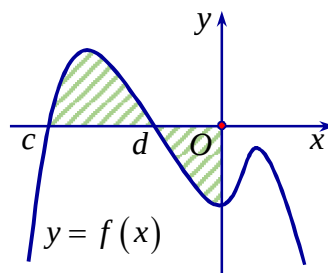
Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ và $f(x) \leq 0 \forall x \in [b; c]$ nên diện tích của hình phẳng là

$$\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

B. $S = -\int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

C. $S = -\int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx.$

D. $S = \int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx.$

Hướng dẫn giải

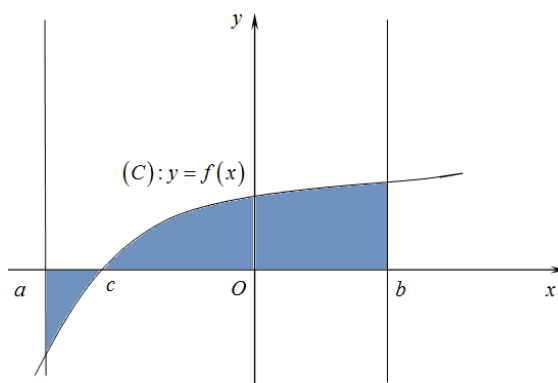
Chọn A

Ta có $S = \int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^0 |f(x)| dx.$

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x) \geq 0$ với $x \in [c; d]$ và $f(x) \leq 0$ với $x \in [d; 0]$.

Do đó $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

Câu 4: Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S = \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

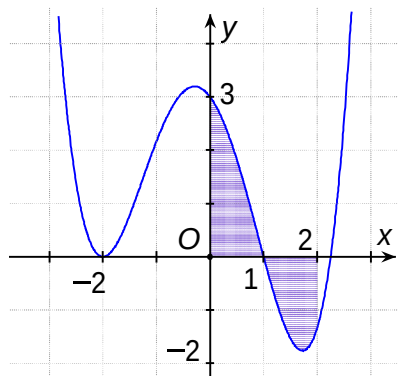
Hướng dẫn giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c [0 - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - 0] dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phần tô đen) là



A. $\int_0^2 f(x) dx$.

B. $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

C. $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

D. $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

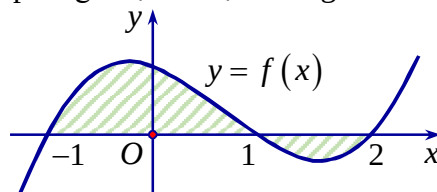
Hướng dẫn giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x \in (0; 1)$ thì $f(x) > 0$, khi $x \in (1; 2)$ thì $f(x) < 0$.

Vậy $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 6: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$.

D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta thấy miền hình phẳng giới hạn từ $x = -1$ đến $x = 1$ ở trên trục hoành $\rightarrow$ mang dấu dương

$$\Rightarrow S_1 = + \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Miền hình phẳng giới hạn từ $x = 1$ đến $x = 2$ ở dưới trục hoành $\rightarrow$ mang dấu âm

$$\Rightarrow S_2 = - \int_1^2 f(x) dx$$

Vậy $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

A. $\frac{53}{4}$

B. $\frac{51}{4}$

C. $\frac{49}{4}$

D. $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [1; 4]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S = \int_1^4 |x^3 - 3x^2| dx = \left| \int_1^3 (x^3 - 3x^2) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^3 - 3x^2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \Big|_1^3 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \Big|_3^4 \right| = 6 + \frac{27}{4} = \frac{51}{4}$$

Câu 8: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng

$$x = 2 \text{ là}$$

A. $3 + 2\ln 2$

B. $3 - \ln 2$

C. $3 - 2\ln 2$

D. $3 + \ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ nên $S = \int_{-1}^2 \left| \frac{x+1}{x+2} \right| dx = \left| \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx \right| = \left| \left(x - \ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^2 \right| = 3 - 2\ln 2$

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Xét trên } [0; \pi] \text{ suy ra } x = \frac{\pi}{2}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 2.$

Câu 10: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x + e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$.

A. $S = \frac{e^4 + 1}{e^2}$ (đvdt).

B. $S = \frac{e^4 - 1}{e}$ (đvdt).

C. $S = \frac{e^2 - 1}{e}$ (đvdt).

D. $S = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ (đvdt).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $S = \int_{-2}^0 |e^x + e^{-x}| dx = \left(e^x - e^{-x} \right) \Big|_{-2}^0 = e^2 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ (đvdt).

Câu 11: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{7}{3}.$

B. $S = \frac{8}{3}.$

C. $S = 7.$

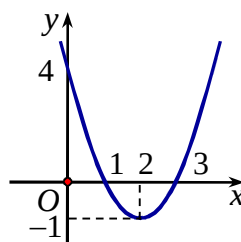
D. $S = 8.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng là $S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

Câu 12: Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

- A. 4. B. 2. C. $\frac{8}{3}$. **D. $\frac{4}{3}$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có phương trình của parabol là $y = x^2 - 4x + 3$.

Parabol (P) cắt Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1$, $x = 3$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành ta có

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \right|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Câu 13: Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- A. $S = \frac{31}{4}$.** B. $S = \frac{49}{4}$. C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{39}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_1^2 |x^3 + 2x + 1| dx = \frac{31}{4}$.

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ **D. $\frac{23}{3}$**

Hướng dẫn giải

Xét pt $-x^2 + 4 = 0$ trên đoạn $[0; 3]$ có nghiệm $x = 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 |-x^2 + 4| dx + \int_2^3 |-x^2 + 4| dx = \frac{23}{3}$$

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{2}$ C. $\frac{e^2 - 1}{4}$ **D. $\frac{e^2 + 1}{4}$**

Hướng dẫn giải

Xét pt $x \ln x = 0$ trên nửa khoảng $(0; e]$ có nghiệm $x = 1$

$$\text{Suy ra } S = \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Câu 16: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$.** B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Diện tích của hình phẳng giới hạn là: } \int_1^e \left| \frac{1}{x} \ln x \right| dx = \int_1^e \ln x \cdot x^{-1} dx = \left| \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Câu 17: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích là

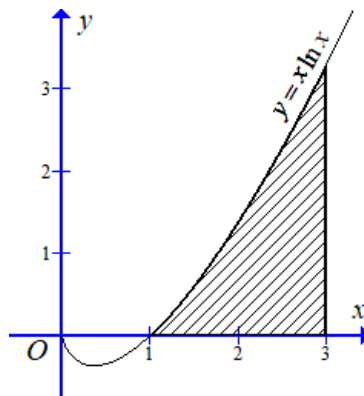
A. 8.**B.** $\frac{4}{3}$.**C.** $\frac{16}{3}$.**D.** $\frac{20}{3}$.**Hướng dẫn giải****Chọn A**Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = 8.$$

Câu 18: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng**A.** $S = \frac{16}{3}$.**B.** $S = 3$.**C.** $S = \frac{15}{4}$.**D.** $S = \frac{17}{3}$.**Hướng dẫn giải****Chọn A**Xét phương trình $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\text{Ta có } S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Câu 19: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H).**A.** $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$.**B.** 1.**C.** $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$.**D.** $\frac{9}{2} \ln 3 + 2$.**Hướng dẫn giải****Chọn A**Diện tích hình phẳng (H) là: $S = \int_1^3 x \ln x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}, \text{ nên:}$$

$$S = \int_1^3 x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2.$$

Câu 20: Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.**A.** $S = \frac{2000}{3}$.**B.** $S = 2008$.**C.** $S = \frac{2008}{3}$.**D.** 2000.**Hướng dẫn giải****Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ là $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Trên đoạn $[-10; 10]$ ta có

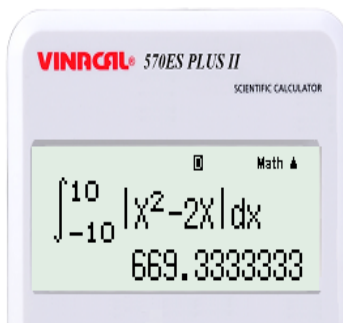
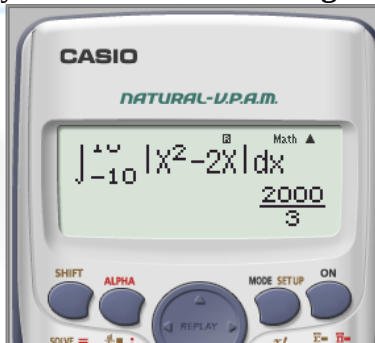
$$x^2 - 2x \geq 0, \forall x \in [-10; 0] \text{ và } [2; 10].$$

$$x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 2].$$

$$\text{Do đó } S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx = \frac{2008}{3} \text{ (đvdt)}.$$

Nhận xét:

Nếu học sinh sử dụng MTCT tính tích phân mà không chia khoảng thì có sự sai khác về kết quả giữa máy **casio** và **vinacal**. Trong trường hợp này máy **vinacal** cho đáp số đúng.



DẠNG 2: DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị

$y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

A. $S_H = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |g(x)| dx.$

B. $S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

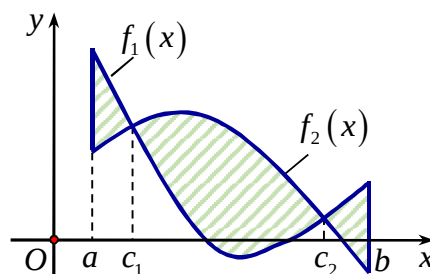
C. $S_H = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$

D. $S_H = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 22: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định nghĩa ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

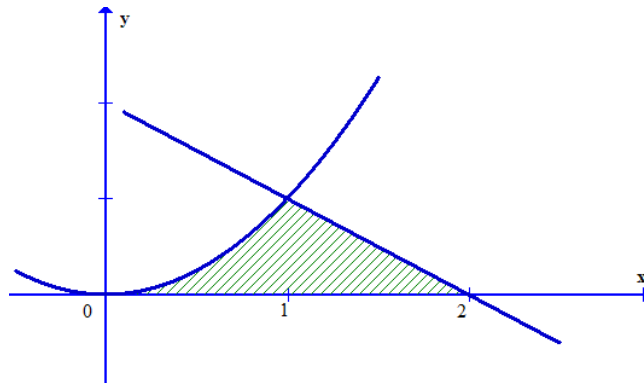
Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào trong các công thức dưới đây?

A. $S = \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_1^2 f^2(x) dx$. **C. $S = \int_1^2 |f(x)| dx$.** D. $S = \pi \int_1^2 f^2(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 24: Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



A. $\frac{3}{5}$. **B. $\frac{5}{6}$.** C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{6}$.

Câu 25: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{87}{5}$ B. $\frac{87}{4}$ **C. $\frac{87}{3}$** D. $\frac{87}{5}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(x^2 + x - 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Suy ra $S = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx = \frac{87}{3}$

Câu 26: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = a$ ($a < 0$) có diện tích bằng 5. Khi đó a bằng

A. $1 - e^5$ B. $1 + e^5$ C. $1 + 2e^5$ D. $1 - 2e^5$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có

TCX: $y = -x + 3$

Nên $S(a) = \int_a^0 \left(-\frac{1}{x-1} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x-1| \Big|_0^a = \ln(1-a)$

Suy ra $\ln(1-a) = 5 \Leftrightarrow a = 1 - e^5$

Câu 27: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức:

A. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx$. B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$. C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$. D. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì trong khoảng $(0;1)$ phương trình $e^x = x$ không có nghiệm và $e^x > x$, $\forall x \in (0;1)$ nên

$$S = \int_0^1 |e^x - x| dx = \int_0^1 (e^x - x) dx.$$

DẠNG 3: DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG $y = f(x)$, $y = g(x)$

Câu 28: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $-\frac{9}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $2 - x^2 \geq -x, \forall x \in [-1; 2]$

Nên $S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{6}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

A. $-\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Nên $S = \int_0^1 |\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}| dx = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx \right| = \left| \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{12}$

Câu 31: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại

$M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 2$. C. $S = \frac{8}{3}$. D. $S = \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$y' = 2x.$$

$$y'(2) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$

$$y = 2(x - 2) = 2x - 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S &= \int_0^2 |x^2 - 4 - (2x - 4)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

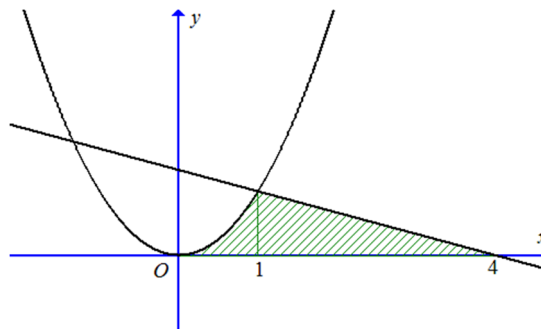
Câu 32: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

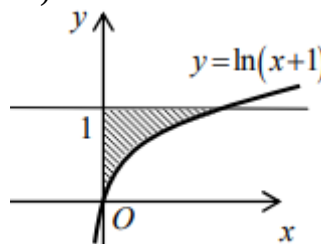
Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \right) \right|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

Câu 33: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $e - 2$.

B. $e - 1$.

C. 1 .

D. $\ln 2$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = \ln(x+1)$ và đường thẳng $y=1$ là $\ln(x+1)=1 \Leftrightarrow x=e-1$.

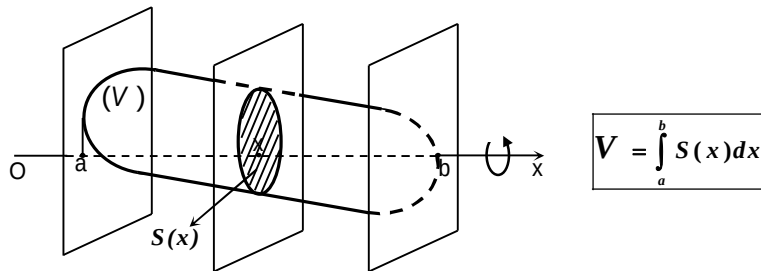
Diện tích của (H) là $S = \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x+1 \end{cases}. \text{ Khi đó } S = (x+1)\ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} dx = e - (e-1) = 1.$$

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

1) Thể tích vật thể:

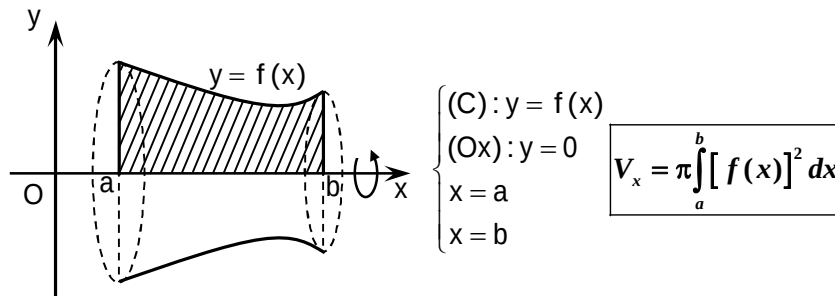
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$

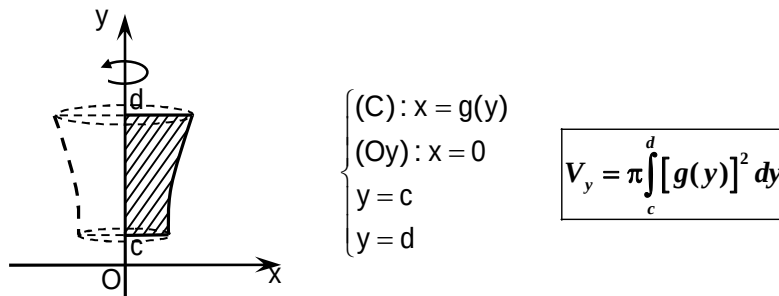
2) Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

PHƯƠNG PHÁP:

. Tính thể tích khối tròn xoay:

Trường hợp 1. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$,

$x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Trường hợp 2. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) **quay quanh trục Ox** là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY SINH BỞI MIỀN (D) GIỚI HẠN BỞI $y = f(x)$; $y = 0$ VÀ $x = a, x = b$ KHI QUAY QUANH TRỤC Ox .

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$

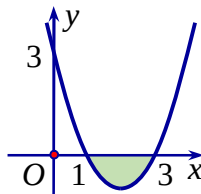
Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **B.** $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.
C. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **D.** $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1$, $x = 3$ nên thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$. **B.** $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.

$$\underline{C.} V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx.$$

$$\underline{D.} V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Câu 4: Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C) . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

$$\underline{A.} V = \pi \int_3^2 \pi^{2x} dx.$$

$$\underline{B.} V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx.$$

$$\underline{C.} V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$$

$$\underline{D.} V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx.$$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_2^3 (\pi^x)^2 dx = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$$

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

$$\underline{A.} V = \pi \int_1^4 x dx.$$

$$\underline{B.} V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx.$$

$$\underline{C.} V = \pi^2 \int_1^4 x dx.$$

$$\underline{D.} V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$$

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$ và $x = b$ được tính

bởi công thức $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

$$\underline{A.} V = \frac{8\pi}{15}$$

$$\underline{B.} V = \frac{4\pi}{3}$$

$$\underline{C.} V = \frac{15\pi}{8}$$

$$\underline{D.} V = \frac{7\pi}{8}$$

- **Phương pháp:** Công thức tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- **Cách giải:** Áp dụng công thức ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Câu 7: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

$$\underline{A.} V = 60\pi.$$

$$\underline{B.} 30\pi.$$

$$\underline{C.} \frac{1188}{25}\pi.$$

$$\underline{D.} \frac{1416}{25}\pi.$$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Ta có $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y = \sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)}$ với $(-5 \leq x \leq 5)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V = \pi \int_{-5}^5 \left(9 - \frac{9x^2}{25}\right) dx = 60\pi$.

Câu 8: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. **B.** $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. **C.** $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$. **D.** $\frac{\pi e^2}{2}$.

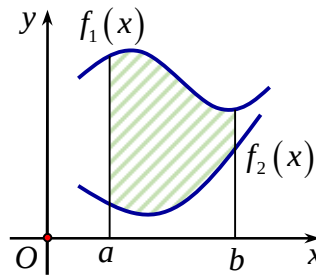
Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

DẠNG 2: TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY KHI CHO HÌNH PHẪNG GIỚI HẠN BỞI: $y = f(x)$ VÀ $y = g(x)$ QUAY QUANH TRỤC Ox .

Câu 9: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Do $f_1(x) > f_2(x) \forall x \in (a; b)$ nên **Chọn B**

Câu 10: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

C. $V = \int_0^1 (2x+1) dx.$

D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

Câu 11: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$

B. $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

C. $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$

D. $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

Câu 12: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 x e^x dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx.$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$) xác định bởi:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Vậy, $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

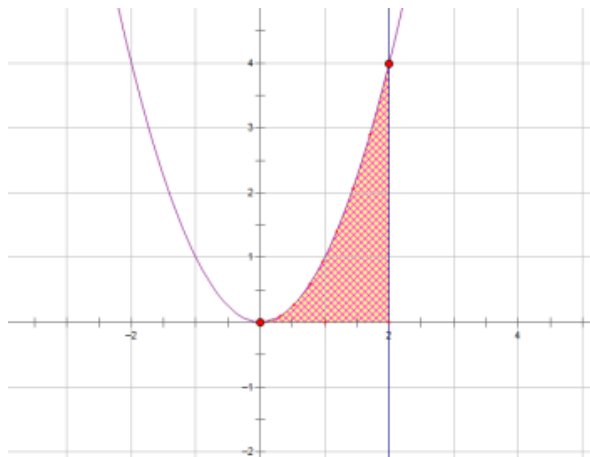
Câu 13: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{8}{3}.$

B. $V = \frac{32}{5}.$

C. $V = \frac{8\pi}{3}.$

D. $\frac{32\pi}{5}$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

Vẽ phác họa hình thấy ngay miền cần tính

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Câu 14: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x + 2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{72\pi}{10}$ (đvtt).

B. $\frac{72\pi}{5}$ (đvtt).

C. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

D. $\frac{81\pi}{5}$ (đvtt).

Hướng dẫn giải**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$

Thể tích cần tìm là $V = \pi \left| \int_{-1}^2 [x^4 - (x+2)^2] dx \right| = \frac{72\pi}{5}.$

Câu 15: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^1 e^{2x} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx.$

C. $V = \int_0^1 e^{x^2} dx.$

D. $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

Câu 16: Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. **B.** $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. **D.** $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính: $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

Câu 17: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Khi đó $a+b$ có kết quả là:

A. 11**B.** 17**C.** 31**D.** 25

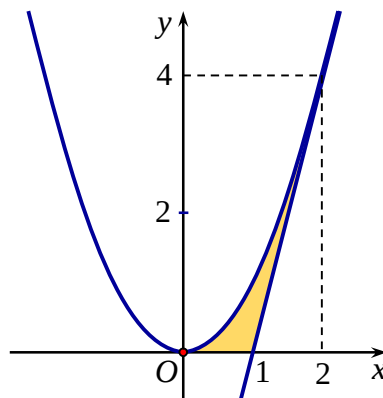
Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

Nên $a = 16$, $b = 15$, $a+b=31$

Câu 18: Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{32\pi}{5}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x-4)^2 dx$.

$$\int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5}; \int_1^2 (4x-4)^2 dx = 16 \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx = 16 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x-4)^2 dx = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 19: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$. B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$. C. $\frac{e^4\pi}{2}$. D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Thể tích vật thể cần tính là } V = \pi \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 d(e^{2x}) = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi(e^2 - e^{-2})}{2}.$$

Câu 20: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 11. B. 17. C. 31. D. 25.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15} \Rightarrow a = 16, b = 15.$$

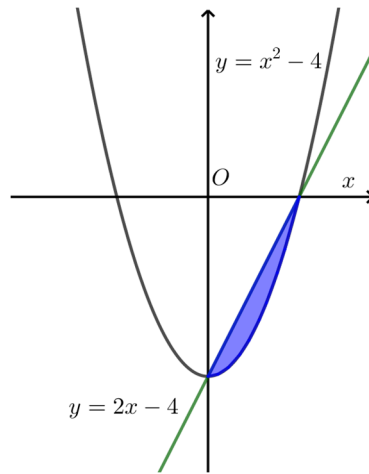
$$\text{Vậy } a + b = 31.$$

Câu 21: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox .

- A. $\frac{32\pi}{5}$. B. $\frac{32\pi}{7}$. C. $\frac{32\pi}{15}$. D. $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $V_1 = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = \frac{256}{15} \pi$, $V_2 = \pi \int_0^2 (2x - 4)^2 dx = \frac{32}{3} \pi$.

Vậy thể tích cần tìm $V = V_1 - V_2 = \frac{32\pi}{5}$.

Câu 22: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

- A. $2\pi \ln 2$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{3}{4} - 1$. D. $2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Câu 23: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, ($a > 1$) quay xung quanh trục Ox .

- A. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)$. B. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$. C. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\pi$. D. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích V của vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^a = -\pi \left(\frac{1}{a} - 1\right) \Leftrightarrow V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi.$$

Câu 24: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{32\pi}{15}$. B. $\frac{64\pi}{15}$. C. $\frac{21\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^2 \left| (x^2)^2 - (2x)^2 \right| dx = \frac{64\pi}{15}.$