



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

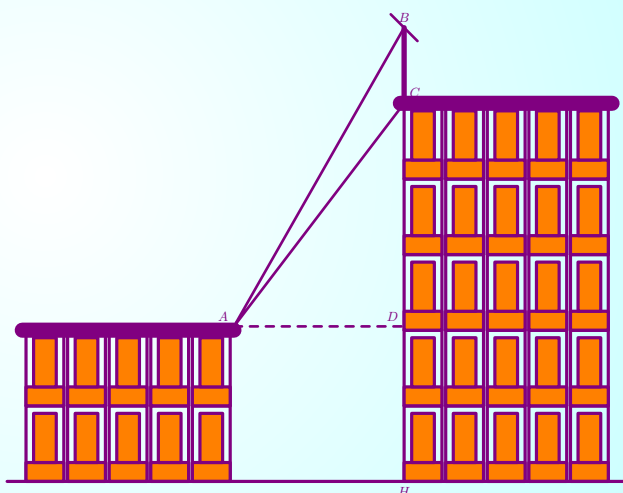
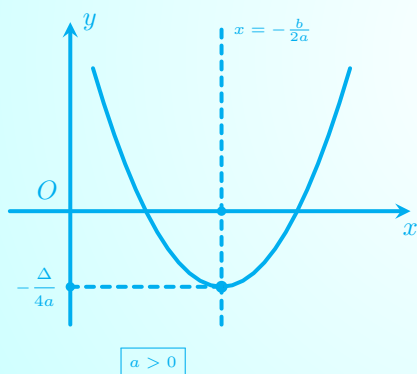
TH.S NGUYỄN THÀNH NHÂN

TOÁN

PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

10

TẬP MỘT



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chương 1. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP	1
Bài 1. MỆNH ĐỀ	1
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	3
Dạng toán 1. Mệnh đề, phủ định của mệnh đề	3
Dạng toán 2. Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương	3
Dạng toán 3. Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi, tồn tại	4
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	6
Bài 2. TẬP HỢP	9
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	9
B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	10
Dạng toán 1. Xác định tập hợp	10
Dạng toán 2. Xác định tập hợp con. Hai tập hợp bằng nhau	11
Dạng toán 3. Các tập con của tập số thực	11
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	12
Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP	16
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	16
B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN	16
Dạng toán 1. Các phép toán trên tập hợp	16
Dạng toán 2. Các phép toán trên tập hợp con của tập số thực	17
Dạng toán 3. Các bài toán biện luận theo tham số	17
Dạng toán 4. Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp	17
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	19
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	23
A ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1	23
B ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2	23
C ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3	23

Chương 2.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	24
Bài 1.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	24
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	24
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	25
	Dạng toán 1. Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	25
	Dạng toán 2. Biểu diễn miền nghiệm.....	25
	Dạng toán 3. Các bài toán thực tiễn.....	26
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	27
Bài 2.	HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	32
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	32
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	32
	Dạng toán 1. Nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	32
	Dạng toán 2. Biểu diễn miền nghiệm.....	32
	Dạng toán 3. Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....	33
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	34
	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	39
A	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1.....	39
B	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2.....	39
Chương 3.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. GIẢI TAM GIÁC	40
Bài 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°	40
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	40
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	41
	Dạng toán 1. Giá trị lượng giác của góc α cho trước ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$).....	41
	Dạng toán 2. Tính giá trị biểu thức.....	41
	Dạng toán 3. Rút gọn, chứng minh biểu thức.....	42
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	42
Bài 2.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. GIẢI TAM GIÁC	45
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	45
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	46
	Dạng toán 1. Vận dụng định lý cô-sin.....	46

	Dạng toán 2. Vận dụng định lý sin.....	46
	Dạng toán 3. Diện tích tam giác và các bài toán liên quan.....	46
	Dạng toán 4. Tổng hợp chứng minh, tính toán.....	47
	Dạng toán 5. Một số bài toán thực tiễn.....	47
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	48
Chương 4.	VECTƠ	52
Bài 1.	KHÁI NIỆM VECTƠ	52
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	52
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	53
	Dạng toán 1. Xác định vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ ngược hướng.....	53
	Dạng toán 2. Vectơ bằng nhau.....	53
	Dạng toán 3. Độ dài véc tơ.....	54
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	54
Bài 2.	TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ	58
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	58
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	59
	Dạng toán 1. Thực hiện phép toán cộng, trừ hai vectơ.....	59
	Dạng toán 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ.....	60
	Dạng toán 3. Tìm độ dài vectơ.....	61
	Dạng toán 4. Ứng dụng của vectơ trong vật lý.....	62
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	63
Bài 3.	TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ THỰC	64
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	64
B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	65
	Dạng toán 1. So sánh hai vectơ theo tỉ số k tương ứng.....	65
	Dạng toán 2. Chứng minh đẳng thức vectơ.....	65
	Dạng toán 3. Phân tích (biểu diễn) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương cho trước.....	66
	Dạng toán 4. Tìm điều kiện hoặc chứng minh tính chất song song, thẳng hàng.....	67
	Dạng toán 5. Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ cho trước.....	67
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	67

Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ	68
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	68
B RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	69
Dạng toán 1. Tính tích vô hướng bằng định nghĩa	69
Dạng toán 2. Ứng dụng tích vô hướng để tính toán độ dài, tính góc	69
Dạng toán 3. Chứng minh một đẳng thức liên quan đến tích vô hướng	70
Dạng toán 4. Tìm tập hợp điểm	70
Dạng toán 5. Ứng dụng tích vô hướng trong thực tế	71
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	71
Chương 5. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM	73
Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ	73
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	73
B RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	74
Dạng toán 1. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối	74
Dạng toán 2. Quy tròn số gần đúng	75
Dạng toán 3. Vận dụng, thực tiễn	75
Bài 2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ	76
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	76
B RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	77
Dạng toán 1. Phát hiện số liệu sai trên bảng số liệu hoặc trên biểu đồ	77
Dạng toán 2. Tính toán, phân tích các số liệu dựa vào bảng số liệu hoặc biểu đồ	77
Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM	79
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	79
B RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN	81
Dạng toán 1. Tìm số trung bình của bảng số liệu	81
Dạng toán 2. Tìm trung vị và tứ phân vị của bảng số liệu	81
Dạng toán 3. Tìm môđ của bảng số liệu	82
Bài 4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN	83
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT	83

B	RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN.....	84
	📁 Dạng toán 1. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu.....	84
	📁 Dạng toán 2. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.....	85
	📁 Dạng toán 3. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.....	85
	📁 Dạng toán 4. Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu.....	86

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

⚙ **Mệnh đề đảo:** Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó, $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.

4 Mệnh đề tương đương

⚙ Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” gọi là hai mệnh đề tương đương.

⚙ Chú ý:

- Mệnh đề “ P nếu và chỉ nếu Q ” được kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng.

Lưu ý

Xét định lý dạng $P \Leftrightarrow Q$. Khi đó, ta có thể phát biểu định lý này theo một trong 2 cách sau:

- ① P là điều cần và đủ để có Q .
- ② P khi và chỉ khi Q .

5 Mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall, \exists$

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi: $\forall x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi tất cả các giá trị của $x \in X$ đều làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu ta tìm được ít nhất một giá trị $x \in X$ làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Ví dụ 1

Mệnh đề “Bình phương mọi số thực đều không âm” được viết là $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

⚙ Mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại: $\exists x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi ta tìm được ít nhất một giá trị của $x \in X$ làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu tất cả giá trị của $x \in X$ đều làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Ví dụ 2

Mệnh đề “Có một số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 3” được viết là $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 3$.

⚙ Phủ định của Mệnh đề chứa kí hiệu $\forall, \exists$.

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

DT

1

Mệnh đề, phủ định của mệnh đề

⚙ Mệnh đề:

- ① Khẳng định đúng là mệnh đề đúng, khẳng định sai là mệnh đề sai.
- ② Câu không phải là câu khẳng định hoặc câu khẳng định mà không có tính đúng-sai đều không phải là mệnh đề.

⚙ Mệnh đề phủ định: Cho mệnh đề P .

- ① Mệnh đề phủ định của P , kí hiệu là $\bar{P}$.
- ② Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai; P sai thì $\bar{P}$ đúng.

≡ Ví dụ 1. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hay cho biết mệnh đề đó đúng hay sai?

- a) Không được đi lối này!
- b) Bây giờ là mấy giờ?
- c) 7 không là số nguyên tố.
- d) $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

≡ Ví dụ 2. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của chúng.

- a) 5 là số nguyên tố.
- b) Phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm nguyên.
- c) Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° .

≡ Ví dụ 3. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

- a) A : “ $\frac{5}{1,2}$ là một phân số”;
- b) B : “Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm”;
- c) C : “ $2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$ ”;
- d) D : “Số 2 025 chia hết cho 15”.

DT

2

Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương

≡ Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề P : “Tam giác ABC vuông” và Q : “Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”. Phát biểu các mệnh đề sau và cho biết mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $P \Rightarrow Q$.
- b) $Q \Rightarrow P$.

≡ Ví dụ 5. Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

- a) Nếu một số chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
- b) Nếu tam giác ABC có $AB = AC$ thì tam giác ABC cân.

c) Nếu tam giác ABC có 2 góc bằng 60° thì tam giác ABC đều.

Ví dụ 6. Trong mỗi cặp mệnh đề P và Q sau đây, hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó. P có phải là điều kiện đủ để có Q không?

a) P : “ a và b là hai số chẵn”, Q : “ $a + b$ là số chẵn” (a, b là hai số tự nhiên).

b) P : “Tam giác ABC có hai góc bằng 60° ”; Q : “Tam giác ABC đều”.

c) P : “Tứ giác $ABCD$ có bốn cạnh bằng nhau”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là một hình vuông”.

Ví dụ 7. Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của nó.

a) P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông” và Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có $AC = BD$ ”.

b) P : “Điểm M nằm trên phân giác của góc xOy ” và Q : “Điểm M cách đều hai cạnh Ox, Oy ”.

c) P : “Tam giác ABC đều” và Q : “Tam giác ABC có ba đường cao bằng nhau”.

DT

3

Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi, tồn tại

Tính đúng sai:

① Mệnh đề chứa kí hiệu với mọi: $\forall x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi tất cả các giá trị của $x \in X$ đều làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu ta tìm được ít nhất một giá trị $x \in X$ làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

② Mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại: $\exists x \in X, P(x)$.

- Mệnh đề này đúng khi ta tìm được ít nhất một giá trị của $x \in X$ làm cho phát biểu $P(x)$ đúng.
- Nếu tất cả giá trị của $x \in X$ đều làm cho $P(x)$ sai thì mệnh đề này **sai**.

Phủ định của mệnh đề có dấu $\forall, \exists$:

① $\forall x \in X, P(x)$ thành $\exists x \in X, \overline{P(x)}$.

② $\exists x \in X, P(x)$ thành $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

Chú ý: Khi lấy phủ định, ta chú ý các vấn đề đối lập sau:

- ① Quan hệ $=$ thành quan hệ $\neq$, và ngược lại.
- ② Quan hệ $>$ thành quan hệ $\leq$, và ngược lại.
- ③ Quan hệ $\geq$ thành quan hệ $<$, và ngược lại.
- ④ Liên kết “và” thành liên kết “hoặc”, và ngược lại.

Ví dụ 8. Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai? Giải thích vì sao?

a) P : “Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$ ”.

b) Q : “Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6”.

Ví dụ 9. Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai? Giải thích vì sao?

a) M : “Có ít nhất một số thực x sao cho $x^3 = -8$ ”.

b) N : “Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$ ”.

Ví dụ 10. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

a) A : “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4”.

b) B : “ $\exists x \in \mathbb{N}, x$ chia hết cho $x + 1$ ”.

Ví dụ 11. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau và nêu mệnh đề phủ định của nó.

a) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*: 2^n + 3$ là một số nguyên tố.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

1 Trong các mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

a) P : “Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180° ”.

b) Q : “7 là số chính phương”.

c) R : “1 là số nguyên tố”.

2 Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) $\pi < \frac{10}{3}$.

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm.

c) Tồn tại một số cộng với chính nó bằng 0.

d) 2022 là hợp số.

3 Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau

a) 1993 chia hết cho 3.

b) $\sqrt{12}$ là một số hữu tỉ.

c) 9 là một số chính phương.

d) $|-1997| \leq 0$.

4 Sử dụng thuật ngữ “điều kiện đủ” để phát biểu các định lí sau.

a) Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a + b$ là số hữu tỉ.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

c) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.

5 Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó bằng 1.

b) Có số tự nhiên mà bình phương của nó bằng 20.

c) Bình phương của mọi số thực đều dương.

d) Có ba số tự nhiên khác 0 sao cho tổng bình phương của hai số bằng bình phương của số còn lại.

6 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

7 Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 25. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

A. Các bạn hãy làm bài đi!.

B. Các bạn có chăm học không ?.

C. An học lớp mấy ?.

D. Việt Nam là một nước thuộc Châu Á.

Câu 2. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề ?

A. 15 là số nguyên tố.

B. $a + b = c$.

C. $x^2 + x = 0$.

D. $2n + 1$ chia hết cho 3.

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào **không** phải là mệnh đề?

A. $5 + 2 = 8$.

B. $2 > 0$.

C. $4 - \sqrt{17} > 0$.

D. $5 + x = 2$.

Câu 4. Câu nào sau đây là một mệnh đề?

A. Số 150 có phải là số chẵn không?.

B. Số 30 là số chẵn.

C. $2x - 1$ là số lẻ.

D. $x^3 + 1 = 0$.

Câu 5. Định lý có dạng $A \Rightarrow B$ được hiểu như thế nào?

A. A khi và chỉ khi B.

B. B suy ra A.

C. A là điều kiện cần để có B.

D. A là điều kiện đủ để có B.

Câu 6. Phủ định của mệnh đề " $5 + 4 = 10$ " là mệnh đề nào sau đây ?

A. $5 + 4 < 10$.

B. $5 + 4 > 10$.

C. $5 + 4 \leq 10$.

D. $5 + 4 \neq 10$.

Câu 7. Phủ định của mệnh đề " $5 + \pi > 10$ " là mệnh đề nào sau đây ?

A. $5 + \pi < 10$.

B. $5 + \pi > 10$.

C. $5 + \pi \leq 10$.

D. $5 + \pi \neq 10$.

Câu 8. Phủ định của mệnh đề " 14 là số nguyên tố" là mệnh đề nào sau đây?

A. 14 không phải là số nguyên tố.

B. 14 chia hết cho 2.

C. 14 không phải là hợp số.

D. 14 chia hết cho 7.

Câu 9. Phủ định của mệnh đề " Dơi là một loài chim" là mệnh đề nào sau đây?

A. Dơi là một loài có cánh.

B. Chim cùng loài với dơi.

C. Dơi là một loài ăn trái cây.

D. Dơi không phải là loài chim.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. 20 chia hết cho 5.

B. 5 chia hết cho 20.

C. 20 là bội số của 5.

D. 5 là ước số của 20.

Câu 11. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 - 3x + 2 = 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. $P(0)$.

B. $P(1)$.

C. $P(-1)$.

D. $P(-2)$.

Câu 12. Với giá trị nào của $n \in \mathbb{N}$, mệnh đề chứa biến $P(n)$: " n chia hết cho 12" là đúng?

- A. $n = 48$. B. $n = 4$. C. $n = 3$. D. $n = 88$.

Câu 13. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $\sqrt{x} > x$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $P(0)$. B. $P(1)$. C. $P\left(\frac{1}{2}\right)$. D. $P(2)$.

Câu 14. Xét mệnh đề chứa biến $P(x)$ " $x^2 - 3x = 0$ ", với $x \in \mathbb{R}$. Với giá trị nào của x thì $P(x)$ là mệnh đề đúng?

- A. $x = 0$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = -3$.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. Nếu "33 là hợp số" thì "15 chia hết cho 25".
 B. Nếu "7 là số nguyên tố" thì "8 là bội số của 3".
 C. Nếu "20 là hợp số" thì "24 chia hết cho 6".
 D. Nếu " $3 + 9 = 12$ " thì " $4 > 7$ ".

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **sai**?

- A. "Tứ giác là hình bình hành thì có hai cặp cạnh đối song song và bằng nhau".
 B. "Tam giác đều thì có ba góc có số đo bằng 60° ".
 C. "Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau".
 D. "Một tứ giác có 4 góc vuông thì tứ giác đó là hình chữ nhật".

Câu 17. Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$ " khẳng định rằng

- A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.
 B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.
 C. Chỉ có một số thực bình phương bằng 3.
 D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Câu 18. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ".

- A. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ". B. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 > 0$ ".
 C. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0$ ". D. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x - 1 \leq 0$ ".

Câu 19. Xét mệnh đề P : " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 < 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

- A. " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ". B. " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x - 3 > 0$ ".
 C. " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0$ ". D. " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \leq 0$ ".

Câu 20. Tìm mệnh đề **sai**.

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 > 0$. B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$.
 C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5x + 6 = 0$. D. $\exists x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{x}$.

Câu 21. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 = 0$. B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.
 C. $\forall x \in \mathbb{N}, (2x + 1)^2 - 1$ chia hết cho 4. D. $\forall x \in \mathbb{Z}, x^5 > x^2$.

Câu 22. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 2n$. B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$. D. $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.

Câu 23. Cho các mệnh đề

- ① X : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 > 0$ " ② Y : " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = 0$ "
 ③ P : " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 = 0$ " ④ Q : " $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ "

Các mệnh đề đúng là

A. X, P.

B. Y, Q.

C. X, Y.

D. P, Q.

Câu 24. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?

A. $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$.

C. $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 + m + 1$ là một số chẵn.

D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số chính phương.

B. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số lẻ.

C. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ là số lẻ.

D. $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho a, b là hai số tự nhiên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu a, b là các số lẻ thì ab lẻ.

b) Nếu a và b lẻ thì $a + b$ chẵn.

c) Nếu a chẵn và b lẻ thì ab lẻ.

d) Nếu a^2 lẻ thì a lẻ.

Câu 27. Cho hai mệnh đề P : “Hai tam giác bằng nhau” và Q : “Hai tam giác có diện tích bằng nhau”. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là “Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau”.

b) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là “Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau”.

c) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

Câu 28. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 - 7x + 6 = 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(1)$ là mệnh đề đúng.

b) $P(0)$ là mệnh đề đúng.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

d) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

Câu 29. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 > x$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(2)$ là mệnh đề sai.

b) $P(0)$ là mệnh đề sai.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

Câu 30. Cho mệnh đề chứa biến $P(x) : x^2 + 2x + 3 > 0$, với $x \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(-2)$ là mệnh đề sai.

b) $P(2)$ là mệnh đề đúng.

c) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ là mệnh đề đúng.

§2. TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Nhắc lại về tập hợp

⚙ Tập hợp

✍ Khi muốn mô tả các đối tượng (phần tử) có chung một tính chất gì đó thì ta xây dựng khái niệm tập hợp.

- Người ta thường dùng chữ cái in hoa $A, B, \dots$ để kí hiệu tập hợp.
- Để chỉ a thuộc tập hợp A , ta viết $a \in A$; để chỉ a không thuộc tập hợp A , ta viết $a \notin A$.
- Số phần tử của tập A được kí hiệu là $n(A)$.

✍ Cách xác định tập hợp:

- Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\dots\}$.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

✍ Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.

⚙ Các tập hợp số

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| ① Tập số tự nhiên $\mathbb{N}$. | ② Tập số nguyên $\mathbb{Z}$. | ③ Tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. |
| ④ Tập số vô tỉ $\mathbb{I}$. | ⑤ Tập số thực $\mathbb{R}$. | ⑥ Tập $\mathbb{N}^*$ ta bỏ số 0. |

2 Tập con và hai tập hợp bằng nhau

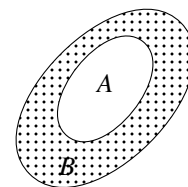
Cho hai tập hợp A và B

⚙ **Tập hợp con:** Nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B thì ta nói tập A là con của tập B , nghĩa là

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

• Các tính chất:

- ① $A \subset A, \forall A$.
- ② $\emptyset \subset A, \forall A$.
- ③ $A \subset B$, và $B \subset C$ suy ra $A \subset C$.
- Nếu A không phải tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$.
- Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.



Biểu đồ Ven minh họa $A \subset B$

Mối quan hệ giữa các tập hợp số:

- | | |
|---|---|
| ① $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. | ② $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. |
|---|---|

⚙ **Tập hợp bằng nhau:** $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

3 Một số tập con của tập hợp số thực

① Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.



② Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.



③ Khoảng $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.



④ Nửa khoảng $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$.



⑤ Khoảng $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$.



⑥ Nửa khoảng $(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$.



⑦ Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$.



⑧ Nửa khoảng $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$.



B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định tập hợp

Ví dụ 1. Cho $D = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là số nguyên tố, } 5 < n < 20\}$.

- Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?
- Dùng kí hiệu $\in, \notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5; 12; 17; 18, số nào thuộc tập D , số nào không thuộc tập D ?

Ví dụ 2. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

- $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(3x - 2) = 0\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{Z} | 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{Z} | 2x^2 - 75x - 77 = 0\}$.
- $D = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - x - 2)(x^2 - 9) = 0\}$.

Ví dụ 3. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

- $A = \{n \in \mathbb{N}^* | 3 < n^2 < 30\}$.
- $B = \{n \in \mathbb{Z} | |n| < 3\}$.
- $C = \{x | x = 3k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 12\}$.
- $A = \{n^2 + 3 | n \in \mathbb{N} \text{ và } n < 5\}$.

Ví dụ 4. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng.

- $A = \{2; 3; 5; 7\}$.
- $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- $C = \{-5; 0; 5; 10\}$.
- $D = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$.

Ví dụ 5. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$. b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$.
 c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$. d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.

DT 2 Xác định tập hợp con. Hai tập hợp bằng nhau

Cho tập hợp A gồm n phần tử.

- ① Khi liệt kê tất cả các tập con của A , ta liệt kê đầy đủ theo thứ tự:
 $\emptyset$; tập 1 phần tử; tập 2 phần tử; tập 3 phần tử;...; A .
- ② Số tập con của A là 2^n .
- ③ Số tập con gồm k phần tử của A là C_n^k (dùng để kiểm tra kết quả bằng máy tính).

Ví dụ 6. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

- a) Xác định tất cả tập con có hai phần tử của A .
- b) Xác định tất cả tập con có ít hơn hai phần tử của A .
- c) Tập A có tất cả bao nhiêu tập con?
- d) Xác định tất cả các tập X thỏa $A \subset X \subset B$.

Ví dụ 7. Hãy chỉ ra các quan hệ bao hàm giữa các tập hợp sau và vẽ biểu đồ Ven để biểu diễn các quan hệ đó:

$$A = \{x \mid x \text{ là tứ giác} \}$$

$$B = \{x \mid x \text{ là hình vuông} \}$$

$$C = \{x \mid x \text{ là hình chữ nhật} \}$$

$$D = \{x \mid x \text{ là hình bình hành} \}$$

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$ và $B = \{a; c; e; f\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $X \subset A$ và $X \subset B$.

Ví dụ 9. Cho hai tập hợp $A = \{1; a; 5\}$, $B = \{a + 2; 3; b\}$ với a, b là các số thực. Biết rằng $A = B$, hãy xác định a và b .

DT 3 Các tập con của tập số thực

Ví dụ 10. Hãy dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp sau đây:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$. b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\}$.
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$. d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$.
 e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.
 g) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$. h) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 9\}$.

Ví dụ 11. Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2]$; $B = [-1; 2]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

- 1 Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:
 - a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
 - b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2) = 0\}$.
- 2 Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê các phần tử:
 - a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5) = 0\}$.
 - b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^2 < 40\}$.
 - c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
 - d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.
- 3 Viết các tập hợp sau bằng phương pháp nêu ra tính đặc trưng.
 - a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 - b) $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$.
 - c) Tập hợp các số chẵn.
 - d) Tập hợp các số lẻ.
- 4 Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Hãy tìm tập hợp M có nhiều phần tử nhất thoả mãn $M \subset A$ và $M \subset B$.
- 5 Hãy xét quan hệ bao hàm các tập hợp sau:

A là tập hợp các tam giác.

B là tập hợp các tam giác đều.

C là tập hợp các tam giác cân.
- 6 Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
 - a) Hãy tìm tất cả các tập con của X có chứa các phần tử 1, 3, 5, 7.
 - b) Có bao nhiêu tập con của X chứa đúng 2 phần tử?
- 7 Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; a\}$ và $B = \{1; a^2\}$. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho $B \subset A$.
- 8 Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng 2 số nguyên dương.
- 9 Cho hai tập hợp $A = [0; 3]$ và $B = [a; a + 2]$. Tìm a để $B \subset A$.
- 10 Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{5; x\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 25. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "7 là số tự nhiên"?

- A. $7 \subset \mathbb{N}$. B. $7 \in \mathbb{N}$. C. $7 < \mathbb{N}$. D. $7 \leq \mathbb{N}$.

Câu 2. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề " $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ"?

- A. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. B. $\sqrt{2} \not\subset \mathbb{Q}$. C. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Câu 3. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 10\}$. Dạng liệt kê của tập hợp A là

A. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

B. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

C. $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

D. $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 4. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n \leq 5\}$. Tập hợp A bằng tập hợp nào sau đây?

A. $M = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

B. $N = \{-1; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

C. $P = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

D. $Q = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 5. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$. Dùng phương pháp liệt kê phần tử, xác định tập hợp B .

A. $B = \{-1\}$.

B. $B = \{4\}$.

C. $B = (-1; 4)$.

D. $B = \{-1; 4\}$.

Câu 6. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 8x + 15 = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A = \{-3; -5\}$.

B. $A = \emptyset$.

C. $A = \{\emptyset\}$.

D. $A = \{0\}$.

Câu 7. Tập hợp $Y = \{a\}$ có bao nhiêu tập hợp con?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 0.

Câu 8. Tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con gồm hai phần tử?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 9. Tập hợp $\{a; b; c\}$ có bao nhiêu tập con?

A. 3.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 10. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào bằng tập $\emptyset$?

A. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 1 < 0\}$.

B. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0\}$.

C. $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n < 5\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 = 0\}$.

Câu 11. Cho tập hợp $B = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ và } x + y = 2\}$. Tập hợp B có bao nhiêu phần tử?

A. 4.

B. 8.

C. 3.

D. 9.

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn điều kiện $\{a; b\} \subset X \subset \{a; b; c; d; e\}$?

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Câu 13. Ta gọi H là tập hợp các hình bình hành, V là tập hợp tất cả các hình vuông, N là tập hợp tất cả các hình chữ nhật và T là tập hợp tất cả các hình tứ giác. Hãy tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $H \subset T$.

B. $V \subset N$.

C. $V \subset H$.

D. $N \subset V$.

Câu 14. Tập hợp $X = [-1; 4]$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A = (-1; 4]$.

B. $A = \{-1; 4\}$.

C. $A = (-1; 4)$.

D. $A = [-1; 4]$.

Câu 16. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $X = (-2; 5)$.

B. $X = \{-2; 5\}$.

C. $X = [-2; 5)$.

D. $X = [-2; 5]$.

Câu 17. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 1\}$. Tập A bằng tập nào trong các tập hợp sau?

A. $(0; 1)$.

B. $[0; 1]$.

C. $[0; 2]$.

D. $[-1; 2]$.

Câu 18. Cho tập hợp $A = [-2; 1)$. Tập hợp A là tập con của tập hợp nào sau đây?

A. $B = [-1; 2)$.

B. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$.

C. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 1\}$.

D. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x < 1\}$.

Câu 19. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Tập hợp nào trong các tập hợp sau đây **không** chứa tập hợp X ?

A. $A = [-3; 7)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $B = [-3; +\infty)$.

D. $C = [-1; +\infty)$.

Câu 20. Cho tập hợp $X = [-3; 5]$. Biểu diễn tập hợp X trên trục số ta được hình biểu diễn nào trong các hình sau (phần không bị gạch chéo)?



Câu 21. Cho tập hợp A được biểu diễn trên trục số như sau (phần không bị gạch chéo).



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A = (3; 5)$.

B. $A = [3; 5)$.

C. $A = [3; 5]$.

D. $A = (3; 5]$.

Câu 22. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a < b < c < d$. Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $(a; c) \subset (c; d)$.

B. $(b; c) \subset (b; d)$.

C. $(b; c) \subset (a; d)$.

D. $(a; c) \subset (a; d)$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng 1 số nguyên dương.

A. $m = 2$.

B. $m > 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Câu 24. Xác định tất cả các giá trị của m sao cho $(m - 7; m) \subset (-4; 3)$?

A. $m > 3$.

B. $m < 3$.

C. $m = 3$.

D. Không tồn tại m .

Câu 25. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m + 1]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $1 < m < 2$.

D. $1 \leq m \leq 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 < n \leq 3\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) -2 là một phần tử thuộc tập A .

b) Tập A có tất cả 5 tập con gồm 1 phần tử.

c) Tập A có tất cả 5 tập con gồm 4 phần tử.

d) Tập A có tất cả 16 tập con.

Câu 27. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 3\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A = \{1; 2; 3\}$.

b) $n(A) + n(B) = 8$.

c) Tập hợp A là con của tập hợp B .

d) Số các tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là 3 tập.

Câu 28. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x - 1)(x + 2)(x^3 + 4x) = 0\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $n(A) = 4$.

b) $n(B) = 5$.

c) Tồn tại ít nhất một phần tử thuộc cả hai tập A và B .

d) Tập hợp A là con của tập hợp B .

Câu 29. Cho hai tập hợp số được biểu diễn trên trục số như hai hình bên dưới:

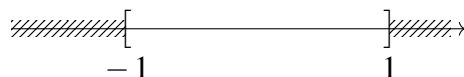


Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập $B = [1; 6]$.
- b) Tập hợp B có 5 số nguyên.
- c) Tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
- d) Tập hợp A là con của tập hợp B .

Câu 30. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ và $B = \{m; m + 3\}$, với $m \in \mathbb{Z}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập $A = \{-1; 0; 1\}$.
- b) Biểu diễn trên trục số của tập A là hình bên dưới



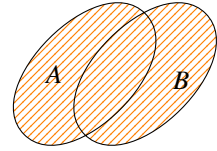
- c) Với $m = -1$ thì $B \subset A$.
- d) Không tồn tại giá trị của m để $A \subset B$.

§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Hợp của hai tập hợp

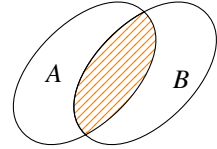
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- Ghi nhớ: Gồm hết phần tử của cả hai tập, các phần tử trùng nhau thì ta ghi 1 lần.



Biểu đồ Ven minh họa $A \cup B$

2 Giao của hai tập hợp

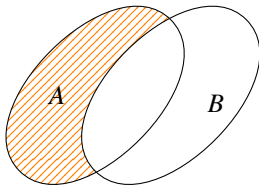
- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- Ghi nhớ: Lấy phần chung của 2 tập hợp.



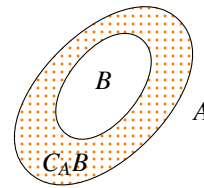
Biểu đồ Ven minh họa $A \cap B$

3 Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con

- $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- Ghi nhớ: Lấy phần riêng (thuộc A mà không thuộc B)
- Đặc biệt: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được kí hiệu là $C_A B$ (gọi là phần bù của B trong A).



Biểu đồ Ven minh họa $A \setminus B$



Biểu đồ Ven minh họa phần bù của B trong A

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

1

Các phép toán trên tập hợp

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập hợp $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 2. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$. Xác định tập $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 3. Cho tập hợp $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và các tập hợp con $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Xác định $C_E A$, $C_E B$, $C_E (A \cup B)$, $C_E A \cap C_E B$.

Ví dụ 4. Xác định hai tập A, B biết rằng $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{2; 10\}$, $A \cap B = \{3; 6; 9\}$.

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

DT**2****Các phép toán trên tập hợp con của tập số thực**

Ví dụ 6. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \cap (2; 4)$. b) $[-1; 4] \cap (2; 5)$. c) $\mathbb{R} \cap (-1; 1)$.

Ví dụ 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Ví dụ 8. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \setminus (2; 4)$. b) $(-4; 2] \setminus [2; 4)$. c) $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

Ví dụ 9. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Ví dụ 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Ví dụ 11. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0]$, $B = [0; 1)$. Tìm $A \setminus B$ và $C_{\mathbb{R}} A$.

DT**3****Các bài toán biện luận theo tham số**

Ví dụ 12. Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$, $B = [a; +\infty)$. Tìm a để

- a) $A \cap B = [-2; 5]$. b) $A \cap B$ có đúng một phần tử.

Ví dụ 13. Cho $A = (-\infty; m+1]$; $B = (-1; +\infty)$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

Ví dụ 14. Cho số thực $a < 0$ và hai tập hợp $A = (-\infty; 9a)$, $B = \left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$. Tìm a để $A \cap B \neq \emptyset$.

Ví dụ 15. Cho hai tập hợp $A = [-2; m]$, $B = (1; 5]$. Tùy theo m , xác định tập $B \setminus A$.

DT**4****Ứng dụng thực tế các phép toán tập hợp**

Ví dụ 16. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C1 có 45 học sinh trong đó có 17 bạn đạt học sinh giỏi Văn, 25 bạn đạt học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10C1.

Ví dụ 17. Một lớp học có 50 học sinh trong đó có 30 em biết chơi bóng chuyền, 25 em biết chơi bóng đá, 10 em biết chơi cả bóng đá và bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em không biết chơi môn nào trong hai môn ở trên?

Ví dụ 18. Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Ví dụ 19. Kết quả thi học kì một của một trường THPT có 48 thí sinh giỏi môn Toán, 37 thí sinh giỏi môn Vật Lí, 42 thí sinh giỏi môn Văn. Biết rằng có 75 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Vật lí, 76 thí sinh giỏi môn Toán hoặc môn Văn, 66 thí sinh giỏi môn Vật lí hoặc môn Văn và có 4 thí sinh giỏi cả ba môn. Hỏi

- có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn.
- có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 2 môn.
- có bao nhiêu học sinh giỏi ít nhất 1 môn.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

1 Cho các tập hợp sau

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 6\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (1 - 3x)(x^4 - 3x^2 + 2) = 0\};$$

$$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- Viết các tập hợp A, B dưới dạng liệt kê các phần tử.
- Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, C_{B \cup A} A \cap B$.
- Chứng minh rằng $A \cap (B \cup C) = A$.

2 Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 7x + 6)(x^2 - 4) = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 8\}$$

$$C = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -2 \leq x \leq 4\}.$$

- Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới dạng liệt kê các phần tử.
- Tìm $A \cup B, A \cap B, B \setminus C, C_{A \cup B} (B \setminus C)$.
- Tìm $(A \cup C) \setminus B$.

3 Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Xác định $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, C_{\mathbb{R}} B$.

4 Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$. Viết các tập hợp sau đây $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, C_{\mathbb{R}} B$ dưới dạng các khoảng, nửa khoảng, đoạn.

5 Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm tất cả những giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$

6 Cho các nửa khoảng $A = (a; a + 1], B = [b; b + 2)$.

- Gọi $C = A \cup B$. Với điều kiện nào của a, b thì C là một đoạn. Tính độ dài của C khi đó.
- Gọi $C = A \cap B$. Với điều kiện nào của a, b thì C là một đoạn. Tính độ dài của C khi đó.

- 7 Cho hai tập hợp $A = [a; a + 2]$, $B = [b; b + 1]$. Tìm điều kiện của a, b để $A \cap B \neq \emptyset$.
- 8 Cho hai tập hợp $A = [2; m + 1]$ và $B = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Tìm m để $A \cap B$ chỉ có đúng 1 phần tử.
- 9 Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?
- 10 Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.
- 11 Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.
- 12 Lớp 10A có 45 học sinh, có 15 học sinh giỏi và 20 học sinh xếp hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học giỏi vừa xếp hạnh kiểm tốt. Các học sinh được học sinh giỏi hoặc hạnh kiểm tốt đều được khen thưởng. Số học sinh được khen thưởng của lớp 10A là bao nhiêu?
- 13 Trong số 42 học sinh của lớp 10A có 13 bạn được xếp loại học lực giỏi, 22 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó 7 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng? Biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- 14 Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 18 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh, 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?
- 15 Có 45 học sinh giỏi, mỗi em giỏi ít nhất một môn. Có 22 em giỏi Văn, 25 em giỏi Toán, 20 em giỏi Anh. Có 8 em giỏi đúng hai môn Văn, Toán; Có 7 em giỏi đúng hai môn Toán, Anh; Có 6 em giỏi đúng hai môn Anh, Văn. Hỏi có bao nhiêu em giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

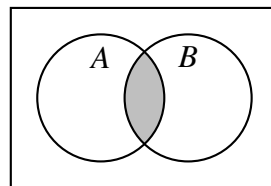
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 25. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $A \cup \emptyset = A$. B. $A \cup \emptyset = \emptyset$. C. $A \cup A = \emptyset$. D. $\emptyset \cup A = \emptyset$.

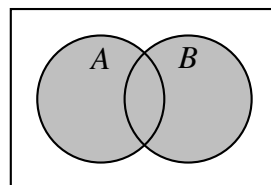
Câu 2. Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cup B$. B. $A \cap B$.
C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Câu 3. Cho các tập hợp A, B được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cup B$. B. $A \cap B$.
C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Câu 4. Cho hai tập hợp $X = \{7, 2, 8, 4, 9, 12\}$ và $Y = \{1, 3, 7, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

- A. $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 12\}$. B. $\{2, 8, 9, 12\}$.
C. $\{4, 7\}$. D. $\{1, 3\}$.

Câu 5. Cho hai tập hợp $X = \{2, 4, 6, 9\}$ và $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{6, 9\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. D. $\{2, 4\}$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $\{0\}$. B. $\{0, 1\}$. C. $\{1, 2\}$. D. $\{1, 5\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $X = \{1, 5\}$ và $Y = \{1, 3, 5\}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $C_Y X = \{3\}$. B. $C_Y X = \{1\}$. C. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$. D. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $\{1, 2, 3\}$. B. $\{1, 3\}$. C. $\{6, 8\}$. D. $\{2, 4, 6\}$.

Câu 9. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $C_A B$.

- A. $\{2, 4, 6\}$. B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. D. $\{1, 3, 5, 7\}$.

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. B. $\{-2, -1, 0, 1, 2, -4\}$.
C. $\{-1, 1\}$. D. $\{-2, 0, 2\}$.

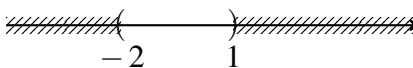
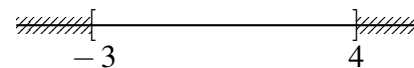
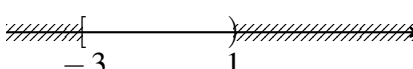
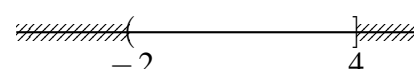
Câu 11. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$ và tập hợp A gồm những số tự nhiên lẻ không lớn hơn 8. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{1, 2, 3, 4\}$. C. $\{0, 1, 3, 5\}$. D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

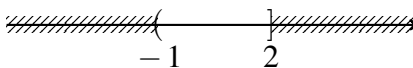
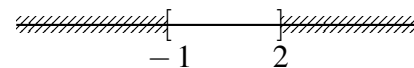
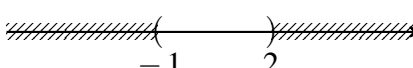
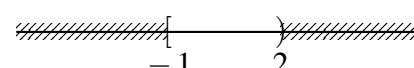
Câu 12. Cho hai tập $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{0, 1, 3, 5\}$. Tất cả các tập X thỏa mãn $X \subset (A \cap B)$ là

- A. $\emptyset; \{1\}; \{1, 3\}; \{3\}; \{1, 3, 5\}$. B. $\{1\}; \{3\}; \{1, 3\}$.
C. $\emptyset; \{1\}; \{3\}$. D. $\emptyset; \{1\}; \{3\}; \{1, 3\}$.

Câu 13. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $[-3; 1) \cap (-2; 4]$ là hình nào?

- A.  B. 
C.  D. 

Câu 14. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $(0; 2) \cup [-1; 1)$ là hình nào?

- A.  B. 
C.  D. 

Câu 15. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $[-5; 2]$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 16. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$. B. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$.
C. $(a; c) \cap [b; d) = [b; c]$. D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; c)$.

Câu 17. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $(5; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 18. Cho các tập hợp sau $A = (-1; 5]$, $B = (2; 7)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(-1; 2]$. B. $(2; 5]$. C. $(-1; 7)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 19. Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

- A. $[2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; -2]$.

Câu 20. Cho hai tập hợp $A = [-5; 3]$; $B = [0; 2)$. Tìm tập hợp $\mathbb{R} \setminus (B \cap A)$.

- A. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. B. $[0; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 21. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10A.

- A. 42. B. 32. C. 17. D. 10.

Câu 22. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả 2 môn Toán Văn và 2 học sinh không giỏi môn nào. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- A. 20. B. 22. C. 25. D. 28.

Câu 23. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right.\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Câu 24. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Câu 25. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m - 1]$, $B = [1; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m > -1$. B. $m \geq -1$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 6x + 5 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = 1\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A = \{1; 5\}$. b) $B = \{-1; 1\}$. c) $A \cap B = \{1\}$. d) $B \setminus A = \{-1\}$.

Câu 27. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là số lẻ}, x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là các ước của } 12\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A = \{0; 1; 3; 5; 7\}$. b) $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
c) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$. d) $A \setminus B = \{5; 7\}$.

Câu 28. Cho tập hợp $A = (-7; 5]$, $B = (3; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $A \cap B = [3; 5]$. b) $A \cup B = (7; +\infty)$. c) $A \setminus B = (-7; 3]$. d) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 3]$.

Câu 29. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 40 người phiên dịch tiếng Anh, 45 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 26 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số người phiên dịch được cả Tiếng Anh và tiếng Pháp là 26 người.
b) Số người chỉ phiên dịch được tiếng Anh là 40 người.
c) Số người phiên dịch được tiếng Pháp là 19 người.
d) Ban tổ chức đã huy động 85 người phiên dịch cho hội nghị.

Câu 30. Một lớp học có 50 học sinh, trong đó có 35 học sinh giỏi toán, 25 học sinh giỏi văn. Biết rằng mỗi học sinh trong lớp đều giỏi ít nhất 1 môn Toán hoặc Văn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Lớp có tổng cộng 60 học sinh giỏi.
- b) Lớp có 10 học sinh giỏi cả 2 môn Văn và Toán.
- c) Lớp có 15 học sinh giỏi Văn mà không giỏi Toán.
- d) Lớp có 35 học sinh giỏi Toán.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 31 đến câu 35 vào ô kết quả.

Câu 31. Cho $U = \{3; 5; a^2\}$, $A = \{3; a + 4\}$. Tìm giá trị của a sao cho $C_U A = \{1\}$.

KQ:

Câu 32. Cho hai tập hợp $A = \{(x; y) \mid 3x - 2y = 11\}$, $B = \{(x; y) \mid 2x + 3y = 3\}$. Biết $A \cap B = \{(x_0; y_0)\}$. Tính $x_0 + y_0$.

KQ:

Câu 33. Lớp 10A có 25 em thích bóng đá, 23 em thích bóng chuyền, 11 em thích cả bóng đá và bóng chuyền. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu em thích đúng một môn trong hai môn trên?

KQ:

Câu 34. Một Cung Thiếu nhi có 40 thành viên, trong đó có 30 bạn vẽ đẹp, 17 bạn vừa vẽ đẹp vừa hát hay. Hỏi Cung Thiếu nhi đó có bao nhiêu bạn hát hay biết bạn nào cũng vẽ đẹp hoặc hát hay?

KQ:

Câu 35. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

KQ:

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

A // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. D	2. A	3. D	4. B	5. D	6. D	7. C	8. A	9. D	10. B
11. B	12. A	13. C	14. A	15. C	16. C	17. B	18. C	19. C	20. B
21. C	22. B	23. C	24. D	25. D					

Câu 26. a Đ b Đ c S d Đ

Câu 27. a Đ b Đ c S d S

Câu 28. a Đ b S c S d Đ

Câu 29. a S b Đ c Đ d S

Câu 30. a S b Đ c Đ d Đ

B // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. B	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	8. C	9. D	10. D	11. C
12. C	13. D	14. D	15. A	16. D	17. C	18. B	19. A	20. A	21. B
22. A	23. C	24. C	25. D						

Câu 26. a S b Đ c Đ d S

Câu 27. a Đ b Đ c Đ d S

Câu 28. a S b S c Đ d S

Câu 29. a Đ b S c S d Đ

Câu 30. a S b Đ c S d Đ

C // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. A	2. B	3. A	4. C	5. C	6. B	7. A	8. B	9. D	10. A
11. A	12. D	13. A	14. D	15. A	16. A	17. C	18. A	19. C	20. A
21. D	22. B	23. C	24. B	25. D					

Câu 26. a Đ b S c Đ d S

Câu 27. a S b Đ c Đ d Đ

Câu 28. a S b S c Đ d Đ

Câu 29. a Đ b Đ c S d S

Câu 30. a S b Đ c Đ d S

Câu 31. 1

Câu 32. 2

Câu 33. 26

Câu 34. 27

Câu 35. 6

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✓ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

- ✓ Nghiệm của bất phương trình là những cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn (1).
- ✓ Các dạng khác $ax + by < c$; $ax + by \geq c$; $ax + by > c, \dots$

2 Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✓ Các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm. Để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.
- ✓ Giả sử muốn biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c \quad (2)$, ta thực hiện các bước như sau:

① Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

② Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ .

③ Thay $(x_0; y_0)$ vào (2), sẽ có một trong hai trường hợp xảy ra:

- + Nếu mệnh đề đúng thì miền nghiệm phải chứa M_0 . Suy ra nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của (2).
- + Nếu mệnh đề sai thì miền nghiệm không chứa M_0 . Suy ra nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của (2).

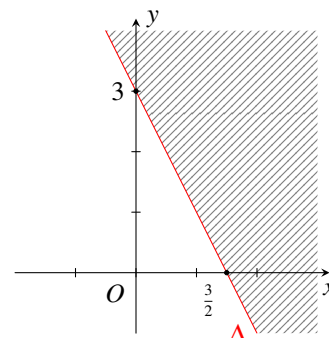
CHÚ Ý

Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của $ax + by \leq c$ và bỏ đi đường thẳng $\Delta: ax + by = c$. Lúc này, khi vẽ đường thẳng Δ , ta có thể dùng nét đứt để minh họa.

Ví dụ 1

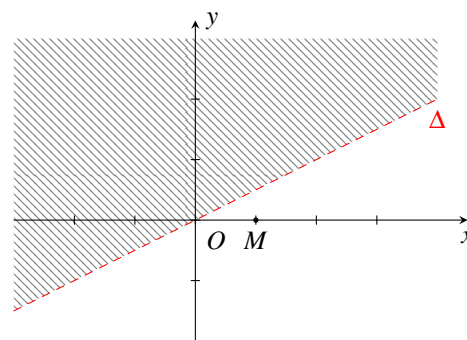
Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y \leq 3$ (*), ta làm như sau:

- Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x + y = 3$ qua hai điểm $(0;3)$ và $(1,5;0)$.
- Chọn $O \notin \Delta$. Thay tọa độ O vào (*): $2 \cdot 0 + 0 < 3$ (thỏa).
- Suy ra miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O (miền không bị tô đậm trong hình vẽ).

**Ví dụ 2**

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $x - 2y > 0$ (*), ta làm như sau:

- Vẽ đường thẳng $\Delta: x - 2y = 0$ qua hai điểm $(0;0)$ và $(2;1)$.
- Chọn $M \notin \Delta$. Thay tọa độ M vào (*): $1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 > 0$ (thỏa).
- Suy ra miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ Δ chứa điểm M và không kể đường thẳng Δ .

**B****RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN****DT****1****Nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

Ví dụ 1. Cho bất phương trình $2x - y < 0$.

- Trong các cặp số $(-1;2)$, $(2;0)$, $(0;1)$, $(3;-2)$, $(-1;-2)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?
- Tìm tất cả giá trị nguyên dương của m để cặp số $(m;8)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Cho bất phương trình $x + y \leq 10$.

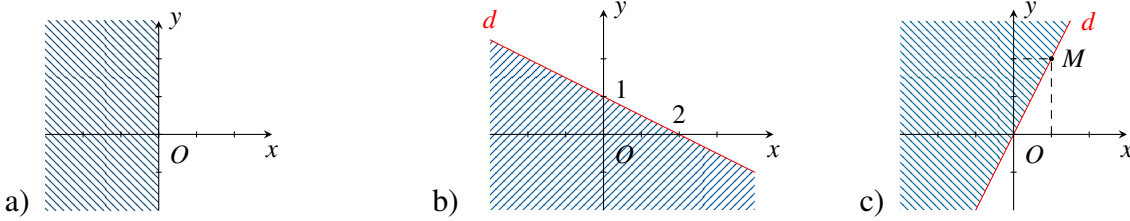
- Trong các cặp số $(-1;0)$, $(10;3)$, $(7;3)$, $(3;-2)$, $(4;7)$, cặp nào là nghiệm của bất phương trình đã cho?
- Tìm tất cả giá trị nguyên dương của m để cặp số $(m;4)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

DT**2****Biểu diễn miền nghiệm**

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + y \geq 3$.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 4y < 8$.

Ví dụ 5. Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?



DT

3

Các bài toán thực tiễn

Ví dụ 6. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

- Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12m^2$.
- Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Ví dụ 7. Công ty viễn thông Mobifone tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng, 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Mỗi tháng Minh gọi điện thoại hết từ 200 đến 300 nghìn đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn mô tả cho số tiền điện thoại trả cho (x) phút gọi nội mạng và (y) phút gọi ngoại mạng trong một tháng.

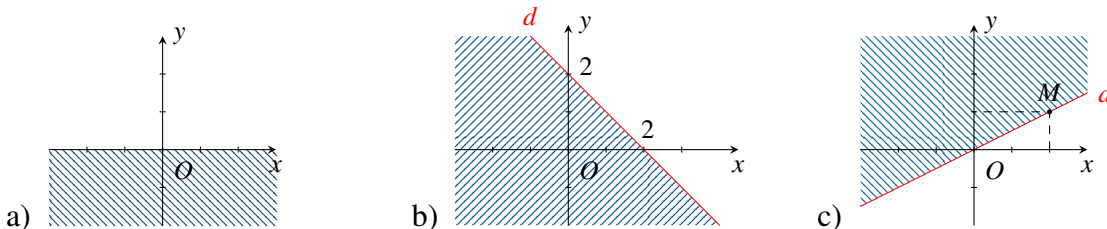
Ví dụ 8. Nhân ngày Quốc tế Thiếu Nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:

- Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50 000 đồng/vé.
- Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100 000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

- Phần nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể đường thẳng d) ở mỗi hình sau là miền nghiệm của bất phương trình nào?



- Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

- $x - 2y - 1 > 0$;
- $x + y - 1 \leq 0$;
- $3x - y \leq 0$;

d) $-x + y + 2 > 0$;

e) $y + 2 \geq 0$;

f) $-x + 2 \leq 0$.

- 3 Hà mang 95000 đồng ra chợ mua hoa cúc và hoa hồng. Một bông hoa cúc có giá 4000 đồng, một bông hoa hồng có giá 7000 đồng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho số tiền mà Hà phải chi để mua x bông hoa cúc và y bông hoa hồng.
- 4 Mỗi ngày Nga đều dành không quá 30 phút để đọc cả 2 cuốn sách A, B. Nga đọc được 3 trang sách A trong 2 phút, đọc được 2 trang sách B trong 1 phút. Gọi x, y lần lượt là số phút đọc sách A và số phút đọc sách B. Tìm điều kiện của x và y để Nga đọc được ít nhất 35 trang sách trong một ngày.
- 5 Một cửa hàng bán hai loại trà sữa, trong đó 4 cốc loại 1 có giá 100000 đồng, 1 cốc loại 2 có giá 30000 đồng. Muốn có lãi theo dự tính thì mỗi ngày cửa hàng phải bán được ít nhất 5 triệu đồng tiền hàng. Hỏi số cốc trà sữa bán được trong một ngày trong những trường hợp nào thì cửa hàng có lãi như dự tính?
- 6 Một rạp chiếu phim 2D phục vụ khán giả một bộ phim mới với 2 loại vé khác nhau. Vé loại 1 (từ thứ 2 đến thứ 5) giá 80000 đồng/vé, vé loại 2 (từ thứ 6 đến chủ nhật và ngày lễ) giá 100000 đồng/vé. Để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 150 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?
- 7 Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.
- a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài.
- b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + y^3 - z < 3$. B. $2x^2 - 2x + 1 \leq 0$. C. $(x + y)(x - y) \geq 0$. D. $3x - 2y > 1$.

Câu 2. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào **không phải** là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + 3y > 0$. B. $x + y^2 \leq 7$. C. $x + 2 \geq 0$. D. $x - y > 0$.

Câu 3. Bất phương trình $x + 2y \leq 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. Vô nghiệm. D. Vô số nghiệm.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi phần đường thẳng $ax + by = c$ được miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $ax + by \geq c$. B. $ax + by > c$. C. $ax + by < c$. D. $ax + by > 0$.

Câu 5. Bất phương trình $5x - 2(y - x + 1) > 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $7x - 2y - 2 > 0$. B. $5x - 2y > 1$. C. $5x - y - 2 > 0$. D. $3x - 2y - 2 > 0$.

Câu 6. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình $2x + 5y > 10$?

- A. $(0; 0)$. B. $(2; -7)$. C. $(-1; 1)$. D. $(2; 5)$.

Câu 7. Cặp số $(x_0; y_0)$ nào là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y \geq 4$?

- A. $(x_0; y_0) = (2; 1)$. B. $(x_0; y_0) = (-2; 2)$. C. $(x_0; y_0) = (5; 1)$. D. $(x_0; y_0) = (-4; 0)$.

Câu 8. Cặp số nào sau đây **không phải** là nghiệm của bất phương trình $3x + y \geq 4$?

- A. $(1; 0)$. B. $(1; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(4; 1)$.

Câu 9. Điểm $A(-1; 3)$ thuộc miền của bất phương trình

- A. $x + 3y < 0$. B. $3x - y > 0$. C. $-3x + 2y - 4 > 0$. D. $2x - y + 4 > 0$.

Câu 10. Cặp số $(-1; 4)$ là nghiệm của bất phương trình

- A. $x - y + 2 > 0$. B. $-2x + y + 1 < 0$. C. $x + y + 2 > 0$. D. $x + y + 4 \leq 0$.

Câu 11. Tìm tất cả các số thực a sao cho miền nghiệm của bất phương trình $x \leq a$ chứa điểm $M(-1; 0)$.

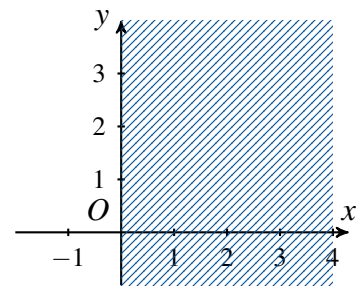
- A. $a > -1$. B. $a \geq -1$. C. $a > 0$. D. $a \geq 0$.

Câu 12. Với giá trị nào của m thì điểm $A(1 - m; m)$ **không thuộc** miền nghiệm của bất phương trình $2x - 3(y - x) > 4$.

- A. $m \geq \frac{1}{8}$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $m < \frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$.

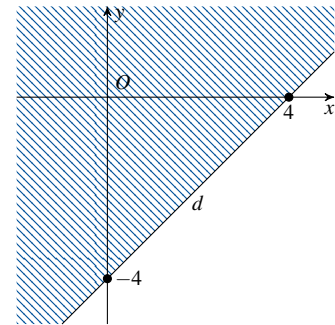
Câu 13. Hình vẽ sau có phần không tô và cả trục Oy là miền nghiệm của một trong bốn bất phương trình dưới đây. Hãy tìm bất phương trình đó.

- A. $x \geq 0$. B. $x \leq 0$.
C. $y \geq 0$. D. $y \leq 0$.



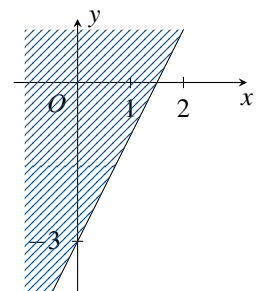
Câu 14. Hãy chọn bất phương trình mà miền nghiệm của nó là nửa mặt phẳng không bị gạch có bờ là đường thẳng d như hình bên.

- A. $x - y > 4$. B. $x - y < 4$. C. $x - y \leq 4$. D. $x - y \geq 4$.

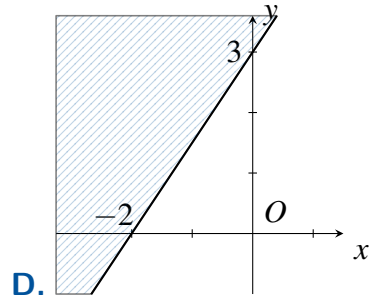
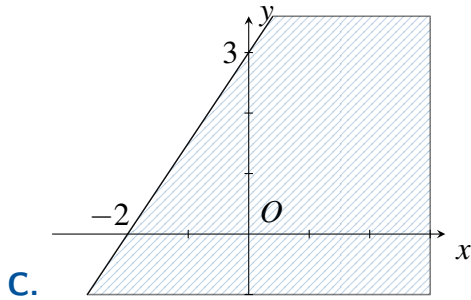
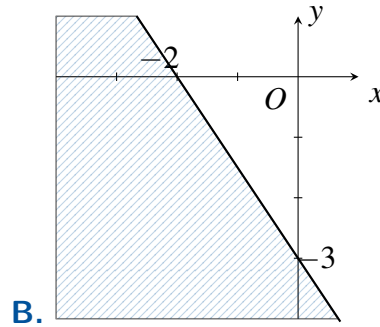
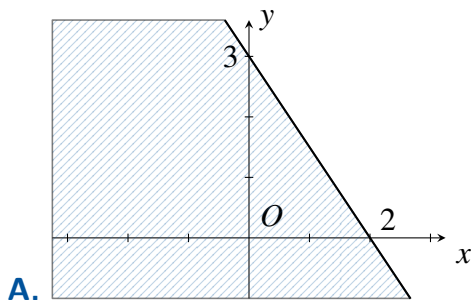


Câu 15. Phần không bị gạch trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?

- A. $x - 2y < 3$. B. $2x - y > 3$.
C. $x - 2y > 3$. D. $2x - y < 3$.



Câu 16. Miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y < -6$ (phần không bị gạch) được biểu diễn bởi hình nào sau đây?



Câu 17. Trong 1 lạng (100 g) thịt bò chứa khoảng 26 g protein và 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người đàn ông cần tối thiểu 52 g protein. Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người đàn ông nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người đàn ông trong một ngày.

A. $26x + 20y \leq 52.$

B. $26x + 20y < 52.$

C. $13x + 10y \geq 26.$

D. $13x + 10y > 26.$

Câu 18. Công ty viễn thông Viettel có gói cước Hi School tính phí là 1190 đồng mỗi phút gọi nội mạng và 1390 đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Một bạn học sinh đăng kí gói cước trên và sử dụng x phút gọi nội mạng, y phút gọi ngoại mạng trong một tháng. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để mô tả số tiền bạn đó phải trả trong một tháng ít hơn 100 nghìn đồng.

A. $119x + 139y \geq 10000.$

B. $139x + 119y < 10000.$

C. $119x + 139y \leq 10000.$

D. $119x + 139y < 10000.$

Câu 19. Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Gọi x, y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa trong mỗi tuần. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y sao cho Nam kiếm thêm tiền mỗi tuần được ít nhất là 900 nghìn đồng.

A. $3x + 2y \leq 180.$

B. $3x + 2y > 180.$

C. $3x + 2y \geq 180.$

D. $3x + 2y < 180.$

Câu 20. Anh A muốn thuê một chiếc ô tô (có người lái) trong một tuần. Giá thuê xe như sau: từ thứ hai đến thứ sáu phí cố định là 900 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 10 nghìn đồng/km còn thứ bảy và chủ nhật thì phí cố định là 1200 nghìn đồng/ngày và phí tính theo quãng đường di chuyển là 15 nghìn đồng/km. Gọi x, y lần lượt là số km mà anh A đi trong các ngày từ thứ hai đến thứ sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền anh A phải trả không quá 20 triệu đồng.

A. $10x + 15y \leq 20000.$

B. $2x + 3y \geq 2720.$

C. $10x + 15y \geq 20000.$

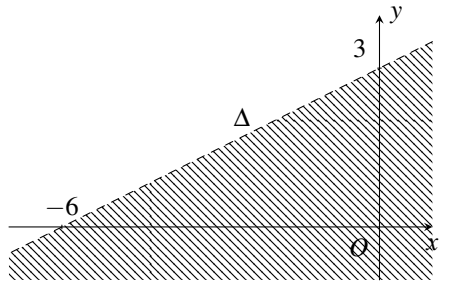
D. $2x + 3y \leq 2720.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho bất phương trình hai ẩn $x - 2y + 6 > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

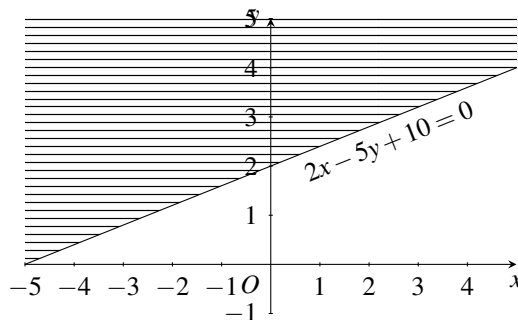
a) Bất phương trình có vô số nghiệm.

- b) Bộ số $(0; 0)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 c) Bộ số $(0; 3)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 d) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình là miền không gạch chéo (không kể bờ Δ) như hình bên dưới



Câu 22. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 5y + 10 \geq 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

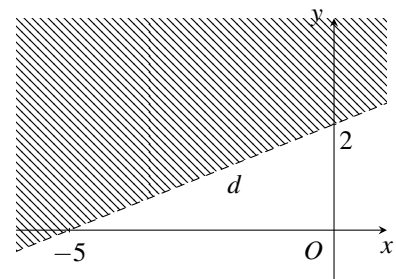
- a) Bộ số $(1; 3)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 b) Bộ số $(1; 1)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
 c) Bộ số $(2; 2)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
 d) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng Oxy như hình bên dưới (miền không gạch chéo, kể cả bờ)



Câu 23.

Cho một bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền không gạch chéo (không kể bờ d) như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

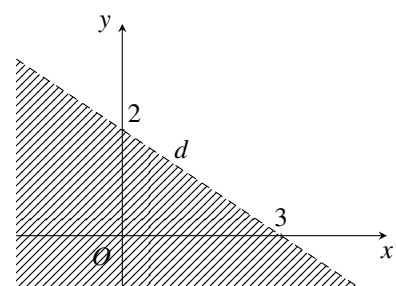
- a) Điểm $(-5; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
 b) Điểm $(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
 c) Phương trình đường thẳng d là $-2x + 5y - 10 = 0$.
 d) Bất phương trình đã cho là $-2x + 5y - 10 < 0$.



Câu 24.

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn có miền nghiệm là miền không gạch chéo (không kể bờ d) như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Điểm $(3; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
 b) Điểm $(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.
 c) Phương trình đường thẳng d là $2x + 3y - 6 = 0$.
 d) Bất phương trình đã cho là $2x + 3y - 6 < 0$.



Câu 25. Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là x, y ($x, y \geq 0$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Trong x g thịt bò và y g trứng chứa $59x + 6y$ g protein.
- b) Bất phương trình theo x, y diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày là $\frac{59}{226}x + \frac{3}{23}y \leq 60$.
- c) Một người ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì phù hợp với tiêu chuẩn đề ra.
- d) Một người ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì phù hợp với tiêu chuẩn đề ra.

§2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✔ Là hệ bất phương trình gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- ✔ Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

2 Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✔ Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- ✔ Để biểu diễn miền nghiệm của hệ, ta làm như sau:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ.
- Phần giao của các miền nghiệm là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT 1 Nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

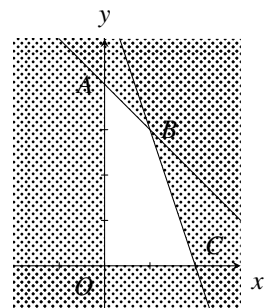
Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} x + y > 0 \\ x + 2y < 9 \end{cases}$. Tìm tất cả các cặp số $(x_0; y_0)$ có tọa độ nguyên là nghiệm của hệ đã cho, biết $x_0 = -1$.

Ví dụ 2.

Cho hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ có miền nghiệm là phần

không bị gạch như hình bên (tứ giác $OABC$, bao gồm các cạnh).

- Tìm những cặp nghiệm có tọa độ nguyên của hệ bất phương trình trên.
- Xác định tọa độ 3 đỉnh A , B và C . Tính diện tích tứ giác $OABC$.



DT 2 Biểu diễn miền nghiệm

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \end{cases}$.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1 \end{cases}.$$

Ví dụ 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 5y > 2 \\ x - 3y \geq 1 \\ x + y < 3 \end{cases}.$$

DT**3****Ứng dụng của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.**

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền của đa giác. Các bước giải:

- Biểu diễn miền nghiệm (miền đa giác) và tìm tọa độ các đỉnh của đa giác đó.
- Thay tọa độ các đỉnh của đa giác vào biểu thức $F = ax + by$, chọn GTLN, GTNN.

Ví dụ 6. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1,5 kg thịt bò và 1 kg thịt lợn, giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Ví dụ 8. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN**1**

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

2

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}.$$

3

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

4

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5

Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180?

6

Một xưởng sản xuất có 2 máy đặc chủng A và B để sản xuất 2 loại sản phẩm X và Y. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại X cần dùng máy A trong 6 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Để sản xuất 1 tấn sản phẩm loại Y cần dùng máy A trong 2 giờ và dùng máy B trong 2 giờ. Cho biết mỗi máy không thể sản xuất đồng thời 2 loại sản phẩm. Máy A làm việc không quá 12 giờ 1 ngày, máy B làm việc không quá 8 giờ 1 ngày. Một tấn sản phẩm loại X lãi 10 triệu đồng và 1 tấn sản phẩm loại Y lãi 8 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất mỗi ngày sao cho tiền lãi thu được là lớn nhất.

7

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00 – 17h00. Hỏi công ty có thể phát tối đa bao nhiêu lần quảng cáo?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 15. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong các hệ bất phương trình sau, hệ bất phương trình nào **không** phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A.
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 5 \end{cases}$$
 . B.
$$\begin{cases} x > 0 \\ x + \sqrt{3}y + 1 \leq 0 \end{cases}$$
 . C.
$$\begin{cases} x^2 - y \leq 2 \\ 4x + 5y \leq 1 \end{cases}$$
 . D.
$$\begin{cases} x - y > 3 \\ 1 - \frac{1}{2}x + y > 0 \end{cases}$$
 .

Câu 2. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 3 < 0 \\ 2x + y - 2 > 0 \end{cases}$$
 . Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho?

A. $Q(-1; -5)$. B. $N(2; 2)$. C. $P(3; -1)$. D. $M(2; 3)$.

Câu 3. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 3x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$$
 có miền nghiệm là S và bốn điểm $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; 3)$. Có bao nhiêu điểm thuộc S?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y < -3 \\ 2x > 4 \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

- A. $(3; -7)$. B. $(3; 0)$. C. $(3; 7)$. D. $(0; 7)$.

Câu 5. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y \geq 3 \\ 2x+y < 4 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. $(1; -3)$. B. $(-2; 1)$. C. $(3; -2)$. D. $(4; 1)$.

Câu 6. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-y > 0 \\ x+y \geq -1 \\ x-y < -2 \end{cases}$ **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

- A. $(5; 8)$. B. $(6; 9)$. C. $(4; 7)$. D. $(3; 4)$.

Câu 7. Tính diện tích S của miền nghiệm hệ bất phương trình $\begin{cases} y+x \leq 3 \\ y-x \leq 3 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

- A. $S = 8$. B. $S = 25$. C. $S = 16$. D. $S = 12$.

Câu 8. Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có tối thiểu 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi x là điểm trung bình các môn học và y là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống này.

- A. $\begin{cases} x \geq 7 \\ y \geq 5 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 5 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x > 7 \\ y > 5 \end{cases}$.

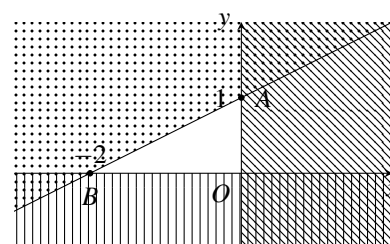
Câu 9. Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi x , y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau đây xác định số giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

- A. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 15 \\ 15x+10y \geq 100 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 15 \\ 15x+10y > 100 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 15 \\ 15x+10y \geq 100 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y > 15 \\ 15x+10y < 100 \end{cases}$.

Câu 10.

Miền tam giác OAB là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

- A. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x+2y \geq -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x-2y \geq 2 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-2y \geq -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x-2y \geq -2 \end{cases}$.

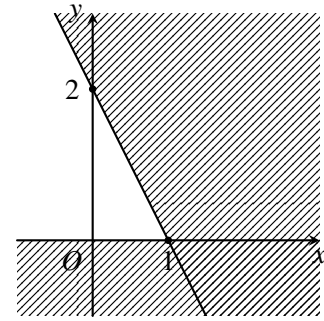


Câu 11.

Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?

A. $\begin{cases} y > 0 \\ x + 2y < 2 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x > 0 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$

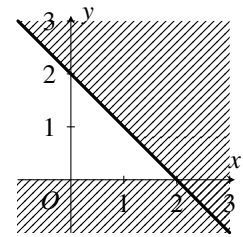
B. $\begin{cases} y > 0 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$
 D. $\begin{cases} x > 0 \\ x + 2y > 2 \end{cases}$



Câu 12. Phần mặt phẳng không bị gạch, kể cả phần biên của nó trên đường thẳng $y = 0$ trong hình vẽ bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào?

A. $\begin{cases} y \leq 0 \\ 2x + y > 1 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} 2x - 2y > 6 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y < 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$
 D. $\begin{cases} y \leq 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$



Câu 13. Xét x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức

$F = 3x + 2y$.

- A. $M = 8$. B. $M = 10$. C. $M = 6$. D. $M = 9$.

Câu 14. Xét x, y thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ 3x + 8y - 24 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$F(x; y) = x - y - 1$.

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 8.

Câu 15. Một công ty cần mua các tủ đựng hồ sơ. Có hai loại tủ: Tủ loại A chiếm 3 m^2 sàn, loại này có sức chứa 12 m^3 và có giá 7,5 triệu đồng; tủ loại B chiếm 6 m^2 sàn, loại này có sức chứa 18 m^3 và có giá 5 triệu đồng. Cho biết công ty chỉ thu xếp được nhiều nhất là 60 m^2 mặt bằng cho chỗ đựng hồ sơ và ngân sách mua tủ không quá 60 triệu đồng. Hãy lập kế hoạch mua sắm để công ty có được thể tích đựng hồ sơ lớn nhất.

- A. Mua 7 tủ loại A và 5 tủ loại B. B. Mua 5 tủ loại A và 9 tủ loại B.
 C. Mua 2 tủ loại A và 9 tủ loại B. D. Mua 9 tủ loại A và 5 tủ loại B.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 16 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 16. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Bộ số $(2; 1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.
 b) Bộ số $(3; 3)$ là một nghiệm của hệ đã cho.
 c) Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên là một đa giác có diện tích bằng 16.
 d) Xét tất cả bộ số (x, y) thỏa mãn hệ trên thì giá trị lớn nhất của biểu thức $2x + y$ bằng 8.

Câu 17. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 5 \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Bộ số $(0; 0)$ là một nghiệm của hệ đã cho.
- b) Bộ số $(2; 1)$ là một nghiệm của hệ đã cho.
- c) Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên là một đa giác có diện tích bằng 6.
- d) Xét tất cả bộ số (x, y) thỏa mãn hệ trên thì giá trị lớn nhất của biểu thức $2x + y$ bằng 7.

Câu 18. Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo. Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt bò và thịt heo có thể mua. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số đơn vị protein có được khi mua x kg thịt bò và y kg thịt heo là $800x + 600y$.
- b) Số đơn vị lipit có được khi mua x kg thịt bò và y kg thịt heo là $200x + 100y$.
- c) Số tiền phải trả (nghìn đồng) khi mua x kg thịt bò và y kg thịt heo là $250x + 200y$.
- d) Để đủ đáp ứng yêu cầu về dinh dưỡng mà lại tốn chi phí ít nhất thì người đó cần mua $\frac{2}{5}$ kg thịt bò và $\frac{4}{5}$ kg thịt heo.

Câu 19. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II phải dùng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số kg chất A chiết xuất được khi mua x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II là $140x + 9y$.
- b) Số kg chất B chiết xuất được khi mua x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II là $0,6x + 1,5y$.
- c) Số tiền phải trả (triệu đồng) khi mua x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II là $4x + 3y$.
- d) Để đáp ứng được yêu cầu đặt ra và chi phí mua nguyên liệu là ít nhất thì cần mua 4 tấn loại I và 5 tấn loại II.

Câu 20. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên dưới).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 - 18h00	20 000 đồng
14h00 - 22h00	22 000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 20h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Gọi x và y lần lượt là số nhân viên ca I và ca II. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $x \geq 6$.
- b) $x + y \leq 20$.
- c) Số tiền phải trả (nghìn đồng) khi thuê x nhân viên ca I và y nhân viên ca II là $20000x + 22000y$.

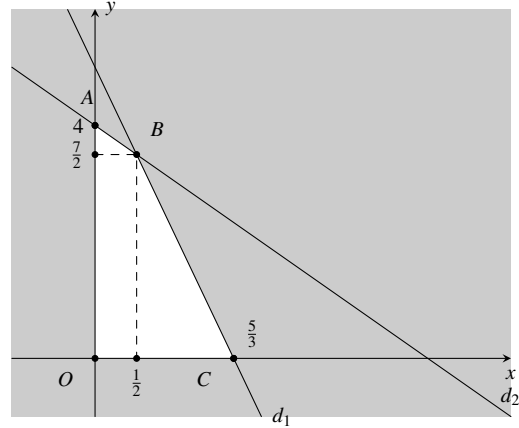
- d) Để đảm bảo nhà hàng hoạt động được và chi phí thuê nhân viên thấp nhất thì cần thuê 8 nhân viên ca I và 16 nhân viên ca II.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25 vào ô kết quả.

Câu 21.

Cho một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn có biểu diễn miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ như hình bên. Xét tất cả các bộ số (x, y) là nghiệm của hệ đã cho. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $3x + 2y$.

KQ:



Câu 22. Xét (x, y) là nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$
. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $5x - 2y$.

KQ:

Câu 23. Một nông trại thu hoạch được 180 kg cà chua và 15 kg hành tây. Chủ nông trại muốn làm các hũ tương cà để bán. Biết rằng, để làm ra một hũ tương cà loại A cần 10 kg cà chua cùng với 1 kg hành tây và khi bán lãi được 200 nghìn đồng, còn để làm được một hũ tương cà loại B cần 5 kg cà chua cùng với 0,25 kg hành tây và khi bán lãi được 150 nghìn đồng. Thăm dò thị hiếu của khách hàng cho thấy cần phải làm số hũ tương loại A ít nhất gấp 3,5 lần số hũ tương loại B. Số tiền lãi nhiều nhất (triệu đồng) mà chủ nông trại thu được là bao nhiêu?

KQ:

Câu 24. Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Tính số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng.

KQ:

Câu 25. Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là 150 m^2 (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích 3 m^2 /chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích 5 m^2 chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lý không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Chủ bãi xe có thể có doanh thu cao nhất là bao nhiêu nghìn đồng?

KQ:

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

A // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. D	2. B	3. D	4. C	5. A	6. D	7. C	8. A	9. C	10. C
11. B	12. A	13. B	14. D	15. B	16. B	17. C	18. D	19. C	20. D

Câu 21. a Đ b Đ c S d S	Câu 22. a S b S c S d S
Câu 23. a S b Đ c Đ d Đ	Câu 24. a Đ b S c Đ d S
Câu 25. a S b Đ c Đ d S	

B // ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. C	2. C	3. C	4. A	5. A	6. D	7. C	8. A	9. C	10. D
11. B	12. B	13. A	14. B	15. C					

Câu 16. a Đ b S c S d Đ	Câu 17. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 18. a Đ b S c Đ d Đ	Câu 19. a S b Đ c Đ d S
Câu 20. a Đ b S c S d Đ	

Câu 21. 8,5	Câu 22. -4	Câu 23. 3,4	Câu 24. 32	Câu 25. 1750
-------------	------------	-------------	------------	--------------

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. GIẢI TAM GIÁC

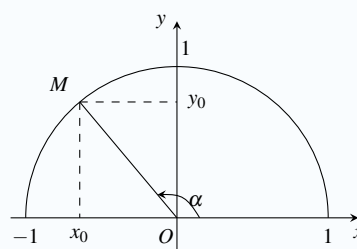
§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Giá trị lượng giác của một góc

🔧 **Định nghĩa:** Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định duy nhất một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$, khi đó ta có định nghĩa:

- sin của góc α là y_0 , kí hiệu $\sin \alpha$.
- cosin của góc α là x_0 , kí hiệu $\cos \alpha$.
- tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), kí hiệu $\tan \alpha$.
- cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), kí hiệu $\cot \alpha$.



🔧 **Bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt:**

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

• **Các công thức cơ bản:**

① $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$

② $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$

③ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha};$

④ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$

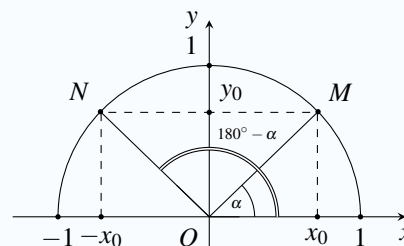
⑤ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$

⑥ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

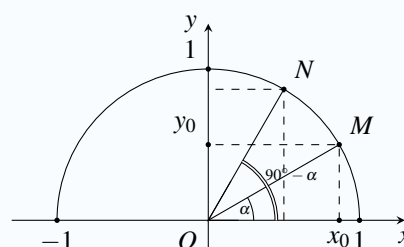
Hai góc bù nhau: Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^\circ - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

- ① $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- ② $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- ③ $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
- ④ $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$



Hai góc phụ nhau: Hình vẽ bên, hai điểm M và N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$)

- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$



B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

1

Giá trị lượng giác của góc α cho trước ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)

Ví dụ 1. Bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị, hãy tính các giá trị lượng giác của góc α với

- a) $\alpha = 60^\circ$. b) $\alpha = 90^\circ$. c) $\alpha = 120^\circ$. d) $\alpha = 135^\circ$.

Ví dụ 2. Bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị, hãy tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong các trường hợp sau:

- a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin \alpha = 1$

Ví dụ 3. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 120^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục tung. Tính giá trị của $\tan \widehat{xON}$.

DT

2

Tính giá trị biểu thức

Ví dụ 4. Tính giá trị biểu thức sau

- a) $A = 2\cos 30^\circ + 3\sin 120^\circ$. b) $B = a \cdot \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$.

Ví dụ 5. Biết $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức

a) $P = \sin 165^\circ + \cos 75^\circ$.

b) $Q = \cos 165^\circ + \cos 75^\circ$.

Ví dụ 6. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$; b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$;

c) $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$; d) $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$.

DT

3

Rút gọn, chứng minh biểu thức

Ví dụ 7. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

d) $\tan \alpha = 3$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ví dụ 8. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 0.

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. 2.

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là **đúng**?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$.

A. $P = \sqrt{3}$.

B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $P = 1$.

D. $P = 0$.

Câu 5. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.

B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$.

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$.

D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

Câu 6. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

B. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

D. $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Câu 8. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\tan \alpha = \cot \beta$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Câu 9. Tam giác ABC vuông ở A có góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Tính giá trị của $\sin \alpha \cos \alpha$.

- A. $\sin \alpha \cos \alpha = a^2$. B. $\sin \alpha \cos \alpha = 2a$.
C. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$. D. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục tung. Giá trị của $\tan \widehat{xON}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Biết $\sin \alpha = \frac{2}{7}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$. b) $\tan \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$.
c) $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{3\sqrt{5}}{7}$. d) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{7}$.

Câu 14. Biết $\cos x = -\frac{5}{13}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

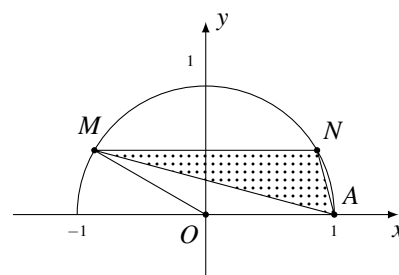
- a) $\sin x = \frac{12}{13}$. b) $\cot x = \frac{12}{5}$.
c) $\sin(180^\circ - x) = \frac{12}{13}$. d) $\cos(180^\circ - x) = -\frac{12}{13}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC , biết $\widehat{A}$ là góc tù. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- A. $\cos A < 0$. B. $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.
C. $\cos(A + B) = \cos C$. D. $\sin(A + B) = \sin C$.

Câu 16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\widehat{xOM} = 150^\circ$. Lấy N đối xứng với M qua trục tung. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\widehat{xON} = 45^\circ$. b) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
c) $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. d) $S_{\triangle MAN} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 20 vào ô kết quả.

Câu 17. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

KQ:

Câu 18. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

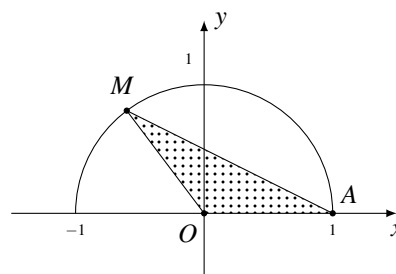
KQ:

Câu 19. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tích hoành độ và tung độ của điểm M bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\cos \widehat{xOM} = -\frac{3}{5}$. Diện tích của tam giác AOM bằng bao nhiêu?

KQ:



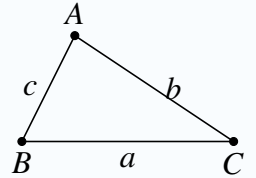
§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. GIẢI TAM GIÁC

A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Định lý cô-sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.



Áp dụng để tính góc:

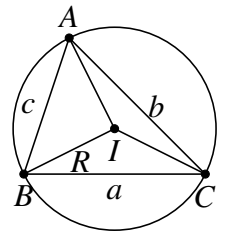
$$\textcircled{1} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \textcircled{2} \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \textcircled{3} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2 Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

 Ghi nhớ: Tỷ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.



3 Công thức tính diện tích tam giác

Gọi S là diện tích tam giác ABC . Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{1} S &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c. & \textcircled{2} S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ \textcircled{3} S &= \frac{abc}{4R}. & \textcircled{4} S &= p \cdot r \\ \textcircled{5} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

Trong đó:

- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

b) $\hat{A} = 120^\circ, AC = 8, AB = 5$

DT

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

b) $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ.$

d) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh lần lượt là 26, 28, 30.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 10. Tam giác ABC có $c = 3$, $b = 4$; $S = 3\sqrt{3}$.

- Tính độ dài BC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

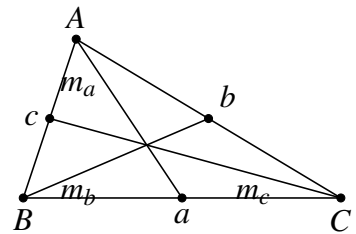
DT 4 Tổng hợp chứng minh, tính toán

Công thức độ dài đường trung tuyến: Cho tam giác ABC có m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C . Ta có

$$\bullet m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

$$\bullet m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$\bullet m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC .

Ví dụ 12. Tam giác ABC có $b = 6$, $c = 8$ và $m_a = 5$. Tính $a, \hat{A}$.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có $a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$. Tính số đo góc A .

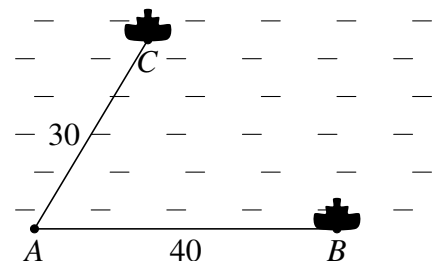
Ví dụ 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$ thỏa $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh $60^\circ < \hat{A} < 90^\circ$.

Ví dụ 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \sin B = c \sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

DT 5 Một số bài toán thực tiễn

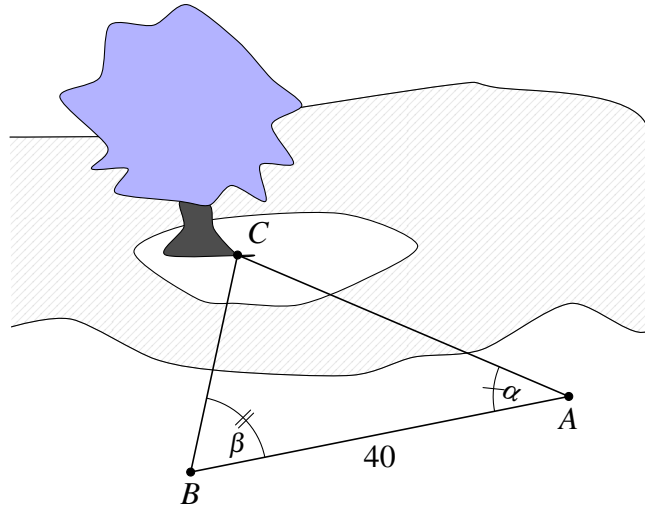
Ví dụ 16.

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý?



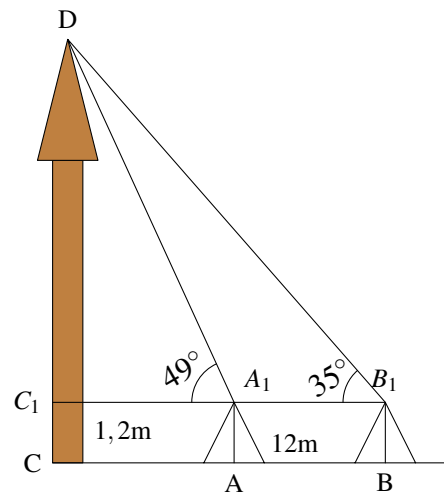
Ví dụ 17.

Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Tính độ dài AC .



Ví dụ 18.

Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế có chiều cao $h = 1,2$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Chiều cao CD của tháp gần với kết quả nào nhất.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$ cm, $b = 2$ cm và $\widehat{C} = 30^\circ$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

2 Cho tam giác ABC có $a = 24$ cm, $b = 26$ cm, $c = 30$ cm.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

3 Giải tam giác ABC , biết

- $a = b = 6$; $\widehat{C} = 54^\circ$
- $c = 7$; $b = 23$; $\widehat{A} = 130^\circ$
- $c = 14$; $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 40^\circ$
- $b = 35$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 120^\circ$

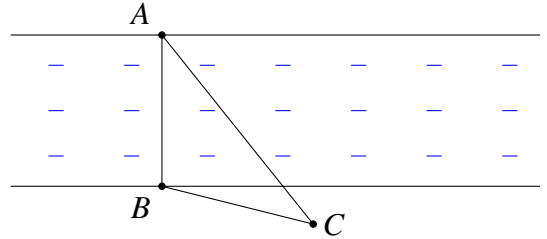
e) $a = 14; b = 18; c = 20$

f) $a = 6; b = 7,3; c = 4,8$

4 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.

5 Tam giác ABC có $AB = c; BC = a; CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

6 Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C . Sau đó, đo khoảng cách BC , các góc B và C . Biết rằng $BC = 200$ m, $\widehat{B} = 107^\circ, \widehat{C} = 28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



7 Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 7 m. Từ một vị trí quan sát A cao 10 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 75° và 45° so với phương nằm ngang.

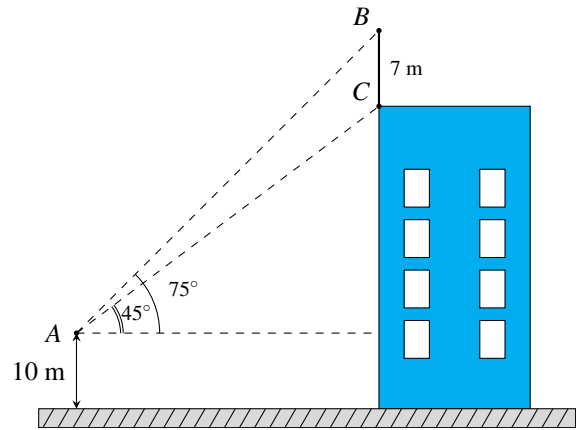
a) Tính các góc của tam giác ABC .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

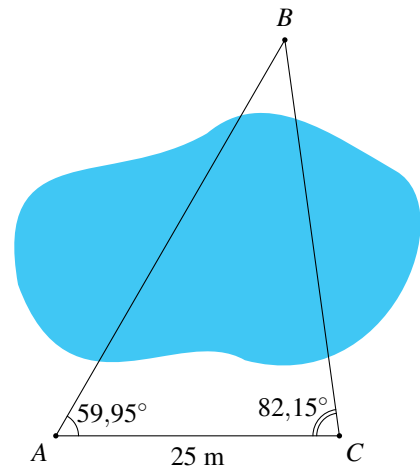
Đáp số:

• $\widehat{A} = 15^\circ; \widehat{B} = 45^\circ; \widehat{C} = 120^\circ$.

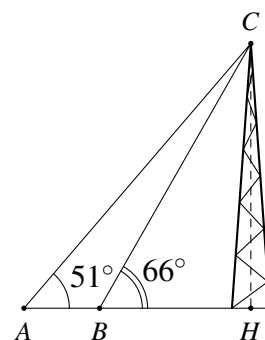
• $h = 23,5$ m.



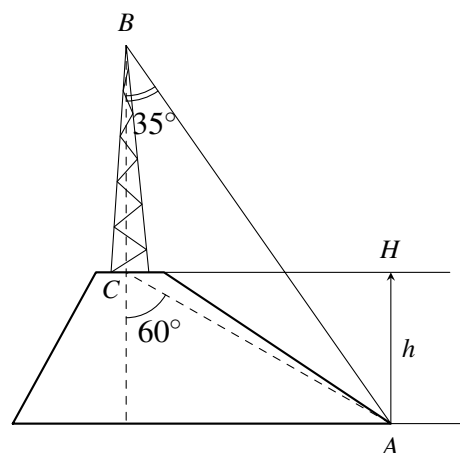
8 Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA . Biết $AC = 25$ m, $\widehat{BAC} = 59,95^\circ, \widehat{BCA} = 82,15^\circ$ (hình vẽ bên). Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



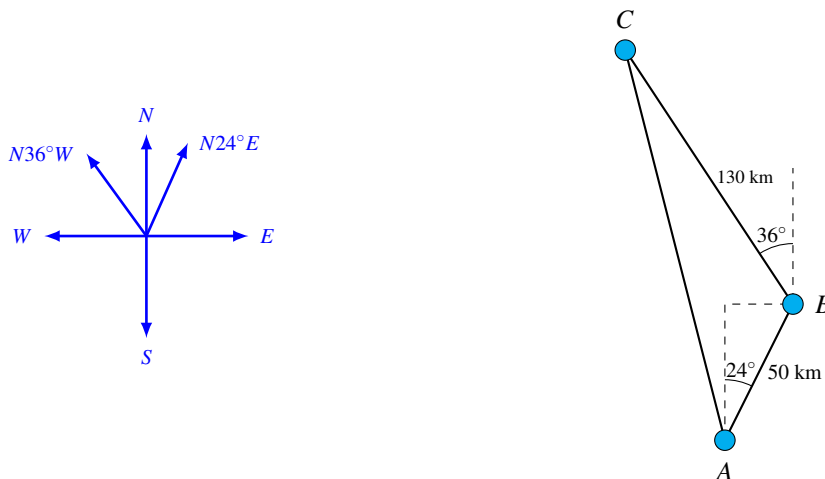
- 9 Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^\circ$, $\widehat{CBH} = 66^\circ$ và $AB = 75$ m, tính chiều cao của tháp.



- 10 Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười).

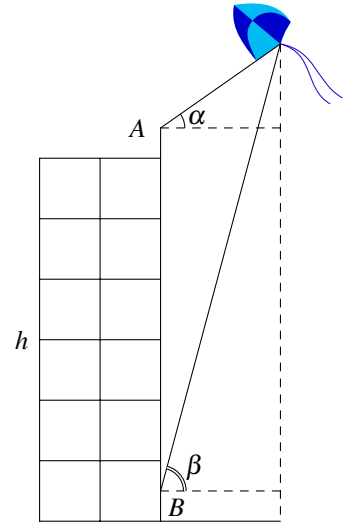


- 11 Một tàu cá xuất phát từ đảo A , chạy 50 km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyển hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130 km đến ngư trường C .



- a) Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).
- b) Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).
- 12 Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômét?

- 13 Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất tới mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20$ m (minh họa ở hình bên). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



§1. KHÁI NIỆM VECTƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Khái niệm vectơ

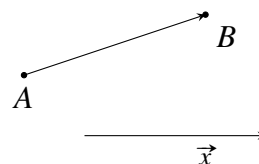
Cho đoạn thẳng AB . Nếu chọn điểm A làm điểm đầu, điểm B làm điểm cuối thì đoạn thẳng AB có hướng từ A đến B . Khi đó ta nói AB là một **đoạn thẳng có hướng**.

⚙ Định nghĩa:

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

⚙ Chú ý:

- Nếu chỉ rõ điểm đầu là A và điểm cuối là B , ta có "vectơ AB ", kí hiệu $\overrightarrow{AB}$. Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối, ta dùng các chữ cái thường để kí hiệu. Ví dụ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \dots$
- Độ dài $\vec{a}$, kí hiệu $|\vec{a}|$; Độ dài $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$ và hiển nhiên $|\overrightarrow{AB}| = AB$.



2 Vectơ cùng phương, cùng hướng

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ đó.

- ⚙ Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- ⚙ Khi hai vectơ cùng phương, chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

3 Vectơ bằng nhau

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$ nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

4 Vectơ-không

- ⚙ **Định nghĩa:** Là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

- Kí hiệu $\vec{0}$, nghĩa là $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \dots$;
- Độ dài vectơ-không bằng 0, nghĩa là $|\vec{0}| = 0$.

 **Qui ước:** Vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

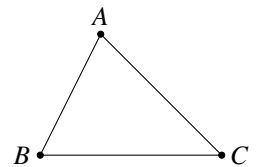
DT

1

Xác định vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ ngược hướng

≡ Ví dụ 1.

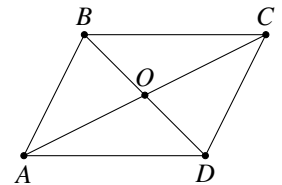
Cho tam giác ABC . Hãy kể tên các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C .



≡ Ví dụ 2.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình bên,

- Kể tên 2 vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$.
- Kể tên vectơ cùng hướng, ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{OB}$.



DT

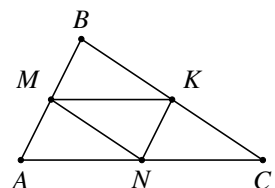
2

Vectơ bằng nhau

≡ Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

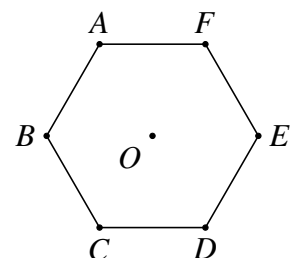
- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{AM}$.
- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{KN}$.



≡ Ví dụ 4.

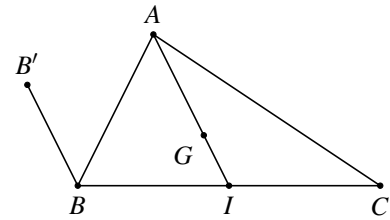
Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{EF}$.
- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{OB}$.



≡ Ví dụ 5.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Đặt điểm B' thỏa $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.



- Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$
- Gọi K là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG}$.

DT

3

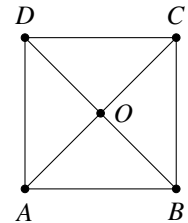
Độ dài véc tơ

Độ dài $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB . Khi tính toán, ta có thể chú ý đến định lý Pitago và các tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

Ví dụ 6.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng 2.

- Tính độ dài của các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Tính độ dài véc tơ $\overrightarrow{AI}$.



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng 3. Gọi H là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC .

- Hãy tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{AH}$
- Hãy tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{AG}$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Véc-tơ có điểm đầu M và điểm cuối N được kí hiệu như thế nào là đúng?

- A. MN . B. NM . C. $\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{mn}$.

Câu 2. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

- A. 2. B. 6. C. 13. D. 12.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
- Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng.
- Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

Câu 4. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

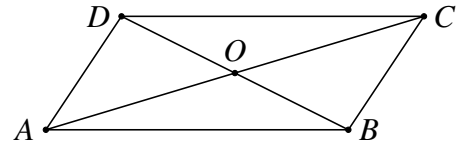
- A. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Câu 5. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Khẳng định nào sau đây là sai?

- $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BA}$.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình vẽ, số véc-tơ (khác $\vec{0}$, khác $\vec{AC}$) cùng phương với véc-tơ $\vec{AC}$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Câu 7. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$ cùng phương. B. $\vec{MA} = \vec{MB}$.
C. $|\vec{AB}| = |\vec{MB}|$. D. $\vec{AB}$ và $\vec{MB}$ ngược hướng.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC , mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $\vec{AC}$ không cùng phương $\vec{BC}$. B. $\vec{AB} = \vec{BC}$.
C. $\vec{AC} \neq \vec{BC}$. D. $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$.

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là I . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{IC} = \vec{DI}$. B. $\vec{AI} = \vec{IC}$. C. $\vec{BI} = \vec{DI}$. D. $\vec{IA} = \vec{BI}$.

Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AB} = \vec{DC}$ và $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình thoi. C. Hình chữ nhật. D. Hình vuông.

Câu 11. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\vec{AB} = \vec{DC}$, phát biểu nào sau đây là **sai**?

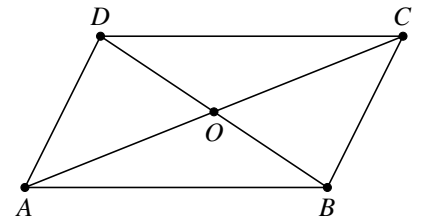
- A. $AB = CD$.
B. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ là hai véc-tơ cùng hướng.
C. AC và BD nhận cùng một điểm làm trung điểm.
D. $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 12. Cho tam giác ABC , gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{MN}$ và $\vec{AC}$ cùng phương. B. $\vec{MN}$ và $\vec{BC}$ cùng phương.
C. $\vec{MN}$ và $\vec{AB}$ cùng phương. D. $\vec{MN}$ và $\vec{BN}$ cùng phương.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{AB} = \vec{CD}$. B. $\vec{OA} = \vec{OC}$.
C. $\vec{OB} = \vec{OD}$. D. $\vec{AD} = \vec{BC}$.

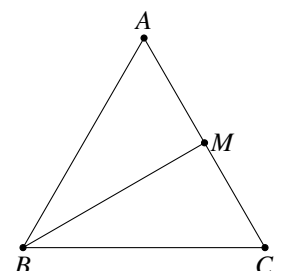


Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai véc-tơ nào ngược hướng?

- A. $\vec{AB}$ và $\vec{DB}$. B. $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$. C. $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$. D. $\vec{AB}$ và $\vec{DC}$.

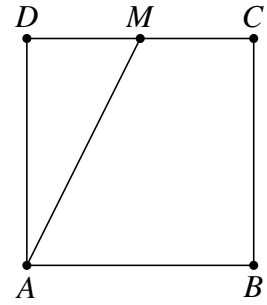
Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh a , có trung tuyến BM . Độ dài của $\vec{BM}$ là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD . Tính độ lớn của vec tơ $\overrightarrow{AM}$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.
 C. $\frac{3a}{2}$.
 D. $\frac{5a}{2}$.



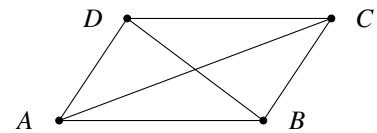
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{QK}$ là cùng phương .
 b) $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KQ}$.
 c) $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{QK}|$.
 d) $\overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{QK}$ là ngược hướng .

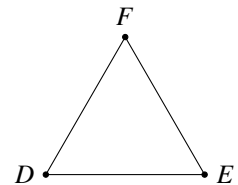
Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là cùng hướng .
 b) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.
 c) $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}|$.
 d) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.



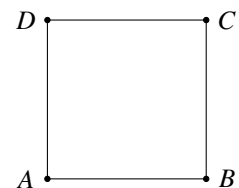
Câu 19. Cho tam giác đều DEF . Gọi M là trung điểm của đoạn DE . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF}$.
 b) $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD}$.
 c) $\overrightarrow{ME}$ cùng phương với $\overrightarrow{ED}$.
 d) $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}|$.



Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a , I là điểm trên cạnh BC thỏa $CI = \frac{1}{2}IB$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

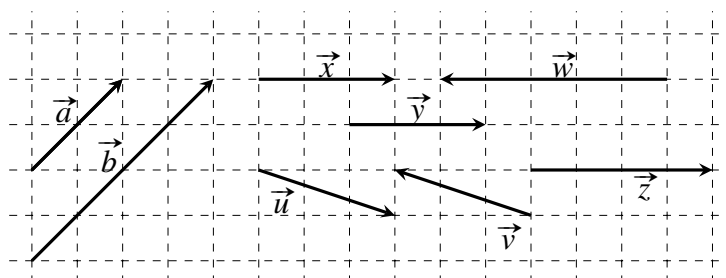
- a) $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là ngược hướng .
 b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
 c) $|\overrightarrow{AC}| = 2a$.
 d) $|\overrightarrow{AI}| = \frac{\sqrt{13}a}{3}$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 21. Cho các véc-tơ như hình vẽ. Có bao nhiêu cặp véc-tơ cùng phương xuất hiện trong hình?

KQ:



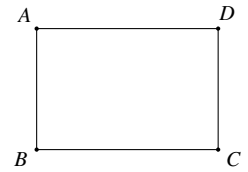
Câu 22. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AC}$. (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

KQ:

Câu 23.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 3$, $BC = 4$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{DB}$ bằng bao nhiêu?

KQ:



Câu 24. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

KQ:

Câu 25. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 8. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm của AG . Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AI}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu?

KQ:

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

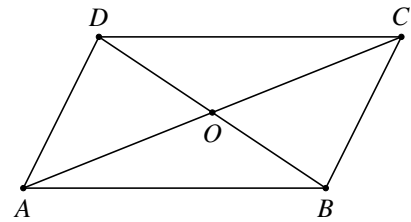
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Vector bằng nhau, vector đối nhau

- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** và **cùng hướng**.
- Hai vectơ đối nhau nếu chúng có cùng **độ lớn** nhưng **ngược hướng**.

Ví dụ: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có vài kết quả sau

- Các vectơ bằng nhau: $\vec{AB} = \vec{DC}$; $\vec{AD} = \vec{BC}$; $\vec{AO} = \vec{OC}$; $\vec{DO} = \vec{OB}$,...
- Các vectơ đối nhau: $\vec{AB}$ đối $\vec{CD}$; $\vec{BC}$ đối $\vec{DA}$; $\vec{OA}$ đối $\vec{OC}$; $\vec{OB}$ đối $\vec{OD}$,...



Hình 1

2 Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

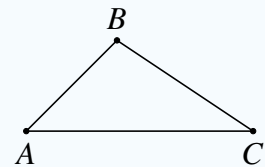
⚙ Quy tắc 3 điểm:

Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

- Dấu hiệu nhận biết là "điểm liên tiếp nhau".
- Các hệ thức tương tự

$$\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$$

$$\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$$



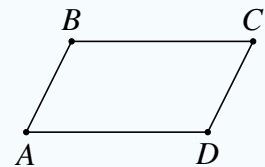
⚙ Quy tắc hình bình hành:

Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

- Dấu hiệu nhận biết là "cùng gốc".
- Các hệ thức tương tự

$$\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$$

$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$$



⚙ Quy tắc cộng vectơ đối:

- Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
- Trong Hình 1 ở trên, ta có

$$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{0}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$$

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

3 Phép toán hiệu hai vectơ

⚙ Vectơ đối:

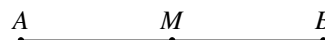
- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\vec{AB}$ là $\vec{BA}$, nghĩa là $-\vec{AB} = \vec{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙ **Quy tắc trừ:** Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

4 Công thức trung điểm, trọng tâm

⚙ Công thức trung điểm:

- Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$.
- Tương tự $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$.

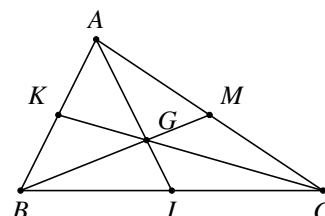


⚙ Công thức trọng tâm:

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

- Tương tự $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.



B

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

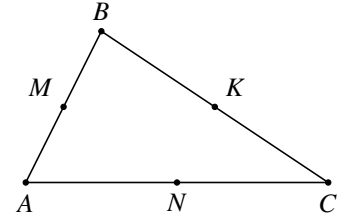
1

Thực hiện phép toán cộng, trừ hai vectơ

- ⚙ Nếu hai vectơ được sắp xếp thỏa mãn một trong các quy tắc (ba điểm, hình bình hành, vectơ đối), thì ta tiến hành phép cộng theo quy tắc tương ứng.
- ⚙ Nếu hai vectơ được sắp xếp chưa thỏa mãn quy tắc (điểm chưa liên tiếp, chưa cùng gốc), thì ta tiến hành dời:
 - Đề không cho hình vẽ (điểm bất kì), ta dùng quy tắc 3 điểm để chèn điểm vào.
 - Đề cho hình vẽ (tam giác, hình bình hành,...), ta dùng vectơ bằng nhau, thay vectơ này bởi vectơ khác bằng với nó sao cho có thể ghép được "quy tắc cộng" với các vectơ còn lại.

Ví dụ 1.

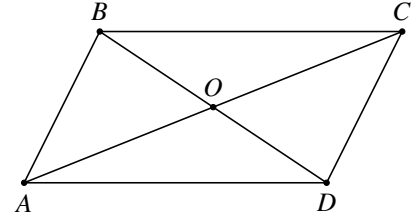
Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .



- Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{MK}$.
- Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$.
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}$.

Ví dụ 2.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

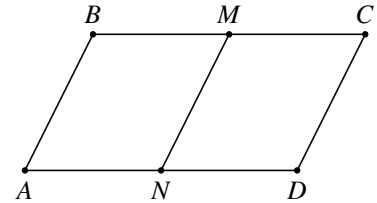


- Tìm vectơ bằng với $\overrightarrow{OC}$.
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 3.

Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định vectơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}, & \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}, \\ \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM}, & \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}. \end{aligned}$$



DT

2

Chứng minh một đẳng thức vectơ

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

- Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.
- Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

Ví dụ 4. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 5. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$;
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$;
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF, ACPQ, BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$.

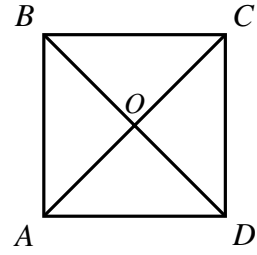
Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM .

- Chứng minh $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$;

- a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AM}$.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Tính

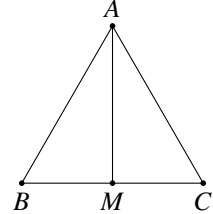
- $|\vec{AB} + \vec{BC}|$.
- $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.
- $|\vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC}|$.



Ví dụ 13.

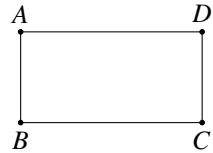
Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , G là trọng tâm tam giác ABC .

- Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} - \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{AC}$ theo a .
- Tính độ dài véc-tơ $\vec{AB} + \vec{AG}$ theo a .



Ví dụ 14.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$, $BC = 3$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$, $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.



DT

4

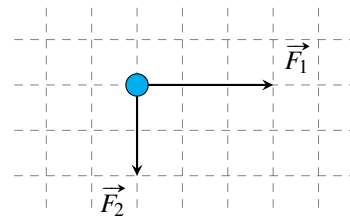
Ứng dụng của vector trong vật lý

Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

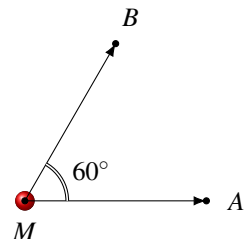
Ví dụ 15.

Cho hai lực đồng quy $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ như hình vẽ. Biết độ lớn của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.



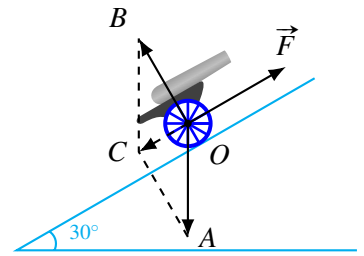
Ví dụ 16.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



Ví dụ 17.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1 Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng
- $\vec{DO} + \vec{AO} = \vec{AB}$.
 - $\vec{CO} - \vec{BO} = \vec{BA}$.
 - $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$.
 - $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$.
 - $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$.
 - $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

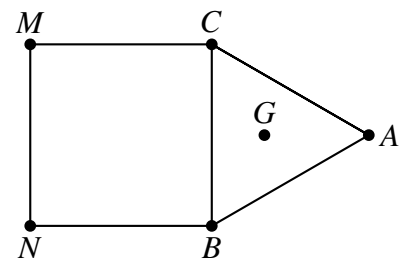
- 2 Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G . Chứng minh rằng

- $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}$.
- $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{GA} = \vec{CB} + \vec{ED} + \vec{GF}$.
- $\vec{AB} - \vec{AF} + \vec{CD} - \vec{CB} + \vec{EF} - \vec{ED} = \vec{0}$.

- 3 Cho hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G . Chứng minh $\vec{BE} = \vec{FC}$.

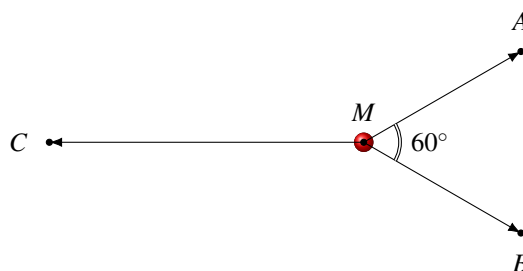
- 4 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\vec{AD} + \vec{AB}|$ theo a .

- 5 Cho tam giác ABC đều cạnh a , dựng hình vuông $BCM N$ như hình vẽ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính theo a độ dài véc-tơ $\vec{u} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GM} + \vec{GN}$.



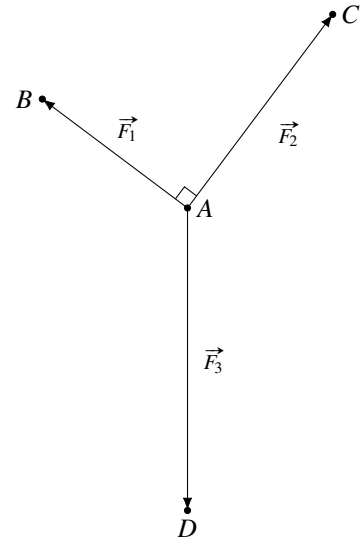
- 6 Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của vectơ tổng $\vec{GB} + \vec{GC}$.

- 7 Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng điểm đặt M , cùng tác động vào một vật và vật đó đứng yên (như hình vẽ).



Biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 30 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính cường độ của lực $\vec{F}_3$.

- 8 Trên hình bên biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết $|\vec{F}_1| = 30N, |\vec{F}_2| = 40N$. Tính cường độ của lực $\vec{F}_3$.



§3. TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ THỰC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa

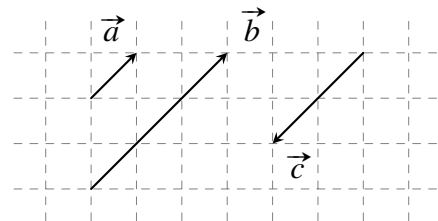
Cho số thực $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số thực $k > 0$ là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, **cùng hướng** với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$

Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số thực $k < 0$ là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, **ngược hướng** với $\vec{a}$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$

Ví dụ: Theo hình vẽ bên, thì $\vec{b} = 3\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{a}$; $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.

⚠ Quy ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.



2 Điều kiện để hai vector cùng phương

- ① Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ② Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

3 Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (k \cdot t)\vec{a}$.
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$.
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

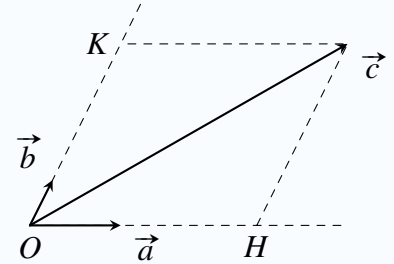
4 Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

- Giả sử $\vec{OH} = h\vec{a}$ và $\vec{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



B

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

1

So sánh hai vectơ theo tỉ số k tương ứng

✍ Muốn so sánh được 2 vectơ theo một tỉ số $k \neq 0$ tương ứng thì giá của hai vectơ đó phải song song hoặc trùng nhau.

✍ Xét hai vectơ cùng phương $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$.

- Bước 1. Tính tỉ lệ đoạn thẳng $\frac{AB}{CD} = m$.
- Bước 2. Xem xét, nếu
 - $\vec{AB}$ cùng hướng với $\vec{CD}$ thì $\vec{AB} = m\vec{CD}$.
 - $\vec{AB}$ ngược hướng với $\vec{CD}$ thì $\vec{AB} = -m\vec{CD}$.

≡ **Ví dụ 1.** Cho đoạn thẳng AB và M là trung điểm của đoạn AB . Tìm số k trong các đẳng thức sau:

- a) $\vec{AB} = k\vec{MB}$.
- b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$.
- c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$.
- d) $\vec{MB} = k\vec{AB}$.

≡ **Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC . Tìm số k trong các đẳng thức sau:

- a) $\vec{AG} = k\vec{MG}$.
- b) $\vec{AM} = k\vec{GA}$.
- c) $\vec{GM} = k\vec{GA}$.
- d) $\vec{GM} = k\vec{AM}$.

DT

2

Chứng minh đẳng thức vector

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh

- a) $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$; b) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$;
c) $\vec{AB} + \vec{OD} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{0}$; d) $\vec{GA} + \vec{GC} = \frac{1}{3}\vec{BD}$.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- a) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$; b) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC Gọi M là trung điểm BC , D là trung điểm AM ; O là điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

- a) $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$; b) $\vec{BA} + \vec{BM} + 2\vec{DB} = \vec{0}$;
c) $2\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$; d) $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 4\vec{OD}$.

Ví dụ 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD . Chứng minh

- a) $2\vec{IJ} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$; b) $\vec{AD} + \vec{BD} + \vec{AC} + \vec{BC} = 4\vec{IJ}$.

Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BD . Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng

- a) $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$; b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OI}$

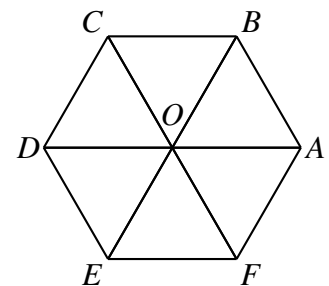
Ví dụ 8. Cho ΔABC . Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC, CA ; G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

- a) $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CK} = \vec{0}$; b) $\vec{AK} + \vec{CN} + \vec{BM} = \vec{0}$;
c) $\vec{AN} + \vec{BK} + \vec{CM} = \vec{0}$; d) $\vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GK} = \vec{0}$.

Ví dụ 9.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

- a) Chứng minh $\vec{CD} + \vec{AO} - \vec{AB} = \vec{BE}$.
b) Chứng minh $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AF} = 2\vec{AD}$.
c) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RS} = \vec{0}$.



DT

3

Phân tích (biểu diễn) một vector theo hai vector không cùng phương cho trước

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $\vec{MB} = -3\vec{MC}$. Phân tích vectơ $\vec{AM}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC , D là trung điểm AM . Phân tích $\vec{AD}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi I là trung điểm BO . Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF .

- a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ theo $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$.
b) Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GC}$ theo $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$.

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là điểm trên đoạn AC sao cho $NA = 2NC$, K là trung điểm của MN .

- a) Phân tích $\overrightarrow{AK}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b) Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

DT**4****Tìm điều kiện hoặc chứng minh tính chất song song, thẳng hàng**

Ví dụ 15. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh $DE \parallel AM$.

Ví dụ 16. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Ví dụ 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle BMN$. Gọi M, N là điểm sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

- a) Phân tích $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo 2 vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
b) Gọi I là điểm trên BC sao cho $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ Tìm k để A, G, I thẳng hàng.

DT**5****Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức vectơ cho trước**

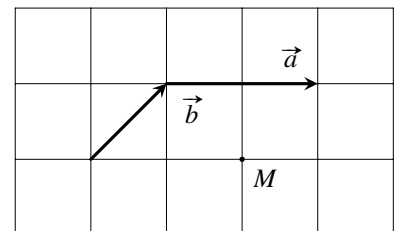
Ví dụ 18. Cho tam giác ABC . Hãy xác định các điểm I, J, K, L thỏa các đẳng thức sau

- a) $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.
b) $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
c) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$.
d) $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

C**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1 Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và một điểm M như hình bên

- a) Hãy vẽ các véc-tơ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}, \overrightarrow{MP} = -2\vec{b}$.
b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1. Tính $|5\vec{a}|, |-5\vec{b}|$.



2 Lấy một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

- a) I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

3 Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm K sao cho $3\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$.

4 Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G , M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

a) $2\vec{AC} - \vec{AB} = 3\vec{AI}$. b) $2\vec{AB} + 3\vec{AC} = 6\vec{IC}$. c) $\vec{AC} - 5\vec{AB} = 6\vec{MI}$.

5 Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA}$.

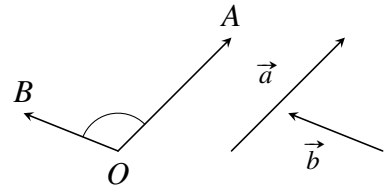
- a) Chứng minh rằng $3\vec{AP} - 2\vec{AC} = \vec{0}$
 b) Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.
 c) Chứng minh 3 đường AC, BD và MN đồng quy.

§4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Góc giữa hai vectơ:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.



- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$; $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Trường hợp có ít nhất $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc của chúng là tùy ý (từ 0° đến 180°)

2 Tích vô hướng của hai vectơ:

Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Lưu ý:

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$. Ta có:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

3 Tính chất của tích vô hướng:

Với ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT 1 Tính tích vô hướng bằng định nghĩa

Chú ý các công thức sau đây:

- ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- ② $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A$.
- ③ AB vuông góc với CD khi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính các tích vô hướng

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$. c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$. c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức sau

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$. c) $\vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{AD})$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

- a) Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A .
 b) Tính $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
 c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\vec{CD} \cdot \vec{CB}$.

DT 2 Ứng dụng tích vô hướng để tính toán độ dài, tính góc

Tính độ dài: Chú ý công thức $\vec{AB}^2 = AB^2$. Khi muốn tính độ dài AB , ta phân tích vectơ $\vec{AB}$

theo hai vec tơ khác (để tính độ lớn và góc), sau đó bình phương vô hướng 2 vế.

Tính góc:

$$\textcircled{1} \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\textcircled{2} \cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}.$$

$$\textcircled{3} AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0.$$

Ví dụ 5. Cho hai vec tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ vuông góc và có độ dài bằng 1. Tính góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}.$

b) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j}.$

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3a, AC = a, \hat{A} = 60^\circ$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Suy ra độ dài cạnh BC và độ dài đường trung tuyến AM .

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $DM \perp AN$.

Ví dụ 8. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

a) Phân tích $\vec{DN}, \vec{MN}$ theo 2 vec-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AD}$.

b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Ví dụ 9. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vec-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

DT

3

Chứng minh một đẳng thức liên quan đến tích vô hướng

Ví dụ 10. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\vec{OI} \cdot \vec{IA} + \vec{OI} \cdot \vec{IB} = 0.$

b) $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{OB}^2 - \vec{OA}^2).$

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0.$

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$

DT

4

Tìm tập hợp điểm

Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- Nếu $|\vec{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .

- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 12. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

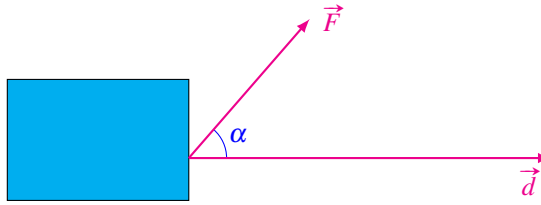
Ví dụ 13. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

DT**5****Ứng dụng tích vô hướng trong thực tế**

Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$: Tác dụng một lực $\vec{F}$ vào một vật và làm cho vật đó dịch chuyển theo véc-tơ $\vec{d}$ thì sẽ sinh ra một công là A (đơn vị J) được tính theo công thức

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha.$$

Trong đó α là góc giữa hai véc-tơ $\vec{F}$ và $\vec{d}$.



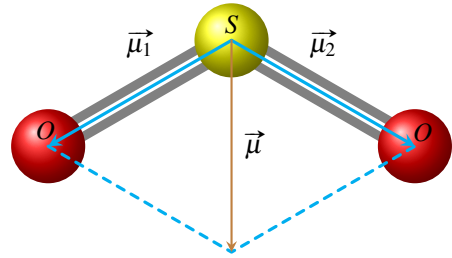
Ví dụ 14. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một véc-tơ $\vec{d}$ có độ dài 50 m và cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $\widehat{BAC} = 135^\circ$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, góc $\widehat{BAC}$ bằng 120° . Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$.
 - Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AE}$.
 - Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC .
- Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của CD . Tính
 - $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$.
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- Cho hai véc-tơ $\vec{i}, \vec{j}$ vuông góc, cùng có độ dài bằng 1. Cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

- 7 Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.
- 8 Cho tam giác ABC đều cạnh a . Trên 3 cạnh AB , BC , AC lần lượt lấy ba điểm M , N , P sao cho $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AP} = x \cdot \vec{AC}$ với $x > 0$.
- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
 - Chứng minh rằng: $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$.
 - Tìm x để MP vuông góc với AN .

- 9 Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120° . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các véc-tơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$ có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết véc-tơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2 . Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Hình 6

- 10 Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$ và $\widehat{BAD} = 30^\circ$.
- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
 - Tính độ dài hai đường chéo AC và BD .
 - Tính $\cos(\vec{AC}, \vec{BD})$.

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

§1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là **số gần đúng**, kí hiệu là a .

Ví dụ: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 3. Khi đó, độ dài đường chéo hình vuông được tính theo công thức là $\boxed{\text{cạnh} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}}$.

- Kết quả $3\sqrt{2}$ là số đúng khi tính đường chéo hình vuông.
- Các kết quả 4,2; 4,24; 4,23; ... là các số gần đúng.

2 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

⚙ **Sai số tuyệt đối:** Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $\Delta_a = |a - \bar{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\bar{a}$ và số gần đúng a , được gọi là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a .

- Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên cũng không biết được Δ_a . Tuy nhiên ta có thể đánh giá được $\Delta_a \leq d$, với d là một số dương nào đó.
- Nếu $\Delta_a \leq d$ thì $|a - \bar{a}| \leq d \Leftrightarrow a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Khi đó, ta có thể viết $\bar{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.
- Với d càng nhỏ thì a càng gần $\bar{a}$ nên d gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

⚙ **Sai số tương đối:** Sai số tương đối của số gần đúng a , kí hiệu là δ_a và được tính bởi công thức $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

- Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$, suy ra $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo càng cao.
- Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3 Quy tròn số gần đúng

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là **số quy tròn**. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

Quy tắc quy tròn số:

① Đối với chữ số hàng làm tròn:

- + Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
- + Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.

② Đối với chữ số sau hàng làm tròn:

- + Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
- + Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

Nhận xét:

- ① Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- ② Khi quy tròn số đúng $\bar{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Ví dụ, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.
- ③ Cho số gần đúng a với độ chính xác d . Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT 1 Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Cho $\bar{a}$ là số đúng và a là số gần đúng của $\bar{a}$.

- ① Sai số tuyệt đối được tính theo công thức: $\Delta_a = |a - \bar{a}|$.
- ② Sai số tương đối được tính theo công thức: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.
- ② Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì
 - Số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.
 - Đánh giá sai số tương đối $\delta_a \leq \frac{d}{|a|}$.

 **Ví dụ 1.** Một bao gạo ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg.

- a) Xác định khối lượng đúng, khối lượng gần đúng và độ chính xác của bao gạo.
- b) Khối lượng thực của bao gạo nằm trong đoạn nào?

 **Ví dụ 2.** Giả sử khối lượng đúng của một hộp kẹo là 0,85 kg. Bình và An cân hộp kẹo này và ghi nhận kết quả lần lượt là 0,8 kg và 1 kg.

- a) Tìm sai số tuyệt đối của kết quả cân của mỗi bạn.

b) Kết quả cân của bạn nào chính xác hơn? Vì sao?

Ví dụ 3. Cho $\bar{a} = \sqrt[19]{19} - \sqrt[23]{23}$. Số nào trong ba số sau : $\frac{1}{50}$, $\frac{7}{33}$ và $\frac{8}{37}$ xấp xỉ tốt nhất giá trị của $\bar{a}$.

Ví dụ 4. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$. Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu.

Ví dụ 5. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số $a = 123456$ biết sai số tương đối $\delta_a = 0,2\%$.

DT 2 Quy tròn số gần đúng

Ví dụ 6. Viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

a) $\sqrt{3}$.

b) π^2 .

Ví dụ 7. Biết $\sqrt{7} = 2,6457513 \dots$

a) Làm tròn kết quả đến phần mười và ước lượng sai số tuyệt đối.

b) Làm tròn kết quả đến phần nghìn và ước lượng sai số tuyệt đối.

Ví dụ 8. Cho biết $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$. Hãy quy tròn $\sqrt{3}$ đến hàng phần trăm và ước lượng sai số tương đối.

Ví dụ 9. Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây:

a) $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

b) $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

Ví dụ 10. Cho số gần đúng $a = 6547$ với độ chính xác $d = 100$. Hãy viết số quy tròn của số a và ước lượng sai số tương đối của số quy tròn đó.

Ví dụ 11. Biết số gần đúng $a = 173,4592$ có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,01. Hãy viết số qui tròn của số a .

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 12. Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được $250 \pm 0,2m$. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được $15 \pm 0,1m$. Trong hai bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn tính theo sai số tương đối?

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh đo được như sau $a = 12\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $b = 10,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $c = 8\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$. Tính chu vi P của tam giác và đánh giá sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số gần đúng của chu vi qua phép đo.

Ví dụ 14. Hai kỹ thuật viên trắc địa tham gia đo diện tích của một thửa đất hình tam giác. Người thứ nhất đo đáy tam giác với kết quả 65,58 (m) với sai số tương đối là 1%. Người thứ hai đo đường cao tương ứng của tam giác với kết quả 47,39 (m) với sai số tương đối là 3%. Hãy tính diện tích của tam giác và viết kết quả dưới dạng chuẩn.

§2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN CÁC BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Biểu diễn dữ liệu trên các bảng và bằng biểu đồ cho ta cái nhìn trực quan về dữ liệu. Từ đó, tiến hành các thao tác đối chiếu, so sánh hoặc phát hiện ra những điều không hợp lý của mẫu số liệu.

1 Bảng số liệu

Ví dụ 1

Trong 6 tháng đầu năm, số sản phẩm bán ra mỗi tháng của một cửa hàng đều tăng khoảng 20% so với tháng trước đó. Biết rằng, trong bảng dưới đây, số sản phẩm bán ra của một tháng bị nhập sai. Hãy tìm tháng đó.

Tháng	1	2	3	4	5	6
Số sản phẩm bán ra	145	175	211	256	340	371

Hướng dẫn giải:

Tỉ lệ phần trăm tăng thêm của số sản phẩm bán ra mỗi tháng được tính như sau:

- Tháng thứ 2: $\frac{175 - 145}{1,45} = 20,7\%$.
- Tháng thứ 3: $\frac{211 - 175}{1,75} = 20,6\%$.
- Tháng thứ 4: $\frac{256 - 211}{2,11} = 21,3\%$.
- Tháng thứ 5: $\frac{340 - 256}{2,56} = 32,8\%$.
- Tháng thứ 6: $\frac{371 - 340}{3,40} = 9,1\%$.

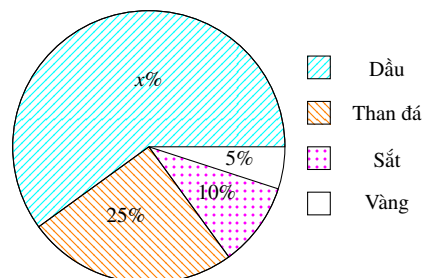
Ta thấy tỉ lệ tăng của tháng 5 và tháng 6 đều khác xa 20%. Do đó trong bảng số liệu đã cho, số sản phẩm của tháng 5 là không chính xác dẫn đến số liệu tháng 6 bị sai.

2 Biểu đồ

Ví dụ 2

Biểu đồ sau mô tả tỉ lệ về giá trị đạt được của khoáng sản xuất khẩu nước ngoài của nước ta.

- Dựa vào biểu đồ, cho biết loại khoáng sản nào đạt giá trị xuất khẩu lớn nhất?
- Biết rằng giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu là 450 triệu USA. Hỏi giá trị xuất khẩu vàng là bao nhiêu triệu USA?



Hướng dẫn giải:

a) Hình quạt biểu diễn giá trị đạt được của khoáng sản dầu là lớn nhất nên loại khoáng sản đạt giá trị xuất khẩu lớn nhất là dầu.

b) Tỷ lệ phần trăm của dầu là $100\% - 25\% - 10\% - 5\% = 60\%$.

Suy ra giá trị xuất khẩu của vàng là $\frac{450}{60} \cdot 5 = 37,5$ triệu USA.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN**DT****1****Phát hiện số liệu sai trên bảng số liệu hoặc trên biểu đồ**

Ví dụ 1. Một đội 20 thợ thủ công được chia đều vào 5 tổ. Trong một ngày, mỗi người thợ làm được 4 hoặc 5 sản phẩm. Cuối ngày, đội trưởng thống kê lại số sản phẩm mà mỗi tổ làm được ở bảng sau:

Tổ	1	2	3	4	5
Số sản phẩm	17	19	19	21	20

Đội trưởng đã thống kê đúng chưa? Tại sao?

Ví dụ 2. Tâm ghi lại số liệu từ trang web của Tổng cục Thống kê bảng nhiệt độ không khí trung bình các tháng trong năm 2020 tại một trạm quan trắc đặt ở thành phố Vinh.

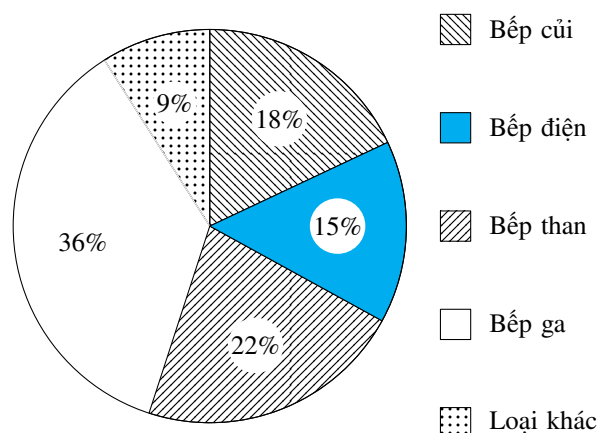
Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	20,9	20,7	23,7	23	29,5	32,2	4,5	29,6	28,9	23,8	23,1	18,4

Bạn Tâm đã ghi nhầm nhiệt độ của một tháng trong bảng trên. Theo em bạn Tâm đã ghi nhầm số liệu của tháng mấy? Tại sao?

Ví dụ 3.

Phương vẽ biểu đồ biểu thị tỉ lệ số lượng mỗi loại bếp mà gia đình các bạn trong lớp sử dụng thường xuyên để đun nấu theo bảng thống kê dưới đây.

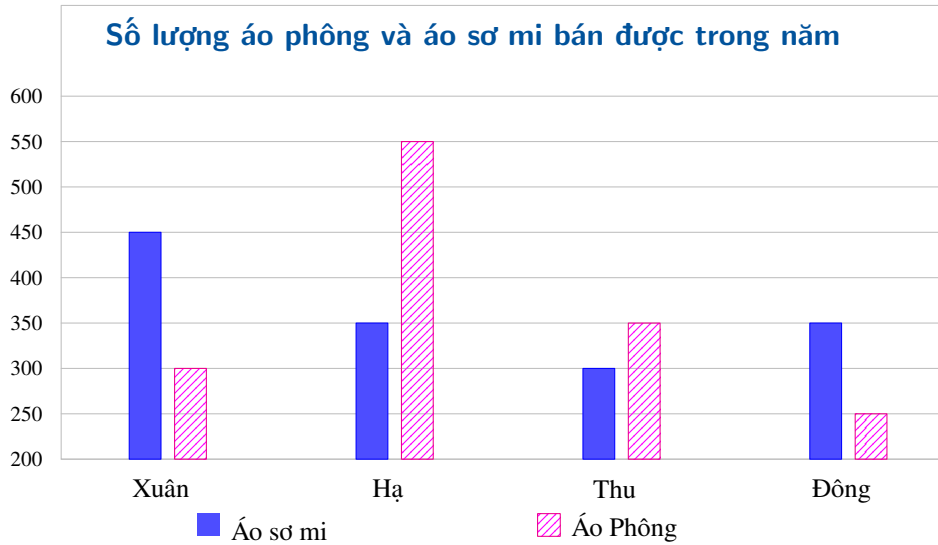
Loại bếp	Số gia đình
Bếp củi	10
Bếp điện	12
Bếp than	8
Bếp ga	20
Loại khác	5



Hãy cho biết Phương vẽ biểu đồ chính xác chưa. Nếu chưa thì cần điều chỉnh lại như thế nào cho đúng?

DT**2****Tính toán, phân tích các số liệu dựa vào bảng số liệu hoặc biểu đồ**

Ví dụ 4. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số áo phông và áo sơ mi một cửa hàng bán được theo bốn mùa trong năm.



Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai?

- Vào mùa hạ, số lượng áo phông bán được gấp 3 lần số lượng áo sơ mi.
- Vào mùa xuân, số áo sơ mi bán được nhiều gấp 1,5 lần số áo phông.
- Trong cả năm, tổng số áo sơ mi bán được nhiều hơn tổng số áo phông.
- Tổng số áo sơ mi và áo phông bán được vào mùa thu là thấp nhất so với các mùa khác.

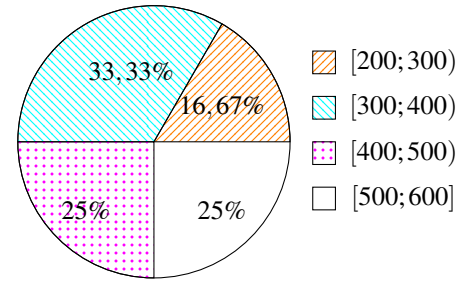
Ví dụ 5. Số liệu thống kê tình hình việc làm của sinh viên ngành Toán sau khi tốt nghiệp của các khóa tốt nghiệp 2018 và 2019 được trình bày trong bảng sau:

STT	Lĩnh vực việc làm	Khóa tốt nghiệp 2018		Khóa tốt nghiệp 2019	
		Nữ	Nam	Nữ	Nam
1	Giảng dạy	25	45	25	65
2	Tài chính	23	186	20	32
3	Lập trình	25	120	12	58
4	Bảo hiểm	12	100	3	5

- Trong số nữ sinh có việc làm ở Khóa tốt nghiệp 2018, tỷ lệ phần trăm của nữ làm trong lĩnh vực Giảng dạy là bao nhiêu?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, số sinh viên làm trong lĩnh vực Tài chính nhiều hơn số sinh viên làm trong lĩnh vực Giảng dạy là bao nhiêu phần trăm?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, lĩnh vực nào có tỷ lệ phần trăm nữ cao hơn các lĩnh vực còn lại?
- Tính cả hai khóa tốt nghiệp 2018 và 2019, ở các lĩnh vực trong bảng số liệu, số sinh viên nam có việc làm nhiều hơn số sinh viên nữ có việc làm là bao nhiêu phần trăm?

Ví dụ 6.

Số lượng khách đến tham quan tại Đà Nẵng trong 12 tháng được cho bởi biểu đồ như hình bên. Tính số tháng mà số người tham quan không dưới 400 người.



§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Số trung bình và trung vị

⚙ **Số trung bình:** Kí hiệu là $\bar{x}$.

- Với mẫu số liệu kích thước n là $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ thì

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số thì

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$$

Trong đó, n_k là tần số của giá trị x_k và $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần suất (tần số tương đối) thì

$$\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$$

Trong đó, $f_k = \frac{n_k}{n}$ là tần suất (tần số tương đối) của giá trị x_k .

Ý nghĩa của số trung bình: Số trung bình cộng cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu. Khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng ta có thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

⚙ **Số trung vị:** Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng **số trung vị**, được xác định như sau:

Giả sử có một mẫu gồm n số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là

- Số liệu ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ nếu n là lẻ.
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa (số thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$) nếu n là chẵn.

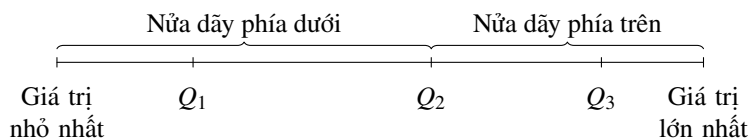
Ý nghĩa của số trung vị:

- Trung vị là giá trị chia đôi trong mẫu số liệu. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi đó số trung bình cộng bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.
- Nếu những số liệu trong mẫu có sự chênh lệch lớn thì ta nên chọn thêm trung vị làm đại diện cho mẫu số liệu đó nhằm điều chỉnh một số hạn chế khi sử dụng số trung bình cộng. Những kết luận về đối tượng thống kê rút ra khi đó sẽ tin cậy hơn.

2 Tứ phân vị

Trung vị chia mẫu ra làm hai phần. Trong thực tế người ta cũng quan tâm đến trung vị của mỗi phần đó. Ba trung vị này được gọi là **tứ phân vị** của mẫu. Để tìm tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2 .
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1 .
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3 .



Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các **tứ phân vị** của mẫu số liệu.

3 Mốt

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O .

Lưu ý:

- Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.
- Khi tất cả các giá trị trong mẫu số liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

B

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT

1

Tìm số trung bình của bảng số liệu

Ví dụ 1. Hãy tính trung bình cộng của các mẫu số liệu sau (Kết quả làm trong đến hai chữ số thập phân)

a) 5 6 6 4 10 17 8 13.

b) 50 36 61 43 36 97 61.

Ví dụ 2. Cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ (°C)	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?

b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất; cao nhất là bao nhiêu độ C?

Ví dụ 3. Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Ví dụ 4. Bảng liệt kê điểm thi học kì của Nam như sau

Môn	Toán	Lí	Hóa	Anh	Văn	Sử	Địa	Công nghệ	Tin học
Điểm	7	5	3	3	5	6	7	3	x

Biết rằng điểm thi các môn đều là hệ số 1. Hỏi Nam sẽ phải thi môn tin học bao nhiêu điểm thì sẽ có điểm trung bình học kì là 5 điểm (điểm số cho làm tròn thành số tự nhiên)?

Ví dụ 5. Một cửa hàng bán xe đạp thống kê số xe bán được hàng tháng trong năm 2021 như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số xe	8	10	7	10	22	28	28	25	20	10	9	7

a) Hãy tính số xe trung bình cửa hàng bán được mỗi tháng?

b) Tính xem trong bốn quý (I, II, III, IV), quý nào cửa hàng bán được nhiều xe nhất?

DT

2

Tìm trung vị và tứ phân vị của bảng số liệu

Ví dụ 6. Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9
---	---	---	---	---	---	---	-----	---

- a) Tìm số trung vị của mẫu số liệu trên.
b) Tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Ví dụ 7. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

- a) Tìm số trung vị của bảng số liệu trên
b) Tìm các tứ phân vị của bảng số liệu trên.

Ví dụ 8. Thống kê GDP năm 2020 (đơn vị: tỉ đô la Mỹ) của 10 nước tại khu vực Đông Nam Á được kết quả như sau:

Brunei	Campuchia	Indonesia	Lào	Malaysia
12,02	25,95	1059,64	19,08	338,28
Myanma	Philippines	Singapore	Thái Lan	Việt Nam
81,26	362,24	339,98	501,89	340,82

- a) Hãy tìm các tứ phân vị của dãy số liệu trên.
b) Giải thích ý nghĩa của các tứ phân vị này. Việt Nam có thuộc nhóm 25% quốc gia có GDP năm 2020 cao nhất trong vùng Đông Nam Á không?

DT 3 Tìm một cửa của bảng số liệu

Ví dụ 9. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính một cửa của bảng số liệu thống kê trên.

Ví dụ 10. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

- a) Một cửa của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

§4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm. Ta có

⚙ **Khoảng biến thiên:** Kí hiệu là R , là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

⚙ **Khoảng tứ phân vị:** Kí hiệu là Δ_Q , là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

Chú ý:

- Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.
- Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ và khoảng tứ phân vị là độ trải giữa.

2 Phương sai và độ lệch chuẩn

⚙ **Phương sai:** Để đo mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) ta dùng phương sai s^2 . Cách tính như sau:

- Với mẫu số liệu kích thước n là $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ thì

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số thì

$$s^2 = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_k x_k^2) - \bar{x}^2$$

Trong đó n_k là tần số của giá trị x_k và $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

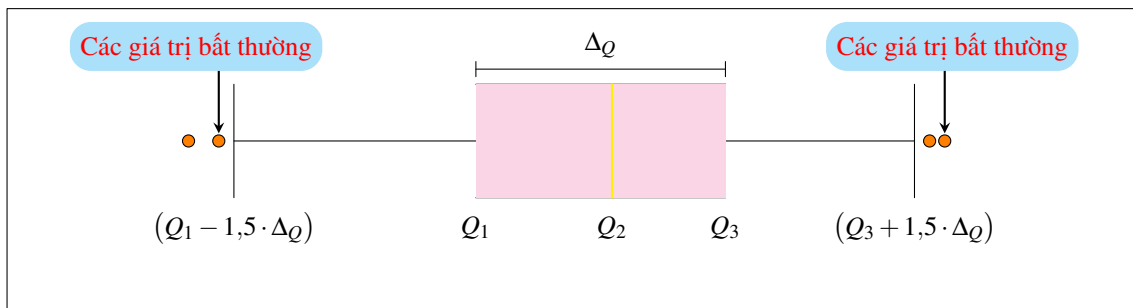
⚙ **Độ lệch chuẩn:** Căn bậc hai của phương sai gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là s . Ta có $s = \sqrt{s^2}$.

Chú ý:

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.
- Phương sai s^2 và độ lệch chuẩn s đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s vì s có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.

3 Phát hiện số liệu bất thường hoặc không chính xác bằng biểu đồ hộp

Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là **giá trị bất thường**. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện các giá trị bất thường này.



Các số liệu **lớn hơn** $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$ hoặc **bé hơn** $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$ được xem là giá trị bất thường.

B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

DT 1 Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu

⚙ **Phương pháp:** Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của mẫu số liệu. Khi đó, khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = M - m$.

≡ **Ví dụ 1.** Tuổi thọ trung bình người dân của 11 nước được thống kê như sau:

69 77 75 83 65 75 74 68 73 72 71

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

≡ **Ví dụ 2.** Điểm thi học kì 2 môn Toán và Ngữ văn của một nhóm học sinh được ghi lại như sau

Toán	9	8,5	7	6,3	5	9,5	8
Ngữ văn	6	6,5	8	7,3	5,5	8,3	6,5

Hãy tìm khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu trên. Từ đó chỉ ra mẫu số liệu có độ phân tán lớn hơn.

DT**2****Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu**

⚙️ **Phương pháp:** Ta xác định các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 . Khi đó khoảng tứ phân vị là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

⚙️ **Lưu ý:** Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

≡ **Ví dụ 3.** Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg)

2,977 3,155 3,920 3,412 4,236

2,593 3,270 3,813 4,042 3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

≡ **Ví dụ 4.** Nhiệt độ trung bình các tháng trong năm 2019 của hai tỉnh Lai Châu và Lâm Đồng được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lai Châu	14,8	18,8	20,3	23,5	24,7	24,2	23,6	24,6	22,7	21,0	18,6	14,2
Lâm Đồng	16,3	17,4	18,7	19,8	20,2	20,3	19,5	19,3	18,6	18,5	17,5	16,0

- Tìm khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.
- Hãy cho biết trong một năm, nhiệt độ địa phương nào ít thay đổi hơn?

DT**3****Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu**

⚙️ **Tìm phương sai s^2 :**

- Tính số trung bình $\bar{x}$ của mẫu số liệu.
- Thay vào công thức: $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

⚙️ **Tìm độ lệch chuẩn s :** Tính phương sai s^2 của mẫu số liệu, suy ra độ lệch chuẩn $s = \sqrt{s^2}$.

≡ **Ví dụ 5.** Bảng dưới đây thống kê tổng số giờ nắng trong năm 2019 theo từng tháng được đo bởi hai trạm quan sát khí tượng đặt ở Tuyên Quang và Cà Mau.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tuyên Quang	25	89	72	117	106	117	156	203	227	146	117	145
Cà Mau	180	223	257	245	191	111	141	134	130	122	157	173

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của dữ liệu từng tỉnh.

b) Nêu nhận xét về sự thay đổi tổng số giờ nắng theo từng tháng ở mỗi tỉnh.

Ví dụ 6. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	Tổng
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$n = 40$

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

DT

4

Tìm các số liệu bất thường của mẫu số liệu

Để tìm các số liệu bất thường của một mẫu số liệu ta thực hiện các bước giải như sau:

- Tìm khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$ của mẫu số liệu.
- Xác định đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$.
- Tìm các số liệu **không** thuộc đoạn $[Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q; Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q]$ là **các số liệu bất thường**

Ví dụ 7. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 25 chiếc xe qua trạm như sau:

20 41 41 80 40 52 52 52 60 55 60 60 62
60 65 60 65 135 70 70 65 75 75 70 55

Hãy tìm các số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Ví dụ 8. Bình dùng đồng hồ đo thời gian để một vật rơi tự do (đơn vị: giây) từ vị trí A đến vị trí B trong 10 lần, cho kết quả như sau:

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số giây	0,398	0,399	0,408	0,410	0,406	0,405	0,402	0,401	0,290	0,402

Bình nghĩ là giá trị 0,290 ở lần đo thứ 9 không chính xác. Hãy kiểm tra nghi ngờ của Bình.