CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

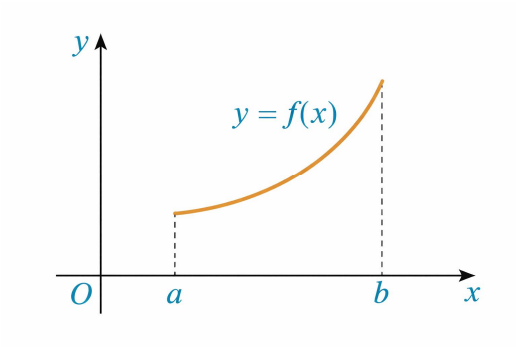
a. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng , một đoạn hoặc nửa khoảng và $y=f(x)$ là hàm số xác định trên K.

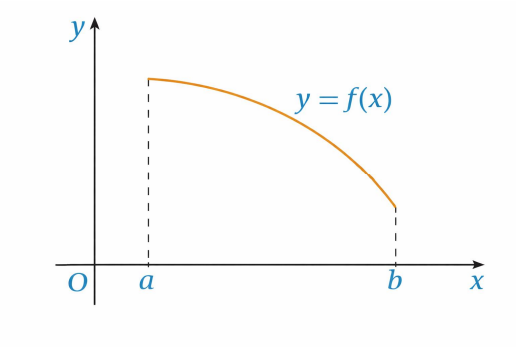
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ **đi lên từ trái sang phải.** Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ **đi xuống từ trái sang phải.**



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số đó.
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định.

Định lí 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập khoảng K.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x)<0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý:

- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 với một số hữu hạn điểm trong khoảng K.
- Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

b. Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. Cực trị của hàm số

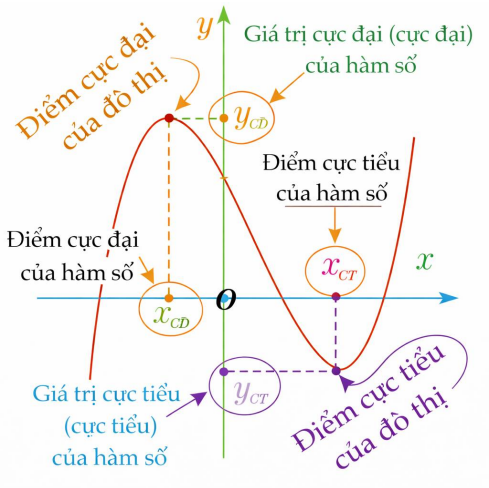
a. Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Các điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.



b. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lý : Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Chú ý: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- *Bước 2:* Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- *Bước 3:* Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- *Bước 4:* Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

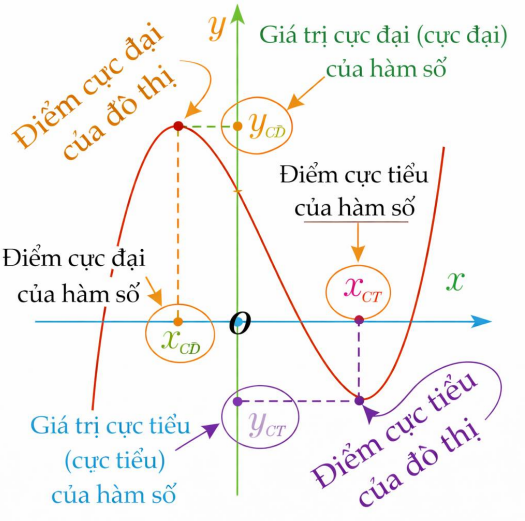
DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:

- Cần phân biệt điểm cực trị của hàm số với điểm cực trị của đồ thị hàm số.



- Ôn lại kiến thức xét dấu tam thức bậc hai: $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lớp 10)

+ Nếu $\Delta<0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta=0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta > 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức $f(x) = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a		

• Cách tính nhanh đạo hàm hàm số dạng hữu tỉ (phân thức).

+ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

+ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$

2. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số

a. Phương pháp viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba:

$$y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d \ (a \neq 0)$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm bậc ba. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Chia y cho y' ta được: $y = g(x).y' + Ax + B$

Bước 2: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = Ax + B$

b. Phương pháp viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm hữu tỉ. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Tính $\dfrac{(ax^2+bx+c)'}{(dx+e)'} = \dfrac{2ax+b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$

Bước 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Xét tính đơn điệu, tìm cực trị và viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=x^3+3x^2-9x$. b) $y=x^3+3x^2+3x+2025$ c) $y=-x^3+x^2-x$

Bài 2. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=-x^4+6x^2-8x+1$ b) $y=x^4-2x^2-3$ c) $y=-x^4-x^2+2024$

Bài 3. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. b) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$ c) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Bài 4. Xét tính đơn điệu, tìm cực trị và viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. c) $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$.

Bài 5. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-x^3+3x^2}$ b) $y=x\sqrt{4-x^2}$ c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$

Bài 6. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left|x^2+5x+6\right|$.

Bài 7. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x-\sin x$ với $x\in[0;\pi]$. b) $y=2\sin x+\cos 2x$ với $x\in[0;\pi]$.

Bài 8. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=e^{2x^2-2x+1}$ b) $y=x^2e^{-x}$ c) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$

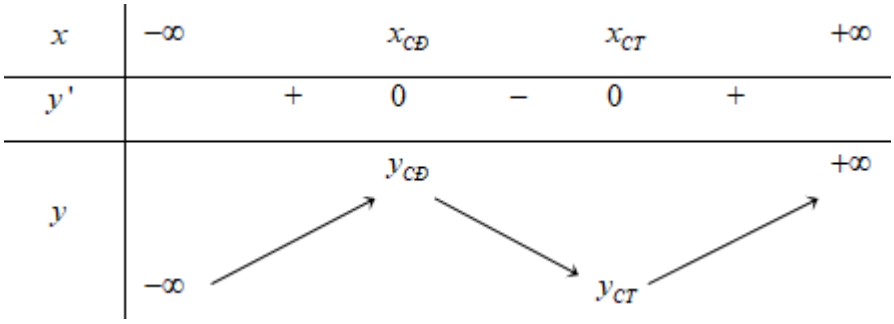
Bài 9. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ b) $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$ c) $y=\dfrac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$

DẠNG 2
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết bảng biến thiên

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và giả sử có bảng biến thiên sau:

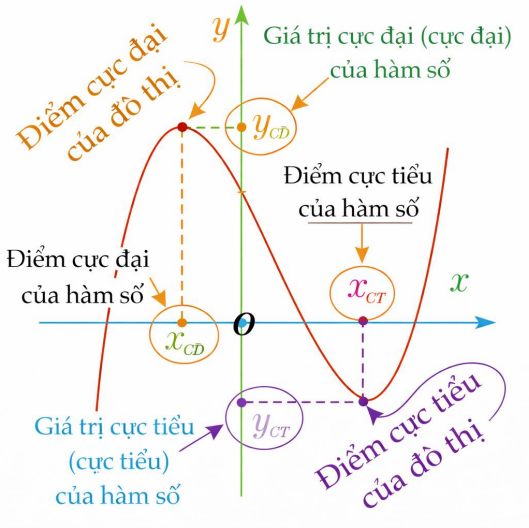


Từ bảng biến thiên trên ta có:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$.
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$.
- Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x=x_{CT}$ và giá trị cực đại $y=y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y=y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ};y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT};y_{CT})$.

2. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị hàm số như sau:

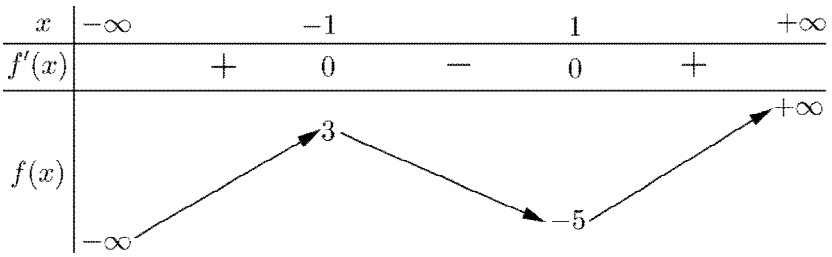


Từ đồ thị trên ta có:

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y=f(x)$ "đi lên" trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y=f(x)$ "đi xuống" trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$.
- Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x=x_{CT}$ và giá trị cực đại $y=y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y=y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ};y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT};y_{CT})$.

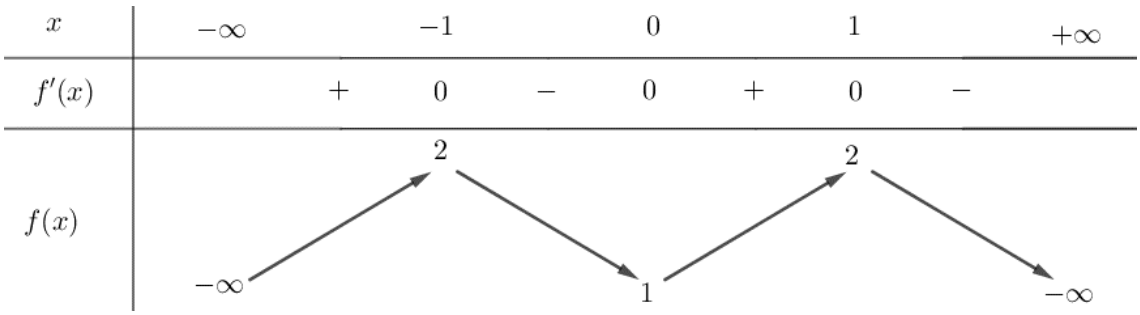
Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

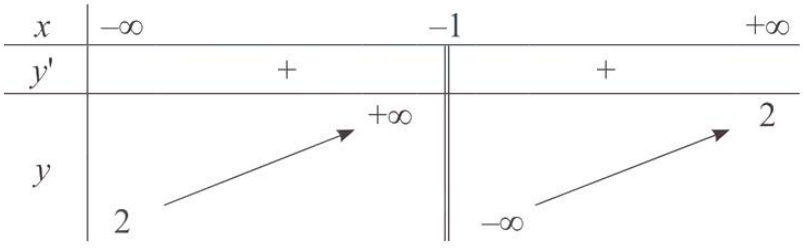
b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



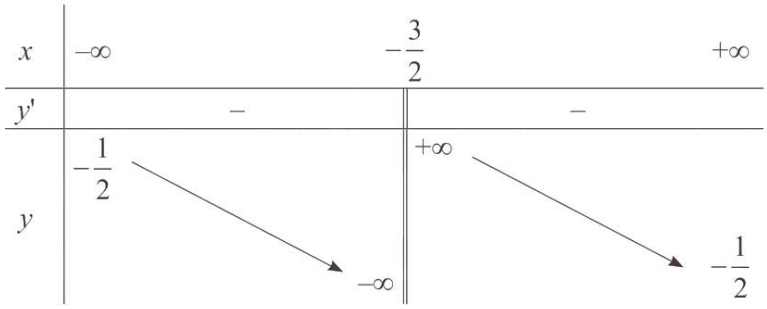
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



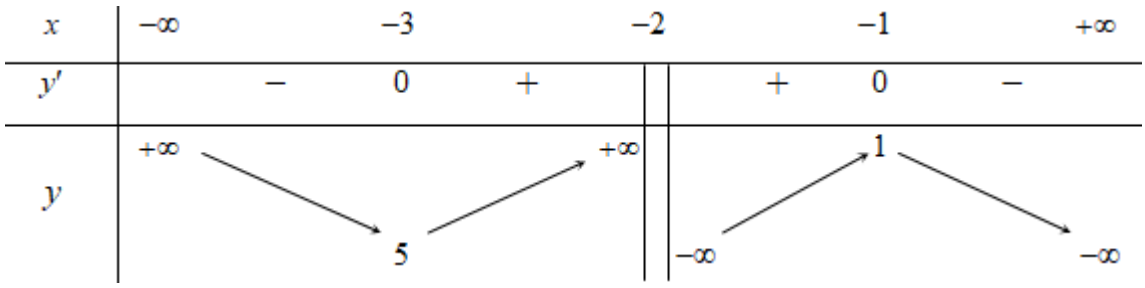
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

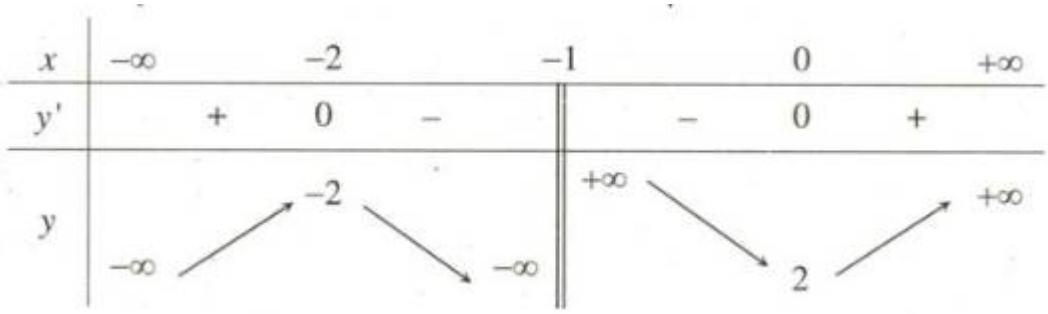
Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

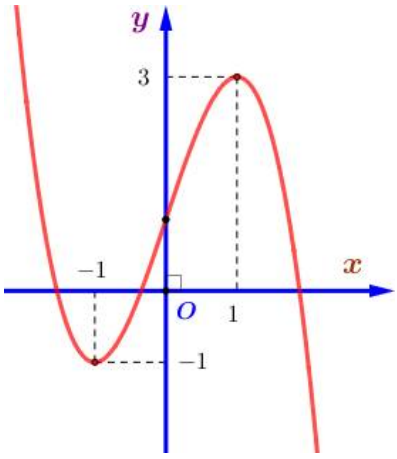
Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

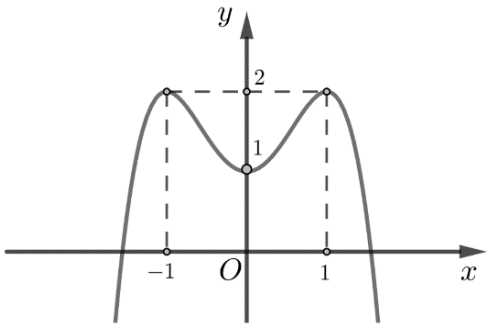
Bài 7. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

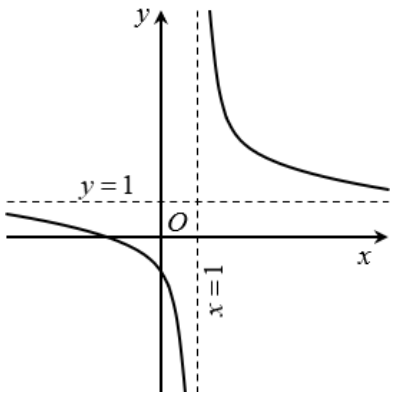
b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



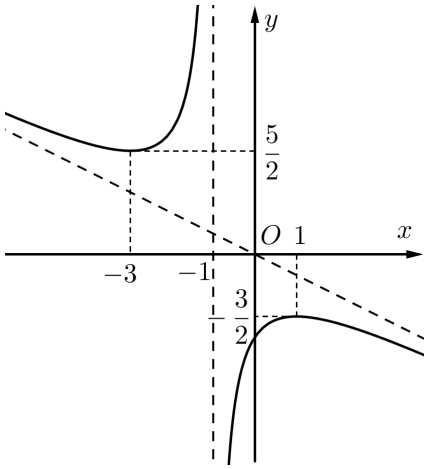
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

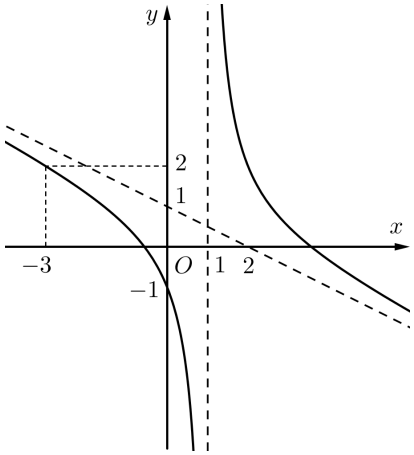
Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

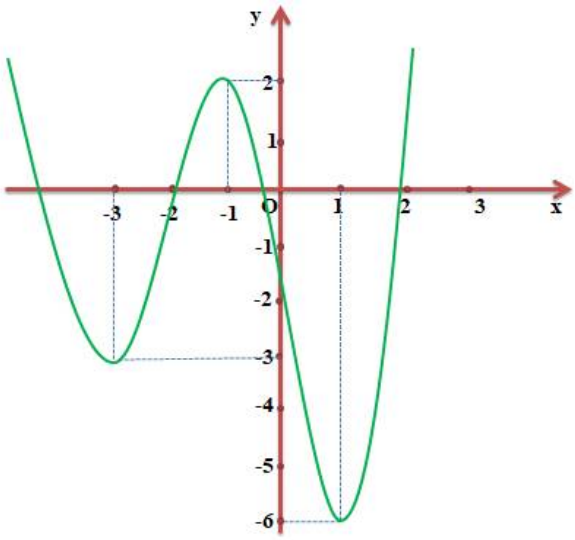
b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

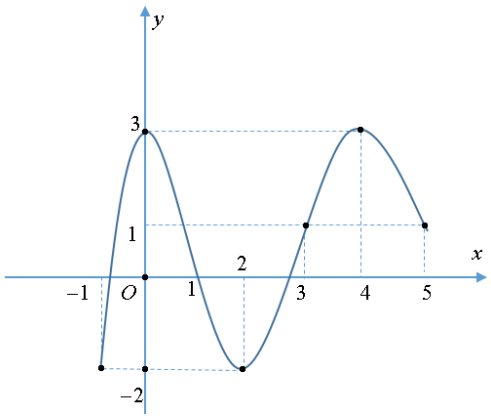
Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$.

DẠNG 3
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a;b)\subset\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+2024)(x-2025)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu? Tìm điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số nếu có.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

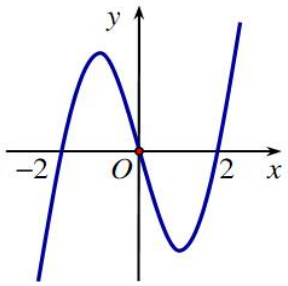
Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-3		0		-3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

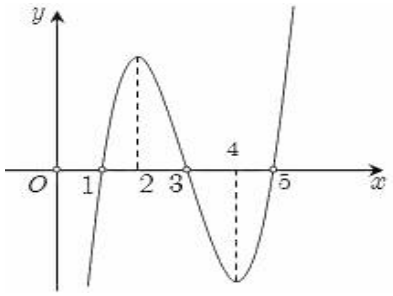
Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

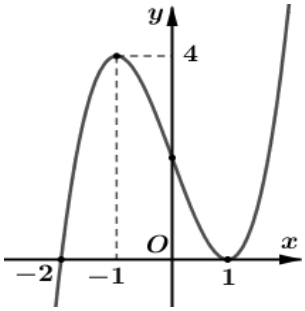
Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

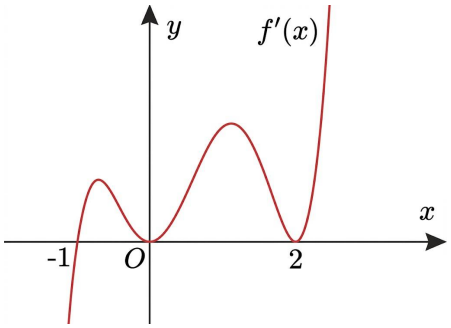
Bài 6. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

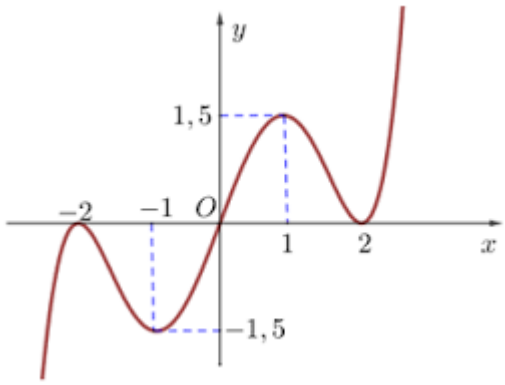
Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

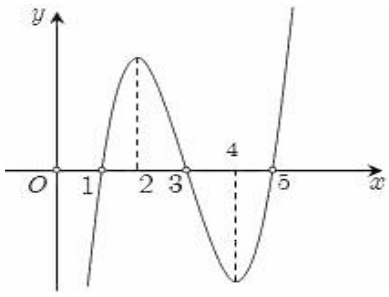
Bài 8. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x-1)$.

b) Hàm số $y=f(x-1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $g(x)=f(x+1)$.

b) Hàm số $g(x)=f(x+1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

• Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

• Một vật chuyển động có phương trình $s=f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t)=f''(t)$.

• Nếu hàm số $T=f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

• Cường độ tức thời của điện lượng $Q=Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0)=Q'(t_0)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t\geq 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m).

a) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

c) Tính gia tốc của chất điểm sau thời gian10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Trong 20 giây đầu tiên, gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất ở thời gian nào?

Bài 2. Một chất điểm chuyển động trong 10 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật giảm?

c) Tính gia tốc của vật sau thời gian 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Bài 4. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\leq I\leq 22$.

a) Hỏi công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

b) Hỏi công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

c) Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 5. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

Bài 6. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

DẠNG 5
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH CỦA CHÚNG

1. Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases}$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a=0$

2. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad-bc\ne 0,\ c\ne 0$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'>0,\ \forall x\ne -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc>0$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'<0,\ \forall x\ne -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc<0$

3. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad\ne 0$

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\ge 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\ge 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\le 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\le 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}$$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y=x^3+mx^2+2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y=\dfrac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b) $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=x+1+\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) $y=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định .

c) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

DẠNG 6
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG CHO TRƯỚC

Nếu $y'=f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y'=f'(x)\ge 0$ hay $y'=f'(x)\le 0$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc đoạn hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của $y'=f'(x)$.

Bước 2: Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển về thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.

Bước 3: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x)=0$ và tìm nghiệm.

Bước 4: Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.

Bước 5: Kết luận: **"Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé"**. Nghĩa là:

- Khi ta đặt $m\ge g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m\ge$ **số lớn nhất** trong bảng biến thiên
- Khi ta đặt $m\le g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m\le$ **số nhỏ nhất** trong bảng biến thiên

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) $y=x^3+mx^2+m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y=\dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

b) $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+m+6}{x+2}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên $(-8;5)$ b) $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ đồng biến trên $(1;e)$

DẠNG 7

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI x_0

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

1. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$.

Bài toán 1: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m);y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m);y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)<0 \end{cases}\Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0,m) = 0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y = f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x = x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m); y'' = f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m) = 0 \\ f''(x_0,m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$

2. Biện luận số cực trị của hàm số

a. Biện luận số cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0) \ (*)$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

b. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (*)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{e}{d} \right\}$

Ta có: $y' = \dfrac{adx^2 + 2acx + bc - cd}{(dx+e)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow adx^2 + 2acx + bc - cd = 0 = g(x) \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$

b) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

c) $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\frac{x^2+\left(m-1\right)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

b) $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x=2$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{2}{3}x^3+\left(m-1\right)x^2+\left(m^2-4m+3\right)x-1$ có hai điểm cực trị.

b) $y=x^3-3\left(m+1\right)x^2+3\left(3m+7\right)x+1$ có cực trị.

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m+2\right)x+2024$ không có cực trị.

d) $y=\frac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại.

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$ có hai điểm cực trị.

b) $y=\frac{-x^2+2\left(m-1\right)x-m-5}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

DẠNG 8
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN
(liên quan hệ thức Viète)

1. Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x).y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y = Ax + B$

2. Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$y = \dfrac{Q'(x)}{P'(x)} = \dfrac{2ax + b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+3)x^2 + (12 - m)x + 2025$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung.

c) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 2024m + 2025$ có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$ để diện tích ΔOAB bằng 2 với $A; B$ là hai điểm cực trị .

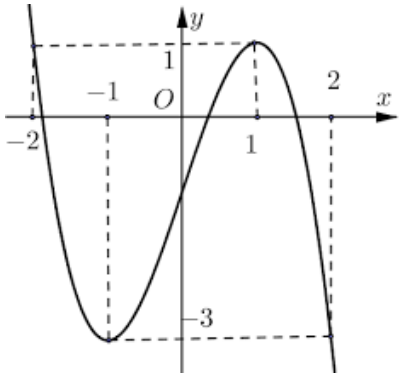
b) $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

c) $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

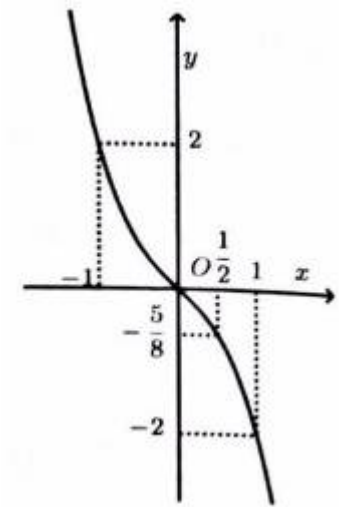
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

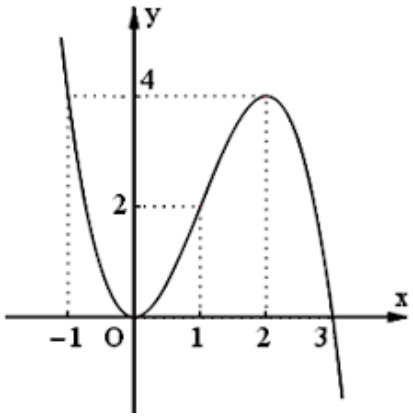
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

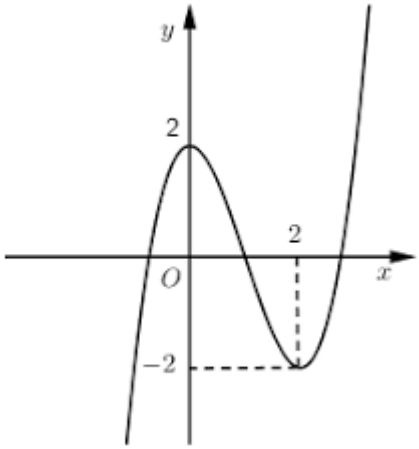
A. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

B. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

C. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 0.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

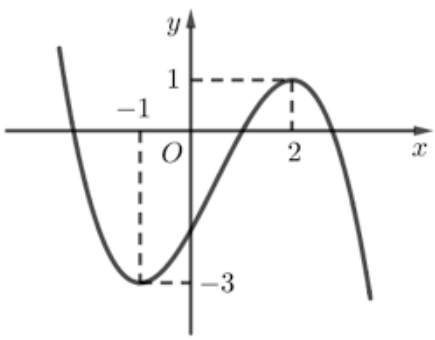
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng -2.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

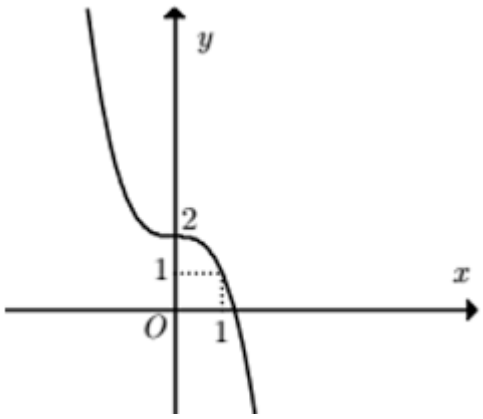
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng -3.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

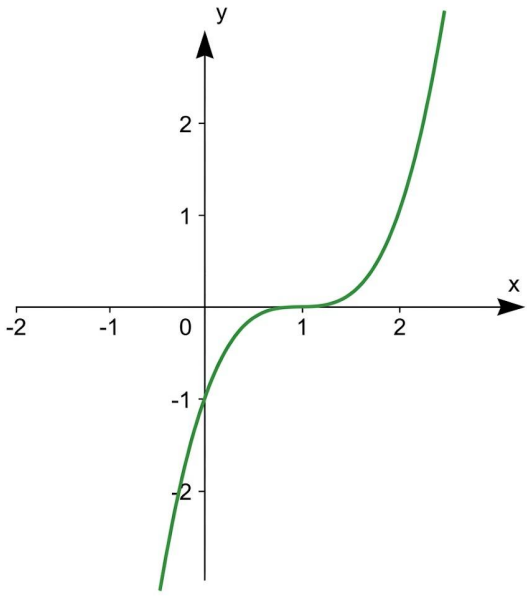
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

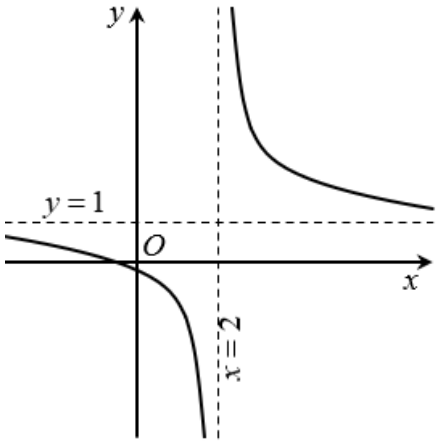
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 0.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

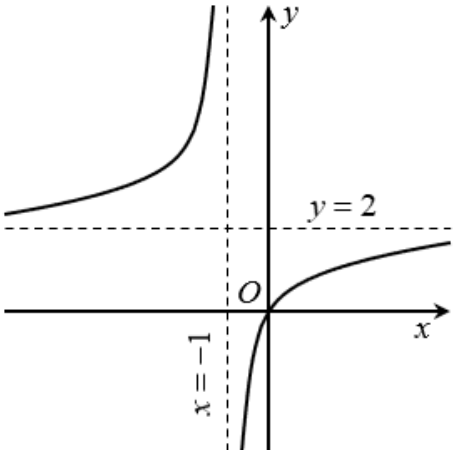
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

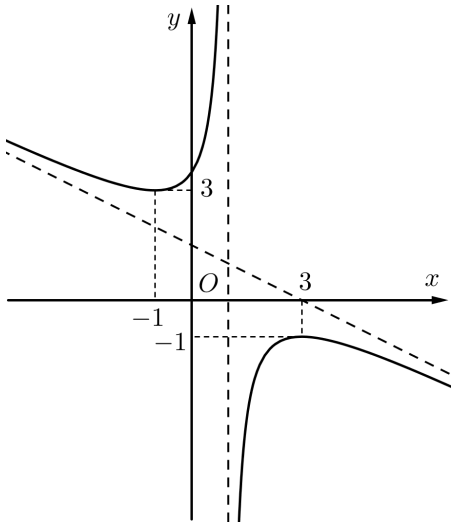
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có một cực trị.

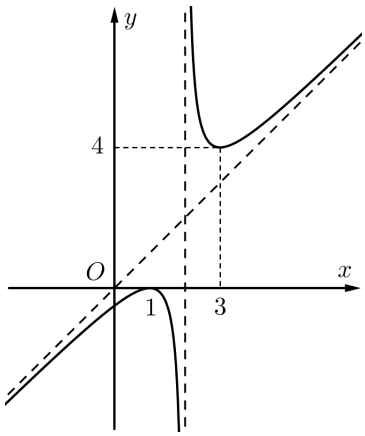
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(3;-1)$.

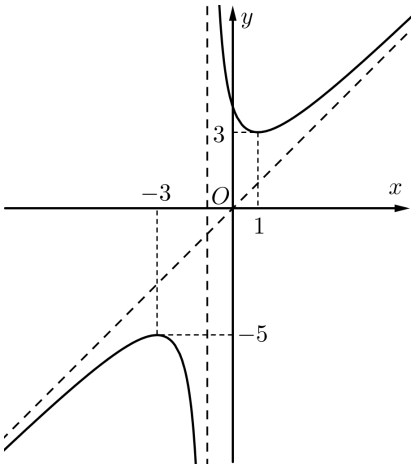
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại bằng:

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

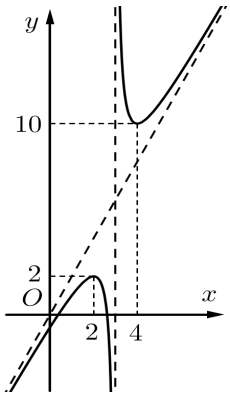
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** -5. **D.** -3.

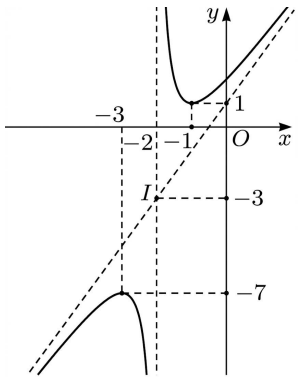
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là:

A. 4. **B.** 2. **C.** $(2;2)$. **D.** $(4;10)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

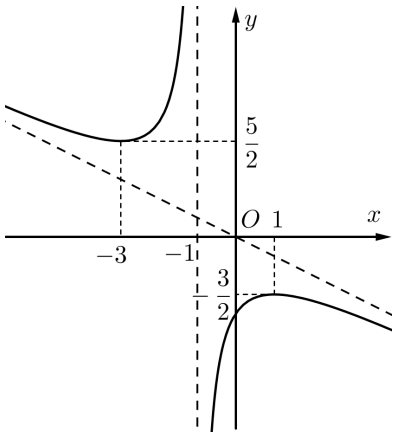
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

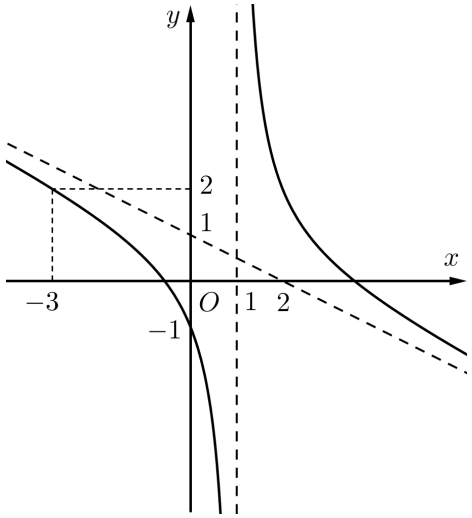
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2026)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

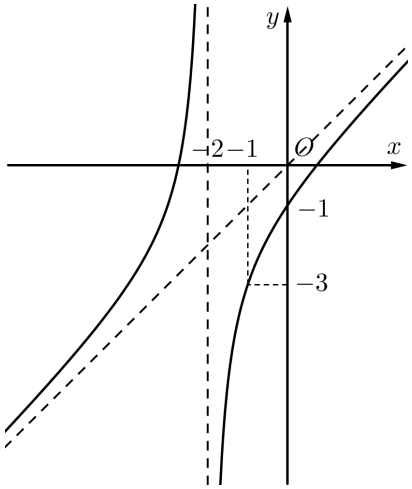
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

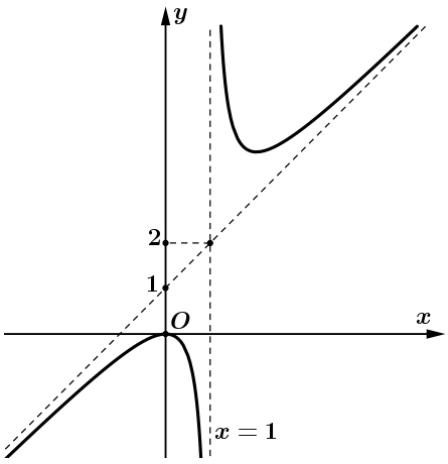
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

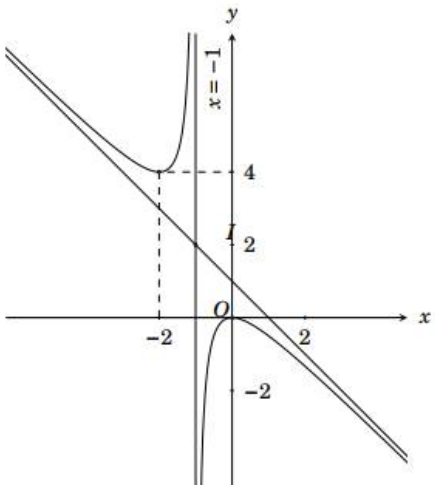
A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

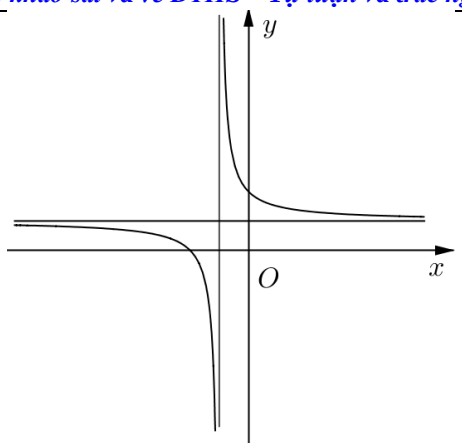
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng -2.

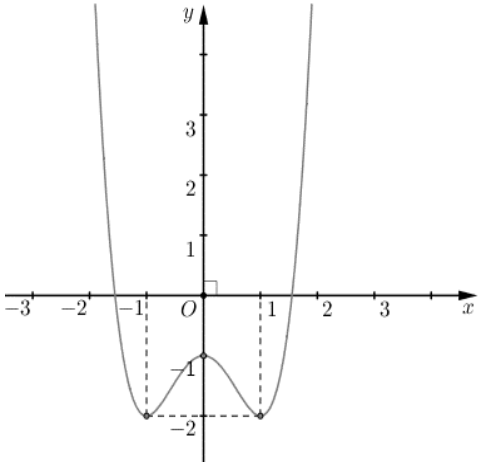
D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 4.

Câu 20. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



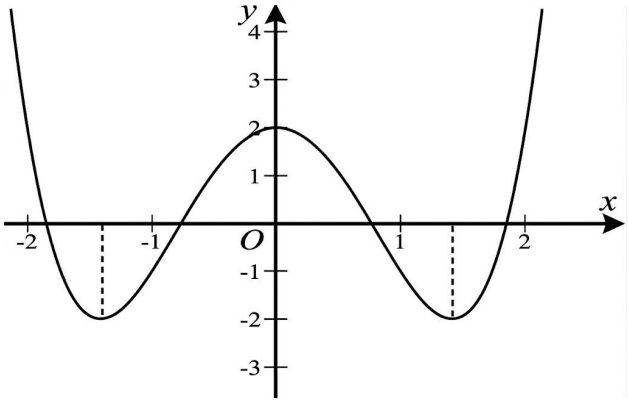
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



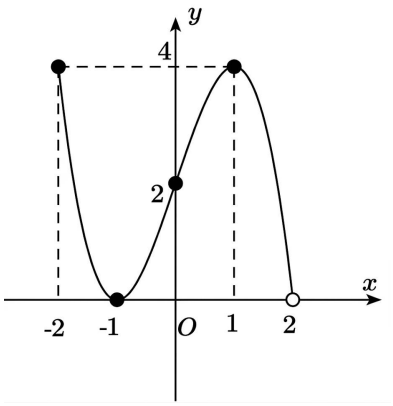
A. $(-\infty -1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

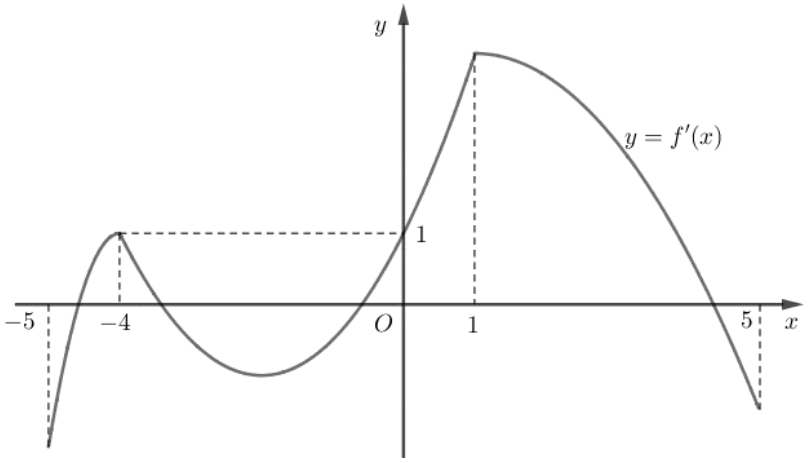
Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

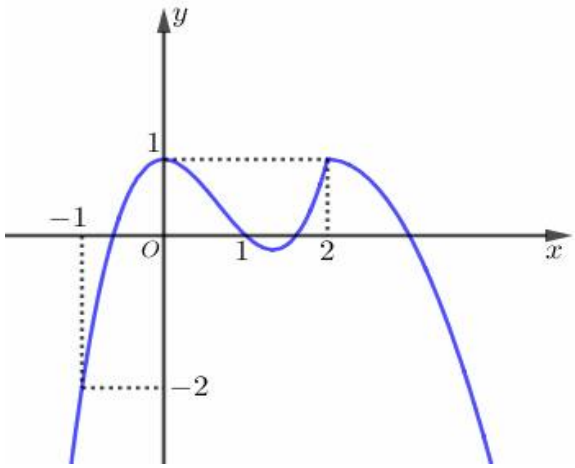
Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $[-5;5]$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

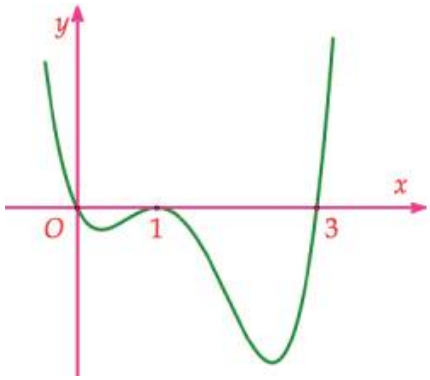
Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

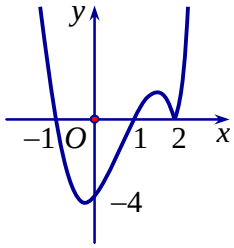
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

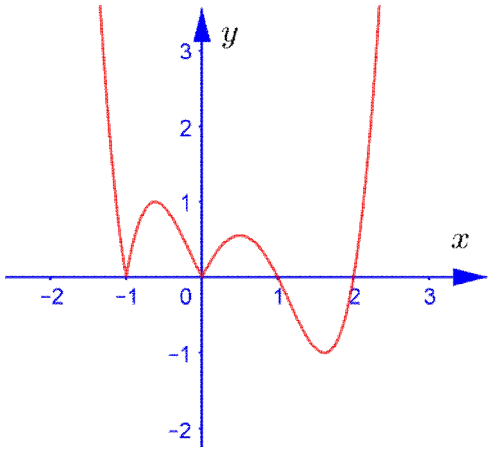
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

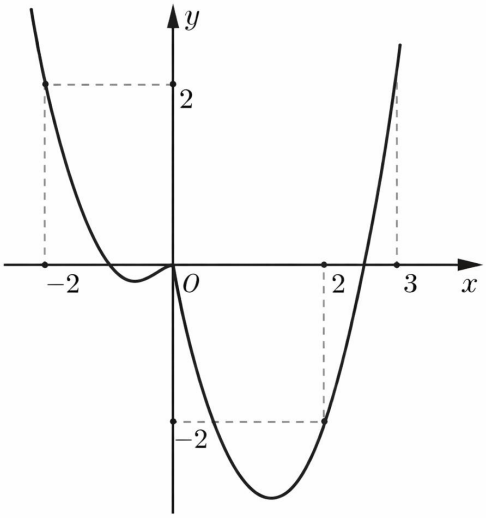
Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

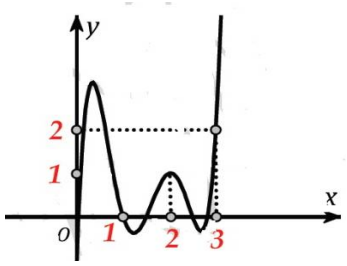
Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

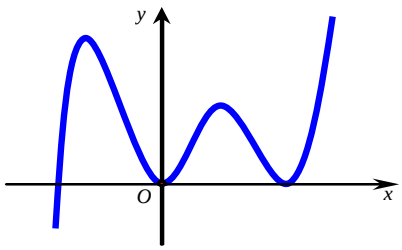
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

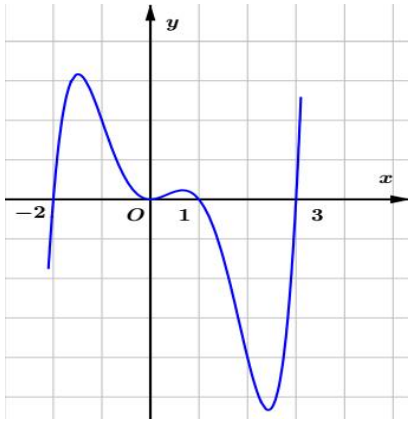
Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

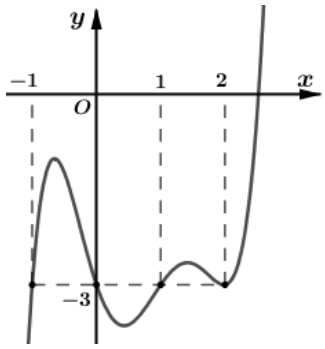
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;1)$

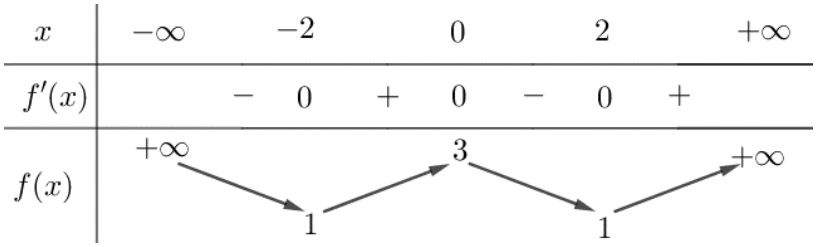
Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

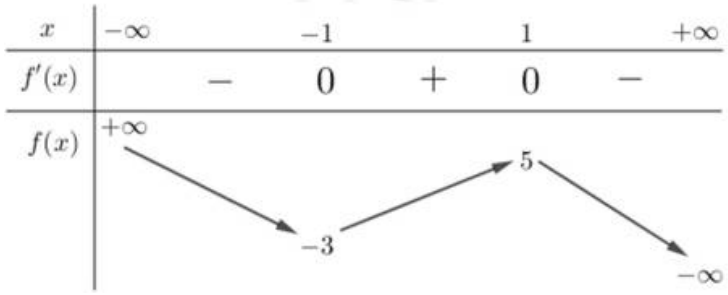
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

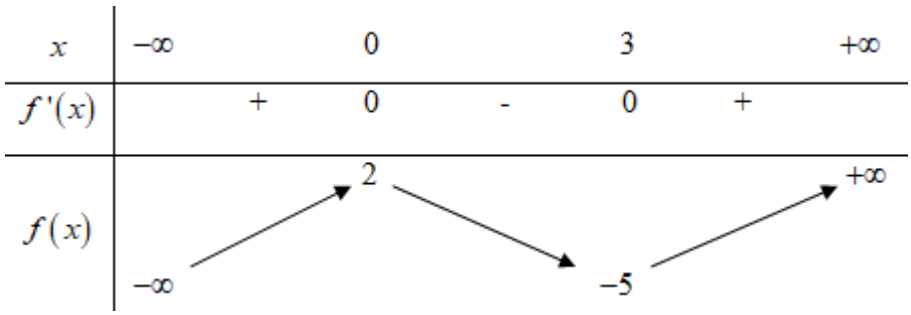
Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

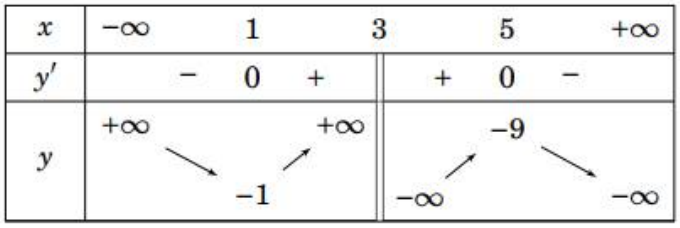
Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

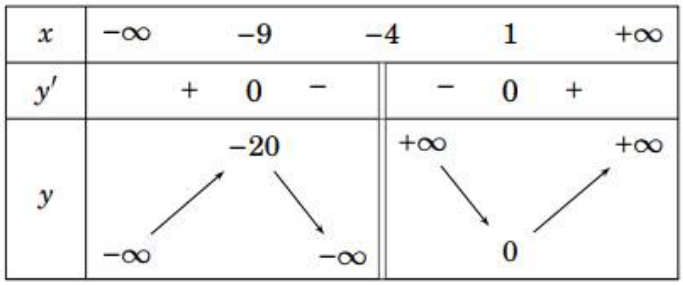
Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -9.

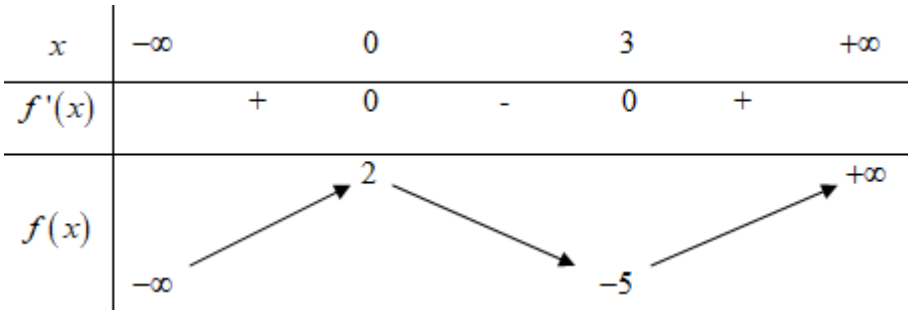
Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -9. **B.** -20. **C.** 0. **D.** 1.

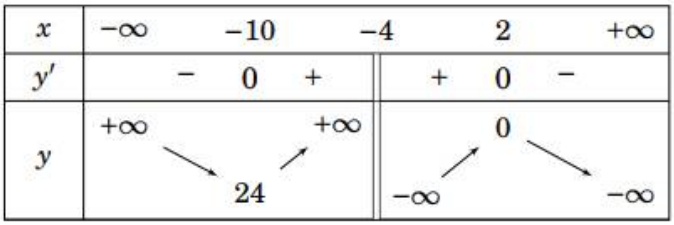
Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;-5)$.

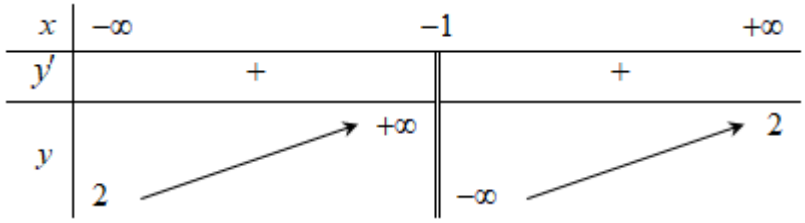
Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là:

A. -10. **B.** 2. **C.** 24. **D.** $(-10;24)$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

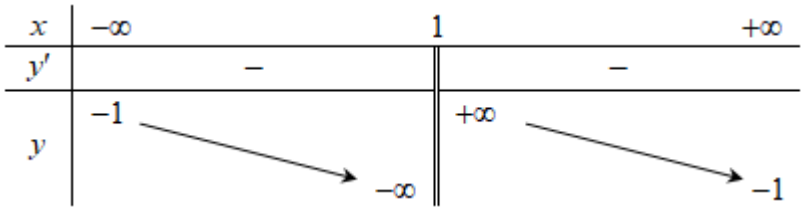
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

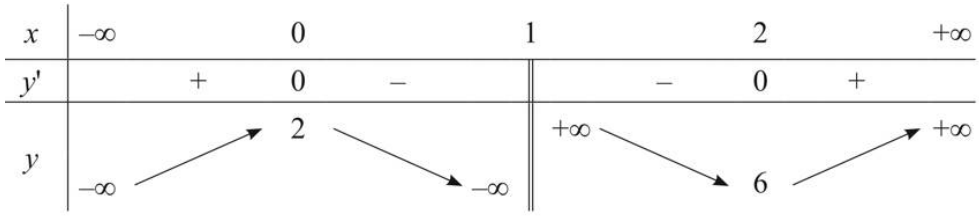
A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;-\infty)$ và $(+\infty;-1)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây sai?

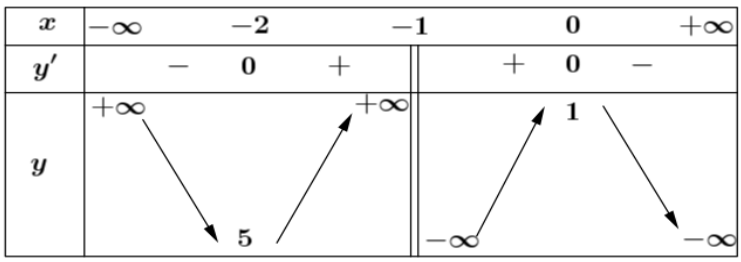
A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 5.

Câu 47. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y=ax^4+bx^2+c, a\neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

B. Khi $a>0$ thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi $a<0$ hàm số có thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 49. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 51. Hỏi hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 52. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$. **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 53. Hỏi hàm số $y=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 54. Hàm số $y=\frac{x+2}{1-x}$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(0;+\infty)$

Câu 55. Hàm số $y=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-1;1)$ và $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 56. Hỏi hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-2)$ và $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Câu 57. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y=-(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y=\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 58. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $(-1;3)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 59. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $y=e^{-x}$. **B.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **D.** $y=\ln x$.

Câu 60. Cho hàm số $y=\log_3\left(x^2-2x+3\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(-1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(1;+\infty)$

Câu 61. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và cực tiểu tại $x=0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và cực tiểu tại $x=-2$.

Câu 62. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=x^5-5x^2+5x-13.$ **B.** $y=x^4-4x+3.$

C. $y=x+\dfrac{1}{x}.$ **D.** $y=2\sqrt{x}-x.$

Câu 63. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y=x+\dfrac{1}{x+1}.$ **B.** $y=x^3+3x^2+7x-2.$

C. $y=-x^4-2x^2+3.$ **D.** $y=x-\dfrac{2}{x+1}.$

Câu 64. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=2x+\dfrac{2}{x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2$. **C.** $y=-x^4+2x^2+3$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Câu 65. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2$. **B.** $y_{CD}=1$. **C.** $y_{CD}=-1$. **D.** $y_{CD}=2$.

Câu 66. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=-2x+1$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(3;1)$.

Câu 68. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 69. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(4;-6)$ **B.** $(0;-2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(-6;4)$

Câu 70. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 71. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Câu 72. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y=2x^3-3x^2$. **B.** $y=-2x^3-3x^2$.

C. $y=x^3+3x^2+3x$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 73. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\sqrt{1+4x-x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 74. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+ax+b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a-b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 75. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-2$. Gọi a,b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2+b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 76. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+3$ đạt cực trị tại x_1,x_2,x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 77. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7$. **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Câu 78. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Câu 79. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\ge 0\end{cases}$.

Câu 80. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\ge 0\end{cases}$.

Câu 81. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a=0;b=0;c>0$ hoặc $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$. **B.** $a=0;b=0;c>0$ hoặc $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$.

C. $a=0;b=0;c\ge 0$ hoặc $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **D.** $a=0;b=0;c\ge 0$ hoặc $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$.

Câu 82. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a=0;b=0;c<0$ hoặc $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$. **B.** $a=0;b=0;c<0$ hoặc $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac<0\end{cases}$.

C. $a=0;b=0;c\le 0$ hoặc $\begin{cases}a>0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$. **D.** $a=0;b=0;c\le 0$ hoặc $\begin{cases}a<0\\ b^2-3ac\le 0\end{cases}$.

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(3-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2026x^2-2027x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại

A. $x=0$. **B.** $x=\dfrac{2027}{2026}$. **C.** $x=-\dfrac{2026}{2027}$. **D.** $x=\dfrac{2026}{2027}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+7x+6$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là

A. $f(-6)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $x=-6$. **D.** $x=-1$.

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4-x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x^2-5x+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là

A. $(1;f(1))$. **B.** $\left(\frac{3}{2};f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$. **C.** $x=1$. **D.** $f(1)$.

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $(0;f(0))$. **D.** $(-2;f(-2))$.

Câu 89. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{9-x^2}{x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(1-9x^2)(2x-1)^{2026}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2025)^{2026}(x-2026)^{2027}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 94. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(-5;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(5)>f(4)>f(3)$.
B. $f(-1)>f(0)>f(1)$.
C. $f(-3)<f(-2)<f(-1)$.
D. $f(0)<f(1)<f(2)$.

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$.
B. $\mathbb{R}$.
C. $(-1;+\infty)$.
D. $(-2;+\infty)$.

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$.
B. $(0;+\infty)$.
C. $(0;2)$.
D. $(-\infty;-3)$.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5.
B. 3.
C. 2.
D. 4.

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

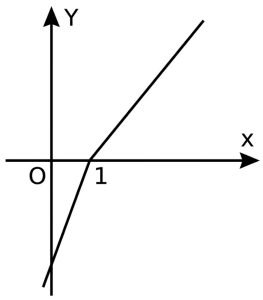
Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3.
B. 4.
C. 2.
D. 1.

Câu 101. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3.
B. 0.
C. 1.
D. 2.

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

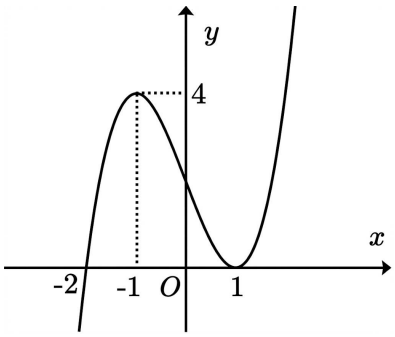
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



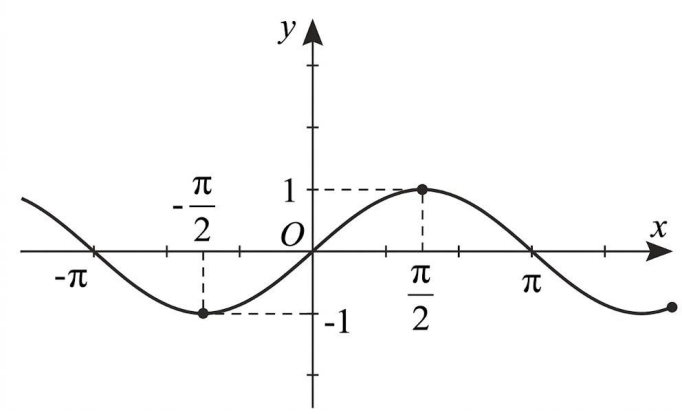
A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Câu 104. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

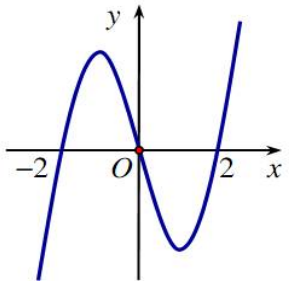
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\dfrac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 105. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



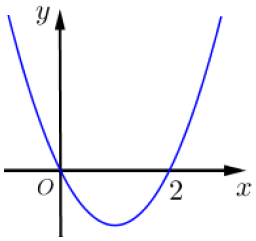
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Câu 106. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình sau



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

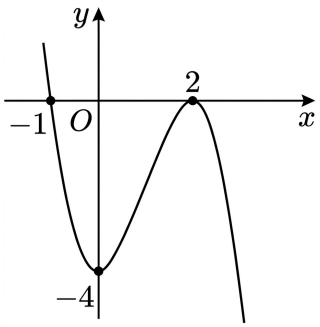
A. $(-1;0)$.

B. $(3;4)$.

C. $(2;3)$.

D. $(1;2)$.

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

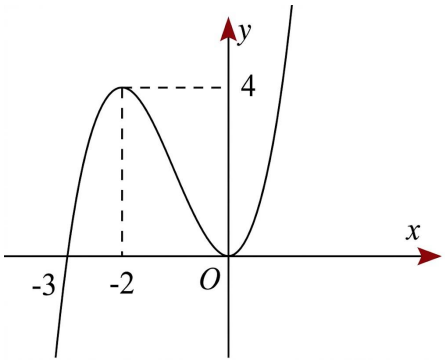
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



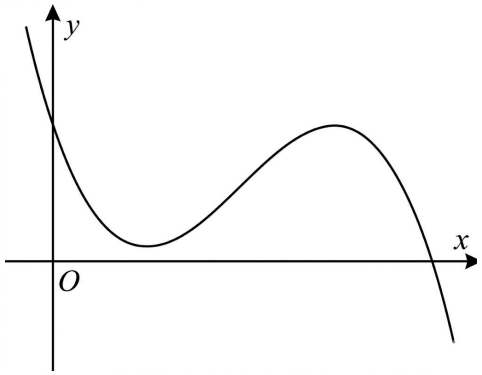
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

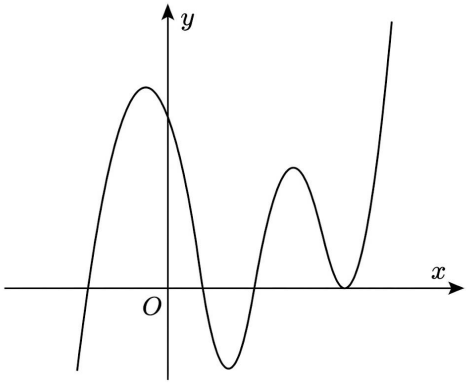
Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

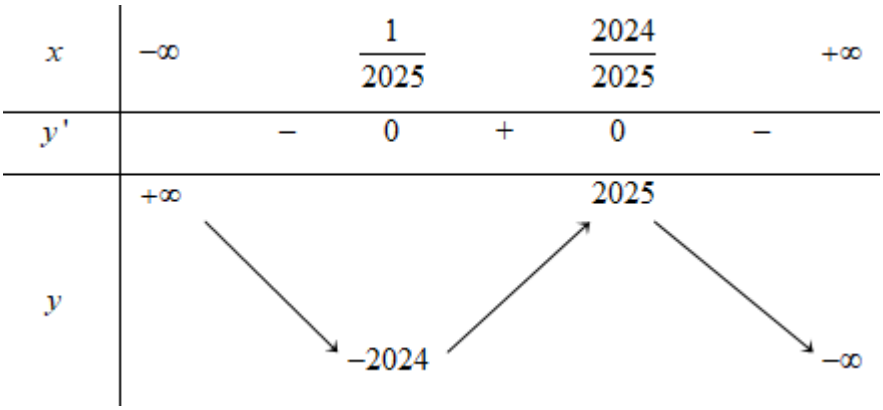
Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau.



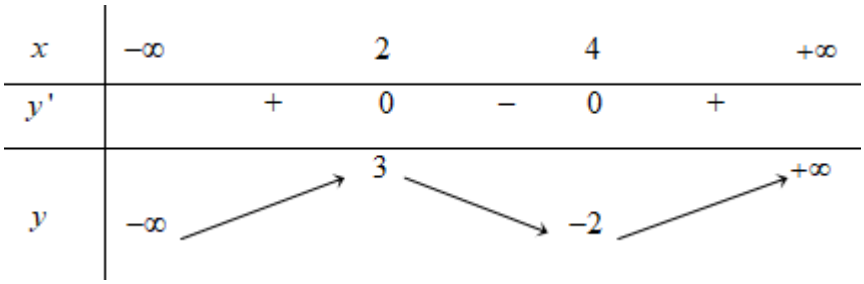
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) $f\left(\frac{3}{2025}\right)>f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2024.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(-2;+\infty)$.

b) $f(3)>f\left(\frac{7}{2}\right)$.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích S bằng $\frac{64}{5}$ (đvdt).

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

d) $f(-2027)>f(-2026)>f(-1)$

Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(0)>f(1)>f(2)$.

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 4.

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

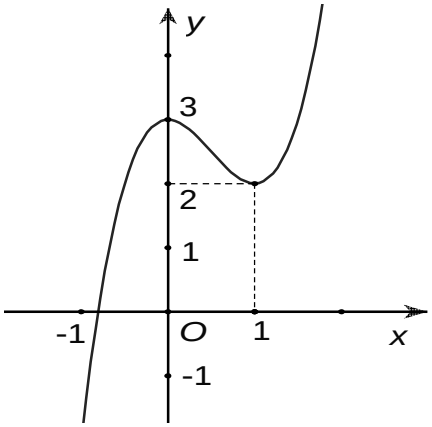
a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) $f(3)>f(2026)>f(2027)$

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



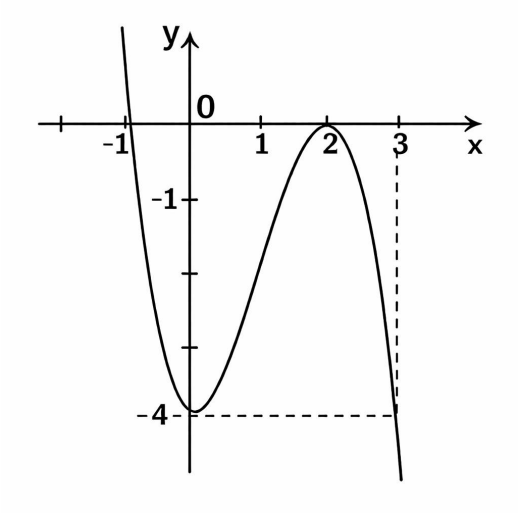
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là $y=x+3$.

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;0)$ và $(-4;0)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích S bằng 8 (đvdt).

Câu 118. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$.

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.

b) $f(-3)<f(0)<f(1)$

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{9}{4};0\right)$.

Câu 119. Cho hàm số $y=x^3-x^2+5x+4$

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2-2x+5$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

c) $f(-10)<f(-3)<f(-2)$

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{28}{9}\right)$.

Câu 120. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực đại là $(-1;2),(1;2)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 cực tiểu là $(0;3)$.

Câu 121. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{-4+2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f(3)<f(2024)<f(2025)$

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(\frac{1}{3};0\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Câu 122. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$.

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) $y'=\frac{3}{(x+2)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-20;-5)$ và $(-2;2026)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(1;0)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 123. Cho hàm số $y=x+\frac{4}{x}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $y'=\frac{x^2-4}{x^2}$ với mọi x.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-10;-3)$ và nghịch biến trên khoảng $(4;2027)$.

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là: $y=2x$.

Câu 124. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$.

a) $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là $y=2x-8$.

Câu 125. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=x+1$

Câu 126. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên.

b) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$

c) $f(2)>f(5)>f(2027)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Câu 127. Cho hàm số $y=\sqrt{9-4x^2}$.

a) Hàm số xác định khi $x\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Câu 128. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in[0;2]$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 129. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-5x+4}$.

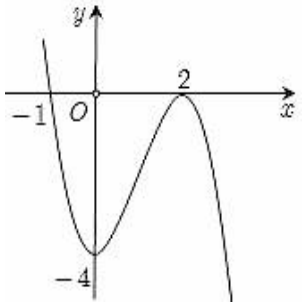
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Đồ thị hàm số có hai cực trị.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Câu 132. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

d) $f(-2025)<f\left(-\dfrac{1}{2024}\right)<f\left(-\dfrac{1}{2025}\right)$

Câu 133. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

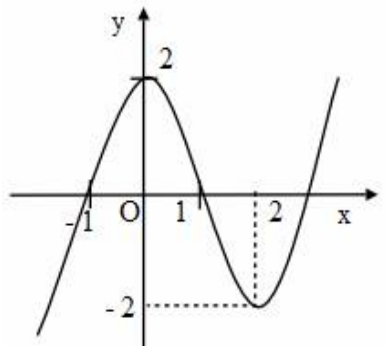
a) Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm nguyên

b) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=1$.

d) $f(1)<f(2)$

Câu 134. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



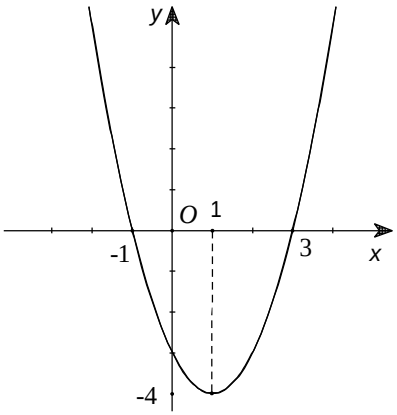
a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) $f(2)>f(3)>f(2024)>f(2025)$

Câu 135. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



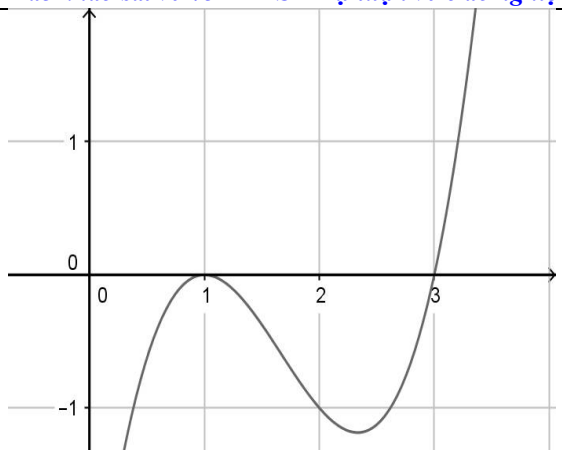
a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

d) $f(-1)<f(0)<f(2)$

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



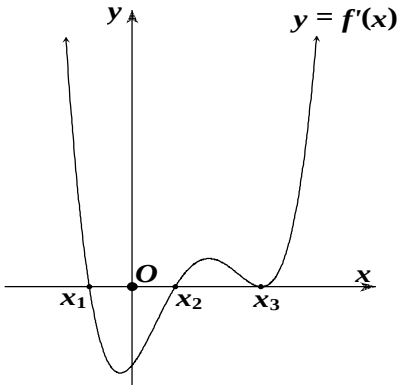
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=1$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu $x=\dfrac{5}{2}$.

Câu 137. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hình vẽ bên.



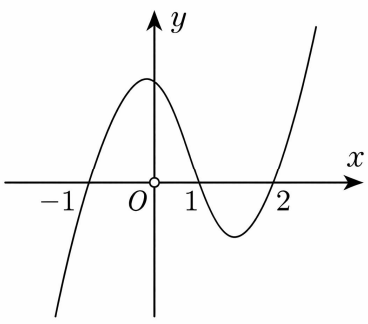
a) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3.

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_2;+\infty)$.

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



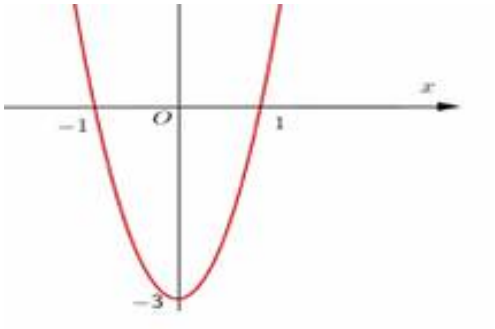
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 139. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 140. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $3t^2-12t+9$

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(1;3)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 141. Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $y'=3mx^2+2mx-(m+1)$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\geq 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4}<m<0$.

Câu 142. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=-m-2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m\geq 0$.

Câu 143. Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2<m<2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m=2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m\leq -2$ hoặc $m\geq 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD}<x_{CT}$ và chỉ khi $0<m<2$

Câu 144. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $m=1$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 2.

Câu 145. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ (m là tham số).

a) $y'=x^2-2mx+m+1$.

b) Với $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Với $m=-1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) Có 4 số nguyên của tham số m thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 146. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Khi $m=1$ thì $f(2025)<f(2024)$

c) Khi $m<-3$ hoặc $m>3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

d) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\leq 5$. Biết $S=(a;b]$. Khi đó $2b-a=\sqrt{61}-1$.

Câu 147. Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) $y'=6x^2+(m-1)x+6m(1-2m)$

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=1-2m$

d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y=-4x$, khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số m bằng $-\dfrac{1}{3}$

Câu 148. Cho hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\geq 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\leq 5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $m\in(5;8]$.

Câu 149. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ khi $m=2$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=2x+2m$

Câu 150. Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in(0;1)$.

b) Nếu đặt $t=\cot x$ thì tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) Nếu đặt $t=\cot x$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 151. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 152. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Biết vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(a;b)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 153. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126\ (s)$ cho bởi hàm số sau đây: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)



Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tính $T=a+b$?

Trả lời: ……..

Câu 154. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I ($I>0$, đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng khi cường độ dòng điện I ở trong khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 155. Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y=f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0		3		8		12
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	40	↗	70	↘	25	↗	60

Tại thời điểm t (giờ) bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

Trả lời: ……..

Câu 156. Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y=-2x^4+36x^2-90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

Trả lời: ……..

Câu 157. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Trả lời: ……..

Câu 158. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x)=0,01x^2+20x+1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Trả lời: ……..

Câu 159. Giả sử tổng chi phí sản xuất x $(0\le x\le 50)$ đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C(x)=\dfrac{x^2}{4}+3x+400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900-6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Trả lời: ……..

Câu 160. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà một công ty thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận:

$P(x)=-0,000001x^3+0,001x^2+5x-500;\quad 0\le x\le 2000$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Câu 161. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p=\dfrac{50}{0.01x^2+1}$, $0\le x\le 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R=px$ đạt cực đại?

Trả lời: ……..

Câu 162. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong

khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 163. Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t)=-t^3+3t^2$ với $t\ge 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

Trả lời: ……..

Câu 164. Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0\,(s)$ cho đến thời điểm $t=126\,(s)$ được cho bởi công thức $v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi gần bằng bao nhiêu ft/s? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Trả lời: ……..

Câu 165. Vận tốc trung bình của dòng xe trên đoạn đường 124 từ 6A.M. đến 10A.M. được xấp xỉ bởi $f(t)=20t-40\sqrt{t}+50,\quad 0\le t\le 4$ trong đó t tính bằng giờ kể từ 6 A.M. và $f(t)$ tính bằng km/giờ. Hỏi vào thời điểm mấy giờ trong buổi sáng (giữa 6A.M. và 10A.M.) thì vận tốc trung bình thấp nhất?

Trả lời: ……..

Câu 166. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $N(t)=45t^2-t^3, 0\le t\le 30$ (người). Nếu xem $N'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

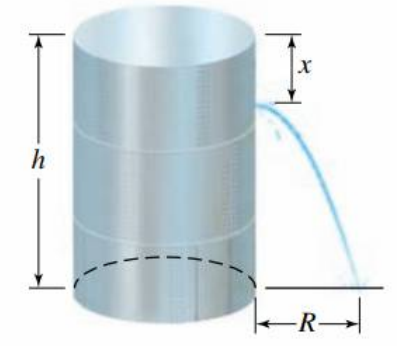
Trả lời: ……..

Câu 167. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x)=k\left(x_0-x\right)\cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$, trong đó k là hằng số $(k>0)$ và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Khi đó $x=\frac{a}{b}x_0$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a,b\in\mathbb{Z}$) thì vận tốc luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Câu 168. Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, vận tốc tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V=\sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R=2\sqrt{x(h-x)}$. Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x=K.h,(K\in\mathbb{R})$ so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K?



Trả lời: ……..

Câu 169. Một bể ban đầu chứa 10 gal dung dịch muối với 2 lb muối. Dung dịch vào có nồng độ $1.5lb/gal$ chảy vào với tốc độ $3gal/$ phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ $4gal/$ phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là x (pound), với:

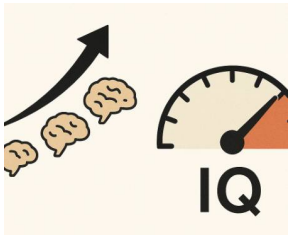
$$x = f(t) = 1,5(10-t) - 0,0013(10-t)^4, \quad 0 \le t \le 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu lb? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: ……..

Câu 170. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46, \quad 5 \le t \le 19$



Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quản đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Câu 171. Biết hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 44$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 172. Biết hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Câu 173. Biết hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(a;+\infty)$. Tính giá trị của a.

Trả lời: ……..

Câu 174. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 175. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Câu 176. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $4b-a$.

Trả lời: ……..

Câu 177. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ……..

Câu 178. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ……..

Câu 179. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 180. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $5b-4a$.

Trả lời: ……..

Câu 181. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a-2025b$.

Trả lời: ……..

Câu 182. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

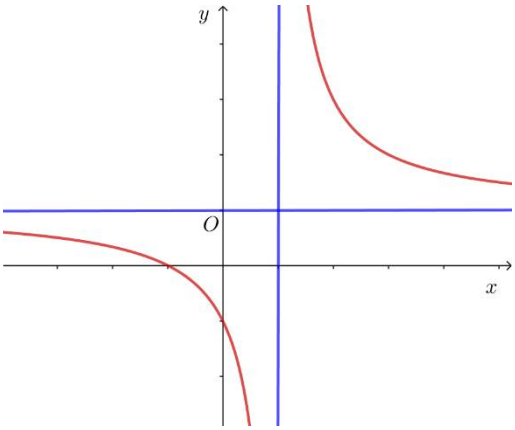
Câu 183. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 184. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in\left[-2025;2025\right]$?

Trả lời: ……..

Câu 185. Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $\left(-1;18\right)$ và $\left(3;-16\right)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

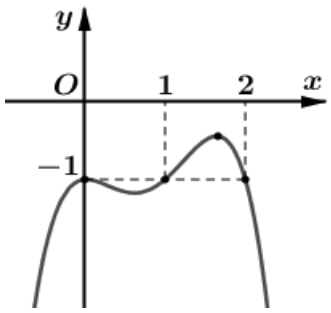
Câu 186. Biết đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\quad\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$ có một điểm cực trị là $A\left(-1;29\right)$ và đi qua điểm $B\left(2;2\right)$. Tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 187. Hàm số $y=\left|x^2+5x+6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

Trả lời: ……..

Câu 188. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f\left(x\right)$ có mấy cực trị?

Trả lời: ……..

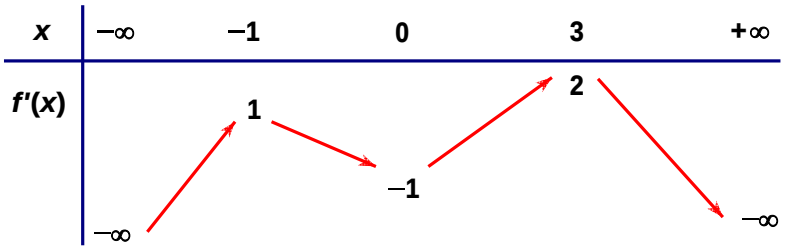
Câu 189. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-2a$.

Trả lời: ……..

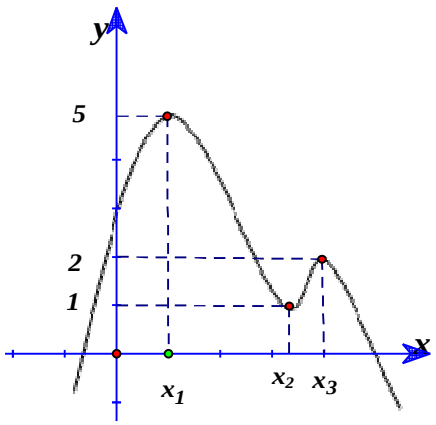
Câu 190. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

Trả lời: ……..

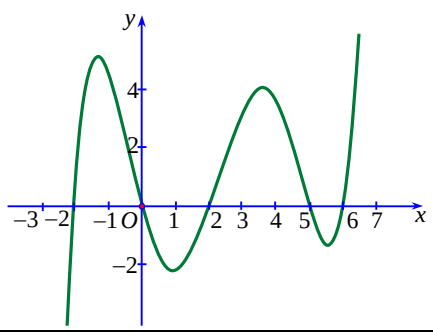
Câu 191. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ……..

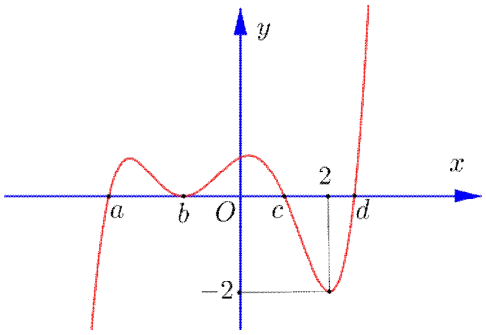
Câu 192. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực tiểu ?

Trả lời: ……..

Câu 193. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ……..

Câu 194. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 195. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

Trả lời: ……..

Câu 196. Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi giá trị tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 197. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Trả lời: ……..

Câu 198. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-(m^2+5m)x^3+6mx^2+6x-6$ có cực trị tại $x=1$.

Trả lời: ……..

Câu 199. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Trả lời: ……..

Câu 200. Với giá trị tham số $m\in(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 201. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m\in[-2020;2020)$ để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị ?

Trả lời: ……..

Câu 202. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Biết giá trị nhỏ nhất của $abc+ab+c=-\frac{m}{n}$, với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 203. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+3x-2$ không có cực trị.

Trả lời: ……..

Câu 204. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-100;100]$ để hàm số có cực đại, cực tiểu?

Trả lời: ……..

Câu 205. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=mx^4-(m+1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 206. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số: $y=\frac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$ có 2 cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 207. Cho hàm số $y=\frac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho cũng đi qua điểm $A(1;-1)$.

Trả lời: ……..

Câu 208. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\frac{x^2+mx}{1-x}$ có 2 điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 209. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ……..

Câu 210. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 211. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ……..

Câu 212. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-10;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ có cực đại và cực tiểu.

Trả lời: ……..

Câu 213. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-2}{mx-1}$ có cực trị?

Trả lời: ……..

Câu 214. Đồ thị hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+n$ có điểm cực tiểu là $I(1;3)$. Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 215. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ……..

Câu 216. Cho hàm số sau $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Câu 217. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+4x+2027$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Câu 218. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2026$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

Trả lời: ……..

Câu 219. Biết giá trị tham số $m\in\left[a;\dfrac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2}{c}$

Trả lời: ……..

Câu 220. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x+2027$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Câu 221. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Trả lời: ……..

Câu 222. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Câu 223. Cho hàm số $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 224. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2024;2025)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Trả lời: ……..

Câu 225. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ……..

Câu 226. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ……..

Câu 227. Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

Trả lời: ……..

Câu 228. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

Trả lời: ……..

Câu 229. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;5)$?

Trả lời: ……..

Câu 230. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Trả lời: ……..

Câu 231. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$?

Trả lời: ……..

Câu 232. Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 233. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2m+3}{x+m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

Trả lời: ……..

Câu 234. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ……..

Câu 235. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 236. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 237. Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ thì hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 238. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

Trả lời: ……..

Câu 239. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời: ……..

Câu 240. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Câu 241. Cho hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Câu 242. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

Trả lời: ……..

Câu 243. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

Trả lời: ……..

Câu 244. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 245. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

Trả lời: ……..

Câu 246. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

Trả lời: ……..

Câu 247. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1+m}{5x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

Trả lời: ……..

Câu 248. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2x-1-5m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$?

Trả lời: ……..

Câu 249. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

Trả lời: ……..

Câu 250. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Câu 251. Để cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ thì giá trị của tham số m có giá trị $m\le -\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 252. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Trả lời: ……..

Câu 253. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2027;2027]$ để hàm số $y=\cos 2x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Câu 254. Biết $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b\in\mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\dfrac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

Trả lời: ……..

Câu 255. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Trả lời: ……..

Câu 256. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Trả lời: ……..

Câu 257. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7$.

Trả lời: ……..

Câu 258. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$?

Trả lời: ……..

Câu 259. Với các giá trị thực của tham số $m\in\left(\frac{a}{b};+\infty\right)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x+2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

Trả lời: ……..

Câu 260. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

Trả lời: ……..

Câu 261. Tính tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Trả lời: ……..

Câu 262. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

Trả lời: ……..

Câu 263. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

Trả lời: ……..

Câu 264. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B và thoả mãn $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (trong đó O là gốc tọa độ) .

Trả lời: ……..

Câu 265. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx}{1 - x}$. Giá trị tham số m bằng bao nhiêu để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10?

Trả lời: ……..

Câu 266. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$. Gọi $A; B$ là hai điểm cực trị, tính tổng các giá trị của tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Trả lời: ……..

Câu 267. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Trả lời: ……..

Câu 268. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-50; 50)$ để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Trả lời: ……..

Câu 269. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2mx + 5}{x - 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y = 2x$.

Trả lời: ……..

Câu 270. Tìm giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: ……..

CHƯƠNG 1
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1
TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

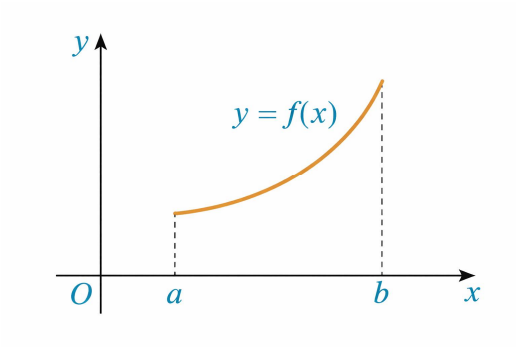
a. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng , một đoạn hoặc nửa khoảng và $y=f(x)$ là hàm số xác định trên K.

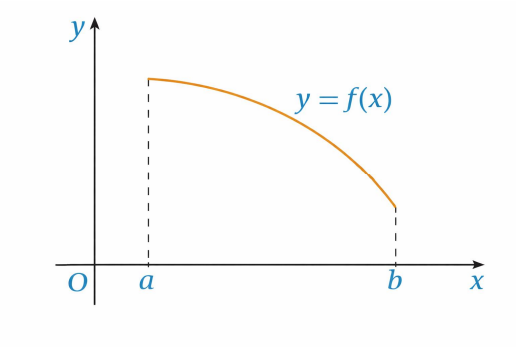
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **đồng biến** trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là **nghịch biến** trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ **đi lên từ trái sang phải.** Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ **đi xuống từ trái sang phải.**



Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$



Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y=f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số đó.
- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định.

Định lí 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên tập khoảng K.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x)<0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý:

- Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)$ bằng 0 với một số hữu hạn điểm trong khoảng K.
- Nếu $f'(x)=0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

b. Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.

Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. Cực trị của hàm số

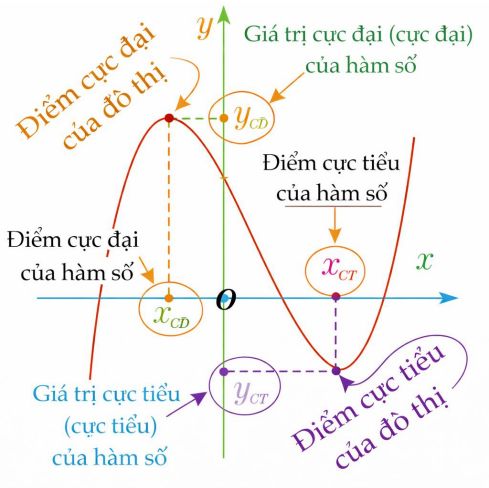
a. Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Các điểm cực trị đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (hay **cực trị**) của hàm số.



b. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lý : Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Chú ý: Để tìm điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- *Bước 2:* Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- *Bước 3:* Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- *Bước 4:* Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

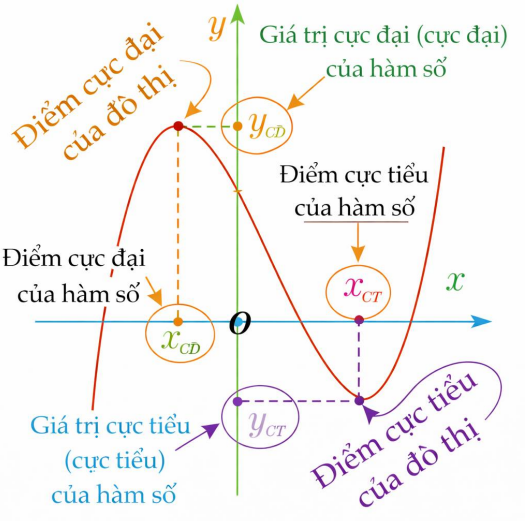
DẠNG 1
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Để xét tính đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,3,...,n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y'=f'(x)$.
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý:

- Cần phân biệt điểm cực trị của hàm số với điểm cực trị của đồ thị hàm số.



- Ôn lại kiến thức xét dấu tam thức bậc hai: $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lớp 10)

+ Nếu $\Delta<0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta=0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

+ Nếu $\Delta > 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức $f(x) = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a		

• Cách tính nhanh đạo hàm hàm số dạng hữu tỉ (phân thức).

+ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

+ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e} \Rightarrow y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$

2. Viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số

a. Phương pháp viết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba:

$$y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d \ (a \neq 0)$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm bậc ba. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Chia y cho y' ta được: $y = g(x).y' + Ax + B$

Bước 2: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = Ax + B$

b. Phương pháp viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

Cách 1: Tự luận

Bước 1: Tìm tọa độ 2 điểm cực trị của hàm hữu tỉ. Giả sử 2 điểm cực trị đó là $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$.

Bước 2: Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y = ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta tìm được a, b.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Tính $\dfrac{(ax^2+bx+c)'}{(dx+e)'} = \dfrac{2ax+b}{d} = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$

Bước 2: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là: $y = \dfrac{2a}{d}.x + \dfrac{b}{d}$.

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Xét tính đơn điệu, tìm cực trị và viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=x^3+3x^2-9x$. b) $y=x^3+3x^2+3x+2025$ c) $y=-x^3+x^2-x$

Lời giải

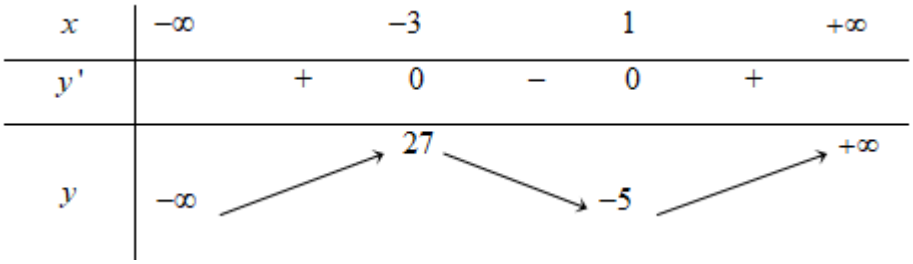
a) $y=x^3+3x^2-9x$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• $y'=3x^2+6x-9$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=1$.

• Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y=f(-3)=27$, đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y=f(-1)=-5$.

* Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực tiểu $A(1;-5)$ và điểm đạt cực đại $B(-3;27)$

Cách 1: Tự luận

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-5=a+b\\27=-3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-8\\b=3\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-8x+3$

Cách 2: Trắc nghiệm

$y=x^3+3x^2-9x\Rightarrow y'=3x^2+6x-9$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).\left(3x^2+6x-9\right)-8x+3$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-8x+3$

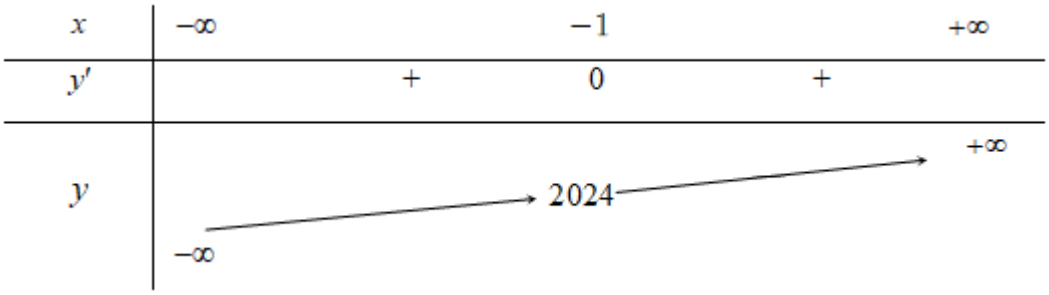
b) $y=x^3+3x^2+3x+2025$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• $y'=3x^2+6x+3$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x+3=0\Leftrightarrow x=-1$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;+\infty)$

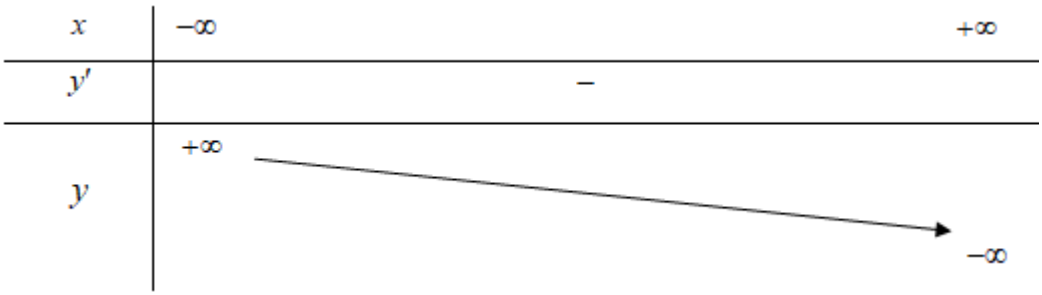
+ Hàm số không có cực trị.

c) $y=-x^3+x^2-x$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-3x^2+2x-1<0,\forall x\in\mathbb{R}$ do $\begin{cases}a=-3<0\\ \Delta'=1-(-3)(-1)=-2<0\end{cases}$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

+ Hàm số không có cực trị.

Bài 2. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=-x^4+6x^2-8x+1$ b) $y=x^4-2x^2-3$ c) $y=-x^4-x^2+2024$

Lời giải

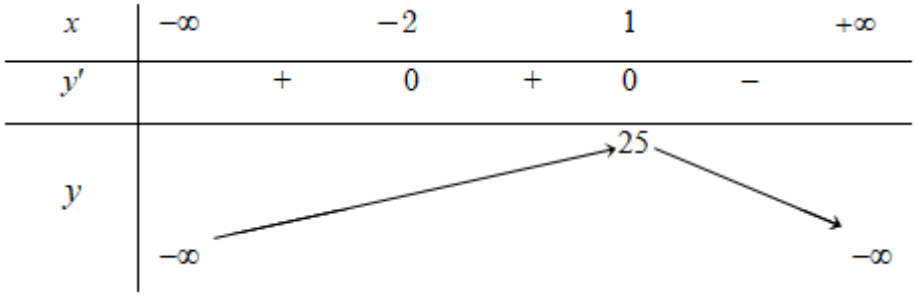
a) $y=-x^4+6x^2-8x+1$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-4x^3+12x^2-8=-4(x-1)^2(x+2)$.

$y'=0\Leftrightarrow -4(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y=f(1)=25$, hàm số không có cực tiểu.

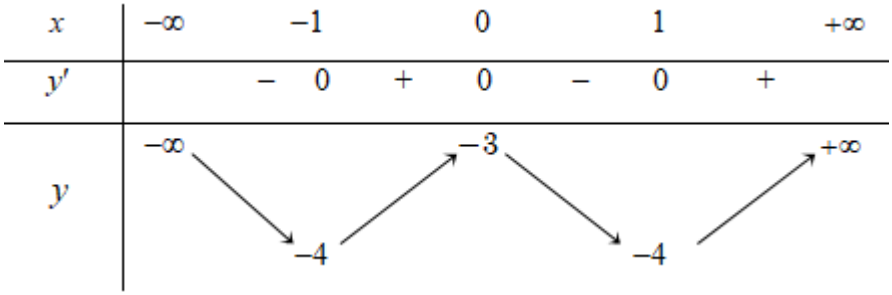
b) $y=x^4-2x^2-3$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=-3\\f(-1)=-4\\f(1)=-4\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ}=y(0)=-3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=-1$ với giá trị cực tiểu là: $y_{CT}=y(1)=y(-1)=-4$.

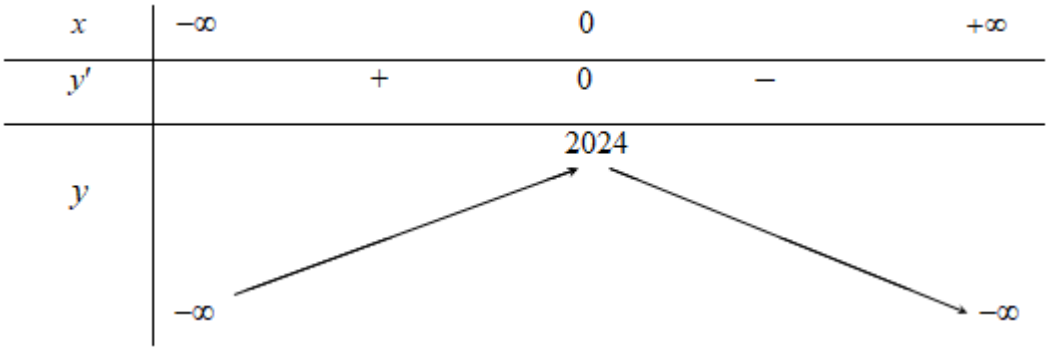
c) $y=-x^4-x^2+2024$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=-4x^3-2x=-2x\left(2x^2+1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow -2x\left(2x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y=f(0)=2024$, hàm số không có cực tiểu.

Bài 3. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. b) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$ c) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

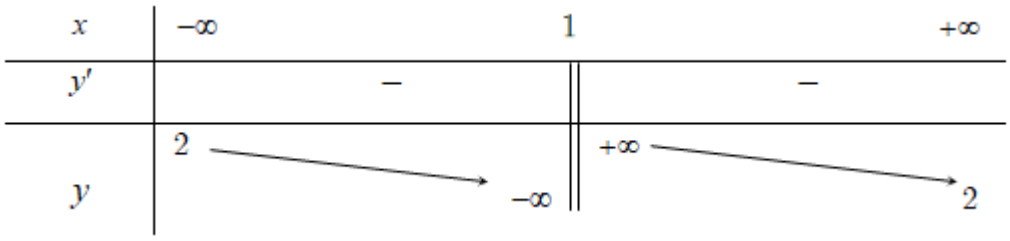
Lời giải

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

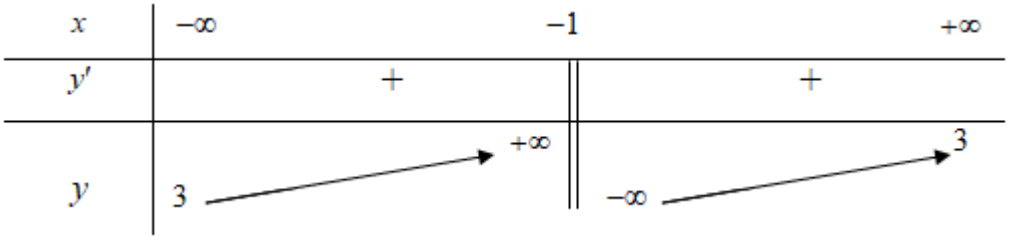
+ Hàm số không có cực trị.

b) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

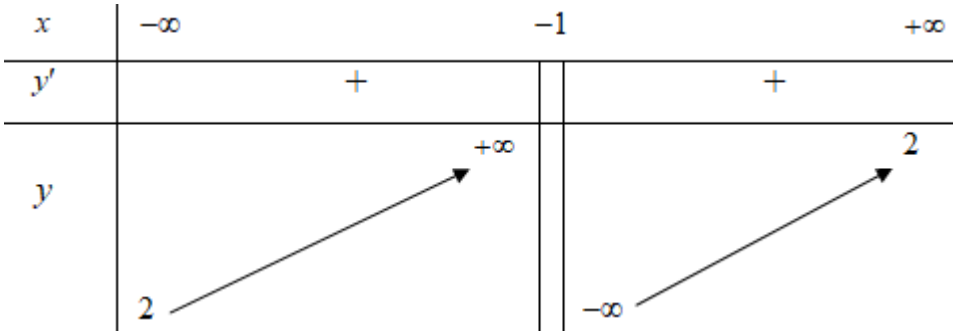
+ Hàm số không có cực trị.

c) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Bài 4. Xét tính đơn điệu, tìm cực trị và viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. c) $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải

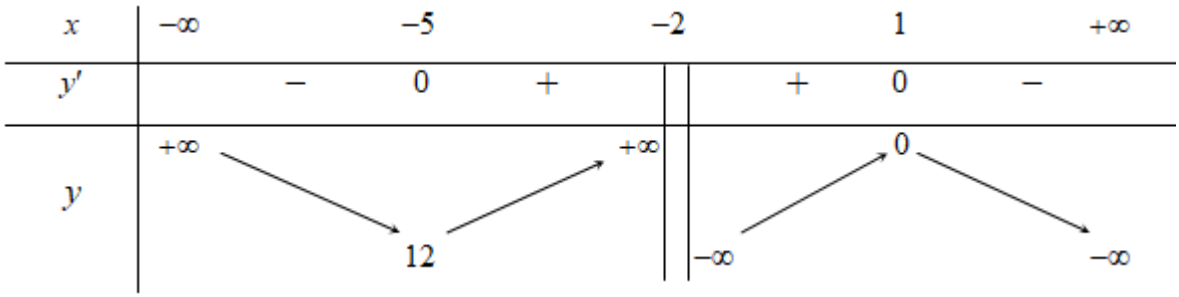
a) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2},\forall x\neq 2$.

• $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CĐ}=y(1)=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=y(-5)=12$.

* Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực tiểu $A(-5;12)$ và điểm đạt cực đại $B(1;0)$

Cách 1: Tự luận

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}12=-5a+b\\0=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x+2$

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $\dfrac{\left(-x^2+2x-1\right)'}{(x+2)'}=\dfrac{-2x+2}{1}=-2x+2$

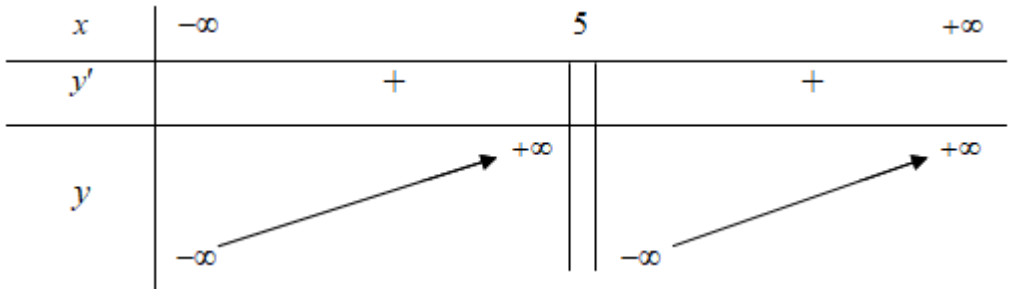
Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x+2$

b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

• Ta có: $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}>0,\forall x\neq 5$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$.

+ Hàm số không có cực trị.

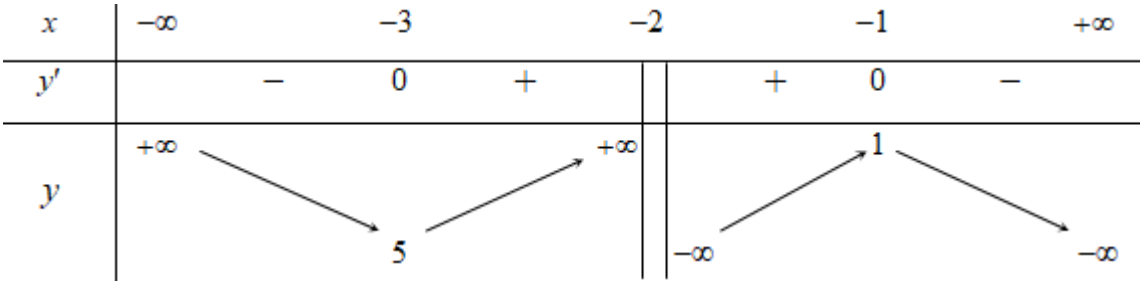
c) $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

• Ta có: $y'=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{1-(x+2)^2}{(x+2)^2},\forall x\neq -2$

$$y'=0\Leftrightarrow 1-(x+2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $y_{CT}=y(-3)=5$, cực đại tại $x=-1$ với $y_{CĐ}=y(-1)=1$.

* Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực tiểu $A(-3;5)$ và điểm đạt cực đại $B(-1;1)$

Cách 1: Tự luận

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}5=-3a+b\\1=-a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x-1$

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $-x+1-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{-x^2-x+1}{x+2}=\dfrac{(-x^2-x+1)'}{(x+2)'}=\dfrac{-2x-1}{1}=-2x-1$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x-1$

Bài 5. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-x^3+3x^2}$ b) $y=x\sqrt{4-x^2}$ c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$

Lời giải

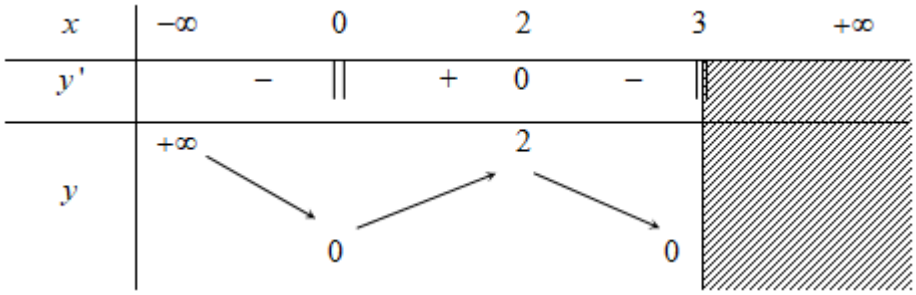
a) $y=\sqrt{-x^3+3x^2}$.

• Tập xác định: $D=(-\infty;3]$

• Ta có: $y'=\dfrac{-3\left(x^2-2x\right)}{2\sqrt{-x^3+3x^2}}$, $x<3,\ x\neq 0$. Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x=0,\ x=3$.

Suy ra, trên khoảng $(-\infty;3)$: $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-3\left(x^2-2x\right)}{2\sqrt{-x^3+3x^2}}=0\Leftrightarrow x=2$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;3)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và $y_{CĐ}=y(2)=2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=0$.

b) $y=x\sqrt{4-x^2}$.

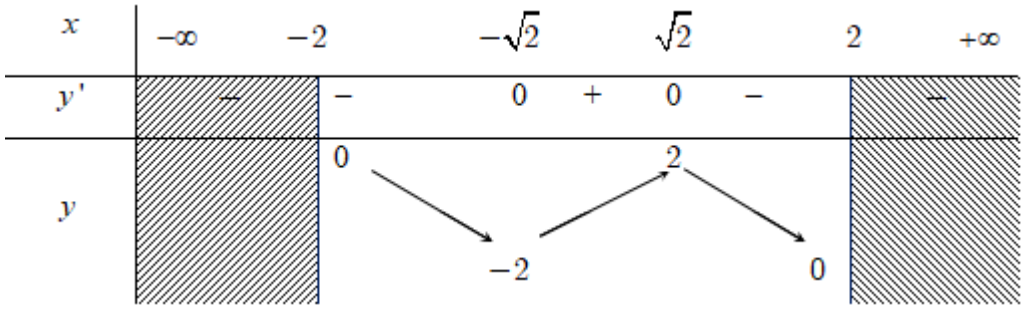
• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

• Ta có: $y'=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$.

• Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x=-2,\ x=2$.

• Suy ra, trên khoảng $(-2;2)$: $y'=0\Leftrightarrow 4-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-2;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\sqrt{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(\sqrt{2}\right)=2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\sqrt{2}$ và $y_{CT}=y\left(-\sqrt{2}\right)=-2$.

c) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$

• Hàm số đã cho xác định khi: $x^2-x+3>0$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=\sqrt{x^2-x+3}-\dfrac{(2x-1)(x+2)}{2\sqrt{x^2-x+3}}=\dfrac{-7x+8}{2\sqrt{x^2-x+3}}$.

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-7x+8}{2\sqrt{x^2-x+3}}=0\Leftrightarrow -7x+8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{7}$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{8}{7}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	$\dfrac{22\sqrt{155}}{155}$	↘	
	-1				-1

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{8}{7}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{8}{7};+\infty\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{8}{7}$ và $y_{CĐ}=y\left(\dfrac{8}{7}\right)=\dfrac{22\sqrt{155}}{155}$. Hàm số không có cực tiểu.

Bài 6. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số sau: $y=\left|x^2+5x+6\right|$.

Lời giải

$y=\left|x^2+5x+6\right|$.

Cách 1:

$y=\left|x^2+5x+6\right|=\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}$

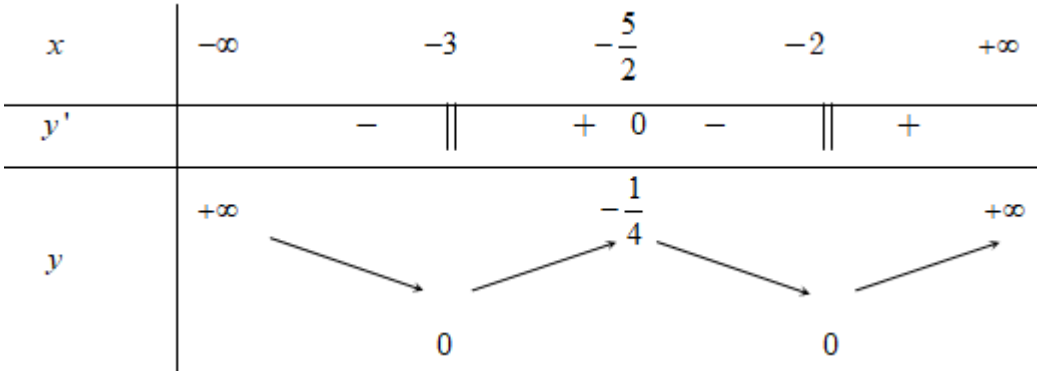
• Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)}{\sqrt{\left(x^2+5x+6\right)^2}}\qquad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-3\}$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=-3$ và $x=-2$.

$$y'=0\Leftrightarrow(2x+5)\left(x^2+5x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{2}\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-3;-\dfrac{5}{2}\right)$ và $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $\left(-\dfrac{5}{2};-2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{5}{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=-2$ với $y_{CT}=y(-3)=y(-2)=0$.

Cách 2: $y=\left|x^2+5x+6\right|\quad(1)$

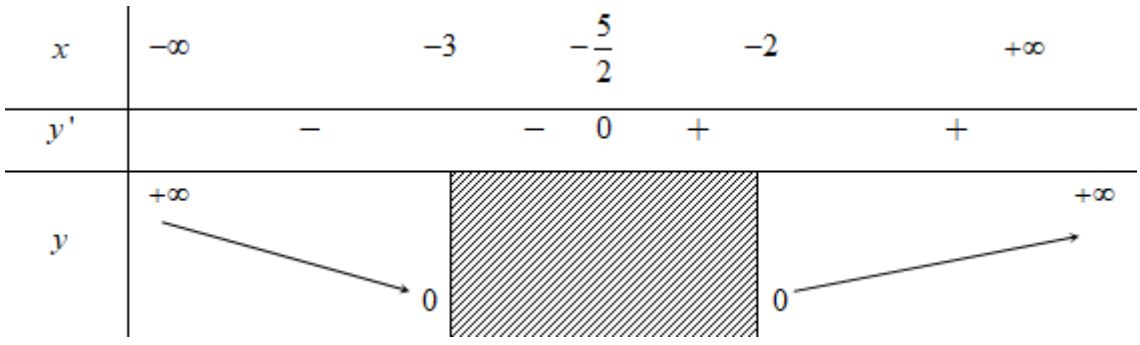
Trường hợp 1: xét $x^2+5x+6\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3\\x\ge -2\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow y=x^2+5x+6\qquad\forall x\in(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$

$\Rightarrow y'=2x+5$

$y'=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

- Bảng biến thiên:



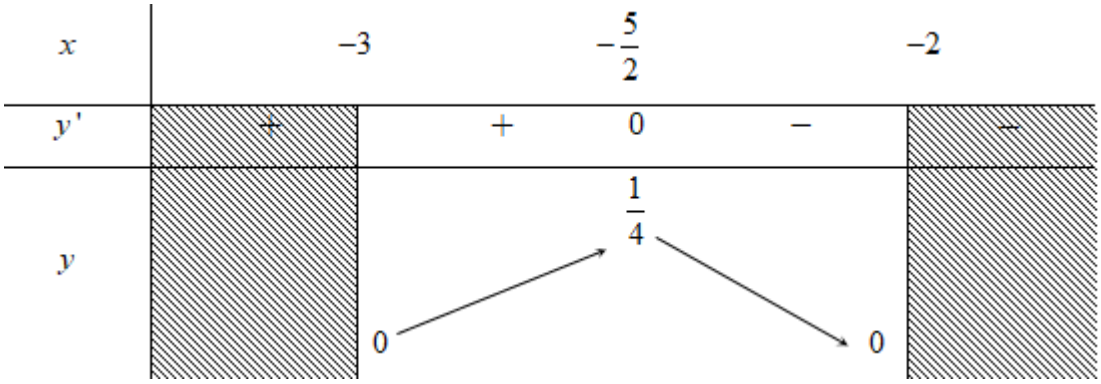
Trường hợp 2: xét $x^2+5x+6<0\Leftrightarrow -3<x<-2$

$(1) \Leftrightarrow y=-\left(x^2+5x+6\right) \quad \forall x\in(-3;-2)$

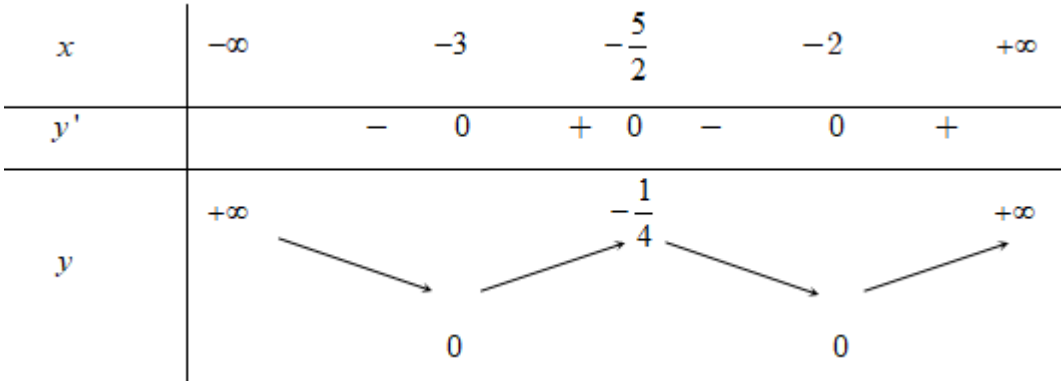
$\Rightarrow y'=-2x-5$

$y'=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

• Bảng biến thiên:



Kết hợp 2 trường hợp ta có: Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-3;-\dfrac{5}{2}\right)$ và $(-2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $\left(-\dfrac{5}{2};-2\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{5}{2}$ và $y_{CĐ}=y\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $x=-2$ với $y_{CT}=y(-3)=y(-2)=0$.

Bài 7. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x-\sin x$ với $x\in[0;\pi]$.

b) $y=2\sin x+\cos 2x$ với $x\in[0;\pi]$.

Lời giải

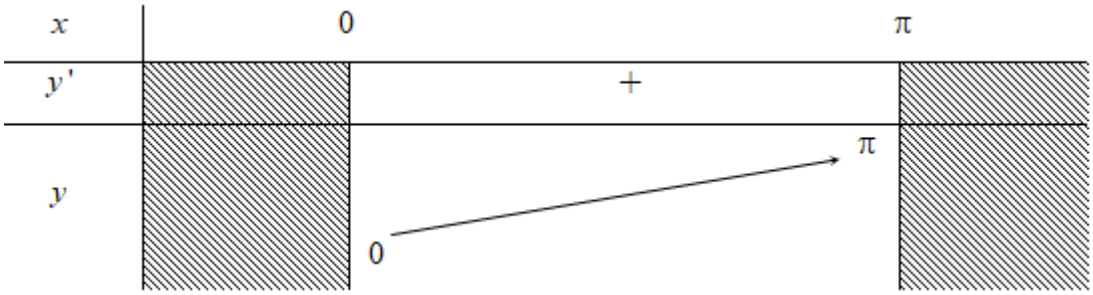
a) $y=x-\sin x$ với $x\in[0;\pi]$.

• Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.

• Ta có: $y'=1-\cos x$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;\pi] \\ 1-\cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;\pi] \\ \cos x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;\pi] \\ x=k2\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên $[0;\pi]$.

+ Hàm số không có cực trị.

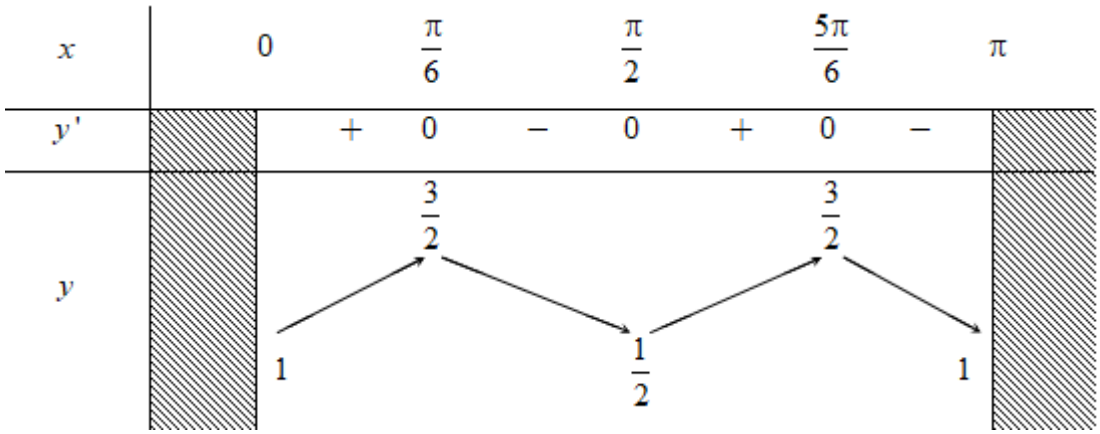
b) $y=2\sin x+\cos 2x$ với $x\in[0;\pi]$.

- Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[0;\pi]$.

- Ta có: $y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-4\cos x.\sin x=2\cos x(1-2\sin x), x\in[0;\pi]$.

Trên đoạn $[0;\pi]$: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;\pi] \\ \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{6} \\ x=\dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ và $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{5\pi}{6};\pi\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{6}$ và $x=\frac{5\pi}{6}$ với $y_{CĐ}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{\pi}{2}$ với $y_{CT}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Bài 8. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=e^{2x^2-2x+1}$ b) $y=x^2e^{-x}$ c) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$

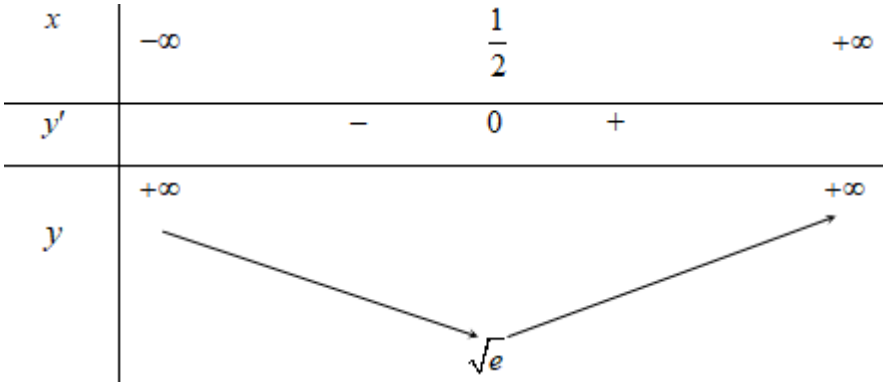
Lời giải

a) $y=e^{2x^2-2x+1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có : $y'=\left(4x-2\right)e^{2x^2-2x+1}$

$y'=0\Leftrightarrow\left(4x-2\right)e^{2x^2-2x+1}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{1}{2}$ với $y_{CĐ}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Hàm số không có cực đại

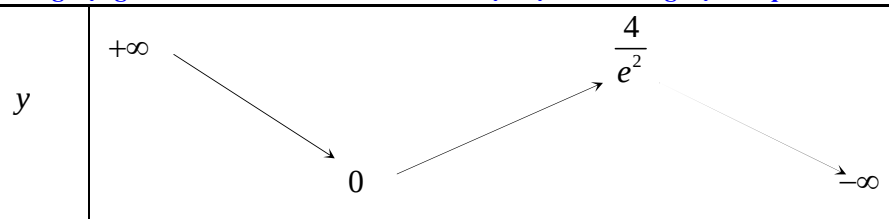
b) $y=x^2e^{-x}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}\left(2-x\right)$

$y'=0\Leftrightarrow xe^{-x}\left(2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ với $y_{CĐ}=y(2)=\dfrac{4}{e^2}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ với $y_{CT}=y(0)=0$.

c) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Ta có $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow y'=2x\mathrm{e}^{2x}+\left(x^2-2\right)2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+x-2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e^4}$	↘	$\dfrac{1}{e^2}$	↗	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;+\infty)$. , nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ với $y_{CĐ}=y(-2)=\dfrac{2}{e^4}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ với $y_{CT}=y(1)=\dfrac{1}{e^2}$.

Bài 9. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ b) $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$ c) $y=\dfrac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$

Lời giải

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Ta có : $y'=1-\dfrac{4x}{x^2+3}=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$1-4\ln 2$	↘	$3-2\ln 12$	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CĐ}=y(1)=1-4\ln 2$.

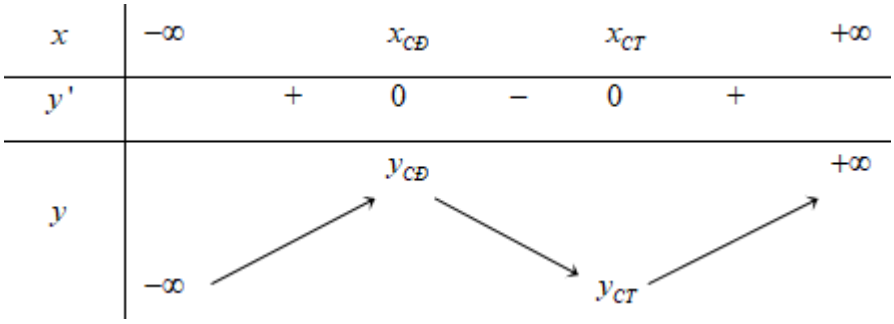
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=y(3)=3-2\ln 12$.

c) $y=\left(x^2+4x+1\right).e^{x-2}$

DẠNG 2
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết bảng biến thiên

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và giả sử có bảng biến thiên sau:

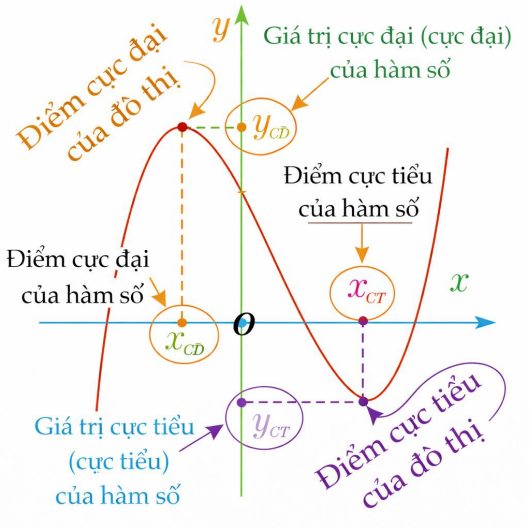


Từ bảng biến thiên trên ta có:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$.
- Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$.
- Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x=x_{CT}$ và giá trị cực đại $y=y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y=y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ};y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT};y_{CT})$.

2. Cách xét tính đơn điệu và cực trị của hàm số khi biết đồ thị hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ và có đồ thị hàm số như sau:

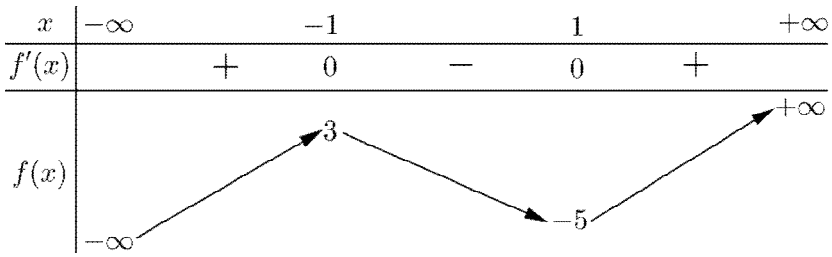


Từ đồ thị trên ta có:

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y=f(x)$ "đi lên" trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_{CĐ})$ và $(x_{CT};+\infty)$

- Đi từ trái sang phải đồ thị hàm số $y=f(x)$ "đi xuống" trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_{CĐ};x_{CT})$.
- Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=x_{CĐ}$, điểm cực tiểu $x=x_{CT}$ và giá trị cực đại $y=y_{CĐ}$, giá trị cực tiểu $y=y_{CT}$.
- Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(x_{CĐ};y_{CĐ})$ và điểm cực tiểu $(x_{CT};y_{CT})$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

a) Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=f(-1)=3$, cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=f(1)=-5$.

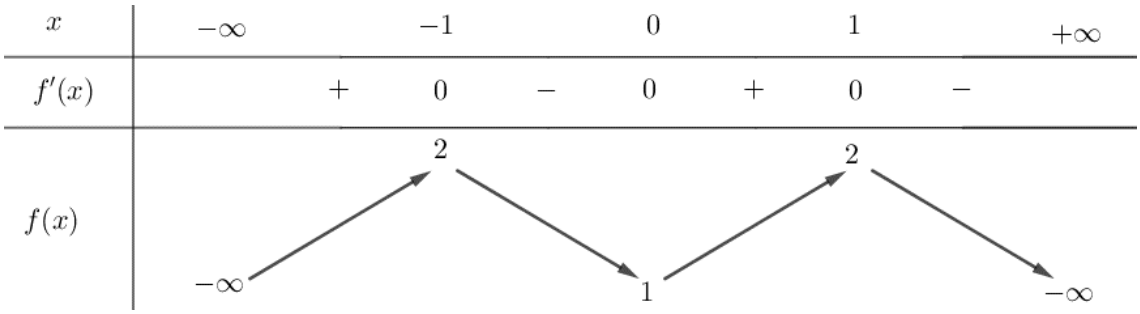
b) Đồ thị hàm số trên có điểm cực tiểu $A(1;-5)$ và điểm đạt cực đại $B(-1;3)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-5=a+b\\3=-a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-1\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-4x-1$

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

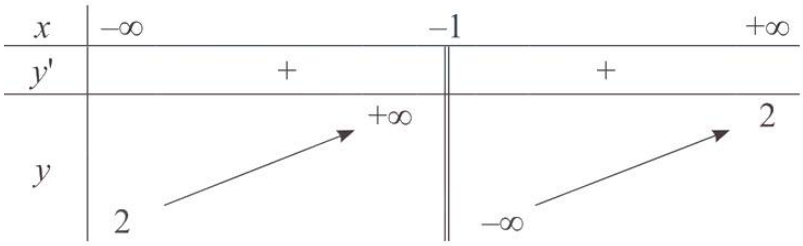
Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $x=1$ với $y_{CĐ}=f(-1)=f(1)=2$, cực tiểu tại $x=0$ với $y_{CT}=f(0)=1$.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



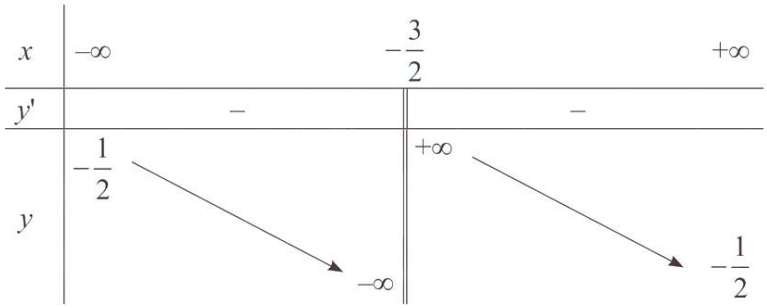
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$
- Hàm số không có cực trị

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:



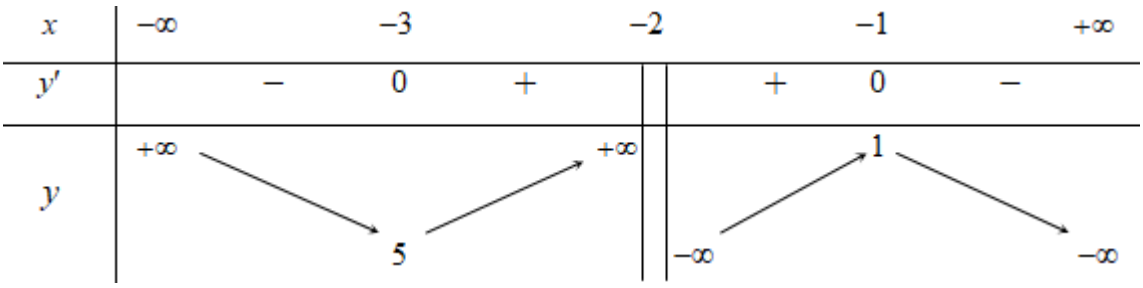
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$
- Hàm số không có cực trị

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

a) Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CĐ}=f(-1)=1$, cực tiểu tại $x=-3$ và $y_{CT}=f(-3)=5$.

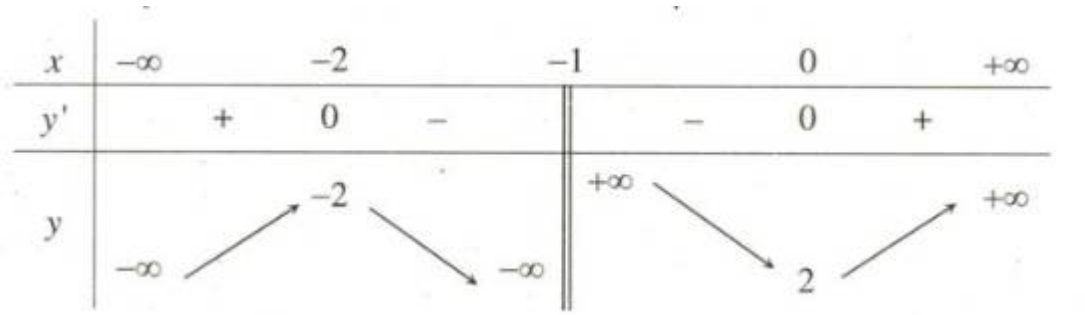
b) Đồ thị hàm số trên có điểm cực tiểu $A(-3;5)$ và điểm đạt cực đại $B(-1;1)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}5=-3a+b\\1=-a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x-1$

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

a) Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$
- Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=f(-2)=-2$, cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=2$.

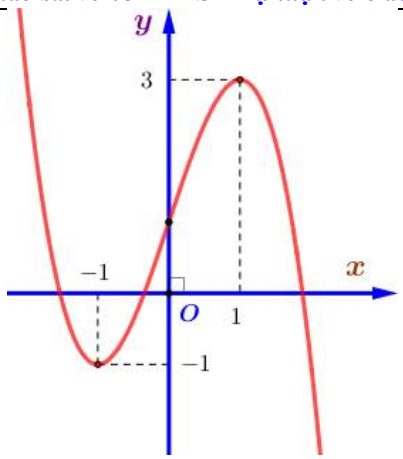
b) Đồ thị hàm số trên có điểm cực tiểu $A(0;2)$ và điểm đạt cực đại $B(-2;-2)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2=0.a+b\\-2=-2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=2x+2$

Bài 7. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

a) Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng và $(-1;1)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1;3)$, điểm cực tiểu là $(-1;-1)$.

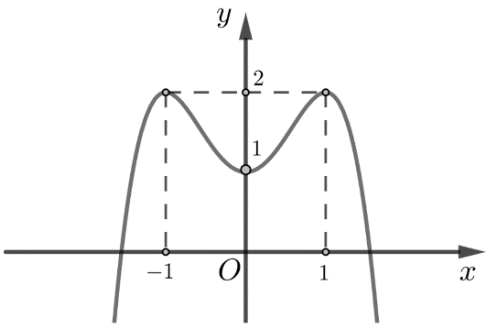
b) Đồ thị hàm số trên có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm đạt cực đại $B(1;3)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-1=-a+b\\3=a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=2x+1$

Bài 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



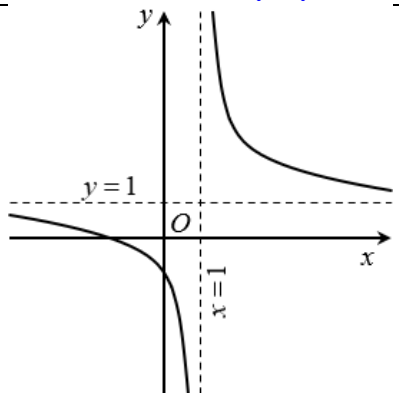
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại là $(-1;2)$ và $(1;2)$, 1 điểm cực tiểu là $(-1;-1)$.

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



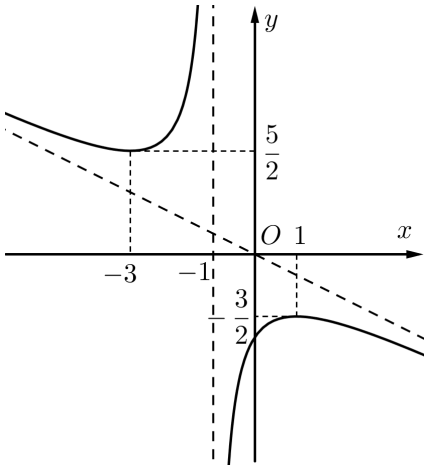
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

b) Viết phương đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

a) Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$
- Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$, điểm cực tiểu là $\left(-3;\frac{5}{2}\right)$.

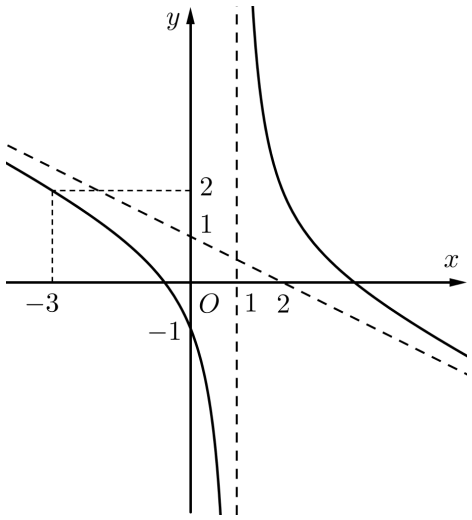
b) Đồ thị hàm số trên có điểm cực tiểu $A\left(-3;\frac{5}{2}\right)$ và điểm đạt cực đại $B\left(1;-\frac{3}{2}\right)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{5}{2} = -3a + b \\ -\frac{3}{2} = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y = -x - \frac{1}{2}$

Bài 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



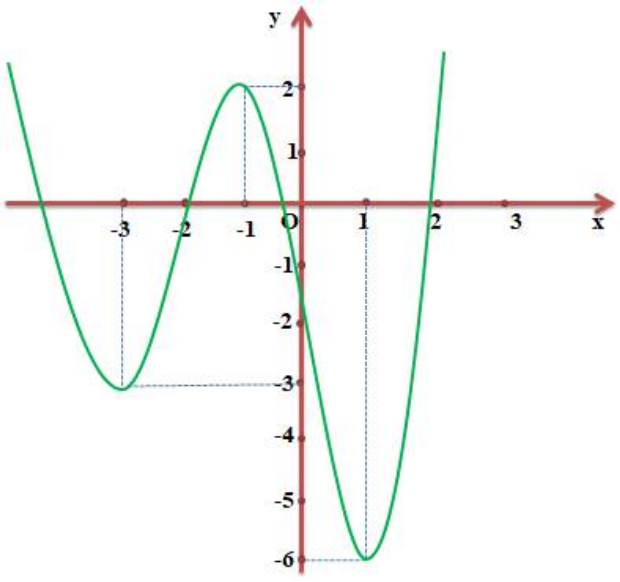
Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$
- Đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

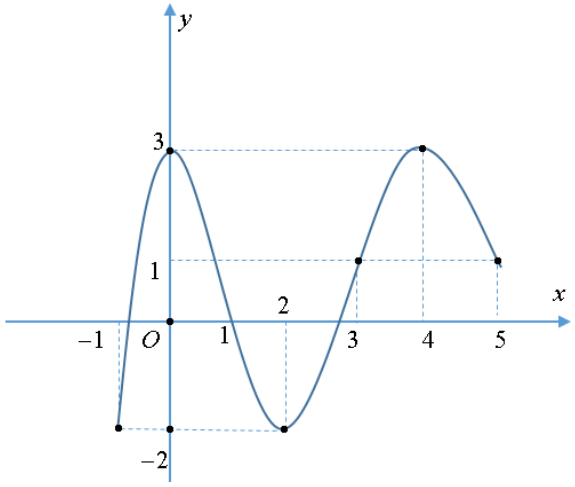
Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;1)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(-3;3)$ và $(1;-6)$; điểm cực đại $(-1;2)$

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$.

b) Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có:

a) hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;4)$; nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;5)$

b) đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(2;-2)$; điểm cực đại $(0;3)$ và $(4;3)$

DẠNG 3
XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT HÀM SỐ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên tập $K\subset\mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

- Nếu $f'(x)>0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Nếu $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a;b)\subset\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Chú ý: Đối với $y=f(x)$ là hàm đa thức:

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Trên khoảng $(a;b)$ nếu đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành và những điểm thuộc trục hoành thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+2024)(x-2025)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu? Tìm điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số nếu có.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+2024)(x-2025)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2024\\x=2025\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-2024		2025		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) $f'(x)>0$ khi $x<-2024$ và $x>2025$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2024)$ và $(2025;+\infty)$,

$f'(x)<0$ khi $-2024<x<2025$ và nên hàm số $y=f(x)$ nghịch đồng biến trên khoảng $(-2024;2025)$.

b)

• Qua $x=2025$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=2025$ là điểm cực tiểu của hàm số. Khi đó đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(2025;f(2025))$.

• Qua $x=-2024$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=-2024$ là điểm cực đại của hàm số. Khi đó đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-2024;f(-2024))$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2(x-1)^3(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng của $f'(x)$, ta có :

a) $f'(x)>0$ khi $1<x<2$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

$f'(x)\le 0$ khi $x<1$ và $f'(x)<0$ khi $x>2$ nên nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

b)

• Qua $x=1$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=2$ hàm số $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm dưới đây

x	$-\infty$		-3		0		-3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ bảng của y', ta có :

a)

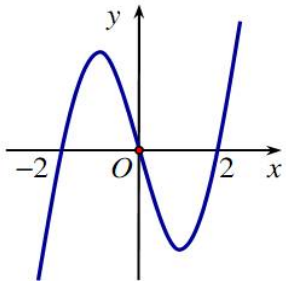
- $y'>0$ khi $x\in(-\infty;-3)$ và $x\in(0;3)$, do đó hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.
- $y'<0$ khi $x\in(-3;0)$ và $x\in(3;+\infty)$, do đó hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

b)

- Qua $x=0$ hàm số y' đổi dấu từ âm sang dương nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- Qua $x=-3$ và $x=3$ hàm số y' đổi dấu từ dương sang âm nên $x=-3$ và $x=3$ là các điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 2 cực đại và 1 cực tiểu.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Cách 2: Cách làm tự luận (lập bảng biến thiên)

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

a) Từ bảng biến thiên, ta có:

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

b) Từ bảng biến thiên, ta có:

- $x=-2$ và $x=2$ là các điểm cực tiểu của hàm số.
- $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Cách 2: Cách làm trắc nghiệm

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a) Trên khoảng: $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

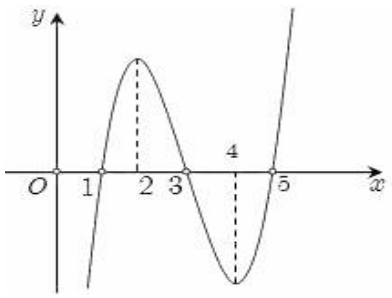
b) Trên khoảng: $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

c) Qua $x=-2$ và $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ và $x=2$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

d) Qua $x=0$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=0$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a)

• Trên khoảng $(1;3)$ và $(5;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành (có nghĩa là $f'(x)>0$) nên hàm số đồng biến trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$

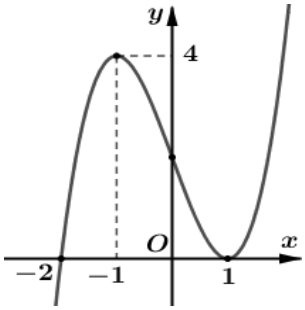
• Trên khoảng: $(-\infty;1)$ và $(3;5)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có nghĩa là $f'(x)<0$) nên hàm số nghịch biến trên khoảng: $(1;3)$ và $(5;+\infty)$

b)

• Qua $x=1$ và $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ và $x=5$ là 2 điểm cực tiểu của hàm số.

• Qua $x=3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=3$ là điểm cực đại của hàm số. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và 2 cực tiểu.

Bài 6. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

a)

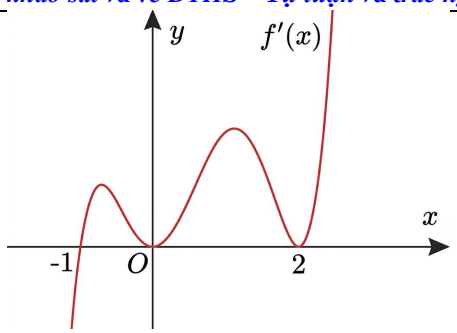
• Trên khoảng: $(-2;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$

• Trên khoảng: $(-\infty;-2)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

b) Qua $x=-2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu.

Bài 7. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng $\mathbb{R}$.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

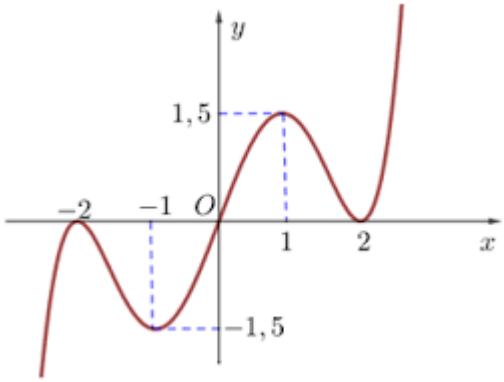
a)

- Trên khoảng: $(-1;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$
- Trên khoảng: $(-\infty;-1)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Qua $x=-1$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu.

Bài 8. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=f(x-1)$.

b) Hàm số $y=f(x-1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Ta có: $y=(x-1)'f'(x-1)=f'(x-1)$

+ Đồ thị $f'(x-1)$ là phép tịnh tiến của đồ thị $f'(x)$ theo phương trục Ox qua bên phải 1 đơn vị.

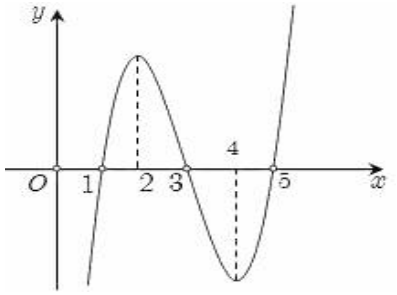
a) đồ thị $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Rightarrow$ đồ thị $f'(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

đồ thị $f'(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)\Rightarrow$ đồ thị $f'(x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) đồ thị $f'(x-1)$ cắt trục Ox tại $x=1$ và đổi dấu từ âm sang dương nên $x=1$ là giá trị cực tiểu.

Đồ thị không có cực đại

Bài 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

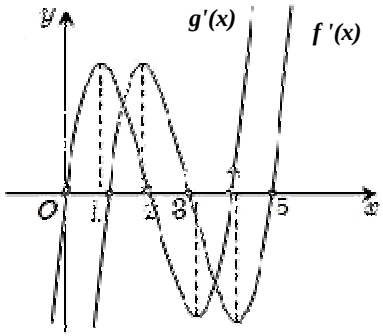


a) Nêu khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $g(x)=f(x+1)$.

b) Hàm số $g(x)=f(x+1)$ có bao nhiêu cực đại? bao nhiêu cực tiểu?

Lời giải

Cách 1: Đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$ là phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ theo phương trục hoành sang trái 1 đơn vị.



Từ đồ thị hàm số $g'(x)=f'(x+1)$, ta có:

a) hàm số $g(x)=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$

b) đồ thị $g(x)=f(x+1)$ cắt trục Ox tại $x=0, x=4$ và đổi dấu từ âm sang dương nên $x=0, x=4$ là hai giá trị cực tiểu.

đồ thị $g(x)=f(x+1)$ cắt trục Ox tại $x=2$ và đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là giá trị cực đại.

Cách 2 :

$$g'(x)=f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=3 \\ x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

$$g'(x)=f'(x-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x+1<3 \\ x+1>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		2		4	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y		↘		↗		↘		↗

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) hàm số $g(x)=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$

b) đồ thị $g(x)=f(x+1)$ có $x=0, x=4$ là hai giá trị cực tiểu.

đồ thị $g(x)=f(x+1)$ có $x=2$ là giá trị cực đại.

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

• Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

• Một vật chuyển động có phương trình $s=f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: $a(t)=f''(t)$.

• Nếu hàm số $T=f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

• Cường độ tức thời của điện lượng $Q=Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0)=Q'(t_0)$.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t\ge 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m).

a) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu?

c) Tính gia tốc của chất điểm sau thời gian10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Trong 20 giây đầu tiên, gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất ở thời gian nào?

Lời giải

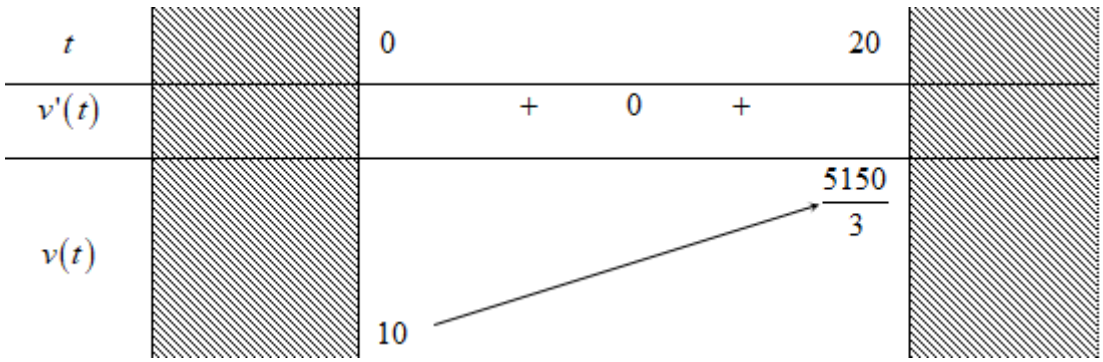
Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$.

Xét hàm $v(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$

• Tập xác định: $D=[0;20]$

• Ta có: $v'(t)=t^2-6t+12=(t-3)^2+3>0$.

• Bảng biến thiên:



a) Từ bảng biến thiên, ta có trong 20 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng.

b) Từ bảng biến thiên, ta có: Vận tốc của chất điểm nhỏ nhất bằng $v(t)=10(m/s)$ và lớn nhất bằng $v(t)=\frac{5150}{3}\approx 1716,7(m/s)$

c) Gia tốc của chất điểm là : $a(t)=v'(t)=t^2-6t+12$

Do đó: $a(10)=10^2-6.10+12=52(m/s^2)$

d) $a(t)=t^2-6t+12=t^2-2.3t++9+3=(t-3)^2+3\geq 3$

Do đó $Min(v(t))=3$ khi $t-3=0\Leftrightarrow t=3$

Vậy gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất ở thời gian $3(s)$

Bài 2. Một chất điểm chuyển động trong 10 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm tăng hay giảm?

b) Trong 10 giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

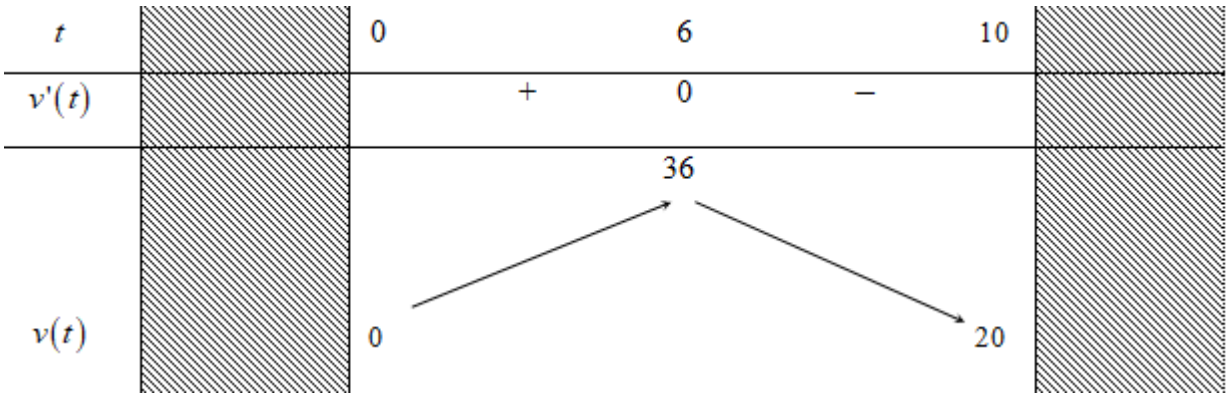
Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$.

Xét hàm $v(t)=-t^2+12t$

- Tập xác định: $D=[0;10]$
- Ta có: $v'(t)=-2t+12$.

$v'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

+ Trong khoảng thời gian 6 giây đến 10 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

+ Vận tốc lớn nhất của vật bằng $v(6)=36(m/s)$ tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của vật giảm?

c) Tính gia tốc của vật sau thời gian 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

Lời giải

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

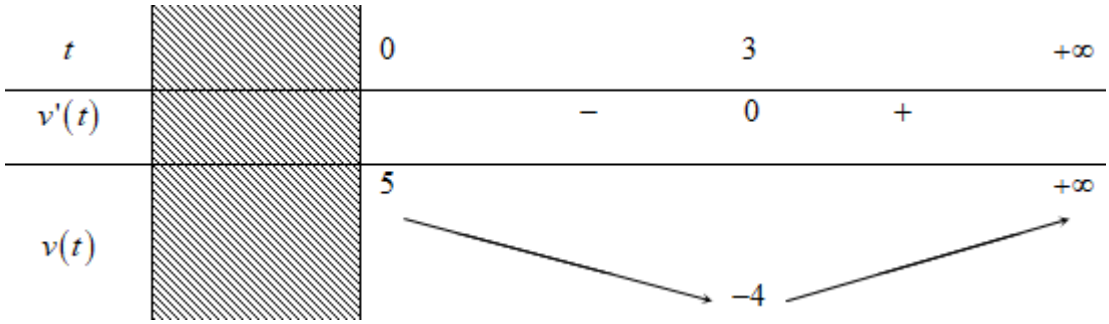
$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2\right)'=t^2-6t+5$$

Xét hàm $v(t)=t^2-6t+5$ với $t\geq 0$

$v'(t)=2t-6$

$v'(t)=0\Leftrightarrow 2t-6=0\Leftrightarrow t=3$

- Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

a) Trong khoảng thời gian $(3;+\infty)$ thì vận tốc của vật tăng

b) Trong khoảng thời gian $(0;3)$ thì vận tốc của vật giảm.

c) Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình vận tốc tại thời điểm t hay $a(t)=v'(t)=2t-6$

Với $t=5\Rightarrow a(5)=2.5-6=4(m/s^2)$

Bài 4. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\leq I\leq 22$.

a) Hỏi công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

b) Hỏi công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng nào?

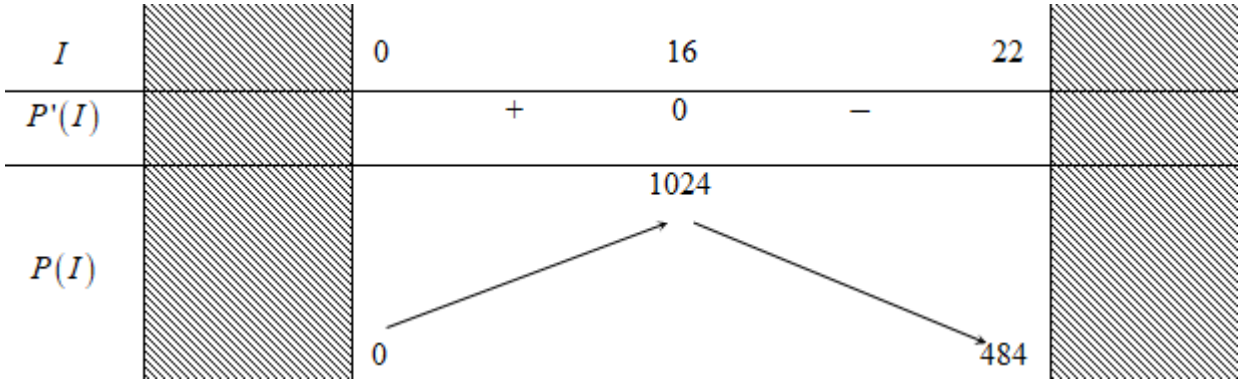
c) Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

- Xét hàm số $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với $0\le I\le 22$.
- $P'(I)=24I-\frac{3}{2}I^2$

$$P'(I)=0\Leftrightarrow 24I-\frac{3}{2}I^2=0\Leftrightarrow (48-3I)I=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I=0\\ I=16\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

a) Công suất P tăng khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(0;16)$.

b) Công suất P giảm khi cường độ dòng điện thuộc khoảng $(16;22)$.

c) Công suất P lớn nhất bằng $P(16)=1024(\text{w})$.

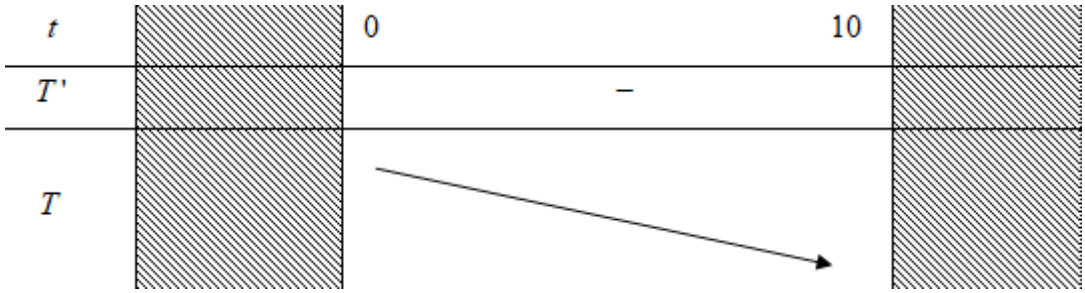
Bài 5. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

Lời giải

Xét hàm số $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$.

$T'=-0,024t^2-0,16<0,\forall t\in[1;10]$.

- Bảng biến thiên:



Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

nhiệt độ trong phòng giảm

Bài 6. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

Lời giải

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n)=nP(n)=480n-20n^2$ (gam).

$f'(n)=480-40n=0\Leftrightarrow n=12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		↗	$f(12)$	↘	

Từ bảng biến thiên ta có: trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, thả cá trong khoảng $(0;12)$ thì số gam tăng

DẠNG 5
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH CỦA CHÚNG

1. Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases}$

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số thì ta kiểm tra thêm trường hợp $a=0$

2. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, với $ad-bc\ne 0,\ c\ne 0$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'>0,\ \forall x\ne -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc>0$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi: $y'<0,\ \forall x\ne -\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow ad-bc<0$

3. Xét hàm phân thức $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad\ne 0$

- Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\ge 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\ge 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}$$

- Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y'\le 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}\Leftrightarrow adx^2+2aex+be-dc\le 0,\ \forall x\ne -\frac{e}{d}$$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y=x^3+mx^2+2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c) $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

a) $y=x^3+mx^2+2mx+2$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2+2mx+2m$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-6m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 6$.

b) $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=-x^2-2mx+2m-3$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta_{y'}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1.$$

h) $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$

Ta có $y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\ \begin{cases}m-1>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 9(m-1)^2-9(m-1)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ \begin{cases}m>1\\ 1\le m\le 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le m\le 2.$$

d) $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$

TH1: $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

Với $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH2: $m\ne\pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ (m-1)^2+3(m^2-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ (m-1)(4m+2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ -\frac{1}{2}\le m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1.$$

Vậy có giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2}\le m\le 1$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y=\frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b) $y=\frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

a) $y=\frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ta xét $y'>0\Leftrightarrow m-2>0\Leftrightarrow m>2$

b) $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y'<0,\forall x\neq 3-m$

Hay $m^2-3m+2<0,\forall x\neq 3-m\Leftrightarrow 1<m<2$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=x+1+\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) $y=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định .

c) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

a) $y=x+1+\dfrac{m}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$y'\geq 0,\forall x\in D\Leftrightarrow 1-\dfrac{m}{(x-2)^2}\geq 0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow m\leq (x-2)^2,\forall x\in D$

Xét hàm số $f(x)=(x-2)^2$ ta có:

$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m\leq 0$.

b) $y=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $y'=\dfrac{2x^2+4x+2-m}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi: $2x^2+4x+2-m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\leq 0$

c) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+4x+2m+1}{(2-x)^2}=\dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in D$

Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $D\Leftrightarrow g(x)=-x^2+4x+2m+1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Điều kiện: $\Delta'\le 0$ vì $a=-1<0\Leftrightarrow 4-(-1)(2m+1)\le 0\Leftrightarrow 2m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -\dfrac{5}{2}$.

DẠNG 6
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG CHO TRƯỚC

Nếu $y'=f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y'=f'(x)\ge 0$ hay $y'=f'(x)\le 0$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc đoạn hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định của $y'=f'(x)$.

Bước 2: Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.

Bước 3: Tính $g'(x)$. Cho $g'(x)=0$ và tìm nghiệm.

Bước 4: Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.

Bước 5: Kết luận: **"Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé"**. Nghĩa là:

- Khi ta đặt $m\ge g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m\ge$ **số lớn nhất** trong bảng biến thiên
- Khi ta đặt $m\le g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m\le$ **số nhỏ nhất** trong bảng biến thiên

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số:

a) $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

b) $y=x^3+mx^2+m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Lời giải

a) $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=3x^2-6x+5-m$

Hàm số $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$y'\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+(5-m)x,\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le 3x^2-6x+5,\forall x\in(2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x)=3x^2-6x+5$ trên $(2;+\infty)$ có $g'(x)=6x-6=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta được $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 5$.

d) $y = x^3 + mx^2 + m$ nghịch biến trên $(0;2)$

Hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx$

Hàm số nghịch biến trên $(0;2) \Leftrightarrow y' \le 0, \ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 2mx \le 0, \ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}x, \ \forall x \in (0;2)$

Xét hàm số $y = -\dfrac{3}{2}x$ trên khoảng $(0;2)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	2
y'	$-$	
y	0	-3

Vậy để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ thì $m \le -3$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

b) $y = \dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Lời giải

a) $y = \dfrac{2x+4}{m-x}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $y' > 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} 2m - 4(-1) > 0 \\ m - x \ne 0, x \in (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ x \ne m, x \in (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \le 1$.

d) $y = \dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

Điều kiện $x \ne m$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{m^2-4}{(m-x)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (-3;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ m \ge 1 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m < 2 .$$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + m + 6}{x + 2}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Lời giải

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + m + 6}{x + 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

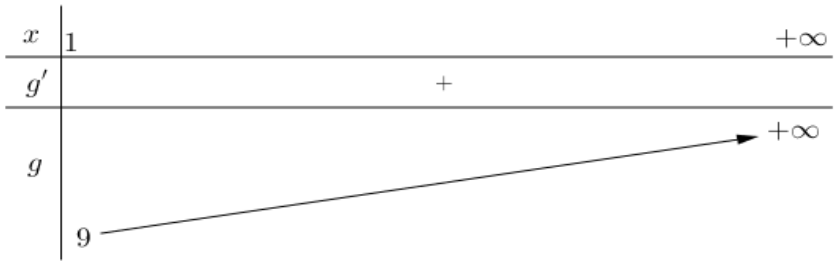
Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - m + 4}{(x+2)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - m + 4}{(x+2)^2} \ge 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \ge m, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \le \min_{(1;+\infty)} (x^2 + 4x + 4)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 4x + 4, g'(x) = 2x + 4, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \notin (1; +\infty)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \le 9$.

b) $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$

Hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall \in [1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2} \le 0, \forall \in [1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 4mx + 14 \le 0, \forall \in [1; +\infty)$$

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{-14}{x^2+4x} = g(x), \forall \in [1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{5}$

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên $(-8;5)$

b) $y = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên $(1;e)$

Lời giải

a) $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in \left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{m\} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3>0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{14} \\ m \ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{14} \\ -1 \le m < 1. \\ m > 3 \end{array}\right.$

b) $y = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$

$y = f(x) = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$

Đặt $t = \ln x$, điều kiện $t \in (0;1)$

$g(t) = \dfrac{t-4}{t-2m}$; $g'(t) = \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g'(t) > 0, t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2} > 0, t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4>0 \\ 2m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < m < 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$

DẠNG 7

TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI x_0

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

1. Tìm tham số m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x=x_0$.

Bài toán 1: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m);y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x=x_0$ thì: $f'(x_0,m)=0\Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y=f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x=x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y'=f'(x,m);y''=f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x=x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m)=0 \\ f''(x_0,m)<0 \end{cases}\Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y=f(x,m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x=x_0$.

Phương pháp giải

Cách 1: *Tự luận*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0,m) = 0 \Rightarrow m$.

+ Thay m vừa mới tìm được vào $y = f(x,m)$, sau đó lập bảng biến thiên kiểm tra $x = x_0$ có thoả yêu cầu bài toán hay không. Nếu thoả thì nhận m, không thoả thì loại m.

Cách 2: *Trắc nghiệm*

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x,m); y'' = f''(x,m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0,m) = 0 \\ f''(x_0,m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$

2. Biện luận số cực trị của hàm số

a. Biện luận số cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0) \ (*)$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

b. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (*)$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{e}{d} \right\}$

Ta có: $y' = \dfrac{adx^2 + 2acx + bc - cd}{(dx+e)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow adx^2 + 2acx + bc - cd = 0 = g(x) \quad (1)$

+ Hàm số $(*)$ **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\dfrac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$

+ Hàm số $(*)$ **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực tiểu tại $x=3$

b) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

c) $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Lời giải

a) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$; $y''=2x-2m$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ khi $\begin{cases}y'(3)=0\\y''(3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+5=0\\6-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.\\m<3\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

b) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$

Có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$, $y''=2x-2m$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại điểm $x=1$ khi

$\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m+2=0\\2-2m<0\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$

c) $y=-x^3+mx^2+\left(m^2-12\right)x+2$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=-3x^2+2mx+m^2-12$; $y''=-6x+2m$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi $\begin{cases}y'(-1)=0\\y''(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3.(-1)^2+2m.(-1)+m^2-12=0\\-6.(-1)+2m>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-15=0\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{ll}m=5 & (TM)\\m=-3 & (L)\end{array}\right.\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m=5.$

d) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4\right)$, $y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=3$ suy ra $y'(3)=0\Rightarrow m^2-6m+5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=5\end{array}\right.$.

Với $m=5$ ta có $y''(3)=6-10=-4<0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Với $m=1$ ta có $y''(3)=6-2=4>0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Vậy $m=5$ thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại điểm $x=3$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y=\frac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=-1$

b) $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x=2$

Lời giải

a) $y=\frac{x^2+(m-1)x+3-2m}{x+m}$

Điều kiện xác định $x\neq -m$.

Đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số lần lượt là: $y'=1+\frac{m-3}{(x+m)^2}$, $y''=\frac{-2(m-3)}{(x+m)^3}$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}y'(-1)=0\\ y''(-1)>0\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\frac{m-3}{(-1+m)^2}=0\\ \frac{-2(m-3)}{(-1+m)^3}>0\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-1\end{array}\right.$

b) $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}\Rightarrow y''=\frac{2x+2m}{(x+m)^4}$

Hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}y'(2)=0\\ y''(2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0\\ \frac{2m+4}{(2+m)^4}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=1\end{array}\right.\\ m<-2\end{cases}\Leftrightarrow m=-3.$$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(m^2-4m+3)x-1$ có hai điểm cực trị.

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị.

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị.

d) $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại.

Lời giải

a) $y=\frac{2}{3}x^3+(m-1)x^2+(m^2-4m+3)x-1$ có hai điểm cực trị

Đạo hàm $y'=2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2+2(m-1)x+m^2-4m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'>0\Leftrightarrow(m-1)^2-2(m^2-4m+3)>0\Leftrightarrow -m^2+6m-5>0\Leftrightarrow 1<m<5$.

Vậy $1<m<5$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $y=x^3-3(m+1)x^2+3(3m+7)x+1$ có cực trị

Đạo hàm $y'=3x^2-6(m+1)x+3(3m+7)$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=9(m+1)^2-9(3m+7)>0\Leftrightarrow m^2-m-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-2\end{array}\right.$$

c) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2024$ không có cực trị

Ta có đạo hàm $y'=x^2-2mx+m+2$

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc vó nghiệm kép hay

$\Delta'_{y'}\le 0\Leftrightarrow m^2-(m+2)\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 2$.

d) $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+mx^2+3x+1$ có cực đại

Đạo hàm $y'=(m^2-1)x^2+2mx+3$

Trường hợp 1: $m=1$ ta có $y'=2x+3$

Xét dấu y'

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow m=1$ loại

Trường hợp 2: $m=-1$ ta có $y'=-2x+3$

$y'=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn

Với $m\neq\pm1$

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-3\left(m^2-1\right)>0 \Leftrightarrow 3-2m^2>0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2}<m<\frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$ có hai điểm cực trị.

b) $y=\frac{-x^2+2\left(m-1\right)x-m-5}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

a) $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\frac{x^2+4x+4m+4}{\left(x+2\right)^2}=0$ có hai ngiệm phân biệt $\neq-2$.

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=x^2+4x+4m+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq-2$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\neq0\\ \Delta'=4-4m-4>0\\ g\left(-2\right)=4-8+4m+4\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<0.$

b) $y=\frac{-x^2+2\left(m-1\right)x-m-5}{x-1}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y'=\frac{-x^2+2x+7-m}{\left(x-1\right)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq1$.

$\Leftrightarrow g\left(x\right)=-x^2+2x+7-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\neq0\\ \Delta'=1+7-m>0\\ g\left(1\right)=-1+2+7-m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m\neq8\end{cases}\Leftrightarrow m<8.$

DẠNG 8
TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA BÀI TOÁN
(liên quan hệ thức Viète)

1. Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x).y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị : $y = Ax + B$

2. Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_o, y_o) là điểm cực trị thì $y_o = \dfrac{Q'(x_o)}{P'(x_o)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}.x + \frac{b}{d}.$$

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+3)x^2 + (12 - m)x + 2025$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung.

c) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 2024m + 2025$ có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương.

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 khi $\Delta' = (-3)^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 2^2-\dfrac{2}{3}m=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Vậy $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

b) $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+3)x^2+(12-m)x+2025$

Ta có $y'=x^2-2(m+3)x+12-m$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung $\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=\left[-(m+3)\right]^2-(12-m)>0 \\ S=x_1+x_2=2(m+3)>0 \\ P=x_1x_2=12-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+7m-3>0 \\ m+3>0 \\ 12-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{-7+\sqrt{61}}{2} \\ m<\dfrac{-7-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right. \\ -3<m<12 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-7+\sqrt{61}}{2}<m<12.$$

c) $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+2)x^2+(m^2+4m+3)x-2024m+2025$

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3=0$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung

$\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(m+2)^2-(m^2+4m+3)>0 \\ m^2+4m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right..$$

d) $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$

Ta có $y'=x^2-2mx+2m-1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-2m+1>0 \\ a.c=2m-1>0 \\ -\dfrac{b}{a}=2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Vậy $m\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:

a) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ để diện tích ΔOAB bằng 2 với $A;B$ là hai điểm cực trị .

b) $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

c) $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2};\ \forall x\neq -1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m+1\\x=-2\Rightarrow y=m-3\end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0;m+1);B(-2;m-3)$.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O;y_A-y_O)=(0;m+1)\Rightarrow OA=\sqrt{(0)^2+(m+1)^2}=|m+1|\\\overrightarrow{OB}=(x_B-x_O;y_B-y_O)=(-2;m-3)\Rightarrow OB=\sqrt{(-2)^2+(m-3)^2}=\sqrt{m^2-6m+13}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2-\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2\left(m^2-6m+13\right)-\left[(m-1)(m-3)\right]^2}=|m+1|$.

Mà $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow|m+1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$.

b) $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\neq 0\\\Delta'=3-2m>0\\g(-1)=2m-3\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}\ (1)$.

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của $g(x)=0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là: $y=\dfrac{\left(x^2+2mx+2\right)'}{(x+1)'}=\dfrac{2x+2m}{1}=2x+2m$.

$\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A(x_1;2x_1+2m);B(x_2;2x_2+2m)$.

Theo định lí Viét: $x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-2m$.

Theo đề: $d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow\dfrac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$\Leftrightarrow(3x_1+2m+2)^2=(3x_2+2m+2)^2\Leftrightarrow(3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0$

$\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2)+4m+4\right]=0\Leftrightarrow3(x_1+x_2)+4m+4=0,(do\ x_1\neq x_2)$

$\Leftrightarrow3(-2)+4m+4=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Kết hợp với $(1)\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=\dfrac{mx^2-2mx-5m-1}{(x-1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq1$.

$\Leftrightarrow g(x)=mx^2-2mx-5m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m\neq0\\ \Delta'=m^2+m(5m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\ \left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{6}\\ m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m<-\dfrac{1}{6} & (*)\\ m>0\end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{(mx^2+3mx+2m+1)'}{(x-1)'}=2mx+3m$.

Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox\Leftrightarrow y(x_1).y(x_2)<0$

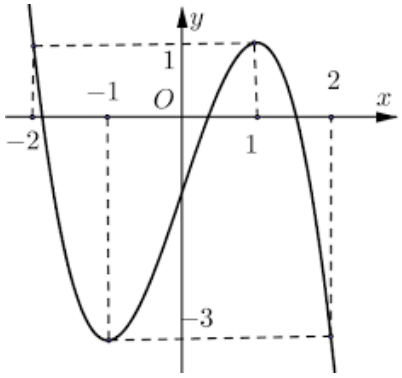
$$\Leftrightarrow(2mx_1+3m)(2mx_2+3m)<0\Leftrightarrow4m^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right]<0\Leftrightarrow4m(-2m-1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{2}\\ m>0\end{array}\right.$$

Kết hợp với $(*)\Rightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

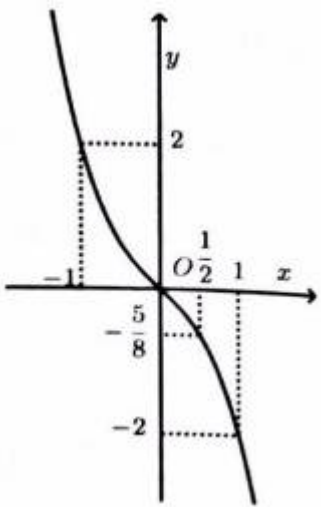
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(0;1)$

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

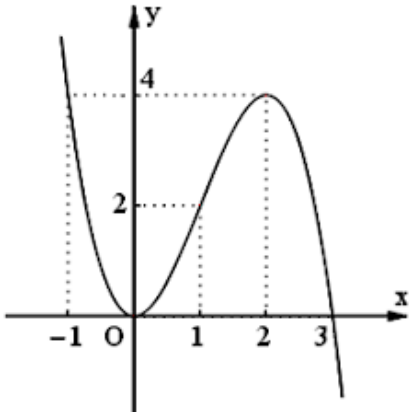
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

B. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

C. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 0.

Lời giải

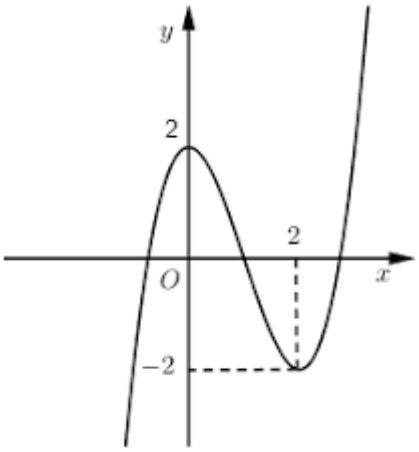
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng $x=0$ và giá trị cực tiểu bằng $y=0$.

Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng $x=2$ và giá trị cực đại bằng $y=4$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng 2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng -2.

Lời giải

Chọn C.

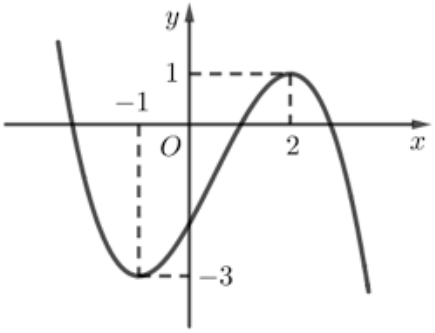
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;2)$; đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=-2$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng -3.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 1.

Lời giải

Chọn D.

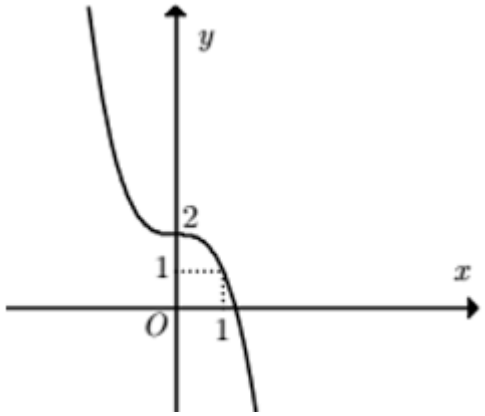
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;2)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-1$ và giá trị cực tiểu bằng $y=-3$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=2$ và giá trị cực đại bằng $y=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải

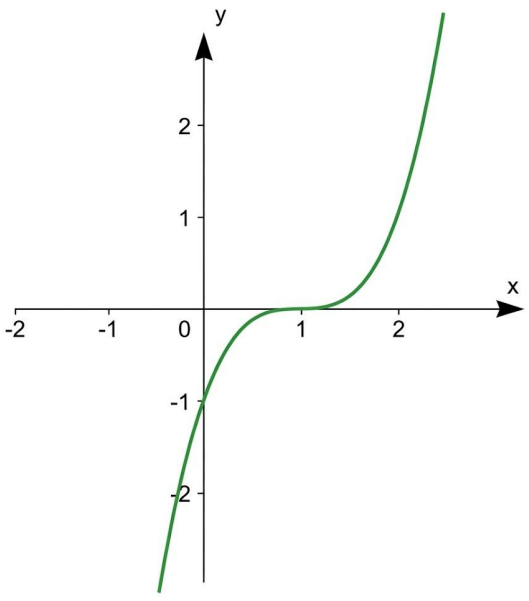
Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 0.

Lời giải

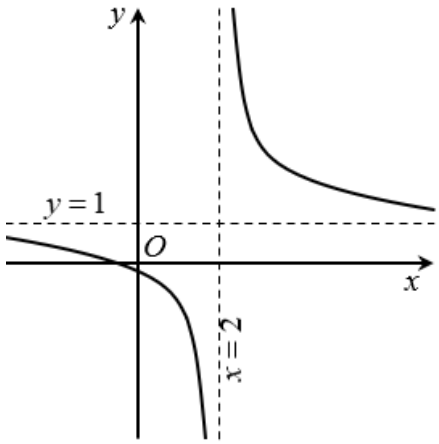
Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

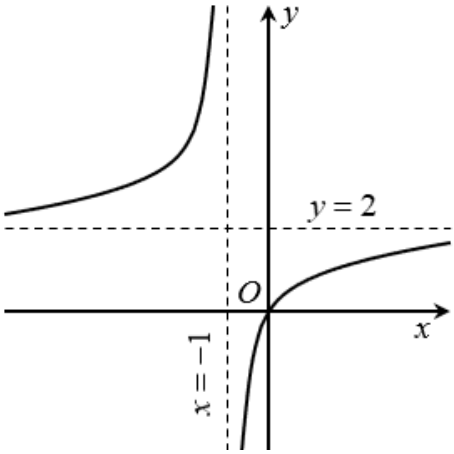
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có một cực trị.

Lời giải

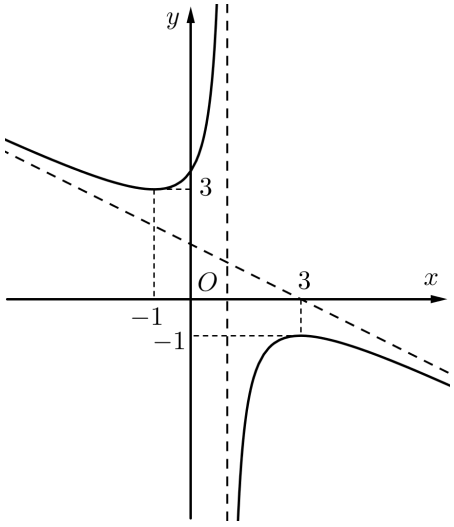
Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có điểm cực trị

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(3;-1)$.

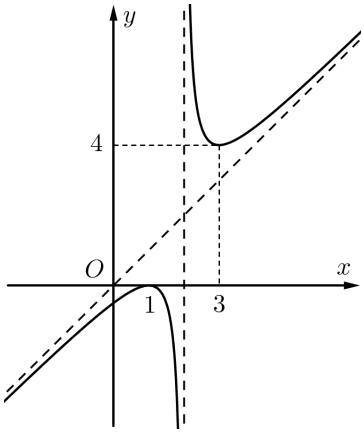
Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=-1$

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại bằng:

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

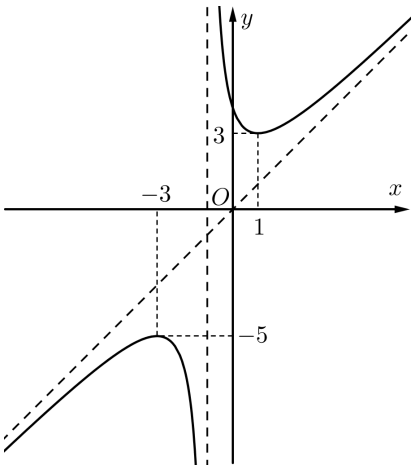
Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=1$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại bằng:

A. 3. **B.** 1. **C.** -5. **D.** -3.

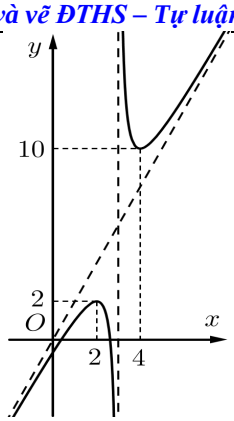
Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là $y=5$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là:

A. 4. **B.** 2. **C.** $(2;2)$. **D.** $(4;10)$.

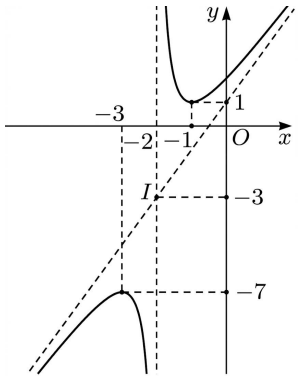
Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $(4;10)$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

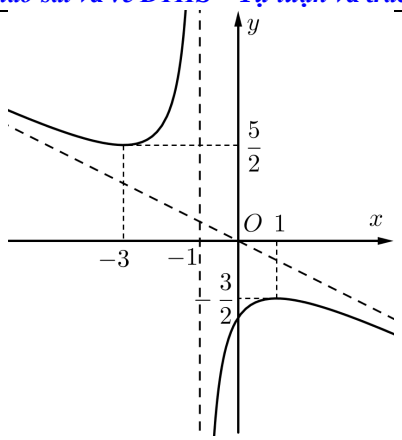
Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2026)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

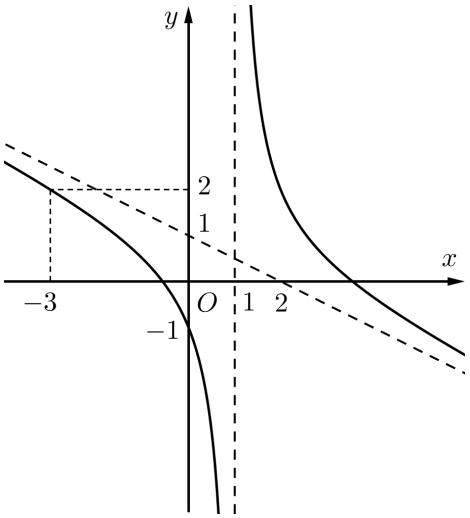
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

Lời giải

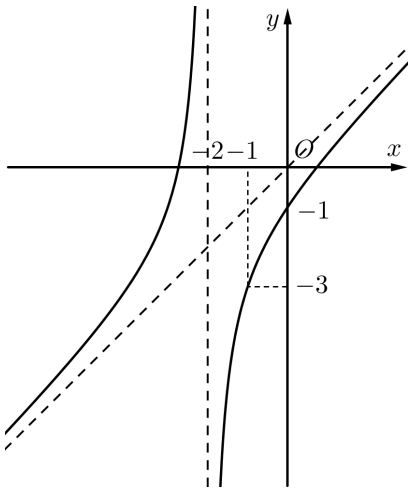
Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho không có cực trị.

Lời giải

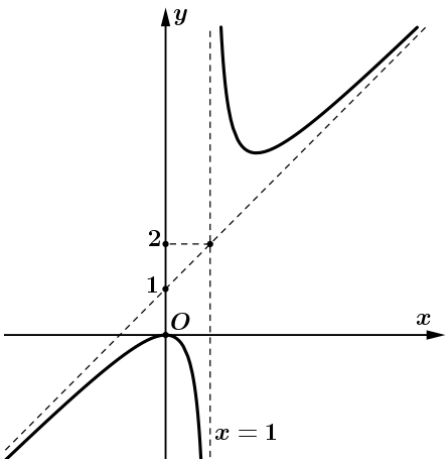
Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có hai cực trị.

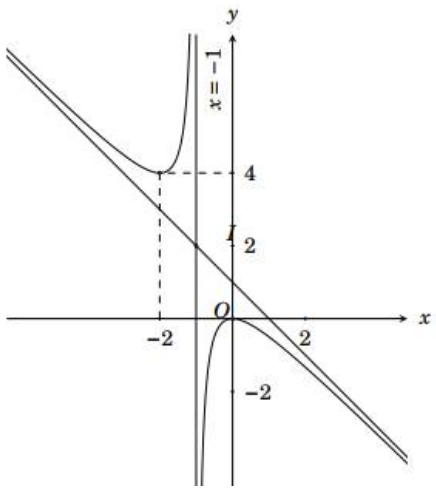
Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho có hai cực trị.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực đại bằng -2.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 4.

Lời giải

Chọn C.

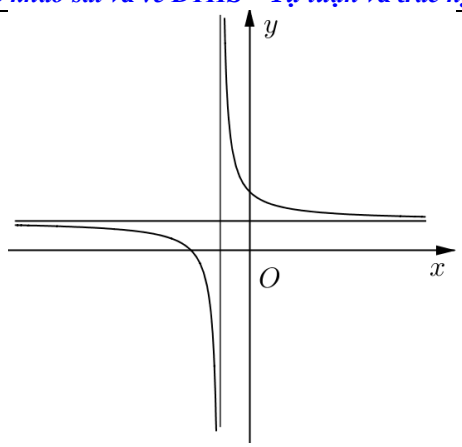
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$; đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=4$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=0$.

Câu 20. Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

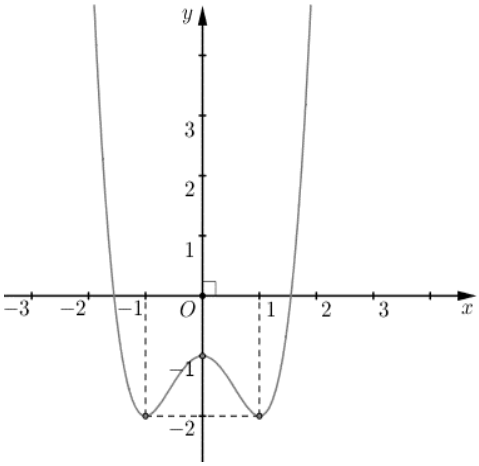
Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên loại đáp án A và D.

Dạng đồ thị đi xuống thì $y'<0$ nên loại đáp án B.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



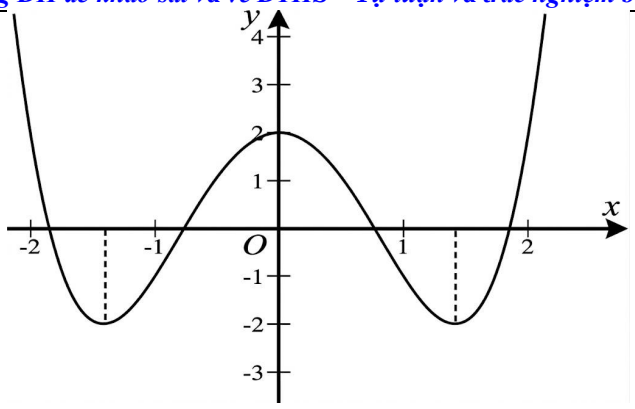
A. $(-\infty -1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



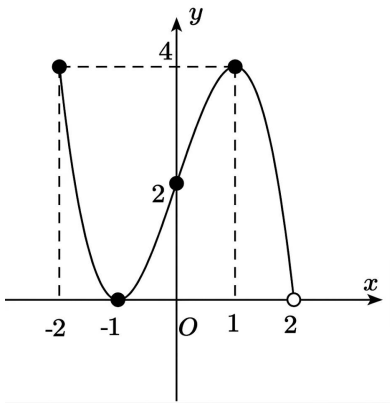
A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm

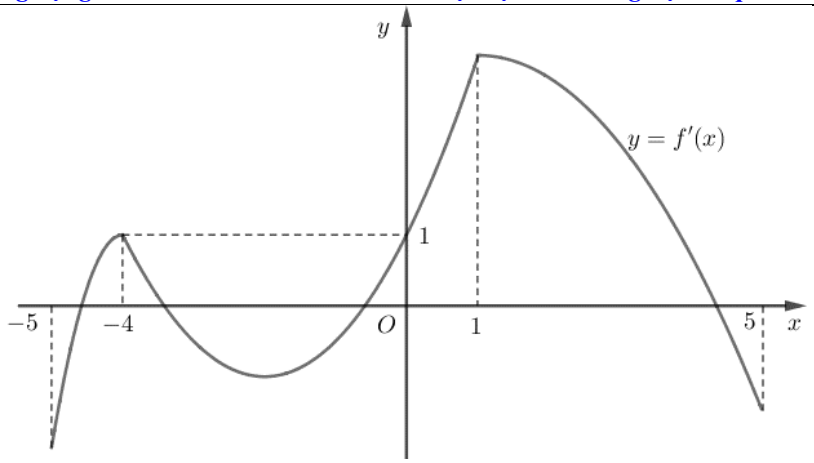
A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $[-5;5]$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực trị?

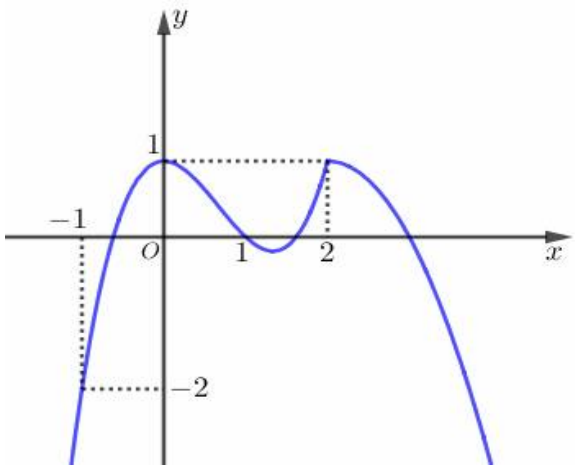
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 1 cực tiểu

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực đại?

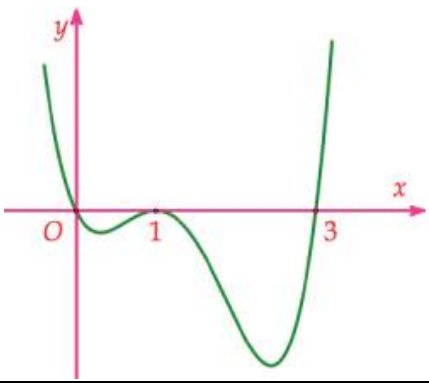
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 1 cực tiểu

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại?

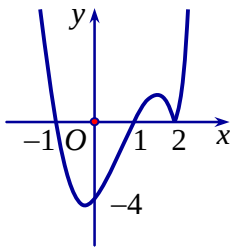
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị đã cho, ta có 1 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

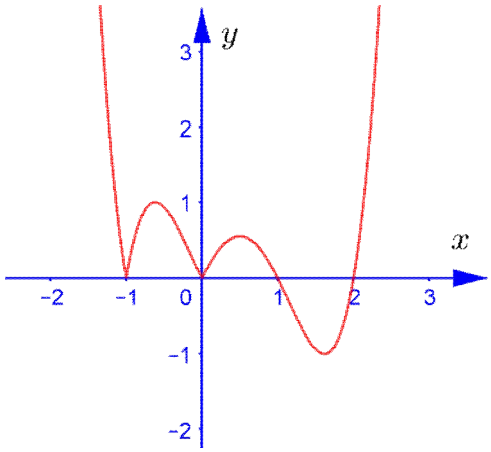
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có 1 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

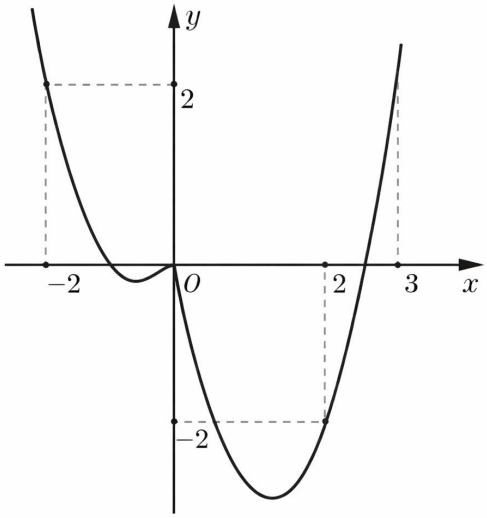
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 3 cực tiểu

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

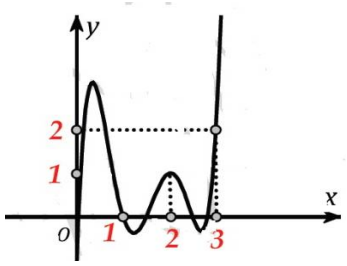
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị đã cho, ta có 1 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

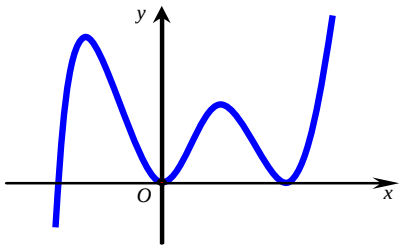
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

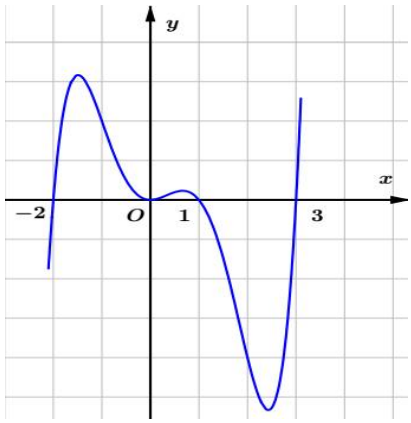
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực đại?

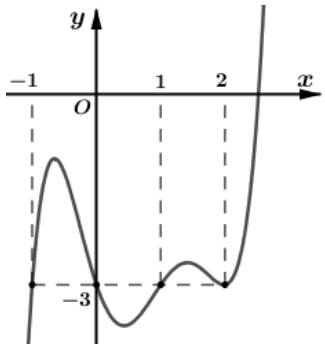
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục $\mathbb{R}$ và có đồ thị bên dưới.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị đã cho, ta có 2 điểm cực đại và 2 cực tiểu

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

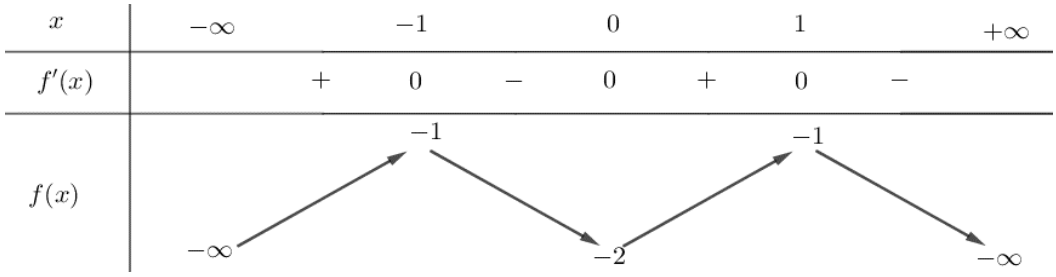
A. $(-1;0)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;1)$

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-1;0)$

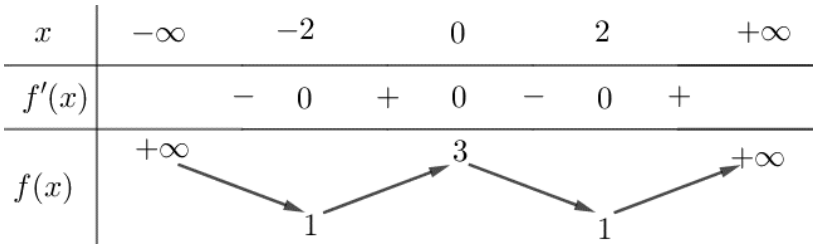
Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $f'(x)>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

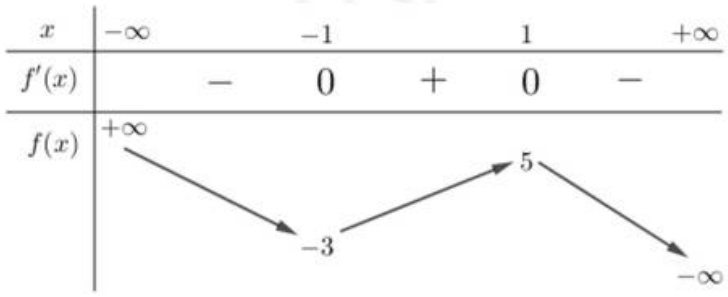
Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy hàm số đã cho có giá trị cực tiểu là $y=-3$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng $y=-5$

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** -9.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số bằng $x=5$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-20	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -9. **B.** -20. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số bằng $x=1$

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;-5)$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là: $(0;2)$

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	24	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là:

A. -10. **B.** 2. **C.** 24. **D.** $(-10;24)$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là: $(-10;24)$

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Lời giải

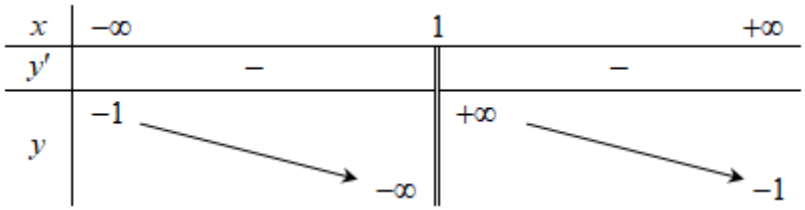
Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;-\infty)$ và $(+\infty;-1)$.

D. Hàm số đã cho có cực trị.

Lời giải

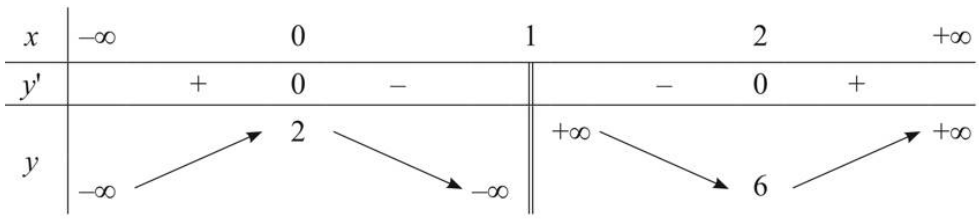
Chọn B.

Từ bảng biến thiên, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.

Lời giải

Chọn C.

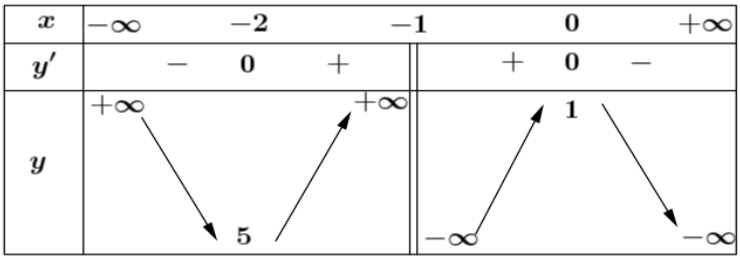
Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=6$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=2$.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu bằng 0.

D. Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 5.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị đã cho, ta có

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$; đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Hàm số đã cho có điểm cực tiểu $x=-2$ và giá trị cực tiểu bằng $y=5$

Hàm số đã cho có điểm cực đại $x=0$ và giá trị cực đại bằng $y=1$.

Câu 47. Chọn phát biểu đúng khi nói về tính đơn điệu của hàm số $y=ax^4+bx^2+c, a\neq 0$.

A. Hàm số có thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

B. Khi $a>0$ thì hàm số luôn đồng biến.

C. Hàm số luôn tồn tại đồng thời khoảng đồng biến và nghịch biến.

D. Khi $a<0$ hàm số có thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$ luôn đổi dấu khi $a\neq 0$.

Câu 48. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 49. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^4-12x^3+12x^2=3x^2(x-2)^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 50. Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2+2$. Khẳng định nào sau đây là đúng về tính đơn điệu của hàm số

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=-6x^2+6x$.

+ $y'=0\Leftrightarrow -6x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$

Câu 51. Hỏi hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 52. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 53. Hỏi hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

B. $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Lời giải

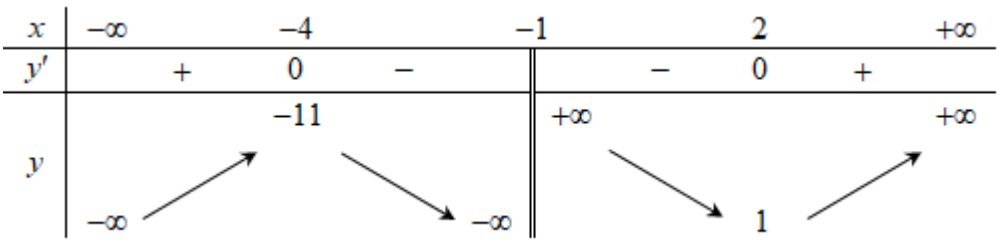
Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$. Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$

y' không xác định khi $x = -1$.

Bảng biến thiên:



Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 54. Hàm số $y = \frac{x+2}{1-x}$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-1;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1)$.

C. $(-\infty;1)$

D. $(0;+\infty)$

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(1-x)^2} > 0 \forall x \in D$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 55. Hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-1;1)$ và $(1;3)$.

D. $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+5)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
							4		

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$.

Câu 56. Hỏi hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-2)$ và $(-1;0)$.

B. $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

D. $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	↗	$+\infty$
							2		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1),(-1;0)$ và đồng biến trên mỗi

khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$.

Câu 57. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y=-(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y=\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Lời giải

Chọn A.

(I) $y'=\left(-(x-1)^3\right)'=-3(x-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

(II) $y'=\left(\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}\right)'=\dfrac{x}{(x-1)^2}>0,\forall x>1$

(III) $y'=\dfrac{1.\sqrt{x^2+1}-x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 58. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên mỗi khoảng:

A. $(-1;3)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

C. $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-6x-9$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 59. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $y=e^{-x}$. **B.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **C.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **D.** $y=\ln x$.

Lời giải

Chọn A.

$y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

$y' = \left(\frac{1}{e}\right)^x \ln\frac{1}{e} = -\left(\frac{1}{e}\right)^x < 0$.

Hàm số $y = e^{-x}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

Câu 60. Cho hàm số $y = \log_3\left(x^2 - 2x + 3\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(-1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x-2}{\ln 3.\left(x^2-2x+3\right)}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\log_2 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 61. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

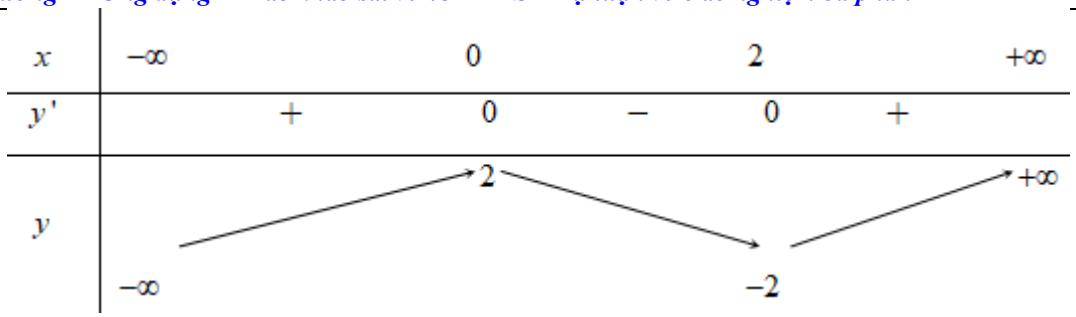
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Lời giải

Chọn B.

$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và đạt cực đại tại $x=0$

Câu 62. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x=1$?

A. $y=x^5-5x^2+5x-13.$ **B.** $y=x^4-4x+3.$

C. $y=x+\dfrac{1}{x}.$ **D.** $y=2\sqrt{x}-x.$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=2\sqrt{x}-x$ có TXĐ $D=[0;+\infty)$

$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)=-\dfrac{1}{2}<0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 63. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y=x+\dfrac{1}{x+1}.$ **B.** $y=x^3+3x^2+7x-2.$

C. $y=-x^4-2x^2+3.$ **D.** $y=x-\dfrac{2}{x+1}.$

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 64. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y=2x+\dfrac{2}{x+1}.$ **B.** $y=x^3+3x^2.$ **C.** $y=-x^4+2x^2+3.$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}.$

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0,\forall x\in D$ nên hàm số không có cực trị

Câu 65. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=-2.$ **B.** $y_{CD}=1.$ **C.** $y_{CD}=-1.$ **D.** $y_{CD}=2.$

Lời giải

Chọn B.

$$y'=12x^3-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 66. Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A,B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y=x-2.$ **B.** $y=2x-1.$ **C.** $y=-2x+1.$ **D.** $y=-x+2.$

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp tự luận:

$$y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1),B(-1;3)\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Cách 1:

Lấy $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{x^3-3x+1}{3x^2-3}=\left(\dfrac{1}{3}x\right).\left(3x^2-3\right)-2x+1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Cách 2:

Lấy $y-\dfrac{y'.y''}{18a}=x^3-3x+1-\dfrac{\left(3x^2-3\right).6x}{18}=-2x+1$

$\Rightarrow$ Phương trình $AB:y=-2x+1$

Cách 3: Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3-3x+1-\left(3x^2-3\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Bước 3 : CALC $x=i$

Kết quả : $1-2i\Rightarrow$ phương trình AB: $y=1-2x$

Câu 67. Đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(3;0).$ **B.** $(1;3).$ **C.** $(1;4).$ **D.** $(3;1).$

Lời giải

Chọn B.

$y'=3x^2-12x+9$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1\Rightarrow y_{CD}=3$.

Câu 68. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

$y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và $y_{CT}=4$.

Câu 69. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(4;-6)$ **B.** $(0;-2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(-6;4)$

Lời giải

Chọn B.

$y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Vậy tọa độ điểm cực đại của hàm số là $(0;-2)$.

Câu 70. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

+ Ta có: $y' = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x = 0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi qua $x = 0$.

Nên $x = 0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $x = 0$ là cực đại của hàm số.

Câu 71. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$y_{CD} - y_{CT} = y(0) - y(2) = 4$.

Câu 72. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y = 2x^3 - 3x^2$. **B.** $y = -2x^3 - 3x^2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải

Chọn B.

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có:

$\left\{\begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow c = d = 0$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có: $\left\{\begin{array}{l} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a - 2b = 0 \\ b - a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -3 \end{array}\right.$

Vậy hàm số là: $y = -2x^3 - 3x^2$.

Câu 73. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y' = \frac{2 - 2x^3}{\sqrt{1 + 4x - x^4}}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2$

Câu 74. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-4x+a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có: $\begin{cases} y'(1)=-1+a=0 \\ y(1)=-1+a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a-b=1$.

Câu 75. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-2$. Gọi a,b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó. Giá trị của $2a^2+b$ là:

A. -8. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có: $a=y(0)=-2; b=y(2)=-6 \Rightarrow 2a^2+b=2$.

Câu 76. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+3$ đạt cực trị tại x_1,x_2,x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

+ Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x=0$. Do đó: $x_1x_2x_3=0$.

Câu 77. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7$. **B.** $y=-17x^3+2x^2+x+5$.

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 78. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 1 hoặc 2. **B.** 1 hoặc 2. **C.** 0 hoặc 2. **D.** 0 hoặc 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx+c$

$\Delta'=b^2-3ac$

Nếu $\Delta'\leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

Câu 79. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 80. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 81. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a = 0; b = 0; c > 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$. **B.** $a = 0; b = 0; c > 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$. **D.** $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Rightarrow y' = 2bx + c$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 2bx + c \geq 0 \Rightarrow b = 0; c \geq 0$

Do đó $a = 0; b = 0; c \geq 0$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Kết hợp hai trường hợp để hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $a = 0; b = 0; c \geq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 82. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

B. $a = 0; b = 0; c < 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$.

C. $a = 0; b = 0; c \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

D. $a = 0; b = 0; c \leq 0$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Rightarrow y' = 2bx + c$

Để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 2bx + c \leq 0 \Rightarrow b = 0; c \leq 0$

Do đó $a = 0; b = 0; c \leq 0$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0$

Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Kết hợp hai trường hợp để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $a = 0; b = 0; c \le 0$ hoặc

$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2026x^2 - 2027x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại

A. $x = 0$. **B.** $x = \dfrac{2027}{2026}$. **C.** $x = -\dfrac{2026}{2027}$. **D.** $x = \dfrac{2026}{2027}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2026x^2 - 2027x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2027}{2026} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{2027}{2026}$

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 7x + 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có giá

trị cực tiểu là

A. $f(-6)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $x=-6$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu là $f(-1)$ tại $x=-1$

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4-x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực đại là $f(2)$ tại $x=2$

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=2x^2-5x+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là

A. $(1;f(1))$. **B.** $\left(\frac{3}{2};f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$. **C.** $x=1$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là $(1;f(1))$.

Câu 88. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $(0;f(0))$. **D.** $(-2;f(-2))$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x+1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $(0;f(0))$.

Câu 89. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{9-x^2}{x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{9-x^2}{x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=3\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=3\\x=-5\end{array}\right.$

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Chú ý:

$x=-1$ và $x=3$ là nghiệm bội lẻ nên $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua.

$x=2$ và $x=-5$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua.

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(1-9x^2)(2x-1)^{2026}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(1-9x^2)(2x-1)^{2026}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{3}\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua $-\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{1}{3}$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Chú ý:

$x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+2025)^{2026}(x-2026)^{2027}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+2025)^{2026}(x-2026)^{2027}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2025\\x=2026\end{array}\right.$

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua 2026 nên hàm số có 1 điểm cực trị.

Chú ý:

$x=2026$ là nghiệm bội lẻ nên $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua.

$x=-2025$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua.

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x)=-x+2=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 94. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, biết $f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(-5;-2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

$f'(x)=(x-3)(x+2)(x+5)^2<0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)<0,(x\neq-5)\Leftrightarrow x^2-x-6<0\Leftrightarrow-2<x<3$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-2;3)$.

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(2-x)(x+1)^2(x-1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow(2-x)(x+1)^2(x-1)^5<0\Leftrightarrow(2-x)(x-1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^4(2-x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(5)>f(4)>f(3)$.

B. $f(-1)>f(0)>f(1)$.

C. $f(-3)<f(-2)<f(-1)$.

D. $f(0)<f(1)<f(2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ nên $f(0)<f(1)<f(2)$

Câu 97. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(-1;+\infty)$.

D. $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$.

B. $(0;+\infty)$.

C. $(0;2)$.

D. $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3;0)$

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy đạo hàm đổi dấu qua các điểm $-3,-2,3,5$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 100. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-3$ và $x=3$ nên số điểm cực tiểu của hàm số là 2.

Câu 101. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x+1)^2(2x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

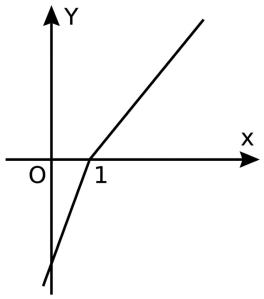
Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x+1)^2(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Nhận thấy $x^2>0\ \forall x\neq 0\Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=0$ nên $x=0$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Tương tự $(x+1)^2 > 0\ \forall x \neq -1 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x=-1$ nên $x=-1$ không phải là điểm cực trị hàm số.

$f'(x)$ cùng dấu với nhị thức $2x-1$ nên $x=\dfrac{1}{2}$ là điểm cực trị của hàm số.

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

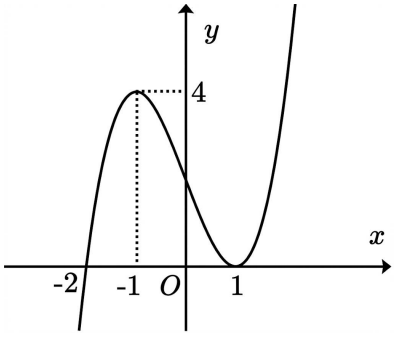
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ \ (a\neq 0)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?



A. Trên $(-2;1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.

B. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

C. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

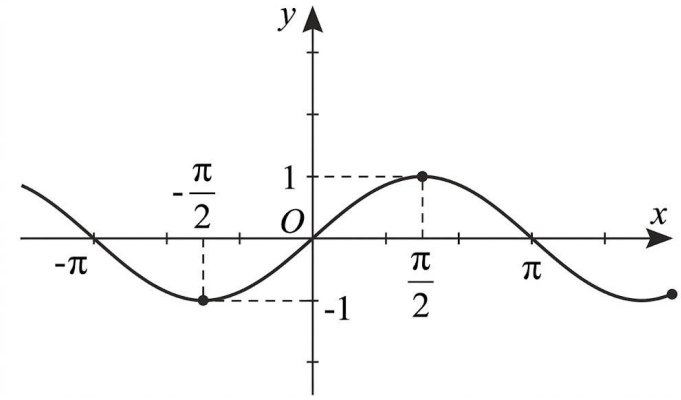
D. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn B.

Trên khoảng $[-1;1]$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 104. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét trên $(-\pi;\pi)$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;\frac{-\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

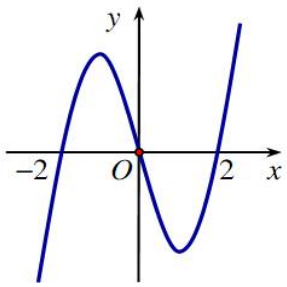
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải

Chọn D.

Trong khoảng $(0;\pi)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 105. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ 2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: sử dụng bảng biến thiên.

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Cách 2: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$

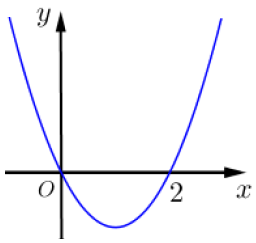
Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới trục hoành (có thể tiếp xúc) thì $f(x)$ nghịch biến trên K.

Nếu trong khoảng K đồ thị hàm số $f'(x)$ vừa có phần nằm dưới trục hoành vừa có phần nằm trên trục hoành thì loại phương án đó.

Trên khoảng $(0;\ 2)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành.

Câu 106. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình sau



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

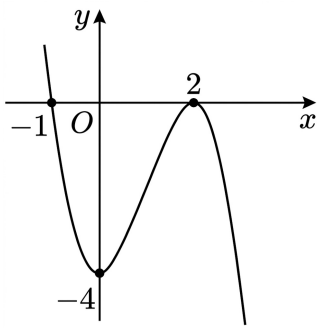
A. $(-1;0)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

Trên khoảng $(1;2)$ ta thấy $f'(x) < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Câu 107. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

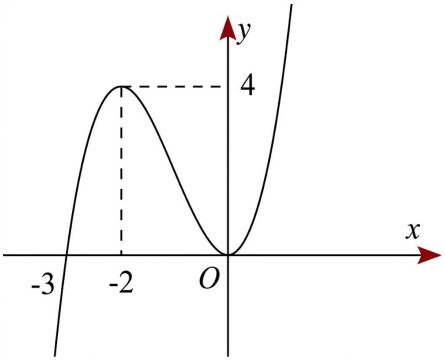
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$.

Câu 108. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?



A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2);(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

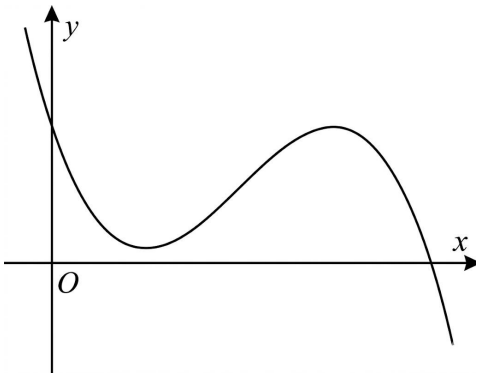
D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C.

Trên khoảng $(-3;+\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành.

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

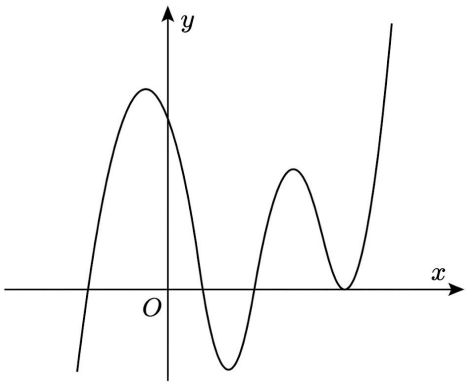
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

$f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm nên hàm số $y=f(x)$ có 1 cực trị.

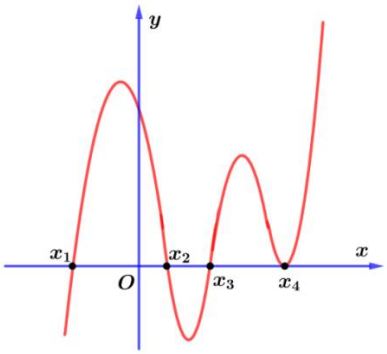
Câu 110. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A.



Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1, x_2, x_3, x_4.

Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3.

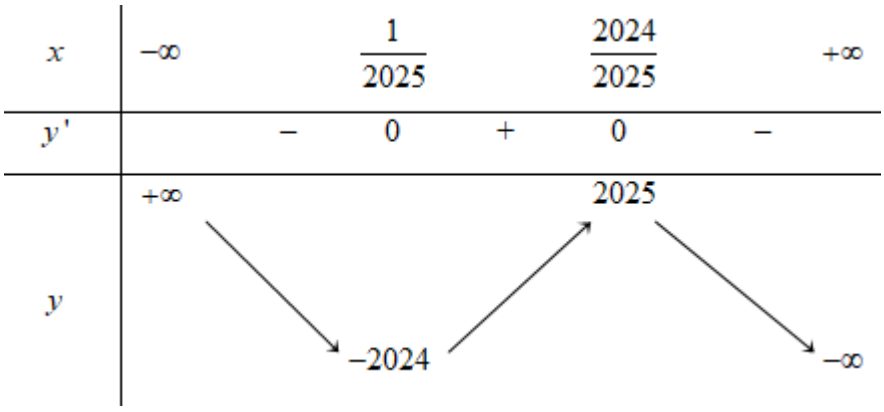
Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_2.

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau.



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) $f\left(\frac{3}{2025}\right)>f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2024.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

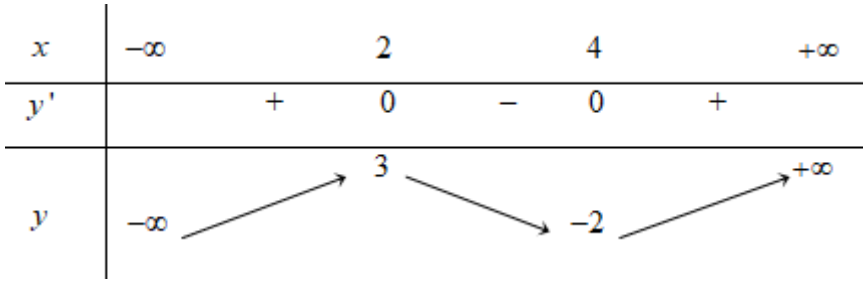
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2025}\right)$ và $\left(\frac{2024}{2025};+\infty\right)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2025};\frac{2024}{2025}\right)$ nên $f\left(\frac{3}{2025}\right)<f\left(\frac{11}{2025}\right)$

c) Điểm cực tiểu của hàm số đã cho bằng $\frac{1}{2025}$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $\left(\frac{2024}{2025};2025\right)$.

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và $(-2;+\infty)$.

b) $f(3)>f\left(\frac{7}{2}\right)$.

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích S bằng $\frac{64}{5}$ (đvdt).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(4;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;4)$ nên $f(3)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2.

d) đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(2;3)$ và $(4;-2)$

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ $\begin{cases}3=2a+b\\-2=4a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{2}\\b=8\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{5}{2}x+8$

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-\frac{5}{2}x+8$

Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là $C\left(\frac{16}{5};0\right)$ và $D(0;8)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S=\frac{1}{2}OC.OD=\frac{1}{2}.\frac{16}{5}.8=\frac{64}{5}$.

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

d) $f(-2027)>f(-2026)>f(-1)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

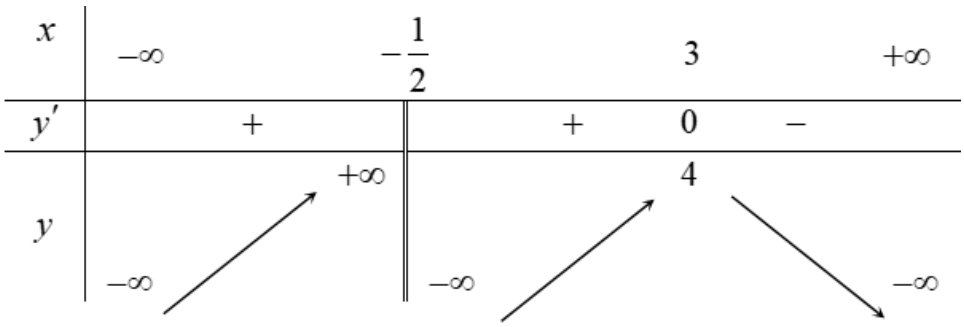
a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại là $(0;3)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu là $(-1;0)$ và $(1;0)$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$ nên $f'(x)>0$ khi $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ nên $f(-2027)>f(-2026)>f(-1)$

Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.



a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(0)>f(1)>f(2)$.

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 4.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ nên $f(0)<f(1)<f(2)$

d) Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y=4$

Câu 115. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

a) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

d) $f(3)>f(2026)>f(2027)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng xét dấu, ta có:

thì $y'<0$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

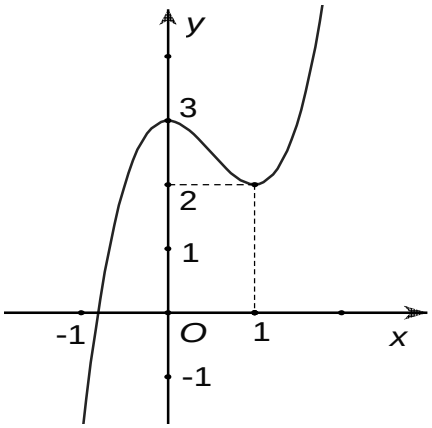
a) Qua nghiệm $x=-2$ ta có đổi dấu từ dương sang âm nên đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

b) Qua nghiệm $x=2$ ta có đổi dấu từ âm sang dương nên đồ thị hàm số đã cho có 1 điểm cực tiểu.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$ vì $y'<0$ khi $x\in(-2;0)$ và $x\in(0;2)$

d) vì $y'>0$ khi $x\in(-\infty;-2)$ và $x\in(2;+\infty)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$, do đó $f(3)<f(2026)<f(2027)$

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là $y=x+3$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị, ta thấy

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=0$ và $x=1$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ nên $f'(x)>0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

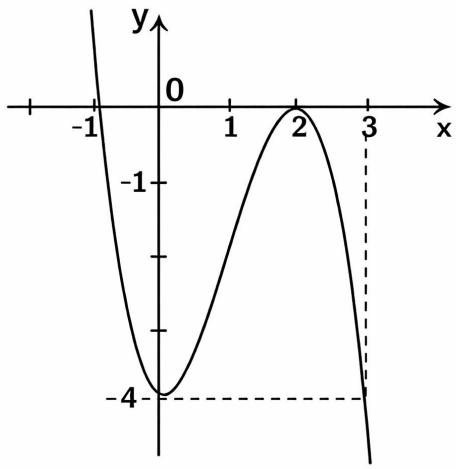
d) đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(1;2)$ và $(0;3)$

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ $\begin{cases}2=a+b\\3=0.a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}\Rightarrow y=-x+3$

Từ đó ta có phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-x+3$

Câu 117. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;0)$ và $(-4;0)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích S bằng 8 (đvdt).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị, ta thấy

a) Đồ thì hàm số có điểm cực đại là $(2;0)$ và điểm cực tiểu là $(0;-4)$, suy ra a) sai

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nên $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

d) đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(2;0)\in Ox$ và $(0;-4)\in Oy$

Nên diện tích tam giác cần tính là $S=\frac{1}{2}|2|.|-4|=4$ (đvdt)

Câu 118. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$.

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số có một điểm cực trị.

b) $f(-3)<f(0)<f(1)$

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{9}{4};0\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

$y=x^3+3x^2-9x+15$

Suy ra $y'=3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	42	↘	10	↗	$+\infty$

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

b) c) Từ bảng biến thiên, ta có:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, nên hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$ do đó $f(-3)>f(0)>f(1)$

d) Ta có $y=x^3+3x^2-9x+15\Rightarrow y'=3x^2+6x-9$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).\left(3x^2+6x-9\right)-8x+18$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-8x+18$

Do đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại điểm $\left(\frac{9}{4};0\right)$.

Câu 119. Cho hàm số $y=x^3-x^2+5x+4$

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2-2x+5$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

c) $f(-10)<f(-3)<f(-2)$

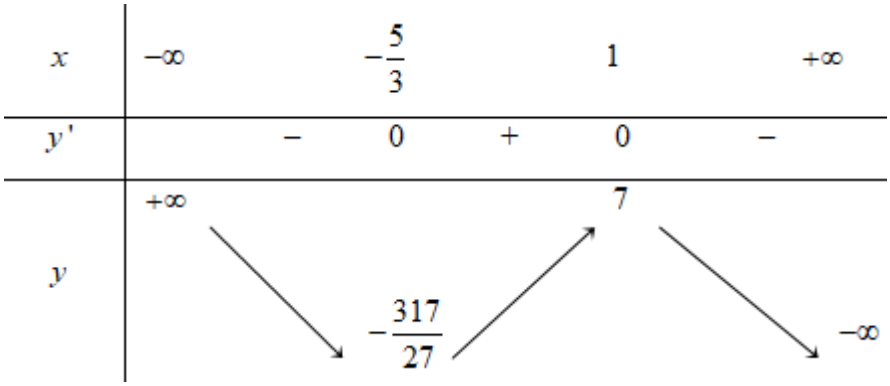
d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{28}{9}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

- $y=-x^3-x^2+5x+4\Rightarrow y'=-3x^2-2x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{5}{3}\end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{3};1\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$ nên $f(-10)>f(-3)>f(-2)$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(1;7)$ và điểm cực tiểu $\left(-\frac{5}{3};-\frac{317}{27}\right)$

Ta có $y=x^3-x^2+5x+4\Rightarrow y'=3x^2-2x+5$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right).\left(3x^2-2x+5\right)+\frac{28}{9}x+\frac{41}{9}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=\frac{28}{9}x+\frac{41}{9}$

Do đó đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{41}{9}\right)$.

Câu 120. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$.

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực đại là $(-1;2),(1;2)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 1 cực tiểu là $(0;3)$.

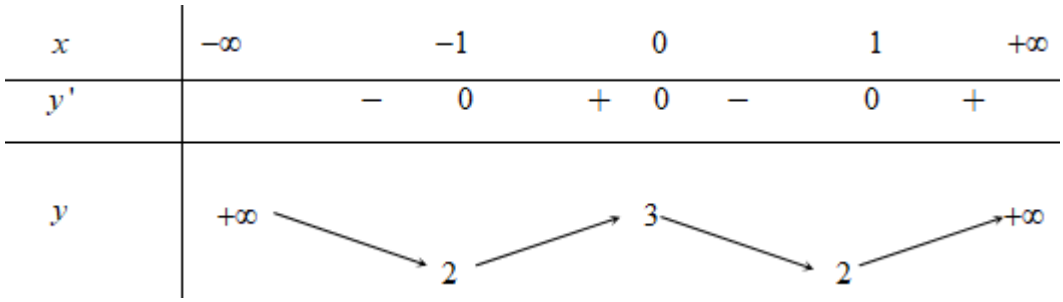
Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên:



Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Đồ thị hàm số có 1 cực đại là $(0;3)$ và 2 cực tiểu là $(-1;2),(1;2)$

Câu 121. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{-4+2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f(3)<f(2024)<f(2025)$

c) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(\frac{1}{3};0\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) b) c) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có $y' = -\dfrac{10}{(-4+2x)^2} < 0, \forall x \in D$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên $f(3) < f(2024) < f(2025)$

Đồ thị hàm số không có cực trị.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung nên $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành nên $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

Câu 122. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-20;-5)$ và $(-2;2026)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(1;0)$ và cắt trục hoành tại điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) b) c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$ do đó hàm số cũng đồng biến trên các khoảng $(-20;-5)$ và $(-2;2026)$.

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung nên $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành nên $y = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.

Câu 123. Cho hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $y'=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ với mọi x.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-10;-3)$ và nghịch biến trên khoảng $(4;2027)$.

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là: $y=2x$.

Lời giải

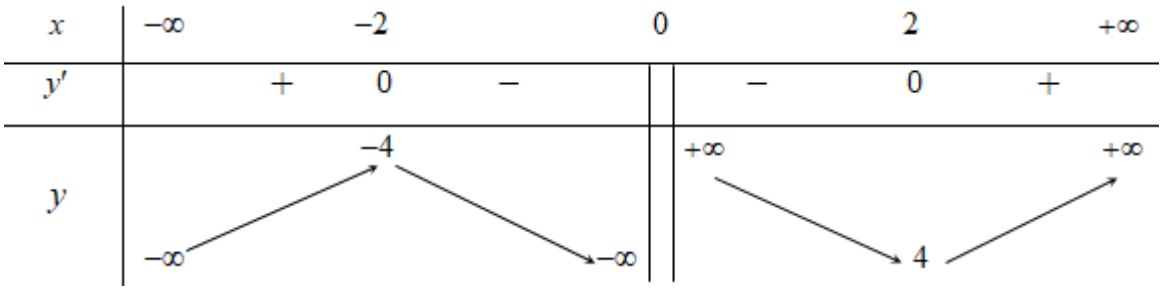
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Ta có: $y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Bảng biến thiên:



c) Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$, do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-10;-3)$ và nghịch biến trên khoảng $(4;2027)$.

d) **Cách 1: Tự luận**

Từ bảng biến thiên, ta có điểm cực tiểu $A(2;4)$ và điểm đạt cực đại $B(-2;-4)$

Gọi đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4=2a+b\\-4=-2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=2x$

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $x+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x^2+4}{x}=\dfrac{\left(x^2+4\right)'}{(x)'}=2x$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=2x$

Câu 124. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$.

a) $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

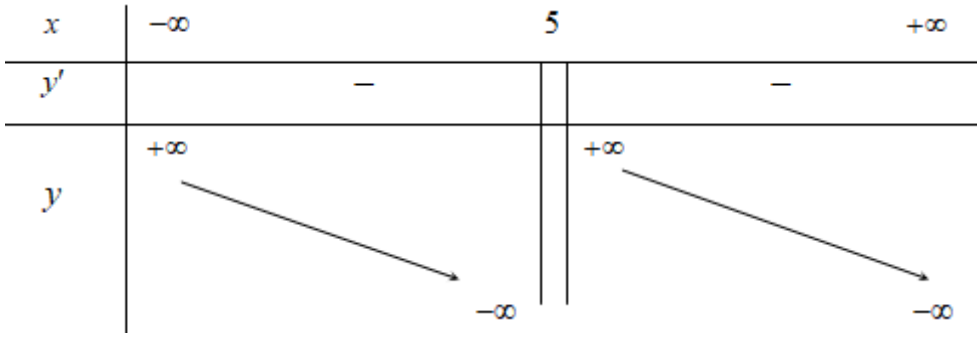
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là $y=2x-8$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$
- $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}<0, \forall x\neq 5$ do $g(x)=x^2-10x+31$ có $\begin{cases}a=1<0\\ \Delta'=-6<0\end{cases}$ nên $x^2-10x+31<0\ \forall\in\mathbb{R}$
- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$ nên cũng nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

+Do nên $x\neq 5$ nên hàm số không nghịch biến trên khoảng $(4;10)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 125. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

c) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=x+1$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1, y(1)=2\\ x=-2, y(-2)=-1\end{array}\right.$.

c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$ và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Câu 126. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

a) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm nguyên.

b) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2;5)$

c) $f(2)>f(5)>f(2027)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

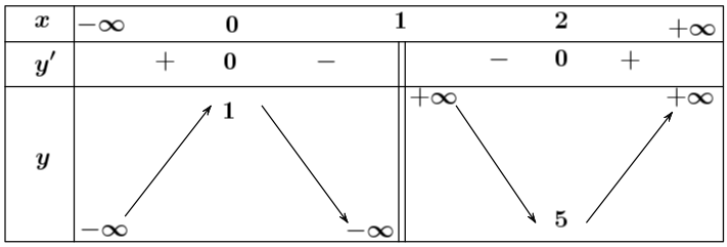
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$

b) Bảng biến thiên:



Vậy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;1)$

hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1),(1;2)$.

c) hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ nên $f(2)<f(5)<f(2027)$

d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành nên $y=0\Rightarrow\dfrac{x^2+x-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Câu 127. Cho hàm số $y=\sqrt{9-4x^2}$.

a) Hàm số xác định khi $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

Lời giải

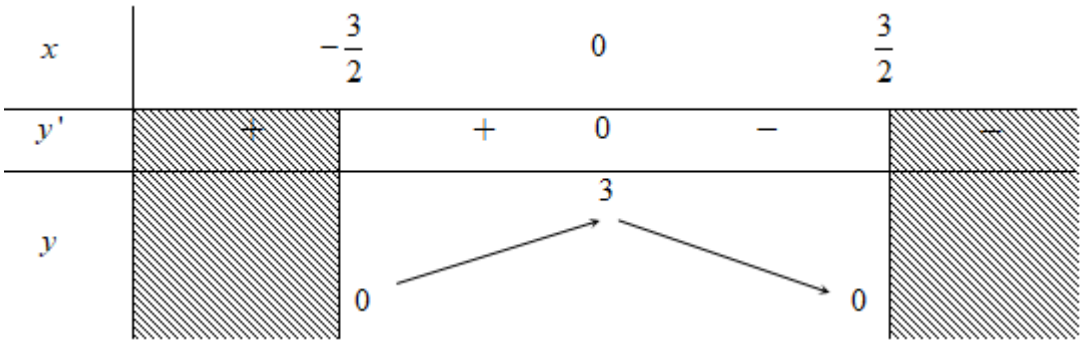
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

• Tập xác định: $D=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$

• Ta có: $y'=\frac{-4x}{\sqrt{9-4x^2}}$, $x \in D \setminus \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=3$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 128. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x \in [0;2]$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Lời giải

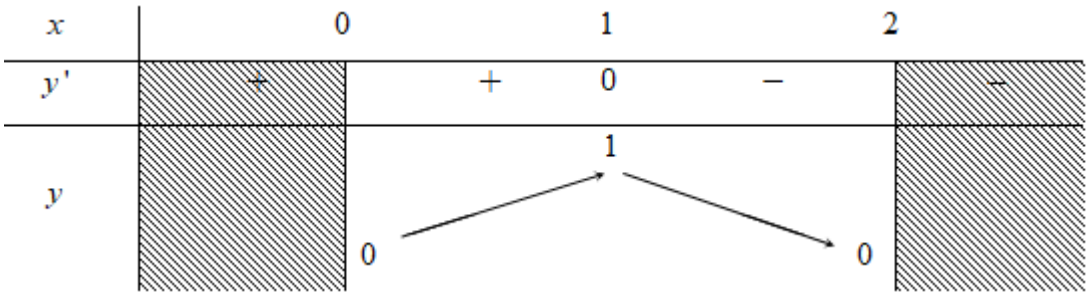
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

• Tập xác định: $D=[0;2]$

• Ta có: $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $x\in(0;2)$

$y'=0\Leftrightarrow 2-2x=0\Leftrightarrow x=1$

• Bảng biến thiên:



• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$, nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=1$. Hàm số không có cực tiểu.

Câu 129. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-5x+4}$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Đồ thị hàm số có hai cực trị.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

Lời giải

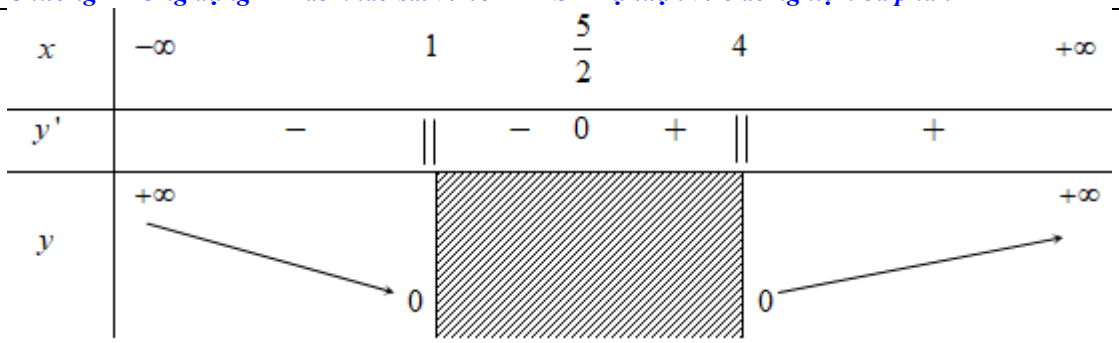
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

• Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

• Ta có: $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$, $\forall x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

• Bảng biến thiên:

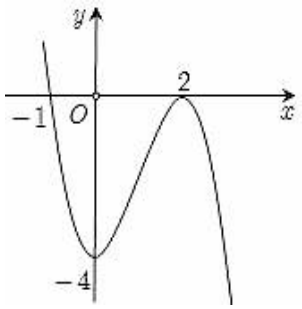


• Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

+ Hàm số không có cực trị.

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

+ Trong khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến $(-\infty;-1)$.

+Trên khoảng $(-1;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

+ đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 1 điểm nên có một điểm cực trị

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có : $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Suy ra phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm nguyên

b) Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ nên $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

Câu 132. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$

d) $f(-2025)<f\left(-\dfrac{1}{2024}\right)<f\left(-\dfrac{1}{2025}\right)$

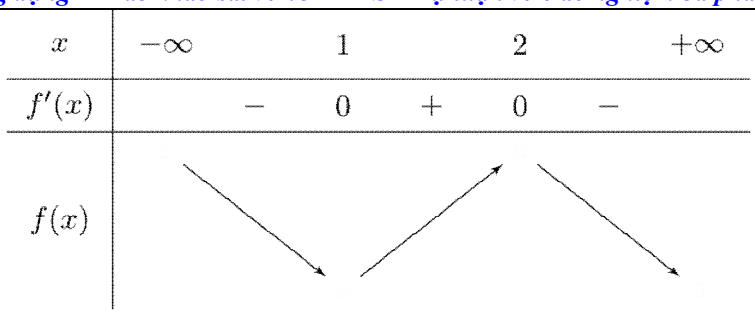
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Suy ra phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm nguyên

b) Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên: hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$

d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên $f(-2025)<f\left(-\frac{1}{2024}\right)<f\left(-\frac{1}{2025}\right)$

Câu 133. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm nguyên

b) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=1$.

d) $f(1)<f(2)$

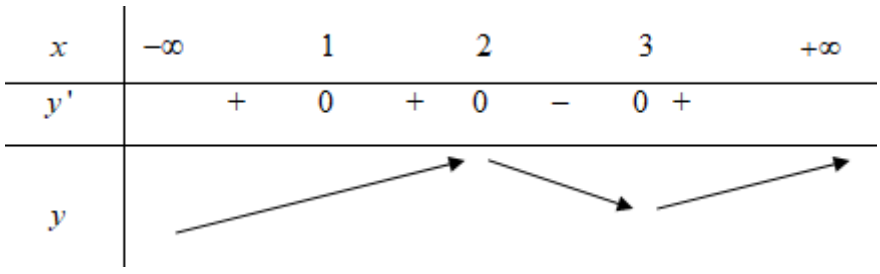
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-5x+6)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$$

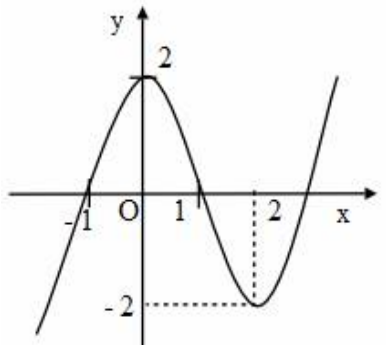
b) Bảng biến thiên



c) Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu $x=3$.

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ nên $f(1)<f(2)$

Câu 134. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y=f'(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

d) $f(2)>f(3)>f(2024)>f(2025)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

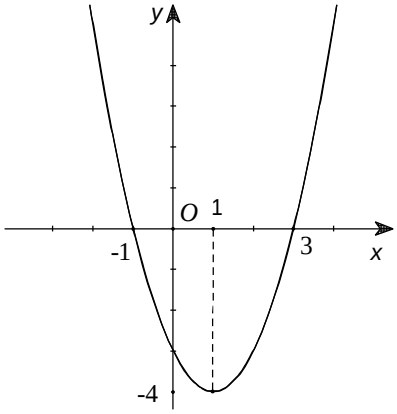
a) hàm số nghịch biến mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;2)$.

b) hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có ba điểm cực trị

d) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $f(2)>f(3)>f(2024)>f(2025)$

Câu 135. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

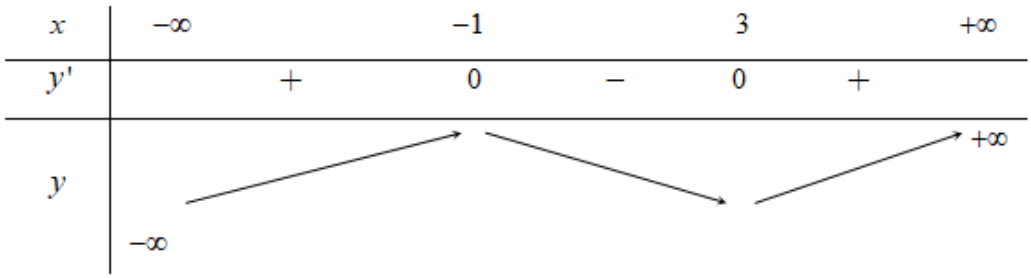
c) Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

d) $f(-1)<f(0)<f(2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:



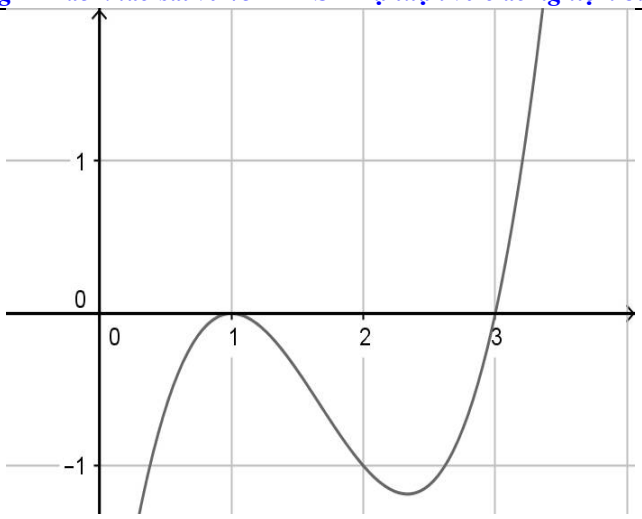
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

c) đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$ nên $f(-1)<f(0)<f(2)$

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=1$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu $x=\dfrac{5}{2}$.

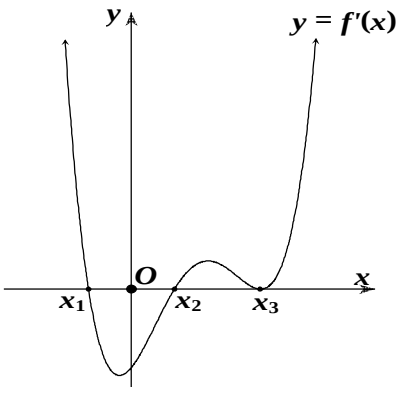
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có:

- Trên khoảng $(3;+\infty)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$
- Trên khoảng $(-\infty;3)$ đồ thị $y=f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$
- Qua nghiệm $x=3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Câu 137. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_3.

c) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_2.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_2;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

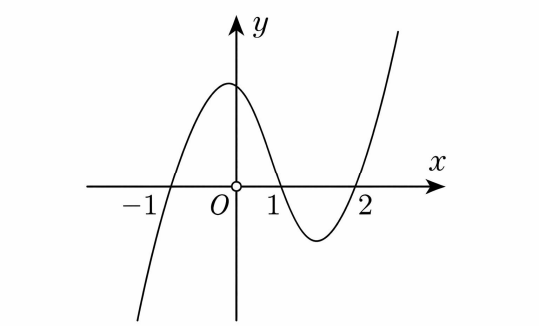
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Như vậy hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại là x_1 và điểm cực tiểu là x_2, x_3 không phải là điểm cực trị của hàm số.

$f'(x)\geq 0$ khi $x\in(x_2;+\infty)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(x_2;+\infty)$.

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;+\infty)$

c) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

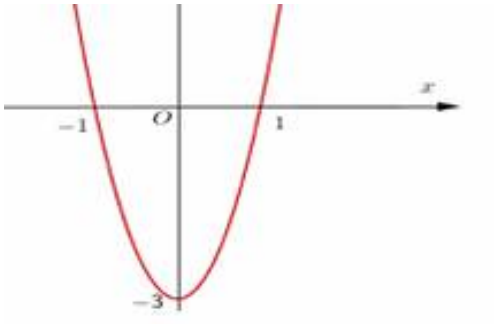
a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(2;+\infty)$.

Đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;2)$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 139. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị đúng vì đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{-1}{2}\right)$ đúng vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-1;1)$ đúng vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$ **sai** vì trên khoảng $(-\infty;-1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Câu 140. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Phương trình hàm vận tốc là $3t^2-12t+9$

b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t)=6t-12$.

c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(1;3)$.

d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

b) $a(t)=v'(t)=6t-12$.

c) d) Xét $v(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

t	0		1		3		$+\infty$
$v(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra vận tốc của chất điểm tăng khi $t\in(0;1)\cup(3;+\infty)$ và giảm khi $t\in(1;3)$.

Câu 141. Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $y'=3mx^2+2mx-(m+1)$

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m\geq 0$.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\dfrac{3}{4}<m<0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Ta có $y'=3mx^2+2mx-(m+1)$

c) $y'=3mx^2+2mx-(m+1)$

Với $m=0$ thì $y'=-1<0$ (không thoả mãn)

Với $m\neq 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}m>0\\\Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\4m^2+3m\leq 0\end{cases}$ (không tồn tại)

d) $y'=3mx^2+2mx-(m+1)$

Với $m=0$ thì $y'=-1<0$ (thoả mãn)

Với $m\neq 0$ thì yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases}m<0\\\Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\4m^2+3m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{3}{4}\leq m<0$

Suy ra $-\dfrac{3}{4}\leq m\leq 0$

Câu 142. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=-m-2$

c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $m\ge 0$.

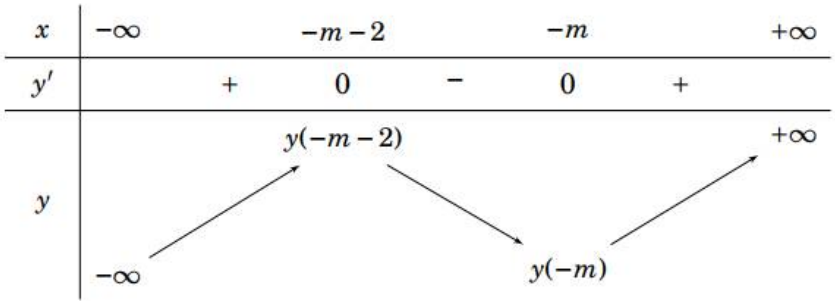
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm số là hàm đa thức nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

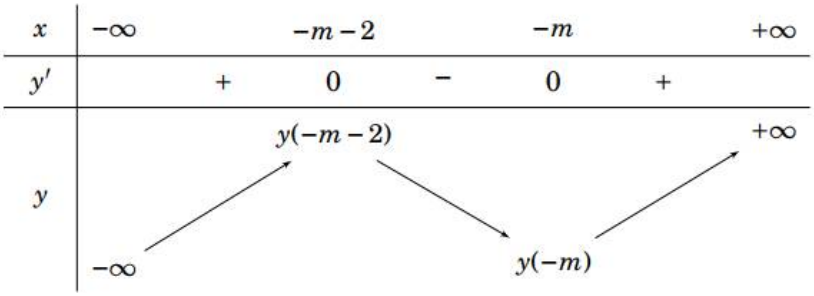
b) Ta có $y'=x^2+2(m+1)x+m^2+2m$. Do $\Delta'=b'^2-ac=(m+1)^2-(m^2+2m)=1>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=-m$ và $x_2=-m-2$.

c) Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, suy ra không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-m-2\le -1\\ -m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$$

Câu 143. Cho hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$, với m là tham số

a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2<m<2$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m=2$

c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m\le -2$ hoặc $m\ge 2$

d) Hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD}<x_{CT}$ và chỉ khi $0<m<2$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có $y' = mx^2 + 4x + m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phâ b biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2 < m < 2 \end{cases} (1)$

b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi hàm số này suy biến về hàm bậc hai nghĩa là $\frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

c) Với $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$. Hàm số này có một điểm cực tiểu. Điều này không thoả mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 0$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m^2 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$

d) Dựa vào đạng dồ thị hàm số bậc ba, hàm số có hai điểm cực trị thoả mãn $x_{CD} < x_{CT}$ khi $m > 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là $0 < m < 2$.

Câu 144. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 1$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 2.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{array}\right.$

Do $x_1 \neq x_2$ với mọi m nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

c) Dễ thấy $x = m + 1$ là điểm cực tiểu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$

d) Với mọi m, toạ độ hai điểm cực trị là $A(m + 1; -3m - 2)$ và $B(m - 1; -3m + 2)$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = 2\sqrt{5}$

Câu 145. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ (m là tham số).

a) $y'=x^2-2mx+m+1$.

b) Với $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Với $m=-1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) Có 4 số nguyên của tham số m thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

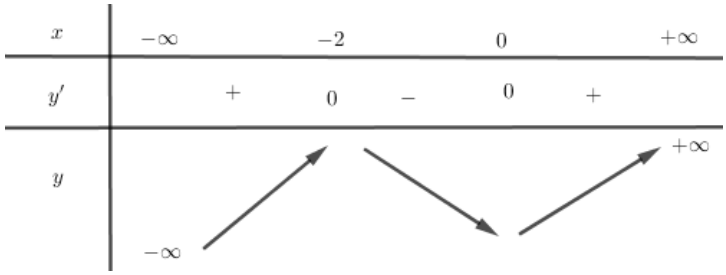
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có $y'=x^2-2mx+m+1$.

b) c) Với $m=-1$, ta có $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-1$.

$y'=x^2+2x$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận:

Với $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Với $m=-1$ thì đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu là $(0;-1)$ và một điểm cực đại là $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

d) $y'=x^2-2mx+m+1$

Để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$x^2-2mx+m+1\geq 0\ \ \forall\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-m-1\leq 0\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq m\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{0,1\}$

Câu 146. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Khi $m=1$ thì $f(2025)<f(2024)$

c) Khi $m<-3$ hoặc $m>3$ thì hàm số có 2 điểm cực trị

d) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 5$. Biết $S=(a;b]$. Khi đó $2b-a=\sqrt{61}-1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y'=3x^2-6mx+27$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+9=0$

Khi $m=1$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ suy ra $f(2024)>f(2023)$

c) Ta có $y'=3x^2-6mx+27$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+9=0$ (1)

Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0$

$\Leftrightarrow m^2-9>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-3 \end{array}\right.$ (*)

d)Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=9 \end{cases}$

Ta lại có $|x_1-x_2|\le 5\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2\le 25\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-25\le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2-61\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2}\le m\le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3<m\le\dfrac{\sqrt{61}}{2}\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases}\Rightarrow T=2b-a=\sqrt{61}-3$.

Câu 147. Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ (m là tham số).

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) $y'=6x^2+(m-1)x+6m(1-2m)$

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-m$ và $x=1-2m$

d) Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho song song đường thẳng $y=-4x$, khi đó tổng tất cả các giá trị thực của tham số m bằng $-\dfrac{1}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$,

c) $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1-2m\end{array}\right.$.

d) $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1-2m\end{array}\right.$

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 1-2m\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(m;-7m^3+3m^2\right)$, $B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0\Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases}-(3m-1)^2=-4\\2m^3-3m^2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\\\begin{cases}m\neq 0\\m\neq\frac{1}{2}\\m\neq 1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 148. Cho hàm số $y=\frac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

a) $y'=\frac{m-5}{(x+m)^2}$

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\geq 5$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m\leq 5$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $m\in(5;8]$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Điều kiện $x+m\neq 0\Leftrightarrow x\neq -m$. Tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Ta có $y'=\frac{m-5}{(x+m)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

b) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5>0\Leftrightarrow m>5$.

c) Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m-5<0\Leftrightarrow m<5$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{m-5}{(x+m)^2}>0\\ -m\notin(-\infty;-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\ -m\geq -8\end{cases}\Leftrightarrow 5<m\leq 8$$

Câu 149. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ khi $m=2$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y=2x+2m$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số xác định khi $x-m\neq 0\Leftrightarrow x\neq m$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}$.

b) Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m hay $g(x)=x^2-2mx+2m^2-m-2$ có hai ngiệm phân biệt khác m.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ g(m)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+m+2>0\\ m^2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-1;2)$$

Vì m nguyên nên $m=\{0;1\}$ nên có hai giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

c) Hàm số đạt cực trị tại $x=-1$ thì $y'(-1)=0\Leftrightarrow 2m^2+m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Thử lại với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $y'=\dfrac{x^2-x-2}{x-\dfrac{1}{2}}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0.5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	$+\infty$	↘	y_2	↗	$+\infty$

Vậy với $m=\dfrac{1}{2}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

d) Cho hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Nếu hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.

Áp dụng vào bài toán ta được $y=\dfrac{\left(x^2-2mx+m+2\right)^2}{(x-m)^2}=2x-2m$

Câu 150. Cho hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$, với $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và m là tham số

a) Nếu đặt $t=\cot x$ thì hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in(0;1)$.

b) Nếu đặt $t=\cot x$ thì tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) Nếu đặt $t=\cot x$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$

d) Có 2026 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Đặt $t=\cot x$. Ta có $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$, $t=\cot x$ là hàm nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó, $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ với $t\in(0;1)$.

b) Tập xác định của hàm số $y=f(t)$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

c) $f'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

d) hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ đồng biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$ hay $f'(t)\ge 0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-2mt+1\ge 0,\forall t\in(0;1)\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{t^2+1}{2t},\forall t\in(0;1)\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}(*).$$

Xét hàm số $y=g(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Khi đó $g'(t)=\dfrac{t^2-1}{2t^2}<0,\forall t\in(0;1)$ nên hàm số $y=g(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m\le g(1)\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m=1\end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên và thuộc đoạn $[-2024;2024]$ nên có 2026 giá trị của m thoả mãn.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 151. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

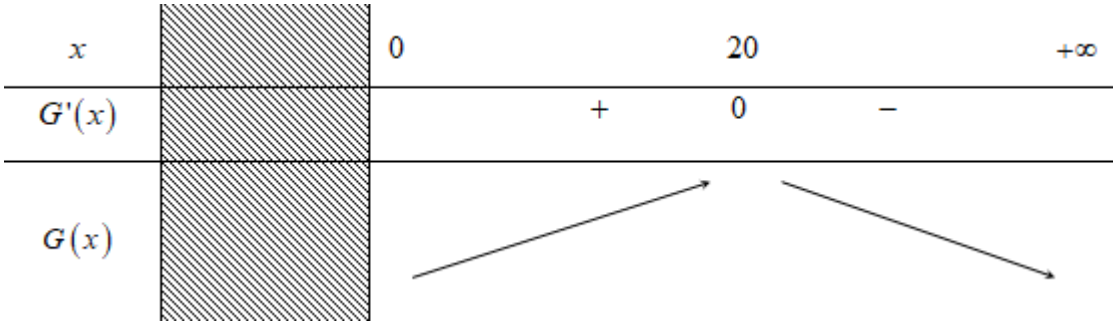
Đáp án: 20.

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=20$

Bảng biến thiên:



Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ thì huyết áp bệnh nhân giảm

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow a+b=20$

Câu 152. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Biết vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(a;b)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15.

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}(v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}; E'(v)=0 \Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		↘	$E(9)$	↗	

Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng $(6;9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm

$$\Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow a+b=15$$

Câu 153. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126\ (s)$ cho bởi hàm số sau đây: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m)



Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Tính $T=a+b$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 149.

Xét hàm số vận tốc của tàu con thoi $v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23$ với $t\in[0;126]$.

Gia tốc của tàu con thoi là $a(t)=v'(t)= 0,003906t^2-0,18058t$.

Ta có $a'(t)=0,007812t-0,18058=0\Leftrightarrow t\approx 23$.

Bảng biến thiên của hàm số $a(t)$ như sau:

t	0		23		126
$a'(t)$		$-$	0	$+$	
$a(t)$	0	↘	$-2,087$	↗	$39,259$

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian $(23;126)$ tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

Do đó: $T=a+b=23+126=149$.

Câu 154. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I ($I>0$, đơn vị A) là cường độ dòng điện. Biết công suất P tăng khi cường độ dòng điện I ở trong khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

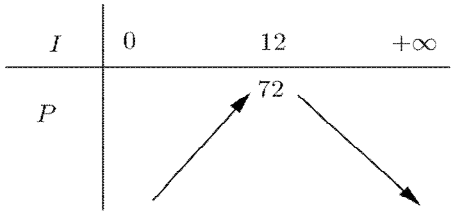
Lời giải

Đáp án: 12.

Xét hàm số $P=12I-0,5I^2$ với $I\geq 0$.

$P'=12-I$. $P'=0\Leftrightarrow I=12$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện $(0;12)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow a+b=12$$

Câu 155. Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y=f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0		3		8		12
$f'(t)$		+	0	−	0	+	
$f(t)$	40	↗	70	↘	25	↗	60

Tại thời điểm t (giờ) bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Từ bảng biến thiên ta thấy tại thời điểm $t=8$ thì hàm số đạt cường độ âm thanh nhỏ nhất là 25.

Câu 156. Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y=-2x^4+36x^2-90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 30

Ta có $y'=-8x^3+72x$

Giải $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\end{array}\right.$

Với đồ thị hàm bậc 4 trùng phương hệ số $a<0$, ta chọn $x=3$ để hàm số đạt cực đại.

Vậy giá bán để tối ưu lợi nhuận là 30 nghìn đồng/ly.

Câu 157. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,6

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$.

$$h'(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2\cdot\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1+5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5(\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		$\ln 5$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	1250	↘	

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 158. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x)=0,01x^2+20x+1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1500

Doanh thu từ việc bán x chiếc nón là: R(x) = 50x (nghìn đồng)

Lợi nhuận là hiệu số giữa doanh thu và chi phí nên

$P(x)=C(x)-R(x)=50x-(0,01x^2+20x+1000)=-0,01x^2+30x-1000$.

$P'(x)=-0,02x+30$

$P'(x)=0\Leftrightarrow x=1500$.

$P''(x)=-0,02<0$ với mọi x nên $x=1500$ là điểm cực đại.

Kết luận: Xưởng cần sản xuất 1500 chiếc nón bảo hiểm để đạt lợi nhuận tối đa.

Câu 159. Giả sử tổng chi phí sản xuất x $(0\le x\le 50)$ đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C(x)=\dfrac{x^2}{4}+3x+400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900-6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Trả lời: ……..

Lời giải

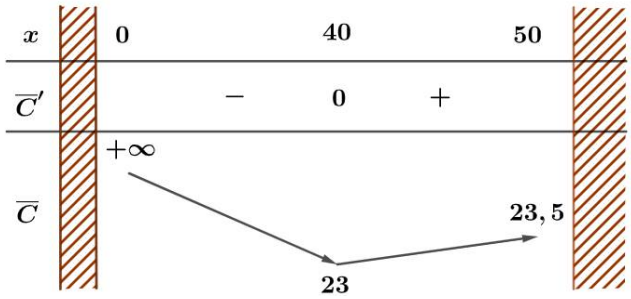
Đáp án: 40

Kí hiệu $\overline{C}(x)$ là chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm.

Ta có $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{x}{4}+3+\dfrac{400}{x}$.

Đạo hàm: $\overline{C}'(x)=\dfrac{x^2-1600}{4x^2}=0\Leftrightarrow x=40$ (vì $0\le x\le 50$).

Bảng biến thiên như sau



Vậy mức sản lượng $x=40$.

Câu 160. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà một công ty thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận:

$P(x)=-0,000001x^3+0,001x^2+5x-500;\quad 0\le x\le 2000$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1667

Tính đạo hàm $P'(x)$: $P'(x)=\left(-10^{-6}x^3+10^{-3}x^2+5x-500\right)'=-3\cdot10^{-6}x^2+2\cdot10^{-3}x+5$

Xét $P'(x)=0$: $-3.10^{-6}x^2+0,002x+5=0\Rightarrow 3.10^{-6}x^2-0,002x-5=0.$

Chia cả hai vế cho 10^{-6}: $3x^2-2000x-5000000=0$

$$x=\frac{2000\pm\sqrt{2000^2+4\cdot3\cdot5000000}}{2\cdot3}=\frac{2000\pm\sqrt{4000000+60000000}}{6}$$

$$=\frac{2000\pm\sqrt{64000000}}{6}=\frac{2000\pm8000}{6}.$$

Kết quả: $x_1=\frac{2000+8000}{6}=\frac{10000}{6}\approx1666,67$, $x_2=\frac{2000-8000}{6}=-1000$ (loại)

Chọn $x=1666,67$ (nằm trong đoạn $[0;2000]$).

Lập bảng biến thiên ta suy ra được P đạt cực đại tại $x\approx1666,67$.

Để lợi nhuận hàng ngày lớn nhất, công ty nên sản xuất khoảng 1667 DVD

Câu 161. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p=\frac{50}{0.01x^2+1}$, $0\le x\le20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R=px$ đạt cực đại?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Doanh thu $R(x)$ là $R(x)=p(x)x=\frac{50x}{0,01x^2+1}$

Tính đạo hàm $R'(x)$

$$R'(x)=\frac{\left(0,01x^2+1\right)\cdot50-50x\cdot(0,02x)}{\left(0,01x^2+1\right)^2}=\frac{50\left(0,01x^2+1-0,02x^2\right)}{\left(0,01x^2+1\right)^2}=\frac{50\left(1-0,01x^2\right)}{\left(0,01x^2+1\right)^2};0\le x\le20$$

Giải $R'(x)=0$: $1-0,01x^2=0\Rightarrow x^2=100\Rightarrow x=10$

Có bảng xét dấu:

x	0		10		20
$R'(x)$		+	0	−	

Suy ra được hàm số đạt cực đại tại $x=10$

Giá trị cực đại là $R(10)=250$.

Câu 162. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 24

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=4\in[0;6]$

$f(0)=0; f(4)=24; f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\mathrm{m/s})$.

Câu 163. Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t)=-t^3+3t^2$ với $t\geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$\Rightarrow f'(t)=-3t^2+6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=0\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		2		3
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	4	↘	

Vận tốc của vật đạt được cao nhất là $4\ m/s$

Câu 164. Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0\,(s)$ cho đến thời điểm $t=126\,(s)$ được cho bởi công thức $v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi gần bằng bao nhiêu ft/s? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

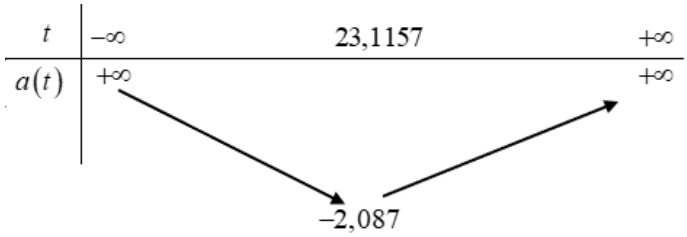
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20,8

Ta có: $a(t)=v'(t)=0,003906t^2-0,18058t$

Ta có BBT hàm $a(t)=0,003906t^2-0,18058t$.



Thời điểm tàu con thoi đạt gia tốc nhỏ nhất là $t\approx 23,1157$

$v(23,1157)=0,001302t^3-0,09029t^2+83\approx 20,8$ ft/s

Câu 165. Vận tốc trung bình của dòng xe trên đoạn đường 124 từ 6A.M. đến 10A.M. được xấp xỉ bởi $f(t)=20t-40\sqrt{t}+50,\quad 0\le t\le 4$ trong đó t tính bằng giờ kể từ 6 A.M. và $f(t)$ tính bằng km/giờ. Hỏi vào thời điểm mấy giờ trong buổi sáng (giữa 6A.M. và 10A.M.) thì vận tốc trung bình thấp nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Tính đạo hàm $f'(t)=20-40\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=20-\dfrac{20}{\sqrt{t}}$

Xét $f'(t)=0$: $20-\dfrac{20}{\sqrt{t}}=0\Rightarrow\dfrac{20}{\sqrt{t}}=20\Rightarrow\sqrt{t}=1\Rightarrow t=1$

Lập bảng xét dấu ta được:

t	0		1		4
$f'(t)$		−	0	+	

Suy ra vận tốc trung bình thấp nhất 30 mph xảy ra vào 7:00A.M. $(t=1)$.

Câu 166. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $N(t)=45t^2-t^3, 0\le t\le 30$ (người). Nếu xem $N'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Ta có: $N(t)=45t^2-t^3, 0\le t\le 30$;

$N'(t)=90t-3t^2, N''(t)=90-6t N''(t)=0\Leftrightarrow 90-6t=0\Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

t	0		15		30
$N''(t)$		+	0	−	
$N'(t)$	0	↗	675	↘	0

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 167. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x)=k\left(x_0-x\right)\cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$, trong đó k là hằng số $(k>0)$ và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Khi đó $x=\frac{a}{b}x_0$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a,b\in\mathbb{Z}$) thì vận tốc luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Xét hàm số $f(x)=\left(x_0-x\right)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0\le x\le x_0$.

Do k là hằng số dương nên vận tốc của luồng khí của một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có:

$$f(x)=-x^3+x_0x^2;\ f'(x)=-3x^2+2x_0x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ hoac } x=\frac{2}{3}x_0.$$

Bảng biến thiên:

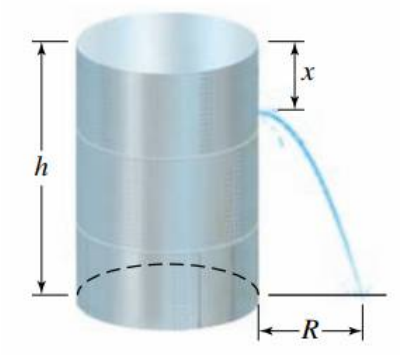
x	$\frac{1}{2}x_0$		$\frac{2}{3}x_0$		x_0
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}x_0\right)$	↗	$f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$	↘	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{\left[\frac{1}{2}x_0;x_0\right]}f(x)=f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$.

Vậy vận tốc của luồng khí của một con ho lớn nhất khi $x=\frac{2}{3}x_0$.

$\Rightarrow a=2;b=3\Rightarrow a+2b=8$

Câu 168. Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, vận tốc tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V=\sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R=2\sqrt{x(h-x)}$. Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x=K.h,(K\in\mathbb{R})$ so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,5

Thay vì trực tiếp tối đa $R(x)$, ta có thể tối đa $R^2(x)$ (vì hàm căn là tăng):

$R^2(x)=4x(h-x)=4\left(hx-x^2\right)$

Tính đạo hàm: $\left(R^2(x)\right)'=4(h-2x)$

Giải $\left(R^2\right)'=0:\ h-2x=0\Rightarrow x=\dfrac{h}{2}.$

Lập bảng biến thiên ta có $x=\dfrac{h}{2}$ là điểm cực đại.

Vậy lỗ phun nên đặt ở độ cao $x=\dfrac{h}{2}=0,5h$ để tầm xa R của tia nước đạt tối đa.

Câu 169. Một bể ban đầu chứa 10 gal dung dịch muối với 2 lb muối. Dung dịch vào có nồng độ $1.5lb/gal$ chảy vào với tốc độ $3gal/$ phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ $4gal/$ phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là x (pound), với:

$$x=f(t)=1,5(10-t)-0,0013(10-t)^4,\quad 0\le t\le 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu lb? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $7,43$

Ta có công thức lượng muối x (pound) trong bể sau t phút:

$x(t)=1,5(10-t)-0,0013(10-t)^4;\quad 0\le t\le 10$

Đặt $u=10-t$. Khi t chạy từ 0 đến 10 thì u chạy từ 10 xuống 0.

Khi đó $x=1,5u-0,0013u^4;\quad 0\le u\le 10$

Tính đạo hàm theo u ta được: $1,5-0,0013\cdot 4u^3=1,5-0,0052u^3$

Xét $1,5-0,0052u^3=0\Rightarrow u^3=\dfrac{1,5}{0,0052}\approx 288,46\Rightarrow u\approx\sqrt[3]{288,46}\approx 6,62$

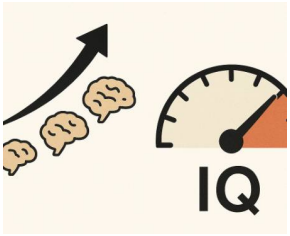
Lập bảng xét dấu ta được:

u	0		$6,62$		10
$x'(u)$		$+$	0	$-$	

Suy ra tại $u\approx 6,62$: $x_{CD}=1,5\cdot 6,62-0,0013(6,62)^4\approx 9,93-2,50\approx 7,43lb.$

Lượng muối trong bể đạt tối đa khoảng 7,43 lb tại thời điểm $t\approx 3,38$ phút kể từ lúc bắt đầu.

Câu 170. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t)=0,000989t^3-0,0486t^2+0,7116t+1,46,\quad 5\le t\le 19$



Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Ta có: $S'(t)=3\cdot 0,000989t^2-2\cdot 0,0486t+0,7116=0,002967t^2-0,0972t+0,7116$

Giải $S'(t)=0\Leftrightarrow 0,002967t^2-0,0972t+0,7116=0$

Ta có $t=\dfrac{0,0972\pm 0,0316}{2\cdot 0,002967}\approx\dfrac{0,0972\pm 0,0316}{0,005934}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1\approx\dfrac{0,1288}{0,005934}\approx 21,7 & (\notin[5;19]),\\ t_2\approx\dfrac{0,0656}{0,005934}\approx 11,1 & (\in[5;19]).\end{cases}$

Vậy nghiệm khả dụng duy nhất trên $[5,19]$ là $t\approx 11,1$

Lập bảng biến thiên hàm số $S(t)$ suy ra $t \approx 11{,}1$ là điểm cực đại.

Vậy độ dày vỏ não của nhóm trẻ IQ cao đạt cực đại tại $t \approx 11$ tuổi.

Câu 171. Biết hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 44$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

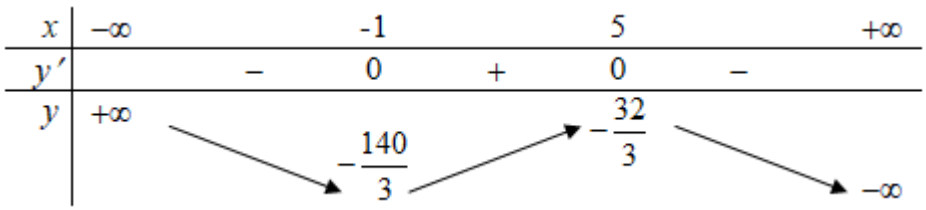
Lời giải

Đáp án: 4

$y' = -x^2 + 4x + 5$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;5)$.

$\Rightarrow a+b=4$

Câu 172. Biết hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Dựa vào bảng xét dấu tam thức bậc hai thấy $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;3)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.

$\Rightarrow b-a=4$

Câu 173. Biết hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(a;+\infty)$. Tính giá trị của a.

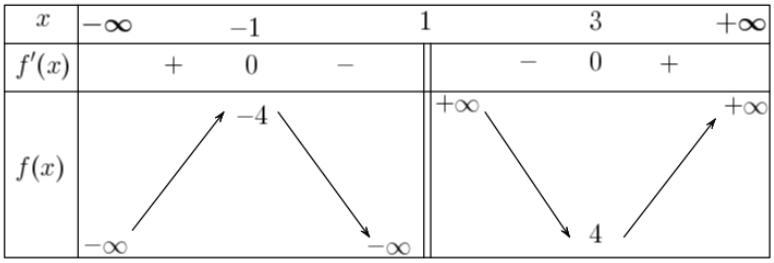
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty) \Rightarrow a=3$

Câu 174. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0.

$y=\sqrt{x^2-2x}$

TXĐ: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

$y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=0 \Leftrightarrow x=1(l)$.

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 175. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y'=3x^2-6x$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right).\left(3x^2-6x\right)-2x+2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-2x+2$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow b-a=4$

Câu 176. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y=x^3+3x^2-9x$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $4b-a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20 .

$y=x^3+3x^2-9x$.

$y'=3x^2+6x-9$

Chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right).\left(3x^2+6x-9\right)-8x+3$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-8x+3$

$\Rightarrow 4b-a=20$

Câu 177. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+5$ có đồ thị (C). Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4,47

Ta có: $y'=3x^2-6x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y(0)=5\\x=2\Rightarrow y(2)=1\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;5)$, $B(2;1)$

Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $AB=\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{5}\approx 4,47$.

Câu 178. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB (kết quả làm tròn đến phần trăm)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,25

Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có $y'=3x^2-6x-9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1;6)$ và $B(3;-26)$

Phương trình đường thẳng qua AB là $8x+y+2=0$. Khi đó $d(O;AB)=\frac{2}{\sqrt{65}}\approx 0,25$.

Câu 179. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức , ta có: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$y=\frac{\left(3x^2+13x+19\right)'}{(x+3)'}\Leftrightarrow y=6x+13\Rightarrow a+b=19$

Câu 180. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $5b-4a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 18

Ta có: $\dfrac{\left(-x^2+2x-1\right)'}{\left(x+2\right)'}=\dfrac{-2x+2}{1}=-2x+2$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A và B là: $y=-2x+2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow 5b-4a=18$

Câu 181. Biết đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a-2025b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2023.

$y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{-x^2-x+1}{x+2}$

Ta có: $\dfrac{\left(-x^2-x+1\right)'}{\left(x+2\right)'}=\dfrac{-2x-1}{1}=-2x-1$

Vậy đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-2x-1$

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a-2025b=2023$

Câu 182. Biết đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị là $x_1=1-\sqrt{2};\ x_2=1+\sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A\left(1+\sqrt{2};2\sqrt{2}-2\right)$ và $B\left(1-\sqrt{2};-2-2\sqrt{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2x-4$

Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là $C(2;0)$ và $D(0;-4)$.

Diện tích tam giác cần tính là $S=\frac{1}{2}OC.OD=4$.

Câu 183. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có mấy cực trị?

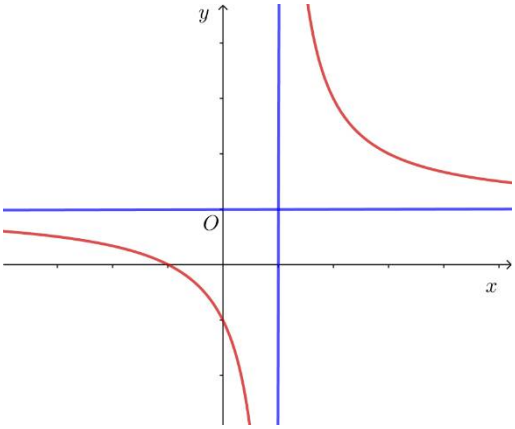
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án 3

Đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là phần đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị $y=f(x)$ nên có 3 cực trị

Câu 184. Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a\neq -1$) có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in\left[-2025;2025\right]$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án 2026

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Khi đó: $y'=\frac{-1-a}{(x-1)^2}$ $\forall x\neq 1$.

Hai nhánh của đồ thị có chiều đi xuống nên $y'<0,\forall x\neq 1\Leftrightarrow\frac{-1-a}{(x-1)^2}<0\Leftrightarrow -1-a<0\Leftrightarrow a>-1$

Mà $a\in\mathbb{Z},a\in\left[-2025;2025\right]\Rightarrow a=\{0;1;...;2024;2025\}$, suy ra có 2026 số cần tìm

Câu 185. Biết hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $\left(-1;18\right)$ và $\left(3;-16\right)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$

Theo giả thiết suy ra: $\begin{cases} y'(1) = 3a - 2b + c = 0 \\ y(-1) = -a + b - c + d = 18 \\ y'(3) = 27a + 6b + c = 0 \\ y(3) = 27a + 9b + 3x + d = 16 \end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 18 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3x + d = 16 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{17}{16}; b = \frac{51}{16}; c = -\frac{153}{16}; d = \frac{101}{16} \Rightarrow P = 1.$

Câu 186. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm $B(2;2)$. Tính $a + b + c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c (a,b,c \in \mathbb{R})$ có một điểm cực trị là $A(-1;29)$ và đi qua điểm

$B(2;2)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} y(-1) = 29 \\ y'(-1) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 + a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 29 \\ 3.(-1)^2 + 2a.(-1) + b = 0 \\ 2^3 + a.2^2 + b.2 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 24 \end{cases}.$

Khi đó $a + b + c = -3 - 9 + 24 = 12$.

Câu 187. Hàm số $y = \left|x^2 + 5x + 6\right|$ có mấy điểm cực trị ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$$y = \left|x^2 + 5x + 6\right| = \sqrt{\left(x^2 + 5x + 6\right)^2}$$

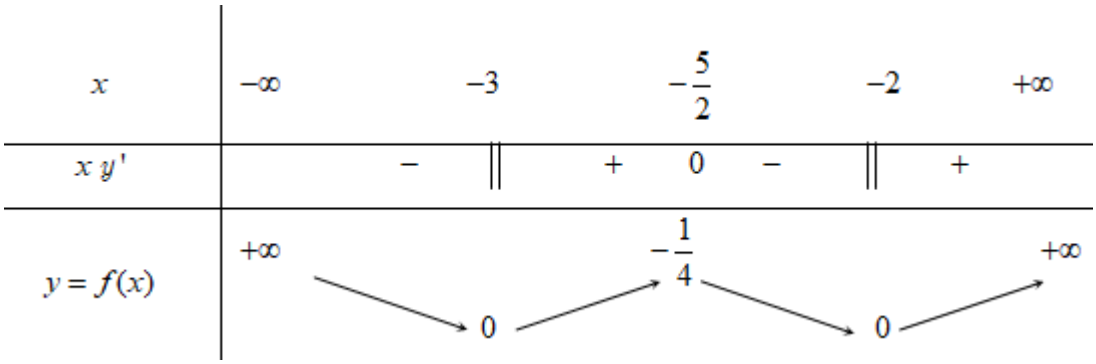
Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{(2x + 5)\left(x^2 + 5x + 6\right)}{\sqrt{\left(x^2 + 5x + 6\right)^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$$

Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ và $x = 2$.

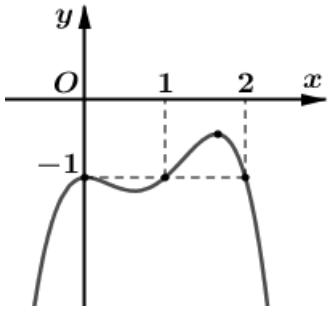
Cho $y'=0\Leftrightarrow(2x+5)(x^2+5x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{2}\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên: Hàm số có 2 cực tiểu $(-3,0);(-2,0)$; Hàm số có 1 cực đại $\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$

Câu 188. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có $f'(x)$ không cắt trục hoành nên hàm số không có cực trị.

Câu 189. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $f'(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Tính giá trị $b-2a$.

Trả lời: ……..

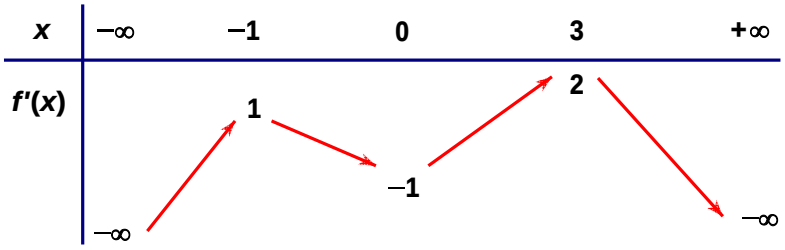
Lời giải

Đáp án: 7

Từ bảng biến thiên $y=f'(x)$ ta có: trên khoảng $(-2;3)$ có $f'(x)\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng: $(-2;3)$

$\Rightarrow b-2a=7$

Câu 190. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

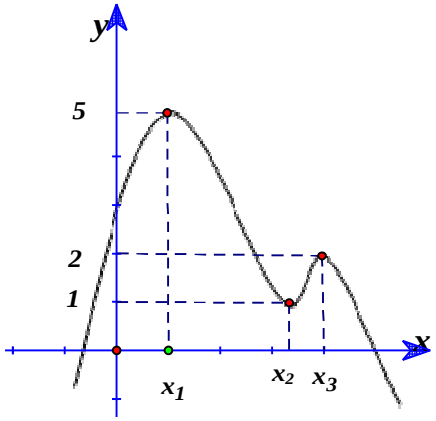
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục hoành 4 điểm nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị

Câu 191. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

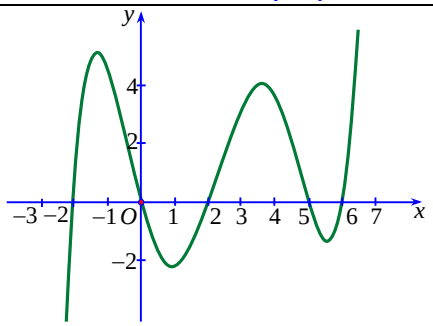
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên có 2cực trị

Câu 192. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực tiểu ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ đồ thị:

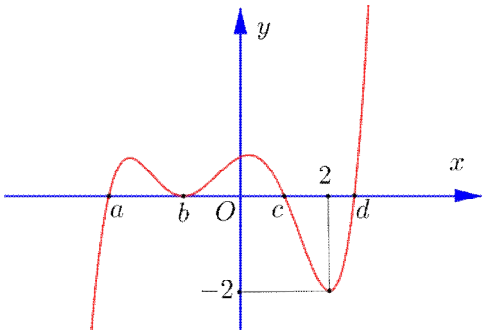
+ Qua nghiệm $x=-2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=2$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 193. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(x)$ có mấy cực trị ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm nên có 3 cực trị

Câu 194. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$

$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3.

Số cực trị là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục ox và qua giao điểm đó $f'(x)$ phải đổi dấu

Từ bảng biến thiên:

+ Qua nghiệm $x=-3$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=-3$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=2$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $x=2$ là hoành độ cực đại của đồ thị $y=f(x)$.

+ Qua nghiệm $x=5$ đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $x=5$ là hoành độ cực tiểu của đồ thị $y=f(x)$.

Vậy Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 195. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^4(x^2+4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Do $f(|x|)=f(x)$ nếu $x\geq 0$ và $f(|x|)$ là hàm số chẵn nên hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 196. Hàm số $y=x^3-3x^2+mx-2$ đạt cực tiểu tại $x=2$ khi giá trị tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

$y'=3x^2-6x+m$

$y''=6x-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ khi: $\left\{\begin{array}{l}y'(2)=3.2^2-6.2+m=0\\y''(2)=6.2-6>0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=0$

Câu 197. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m^2-m+2)x^2+\left(3m^2+1\right)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$y'=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1$

$y''=2x+2(m^2-m+2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi: $\begin{cases}y'(-2)=0\\y''(-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m-3=0\\m^2-m>0\end{cases}\Leftrightarrow m=3$

Câu 198. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\left(m^2+5m\right)x^3+6mx^2+6x-6$ có cực trị tại $x=1$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3\left(m^2+5m\right)x^2+12mx+6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ nên

$y'(1)=0$

$\Leftrightarrow -3m^2-3m+6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=1\end{array}\right.$

+ Với $m=-2\Rightarrow y=6x^3-12x^2+6x-6$

$y'=18x^2-24x+6$

$y'=0\Leftrightarrow 18x^2-24x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=1$ là giá trị cực tiểu nên $m=-2$ thoả

+ Với $m=1\Rightarrow y=-6x^3+6x^2+6x-6$

$y'=-18x^2+12x+6$

$y'=0\Leftrightarrow -18x^2+12x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=1$ là giá trị cực đại nên $m=1$ thoả

Vậy $m=-2$ và $m=1$ là giá trị cần tìm

Suy ra $-2+1=-1$

Câu 199. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}\Rightarrow y''=\dfrac{2x+2m}{(x+m)^4}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ khi và chỉ khi:

$y'(2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-3=0 \\ m\neq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right.$

+ Với $m=-3\Rightarrow y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=2$ là giá trị cực tiểu nên $m=-3$ thoả

+ Với $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $x=2$ không phải là giá trị cực tiểu nên $m=1$ không thoả

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm

Câu 200. Với giá trị tham số $m\in(a;b)\setminus\{c\}$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$) thì hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

$y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ m^2+2m-3<0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ -3<m<1 \end{cases}\Leftrightarrow m\in(-3;1)\setminus\{-2\}\Rightarrow P=a+b+c=-4$

Câu 201. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m\in[-2020;2020)$ để hàm số $y=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$ có cực trị ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2020

$y'=3mx^2+6mx-(m-1)$

+ Khi $m=0\Rightarrow y'=1>0\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến $\Rightarrow m=0$ không thỏa

+ Khi $m\neq 0\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3mx^2+6mx-(m-1)=0\quad(1)$

$$\Delta'=9m^2+3m(m-1)=12m^2-3m$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow 12m^2-3m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Suy ra có 2020 bao nhiêu giá trị nguyên âm

Câu 202. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Biết giá trị nhỏ nhất của $abc+ab+c=-\dfrac{m}{n}$, với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 34

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab\ (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\dfrac{1}{9}ab=0\Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $abc+ab+c=9c^2+10c=\left(3c+\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}\geq-\dfrac{25}{9}$.

Suy ra $\min(abc+ab+c)=-\dfrac{25}{9}$.

$\Rightarrow m+n=34$

Câu 203. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+3x-2$ không có cực trị.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}$.

* Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=3x^2+2(m-1)x+3=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2-9\le 0\Leftrightarrow m^2-2m-8\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 4$.

Suy ra tổng các giá trị nguyên là 7.

Câu 204. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-100;100]$ để hàm số có cực đại, cực tiểu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 200

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y'=3(m-1)x^2-6x-(m+1)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-1\ne 0 \\ \Delta'=9+3(m-1)(m+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ \Delta'=m^2+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ne 1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-100;100]$ nên $m\in\{-100;-99;...;100\}\setminus\{1\}$

Như vậy có 200 giá trị m cần tìm

Câu 205. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=mx^4-(m+1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19

$y'=4mx^3-2(m+1)x=0$

$$\Leftrightarrow 2x(2mx^2-m-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2mx^2=m+1 \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>0 \end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;10\}\setminus\{-1;0\}$

Như vậy có 19 giá trị m cần tìm

Câu 206. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số: $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$ có 2 cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Hàm số đã cho xác định trên: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-m=0=g(x)$

$\Delta=-1+m$

để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases}g(-1)\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2-m\neq 0\\ -1+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m<1\end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;0\}\setminus\{-1\}$

Như vậy có 10 giá trị m cần tìm

Câu 207. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m+1}{x+1}$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho cũng đi qua điểm $A(1;-1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

Hàm số đã cho xác định trên: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-m=0=g(x)$

$\Delta=-1+m$

để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases}g(-1)\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2-m\neq 0\\ -1+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m<1\end{cases}$

Ta có: $y=\dfrac{\left[x^2+(m+1)x+2m+1\right]'}{(x+1)'}=2x+m+1$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y=-2x+m+1$ với $\begin{cases}m\neq -1\\ m<1\end{cases}$

điểm $A(-1;-1)$ thuộc phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị nên :

$-1=-2.1+m+1\Rightarrow m=-4$ (thỏa)

Câu 208. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$ có 2 điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x+m=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=-x^2+2x+m=0 \ \ (co\ nghiêm) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta_g^{'}=1+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-1 \\ 1+m\neq 0 \end{cases}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-5;10)$ nên $m\in\{-1;0;...;9\}$

Như vậy có 11 giá trị m cần tìm

Câu 209. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-5;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=3-2m>0 \\ g(-1)=2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in(-5;10)$ nên $m\in\{-4;-3;...;1\}$

Như vậy có 6 giá trị m cần tìm

Câu 210. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+2x-(2m-5)=0 \quad (co\ nghiêm)\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=-1\neq 0\\ \Delta'=-2m+6>0\end{cases}\Leftrightarrow m<3.\\ -2m+6\neq 0\end{cases}$

Vậy $m<3$ là giá trị cần tìm

Số nguyên dương cần tìm là: $m=\{1;2\}$

Câu 211. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y'=\dfrac{x^2-2x+m^2-3m+3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\neq 0\\ \Delta'=-m^2+3m-2>0\\ g(1)=m^2-3m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên có 0 là giá trị cần tìm

Câu 212. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-10;10)$ để hàm số $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ có cực đại và cực tiểu.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2},\forall x\neq m$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow y'=x^2-2mx+m^2-1=0$.

$\Delta'_{y'} = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó, $\forall m \in \mathbb{R}$ thì $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = m - 1$ và $x_2 = m + 1$.

Mà $m \in (-10;10), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-9 - 8; ...; 8; 9\}$ hay có 19 là giá trị cần tìm

Câu 213. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ có cực trị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx - 1)^2}$, $\forall x \neq \dfrac{1}{m}$.

Để hàm số có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x \neq \dfrac{1}{m}$.

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2 - 2x + m}{(mx - 1)^2} = 0 \text{ có nghiệm } x \neq \frac{1}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = mx^2 - 2x + m = 0 \ (co\ nghiêm) \\ g\left(\dfrac{1}{m}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 \geq 0 \end{cases} \\ m - \dfrac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 \leq m \leq 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 1.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0\}$ hay có 1 là giá trị cần tìm

Câu 214. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có điểm cực tiểu là $I(1;3)$. Tính $m + n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n \Rightarrow y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \Rightarrow y'' = 6x - 4m$

Do $I(1;3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(1;3) \in y \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 4$.

Câu 215. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –9

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ x^2+2mx+m^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ \left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		$-m+1$		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7\Leftrightarrow -m-2=7\Leftrightarrow m=-9$.

Câu 216. Cho hàm số sau $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2-2mx+2m-3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0\ \ (hn)\\ m^2+2m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m\le 1$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-3;-2;-1;0;1\}$

Câu 217. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+4x+2027$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 218. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10)$ để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2026$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$ là:

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 44

$y=x^3-3x^2+3(m+2)x+3m-2026$

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=3x^2-6x+3(m+2)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\ 9-9(m+2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge -1$.

Vậy $m\ge -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m\in[-10;10)$ nên Tổng các giá trị nguyên của tham số là 44.

Câu 219. Biết giá trị tham số $m\in\left[a;\frac{b}{c}\right]$ (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số $y=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$ đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P=\frac{a^2+b^2}{c}$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7,5

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'=3x^2-2(2m-1)x+(2-m)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3>0\\ \Delta'=(2m-1)^2-3(2-m)=4m^2-m-5\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le\frac{5}{4}$.

* Vậy $-1\le m\le\frac{5}{4}$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in \left[a;\dfrac{b}{c}\right]$ nên $\begin{cases} a=-1 \\ b=5 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow P=\dfrac{a^2+b^2}{c}=\dfrac{13}{2}$

Câu 220. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}(3-m)x^3-(m+3)x^2+(m+2)x+2027$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Hàm số đã cho xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=(3-m)x^2-2(m+3)x+(m+2)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* Trường hợp 1: $3-m=0 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow y'=-12x+5 \Rightarrow m=3$ không thỏa

* Trường hợp 2: $3-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 3$

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3-m>0 \\ \Delta'=(m+3)^2-(3-m)(m+2)=2m^2+5m+3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ -\dfrac{3}{2}\leq m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq m\leq -1.$$

Vậy $-\dfrac{3}{2}\leq m\leq -1$ là giá trị cần tìm

$m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-1\}$

Câu 221. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

$y'=3x^2-6x+4-m$

$ycbt \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in(2;+\infty)$

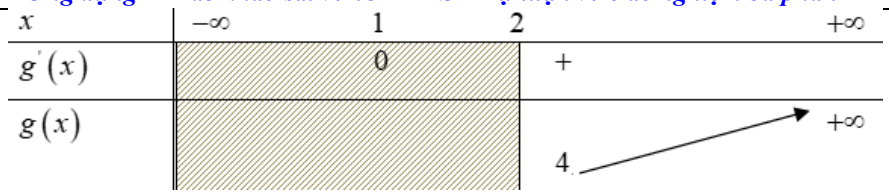
$\Leftrightarrow 3x^2-6x+4-m\geq 0, \forall x\in(2;+\infty) \Leftrightarrow m\leq 3x^2-6x+4, \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x)=3x^2-6x+4$

Ta có.

$g'(x)=6x-6$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \le 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $m \le 4$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó có 4 giá trị nguyên dương là $m = \{1;2;3;4\}$

Câu 222. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \ge 0$, $\forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (2;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;+\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \le g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{12}$.

Câu 223. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$ (do $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m) = 1$).

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow m+1 \le 2 \Leftrightarrow m \le 1$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m=1$.

Câu 224. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2024;2025)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

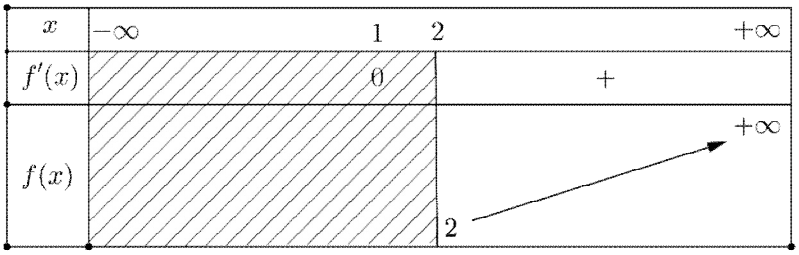
$\Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

$f'(x) = 6x - 6$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy $m \le 2$.

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2024;2025) \Rightarrow m = \{-2023;-2022;...;0;1;2\}$.

Suy ra có 2026 giá trị nguyên của tham số m

Câu 225. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y' = -3x^2 - 6x + 4m - 9 \le 0 \quad \forall x \in (-\infty;-1)$

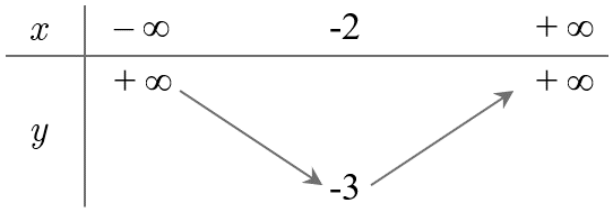
$\Leftrightarrow 4m \le 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m \le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x)$

$f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Ta có $f'(x)=6x+12; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên



Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x)=-3 \Rightarrow 4m \le -3 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{4}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10) \Rightarrow m=\{-9;-8;...;-2;-1\}$.

Suy ra có 9 giá trị nguyên của tham số m

Câu 226. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để $y=\dfrac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0, \forall x \ne -1 \Leftrightarrow m<1$

Mà $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10) \Rightarrow m=\{-9;-8;...;-1;0\}$.

Suy ra có 10 giá trị nguyên của tham số m

Câu 227. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1<m<3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 228. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

* Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;1)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}, \forall x\neq -m$.

* Để hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'<0, \forall x\in(-\infty;1) \\ -m\notin(-\infty;1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m\notin(-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ -m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-1.$$

* Vậy thỏa yêu cầu bài toán thì: $-2<m<-1$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\varnothing$.

Câu 229. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;5)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-m}{2}\right\}$.

Ta có $y=\dfrac{mx+18}{2x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-36}{(2x+m)^2}$.

$$\text{YCBT}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-36<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(-2;5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{2}\geq 5 \\ -\dfrac{m}{2}\leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq -10 \\ m\geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 4\leq m<6.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m là $m=\{4;5\}$.

Câu 230. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{4}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{m^2-36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;4)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-36<0 \\ -\dfrac{m}{4}\notin(0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 0 \\ m\leq -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq m<6.$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m là $\{0;1;2;3;4;5\}$.

Câu 231. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Điều kiện: $3x+2m-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{-2m+1}{3}$

Đạo hàm $y'=\dfrac{(m+1)(2m-1)-54}{(3x+2m-1)^2}=\dfrac{2m^2+m-55}{(3x+2m-1)^2}$

Hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+18}{3x+2m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(3;7)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2+m-55<0\\ \dfrac{-2m+1}{3}\notin(3;7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{11}{2}<m<5\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{-2m+1}{3}\le 3\\ \dfrac{-2m+1}{3}\ge 7\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{11}{2}<m<5\\ \left[\begin{array}{l}m\ge -4\\ m\le -10\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -4\le m<5$$

Mà $m\in(-10;10)$, m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 9 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 232. Số các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx-2025}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 86

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y=\dfrac{-mx-2025}{x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m^2+2025}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ khi và chỉ khi $y'=\dfrac{-m^2+2025}{(x+m)^2}>0,\forall x\in(-2;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+2025>0\\ \left[\begin{array}{l}-m\le -2\\ -m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-45;45)\\ m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-45;-2]\cup[2;45)$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-45;-2]\cup[2;45)$ suy ra $m=\{-44;-43;...;-2;2;3;...;44\}$

Vậy có tất cả 86 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 233. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2m+3}{x+m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $y=\dfrac{mx+2m+3}{x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2-(2m+3)}{(x+m)^2}=\dfrac{m^2-2m-3}{(x+m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3<0\\-m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<3\\m\ge -2\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0,1,2\}$

Suy ra: $S=\{0,1,2\}$

Câu 234. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\m>-1\end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 235. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow y'=\dfrac{m^2-m-12}{(x+m)^2}<0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12<0\\x+m\ne 0\end{cases},\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\m\ne -x\end{cases},\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\m\notin(-\infty;-1)\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m<4$.

$\begin{cases} -1 \le m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = \{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 236. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ m \notin (2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 2$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 237. Cho hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ thì hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{(m+1)m - (2m+2)}{(x+m)^2} = \dfrac{m^2 - m - 2}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin (-1;+\infty) \\ m^2 - m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \le -1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{3;4;...;8;9\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 238. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Đặt $t=\sqrt{1-x}$ với $x\in(-3;0)\Rightarrow t\in(1;2)$.

Hàm số đã cho trở thành $f(t)=\dfrac{t+1}{t+m}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{m-1}{(t+m)^2}$.

Ta có $t'=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}<0,\ \forall x\in(-3;0)$ nên $t=\sqrt{1-x}$ nghịch biến trên $(-3;0)$.

Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên

$$(1;2)\Leftrightarrow f'(t)<0,\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\ t+m\neq 0\end{cases},\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\ -m\neq t\end{cases},\ \forall t\in(1;2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\ -m\notin(1;2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-1<0\\ \left[\begin{array}{l}-m\geq 2\\ -m\leq 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq m<1\\ m\leq -2\end{array}\right.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;0\}$.

Như vậy có 11 giá trị m cần tìm

Câu 239. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Đặt $t=\cos x(0<t<1)\Rightarrow y=\dfrac{t+1}{10t+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t'$

Hàm số $y=\dfrac{\cos x+1}{10\cos x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'=\dfrac{m-10}{(10t+m)^2}.t'>0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Vì trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $t=\cos x$ nghịch biến nên $t'<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Từ đó suy ra: $\begin{cases}m-10<0\\ -\dfrac{m}{10}\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<10\\ \left[\begin{array}{l}m\leq -10\\ m\geq 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -10\\ 0\leq m<10\end{array}\right.$.

Theo đề bài m nguyên dương nên $m\in\{1,2,...,9\}$.

Câu 240. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{m\sin x+4}{\sin x+m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Đk: $\sin x \neq -m$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x>0, 0<\sin x<1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x)<0, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2-4)\cos x}{(\sin x+m)^2}<0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m\le 0 \\ -m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m\le -1 \\ 0\le m<2 \end{array}\right.$$

Mà m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 241. Cho hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Ta có hàm số $t=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$\Leftrightarrow f'(t)>0$, $\forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \dfrac{-2m+1}{(t-m)^2}>0$, $\forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1>0 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[-2025;2025]$ nên $m\in\{-2025;-2024;...;-1;0\}$.

Như vậy có 2026 giá trị m cần tìm

Câu 242. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\geq 0,\forall x\in D\Leftrightarrow\begin{cases}1\geq 0\,(hn)\\ m-1\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 1$

Mà $m\in\mathbb{N}^*$ nên có 1 giá trj cần tìm

Câu 243. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1;20]$ để ứng với mỗi, hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Điều kiện: $x\neq\dfrac{m}{3}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{-3x^2+2mx+3}{(3x-m)^2}\geq 0;\ \forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+2mx+3\geq 0;\ \forall x\in(2;3) & (1)\\ \dfrac{m}{3}\notin(2;3) & (2)\end{cases}$.

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}\geq 3\\ \dfrac{m}{3}\leq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\ m\leq 6\end{array}\right.$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2m\geq 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)$.

Mà $g'(x)=3+\dfrac{3}{x^2}>0,\ \forall x\in(2;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó $2m\geq 3x-\dfrac{3}{x}=g(x),\ \forall x\in(2;3)\Leftrightarrow 2m\geq g(3)\Leftrightarrow 2m\geq 8\Leftrightarrow m\geq 4$.

Kết hợp hai điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}m\geq 9\\ 4\leq m\leq 6\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{4;5;6;9;10;...;20\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 244. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 245. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20

Tập xác định: $D=R\setminus\{1\}$.

$y'=\dfrac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}=\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x)\ge 0\Leftrightarrow m\le 2x^2-4x+3$.

Đặt $g(x)=2x^2-4x+3\Rightarrow g'(x)=4x-4$

Hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-\infty;-1]}g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x)$, $\forall x\in(-\infty;-1]$ ta suy ra $m\le 9$.

Vì $m\in\mathbb{Z},m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;...;8;9\}$.

Như vậy có 20 giá trị m cần tìm

Câu 246. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Tập xác định: $D = R \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \frac{f(x)}{(x-1)^2}$$

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 4x + 3$. Đặt $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$ đồng biến trên $(1;2) \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[1;2]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x),\ \forall x \in (-\infty;-1]$ ta suy ra $m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10]$ nên $m \in \{-10;-9;...;0;1\}$.

Như vậy có 12 giá trị m cần tìm

Câu 247. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1 + m}{5x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2010

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x+m)^2} \leq 0 \forall x \in (-3;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2mx - 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (-3;1) \\ -\frac{m}{5} \notin (-3;1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9m + 46 \leq 0 \\ -m + 6 \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -5 \\ m \geq 15 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{46}{9} \\ m \geq 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -5 \\ m \geq 15 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 15$$

Do nguyên dương không lớn hơn 2024 nên $15 \leq m \leq 2024$.

Vậy có tất cả 2010 giá trị.

Câu 248. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2019

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$ và có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{2x^2-4mx+3m+1}{(x-m)^2}\le 0\forall x\in(1;5)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4mx+3m+1\le 0\forall x\in(1;5)\\ m\notin(1;5)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m+3\le 0\\ -17m+51\le 0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 3\\ m\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}m\le 1\\ m\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 5$$

Do nguyên dương bé hơn 2024 nên $5\le m\le 2023$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị.

Câu 249. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'\le 0,\forall x\in(1;3)\\ y'\ge 0,\forall x\in(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-2-m\le 0,\forall x\in(1;3)\\ x^2-2x-2-m\ge 0,\forall x\in(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge x^2-2x-2,\forall x\in(1;3)\\ m\le x^2-2x-2,\forall x\in(4;6)\end{cases}$$

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-2$, $g'(x)=2x-2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		3	4		6	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0			$+$			
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	3	6	↗	18	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*)\Leftrightarrow 3\le m\le 6$

Vì m là số nguyên nên chọn $m\in\{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 250. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên $(1)\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 251. Để cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ thì giá trị của tham số m có giá trị $m\le -\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 19

Hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall\in[1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow\dfrac{mx^2+4mx+14}{(x+2)^2}\le 0,\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow mx^2+4mx+14\le 0,\forall\in[1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le\dfrac{-14}{x^2+4x}=g(x),\forall\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{x\ge 1}g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{5}$.

$\Rightarrow a+b=19$

Câu 252. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-m-1}{5x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{m}{5}\right\}$ và có đạo hàm $y'=\frac{5x^2-2mx+5}{(5x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ thì $y'\le 0,\forall x\in(1;4)$.

tức là $\begin{cases}5x^2-2mx+5\le 0,\forall x\in(1;4)\\ x\ne\frac{m}{5},\forall x\in(1;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\frac{5x^2+5}{2x},\forall x\in(1;4)\\ \left[\begin{array}{l}\frac{m}{5}\le 1\\ \frac{m}{5}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}$ $\left(Do\ 2x>0,\forall x\in(1;4)\right)$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{5x^2+5}{2x},\forall x\in[1;4]$ và có đạo hàm $g'(x)=\frac{5x^2-5}{2x^2}>0,\forall x\in[1;4]$.

Hàm số đồng biến trên $(1;4)$ suy ra $\max\limits_{x\in[1;4]}g(x)=g(4)=\frac{85}{8}$.

Khi đó ta có $\begin{cases}m\ge\frac{5x^2+5}{2x},\forall x\in(1;4)\\ \left[\begin{array}{l}\frac{m}{5}\le 1\\ \frac{m}{5}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\frac{85}{8}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 5\\ m\ge 20\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 20$.

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2;25]$ nên $m\in\{20;21;22;23;24;25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2;25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 253. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2027;2027]$ để hàm số $y=\cos 2x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-2\sin 2x+m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2\sin 2x+m\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\ge 2\sin 2x\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\ge 2$.

$m\in[-2027;2027], m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{2;3;...;2026;2027\}$

Câu 254. Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2+12m^2-4>0 \Leftrightarrow |m|>\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Khi đó, ta có $x_1+x_2=m, x_1x_2=1-3m^2$.

$$x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Rightarrow 1-3m^2+2m=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (l) \\ m=\frac{2}{3}\ (t/m) \end{array}\right. \Rightarrow a+2b=8.$$

Câu 255. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2;4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $y'=3x^2+6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2m \end{array}\right.$.

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó $A\left(0;4m^2-2\right)$, $B\left(-2m;4m^3+4m^2-2\right) \Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-0}{-2m-0}=\frac{y-\left(4m^2-2\right)}{4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$.

$$d(C,AB)=\frac{\left|4m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}.AB.d(C,AB)=6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{6}{\sqrt{4m^4+1}}=6 \Leftrightarrow |m|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là 2.

Câu 256. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3\left(m-2\right)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Câu 257. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để : $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Cách 1 :

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với moi m

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 . x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3(m^2 - 1) = 7 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Suy ra $-2 + 2 = 0$

Cách 2 :

y'=0 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m-1)^2 - (m-1)(m+1) = 7 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 258. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ} < x_{CT}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$y' = mx^2 + 4x + m$

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$

mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{1\}$

Câu 259. Với các giá trị thực của tham số $m \in \left(\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2}$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,5

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (2m-1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx + (2m-1) = 0 \quad (1)$.

* Để đồ thị hàm số có hai cực trị dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = -\frac{b}{a} = 2m > 0 \\ P = \frac{c}{a} = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 > 0 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

* Vậy $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$ là những giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow P = \frac{a+b+c}{a^2.b^2.c^2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Câu 260. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu .

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

$y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow y' = x^2 - 4x + (m+2) = 0$

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Chia y cho y' ta được : $y=\frac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A(x_1;(m-2)(2x_1+1))$ và $B(x_2;(m-2)(2x_2+1))$

Có : $y_1.y_2=(m-2)^2(4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1)$

Với : $\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1x_2=m+2\end{cases}$ nên : $y_1.y_2=(m-2)^2(4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2>0\Leftrightarrow(m-2)^2(4m+17)>0\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{-17}{4}\\m\neq 2\end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được : $-\frac{17}{4}<m<2$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$

Câu 261. Tính tổng các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

$y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$

Lấy y chia y' ta được phương trình qua 2 điểm cực trị là: $y=2m^2x-2m^2-2$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(x_1;2m^2x_1-2m^2-2)$; $B(x_2;2m^2x_2-2m^2-2)$

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+(2m^2x_1-2m^2-2)(2m^2x_2-2m^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2(m^2+1)(x_1+x_2)+4(m^2+1)^2=0$

$\Leftrightarrow(1-m^2)(1+4m^4)+4(m^2+1)(1+m^2-2m^2)=0$

$\Leftrightarrow(1-m^2)(4m^4+4m^2+5)=0\Leftrightarrow m=\pm 1.$

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm

Câu 262. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có : $y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)=-3(x^2-2x-m^2+1)$.

$g(x)=x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta'=m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'>0 \Leftrightarrow$ $m\neq 0$ (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1\pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right) \Rightarrow OA^2=(1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right) \Rightarrow OB^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$OA=OB$

$\Leftrightarrow$ $OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow$ $(1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2=(1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow$ $-4m+16m^3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 263. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3); B(2m;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y=x$ và

$I\in(d) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 264. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B và thoả mãn $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (trong đó O là gốc tọa độ) .

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m-3); B(2; -m-3)$.

Ta có : $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 265. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx}{1 - x}$. Giá trị tham số m bằng bao nhiêu để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2} = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \ (co\ nghiêm) \\ g(1) \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \neq 0 \\ \Delta'_g = 1 + m > 0 \Leftrightarrow \boxed{m > -1} \\ 1 + m \neq 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2;\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -m \quad (3)$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$y_1 = \dfrac{2x_1 + m}{-1} = -2x_1 - m;\ y_2 = -2x_2 - m$ (thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

[thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y = \dfrac{(x^2 + mx)'}{(1-x)'} = \dfrac{2x + m}{-1} = -2x - m$]

Theo đề bài, ta có: $MN=10\Leftrightarrow MN^2=100\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=100\ (4)$

Thay (3) vào (4), ta được: $(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2=100\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=20$

$\Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=20\Leftrightarrow 4+4m=20\Rightarrow m=4$

So lại với $(2)\Rightarrow m=4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 266. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$. Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị, tính tổng các giá trị của tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

* Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $\forall x\neq -1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m+1\\x=-2\Rightarrow y=m-3\end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0;m+1);B(-2;m-3)$.

* Ta có: $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O;y_A-y_O)=(0;m+1)\Rightarrow OA=\sqrt{(0)^2+(m+1)^2}=|m+1|\\\overrightarrow{OB}=(x_B-x_O;y_B-y_O)=(-2;m-3)\Rightarrow OB=\sqrt{(-2)^2+(m-3)^2}=\sqrt{m^2-6m+13}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2-\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2\left(m^2-6m+13\right)-\left[(m-1)(m-3)\right]^2}=|m+1|$.

* Mà $S_{\Delta ABC}=2\Leftrightarrow |m+1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$.

Câu 267. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ bằng nhau.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,5$

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$\Leftrightarrow g(x)=x^2+2x+2m-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\neq 0\\\Delta'=3-2m>0\\g(-1)=2m-3\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}\ (1)$

* Gọi x_1, x_2 là nghiệm của $g(x)=0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị là: $y=\dfrac{\left(x^2+2mx+2\right)'}{(x+1)'}=\dfrac{2x+2m}{1}=2x+2m$.

$\Rightarrow$ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A\left(x_1;2x_1+2m\right);B\left(x_2;2x_2+2m\right)$.

* Theo định lí Viét: $x_1+x_2=-2,\ x_1x_2=-2m$.

* Theo đề: $d\left(A,\Delta\right)=d\left(B,\Delta\right)\Leftrightarrow\dfrac{\left|x_1+y_1+2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|x_2+y_2+2\right|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left|3x_1+2m+2\right|=\left|3x_2+2m+2\right|$

$\Leftrightarrow\left(3x_1+2m+2\right)^2=\left(3x_2+2m+2\right)^2\Leftrightarrow\left(3x_1+2m+2\right)^2-\left(3x_2+2m+2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left[3\left(x_1+x_2\right)+4m+4\right]=0\Leftrightarrow3\left(x_1+x_2\right)+4m+4=0,\left(do\ x_1\neq x_2\right)$

$\Leftrightarrow3(-2)+4m+4=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với $(1)\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 268. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+3mx+2m+1}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-50;50)$ để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 48

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=\dfrac{mx^2-2mx-5m-1}{(x-1)^2}=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq1$.

$\Leftrightarrow g(x)=mx^2-2mx-5m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=m\neq0\\\Delta'=m^2+m(5m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{6}\\m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{6}\\m>0\end{array}\right.\quad(*)$$

* Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị: $y=\dfrac{\left(mx^2+3mx+2m+1\right)'}{(x-1)'}=2mx+3m$.

* Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox\Leftrightarrow y\left(x_1\right).y\left(x_2\right)<0$

$\Leftrightarrow\left(2mx_1+3m\right)\left(2mx_2+3m\right)<0\Leftrightarrow4m^2\left[x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1\right]<0$.

$$\Leftrightarrow4m(-2m-1)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{2}\\m>0\end{array}\right.$$

* Kết hợp với $(*) \Rightarrow m \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (0;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Mà $m \in (-50;50), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 48 giá trị cần tìm

Câu 269. Cho hàm số $y=\frac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\frac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-(2m-5)=0 \ \ (co\ nghiem) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'=-2m+6>0 \Leftrightarrow m<3 \ (2) \end{cases} \\ -2m+6\neq 0 \end{cases}.$$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2;\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=2m-5$ (3)

* Giả sử $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có: $y_1=-2x_1+2m;\ y_2=-2x_2+2m$.

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

* Để hai điểm cực trị $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$ thì:

$(2x_1-y_1)(2x_2-y_2)<0 \Leftrightarrow (4x_1-2m)(4x_2-2m)<0 \Leftrightarrow 16x_1x_2-8m(x_1+x_2)+4m^2<0$ (4).

* Thay (3) vào (4), ta được: $16(2m-5)-8m.2+4m^2<0 \Leftrightarrow m^2+4m-20<0$

$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$

* So với (2), ta được: $-2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-6;-5;...;1;2\}$ hay có 9 giá trị cần tìm

Câu 270. Tìm giá trị của m để hàm số $y=\frac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,4

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

* Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1; x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ g(1) = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2 \quad (2).$$

* Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số thì $x_1; x_2$ là nghiệm của $g(x) = 0$.

* Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array}\right.$.

* Ta có: $y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)$.

$$= (1-m)^2 - 4\left(-m^2 + 3m - 2\right) = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow (y_1.y_2)_{\min} = -\frac{4}{5} \text{ khi } m = \frac{7}{5}$$

* So lại với điều kiện $(2) \Rightarrow m = \dfrac{7}{5} = 1,4$ là giá trị cần tìm.

BÀI 2
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D, nếu: $f(x)\le M, \forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

  Kí hiệu $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, nếu: $f(x)\ge m, \forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.

  Kí hiệu kí hiệu $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$

Chú ý:

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể một số hữa hạn điểm mà tại điểm đó hàm số không có đạo hàm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữa hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.

- **Bước 3:** Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

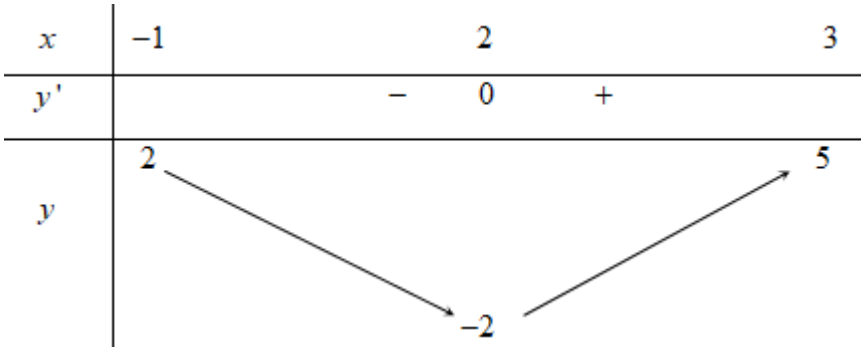
Khi đó, ta có: $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1
TÌM GTLN VÀ GTNN KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

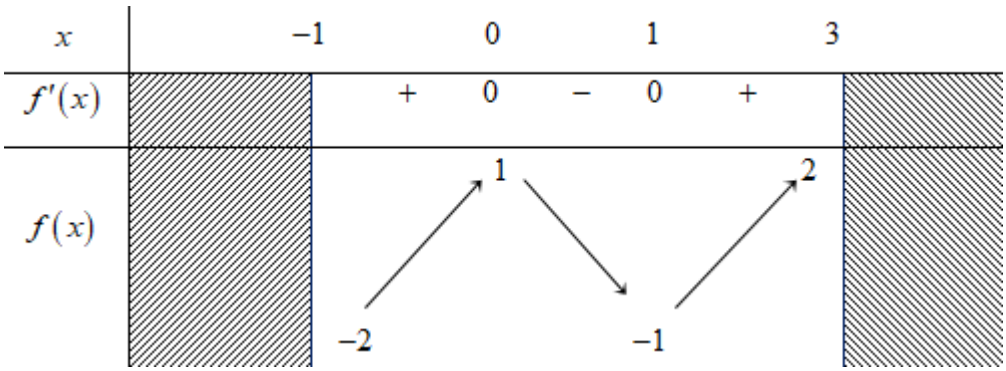
Bài 1. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-1;3)$.

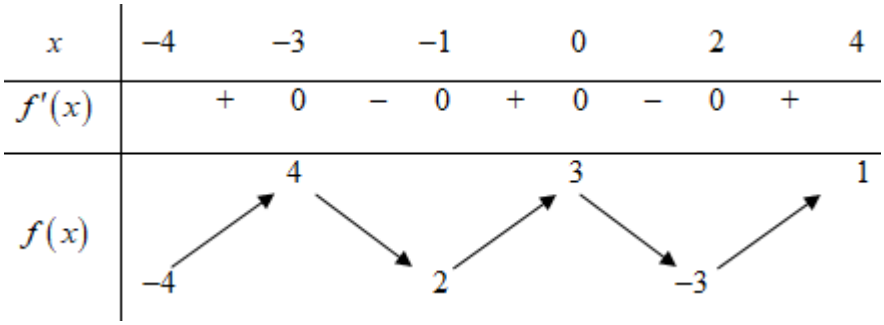
Bài 2. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[-1;3)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên nửa khoảng $[-1;3)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

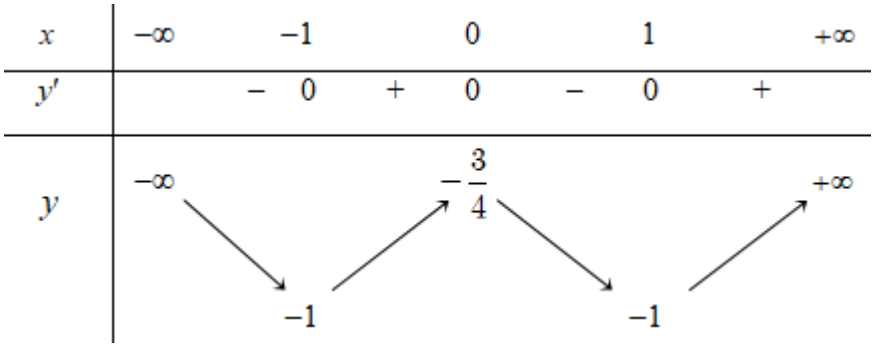
Bài 3. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;4]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;2)$.

Bài 4. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



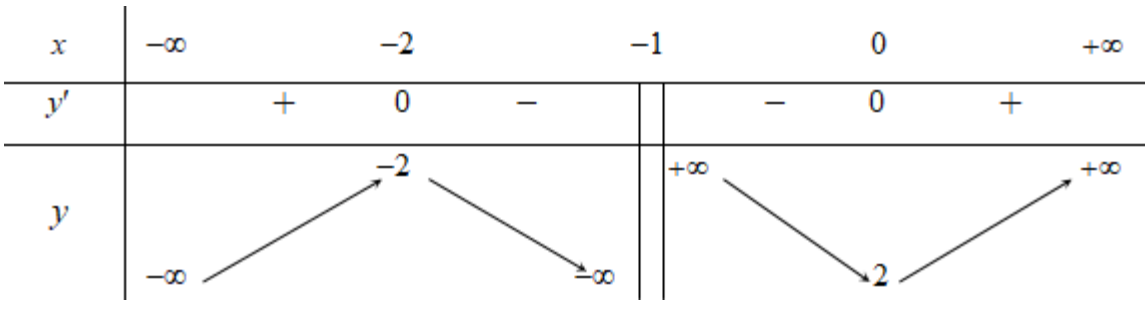
a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[0;1]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;1)$.

d) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Bài 5. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

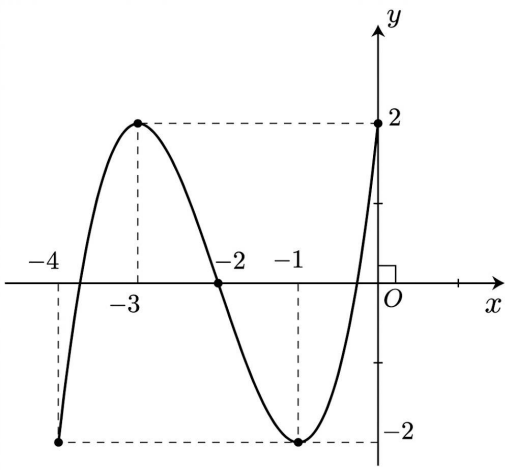


a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

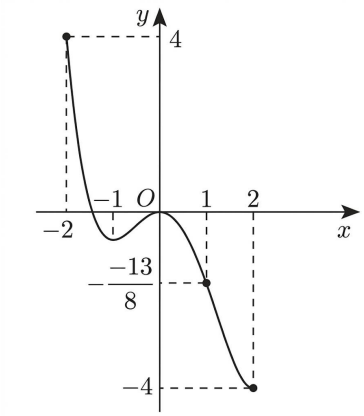
Bài 6. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;0]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-2;0)$.

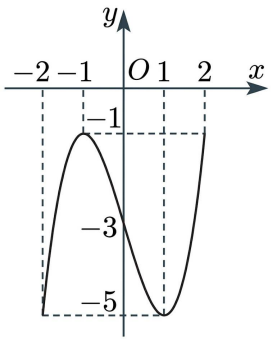
Bài 7. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(-1;2]$.

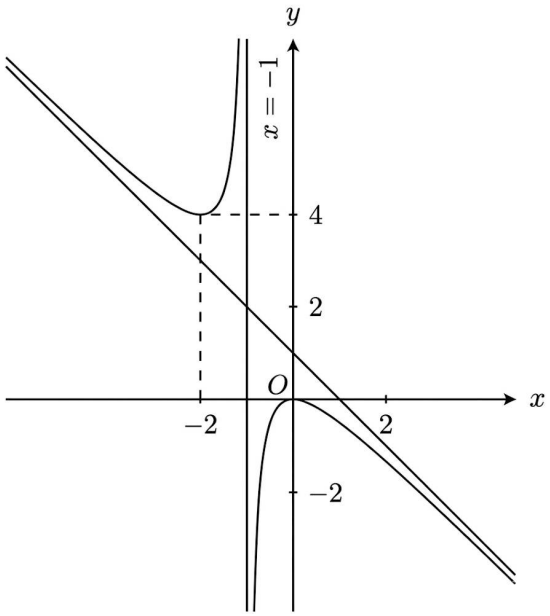
Bài 8. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[-1;1)$.

Bài 9. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.

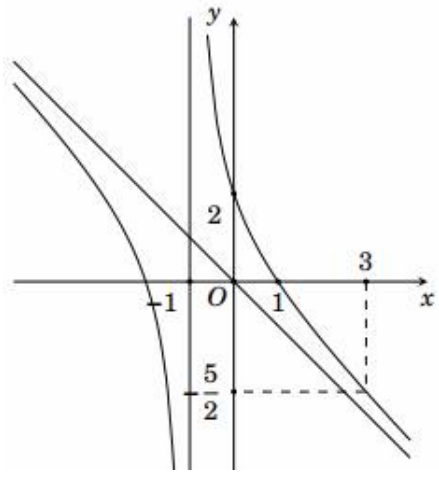


a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Bài 10. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a;b]$

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Phương pháp :

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.
- **Bước 3:** Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó, ta có: $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\end{cases}$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\end{cases}$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a;b]$.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $y=3x^3-x^2-7x+1$ trên đoạn $[0;2]$.

d) $y=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y=x+\dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

c) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

d) $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sqrt{4-x^2}$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.

b) $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

c) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.

d) $y = \sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$

NỬA KHOẢNG $(a;b]$; $[a;b)$.

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ (hoặc nửa khoảng $[a;b);(a;b]$). Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc nửa khoảng $[a;b);(a;b]$).

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min.

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$
- **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=4x^3-3x^4$

b) $y=2x^5+5x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{3}$

c) $y=\frac{x}{x^2+1}$

d) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x+\frac{4}{x}$ với $x>0$.

b) $y=x-\frac{1}{x}$ với $x\in(0;2]$

c) $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) $y=x+\frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x\sqrt{3-x}$

b) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

DẠNG 4
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

b) $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $\left[0;63\right]$.

b) $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$.

DẠNG 5
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Chú ý: $-1 \le \sin x \le 1;\ -1 \le \cos x \le 1;\ 0 \le \sin^2 x \le 1;\ 0 \le \cos^2 x \le 1$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

d) $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

b) $y = \cos^2 2x - \sin x\cos x + 4$

c) $y = \cos^4 x + \sin^2 x - 2$

d) $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

c) $y = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

d) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

e) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

f) $y = \sin x + \dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sin x + \sin^2 x + \dfrac{1}{2}$.

b) $y = 3 + 4\cos x - \sin^2 x$.

c) $y = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x - 2$.

d) $y = \sin^2 x.\cos x$.

e) $y = 2\sin^2 + \sin x - 1$.

f) $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\cos 2x-2\sin x-1$.

b) $y=\sin^3 x-3\sin^2 x+2$.

c) $y=\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+1$.

d) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$.

e) $y=\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+5$.

f) $y=\sin^3-\cos 2x+\sin x+2$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$.

b) $y=2\cos^3 x+\frac{5}{2}\sin^2 x+\cos x+2$.

c) $y=-2\sin^3+3\cos 2x-6\sin x$.

d) $y=\cos^3 x+3\cos 2x-15\cos x+2$.

e) $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

f) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+2}$.

b) $y=\frac{1}{\cos^2 x+\cos x+1}$.

c) $y=\frac{8\sin x-8}{2-\sin x-\cos^2 x}$.

d) $y=\frac{3+\cos x}{\cos x+\sin^2 x}$.

e) $y=\frac{4-\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x+2}$.

f) $y=\frac{4+3\sin x-2\cos^2 x}{3+2\sin x}$.

g) $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$.

h) $y=\sqrt{\sin^2 x+\cos x+2}$.

DẠNG 6
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(e^u\right)' = u'.e^u$ $\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{u'}{u}$ $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1;e]$

b) $y = x^2 e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

c) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$

d) $y = \left(x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x - 2\ln\left(x^2 + 3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y = \ln\left(2x^2 - 5x + 3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = e^{2x^2 - 2x + 1}$

b) $y = e^{x - \sqrt{4 - x^2}}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y = \left(x^2 - x - 1\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$.

c) $y = x^2 \ln x + 2$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{e^3};e^2\right]$.

d) $y = x.\ln x$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

e) $y = \dfrac{x}{2} - \ln\left(x^2 - x + 2\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

f) $y = x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = e^{-2x}\left(-x^2 + x + \dfrac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

b) $y = e^{3x}\left(x^2 + x - 3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

c) $y = e^{2x} - 4e^x + 3$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

d) $y = x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

e) $y = e^{-2x}\left(-x^2 + x + \dfrac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

f) $y = e^{3x}\left(x^2 + x - 3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \ln\left(x^2 + x + 2\right)$ trên đoạn $[3;6]$.

b) $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

c) $y = \left(x^2 + 4x + 1\right).e^{x-2}$ trên đoạn $[-2;3]$.

d) $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2;2]$.

DẠNG 7
TÌM (GTLN) VÀ (GTNN) CỦA HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

c) Hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2024$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn$[0;4]$ bằng -1.

b) Hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn$[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (tham số m).

a) Tìm tham số m để hàm số liên tục trên $[0;2]$.

b) Tìm tham số m để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN

DẠNG 1
BÀI TOÁN ĐÃ CHO HÀM

Phương pháp chung: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết, dựa vào yêu cầu bài toán, ta đưa ra kết luận.

- **Bài toán chuyển động**

  Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc

  Khi đó $v(t)=s'(t)$; $a(t)=v'(t)=s''(t)$

- **Chú ý:**
  - Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương:

    Với $a\ge 0, b\ge 0$, ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}$.

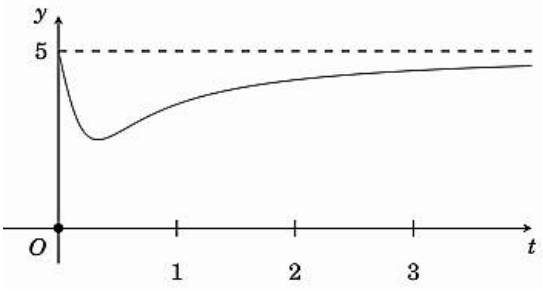
    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
  - Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương:

    Với $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$, ta có:: $\dfrac{a+b+c}{3}\ge \sqrt[3]{abc}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 2. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\ge 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên dưới.



Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Bài 3. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\le I\le 22$. Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t giây, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3\,(0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

DẠNG 2
TRUY TÌM HÀM SỐ CỦA BÀI TOÁN

Phương pháp chung:

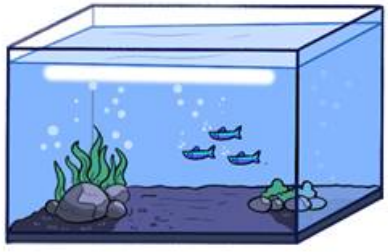
- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết và có thể phối hợp nhiều phương pháp khác.

Bài 1. Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản suất được x kg thịt, $(1 \le x \le 20)$. Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?

Bài 2. Một cửa hàng bán Xoài Đồng Tháp với giá bán mỗi kg là 50000 đồng, với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số Xoài bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30000 đồng.



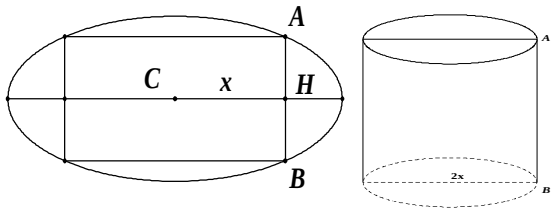
Bài 3. Thầy Hùng dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



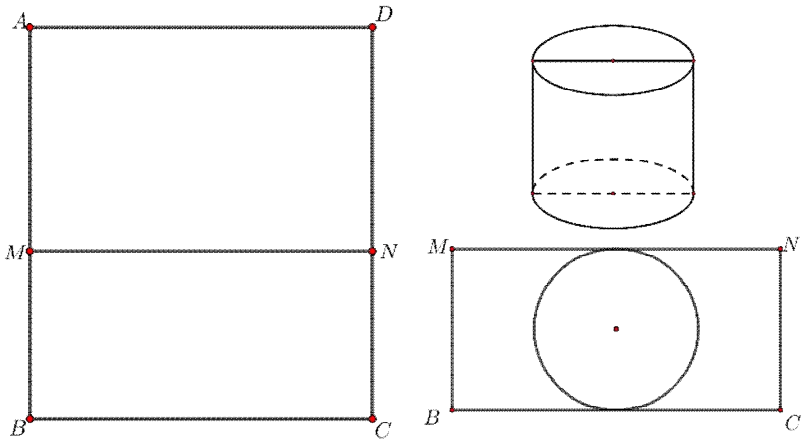
Bài 4. Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2026. Thầy Nam đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp

mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x bằng bao nhiêu?

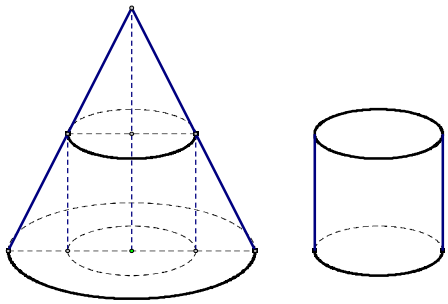
Bài 5. Từ một tấm tôn có hình dạng elip với độ dài trục lớn bằng 6 độ dài trục bé bằng 4. Người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp, sau đó gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó?



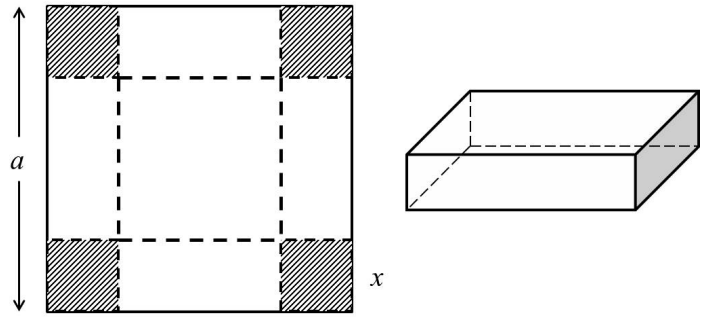
Bài 6. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC = x(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi) Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



Bài 7. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r = 2\text{m}$, chiều cao $h = 6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



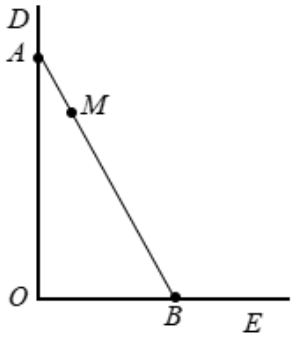
Bài 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

Bài 9. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\,\text{cm}$ x $16\,\text{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng bao nhiêu mét?

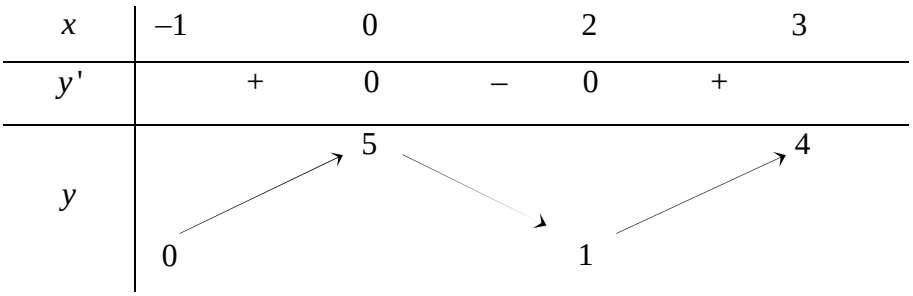
Bài 10. Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

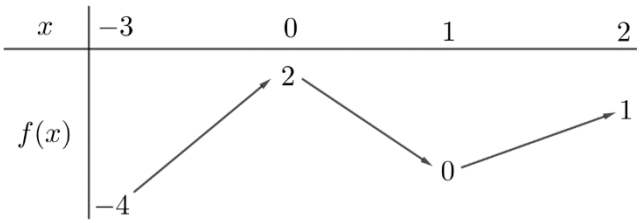
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?



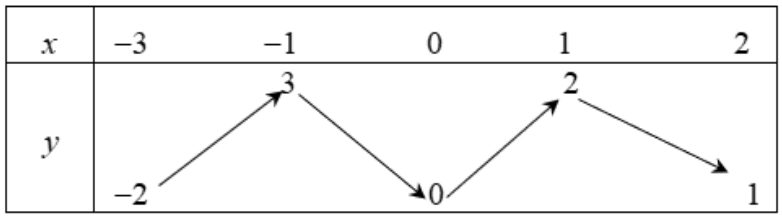
A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.



A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** −8.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

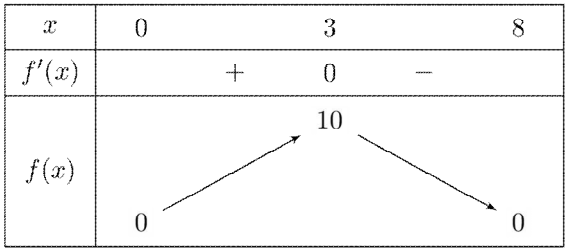


Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M+m$.

A. −1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

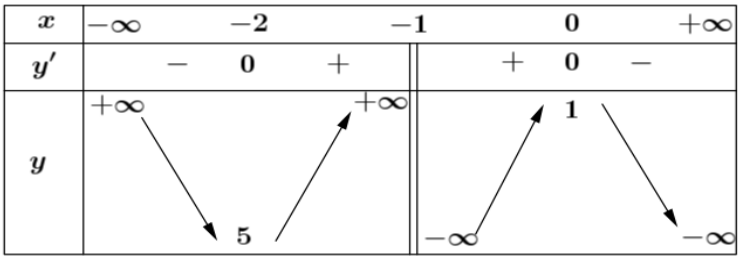
Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.



Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

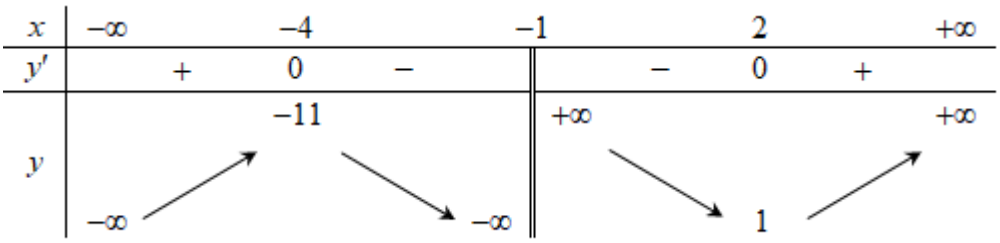
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty;-1)$ bằng

A. -2 **B.** 5 **C.** 0 **D.** 1

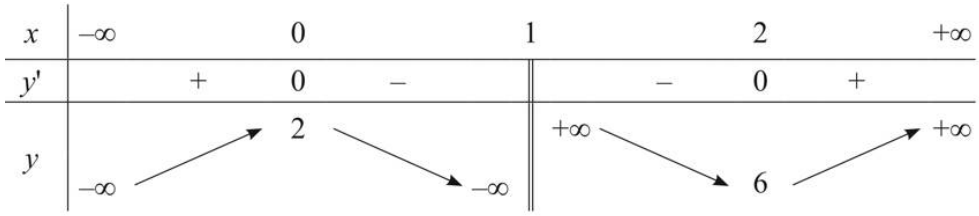
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(-1;+\infty)$ tại

A. $x=-4$ **B.** $x=-11$ **C.** $x=1$ **D.** $x=2$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;1)$ bằng 2 tại $x=0$.

B. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1;+\infty)$ bằng 6 tại $x=2$.

C. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;1)$ bằng 2 tại $x=0$.

D. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(2;+\infty)$ bằng 6 tại $x=2$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ là

A. $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-2)$ **B.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(3)$ **C.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(1)$ **D.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(0)$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		2026		2027		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[2026;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x)=f(2026)$ **B.** $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x)=f(2025)$

C. $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x)=f(2027)$ **D.** Không xác định

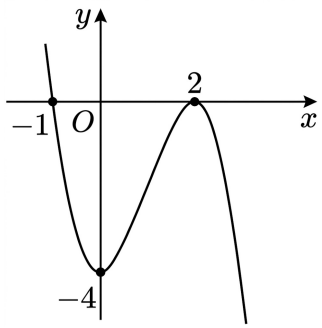
Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x)=f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

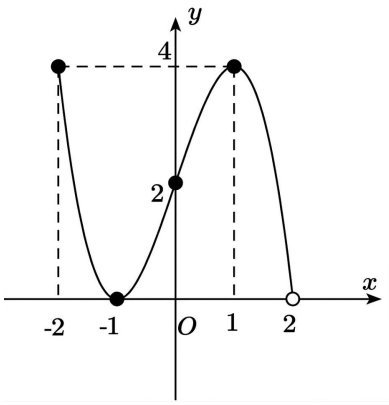


Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-4)$ **B.** $\min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(2)$

C. $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(2)$

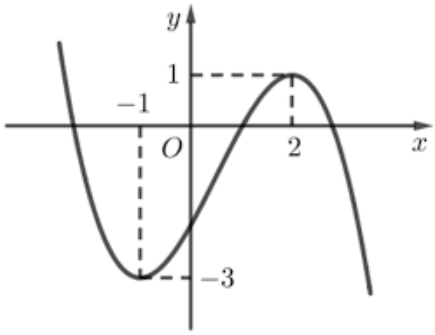
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị $M+m$ là

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 2

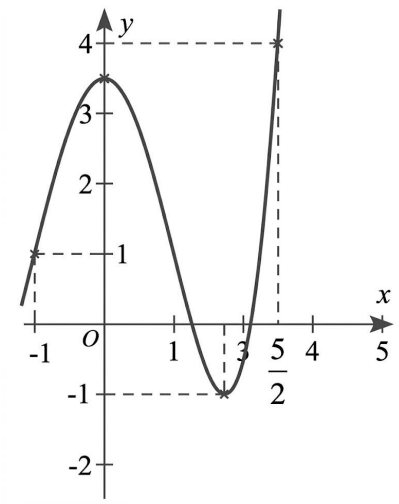
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị $M+m$ là

A. -4 **B.** 4 **C.** 2 **D.** -2

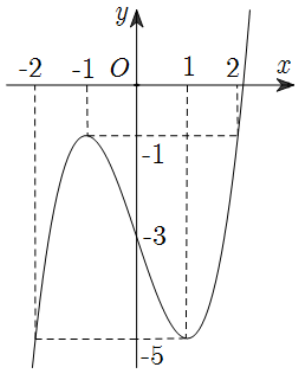
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ là:

A. $M=4,m=1$ **B.** $M=4,m=-1$ **C.** $M=\frac{7}{2},m=-1$ **D.** $M=\frac{7}{2},m=1$

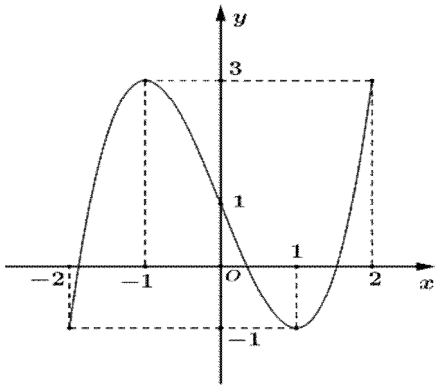
Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

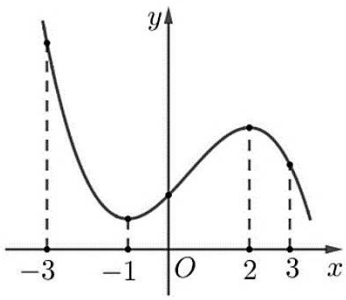
Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

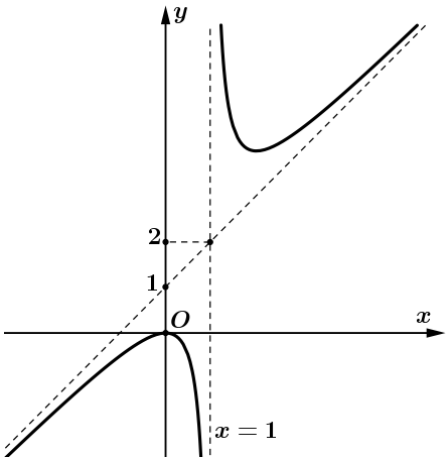
Câu 17. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

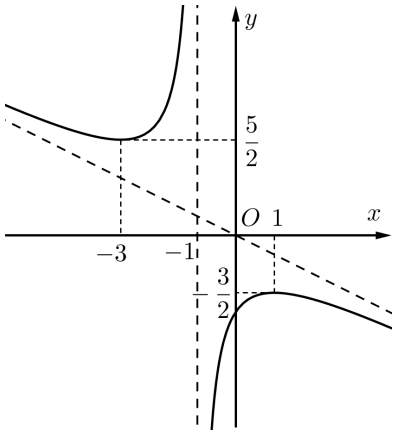
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Không xác định.

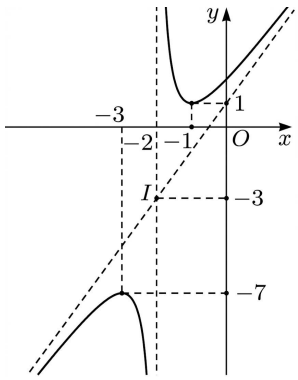
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$ bằng

A. -3 **B.** $-\dfrac{3}{2}$ **C.** -1 **D.** $\dfrac{5}{2}$.

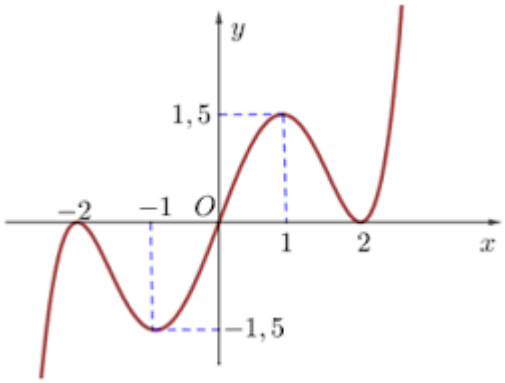
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Trên khoảng $(-\infty;-2)$ hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại:

A. $x=-3$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=-7$ **D.** $x=-2$.

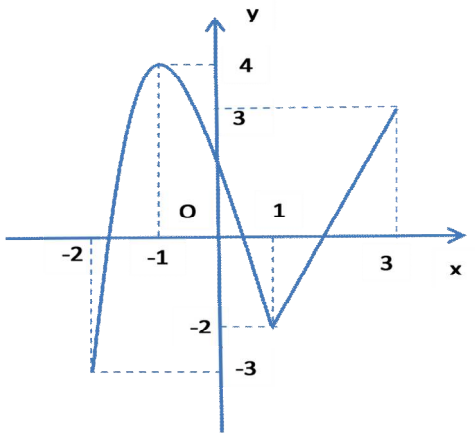
Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+2024$ cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị $M-m$ bằng:

A. $M-m=0$ **B.** $M-m=-2024$ **C.** $M-m=4048$ **D.** $M-m=3$

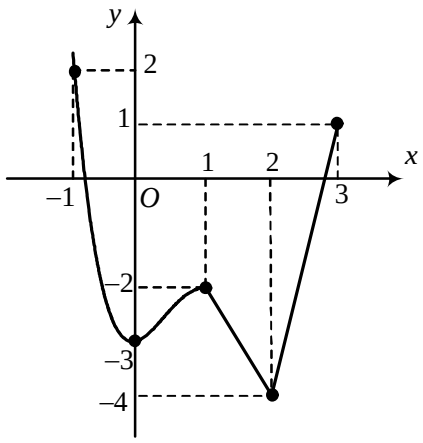
Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [-2;3] có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng:

A. −13. **B.** −18. **C.** −16. **D.** −15.

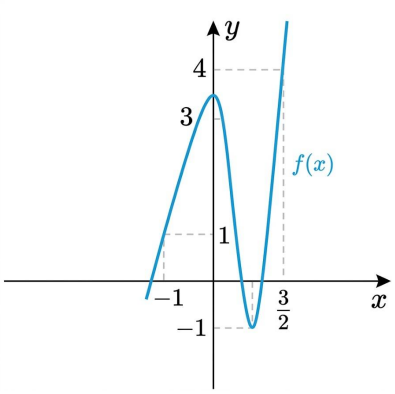
Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là

A. 2. **B.** –6. **C.** –5. **D.** –2.

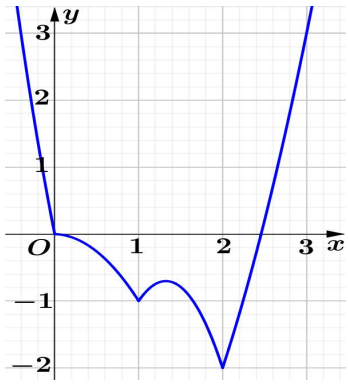
Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng

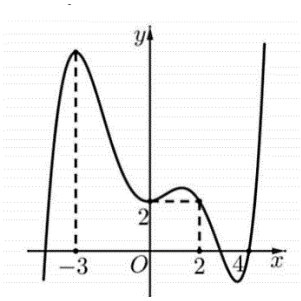
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

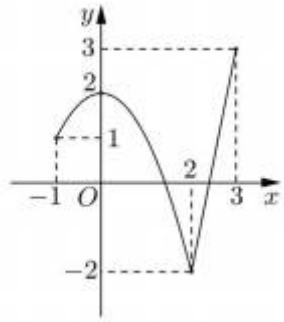
Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$

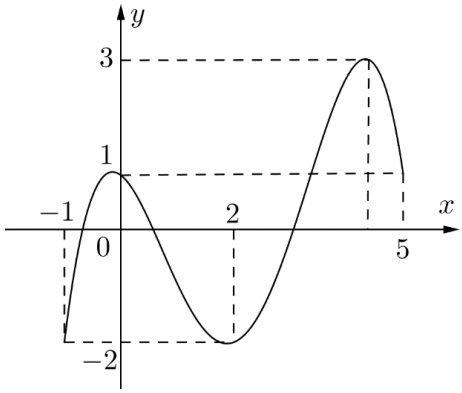
Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

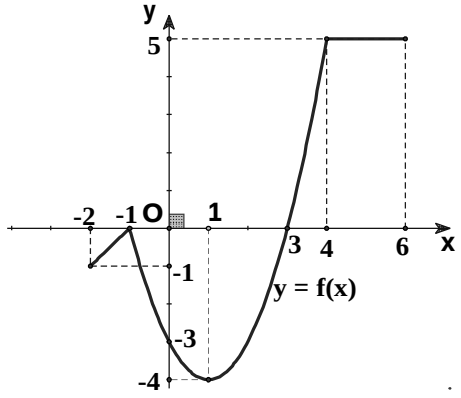
Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới.



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -2.

Câu 31. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=4$.

Câu 32. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y=0$. **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=3$. **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=5$. **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=7$.

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;\,3]} y=-3$. **B.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{[0;\,3]} y=1$.

Câu 35. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là:

A. $\dfrac{17}{3};\ 3$ **B.** $\dfrac{17}{3};\ -5$. **C.** $3;\ -5$. **D.** $-3;\ 5$.

Câu 36. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 37. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;\,4]$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** $\dfrac{19}{3}$. **D.** $\dfrac{23}{3}$.

Câu 39. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M+m$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 40. Hàm số $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2};\ 1$. **B.** $1;\ 0$. **C.** $2;\ \sqrt{2}$. **D.** $2;\ 1$.

Câu 41. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 42. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4.$ **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}.$ **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}.$ **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1.$

Câu 43. Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** 1.

Câu 44. Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\frac{\pi}{2};0$. **B.** $5;1$. **C.** $5;-1$. **D.** $9;1$.

Câu 45. Hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là *M*, giá trị nhỏ nhất là *m*. Khi đó $M-m$ bằng

A. $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** -1.

Câu 46. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;2$. **B.** $-\sqrt{2};\sqrt{2}$. **C.** $0;1$. **D.** $-1;1$.

Câu 47. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;1$. **B.** $0;2$. **C.** $\frac{1}{2};1$. **D.** $0;1$.

Câu 48. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2\right)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

Câu 50. Hàm số $y=(x-1)^2+(x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 51. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1.$ **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3.$ **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5.$ **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y=\frac{-7}{3}.$

Câu 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3.$ **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5.$ **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}.$ **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0.$

Câu 53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất. **B.** có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng –1. **D.** có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 54. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 55. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 56. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** – 1.

Câu 57. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** –1. **D.** Không tồn tại.

Câu 58. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = 2025 - \sin(2025x), \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;0]$ là:

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** Không tồn tại.

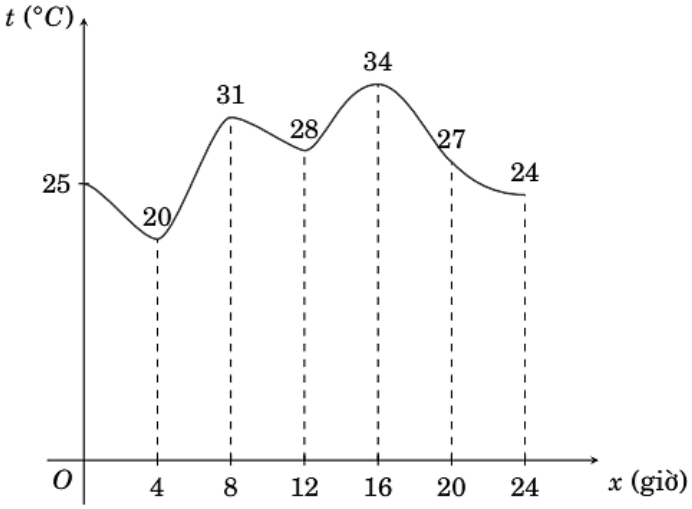
Câu 59. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = \frac{1}{e^{2026x}} - e^{2026x}, \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[2;3]$ là:

A. $f\left(\frac{5}{2}\right)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(3)$. **D.** Không tồn tại.

Câu 60. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = \ln(x+2025), \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;2024]$ là:

A. $f(2024)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** $f(1)$.

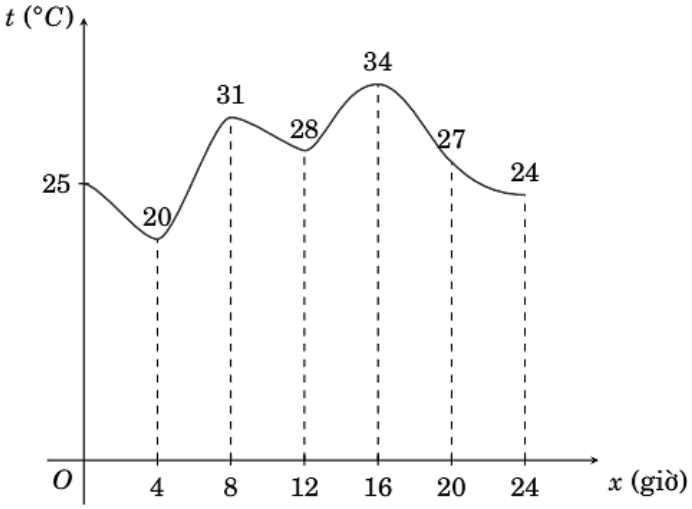
Câu 61. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Nhiệt độ cao nhất trong ngày là bao nhiêu độ C ?

A. $31°C$. **B.** $34°C$. **C.** $27°C$. **D.** $28°C$.

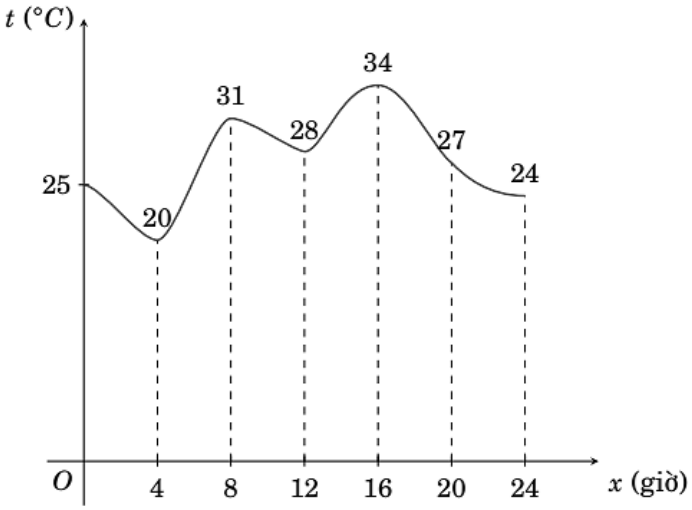
Câu 62. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C ?

A. $20°C$. **B.** $24°C$. **C.** $25°C$. **D.** $34°C$.

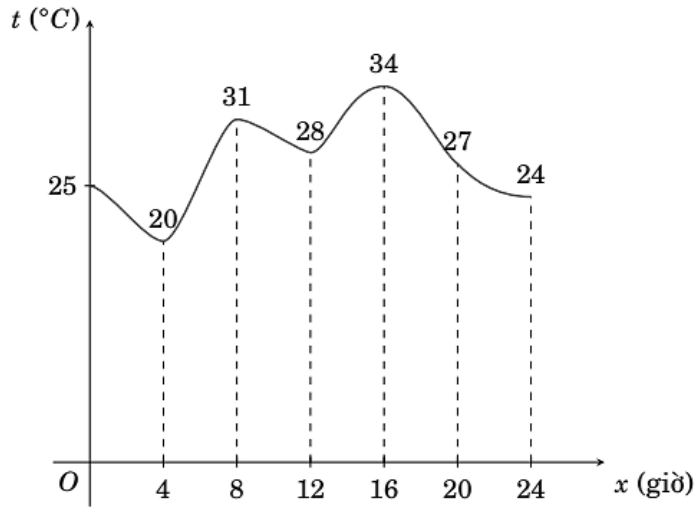
Câu 63. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

A. 8 giờ. **B.** 16 giờ. **C.** 20 giờ. **D.** 24 giờ.

Câu 64. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

A. 4 giờ. **B.** 12 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 24 giờ.

Câu 65. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Câu 66. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t = 2$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = 3$. **D.** $t = 4$.

Câu 67. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) *và* S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 5s$ **B.** $t = 6s$ **C.** $t = 3s$ **D.** $t = 1s$

Câu 68. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(\text{m/s})$. **B.** $25(\text{m/s})$. **C.** $100(\text{m/s})$. **D.** $11(\text{m/s})$.

Câu 69. Hai số có hiệu là 13, hỏi tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng:

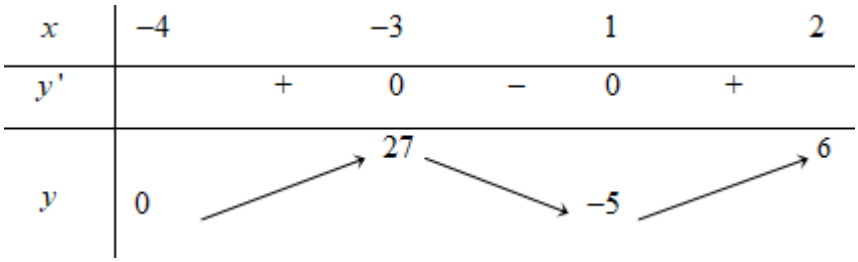
A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\frac{-13}{2}; \frac{13}{2}$. **D.** 6; – 7 .

Câu 70. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2. **B.** 4 cm^2. **C.** 16 cm^2. **D.** 8 cm^2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



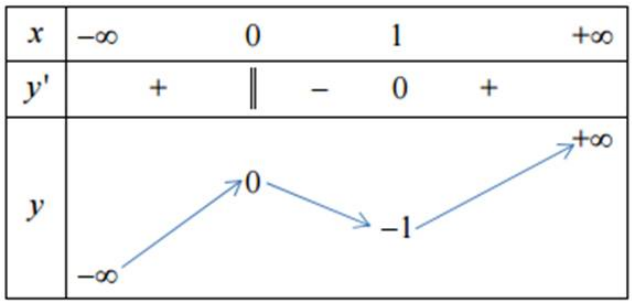
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-3)$ và $(1;2)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và cực đại tại $x=27$

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



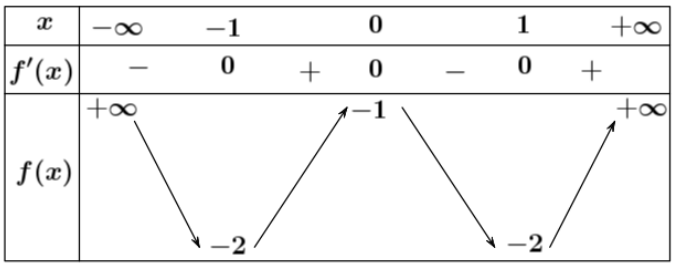
a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;-1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:



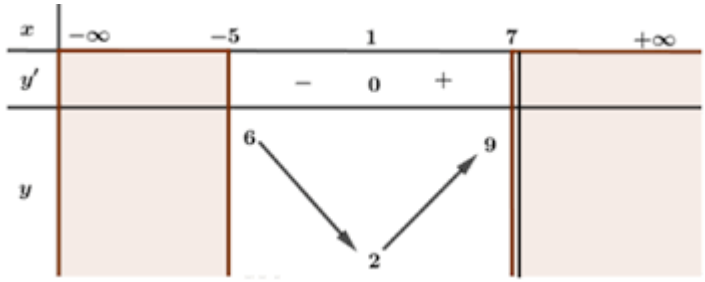
a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[-5;7)$ như hình vẽ bên.



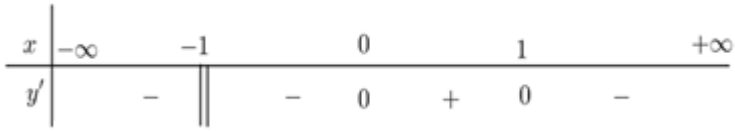
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(2;1)$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 9 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau:



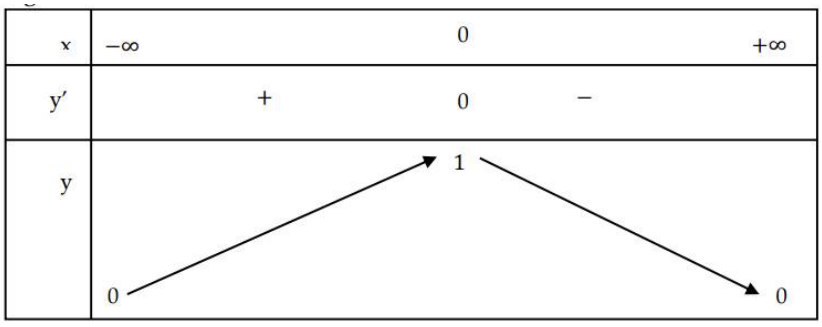
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất là $f(1)$ và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 76. Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Xét trên tập xác định của hàm số.

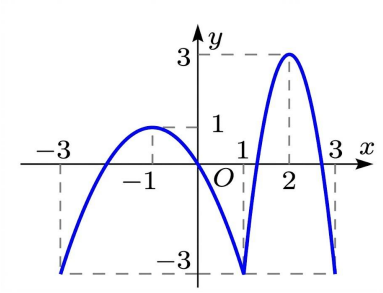
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị.

Câu 77. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



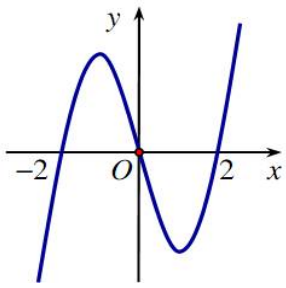
a) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng 3 tại $x=2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng -3 tại $x=-3$ và $x=3$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;3)$.

d) Trên đoạn $[-3;3]$, đồ thị hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



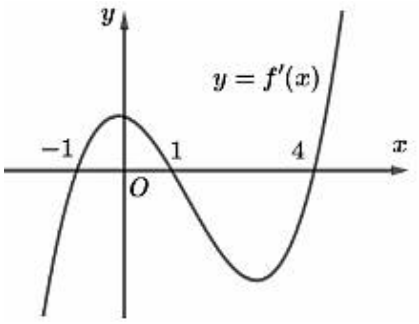
a) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $f(0)$ tại $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f(-2)=f(2)$ tại $x=-2$ và $x=2$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



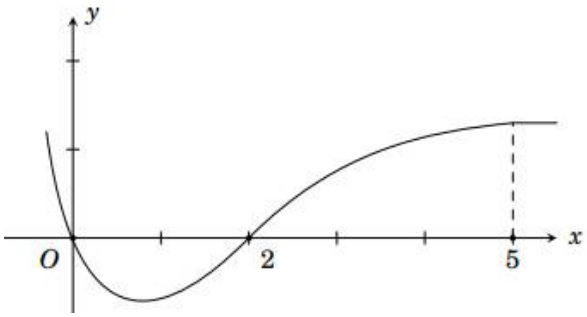
a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số là $f(1)$.

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$



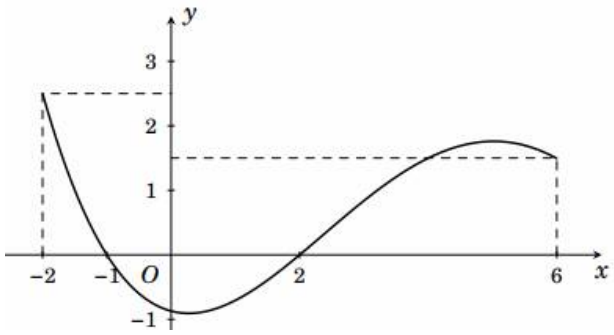
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



a) $f(-1)>f(-2)$

b) $f(6)>f(2)$

c) Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$

Câu 82. Cho hàm số $y=\sqrt{5-4x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y=\sqrt{5-4x}$ là $x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.

b) $y'=\dfrac{-4}{\sqrt{5-4x}}$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Trên đoạn $[-1;1]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $\max\limits_{[-1;1]} y=3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=1.$

Câu 83. Cho hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$ là $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $y'=\dfrac{x^2-9}{x^2}$

c) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{25}{4}$ tại $x=4$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 6 tại $x=2$.

Câu 84. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(-1)=-12$

c) Trên đoạn $\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 tại $x=-1$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -19 tại $x=2$.

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x-4$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=x^2+2x+3$

c) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x=0$.

d) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\dfrac{16}{3}$ tại $x=-4$.

Câu 86. Cho hàm số $y=x+\sqrt{2-x^2}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}},\forall x\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$ tại $x=-\sqrt{2}$.

Câu 87. Cho hàm số $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}$.

a) Hàm số đã cho xác định khi $x\in(-2;4)$.

b) $f'(0)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $2\sqrt{3}$ tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{6}$ tại $x=-2$.

Câu 88. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{-x^2+2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{1}{3}$ tại $x=0$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 89. Cho hàm số $y=\ln(x-1)(3-x)$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 tại $x=2$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 90. Cho hàm số $y=2x-e^{2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(\ln 2)=6$

c) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 0 tại $x=0$.

d) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2\ln 2-4$ tại $x=\ln 2$.

Câu 91. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

b) Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

c) Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Sau thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, gia tốc của bằng $6(m/s^2)$.

Câu 92. Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8 kể từ khi bắt đầu chuyển động, một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 vận tốc của vật giảm.

b) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 8 vận tốc của vật tăng.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $3(m/s)$.

d) Ở giây thứ 4, gia tốc của bằng $1\ (m/s^2)$.

Câu 93. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 4 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)$, với $0\le t\le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Câu 94. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 500 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3+15x-100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 95. Bác Hồng nuôi cá tra ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước Bác Hồng với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x)=-0,0652x^2+16x+1500$ (kg)

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 96. Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108-x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x\ge 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108-x^2\right)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là

432 (gam).

Câu 97. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

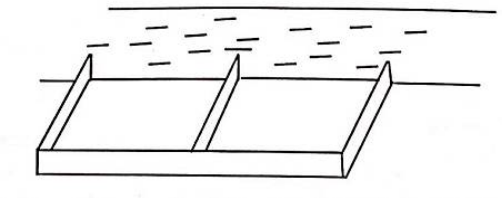
a) $C=0,2x+0,001x^2$ với $0\le x\le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C}=0,001x+\dfrac{4}{x}+0,2$ với $0\le x\le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Câu 98. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x>0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y>0$).



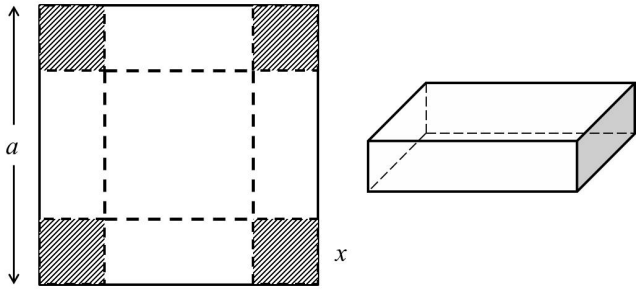
a) Số tiền phải làm là: $x.60000+y.3.50000=15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)}S=6250\ \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Câu 99. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp như hình vẽ. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.



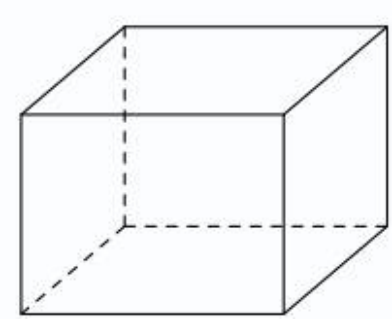
a) $0<x<\dfrac{a}{2}$

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x)=x(a-2x)^2$ với $0<x<\dfrac{a}{2}$.

c) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{6}$.

d) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{27}$.

Câu 100. Bác Tuấn muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288dm^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Gọi $x(x>0)$ là chiều rộng của đáy bể



a) Chiều dài của đáy bể là $\dfrac{x}{2}$

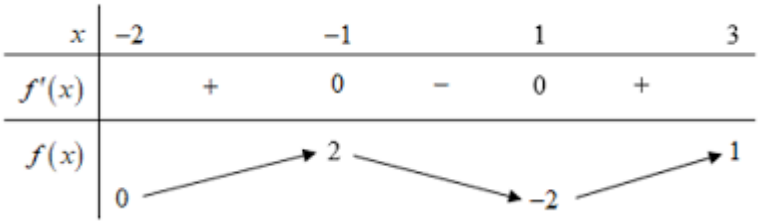
b) Chiều cao của bể là $\dfrac{0,144}{x^2}$.

c) Diện tích cần xây là $2x^2+\dfrac{0,864}{x}$

d) Bác Tuấn trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là 1080000 đồng.

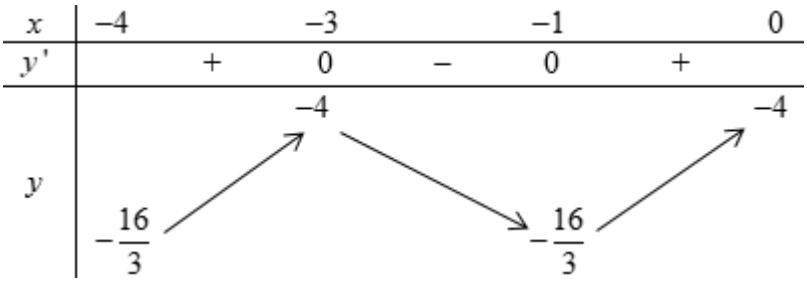
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



Trả lời: ……..

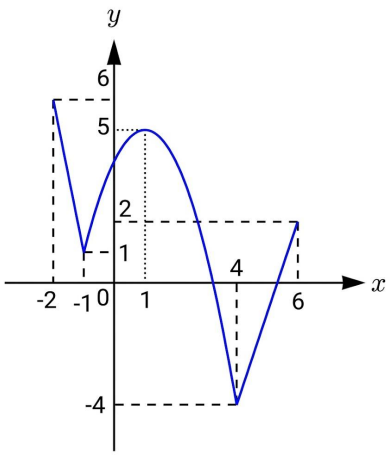
Câu 102. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-4;0]$. Tính $M-3m$

Trả lời: ……..

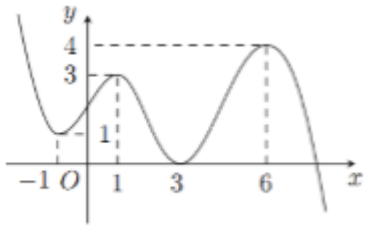
Câu 103. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$. Tính $M+m$

Trả lời: ……..

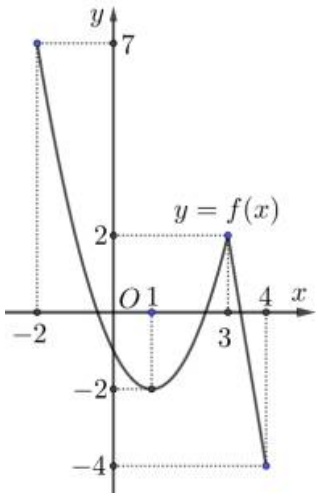
Câu 104. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;6]$. Tính $M+2026m$

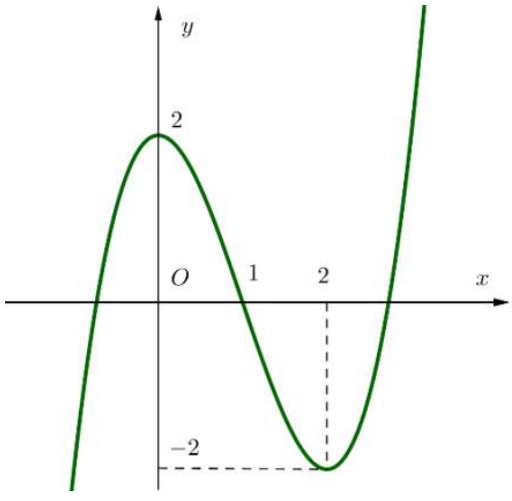
Trả lời: ……..

Câu 105. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$.



Trả lời: ……..

Câu 106. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M+m$.

Trả lời: ……..

Câu 107. Biết giá trị lớn nhất hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 108. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-6x^2+1$ trên đoạn $[-1;1]$.

Trả lời: ……..

Câu 109. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

Trả lời: ……..

Câu 110. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=x^3+3x^2+10$ trên đoạn $[-5;-1]$.

Trả lời: ……..

Câu 111. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+1}{x+4}$ trên đoạn $[1;10]$.

Trả lời: ……..

Câu 112. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

Trả lời: ……..

Câu 113. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

Trả lời: ……..

Câu 114. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2x^3+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Trả lời: ……..

Câu 115. Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$

Trả lời: ……..

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số đã cho.

Trả lời: ……..

Câu 117. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

Trả lời: ……..

Câu 118. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=3x+\sqrt{10-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Câu 119. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+2)\sqrt{4-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Câu 120. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Câu 121. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên đoạn $[-10;10]$.

Trả lời: ……..

Câu 122. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ……..

Câu 123. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x(\sin x+1)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Trả lời: ……..

Câu 124. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ……..

Câu 125. Cho hàm số $y=e^x\left(x^2-3\right)$, gọi $M=\frac{a}{e^b}(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 126. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$.

Trả lời: ……..

Câu 127. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\sin^4 x-4\sin^2 x+5$.

Trả lời: ……..

Câu 128. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4$.

Trả lời: ……..

Câu 129. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Tính $M+m$.

Trả lời: ……..

Câu 130. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$.

Trả lời: ……..

Câu 131. Tìm giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

Trả lời: ……..

Câu 132. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$ (lấy kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Câu 133. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$.

Trả lời: ……..

Câu 134. Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x+f\left(x\right)\right)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 135. Cho hàm số $y=x+\cos^2 x+m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=4$?

Trả lời: ……..

Câu 136. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Tìm giá trị của m (lấy kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Câu 137. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 6.

Trả lời: ……..

Câu 138. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3.

Trả lời: ……..

Câu 139. Tính tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\dfrac{9}{2}$.

Trả lời: ……..

Câu 140. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Trả lời: ……..

Câu 141. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4.

Trả lời: ……..

Câu 142. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm giá trị của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Trả lời: ……..

Câu 143. Tính giá trị của tham số m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8.

Trả lời: ……..

Câu 144. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x-3}$ **(**với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;2]} f(x)+\min\limits_{[-1;2]} f(x)=8$.

Trả lời: ……..

Câu 145. Tính tổng các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

Trả lời: ……..

Câu 146. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 147. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 148. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất bằng 3.

Trả lời: ……..

Câu 149. Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 150. Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 151. Cho hàm số $f(x)=ax^3-4(a+2)x+1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 152. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3?

Trả lời: ……..

Câu 153. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ……..

Câu 154. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$?

Trả lời: ……..

Câu 155. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$.

Trả lời: ……..

Câu 156. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Tìm m để thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$.

Trả lời: ……..

Câu 157. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y=-\dfrac{1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ……..

Câu 158. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ……..

Câu 159. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 160. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ……..

Câu 161. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 162. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Trả lời: ……..

Câu 163. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Trả lời: ……..

Câu 164. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng bao nhiêu miligam?

Trả lời: ……..

Câu 165. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$, với $0\le t\le 25, t\in\mathbb{N}$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Ngày thứ bao nhiêu thì mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Câu 166. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$N(t)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ……..

Câu 167. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Trả lời: ……..

Câu 168. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Trả lời: ……..

Câu 169. Hiệu quả nhiên liệu *E*, tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l), của một mẫu xe ôtô được mô hình hóa theo tốc độ $v\,(km/h)$ bằng công thức sau: $E(v)=-0,000025v^3+0,003v^2+13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20\,km/h$ đến $120\,km/h$ $(20\le v\le 120)$. Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Trả lời: ……..

Câu 170. Doanh thu của một công ty bất động sản khi bán căn hộ thứ *n* (*n* nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số $R(n)=\dfrac{(n-4)(n-30)^2}{100}+36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?

Trả lời: ……..

Câu 171. Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x)=35,7\dfrac{x+2}{x^2+21};x\in[0;8]$, trong đó *x* là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 1000 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

Trả lời: ……..

Câu 172. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=1000\left(t^2+me^{-t}\right)$ với $t\ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

Trả lời: ……..

Câu 173. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

Trả lời: ……..

Câu 174. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là *v* (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong *t* giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t,$ trong đó *c* là hằng số và *E* tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ……..

Câu 175. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$ (với $a,b\in\mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y=P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Trả lời: ……..

Câu 176. Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?



Trả lời: ……..

Câu 177. Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A.Khi cửa hàn bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

Trả lời: ……..

Câu 178. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ……..

Câu 179. Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Trả lời: ……..

Câu 180. Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000 đồng/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm 1000 đồng/người thì sẽ tăng thêm 10 khách hàng. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 đồng lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Câu 181. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới. Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Trả lời: ……..

Câu 182. Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là $530\ cm^3$. Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Câu 183. Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a.\pi\left(cm^3\right), a\in\mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?



Trả lời: ……..

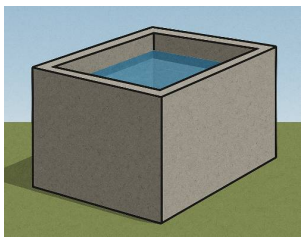
Câu 184. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\text{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là $700\,000$ đồng/m^2. Hỏi chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng để xây bể trên?

Trả lời: ……..

Câu 185. Thầy Huy dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

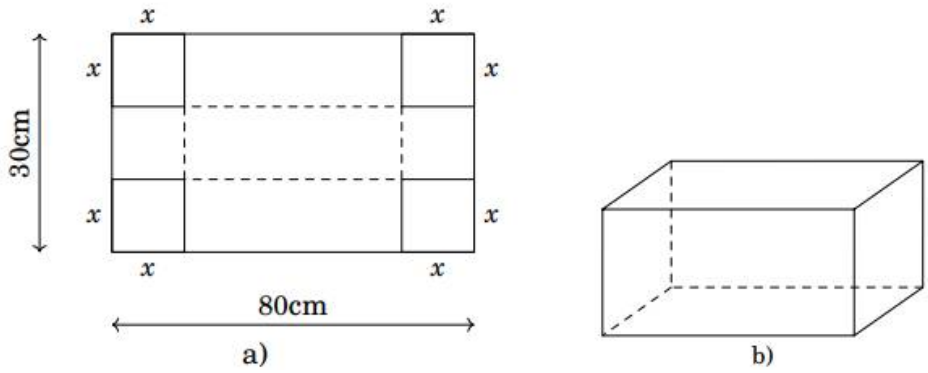
Trả lời: ……..

Câu 186. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/m^2. Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



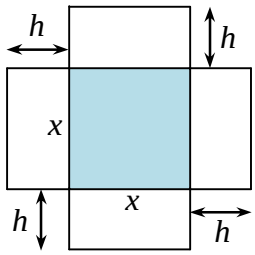
Trả lời: ……..

Câu 187. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30\,\text{cm}$ và chiều dài $80\,\text{cm}$ (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x\left(\text{cm}\right)$ với $5\le x\le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+2b$.



Trả lời: ……..

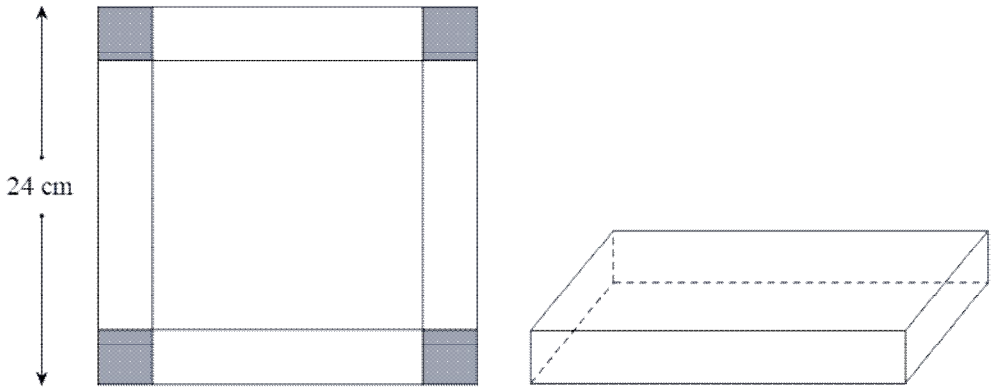
Câu 188. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh carton theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3.



Để diện tích của mảnh carton nhỏ nhất thì giá trị của x bằng bao nhiêu centimet?

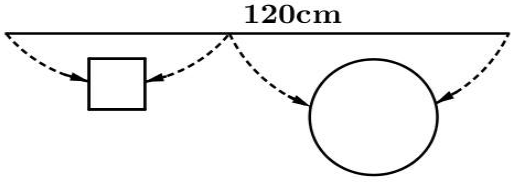
Trả lời: ……..

Câu 189. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Trả lời: ……..

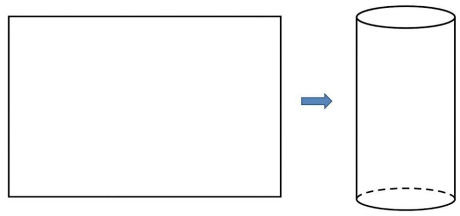
Câu 190. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……..

Câu 191. Bố bạn Trúc Linh là một thợ gò thùng thiếc. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một tấm tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:

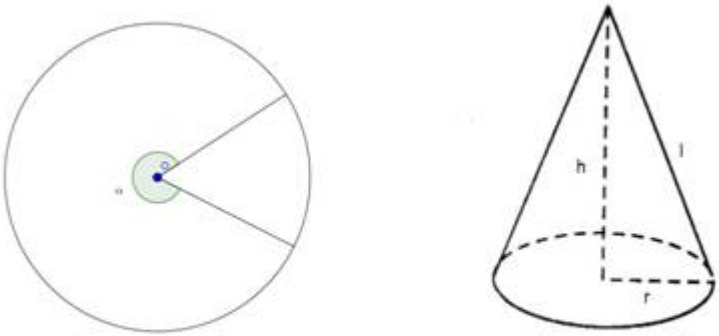


Tấm tôn *Chiếc thùng*

Để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, bố bạn Trúc Linh phải chọn tấm tôn có chiều dài là bao nhiêu cemtimet? (Bỏ qua hao hụt mối ghép của chiếc thùng)

Trả lời: ……..

Câu 192. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích 4π dm^2. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.



Hình 1 Hình 2

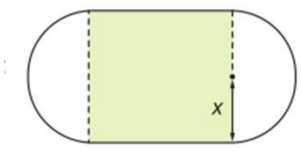
Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu decimet khối? (kết quả lấy đến phần trăm của decimet)

Trả lời: ……..

Câu 193. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $120\,\text{cm}$ từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu centimet?

Trả lời: ……..

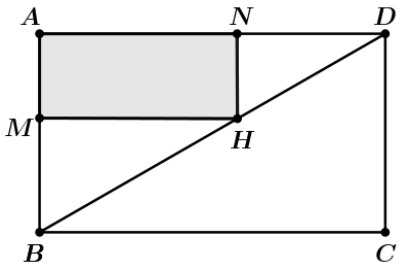
Câu 194. Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính $x(\text{m})$ $(x>0)$ và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m, tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

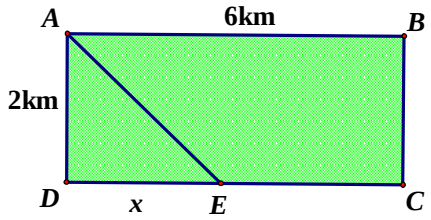
Câu 195. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25\,\text{m}^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh

BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu triệu đồng với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2 ? (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng)



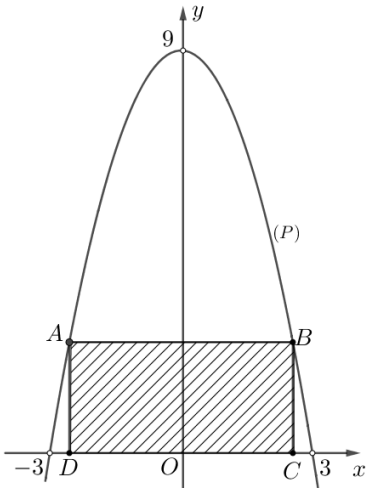
Trả lời: ……..

Câu 196. Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = 2$ km và chiều dài $AB = 6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C. Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD, sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C. Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất?(kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm của kilomet)



Trả lời: ……..

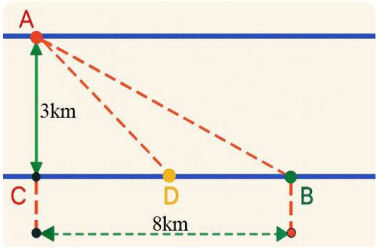
Câu 197. Một hình chữ nhật $ABCD$ được vẽ bên trong parabol (P) sao cho A, B thuộc (P); C, D thuộc trục Ox như hình vẽ (đơn vị trên trục Ox, Oy là mét). Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Trả lời: ……..

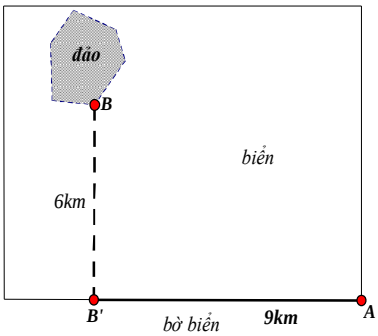
Câu 198. Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt *(như hình vẽ)*. Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D

nằm giữa B và C sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h, chạy với vận tốc 8km/h, $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất *(đơn vị: giờ)* để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

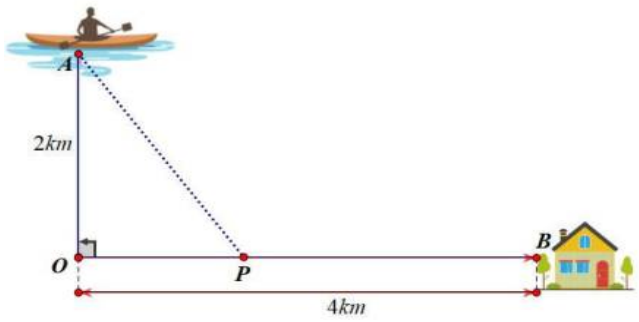
Câu 199. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là $9km$. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Câu 200. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Trả lời: ……..

BÀI 2
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y=f(x)$ trên D, nếu: $f(x)\le M, \forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

  Kí hiệu $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D, nếu: $f(x)\ge m, \forall x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.

  Kí hiệu kí hiệu $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$

Chú ý:

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể một số hữa hạn điểm mà tại điểm đó hàm số không có đạo hàm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữa hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau:

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.

- **Bước 3:** Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

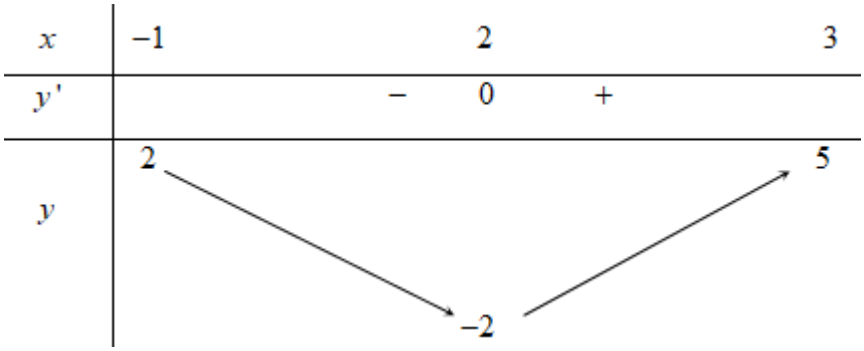
Khi đó, ta có: $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

CHỦ ĐỀ 1
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1
TÌM GTLN VÀ GTNN KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

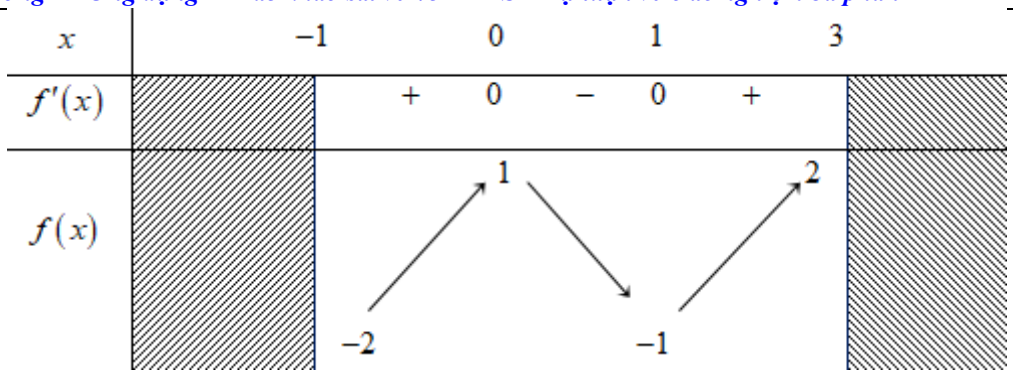
a) Trên đoạn $[-1;3]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)=5;\ \min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)=-2$

b) Trên khoảng $(-1;3)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{(-1;3)} f(x)=f(2)=-2$

Trên khoảng $(-1;3)$ hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất

Bài 2. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $[-1;3)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên nửa khoảng $[-1;3)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

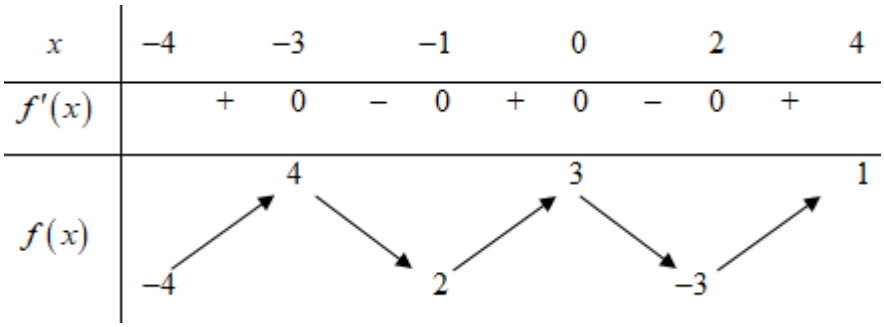
Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Trên nửa khoảng $[-1;3)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-1;3)} f(x)=f(-1)=-2$ và không có giá trị lớn nhất.

b) Trên đoạn $[-1;1]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=1;\ \min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=-2$

Bài 3. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;4]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;2)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

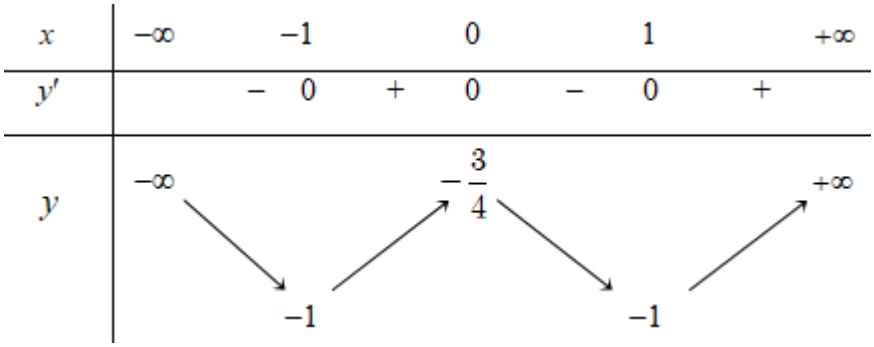
a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-4;4]$ là: $\max\limits_{[-4;4]} f(x)=f(-3)=4$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-4;4]$ là: $\min\limits_{[-4;4]} f(x)=f(-4)=-4$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-1;2)$ là: $\max\limits_{(-1;2)} f(x)=f(0)=3$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;2)$.

Bài 4. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[0;1]$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;1)$.

d) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$ là: $\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=-\dfrac{3}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$ là: $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=-1$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=-\dfrac{3}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=f(1)=-1$

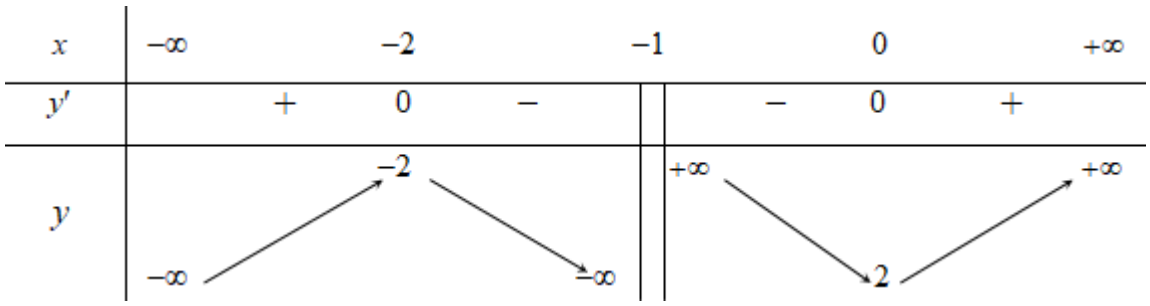
c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-1;1)$ là: $\max\limits_{(-1;1)} f(x)=f(0)=-\dfrac{3}{4}$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;1)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ là: $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(1)=-1$

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Bài 5. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-\infty;-1)$ là: $\max\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-2)=-2$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-\infty;-1)$.

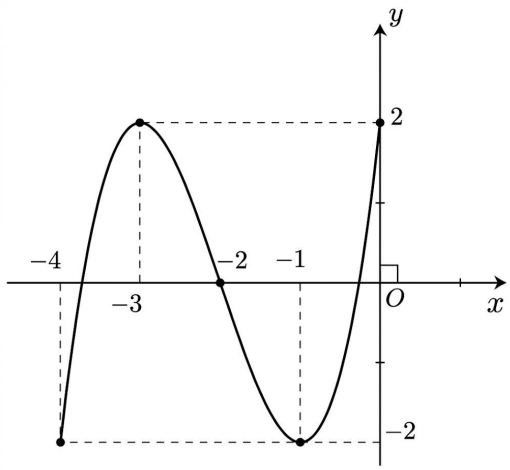
b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là: $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)=2$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-1;+\infty)$.

c) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$

Bài 6. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-4;0]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

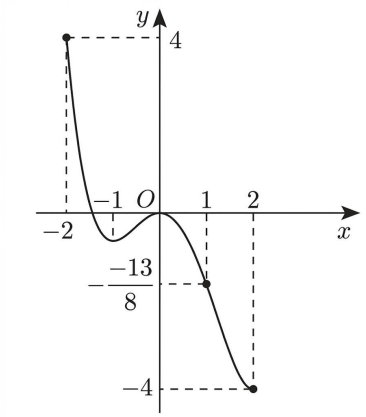
a) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-3)=2$; $\min\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-4)=f(-1)=-2$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-2;0)$ là: $\min\limits_{(-2;0)} f(x)=f(-1)=-2$

Hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-2;0)$.

Bài 7. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $(-1;2]$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

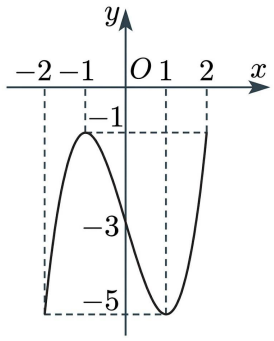
a) Trên đoạn $[-2;2]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=4;\ \min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(2)=-4$

b) Trên nửa khoảng $(-1;2]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{(-1;2]} f(x)=f(0)=0;\ \min\limits_{(-1;2]} f(x)=f(2)=-4$

Bài 8. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên nửa khoảng $[-1;1)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

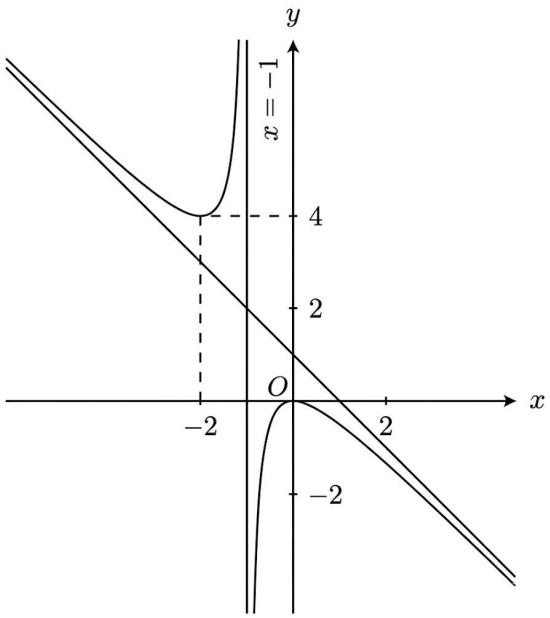
a) Trên đoạn $[-2;2]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là:

$\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=-1;\ \min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=f(1)=-5$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên nửa khoảng $[-1;1)$ là: $\max\limits_{[-1;1)} f(x)=f(-1)=-1$

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $[-1;1)$.

Bài 9. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên tập xác định.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-\infty;1)$ là: $\min\limits_{(-\infty;1)} f(x)=f(-2)=4$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;1)$.

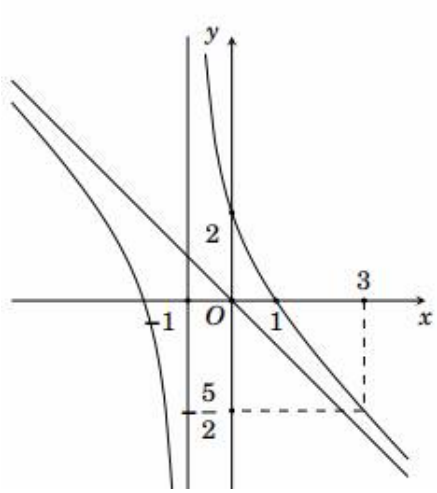
b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là: $\max\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f(0)=0$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$

Bài 10. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số đã cho trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta có:

a) Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên khoảng $(-1;+\infty)$

DẠNG 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[a;b]$

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Phương pháp :

- **Bước 1:** Tìm các điểm $x_1, x_1, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng hoặc không tồn tại.
- **Bước 2:** Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.
- **Bước 3:** Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó, ta có: $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\end{cases}$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì: $\begin{cases}\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(a)\\ \min\limits_{[a,b]} f(x)=f(b)\end{cases}$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a;b]$.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

b) $y=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$

c) $y=3x^3-x^2-7x+1$ trên đoạn $[0;2]$.

d) $y=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$.

Lời giải

a) $y=f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$

- Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[2;19]$.
- Ta có $f'(x)=3x^2-33$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{11}(N)\\ x=-\sqrt{11}(N)\end{array}\right.$
- Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$ ta có $f(2)=-58; f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}; f(19)=6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f(\sqrt{11})=-22\sqrt{11}$; $\max\limits_{[2;19]} f(x)=f(19)=6232$.

b) $y=f(x)=x^3-3x^2+3$ trên đoạn $[1;3]$

Ta có $f(x)=x^3-3x^2+3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;3]\\x=2\in[1;3]\end{array}\right.$.

Khi đó $f(1)=1;\ f(2)=-1;\ f(3)=3$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]}f(x)=f(2)=-1;\ \max\limits_{[1;3]}f(x)=f(3)=3$

c) $y=3x^3-x^2-7x+1$ trên đoạn$[0;2]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

• $y'=9x^2-2x-7$

$y'=0\Leftrightarrow 9x^2-2x-7=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-\dfrac{7}{9}$ (loại vì $x\notin[0;2]$)

• Ta có: $f(0)=1; f(2)=-9; f(1)=-6$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}y=f(0)=1$; $\min\limits_{[0;2]}y=f(2)=-9$

d) $y=-2x^4+4x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

• $y'=-8x^3+8x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -8x^3+8x=0\Leftrightarrow -8x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-1$ (loại vì $x\notin[0;2]$)

• Ta có: $f(0)=3; f(2)=-13; f(1)=5$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}f(x)=f(1)=5;\ \min\limits_{[0;2]}f(x)=f(2)=-13$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y=x+\dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

c) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$.

d) $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

Lời giải

a) $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn$[0;2]$.

• $y'=\dfrac{-10}{(x-3)^2}<0,\forall x\in[0;2]\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên đoạn$[0;2]$.

• Do đó: $\max\limits_{[0;2]} y = f(0) = \dfrac{1}{3}$; $\min\limits_{[0;2]} y = f(2) = -5$

b) $y = x + \dfrac{9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $[2;4]$.

• $y' = 1 - \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$ (loại vì $x \notin [2;4]$)

• Ta có: $f(2) = \dfrac{11}{2}; f(4) = \dfrac{25}{4}; f(3) = 6$

$\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y = f(2) = \dfrac{11}{2}$; $\min\limits_{[2;4]} y = f(3) = 6$

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

• Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

• $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$ (loại vì $x \notin \left[-\dfrac{1}{2}; 2\right]$)

• Ta có: $f(0) = 2; f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}; f(2) = \dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow \min\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = f(0) = 2$; $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};2\right]} y = f(2) = \dfrac{10}{3}$

d) $y = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0;2]$

• Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \dfrac{4}{x + 1}$.

• Khi đó $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -3 \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(2) = \dfrac{10}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 3$ và $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sqrt{4-x^2}$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{4-x^2}$

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-2;2]$.

• $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x\in(-2;2)$

$y'=0\Leftrightarrow x=0\in[-2;2]$ (nhận).

• Ta có: $f(0)=2;\ f(-2)=0;\ f(2)=0$

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]} y=f(-2)=f(2)=0,\ \max\limits_{[-2;2]} y=f(0)=2$

b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

• Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow$ Tập xác định: $D=[-2;2]$.

• $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x\in(-2;2)$.

$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in[-2;2]$.

• Ta có: $f(-2)=-2;\ f(2)=2;\ f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2};\ \min\limits_{[-2;2]} y=f(-2)=-2$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên $[-1;3]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;3]$.

• $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

$y'=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$ (nhận).

• Ta có: $f(-1)=2\sqrt{2};\ f(3)=2\sqrt{2};\ f(1)=2$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=f(-1)=f(2)=2\sqrt{2};\ \min\limits_{[-1;3]} y=f(1)=2$

d) $y=x+1+\sqrt{-3x^2+6x+9}$ trên $[-1;3]$.

• Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;3]$.

• $y'=1+\dfrac{-3x+3}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}=\dfrac{\sqrt{-3x^2+6x+9}-(3x-3)}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}, \forall x\in(-1;3).$

$$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{-3x^2+6x+9}=3x-3\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3\ge 0\\-3x^2+6x+9=(3x-3)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\12x^2-24x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2\in[-1;3] \text{ (nhận).}$$

• Ta có: $f(-1)=0; f(3)=4; f(2)=6$

$$\Rightarrow \max_{[-1;3]} y=f(2)=6; \min_{[-1;3]} y=f(-1)=0$$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.

b) $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.

d) $y=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

Lời giải

a) $y=x+1+2\sqrt{-2x^2+2x+4}$ trên $[-1;2]$.

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;2]$.

$$y'=1+\frac{-2x+1}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}}=\frac{2\sqrt{-2x^2+2x+4}-(2x-1)}{2\sqrt{-2x^2+2x+4}}, \forall x\in(-1;2).$$

$$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+2x+4}=(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\4\left(-2x^2+2x+4\right)=(2x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\12x^2-12x-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{6}}{2}\in[-1;2] \text{ (nhận).}$$

Ta có: $f(-1)=0; f(2)=3; f\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$$\Rightarrow \max_{[-1;2]} y=f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}; \min_{[-1;2]} y=f(-1)=0$$

b) $y=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên $[0;3]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$$y'=\frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}},\ x\in[0;3]$$

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=2\in[0;3] \end{array}\right.$

Ta có: $y(0)=-12;\ y(3)=-3\sqrt{13};\ y(1)=-5\sqrt{5};\ y(2)=-8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;3]} y=f(3)=-3\sqrt{13}; \min\limits_{[0;3]} y=f(0)=-12$

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1;2]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-1;2]$.

$y'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x+1).\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\forall x\in[-1;2]$.

$y'=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;2]$.

Ta có: $f(-1)=0;\ f(2)=\dfrac{3\sqrt{5}}{5};\ f(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} y=f(1)=\sqrt{2};\ \min\limits_{[-1;2]} y=f(-1)=0$

d) $y=\sqrt{2x+14}+\sqrt{5-x}$

Tập xác định $D=[-7;5]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+14}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}};\ f'(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{2x+14}=2\sqrt{5-x}\Leftrightarrow x=1\in[-7;5]$.

$f(1)=16;\ f(-7)=2\sqrt{3};\ f(5)=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-7;5]} f(x)=16$ và $\min\limits_{[-7;5]} f(x)=2\sqrt{3}$

DẠNG 3

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG $(a;b)$

NỬA KHOẢNG $(a;b]$; $[a;b)$.

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ (hoặc nửa khoảng $[a;b);(a;b]$). Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ (hoặc nửa khoảng $[a;b);(a;b]$).

Phương pháp : Dùng bảng biến thiên để tìm max – min.

- **Bước 1:** Tìm tập xác định.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$
- **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=4x^3-3x^4$

b) $y=2x^5+5x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{3}$

c) $y=\frac{x}{x^2+1}$

d) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Lời giải

a) $y=4x^3-3x^4$

- Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=12x^2-12x^3=12x^2(1-x)$

$$y'=0\Leftrightarrow 12x^2(1-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↗	1	↘	$-\infty$

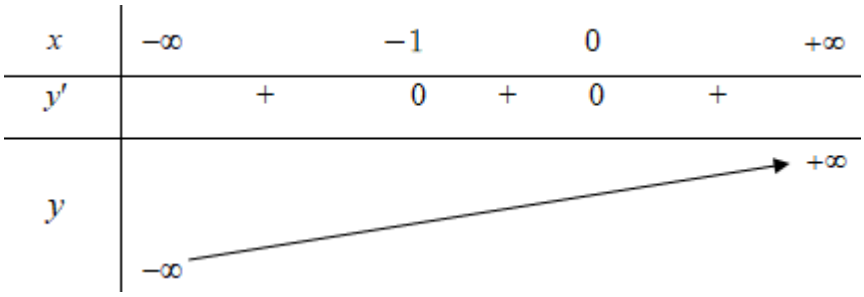
- Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=f(1)=1$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) $y=2x^5+5x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{3}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=10x^4+20x^3+10x^2=10x^2(x+1)^2\geq 0 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$

• Bảng biến thiên:



• Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

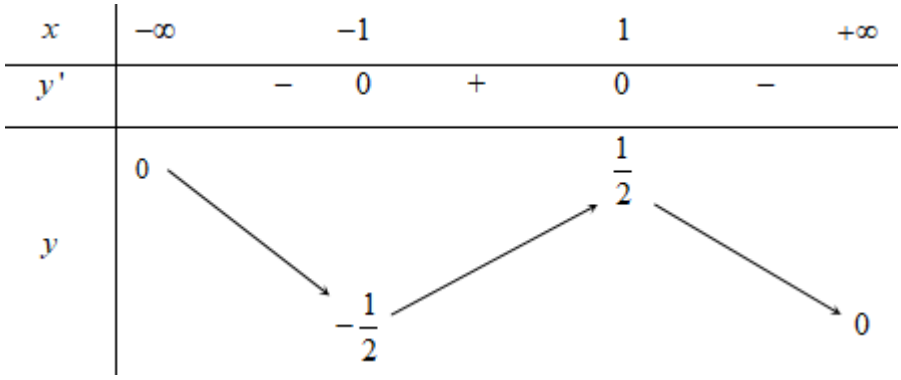
c) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

• Ta có: $y'=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$

$$y'=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

• Bảng biến thiên:



• Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y=f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

d) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. Suy ra $f'(x)=0$ khi $x=\pm 1$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	1

Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x+\dfrac{4}{x}$ với $x>0$.

b) $y=x-\dfrac{1}{x}$ với $x\in(0;2]$

c) $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) $y=x+\dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

a) $y=x+\dfrac{4}{x}$ với $x>0$.

Cách 1. Sử dụng chiều biến thiên, tìm GTLN, GTNN trên khoảng.

•Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

•Ta có: $y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2},\forall x\in(0;+\infty)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

• Bảng biến thiên:

x		0		2		$+\infty$
y'		‖	$-$	0	$+$	
y		0	↘	4	↗	$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=4$ khi $x=2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ta có: $\forall x>0: x+\dfrac{4}{x}\overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}}=4\Leftrightarrow y\geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x=\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2(L)\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy: $\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=4$ khi $x=2$.

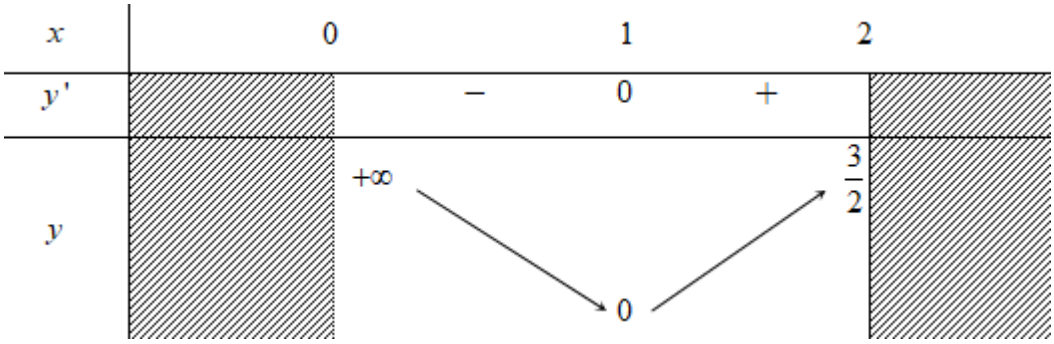
a) $y=x-\dfrac{1}{x}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0;2]$.

Ta có: $y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}, \forall x\in(0;2]$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:



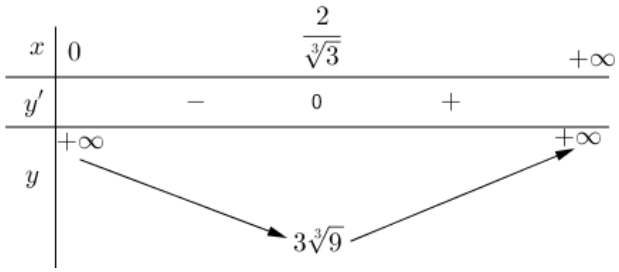
Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(0;2]} f(x)=0$ khi $x=1$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=3-\frac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow 3-\frac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0;+\infty)$ như sau:

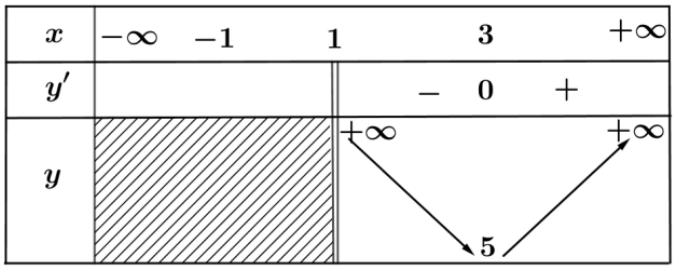


Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$.

d) $y=x+\frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

Ta có: $y=x+\frac{4}{x-1}\Rightarrow y=1-\frac{4}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} y=5$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x\sqrt{3-x}$ b) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

Lời giải

a) $y=x\sqrt{3-x}$

Hàm số đã cho xác định khi $3-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 3$

Tập xác định: $D=(-\infty;3]$.

Ta có: $y'=\dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}, \forall x\in(-\infty;3)$.

$y'=0\Leftrightarrow 6-3x=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{(-\infty;3]} y=2$ khi $x=2$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

$y'=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: $\min\limits_{\mathbb{R}} y=\sqrt{2}$ khi $x=1$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

DẠNG 4
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

b) $y=x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Lời giải

a) $y=x^6+4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1;1]$.

Đặt $t=x^2$, vì $-1\le x\le 1\Rightarrow 0\le t\le 1$ hay $t\in[0;1]$.

Khi đó, $f(t)=t^3+4\left(1-t^3\right)=-3t^3+12t^2-12t-4$.

Xét hàm số $f(t)=-3t^3+12t^2-12t-4$ liên tục và xác định trên đoạn $[0;1]$.

$f'(t)=-6t^2+24t-12$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -6t^2+24t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\notin[0;1]\ \ (L)\\ t=2\in[0;1]\ \ (N)\end{array}\right.$$

Ta có: $f(0)=4;\ f(1)=1;\ f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y=4$ khi $x=0$; $\min\limits_{[-1;1]} y=\frac{4}{9}$ khi $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $y=x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}$ trên đoạn $[1;3]$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\left(2\le t\le\frac{10}{3}\right)\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^2+t-2\Rightarrow y'=2t+1>0;\forall t\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất = 4 , hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $=\frac{112}{9}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $[0;63]$.

b) $y=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

Lời giải

a) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}$ trên đoạn $[0;63]$

TXĐ: $D=[-1;+\infty)$.

Đặt $t=\sqrt[6]{x+1}\ (1\le t\le 2)$

Khi đó hàm số trở thành: $y=t^3+t^2\Rightarrow y'=3t^2+2t>0;\forall t\in[1;2]$

$\Rightarrow \min y=y(1)=2;\ \max y=y(2)=12$.

b) $y=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

Đặt $t=\sqrt{x};(x\in[0;4]\Rightarrow 0\le t\le 2)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y=t+\dfrac{t}{t+1}\Rightarrow y'=1+\dfrac{1}{(t+1)^2}>0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến $\forall t\in[0;2]$

$\Rightarrow \min y=y(0)=0;\ \max y=y(2)=\dfrac{8}{3}$.

DẠNG 5
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Chú ý: $-1 \le \sin x \le 1;\ -1 \le \cos x \le 1;\ 0 \le \sin^2 x \le 1;\ 0 \le \cos^2 x \le 1$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

d) $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Lời giải

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y' = 2\cos 2x - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Do $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6}$.

Ta có:. $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2};\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2};\ f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6};\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = \dfrac{\pi}{2}$ khi $x = -\dfrac{\pi}{2}$ và $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y = -\dfrac{\pi}{2}$ khi $x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $y = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Cách 1:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$y'=-2\sqrt{2}\sin 2x+4\cos x=-4\sqrt{2}\sin x\cos x+4\cos x=-4\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{4}$.

Tính $f(0)=\sqrt{2};\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-\sqrt{2};\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}$ khi $x=\frac{\pi}{4}$ và $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}$ khi $x=0$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $y=\sqrt{2}\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x=-2\sqrt{2}\sin^2 x+4\sin x+\sqrt{2}$.

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Khi đó, hàm số được viết lại là: $f(t)=-2\sqrt{2}t^2+4t+\sqrt{2},\forall t\in[0;1]$.

Ta có: $f'(t)=-4\sqrt{2}t+4\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tính: $f(0)=\sqrt{2};\ f(1)=4-\sqrt{2};\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=2\sqrt{2}$ khi $t=\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ và $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\sqrt{2}$ khi $t=\sin x=0\Leftrightarrow x=0$.

c) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ có $y'=1-2\cos x\sin x=1-\sin 2x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Mặt khác $\begin{cases} y(0)=1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y=1$.

d) $y=2\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$

Cách 1:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;\pi]$.

Ta có: $y'=2\cos x-4\sin^2 x.\cos x,\ \ \forall x\in[0;\pi]$

$y'=0\Leftrightarrow 2\cos x(1-2\sin^2 x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin^2 x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z}),\ \forall x\in[0;\pi].$$

Do $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{4};x=\frac{3\pi}{4}$

Ta có:

$f(0)=0$

$f(\pi)=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[0,\pi]} f(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3} & \text{khi } x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4}\\ \min\limits_{[0,\ \pi]} f(x)=0 & \text{khi } x=0,\ \ x=\pi\end{cases}$.

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;\pi]$.

Đặt $t=\sin x, x\in[0;\pi]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Lúc đó, hàm số trở thành: $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3,\forall t\in[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{4}{3}t^3$ liên tục và xác định trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $f'(t)=2-4t^2 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in[0;1] \quad (N) \\ t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\notin[0;1] \quad (L) \end{array}\right.$

Tính $f(0)=0;\ f(1)=\dfrac{2}{3};\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[0,1]} f(t)=\max\limits_{[0,\pi]} f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \text{ khi } t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{3\pi}{4} \\ \max\limits_{[0,1]} f(t)=\min\limits_{[0,\ \pi]} f(x)=0 \text{ khi} t=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\pi \end{array}\right.$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$.

b) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$

c) $y=\cos^4 x+\sin^2 x-2$

d) $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$

Lời giải

a) $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$.

Khi đó hàm số trở thành: $f(t)=2t^2+2t-1, \forall t\in[-1;1]$.

Tìm $f'(t)=4t+2 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}\in[-1;1] \ (N)$.

Tính $f(-1)=-1;\ f(1)=3;\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[-1,1]} f(t)=\max\limits_{D=\mathbb{R}} y=3 \text{ khi } t=\sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ \min\limits_{[-1,1]} f(t)=\min\limits_{D=\mathbb{R}} y=-\dfrac{3}{2} \text{ khi } t=\sin x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \end{array}\right. ,(k\in\mathbb{Z})$.

b) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=1-\sin^2 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4=-\sin^2 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+5$.

Đặt $t=\sin 2x, t\in[-1;1]$.

Khi đó, hàm số trở thành: $f(t)=-t^2-\dfrac{1}{2}t+5, t\in[-1;1]$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2-\dfrac{1}{2}t+5$ liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có: $f'(t)=-2t-\frac{1}{2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\in[-1;1]$.

Tính: $f(-1)=\frac{9}{2};\ f(1)=\frac{7}{2};\ f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{16}$.

$$\max f(x)=\frac{81}{16} \text{ khi } t=\sin 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi-\alpha}{2}+k\pi\end{array}\right. \text{ với } \sin\alpha=-\frac{1}{4} \text{ và } k\in\mathbb{Z}$$

$$\min f(x)=\frac{7}{2} \text{ khi } t=\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$$

c) $y=\cos^4 x+\sin^2 x-2$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Ta có : $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x-2=\cos^4 x-\cos^2 x-1$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow t\in[0;1]$ và hàm số trở thành : $g(t)=t^2-t-1,\ \forall t\in[0;1]$.

$g'(t)=2t-1\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in[0;1]$.

Tính: $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4};\ g(0)=-1;\ g(1)=-1$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\max y=-1 \text{ khi } t=1;\ t=0\\ \min y=-\frac{5}{4} \text{ khi } t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

d) $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow y=f(t)=\frac{t+1}{t^2+t+1},t\in[-1;1]$.

Hàm số $f(t)=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

Tìm $f'(t)=\frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=0\in[-1;1]$

Ta có: $f(-1)=0;\ f(0)=1;\ f(1)=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\max f(x)=\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=1 \text{ khi } t=\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \min f(x)=\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t)=0 \text{ khi } t=\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

c) $y=2\sin x+\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

d) $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

e) $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

f) $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Lời giải

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sin x+\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$.

b) $y=3+4\cos x-\sin^2 x$.

c) $y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x-2$.

d) $y=\sin^2 x.\cos x$.

e) $y=2\sin^2+\sin x-1$.

f) $y=2\sin^2 x-\cos x+1$.

Lời giải

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\cos 2x-2\sin x-1$.

b) $y=\sin^3 x-3\sin^2 x+2$.

c) $y=\sin^3 x+\sin^2 x-5\sin x+1$.

d) $y=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$.

e) $y=\cos^3 x-6\cos^2 x+9\cos x+5$.

f) $y=\sin^3-\cos 2x+\sin x+2$.

Lời giải

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\sin^3 x+\cos 2x+\sin x+3$.

b) $y=2\cos^3 x+\dfrac{5}{2}\sin^2 x+\cos x+2$.

c) $y=-2\sin^3+3\cos 2x-6\sin x$.

d) $y=\cos^3 x+3\cos 2x-15\cos x+2$.

e) $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$.

f) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Lời giải

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$.

b) $y=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos x+1}$.

c) $y=\dfrac{8\sin x-8}{2-\sin x-\cos^2 x}$.

d) $y=\dfrac{3+\cos x}{\cos x+\sin^2 x}$.

e) $y=\dfrac{4-\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x+2}$.

f) $y=\dfrac{4+3\sin x-2\cos^2 x}{3+2\sin x}$.

g) $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$.

h) $y=\sqrt{\sin^2 x+\cos x+2}$.

Lời giải

DẠNG 6
TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Đạo hàm của hàm sơ cấp thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp
$\left(e^x\right)'=e^x$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\left(e^u\right)'=u'.e^u$ $\left(a^u\right)'=u'a^u\ln a$
$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\ln x\right)'=\dfrac{u'}{u}$ $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x^2\ln x$ trên đoạn $[1;e]$

b) $y=x^2e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

c) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};e\right]$

d) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$

Lời giải

a) $y=x^2\ln x$ trên đoạn $[1;e]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=[1;e]$.

$y'=2x\ln x+x^2.\dfrac{1}{x}=x\left(2\ln x+1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow x\left(2\ln x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(L)\\ x=\sqrt{e}\,(N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(1)=0;\ f\left(\sqrt{e}\right)=\sqrt{e};\ f(e)=2e$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[1;e]}y=f(e)=2e\\ \min\limits_{[1;e]}y=f(1)=0\end{array}\right.$

b) $y=x^2e^{-x}$ trên đoạn $[0;\ln 8]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=[0;\ln 8]$.

$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$

$y'=0\Leftrightarrow xe^{-x}(2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(N)\\ x=2(N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=0; f(2)=\frac{4}{e^2}; f(\ln 8)=\frac{9}{8}.e.\ln^2 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;\ln 8]} y = f(\ln 8)=\frac{9}{8}.e.\ln^2 2 \\ \min\limits_{[0;\ln 8]} y = f(0)=0 \end{cases}$$

c) $y=x-\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$.

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=1-\frac{1}{x}$.

Xét $y'=0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\frac{1}{2};e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln 2,\ y(1)=1, y(e)=e-1$.

Do đó $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=1$ và $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};e\right]} y=e-1$.

d) $y=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f(x)=\left(x^2-2\right)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow f'(x)=2x\mathrm{e}^{2x}+\left(x^2-2\right)2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+x-2\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{cases}.$$

Ta có $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2};\ f(1)=-e^2;\ f(2)=2\mathrm{e}^4$

Vậy $M=\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=2\mathrm{e}^4; m=\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-\mathrm{e}^2$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y=\ln\left(2x^2-5x+3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Lời giải

a) $y=x-2\ln\left(x^2+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=1-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(N) \\ x=3(L) \end{cases}$$

Ta có: $f(0)=-2\ln 3; f(1)=1-4\ln 2; f(2)=4-2\ln 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} y = f(2) = 4 - 2\ln 7 \\ \min\limits_{[0;2]} y = f(0) = -2\ln 3 \end{cases}$$

b) $y = \ln\left(2x^2 - 5x + 3\right)$ trên đoạn $[2;3]$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[0;2]$.

$$y' = \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}(L)$$

Ta có: $f(0) = \ln 3;\ f(2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = f(0) = \ln 3 \\ \min\limits_{[2;3]} y = f(2) = 0 \end{cases}$$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y = e^{2x^2-2x+1}$ b) $y = e^{x-\sqrt{4-x^2}}$

Lời giải

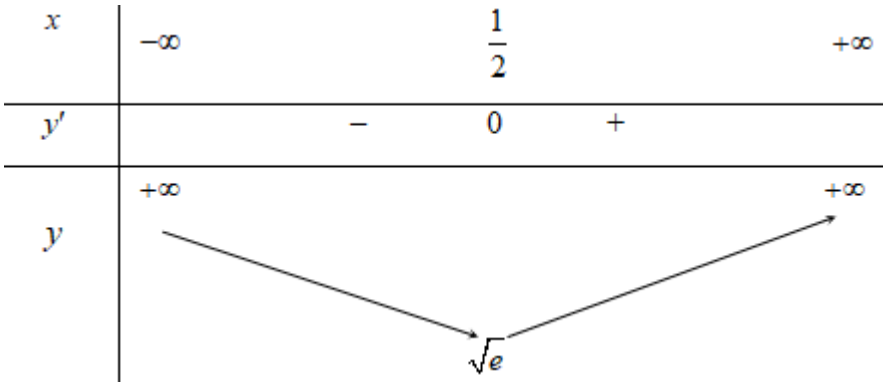
a) $y = e^{2x^2-2x+1}$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (4x-2)e^{2x^2-2x+1}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (4x-2)e^{2x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(N)$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

b) $y = e^{x-\sqrt{4-x^2}}$

Đề hàm số xác định thì: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $D = [-2;2]$.

$$y'=\left(2+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)e^{x-\sqrt{4-x^2}}=\left(\frac{2\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}\right)e^{x-\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}+x=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=-\frac{x}{2}\Rightarrow 5x^2=16\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4\sqrt{5}}{5}(L)\\ x=-\frac{4\sqrt{5}}{5}(N)\end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2)=\frac{1}{e^2}; f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{1}{e^{\frac{6\sqrt{5}}{5}}}; f(2)=e^2$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[-2;2]} y=f(2)=e^2\\ \min\limits_{[-2;2]} y=f\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{1}{e^{\frac{6\sqrt{5}}{5}}}\end{array}\right.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$ trên đoạn $[0;2]$.

b) $y=\left(x^2-x-1\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$.

c) $y=x^2\ln x+2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e^3};e^2\right]$.

d) $y=x.\ln x$ trên đoạn $\left[1;e^2\right]$.

e) $y=\frac{x}{2}-\ln\left(x^2-x+2\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

f) $y=x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=e^{-2x}\left(-x^2+x+\frac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

b) $y=e^{3x}\left(x^2+x-3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

c) $y=e^{2x}-4e^x+3$ trên đoạn $[0;\ln 4]$.

d) $y=x^2.e^{-x}$ trên đoạn $[0;1]$.

e) $y=e^{-2x}\left(-x^2+x+\frac{7}{2}\right)$ trên đoạn $[-2;0]$.

f) $y=e^{3x}\left(x^2+x-3\right)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số :

a) $y=\ln\left(x^2+x+2\right)$ trên đoạn $[3;6]$.

b) $y=x^2-4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$.

c) $y=\left(x^2+4x+1\right).e^{x-2}$ trên đoạn $[-2;3]$.

d) $y=e^x(x^2-3)$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

DẠNG 7
TÌM (GTLN) VÀ (GTNN) CỦA HÀM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2-1-m^2$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng -1

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên $[-1;1]$ bằng 0

c) Hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2024$ có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

a) $y=-x^3+3x^2-1-m^2$

Ta có $y'=-3x^2+6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ \ (\text{nhan}) \\ x=2 \ \ (\text{loai}) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(-2)=19-m^2$; $f(0)=-1-m^2$ và $f(1)=1-m^2$.

Do đó $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(0)=-1-m^2$ suy ra $-1-m^2=-1 \Leftrightarrow m^2=0 \Leftrightarrow m=0$.

a) $y=-x^3-3x^2+m$

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;1]$ và có đạo hàm $f'(x)=-3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-2\notin[-1;1] \end{array}\right.$

Xét $f(-1)=-2+m$; $f(1)=-4+m$ suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=-2+m$

Theo đề bài $-2+m=0 \Leftrightarrow m=2$.

c) $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2024$

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=m-1 \\ x_2=m+1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1\le 0<x_2$ hoặc $0<x_1<x_2$.

TH1: $x_1\le 0<x_2 \Leftrightarrow m-1\le 0<m+1 \Leftrightarrow -1<m\le 1$. Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

TH2: $0<x_1<x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ y(m+1)\le y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^3-3m(m+1)^2+3(m^2-1)(m+1)+2024\le 2024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2)\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2.$$

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4

b) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ trên $[0;2]$ bằng 8

Lời giải

a) $y=\dfrac{x+5m}{x-3}$

$y'=\dfrac{-3-5m}{(x-3)^2}$

Trường hợp 1: $-3-5m>0\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y'>0$ thì $\min\limits_{[1;2]} y=y(1)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1+5m)=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{5}$(nhận)

Trường hợp 2: $-3-5m<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{5}$

Suy ra $y'<0$ thì $\min\limits_{[1;4]} y=y(2)\Leftrightarrow -2+5m=4\Leftrightarrow m=-\dfrac{6}{5}$(loại)

b) $y=\dfrac{x-m}{x+2}$

Ta có $y(0)=-\dfrac{m}{2}; y(2)=\dfrac{2-m}{4}$.

Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0;2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

Do đó $\max\limits_{[0;2]} y+\min\limits_{[0;2]} y=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{2-m}{4}=\dfrac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{-3m+2}{4}=8\Leftrightarrow -3m+2=32\Leftrightarrow m=-10$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\dfrac{x-m^2-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

b) Hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0,2)$

Lời giải

a) Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-m)^2}>0,\forall m$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$	↗	1
			$-\infty$		

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m<0 \\ f(4)=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m<0 \\ \dfrac{2-m^2}{4-m}=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<0 \\ m^2+m-6=0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-3$$

b) $y=\dfrac{mx-m^2-1}{x+2m}$

Ta có $y'=\dfrac{3m^2+1}{(x+2m)^2}>0,\forall x\neq -2m$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[1;3]$ khi $\begin{cases} -2m\notin[1;3] \\ y(3)=\dfrac{-m^2+3m-1}{2m+3}=\dfrac{1}{5}\ (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $\dfrac{-m^2+3m-1}{2m+3}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow -5m^2+15m-5=2m+3\Leftrightarrow -5m^2+13m-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1\ (tm) \\ m=\dfrac{8}{5}\ (tm) \end{array}\right.$

c) $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$

Điều kiện xác định $x\neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m<0 \\ -m>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. (*)$

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{array}\right.$

Vì $x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0,2)$.

Ta thấy: $-m+1 > -m-1, \forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0,2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $0 < m < 1$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (tham số m).

a) Tìm tham số m để hàm số liên tục trên $[0;2]$.

b) Tìm tham số m để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$

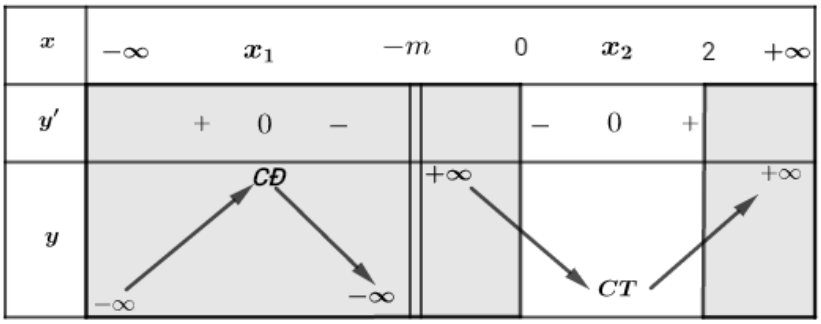
Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số liên tục trên $[0;2] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m<0 \\ -m>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-2 \end{array}\right. \Rightarrow m \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$

b) Ta có $y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên



Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ là $m \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$, ta được $0 < m < 1$.

CHỦ ĐỀ 2
ỨNG DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN

DẠNG 1
BÀI TOÁN ĐÃ CHO HÀM

Phương pháp chung: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết, dựa vào yêu cầu bài toán, ta đưa ra kết luận.

- **Bài toán chuyển động**

  Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc

  Khi đó $v(t)=s'(t)$; $a(t)=v'(t)=s''(t)$

- **Chú ý:**
  - Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương:

    Với $a\ge 0, b\ge 0$, ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
  - Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương:

    Với $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$, ta có:: $\dfrac{a+b+c}{3}\ge \sqrt[3]{abc}$.

    Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:

$s(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\in[0;9]$

Ta có: $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$ với $t\in[0;9]$

$\Rightarrow v'(t)=-2t+12$

Cho $v'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

Bảng biến thiên

t	0		6		9
v'		+	0	−	
v		↗	36	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=6$.

Vậy giá trị lớn nhất là $v(6)=36\text{m/s}$.

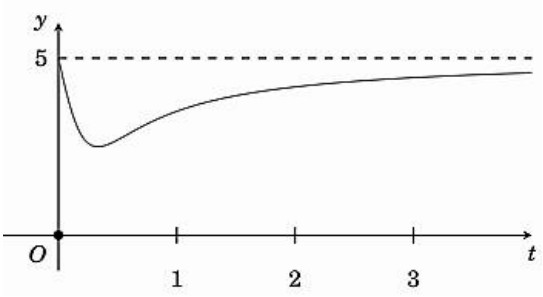
Cách 2:

$s(t)=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với $t\in[0;9]$

Ta có: $v(t)=s'(t)=-t^2+12t=-\left(t^2-12t\right)=-\left(t^2-2.6.t+36\right)+36=-(t-6)^2+36\le 36$

Vậy $\underset{[0;9]}{Max}\,v(t)=36$ khi $t=6$

Bài 2. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ $(t\ge 0)$ khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên dưới.



Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Lời giải

Xét hàm số $y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}$ trên $[0;+\infty)$ có $y'(t)=\frac{135t^2-15}{\left(9t^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

Mặt khác: $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\frac{15t}{9t^2+1}\right]=5$ và $\lim\limits_{t\to 0}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\frac{15t}{9t^2+1}\right]=5$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y'(t)$		−	0	+	
$y(t)$	5	↘	0	↗	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[0;+\infty)}y(t)=0$ và $\max\limits_{[0;+\infty)}y(t)=5$

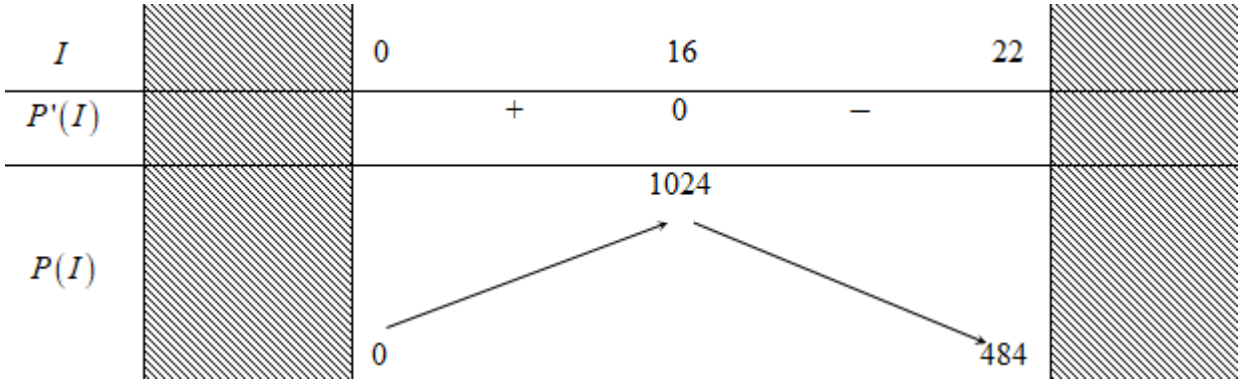
Bài 3. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được xác định bởi công thức $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện và $0\le I\le 22$. Công suất P lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

- Xét hàm số $P(I)=12I^2-\frac{1}{2}I^3$ với $0\le I\le 22$.
- $P'(I)=24I-\frac{3}{2}I^2$

$$P'(I)=0\Leftrightarrow 24I-\frac{3}{2}I^2=0\Leftrightarrow (48-3I)I=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I=0\\ I=16\end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có: Công suất P lớn nhất bằng $P(16)=1024(\text{w})$.

Bài 4. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t giây, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t)=1000+30t^2-t^3\,(0\le t\le 30)$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $N(t)=1000+30t^2-t^3\,(0\le t\le 30)$.

Ta có: $N'(t)=60t-3t^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=20\end{array}\right.$

t	0		20		30
N'		+	0	–	
N		↗	5000	↘	

Với $t=20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

DẠNG 2
TRUY TÌM HÀM SỐ CỦA BÀI TOÁN

Phương pháp chung:

- **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.
- **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.
- **Bước 3:** Ta tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số như ta đã biết và có thể phối hợp nhiều phương pháp khác.

Bài 1. Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản suất được x kg thịt, $(1 \le x \le 20)$. Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?

Lời giải

Số tiền thu về khi bán x kg thịt là: $750x$.

Lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt là: $L(x) = 750x - \left(x^3 - 9x^2 + 345x + 450\right) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$ với $x \in [1;20]$

$$L'(x) = -3x^2 + 18x + 405\,;\ L'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \in [1;20] \\ x = -9 \notin [1;20] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		15		20
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	-37	↗	4275	↘	3250

Vậy hộ gia đình sản xuất thịt khô này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 4275 nghìn đồng khi sản xuất 15 kg thịt trâu khô trong một ngày.

Bài 2. Một cửa hàng bán Xoài Đồng Tháp với giá bán mỗi kg là 50000 đồng, với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số Xoài bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30000 đồng.



Lời giải

Gọi x (đồng) là giá bán Xoài Đồng Tháp mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất ($30000 < x < 50000$).

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50000 - x)$ đồng.

Số lượng Xoài bán ra đã tăng thêm là $\dfrac{50(50000 - x)}{4000} = 625 - 0,0125.x$ (kg)

Tổng số Xoài bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$ (kg)

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125.x)x$ (đồng)

Số tiền vốn ban đầu để mua Xoài là $(650 - 0,0125.x)30000$ (đồng)

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

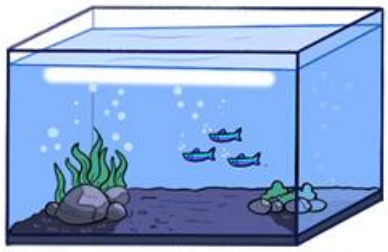
$T = (650 - 0,0125.x)x - (650 - 0,0125.x)30000 = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000$.

Ta có: $T = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \le 1512500$.

Suy ra $\max T = 1512500$ khi $x = 41000$ đồng.

Vậy giá bán mỗi cân Xoài Đồng Tháp là 41000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 3. Thầy Hùng dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$ với $x > 0$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h = \dfrac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

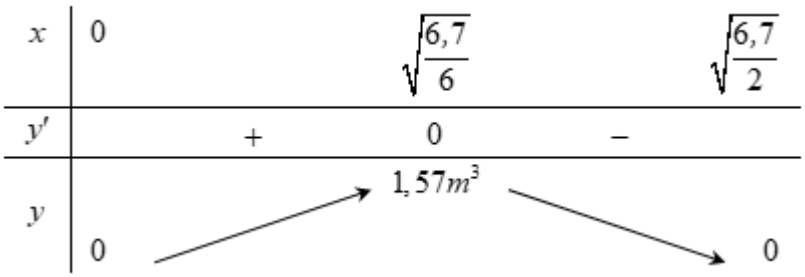
ta có $h > 0$ nên $x < \sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là: $V(x) = \dfrac{6,7x - 2x^3}{3}$

$V'(x)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}$

$V'(x)=0\Leftrightarrow 6,7-6x^2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên



Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Bài 4. Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2026. Thầy Nam đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có thể tích chiếc hộp: $V=x^2h=32$ (đvtt), với $x,h>0$. Suy ra $h=\dfrac{32}{x^2}$.

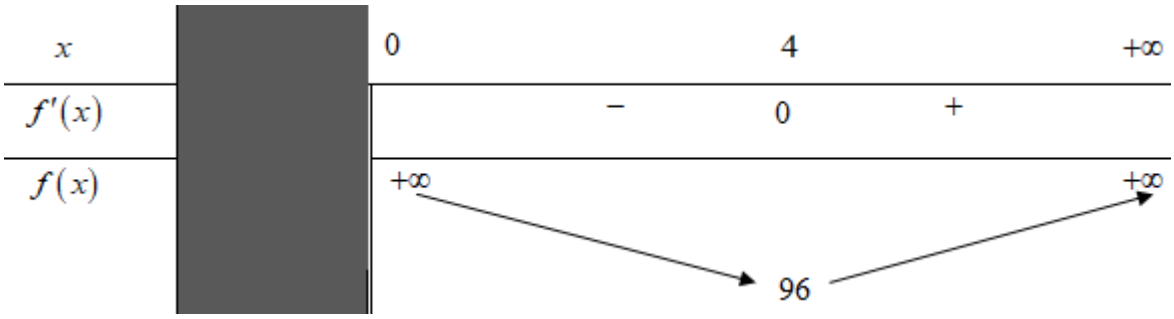
Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S=2x^2+8xh=2x^2+8x.\dfrac{32}{x^2}=2x^2+\dfrac{256}{x}$.

Cách 1.

Xét hàm số $f(x)=2x^2+\dfrac{256}{x}$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=4x-\dfrac{256}{x^2}=\dfrac{4x^3-256}{x^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-256\Leftrightarrow x=4$; $f(4)=96$.

Bảng biến thiên



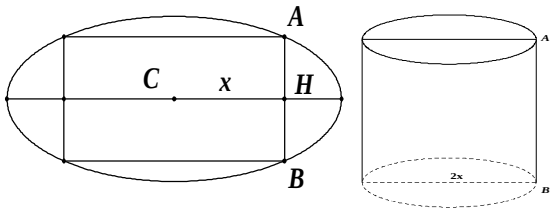
Dựa vào Bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x=4$, khi đó $h=2$.

Cách 2

Ta có $2x^2+\frac{256}{x}=2x^2+\frac{128}{x}+\frac{128}{x}\ge 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{128}{x}.\frac{128}{x}}=96$ (BĐT Cauchy).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2=\frac{128}{x}$ hay $x=4$, khi đó $h=2$.

Bài 5. Từ một tấm tôn có hình dạng elip với độ dài trục lớn bằng 6 độ dài trục bé bằng 4. Người thợ cần cắt một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp, sau đó gò tấm tôn hình chữ nhật này thành một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó?



Lời giải

Ta có phương trình đường $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Gọi bán kính đáy hình trụ là r, đường cao là h

Chu vi một đáy của hình trụ là: $2\pi r=2x\Leftrightarrow r=\frac{x}{\pi}$

$AH=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\Rightarrow h=2AH=\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$

$V_{tru}=\pi.r^2.h=\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)^2.\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}=\frac{4}{3\pi}x^2\sqrt{9-x^2}$

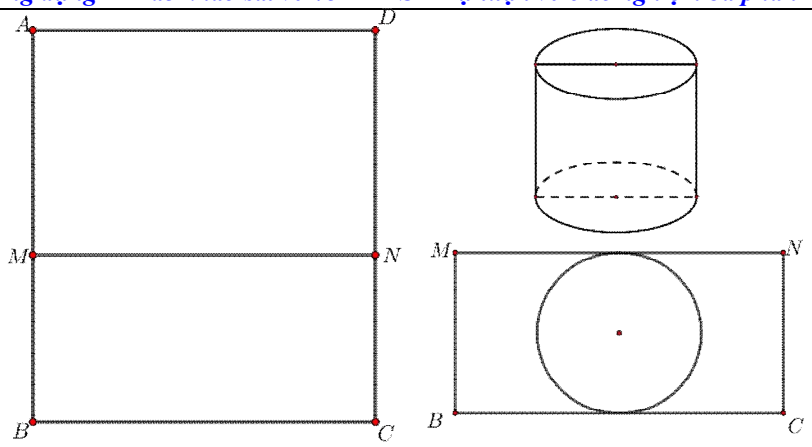
Đặt $f(x)=\frac{4}{3\pi}x^2\sqrt{9-x^2}\ \ (0<x<3)$

$f'(x)=\frac{4}{3\pi}\left[\frac{18x-3x^3}{\sqrt{9-x^2}}\right]\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(L)\\x=\sqrt{6}\,(N)\\x=-\sqrt{6}\,(L)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên:

Suy ra $V_{\max}=\frac{8\sqrt{3}}{\pi}\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$

Bài 6. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1m^2 và cạnh $BC=x(\text{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi) Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



Lời giải

Ta có $AB.BC=1\Rightarrow AB=\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{x}(\text{m})$.

Gọi $r(\text{m})$ là bán kính đáy hình trụ inox

gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC=x(\text{m})$. Do đó $2\pi r=x\Leftrightarrow r=\dfrac{x}{2\pi}(\text{m})$.

Như vậy $BM=2r=\dfrac{x}{\pi}\Rightarrow AM=AB-BM=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}(\text{m})$.

Thể tích khối trụ inox gò được là $V=\pi r^2h=\pi.\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2.\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\pi}\right)=\dfrac{1}{4\pi^2}x\left(\pi-x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\pi-x^2\right)$ với $x>0$.

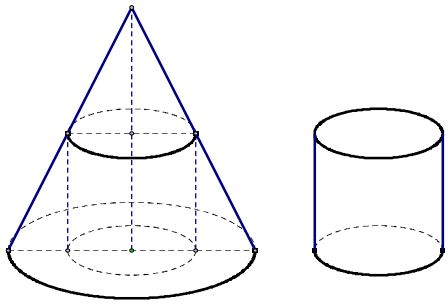
$f'(x)=\pi-3x^2;\ f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$;

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

nên $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}};+\infty\right)$.

Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}\Rightarrow V_{\max}\Leftrightarrow f(x)_{\max}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\approx1,02(\text{m})$.

Bài 7. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $r=2\text{m}$, chiều cao $h=6\text{m}$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V.



Lời giải

Gọi r_t, h_t lần lượt là bán kính và chiều cao của khối trụ.

Ta có: $\frac{r_t}{2}=\frac{6-h_t}{6} \Rightarrow h_t=6=3r_t$.

Ta lại có: $V=\pi r_t^2.h_t=\pi\left(6r_t^2-3r_t^3\right)$.

Xét hàm số $f\left(r_t\right)=6r_t^2-3r_t^3$, với $r_t\in(0;2)$

có $f'\left(r_t\right)=12r_t-9r_t^2$; $f'\left(r_t\right)=0\Leftrightarrow r_t=\frac{4}{3}$ (vì $r_t>0$).

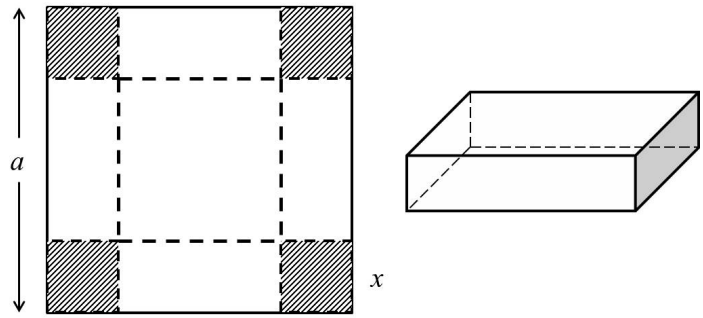
Bảng biến thiên

r_t	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(r_t)$	|	$+$	0	$-$	
$f(r_t)$	0	↗	$\frac{32}{9}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f\left(r_t\right)_{\max}=\frac{32}{9}$ đạt tại $r_t=\frac{4}{3}$.

Vậy $V=\frac{32}{9}\pi$.

Bài 8. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh *a*. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?

Lời giải

Gọi *x* là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là:

$V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$.

$\Rightarrow V'(x)=(a-2x)^2+x.2(a-2x).(-2)=(a-2x)(a-6x)$;

$V'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{a}{6}\ \left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.

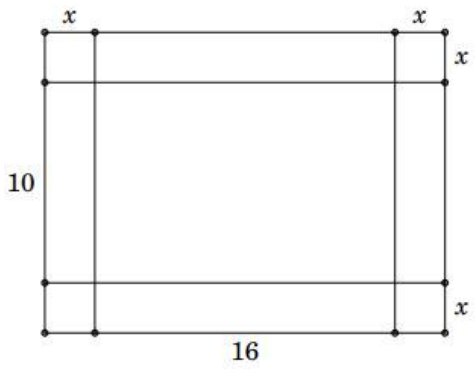
Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{a}{6}$		$\dfrac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\dfrac{2a^3}{27}$	↘	0

Vậy trong khoảng $\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x=\dfrac{a}{6}$ tại đó $V(x)=\dfrac{2a^3}{27}$.

Bài 9. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm x 16 cm . Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng bao nhiêu mét?

Lời giải



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x, $(0<2x<10, 0<x<5)$.

Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10-2x$ và chiều dài bằng $16-2x$

Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V=x(10-2x)(16-2x)=4x^3-52x^2+160x$

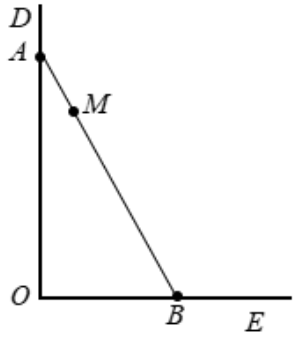
Xét hàm số $f(x)=4x^3-52x^2+160x$ trên $(0;5)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=12x^2-104x+160=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{20}{3} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;5)$ như sau:

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0;5)$ tại $x=2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2m.

Bài 10. Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?

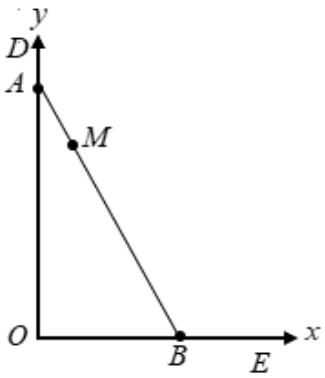


Lời giải

Đề hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A,B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất.

Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A,B và tìm giá trị nhỏ nhất.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy. Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8};1\right)$.



Gọi $B(m;0), A(0;n)$ $(m,n>0)$. Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8};1\right)$ nên $\frac{1}{8m}+\frac{1}{n}=1\Rightarrow\frac{1}{n}=1-\frac{1}{8m}=\frac{8m-1}{8m}\Rightarrow n=\frac{8m}{8m-1}$.

Có $AB^2=m^2+n^2=m^2+\left(\frac{8m}{8m-1}\right)=f(m)$.

Xét hàm số $f(m)$, ta có : $f'(m)=2m+2.\frac{8m}{8m-1}.\frac{-8}{(8m-1)^2}=2m.\left(1-\frac{64}{(8m-1)^3}\right)$

$$f'(m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0(loai)\\1-\frac{64}{(8m-1)^2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow(8m-1)^3=64\Leftrightarrow m=\frac{5}{8}$$

$$f(m) \geq f\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8.\frac{5}{8}}{8.\frac{5}{8}-1}\right)^2 = \frac{25}{64} + \frac{25}{16} = \frac{125}{64} \Rightarrow AB \geq \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

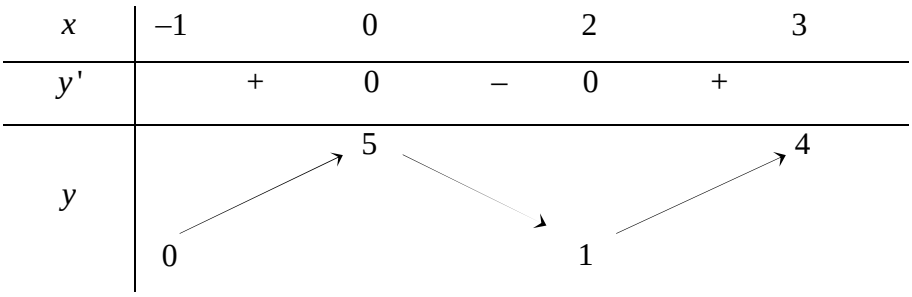
Vậy quãng đường ngắn nhất là $\frac{5\sqrt{5}}{8}(\text{km})$

Giá để làm 1 km đường là 1500 triệu đồng $=1,5$ tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8}.1,5 \approx 2,0963$ (tỷ đồng).

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây ***đúng***?



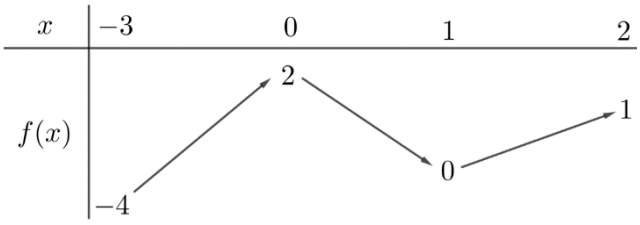
A. $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)$. **B.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)$. **C.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)$. **D.** $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(0)=5$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M.m$.



A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

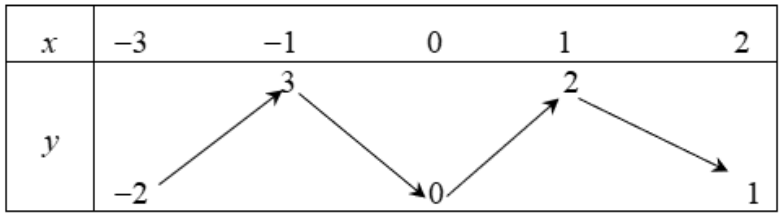
Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M=2$ và $m=-4$.

Từ đó suy ra $M.m=2.(-4)=-8$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$.

Tính $M+m$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $M=3, m=-2 \Rightarrow M+m=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	10	↘	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x=3$ nên $x_0.f(x_0)=30$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty;-1)$ bằng

A. -2 **B.** 5 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(-\infty;-1)$ là 5 tại $x=-2$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(-1;+\infty)$ tại

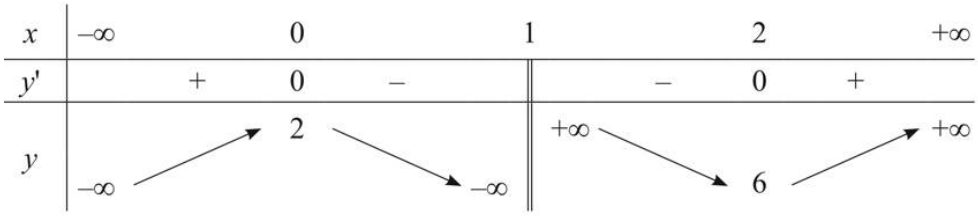
A. $x=-4$ **B.** $x=-11$ **C.** $x=1$ **D.** $x=2$

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(-1;+\infty)$ là 1 tại $x=2$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;1)$ bằng 2 tại $x=0$.

B. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1;+\infty)$ bằng 6 tại $x=2$.

C. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;1)$ bằng 2 tại $x=0$.

D. Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(2;+\infty)$ bằng 6 tại $x=2$.

Lời giải

Chọn D.

Trên khoảng $(2;+\infty)$ không xác định được giá trị nhỏ nhất

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ là

A. $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-2)$ **B.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(3)$ **C.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(1)$ **D.** $\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(0)$

Lời giải

Chọn B.

Từ bảng xét dấu, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f(-2)$	↗		↗	$f(3)$	↘	

Do đó: $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = f(-2)$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		2026		2027		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[2026;+\infty)$ là

A. $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x) = f(2026)$ **B.** $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x) = f(2025)$

C. $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x) = f(2027)$ **D.** Không xác định

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng xét dấu, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		2026		2027		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(2026)$	↘	$f(2027)$	↗	$f(2025)$

Do đó: $\min\limits_{[2026;+\infty)} f(x) = f(2027)$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **C.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

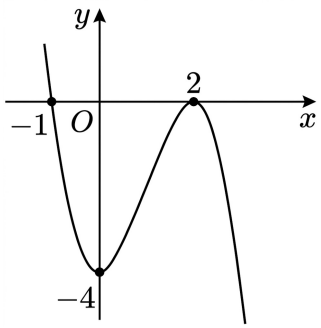
Lời giải

Chọn B.

Từ bảng xét dấu, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘	$f(-1)$	↘	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-4)$

B. $\min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(2)$

C. $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-1)$

D. $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(2)$

Lời giải

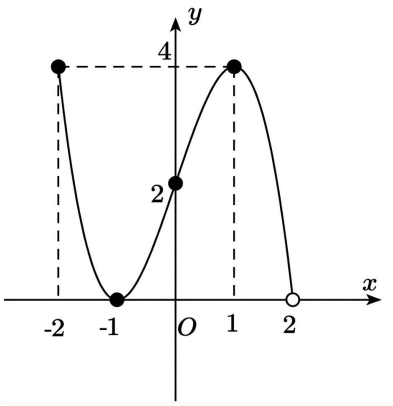
Chọn C.

Từ đồ thị $f'(x)$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↘	

Do đó: $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-1)$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $M+m$ là

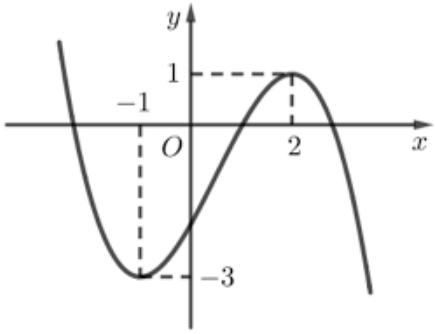
A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 2

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=0 \\ M=\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=f(1)=4 \end{cases} \Rightarrow M+m=4$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $M+m$ là

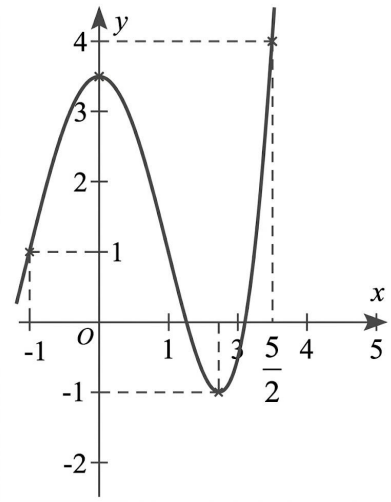
A. −4 **B.** 4 **C.** 2 **D.** −2

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=-3 \\ M=\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=1 \end{cases} \Rightarrow M+m=-2$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ là:

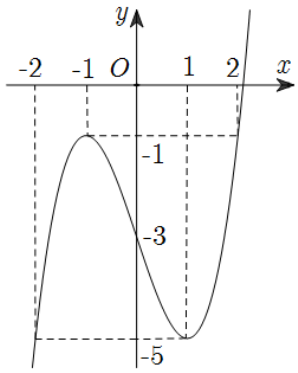
A. $M=4,m=1$ **B.** $M=4,m=-1$ **C.** $M=\dfrac{7}{2},m=-1$ **D.** $M=\dfrac{7}{2},m=1$

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị $M=4,\ m=-1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. $m=-5;M=-1$. **B.** $m=-2;M=2$. **C.** $m=-1;M=0$. **D.** $m=-5;M=0$.

Lời giải

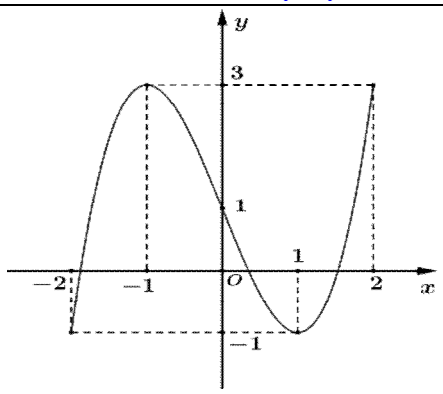
Chọn A.

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$M=\max\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$ khi $x=-1$ hoặc $x=2$.

$m=\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-5$ khi $x=-2$ hoặc $x=1$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

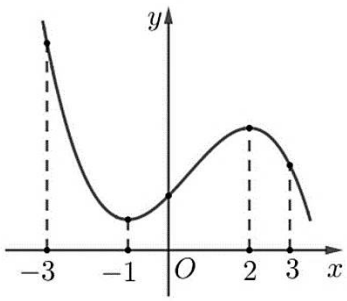
Lời giải

Chọn B.

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có $f(x)\geq -1$ và $f(x)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=-1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;3]$ bằng

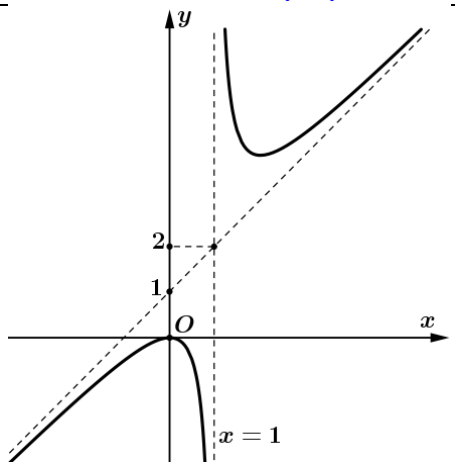
A. $f(2)$. **B.** $f(-1)$. **C.** $f(-3)$. **D.** $f(3)$

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng $f(-3)$

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;1)$ bằng

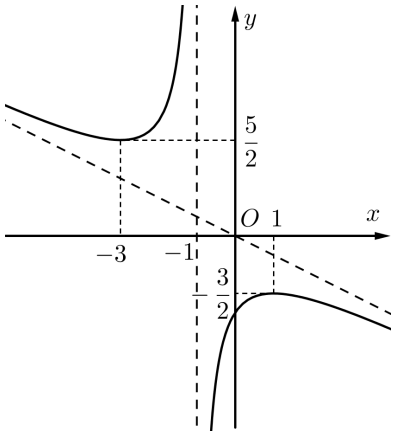
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta có: $\max\limits_{(-\infty;1)} f(x) = f(0) = 0$

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty;-1)$ bằng

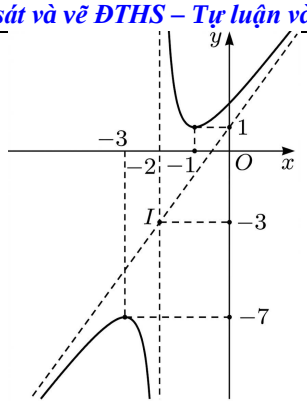
A. -3 **B.** $-\dfrac{3}{2}$ **C.** -1 **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-3) = \dfrac{5}{2}$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Trên khoảng $(-\infty;-2)$ hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại:

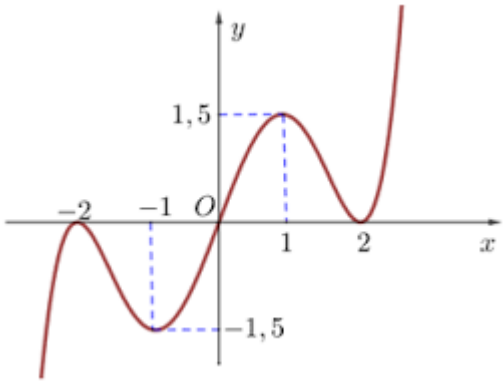
A. $x=-3$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=-7$ **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta có: $\max\limits_{(-\infty;-2)} f(x)=f(-3)=-7$

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+2024$ cho trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị $M-m$ bằng:

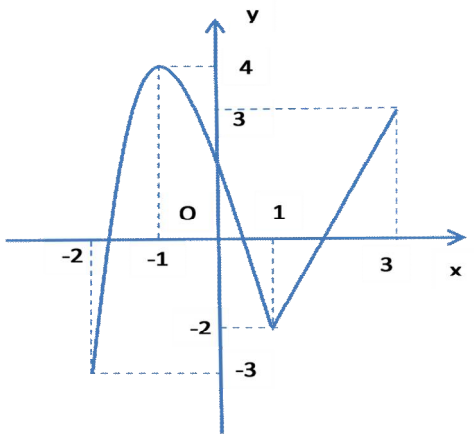
A. $M-m=0$ **B.** $M-m=-2024$ **C.** $M-m=4048$ **D.** $M-m=3$

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases}\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=-1,5\\ \max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(1)=1,5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\min\limits_{[-2;2]} g(x)=f(-1)=-1,5+2024\\ M=\max\limits_{[-2;2]} g(x)=f(1)=1,5+2024\end{cases}\Rightarrow M-m=3$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [-2;3] có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Giá trị của $2m-3M$ bằng:

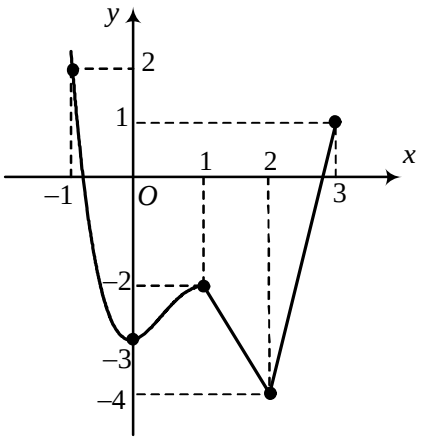
A. -13. **B.** -18. **C.** -16. **D.** -15.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-2)=-3 \\ M=\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-1)=4 \end{cases} \Rightarrow 2m-3M=-18$

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M+m$ là

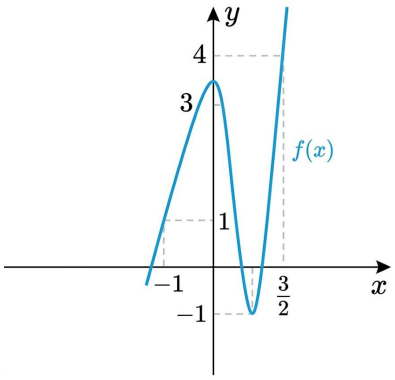
A. 2. **B.** -6. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-2)=-4 \\ M=\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=-2$

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng

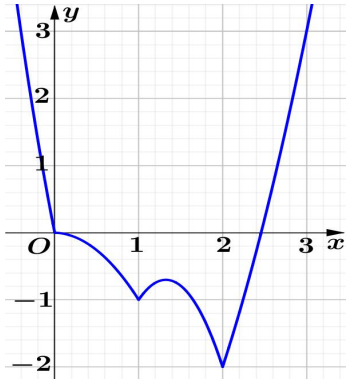
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x)=-1 \\ M=\max\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=4 \end{cases} \Rightarrow M+m=3$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng?



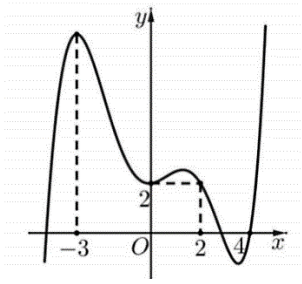
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)=-2 \\ M=\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=3 \end{cases} \Rightarrow M+m=1$

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:

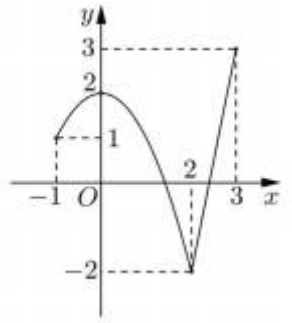
A. $f(2)$. **B.** $f(-3)$. **C.** $f(4)$. **D.** $f(0)$

Lời giải

Chọn B.

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng $f(-3)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 0

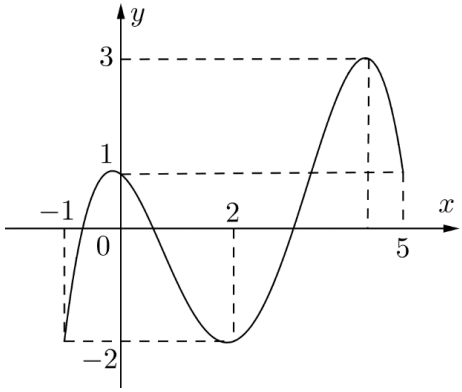
Lời giải

Chọn C.

Dựa và đồ thị suy ra $M=f(3)=3;\ m=f(2)=-2$

Vậy $M-m=5$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới.



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

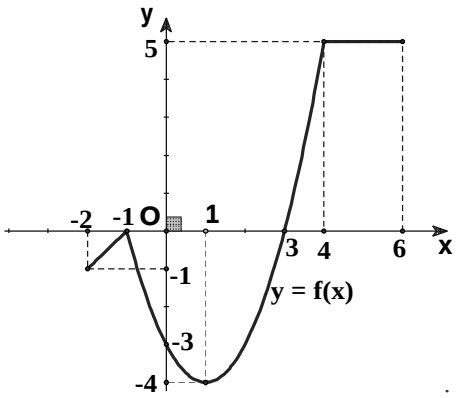
A. -1 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy: $\begin{cases} M=\max\limits_{[-1;5]} f(x)=3 \\ n=\min\limits_{[-1;5]} f(x)=-2 \end{cases} \Rightarrow M+n=1.$

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 9. **B.** -8. **C.** -9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị suy ra $-4\le f(x)\le 5 \ \ \forall x\in[-2;6];\ f(1)=-4; f(4)=5$

$\Rightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=9.$

Câu 30. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có:

$f'(x)=3x^2-6x-9.$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;2] \\ x=3\notin[-2;2] \end{array}\right.$.

$f(-2)=8;\ f(-1)=15;\ f(2)=-12.$

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=15.$

Câu 31. Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $x\in[1;5]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}}=4$ suy ra hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi $x=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=2$.

Cách 2: Ta có $y'=1-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$ (vì $x\in[1;5]$).

Khi đó $y(1)=5$, $y(2)=4$ và $y(5)=\dfrac{29}{5}$.

Do đó $\min\limits_{[1;5]} y=4$ tại $x=2$.

Cách 3: Dùng Casio

Câu 32. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-3$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;3]\\x=-1\notin[0;3]\end{array}\right.$

Lại có $y(0)=4; y(1)=2; y(3)=22$.

Vậy $\min_{[0;3]} y=y(1)=2$.

Câu 33. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+5$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\min\limits_{[2;\,4]} y=0.$ **B.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=3.$ **C.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=5.$ **D.** $\min\limits_{[2;\,4]} y=7.$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

Ta có $y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;2)\\x=-1\notin(0;2)\end{array}\right.$

$y(1)=3; y(0)=5; y(2)=7$. Do đó $\min\limits_{[0;2]} y=y(1)=3$

Câu 34. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là:

A. $\min\limits_{[0;3]} y=-3$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y=-1$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y=1$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;3]$

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với $\forall x\in[0;3]$. $y(0)=-1; y(3)=\dfrac{1}{2}$. Do đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(0)=-1$

Câu 35. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là:

A. $\dfrac{17}{3}; 3$ **B.** $\dfrac{17}{3}; -5$. **C.** $3; -5$. **D.** $-3; 5$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0;2]$

Ta có $y'=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \notin(0;2) \\ x=-2\notin(0;2)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(0)=3;\ y(2)=\dfrac{17}{3}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} y=y(2)=\dfrac{17}{3}; \min\limits_{x\in[0;2]} y=y(0)=3$

Câu 36. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=x+\dfrac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=1-\dfrac{9}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{9}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow (x-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4\notin[-4;-1] \\ x=-2\in[-4;-1]\end{array}\right.$.

Ta thấy $y(-4)=-\dfrac{29}{5}$; $y(-2)=-5$; $y(-1)=-\dfrac{11}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-4;-1]} y=y(-2)=-5$.

Câu 37. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$. Tính $M-m$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y' = -\frac{4}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3] \end{array}\right.$

Ta có: $y(1) = 6,\ y(2) = 5,\ y(3) = \frac{16}{3} \Rightarrow M = 6,\ m = 5 \Rightarrow M - m = 1.$

Câu 38. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;\ 4]$ là

A. 7 . **B.** 8 . **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $\frac{23}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1}\right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{array}\right.$.

Lại có $f(2) = 7 > f(4) = \frac{19}{3} > f(3) = 6$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;\ 4]$ là 7.

Câu 39. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 2. **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** -1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1;1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

$y' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$; với $-1 < x < 1$. $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y(\pm 1) = 0; y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Do đó $M = \max\limits_{[-1;1]} y = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}; m = \min\limits_{[-1;1]} y = y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$

Câu 40. Hàm số $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. $\sqrt{2};\ 1$. **B.** 1; 0 . **C.** 2; $\sqrt{2}$. **D.** 2; 1.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $y(-1)=\sqrt{2};\ y(0)=2;\ y(1)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 41. Hàm số $y=\cos 2x-3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;\pi]$ bằng:

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

TXĐ: $D=R$. Ta có: $y'=-2\sin 2x;\ y'=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2};(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x\in\left\{0;\dfrac{\pi}{2};\pi\right\}$. Do đó: $y(0)=-2;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\ \Rightarrow\min y=-4$

Câu 42. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\cos x-\cos 5x$ với $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4$. **B.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{2}$. **C.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=3\sqrt{3}$. **D.** $\min\limits_{\left[\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $y=5\cos x-\cos 5x$ nên $y'=-5\sin x+5\sin 5x$

$$y'=0\Leftrightarrow\sin 5x=\sin x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=x+k2\pi\\5x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.$$

Trên $\left[\dfrac{-\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right\}$

$y(0)=4;\ y\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3};\ y\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} y=4=y(0)$

Câu 43. Hàm số $y=\cos^2 x-2\cos x-1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;\pi]$ lần lượt bằng $y_1;y_2$. Khi đó tích $y_1.y_2$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin x\cos x+2\sin x=-2\sin x(\cos x-1)$

$y'=0\Leftrightarrow -2\sin x\left(\cos x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\left(k\in Z\right)$

Vì $x\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow x=0$ hoặc $x=\pi$.

Khi đó: $y\left(0\right)=-2;\ y\left(\pi\right)=2\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}y_1=-2\\ y_2=2\end{array}\right.\Rightarrow y_1.y_2=-4$.

Câu 44. Hàm số $y=\cos 2x-4\sin x+4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $\dfrac{\pi}{2};\ 0$. **B.** $5;\ 1$. **C.** $5;\ -1$. **D.** $9;\ 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=-2\sin 2x-4\cos x=-4\cos x\left(\sin x+1\right)$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Vì $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$. Khi đó $y\left(0\right)=5;\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

Câu 45. Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là *M*, giá trị nhỏ nhất là *m*. Khi đó *M* – *m* bằng

A. $2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B.

$f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\left(x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right]\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} f(x)=2,\ \min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} f(x)=1$.

Câu 46. Hàm số $y=\sin x+\cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 2$. **B.** $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$. **C.** $0;\ 1$. **D.** $-1;\ 1$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow \min y=-\sqrt{2};\max y=\sqrt{2}$

Câu 47. Hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. $-2;\ 1$. **B.** $0;\ 2$. **C.** $\dfrac{1}{2};\ 1$. **D.** $0;\ 1$.

Lời giải

Chọn C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\le 1\Rightarrow \min y=\dfrac{1}{2},\ \max y=1$.

Câu 48. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $\dfrac{\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{\ln 3}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{e^2}$. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2};\ y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow x=e\in[2;3]$

Có $f(2)=\dfrac{\ln 2}{2}\approx 0,3466$; $f(e)=\dfrac{1}{e}\approx 0,3679$; $f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}\approx 0,366$,

Suy ra $\underset{x\in[2;3]}{Min}\, f(x)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{\ln 2}{2}$.

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x)=2(x^2-2)e^{2x}+2xe^{2x}=2(x^2+x-2)e^{2x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[-1;2]\\x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$.

Và $f(-1)=-e^{-2}$; $f(2)=2e^4$; $f(1)=-e^2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-e^2$ tại $x=1$.

Câu 50. Hàm số $y=(x-1)^2+(x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3. **B.** −1. **C.** 10. **D.** 8.

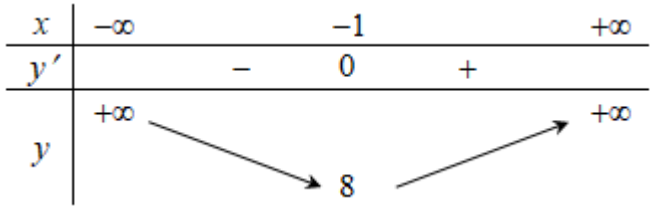
Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y=(x-1)^2+(x+3)^2=2x^2+4x+10$.

Ta có: $y'=4x+4$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:



Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 51. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ trên khoảng là:

A. $\min\limits_{(1;+\infty)} y=-1$. **B.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=3$. **C.** $\min\limits_{(1;+\infty)} y=5$. **D.** $\min\limits_{(2;+\infty)} y=\dfrac{-7}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định với $\forall x\in(1;+\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$

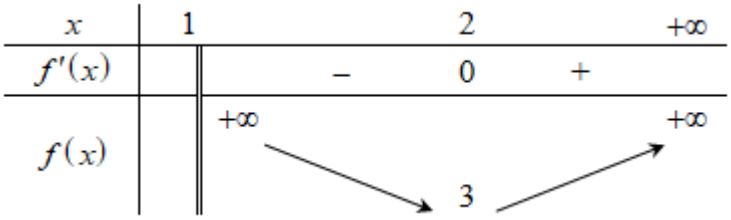
Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x)=f(2)=3$

Câu 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=5$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3+\sqrt{5}$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; $y'=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y=y(1)=5$

Câu 53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}$ là:

A. không có giá trị nhỏ nhất. **B.** có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. có giá trị nhỏ nhất bằng –1. **D.** có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Lời giải

Chọn D.

TXĐ: $D=[-1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0,\ \forall x\in(-1;+\infty)$

Bảng biến thiên:

x	-1		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x=-1$

Câu 54. Cho hàm số $y=x-\sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x=1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D=[1;+\infty)$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$

Bảng biến thiên:

x	1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	0

Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 55. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

Hàm số y đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=0\\x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min\limits_{(0;+\infty)}f(x)=f\left(\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\max\limits_{(0;+\infty)}y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Câu 56. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ là:

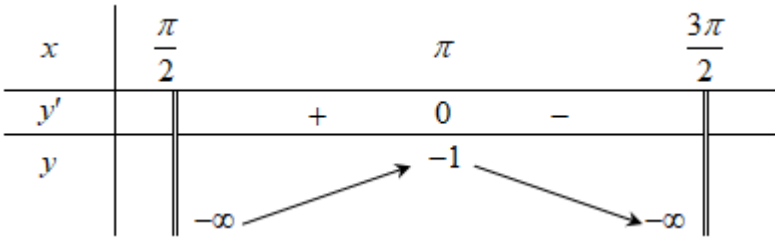
A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D.

$y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x},\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi \left(x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right) \right)$

Bảng biến thiên:



Vậy $\max\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$ và $\min\limits_{\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)} y$ không tồn tại.

Câu 57. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\cos 2x$

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\cos 2x \le 1 \Rightarrow \max y = 1$.

Câu 58. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = 2025 - \sin(2025x), \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;0]$ là:

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $2025 - \sin(2025x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[-1;0]$

Vậy $\max\limits_{[-1;0]} y = f(0)$ và $\min\limits_{[-1;0]} y = f(-1)$.

Câu 59. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = \dfrac{1}{e^{2026x}} - e^{2026x}, \forall x \in \mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[2;3]$ là:

A. $f\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(3)$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{1}{e^{2026x}}-e^{2026x}<0,\forall x\in[2;3]\Rightarrow f'(x)<0,\forall x\in[2;3]\Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[2;3]$

Vậy $\max\limits_{[2;3]}y=f(2)$ và $\min\limits_{[2;3]}y=f(3)$.

Câu 60. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=\ln(x+2025),\forall x\in\mathbb{R}$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;2024]$ là:

A. $f(2024)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2025)$. **D.** $f(1)$.

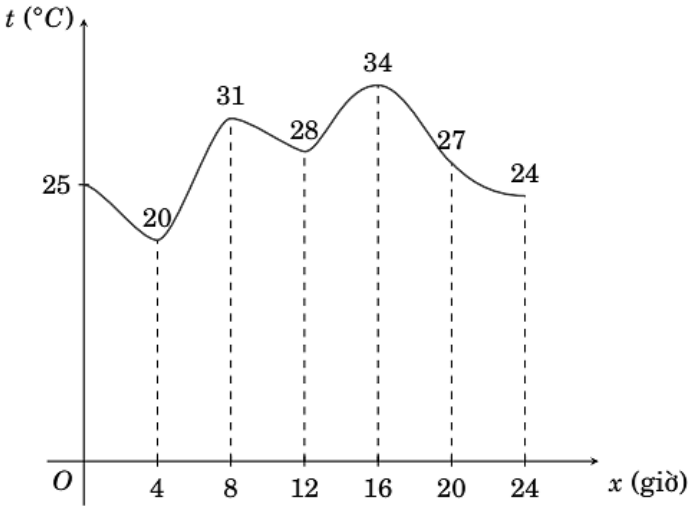
Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\ln(x+2025)>0,\forall x\in[0;2024]\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in[0;2024]\Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;2024]$

Vậy $\max\limits_{[0;2024]}y=f(2024)$ và $\min\limits_{[0;2024]}y=f(0)$.

Câu 61. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Nhiệt độ cao nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

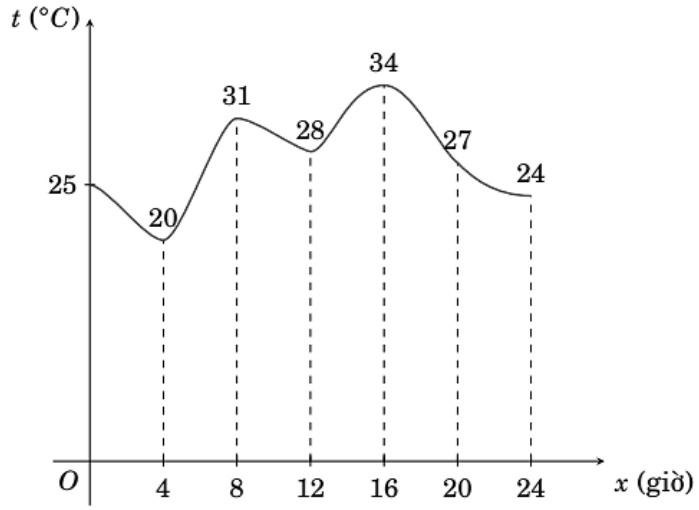
A. $31°C$. **B.** $34°C$. **C.** $27°C$. **D.** $28°C$.

Lời giải

Chọn B.

Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $34°C$

Câu 62. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C?

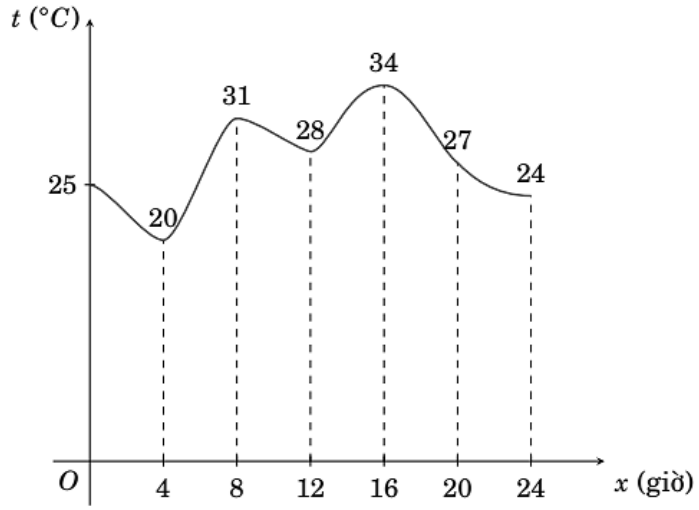
A. $20°C$. **B.** $24°C$. **C.** $25°C$. **D.** $34°C$.

Lời giải

Chọn A.

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20°C$

Câu 63. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

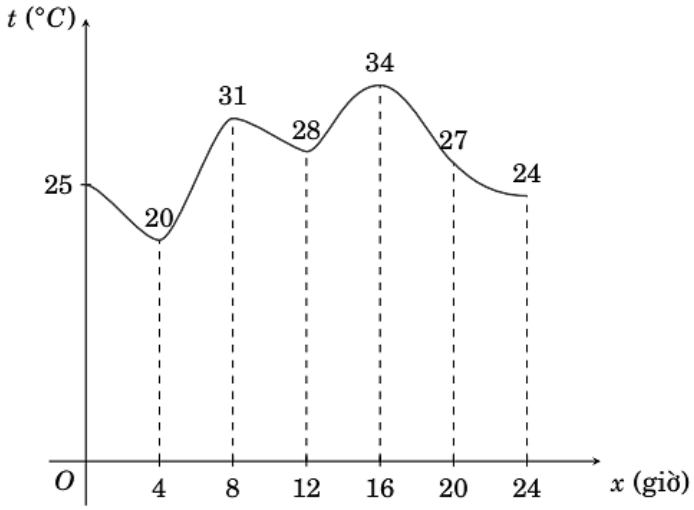
A. 8 giờ. **B.** 16 giờ. **C.** 20 giờ. **D.** 24 giờ.

Lời giải

Chọn A.

Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ

Câu 64. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở thành phố Nha Trang trong một ngày (24 giờ).



Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc mấy giờ?

A. 4 giờ. **B.** 12 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 24 giờ.

Lời giải

Chọn A.

Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Câu 65. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)

Lời giải

Chọn A.

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 12t - 3t^2, t > 0$

$v'(t) = 12 - 6t$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		↗	12	↘	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

Suy ra Max $v(t) = 12$ khi $t = 2$.

Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 66. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

A. $t = 2$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = 3$. **D.** $t = 4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

Ta có $S'(t)=\left(1+3t^2-t^3\right)'=6t-3t^2=-3\left(t^2-2t\right)=3-3(t-1)^2\le 3,\forall t\in\mathbb{R}$

$\max\limits_{\mathbb{R}} S'(t)=3$ khi $t-1=0\Leftrightarrow t=1$.

Câu 67. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) *và* S tính bằng mét (m). Tính thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

A. $t=5s$ **B.** $t=6s$ **C.** $t=3s$ **D.** $t=1s$

Lời giải

Chọn C

Có $v(t)=S'=-6t^2+36t+2$. Đây là hàm số bậc hai có $a<0$ nên nó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại $t=-\dfrac{b}{2a}=3(s)$.

Câu 68. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

A. $88(\text{m/s})$. **B.** $25(\text{m/s})$. **C.** $100(\text{m/s})$. **D.** $11(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$. Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		+	0	−	
v	$v(0)$	↗	25	↘	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\text{m/s})$ tại tại $t=4$.

Câu 69. Hai số có hiệu là 13, hỏi tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng:

A. 5; – 8. **B.** 1; – 12. **C.** $\dfrac{-13}{2};\dfrac{13}{2}$. **D.** 6; – 7 .

Lời giải

Chọn C.

Gọi một trong hai số phải tìm là x, số còn lại: $x + 13$.

Tích hai số $P(x) = x(x+13) = x^2 + 13x$.

$P'(x) = 2x + 13,\ P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-13}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\dfrac{-13}{2}$		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $\dfrac{-169}{4}$ khi hai số là $\dfrac{13}{2}$ và $\dfrac{-13}{2}$.

Câu 70. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

A. 64 cm^2. **B.** 4 cm^2. **C.** 16 cm^2. **D.** 8 cm^2.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b; $0 < a, b < 8$.

Ta có: $2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a + b = 8 \Leftrightarrow b = 8 - a$

Diện tích: $S(a) = a(8-a) = -a^2 + 8a$; $S'(a) = -2a + 8$; $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$

Bảng biến thiên:

a	0		4		8
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Cách 2

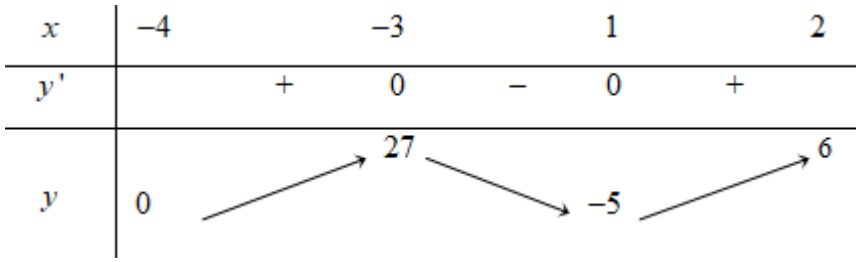
Áp dụng Côsi: $a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \le 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 71. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-3)$ và $(1;2)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và cực đại tại $x=27$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

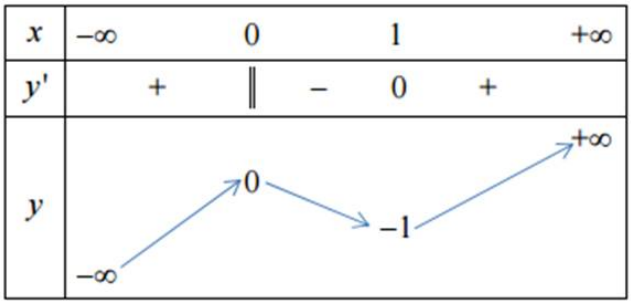
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 27 và giá trị nhỏ nhất bằng -5.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-4;-3)$ và $(1;2)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-1)$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và cực đại tại $x=-3$

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;-1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Từ bảng biến thiên, ta có:

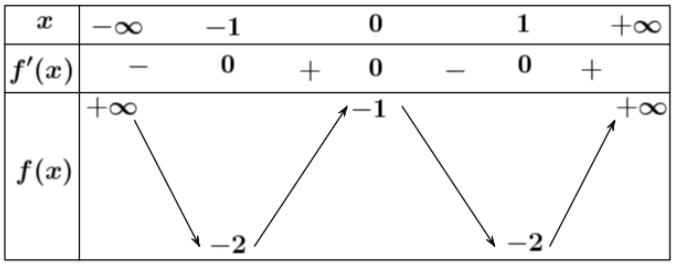
a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

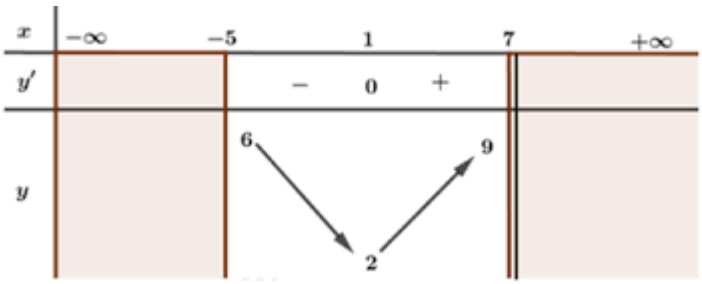
a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(0;1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y=-2$

c) Hàm số không có giá trị lớn nhất

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -3.

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[-5;7)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(2;1)$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 9 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

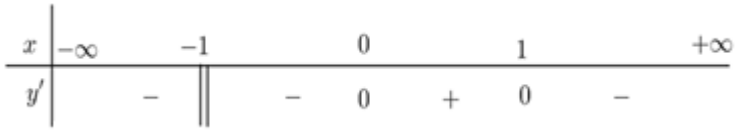
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;7)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5;1)$.

c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1;2)$.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2 và không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $[-5;7)$

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu đạo hàm như sau:



a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất là $f(1)$ và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng xét dấu đạo, ta có:

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

c) Trên nửa khoảng $(-1;1]$, hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất là $f(0)$.

d) Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 76. Hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

Xét trên tập xác định của hàm số.

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên, ta có:

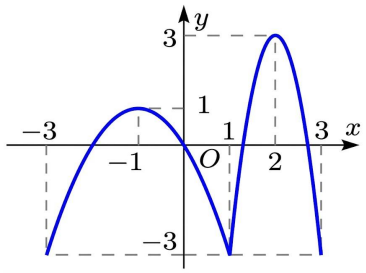
a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 0.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

d) Hàm số có một điểm cực trị tại $x=0$.

Câu 77. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng 3 tại $x=2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng -3 tại $x=-3$ và $x=3$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;3)$.

d) Trên đoạn $[-3;3]$, đồ thị hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Từ đồ thị, ta có:

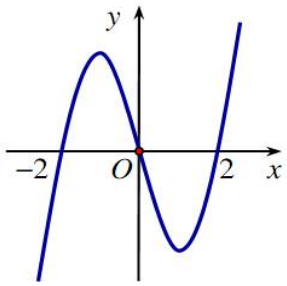
a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=f(2)=3$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ là: $\min\limits_{[-3;3]} f(x)=f(-3)=f(1)=f(3)=-3$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(2;3)$.

d) Trên đoạn $[-3;3]$, đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $(-1;1)$ và $(2;3)$, một điểm cực tiểu là $(-1;3)$

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



a) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $f(0)$ tại $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f(-2)=f(2)$ tại $x=-2$ và $x=2$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta có:

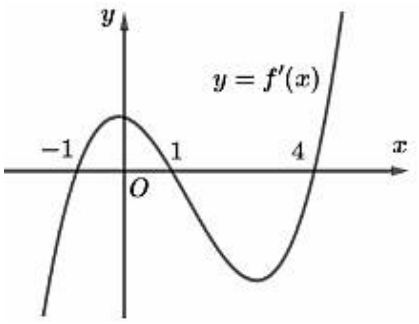
a) Hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng $f(-2)=f(2)$ tại $x=-2$ và $x=2$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực đại tại $x=0$ và hai điểm cực tiểu tại $x=-2$, $x=2$.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

c) $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số là $f(1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$

Khi đó $f'(x)<0\Leftrightarrow(-\infty;-1)\cup(1;4)$ và $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)\cup(4;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			CT		$CĐ$		CT	

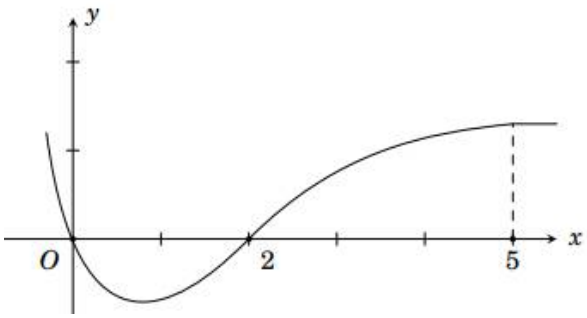
a) Hàm số có ba điểm cực trị

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$

c) $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Trên đoạn $[1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

c) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

d) $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;5]$

x	0		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$	↗	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$

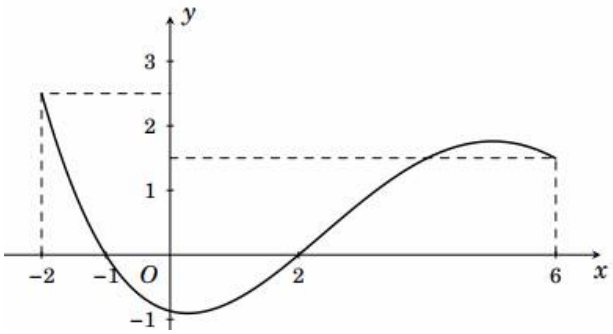
Theo bảng biến thiên thì $f(3)>f(2)$ nên $f(3)-f(2)>0$

Theo giả thiết ta có $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)\Leftrightarrow f(5)=f(0)-\left[f(3)+f(2)\right]>f(0)$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



a) $f(-1)>f(-2)$

b) $f(6)>f(2)$

c) Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(6)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(6)$

Hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;6)$ do $f'(x)>0$ nên $f(-1)>f(-2)$ và $f(6)>f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x)<0$ suy ra $f(-1)>f(2)$

Trên đoạn $[-2;6]$, đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành 2 điểm nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

Trên đoạn $[-2;6]$ chưa đủ dữ kiện xác định giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$

Câu 82. Cho hàm số $y=\sqrt{5-4x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y=\sqrt{5-4x}$ là $x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.

b) $y'=\dfrac{-4}{\sqrt{5-4x}}$

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

d) Trên đoạn $[-1;1]$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là $\max\limits_{[-1;1]} y=3$ và $\min\limits_{[-1;1]} y=1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Điều kiện xác định: $5-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le \dfrac{5}{4}$ hay $x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right]$

Suy ra hàm số xác định với $\forall x\in[-1;1]$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}}<0,\forall x\in[-1;1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó $\max\limits_{[-1;1]}y=y(-1)=3;\min\limits_{[-1;1]}y=y(1)=1$

Câu 83. Cho hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$.

a) Điều kiện xác định của hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$ là $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $y'=\dfrac{x^2-9}{x^2}$

c) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{25}{4}$ tại $x=4$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 6 tại $x=2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Điều kiện xác định của hàm số $y=x+\dfrac{9}{x}$ là $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}$

Hàm số đã cho liên tục trên [2;4]

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-3 & \notin(2;4)\\ x=3 & \in(2;4)\end{array}\right.$

Ta có $y(2)=\dfrac{13}{2};y(3)=6;y(4)=\dfrac{25}{4}$.

Do đó $\min\limits_{x\in[2;4]}y=y(3)=6$; $\max\limits_{[2;4]}y=y(2)=\dfrac{13}{2}$

Câu 84. Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-12x+1$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(-1)=-12$

c) Trên đoạn $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 tại $x=-1$.

d) Trên đoạn $[2;4]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -19 tại $x=2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Hàm số đã cho là hàm đa thức nên luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6x-12 \Rightarrow f'(-1)=0$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in\left[-2;\frac{5}{2}\right] \ (N) \\ x=2\in\left[-2;\frac{5}{2}\right] \ (N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2)=-3; f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{33}{2}; f(-1)=8; f(2)=-19$

$$\Rightarrow \max_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} y=f(-1)=8; \ \min_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} y=f(2)=-19$$

Câu 85. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x-4$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=x^2+2x+3$

c) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x=0$.

d) Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{16}{3}$ tại $x=-4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Hàm số đã cho là hàm đa thức nên luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y'=x^2+4x+3$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-4;0]$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-4;0]\ (N)\\x=-3\in[-4;0]\ (N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-4)=-\frac{16}{3};f(0)=-4;f(-1)=-\frac{16}{3};f(-3)=-4$

$\Rightarrow\max\limits_{[-4;0]}y=f(-3)=f(0)=-4;\min\limits_{[-4;0]}f(x)=f(-4)=f(-1)=-\frac{16}{3}$

Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -4 tại $x=-3;x=0$.

Trên đoạn $[-4;0]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{16}{3}$ tại $x=-4;x=-1$.

Câu 86. Cho hàm số $y=x+\sqrt{2-x^2}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\frac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}},\forall x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$ tại $x=-\sqrt{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

• $y'=1+\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}},\forall x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\2-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow x=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$

• Ta có: $f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2};f(\sqrt{2})=\sqrt{2};f(1)=2$

$\Rightarrow\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}y=f(1)=2;\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]}y=f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

Câu 87. Cho hàm số $y=\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}$.

a) Hàm số đã cho xác định khi $x\in(-2;4)$.

b) $f'(0)=\frac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $2\sqrt{3}$ tại $x=1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{6}$ tại $x=-2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

$y=\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}$

• Tập xác định: $\mathrm{D}=[-2;4]$.

• $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x}.\sqrt{2+x}},\forall x\in(-2;4)$.

$\Rightarrow f'(0)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x}=\sqrt{2+x}\Rightarrow 4-x=2+x\Rightarrow x=1\in[-2;4]$ (N).

• Ta có: $f(-2)=\sqrt{6};f(4)=\sqrt{6};f(1)=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} y=f(1)=2\sqrt{3};\ \min\limits_{[-2;4]} y=f(-2)=f(4)=\sqrt{6}$

Câu 88. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y'=\dfrac{-x^2+2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{1}{3}$ tại $x=0$.

d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

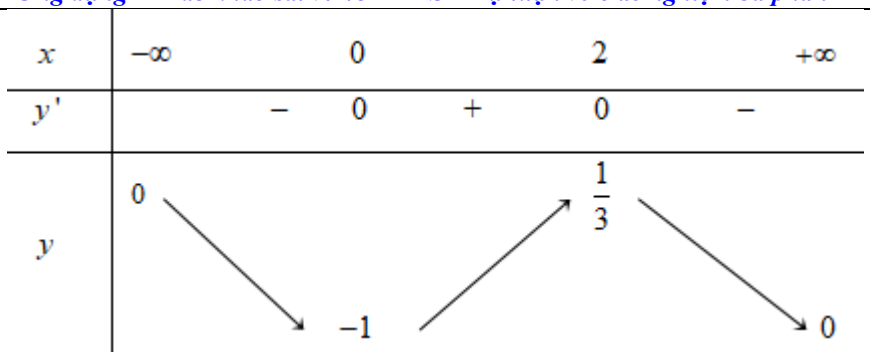
$y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$

• Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ do $x^2-x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

• Ta có: $y'=\dfrac{-x^2+2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow -x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

• Bảng biến thiên



• Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max\limits_{\mathbb{R}} y = f(2) = \dfrac{1}{3}$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f(0) = -1$.

Cách khác: Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 để tìm min, max

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \dfrac{x-1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow y(x^2-x+1) = x-1 \Leftrightarrow yx^2 - (y+1)x + y + 1 = 0 \ (*)$

Để $(*)$ có nghiệm thì: $\begin{cases} y \neq 0 \\ \Delta = (y+1)^2 - 4y(y+1) = -3y^2 - 2y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y = f(2) = \dfrac{1}{3}$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = f(0) = -1$.

Câu 89. Cho hàm số $y = \ln(x-1)(3-x)$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y' = \dfrac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 tại $x = 2$.

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $y = \ln(x-1)(3-x)$

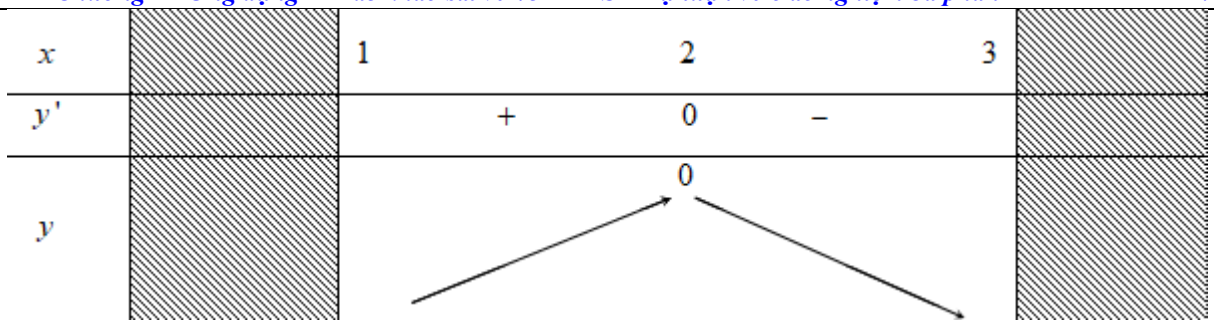
Đề hàm số xác định thì: $(x-1)(3-x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(1;3)$.

$y' = \dfrac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 (N)$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{(1;3)} y = f(2) = 0$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 90. Cho hàm số $y = 2x - e^{2x}$.

a) Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(\ln 2) = 6$

c) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 0 tại $x = 0$.

d) Trên đoạn $[-1;\ln 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2\ln 2 - 4$ tại $x = \ln 2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

$y = 2x - e^{2x}$

Hàm số đã cho luôn xác định trên $\mathbb{R}$.

$y' = 2 - 2e^{2x} \Rightarrow f'(\ln 2) = -6$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-1;\ln 2]$.

$y' = 2 - 2e^{2x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2 - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 (N)$

Ta có: $f(-1) = -2 - \dfrac{1}{e^2}; f(0) = 0; f(\ln 2) = 2\ln 2 - 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;\ln 2]} y = f(0) = 0 \\ \min\limits_{[-1;\ln 2]} y = f(\ln 2) = 2\ln 2 - 4 \end{cases}$$

Câu 91. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm.

b) Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng.

c) Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động.

d) Sau thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, gia tốc của bằng $6(m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

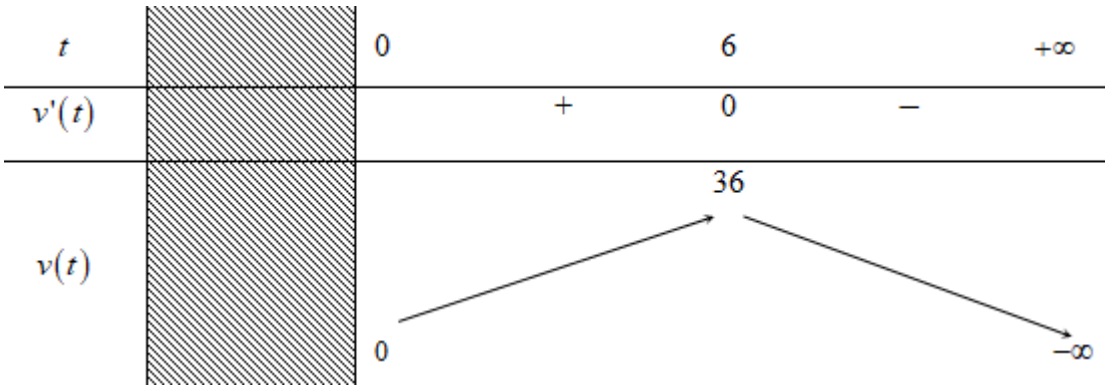
Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$.

Xét hàm $v(t)=-t^2+12t$

- Tập xác định: $D=[0;+\infty)$
- Ta có: $v'(t)=-2t+12$.

$v'(t)=0\Leftrightarrow t=6$.

- Bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật tăng. Suy ra a) sai

+ Sau thời gian 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc của vật giảm. Suy ra b) sai

+ Vận tốc lớn nhất của vật tại thời điểm 6 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động. Suy ra c) đúng

- Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=-2t+12$.

Với $t=3\Rightarrow a(3)=-2.3+12=6(m/s^2)$. Suy ra d) đúng

Câu 92. Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8 kể từ khi bắt đầu chuyển động, một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2$ với $t\geq 0$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 3 vận tốc của vật giảm.

b) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 3 đến giây thứ 8 vận tốc của vật tăng.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $3(m/s)$.

d) Ở giây thứ 4, gia tốc của bằng $1\ (m/s^2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t+2\right)'=t^2-6t+5$$

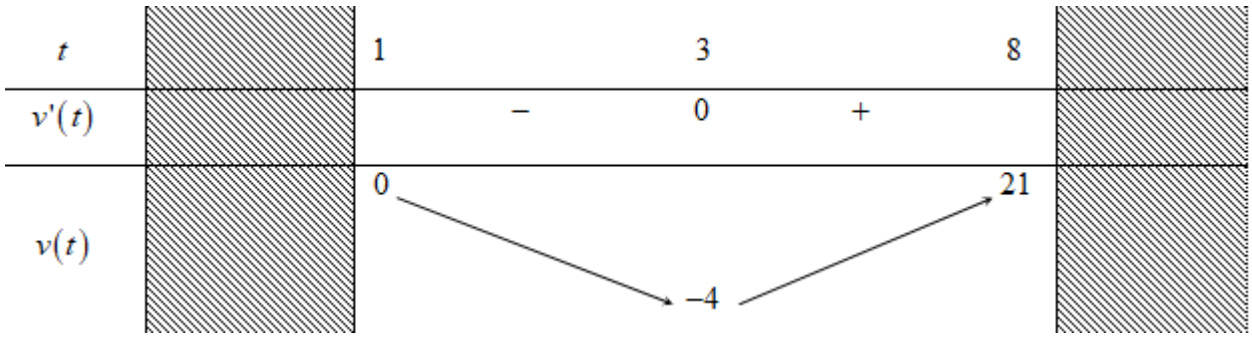
Xét hàm $v(t)=t^2-6t+5$

- Tập xác định: $D=[1;8]$

$v'(t)=2t-6$

$v'(t)=0\Leftrightarrow 2t-6=0\Leftrightarrow t=3$

- Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

a) Trong khoảng thời gian $(3;+\infty)$ thì vận tốc của vật tăng

b) Trong khoảng thời gian $(0;3)$ thì vận tốc của vật giảm.

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất đến giây thứ 8, vận tốc lớn nhất của vật bằng $21(m/s)$.

d) Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp một của phương trình vận tốc tại thời điểm t hay $a(t)=v'(t)=2t-6$

Với $t=4\Rightarrow a(4)=2.4-6=2(m/s^2)$

Câu 93. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô . Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4 \text{ với } 0\le t\le 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 4 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $41,5$ lít

c) $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right)$, với $0\le t\le 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Số xăng trong bình ban đầu là $V(0)=4$ lít

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V=V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$ lít

c) Xét hàm số $V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4$ với $0\le t\le 0,5$

Đạo hàm $V'(t)=300t(2-3t)$

d) Cho $V'(t)=0\Leftrightarrow 300t(2-3t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\in[0;0,5] \\ t=\frac{2}{3}\in[0;0,5] \end{array}\right.$

Các giá trị $V(0)=4; V\left(\frac{1}{2}\right)=41,5$

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 94. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 500 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3+15x-100$.

d) A bán cho B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là $C(10)=10+30.10=400$ triệu.

b) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho B là:

$R(x)=x.P(x)=x\left(45-0,001x^2\right)=45x-0,001x^3$ triệu đồng

Thay $x=10$ ta được $R(10)=449$ triệu đồng

c) Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$$P(x)=R(x)-C(x)=x\left(45-0,001x^2\right)-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$$

d) Xét hàm số $P(x)=-0,001x^3+15x-100$ với $(0\le x\le 100)$ ta có:

$$P'(x)=-0,003x^2+15=0\Leftrightarrow x^2=5000\Leftrightarrow x=50\sqrt{2}\in[0;100]$$

Ta có $P(0)=-100;\ P\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100\approx 607;\ P(100)=400$

Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y	100	↗	$500\sqrt{2}-100$	↘	400

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;100]}P=P\left(50\sqrt{2}\right)=500\sqrt{2}-100\approx 667$

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2}\approx 70,7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Câu 95. Bác Hồng nuôi cá tra ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước Bác Hồng với mật độ là 20 con/m^2 và thu được $1,5$ tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).

c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x)=-0,0652x^2+16x+1500$ (kg)

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Số cá giống mà Bác Hồng đã thả trong vụ vừa qua là $50.20=1000$ con.

b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là: $\dfrac{1500}{1000}=1,5$ (kg).

c) Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (com), $(x>0)$

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con)

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x)=(1000-x)(1,5+0,0625x)=-0,0625x^2+61x+1500.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $F'(x) = -0{,}125x + 61 = 0 \Leftrightarrow -0{,}125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

Bảng biến thiên như sau:

x	0		488		1000
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$F(max)$	↘	

Vậy Bác Hồng phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

d) Vụ tới Bác Hồng phải thả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 96. Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108 - x^2\right)$

c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$

b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x\left(108 - x^2\right)$

c) Xét hàm số $f(x) = 108x - x^3$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -6 \ < 0 \end{array}\right.$$

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(6)$	↘	

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 108x - x^3$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 6$.

Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là $f(6)=108.6-6^3=432$ (gam).

Câu 97. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C=0,2x+0,001x^2$ với $0\le x\le 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\overline{C}=0,001x+\dfrac{4}{x}+0,2$ với $0\le x\le 100$

d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng $0,326$ triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x\left(\text{m}^3\right)$ sản phẩm trong một ngày là :

$$C=C(x)=4+0,2x+0,001x^2 \text{ với } 0\le x\le 100$$

b) Thay $x=100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{4+0,2x+0,001x^2}{x}=0,001x+\frac{4}{x}+0,2 \text{ với } 0\le x\le 100$$

d) Ta có $\overline{C}'(x)=0,001-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow 0,001-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=4000\Leftrightarrow x=20\sqrt{10}\in(0;100]$

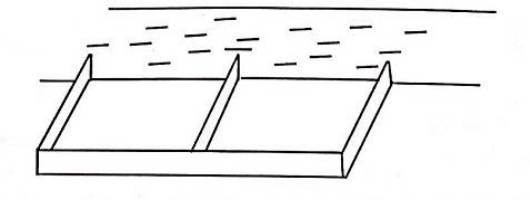
$\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{25}+\dfrac{1}{5}\approx 0,326$

Bảng biến thiên

x	0		$20\sqrt{10}$		100
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{10}}{25}+\dfrac{1}{5}$	$\nearrow$	$0,34$

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\overline{C}\left(20\sqrt{10}\right)\approx 0,326$ (triệu đồng/ m^3 sản phẩm), đạt được khi $x=20\sqrt{10}\approx 63\ \text{m}^3$.

Câu 98. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x>0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y>0$).



a) Số tiền phải làm là: $x.60000+y.3.50000=15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max\limits_{(0;+\infty)}S=6250\ \left(\text{m}^2\right)$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Số tiền phải làm là: $x.3.50000+y.60000=15.000.000\Leftrightarrow y=\dfrac{500-5x}{2}$.

b) Diện tích đất: $S=x.y=x.\dfrac{500-5x}{2}=250x-\dfrac{5}{2}x^2$

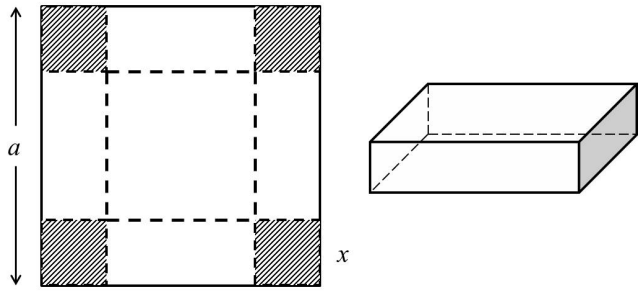
c) Ta có: $S'=250-5x$; $S'=0\Leftrightarrow 250-5x\Leftrightarrow x=50$.

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	↗	6250	↘	$-\infty$

d) Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{(0;+\infty)}S=6250\ \left(\text{m}^2\right)$ khi $x=50$.

Câu 99. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp như hình vẽ. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.



a) $0 < x < \dfrac{a}{2}$

b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2$ với $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

c) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{6}$.

d) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{27}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt thì $0 < x < \dfrac{a}{2}$

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6} \left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$.

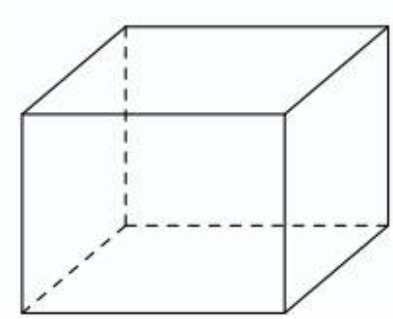
Bảng biến thiên:

x	0		$a/6$		$a/2$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	$\dfrac{2a^3}{27}$	↘	0

Vậy $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \dfrac{2a^3}{27}$.

Vậy thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{27}$ khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\dfrac{a}{6}$.

Câu 100. Bác Tuấn muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $288\,\text{dm}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2. Gọi $x(x>0)$ là chiều rộng của đáy bể



a) Chiều dài của đáy bể là $\frac{x}{2}$

b) Chiều cao của bể là $\frac{0,144}{x^2}$.

c) Diện tích cần xây là $2x^2+\frac{0,864}{x}$

d) Bác Tuấn trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là 1080000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Gọi $x(x>0)$ là chiều rộng của đáy bể.

Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể là $\frac{0,144}{x^2}$.

Khi đó diện tích cần xây là $2x^2+\frac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f(x)=2x^2+\frac{0,864}{x}$ có $f'(x)=4x-\frac{0,864}{x^2}=0\Leftrightarrow x=0,6$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

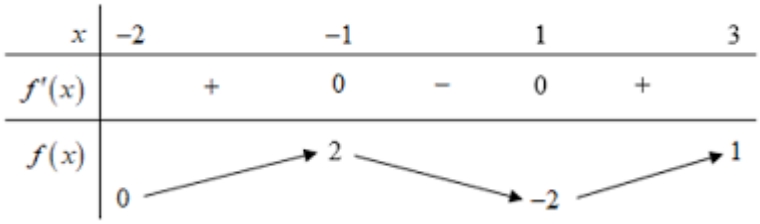
x	0		$0,6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2,16$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biên thiên ta có $\min f(x)=f(0,6)=2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000.2,16=1080000$ đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



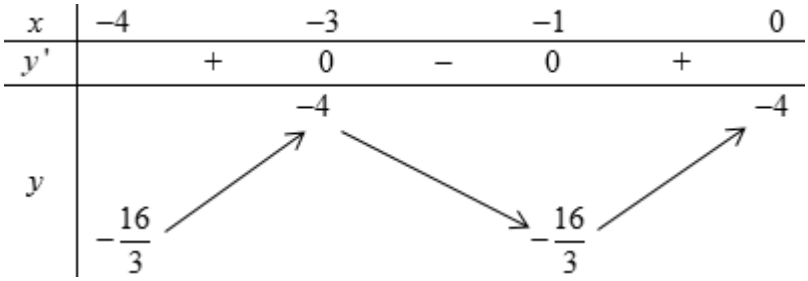
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-2;3]} f(x)=f(1)=-2 \\ M=\max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=0$

Câu 102. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;0]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-4;0]$. Tính $M-3m$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

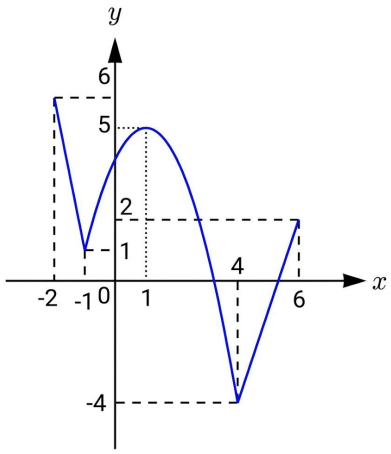
Từ bảng biến thiên, ta có:

$M=\max\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-3)=f(0)=-4$

$m=\min\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-4)=f(-1)=-\dfrac{16}{3}$

$\Rightarrow M-3m=12$

Câu 103. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$.

Tính $M+m$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

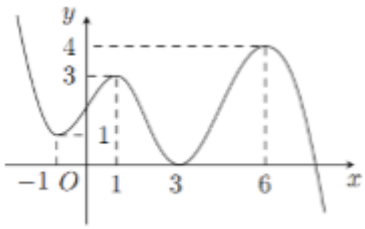
Từ đồ thị, ta có:

$M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)=6$

$m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)=f(4)=-4$

$\Rightarrow M+m=2$

Câu 104. Hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;6]$.

Tính $M+2026m$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

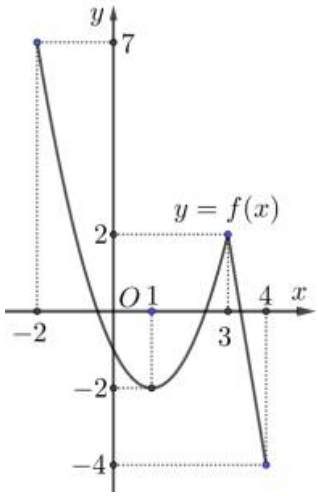
Từ đồ thị, ta có:

$\max\limits_{[-1;6]} f(x)=f(6)=4$

$\min\limits_{[-1;6]} f(x)=f(3)=0$

$\Rightarrow M+2026m=4$

Câu 105. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$.



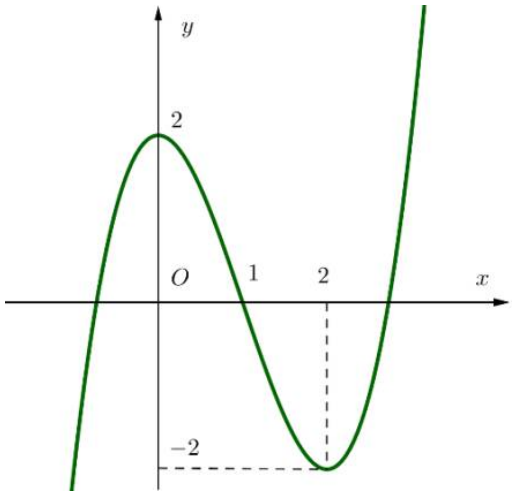
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[-2;4]} f(x)=f(4)=-4 \\ M=\max\limits_{[-2;4]} f(x)=f(-2)=7 \end{cases} \Rightarrow M+m=3$

Câu 106. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[0;2]$. Tính $M+m$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Đặt $t=\dfrac{x}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}f(t)$ với $t\in[0;1]$

Mà trên đoạn $[0;1]$ ta có: $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(t)=0; \max\limits_{[0;1]} f(x)=f(t)=2$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y = \dfrac{3}{2} f(1) = 0; \max\limits_{[0;1]} y = \dfrac{3}{2} f(0) = 3$

Câu 107. Biết giá trị lớn nhất hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $a + b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên [1;3]

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 16x + 16$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 4 & \notin (1;3) \\ x = \dfrac{4}{3} & \in (1;3) \end{array}\right.$

$f(1) = 0; f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}; f(3) = -6.$

Do đó $\max\limits_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{27}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 27 \end{cases} \Rightarrow a + b = 40$

Câu 108. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;1]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -6

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.

$y' = 6x^2 - 12x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 \in [-1;1] & (N) \\ x = 2 \notin [-1;1] & (L) \end{array}\right.$.

Ta có: $f(-1) = -7; f(1) = -3; f(0) = 1$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y = f(0) = 1; \min\limits_{[-1;1]} y = f(-1) = -7$

Câu 109. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[-4;4]$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-4;4] \quad (N) \\ x = 3 \in [-4;4] \quad (N) \end{array}\right.$$

Ta có: $f(-4) = -41; f(4) = 15; f(-1) = 40; f(3) = 8$

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;4]} y = f(-1) = 40; \min\limits_{[-4;4]} y = f(-4) = -41$

Câu 110. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5;-1]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -26

Trên đoạn $[-5;-1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$$y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow x = -2;$$

$y(-5) = -40; y(-2) = 14; y(-1) = 12$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-5;-1]} y = f(-2) = 14; \min\limits_{[-5;-1]} y = f(-5) = -40$

Câu 111. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+4}$ trên đoạn $[1;10]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,4$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;10]$.

Ta có: $y' = \dfrac{3}{(x+4)^2} > 0, \forall x \in [1;10] \Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên đoạn $[1;10]$.

Do đó: $\max\limits_{[1;10]} y = f(10) = \dfrac{11}{14}$ và $\min\limits_{[1;10]} y = f(1) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

Câu 112. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5;-3]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -17

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-5;-3]$.

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}, \forall x \in [-5;-3]$$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[-5;-3]\ \ (L)\\x=-4\in[-5;-3](N)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-5)=-\frac{25}{3}; f(-3)=-9; f(-4)=-8$

$\Rightarrow \max\limits_{[-5;-3]} y=f(-4)=-8;\ \ \min\limits_{[-5;-3]} y=f(-3)=-9$

Câu 113. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{x}+x+1$ trên đoạn $[1;3]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x)=-\frac{4}{x^2}+1$

Giải $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\notin(1;3)\\x=2\in(1;3)\end{array}\right.$.Ta có $f(1)=6; f(2)=5; f(3)=\frac{16}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x)=5$; $\max\limits_{[1;3]} f(x)=6$.

Câu 114. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2x^3+3x+3}{x+1}$ trên đoạn$[0;2]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $[0;2]$.

$y'=\frac{4x^3+6x^2}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3+6x^2=0\Leftrightarrow x^2(4x+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\4x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;2]\ \ (N)\\x=-\frac{3}{2}\in[0;2]\ \ (L)\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=3; f(2)=\frac{25}{3}$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y=f(2)=\frac{25}{3};\ \min\limits_{[0;2]} y=f(0)=3$

Câu 115. Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta có: $y=x+\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=0\Rightarrow x^2+4x+3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(N)\\x=-3(L)\end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1)=0$ và $y(2)=\dfrac{9}{4}$.

Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(-1)=0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ là $y(2)=\dfrac{9}{4}$.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số đã cho.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có: $y'=\dfrac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}};y'=0\Leftrightarrow x=1$. Do $y(-1)=0,y(1)=\sqrt{2},y(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ nên

$\max\limits_{[-1;2]}y=y(1)=\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-1;2]}y=y(-1)=0$

Câu 117. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –2

TXĐ: $D=[-2;2]$. Hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

$y(-2)=-2$; $y(2)=2$; $y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{[-2;2]}y=y(-2)=-2$

Câu 118. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=3x+\sqrt{10-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Điều kiện: $10-x^2\ge 0\Leftrightarrow -\sqrt{10}\le x\le \sqrt{10}\Rightarrow$ Miền xác định của hàm số là: $D=\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]$.

$$y'=3-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}=\frac{3\sqrt{10-x^2}-x}{\sqrt{10-x^2}};\forall x\in\left(-\sqrt{10};\sqrt{10}\right).$$

$$y'=0\Leftrightarrow 3\sqrt{10-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9\left(10-x^2\right)=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\pm 3\end{cases}\Leftrightarrow x=3\in\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]\text{ (nhận).}$$

Ta có: $f\left(-\sqrt{10}\right)=-3\sqrt{10};f\left(\sqrt{10}\right)=3\sqrt{10};f\left(3\right)=10$

$$\Rightarrow\max_{\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]}y=f\left(3\right)=10;\min_{\left[-\sqrt{10};\sqrt{10}\right]}y=f\left(-\sqrt{10}\right)=-3\sqrt{10}$$

Câu 119. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x+2\right)\sqrt{4-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2\Rightarrow$ Miền xác định của hàm số là: $D=\left[-2;2\right]$.

$$y'=\sqrt{4-x^2}+\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.\left(x+2\right)=\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}};\forall x\in\left(-2;2\right).$$

$$y'=0\Leftrightarrow -2x^2-2x+4=0\Leftrightarrow x=1.$$

Ta có: $f\left(-2\right)=0;f\left(2\right)=0;f\left(1\right)=3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\max_{\left[-2;2\right]}y=f\left(1\right)=3\sqrt{3};\quad\min_{\left[-2;2\right]}y=f\left(-2\right)=f\left(2\right)=0$$

Câu 120. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{3+2x-x^2}$ trên tập xác định.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên đoạn $\left[-1;3\right]$.

$$y'=\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}},\forall x\in\left(-1;3\right)$$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1\in\left[-1;3\right]\text{ (nhận).}$$

Ta có: $f\left(-1\right)=0;f\left(3\right)=0;f\left(1\right)=2$

$$\Rightarrow\max_{\left[-1;3\right]}y=f\left(1\right)=2;\quad\min_{\left[-1;3\right]}y=f\left(-1\right)=f\left(3\right)=0$$

Câu 121. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y=\left|x^2-3x+2\right|$ trên đoạn $\left[-10;10\right]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 132

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-10;10]$.

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & khi \begin{bmatrix}x\le 1\\ x\ge 2\end{bmatrix} \quad (1)\\ -\left(x^2-3x+2\right) & khi\ 1<x<2 \quad (2)\end{cases}$$

- Trường hợp 1: Xét $y=x^2-3x+2$ trên đoạn $[-10;1]\cup[2;10]$.

$y'=2x-3$ cho $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (loại)

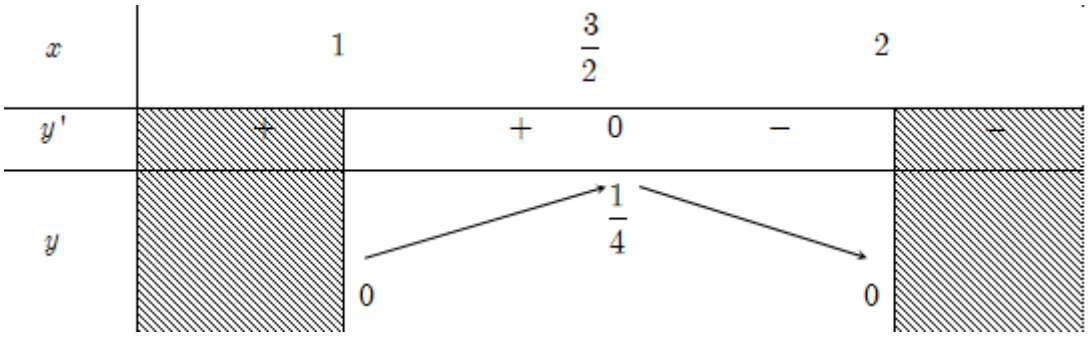
Ta có: $f(-10)=132; f(1)=0; f(2)=0; f(10)=72$

$\min\limits_{[-10;1]\cup[2;10]} y=f(1)=f(2)=0; \max\limits_{[-10;1]\cup[2;10]} y=f(-10)=132$

- Trường hợp 2: Xét $y=-\left(x^2-3x+2\right)$ trên khoảng $(1;2)$.

Ta có: $y'=-2x+3$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x=3/2$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên: $\max\limits_{(1;2)} y=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

Kết hợp 2 trường hợp ta có: $\min\limits_{[-10;10]} y=f(1)=f(2)=0; \max\limits_{[-10;10]} y=f(-10)=132$

Câu 122. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên $[0;\pi]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án:

Ta có $y'=2\cos x-4\sin^2 x.\cos x=2\cos x(1-2\sin^2 x)=2\cos x.\cos 2x$

Nên $y'=0\Leftrightarrow 2\cos x.\cos 2x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\cos x=0\\ \cos 2x=0\end{bmatrix}$

Trên $(0;\pi)$, $y'=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$

$y(0)=0;\ y(\pi)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3};\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max\limits_{[0;\pi]} y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 123. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\cos x(\sin x+1)$ trên đoạn $[0;\pi]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=-\sin x(\sin x+1)+\cos^2 x=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Vì $x\in[0;\pi]\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}$

Khi đó: $y(0)=1;\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4};\ y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4};\ y(\pi)=-1$

$\Rightarrow\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=0$

Câu 124. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ (lấy kết quả đến phần trăm).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,67

$y'=2^{x+1}\ln 2-\frac{4}{3}\cdot 8^x\ln 8=0\Leftrightarrow 2^x-2\cdot\left(2^x\right)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=0\\ 2^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1/2\end{array}\right.$

Xét $y(-1)=\frac{5}{6}$; $y(-\frac{1}{2})=0,9428$; $y(0)=\frac{2}{3}$.

Ta có: $y_{\min}=\frac{2}{3}\approx 0,67$.

Câu 125. Cho hàm số $y=e^x\left(x^2-3\right)$, gọi $M=\frac{a}{e^b}(a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có: $y' = e^x\left(x^2+2x-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \in [-5;-2] \\ x=1 \notin [-5;-2] \end{array}\right.$

Ta có $y(-5) = \frac{22}{e^5}; y(-3) = \frac{6}{e^3}; y(-2) = \frac{1}{e^2}$.

Khi đó $\max\limits_{[-5;-2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a+b = 9$.

Câu 126. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x, -1 \le t \le 1$.

Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$f'(t) = 4t+2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-3}{2}; f(-1) = -1; f(1) = 3$

Vậy $\min\limits_R y = \frac{-3}{2}, \max\limits_R y = 3.$

Câu 127. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5$. $f'(t) = 2t - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0;1]$

$f(0) = 5; f(1) = 2$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 2, \max\limits_{\mathbb{R}} y = 5$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là 7

Câu 128. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$.

Xét hàm $y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7$ trên đoạn $[-1;1]$

$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0$ vô nghiệm.

Ta có: $y(-1) = 9, y(1) = -7$

Vậy hàm số $y=-2\sin^3 x+3\cos 2x-6\sin x+4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 129. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Tính $M+m$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1 \Rightarrow y=f(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+1}$, $f'(t)=\dfrac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\in[-1;1] \\ t=-2\notin[-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow f(0)=1,\ f(-1)=0,\ f(1)=\dfrac{2}{3}.$

Vậy $M=1, m=0$

$\Rightarrow M+m=1$

Câu 130. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ (với m là tham số thực). Biết $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(0;+\infty)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$m+2$	↘	$m-2$	↗	$+\infty$

Vậy $\max\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-1)\Rightarrow f(-1)=5\Leftrightarrow m+2=5\Leftrightarrow m=3.$

$\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)=m-2=3-2=1.$

Câu 131. Tìm giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 1.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 21

Hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và $y'=-3x^2-6x$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-1;2]\\x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$

$y(-1)=m-2; y(0)=m; y(2)=m-20$

Suy ra: $\min\limits_{x\in[-1;2]} y=1\Leftrightarrow m-20=1\Leftrightarrow m=21$.

Câu 132. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$ (lấy kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5,41

$y'=3x^2-6x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)}=m-4; y'_{(0)}=m; y'_{(1)}=m-2$

nên $\underset{[-1;1]}{Miny}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m-4=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=4+\sqrt{2}\approx 5,41$

Câu 133. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

+ Đặt $f(x)=x^3+\left(m^2+1\right)x+m+1$.

+ Ta có: $y'=3x^2+m^2+1$. Dễ thấy rằng $y'>0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min\limits_{[0;1]} y=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=m+1$.

+ Theo bài ra ta có: $m+1=5$, suy ra $m=4$.

Câu 134. Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Đặt $t=x+f(x)$ vì $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[1;12]$.

Xét $g(t)=t^3-mt^2+(m^2+1)t-2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t)=3t^2-2mt+m^2+1$ có $\Delta'=m^2-3(m^2+1)=-2m^2-3<0\ \forall m$.

$\Rightarrow g'(t)>0\forall t\in[1;12]\Rightarrow y=g(t)$ đồng biến trên $[1;12]$.

Vậy $M=\max\limits_{t\in[1;12]}g(t)=g(12)=12m^2-144m+1738\Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=\dfrac{144}{2.12}=6$.

Câu 135. Cho hàm số $y=x+\cos^2 x+m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}y=4$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có: $y'=1-2\sin x.\cos x=1-\sin 2x\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=x+\cos^2 x+m$

Do đó $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}y=y(0)=1+m=4\Leftrightarrow m=3$.

Câu 136. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $3\sqrt{2}$. Tìm giá trị của m (lấy kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,41

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Ta có: $y=x+\sqrt{4-x^2}+m\Rightarrow y'=1+\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Bảng biến thiên

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-2+m$	↗	$2\sqrt{2}+m$	↘	$2+m$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}+m=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}\approx 1,41$.

Câu 137. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng 6.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng 6 khi:

$$y(0)+y(2)=6 \Leftrightarrow -m+\frac{2-m}{3}=6 \Leftrightarrow m=-4.$$

Câu 138. Cho hàm số $y=\frac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có : $y'=\frac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall x\neq -8$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=y(0)=\frac{-m^2}{8}$. Theo giả thiết $\min\limits_{[0;3]} y=-3 \Rightarrow \frac{-m^2}{8}=-3 \Leftrightarrow m^2=24 \Leftrightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$

Câu 139. Tính tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$ bằng $-\frac{9}{2}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Hàm số $y=\frac{x-m^2}{x+8}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $y'=\frac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall m\in\mathbb{R}, x\neq -8$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Suy ra $\underset{[0;3]}{\text{Min}}\, y=y(0)=-\frac{m^2}{8}$. Từ giả thiết suy ra $-\frac{m^2}{8}=-\frac{9}{2} \Leftrightarrow m^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=-6 \end{array}\right.$.

Câu 140. Cho hàm số $y=\frac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có: $y'=\frac{m^2-m+2}{(x+m)^2}>0, \forall x\neq m$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} y=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} y(4)=-1 \\ m\notin[0;4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-6=0 \\ \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$

Câu 141. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;6]$ bằng -4.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $f(x)=\dfrac{x-m^2}{x+4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{m^2+4}{(x+4)^2}>0, \forall m$. Hàm số đồng biến trên $[0;6]$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;6]} f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{4}=-4 \Leftrightarrow m^2=16 \Leftrightarrow m=\pm 4$

Câu 142. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm giá trị của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $y'=\dfrac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x\neq 1$.

Nếu $-m-1>0 \Leftrightarrow m<-1$

$\Rightarrow y'>0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(2)=m+2$.

Theo giả thiết: $m+2=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Nếu $-m-1<0 \Leftrightarrow m>-1$

$\Rightarrow y'<0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{m+4}{3}=3 \Leftrightarrow m=5$.

Câu 143. Tính giá trị của tham số m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8,2

Nếu $m=1$ thì $y=1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\underset{x\in[1;2]}{Min}\, y + \underset{x\in[1;2]}{Max}\, y = y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5} = 8,2$.

Câu 144. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;2]} f(x) + \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 8$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $-9,2$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-6-m}{(x-3)^2}$.

Nếu $m = -6 \Rightarrow y = 2$ (loại).

Nếu $m \neq -6$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [-1;2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra ta có:

$$\max_{[-1;2]} f(x) + \min_{[-1;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow f(-1) + f(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2+m}{-4} + \frac{4+m}{-1} = 8 \Leftrightarrow m = -\frac{46}{5} = -9,2$$

Câu 145. Tính tổng các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \dfrac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0;\ \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Câu 146. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\dfrac{8-m}{\left(\sqrt{x+1}+4\right)^2}$.

Trường hợp 1: Nếu $m<8\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-1;8)$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(8)=\dfrac{6+m}{7}<3\Leftrightarrow m<15$ mà $m<8; m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Trường hợp 2: Nếu $m>8\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;8)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=f(-1)=\dfrac{m}{4}<3\Leftrightarrow m<12$ mà $m>8; m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{9;10;11\}$.

Trường hợp 3: Nếu $m=8\Rightarrow f(x)=2\Rightarrow \max\limits_{[-1;8]} f(x)=2<3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow m=8$ thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

Câu 147. Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Giá trị của m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có $f'(x)=m.\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

Do $m\neq 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Nếu $m>0$ thì $f'(x)>0, \forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow m+2m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=5 \end{array}\right.$

Do $m>0$ nên nhận $m_1=5$.

Nếu $m<0$ thì $f'(x)<0, \forall x\in[2;5]$. Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(5)=2m;\ \max\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)=m.$

$\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$

$\Leftrightarrow 2m+m=m^2-10$

$\Leftrightarrow m^2-3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=5\end{array}\right.$

Do $m<0$ nên nhận $m_2=-2$.

Vậy $m_1+m_2=3$.

Câu 148. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$ nhỏ nhất bằng 3.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=2m-1$, $f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=2m-3=3\Rightarrow m=3$

Câu 149. Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -17

Từ giả thiết ta có $f'(1)=0$

$\Rightarrow 4a+4(a+4)=0$

$\Leftrightarrow a=-2$

và $f(x)=-2x^4+4x^2-1$

Ta có $f(0)=-1; f(1)=1; f(2)=-17$

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-17$

Câu 150. Cho hàm số $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $f(x)=x^3+(1+m^2)x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+1+m^2>0,\ x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$

$\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=m^2+3$. Yêu cầu bài toán tương đương $m^2+3\le 7\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

Vậy $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ hay S có 5 phần tử.

Câu 151. Cho hàm số $f(x)=ax^3-4(a+2)x+1$ với a là tham số. Nếu $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=3ax^2-4(a+2)$

Khi đó: $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)\Rightarrow f'(-2)=0\Leftrightarrow 12a-4(a+2)=0\Leftrightarrow a=1$.

Suy ra $f(x)=x^3-12x+1;\ f'(x)=3x^2-12;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	1	↘	-13	↗	$+\infty$

Vậy với $a=1$ thì hàm số đạt $\max\limits_{(-\infty;0]} f(x)=f(-2)$ và khi đó $\max\limits_{[0;3]} f(x)=1$.

Câu 152. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x+1$ trên đoạn $[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta có $y'=3x^2-3$, $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ do đó $y_{CT}=y(1)=-1$ và $y_{CĐ}=y(-1)=3$.

Thấy ngay với $m>0$ thì trên đoạn $[m+1;m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1;m+2]$ là $y(m+1)=(m+1)^3-3(m+1)+1$.

GTNN luôn bé hơn $3\Leftrightarrow (m+1)^3-3(m+1)-2<0\Leftrightarrow \begin{cases} m+1<2 \\ m+1\ne -1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\ne -2 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}; m\in(-10;10)\Rightarrow m=\{-9;-8;...;-1;0\}\setminus\{-2\}$

Câu 153. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

+TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m^2\right\},[-3;-2]\subset D$.

+ Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{\left(x-m^2\right)^2}<0,\forall x\in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Nên $\min\limits_{[-3;-2]} y=\dfrac{1}{2}=y(-2)=\dfrac{-2+1}{-2-m^2}\Rightarrow -2-m^2=-2\Leftrightarrow m=0\Rightarrow -2<m\le 3$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$

Câu 154. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Với $m=1\Rightarrow y=1\ \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y\neq 3$.

Với $m\neq 1$. Khi đó $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y'>0\Leftrightarrow m<1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y(0)\Rightarrow m=3$ (loại).

TH 2: $y'<0\Leftrightarrow m>1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y(1)\Rightarrow m=5$ (thỏa mãn).

Câu 155. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Đạo hàm: $y'=\dfrac{1+m}{(x+1)^2}$.

Do hàm số $y=f(x)=\dfrac{x-m}{x+1}$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1;2]$khi $m\neq -1$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-8$

$\Leftrightarrow y(1)+y(2)=-8 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{2}+\dfrac{2-m}{3}=-8 \Leftrightarrow 3(1-m)+2(2-m)=-48 \Leftrightarrow m=11$

Câu 156. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) . Tìm m để thoả mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1 \Rightarrow y=1,\ \forall x\neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $m<1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(1)+y(2)=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$ (loại).

Nếu $m>1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(2)+y(1)=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3}+\dfrac{1+m}{2}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$ (nhận)

Câu 157. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-2;0]} y=-\dfrac{1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m+2}{(x-1)^2}>0$ với $\forall x\in[-2;0]$

$\Rightarrow$ hàm số $y=\dfrac{mx-m^2-2}{-x+1}$ đồng biến trên $[-2;0] \Rightarrow \max\limits_{[-2;0]} y=y(0)=m^2+2$.

Theo đề bài ta có $\Rightarrow m^2+2=3 \Rightarrow m=\pm 1$ mà $m>0$ nên ta nhận giá trị $m=1$.

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 158. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=mx+\dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$y=mx+\dfrac{36}{x+1}\Rightarrow y'=m-\dfrac{36}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: $m=0$, ta có $y'=-\dfrac{36}{(x+1)^2}<0,\forall x\neq -1$.Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3)=9$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0$

Nếu $m<0$, ta có $y'<0$, $\forall x\neq -1$ Khi đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3)\Leftrightarrow 20=3m+9\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{3}$ (loại).

Nếu $m>0$, khi đó $y'=0\Leftrightarrow m-\dfrac{36}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow (x+1)^2=\dfrac{36}{m}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1 \\ x=-\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\ (l)\end{array}\right.$.

Với $0<\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\le 3\Leftrightarrow \dfrac{4}{9}<m\le 36$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1\right)=12\sqrt{m}-m=20\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4(nhan) \\ m=100(loai)\end{array}\right.$.

Với $\dfrac{6}{\sqrt{m}}-1>3\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y=y(3)\Leftrightarrow 20=3m+9\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{3}(l)$.

Câu 159. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 25

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$.

Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		+	0	−	
v	$v(0)$	↗	25	↘	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\text{m/s})$ tại tại $t=4$.

Câu 160. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt

đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 24

Ta có $v(t)=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t$; $v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4$ và có bảng biến thiên

t	0		4		6
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$		↗	24	↘	

Vậy $\max v(t)=24(m/s)$ khi $t=4$.

Câu 161. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 28

Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=3$.

Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3)=28(\text{m/s})$.

Câu 162. Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

Trả lời: ……..

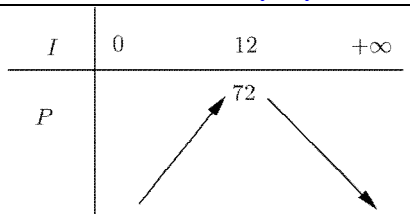
Lời giải

Đáp án: 72

Xét hàm số $P=12I-0,5I^2$ với $I\geq 0$.

$P'=12-I$. $P'=0\Leftrightarrow I=12$.

Bảng biến thiên:



Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 163. Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $18,4$

Xét hàm số $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$.

$T'=-0,024t^2-0,16<0,\forall t\in[1;10]$.

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phong đạt được là $T_{\min}=T(10)=18,4^0C$.

Câu 164. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng bao nhiêu miligam?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

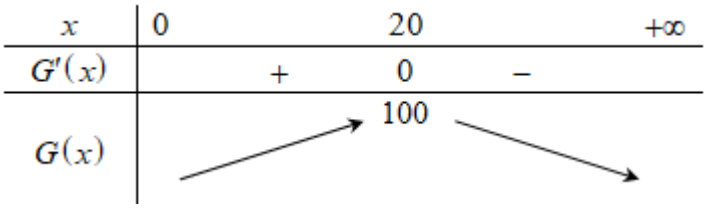
$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,5x-0,075x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=20(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 165. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$, với $0\le t\le 25, t\in\mathbb{N}$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0;25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Ngày thứ bao nhiêu thì mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

$f'(t)=90t-3t^2;\ f''(t)=90-6t,\ f''(t)=0\Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên

t	0		15		25
$f''(t)$		+	0	−	
$f'(t)$		↗	675	↘	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

Câu 166. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1005

Xét hàm số $N(t)=1000+\dfrac{100}{100+t^2}$

$$N'(t)=\frac{100.\left(100+t^2\right)-100t.2t}{\left(100+t^2\right)^2}=\frac{100\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$$

Khi đó với $t>0$ $N'(t)=0\Leftrightarrow 100-t^2=0\Leftrightarrow t=10$

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		+	0	−	
$N(t)$	1000	↗	1005	↘	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 167. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$

$\Rightarrow c'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2}, \forall t\in(0;+\infty)$.

$c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$		↗		↘	

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 168. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Trả lời: ……..

Lời giải

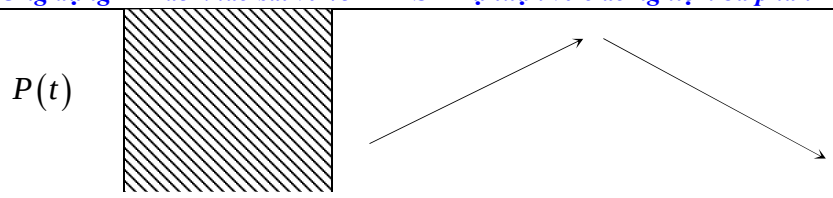
Đáp án: 1

Xét $P'(t)=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+t+4\right)^2}=\dfrac{(t-1)(-t-3)}{\left(t^2+t+4\right)^2}$, với $t\ge 0$

$P'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t		0		1		$+\infty$
$P'(t)$			$+$	0	$-$	



Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t=1$ và $P'(t)<0, \forall t \in (1;+\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 169. Hiệu quả nhiên liệu *E*, tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l), của một mẫu xe ôtô được mô hình hóa theo tốc độ $v\,(km/h)$ bằng công thức sau: $E(v)=-0,000025v^3+0,003v^2+13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20\,km/h$ đến $120\,km/h$ $(20\le v\le 120)$. Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Trả lời: ……..

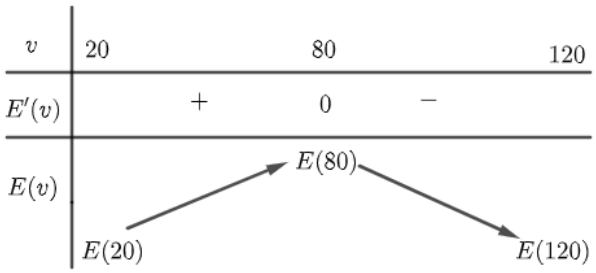
Lời giải

Đáp án: 19,9

Ta có: $E'(v)=-0,000075v^2+0,006v$

$$E'(v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0 \\ v=80 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $E(v)$ với $20\le v\le 120$ như sau:



Do đó giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất là $E(80)=19,9$.

Câu 170. Doanh thu của một công ty bất động sản khi bán căn hộ thứ *n* (*n* nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số $R(n)=\dfrac{(n-4)(n-30)^2}{100}+36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$$R(n)=\frac{1}{100}(n-4)\left(n^2-60n+900\right)+36=\frac{1}{100}\left(n^3-64n^2+1140n-3600\right)+36$$

Có $R'(n)=\dfrac{1}{100}\left(3n^2-128n+1140\right) \Leftrightarrow n=\dfrac{38}{3}; n=30$

n	1		$\frac{38}{3}$		30		100
$R'(n)$		+	0	−	0		
$R(n)$	10,77	↗	$\frac{41876}{675}$	↘	36	↗	4740

Dựa vào bảng biến thiên ta có $n = 1$

Câu 171. Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x)=35,7\dfrac{x+2}{x^2+21}; x\in[0;8]$, trong đó x là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 1000 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2550

Ta có $f'(x)=35,7.\dfrac{x^2+21-2x(x+2)}{(x^2+21)^2}=35,7.\dfrac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2}$

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-7\end{array}\right.$

Kết hợp với $x\in[0;8]$ thì $x=-7$ (loại)

x	0		3		8
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	3,4	↗	5,95	↘	4,2

Giá thấp nhất để mua 1 cổ phiếu là 3,4 và giá cao nhất để bán 1 cổ phiếu là 5,95.

Vậy lợi nhuận tối đa của 1 cổ phiếu là 5,95 – 3,4 = 2,55.

Vì người đó mua 1000 cổ phiếu nên người đó có lợi nhuận tối đa là 2550 euro

Câu 172. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=1000\left(t^2+me^{-t}\right)$ với $t\ge 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −3

Ta có $f'(t)=1000\left(2t-me^{-t}\right), f''(t)=1000\left(2+me^{-t}\right)$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm khi và chỉ khi hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $[0;10]\Leftrightarrow f''(t)\ge 0\ \forall t\in[0;10]$

$\Leftrightarrow 2+me^{-t}\ge 0\ \forall t\in[0;10]\Leftrightarrow m\ge -2e^{t}\ \forall t\in[0;10]\ (1)$

Xét hàm $g(t)=-2e^{t}$ luôn nghịch biến trên $[0;10]\Rightarrow \max\limits_{[0;10]} g(t)=g(0)=-2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow m\ge -2$

Suy ra tổng các giá trị nguyên âm của m bằng -3.

Câu 173. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$f(n)=nP(n)=480n-20n^2$ (gam).

$f'(n)=480-40n=0\Leftrightarrow n=12$

Bảng biến thiên:

n	0		12		$+\infty$
$f'(n)$		$+$	0	$-$	
$f(n)$		↗	$f(12)$	↘	

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 174. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 *km*. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng bao nhiêu mét trên giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t=\dfrac{300}{v-6}\ (v>6)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v)=cv^3\dfrac{300}{v-6}=300c\dfrac{v^3}{v-6}$

$E'(v)=600cv^2\dfrac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v)=0\Leftrightarrow v=9$ do $(v>6)$

Bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		↘	$E(9)$	↗	

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 175. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$ (với $a,b\in\mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y=P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 30

Theo đề bài ta có tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ suy ra $P(0)=20$ và $P'(0)=10$, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=10\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{b+1}:\frac{0,75a}{(b+1)^2}=20:10\Rightarrow\frac{b+1}{0,75}=2\Rightarrow b=\frac{1}{2}\Rightarrow a=30.$$

Xét hàm số $P'(t)=\dfrac{0,75a\cdot e^{-0,75t}}{\left(b+e^{-0,75t}\right)^2}=\dfrac{22,5e^{-0,75t}}{\left(0,5+e^{-0,75t}\right)^2},\forall t\ge 0$

Đặt $m=e^{-0,75t}$, $\forall t\ge 0\Rightarrow 0<m\le 1$.

$$P'(m)=\frac{22,5m}{(0,5+m)^2}\Rightarrow P''=\frac{-22,5m^2+5,625}{(0,5+m)^4}=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

m	0		$\frac{1}{2}$		1
P'	0	↗	11,25	↘	−10

Suy ra giá trị lớn nhất của tốc độ sinh trưởng của quần thể khi $m=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{4}{3}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm $t=-\dfrac{4}{3}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là $P=$ 30 tế bào.

Câu 176. Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 41

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền cần tăng giá bán của mỗi kg rau.

Suy ra giá bán mỗi kg rau là $30+x$ (nghìn đồng)

Khi đó mỗi ngày trang trại bán được $1000-20x$ kg rau.

Điều kiện $0<x<50$ và x là số tự nhiên.

Mỗi ngày trang trại thu được số tiền bán rau là:

$L(x)=(1000+20x)(30+x)+20\cdot x\cdot 2$ (nghìn đồng)

Hay $L(x)=-20x^2+440x+30000$

$L(x)$ là hàm bậc hai có hệ số $a=-20<0$ và đỉnh là $I(11;32420)$ nên $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=11$

Vậy giá bán mỗi kg rau là 41 (nghìn đồng) thì số tiền bán rau của trang trại trong mỗi ngày là lớn nhất

Câu 177. Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A.Khi cửa hàn bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 300

Gọi x là số lần giảm giá ($0\le x\le 20$).

Suy giá bán một sản phẩm là: $(400-20x)$.

Số sản phẩm bán ra trong tuần là: $200+20x$

Doanh thu trong tuần là $f(x)=(200+20x).(400-20x)$, $0<x<20$

$f(x)=(200+20x).(400-20x)=20.20.(10+x)(20-x)=400.(-x^2+10x+200)$.

Ta có $f'(x)=400.(-2x+10)=0\Leftrightarrow x=5$.

$f(x)$ đạt GTLN trên $(0;20)$ khi $x=5$.

Vậy giá bán sản phẩm của cửa hàng để doanh thu trong 1 tuần lớn nhất là $400-20.5=300$ (ngàn đồng)

Câu 178. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $30,5$

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27\le x\le 31$

Khi đó số xe bán ra là $600+(31-x).200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x)=\left[600+(31-x).200\right](x-27)=(-200x+6800)(x-27)$

$=-200x^2+12200x-183600=-200\left(x-\dfrac{61}{2}\right)^2+2450\le 2450$

Dấu "=" xảy ta khi $x-\dfrac{61}{2}=0\Leftrightarrow x=30,5$

Vậy giá bán mới là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

Câu 179. Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 95

Gọi x $(x>0)$ nghìn là số tiền giá vé giảm.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100-x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm $300x$ khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là $27000+300x$.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả nên $27000+300x\le 55000\Leftrightarrow x\le\dfrac{280}{3}$

Doanh thu từ tiền bán vé là: $y=(27000+300x)(100-x)=-300x^2+3000x+2700000$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-300x^2+3000x+2700000$

Tập xác định $D=\left(0;\dfrac{280}{3}\right]$

$y'=-600x+3000.$ $y'=0\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		$\dfrac{280}{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	2700000	↗	2707500	↘	2700000

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là **95** nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 180. Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000 đồng/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm 1000 đồng/người thì sẽ tăng thêm 10 khách hàng. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 đồng lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $47,5$

Gọi giá vé vào cửa sau khi điều chỉnh là $50+x$ (nghìn đồng); điều kiện: $50+x>0\Leftrightarrow x>-50$.

Số khách hàng đến sau khi điều chỉnh giá vé là $500-10x$ (người).

Khi đó tổng thu nhập là:

$f(x)=(50+x)(500-10x)+5.(500-10x)$

$=-10x^2-50x+27500$

Xét hàm số: $f(x)=-10x^2-50x+27500$

Bảng biến thiên:

x	-50		$\dfrac{-5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5000	↗	$\dfrac{55125}{2}$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\frac{5}{2}$.

Vậy để thu nhập lớn nhất thì giá vé vào cửa là $50-\frac{5}{2}=47,5$ (nghìn đồng).

Câu 181. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$. Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới. Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1200

Số tiền thu về khi bán x mét lưới là: $220x$.

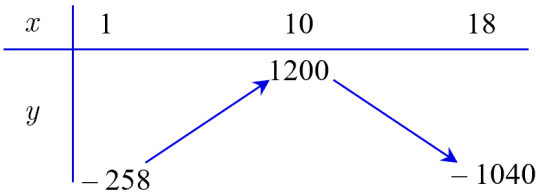
Lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới là:

$L(x)=220x-(x^3-3x^2-20x+500)=-x^3+3x^2+240x-500$

Xét hàm số $L(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ với $x\in[1;18]$

$L'(x)=-3x^2+6x+240$; $L'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\in[1;18]\\x=-8\notin[1;18]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Vậy gia đình đan lưới trong một ngày thu được lợi nhuận tối đa là 1200 nghìn đồng khi đan 10 mét lưới trong một ngày.

Câu 182. Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là 530 cm^3. Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp số: $4,39$.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của lon sữa.

Điều kiện: $r>0$, $h>0$

+ Ta có: $V=530\Rightarrow \pi r^2h=530\Rightarrow h=\dfrac{530}{\pi r^2}$

+ Diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{1060}{r}+2\pi r^2$$

+ Ta có: $S'=-\dfrac{1060}{r^2}+4\pi r=0\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{265}{\pi}}$

+ Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{265}{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy: $S_{\min}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{265}{\pi}}\approx 4,39$.

Câu 183. Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a.\pi\left(cm^3\right), a\in\mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1000

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x,y>0; x<30)$.

Độ dài dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120 cm.

Ta có: $(2x+y)\cdot 4=120\Leftrightarrow y=30-2x>0\Rightarrow 0<x<15$.

Thể tích khối hộp quà là: $V=\pi x^2\cdot y=\pi x^2(30-2x)$. Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x)=x^2(30-2x)$, $(0<x<15)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(x)=-6x^2+60x$;

Cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$.

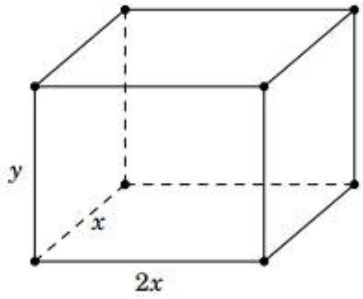
Lập bảng biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là: $V = \pi \cdot f(10) = 1000\pi\left(cm^3\right)$

Câu 184. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\text{m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là $700\,000$ đồng/m^2. Hỏi chi phí thuê nhân công ít nhất bao nhiêu triệu đồng để xây bể trên?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 105



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện x, y).

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là: $V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}$

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất.

Tổng diện tích các mặt của bể cá $S = 2xy + 2.2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$

Xét hàm số $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có $S'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	150	↗	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

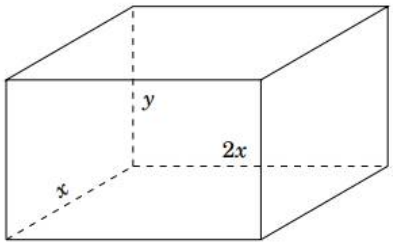
Khi đó chi phí thuê nhân công là: $T = 150.700\,000 = 105$ triệu đồng.

Câu 185. Thầy Huy dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,17



Gọi $x, 2x, y$ với $x, y > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x}$

Do $y > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2 y = 2x^2 . \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x} = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{6}x$

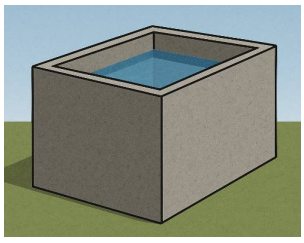
Xét hàm số $V(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{6}x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$ có $V'(x) = -2x^2 + \dfrac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{\frac{11}{12}}$		$\frac{\sqrt{11}}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	y_0	↘	

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\dfrac{11}{12}}\right) \approx 1,17 \text{m}^3$

Câu 186. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200\,m^3$. Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/m^2. Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 144

Gọi x (m) là chiều rộng đáy bể $(x>0)$, chiều dài đáy bể là $2x$ (m)

Diện tích đáy bể: $S=2x^2$. Thể tích bể chứa nước: $V=S.h\Rightarrow h=\dfrac{200}{2x^2}=\dfrac{100}{x^2}$

Diện tích xung quanh bể nước: $S_{xq}=6x.\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{600}{x}$. Diện tích xây dựng: $S_{xd}=2x^2+\dfrac{600}{x}$

Chi phí xây dựng bể: $f(x)=850.\left(2x^2+\dfrac{600}{x}\right)$

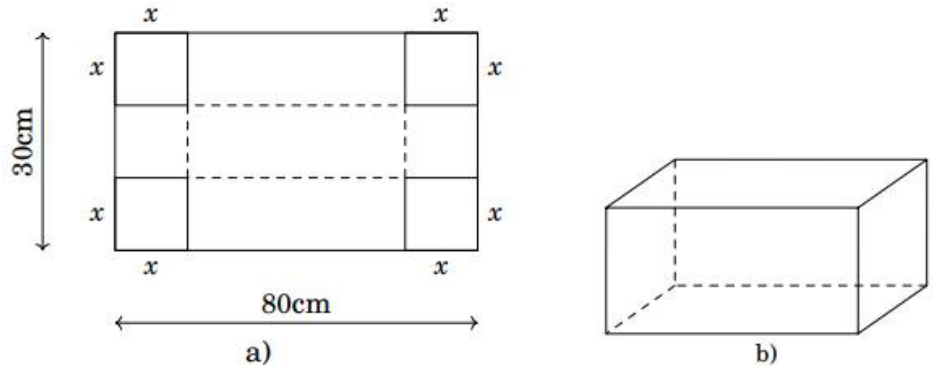
Ta có: $f'(x)=850\left(4x-\dfrac{600}{x^2}\right)=850\left(\dfrac{4x^3-600}{x^2}\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{150}$

x	0		$\sqrt[3]{150}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$f\left(\sqrt[3]{150}\right)\approx 143979$

Chi phí thấp nhất hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể dự trữ nước ngọt là: 144 triệu đồng.

Câu 187. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30\,\text{cm}$ và chiều dài $80\,\text{cm}$ (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5\le x\le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b). Để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+2b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26

Thể tích chiếc hộp là: $V(x)=x(30-2x)(80-2x)=2400x-220x^2+4x^3$ với $5\le x\le 10$

Ta có $V'(x)=12x^2-440x+2400=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{20}{3}\in[5;10]\\ x=30\notin[5;10]\end{array}\right.$

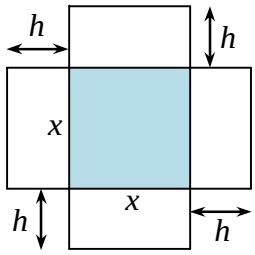
$V(5)=700; V\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{200\,000}{27}; V(10)=6000$

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x)=\frac{200\,000}{27}$ khi $x=\frac{20}{3}$.

Vậy để thể tích hộp là lớn nhất khi $x=\frac{20}{3}$ cm.

$\Rightarrow a+2b=26$

Câu 188. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh carton theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3.



Để diện tích của mảnh carton nhỏ nhất thì giá trị của x bằng bao nhiêu centimet?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Thể tích của hộp là: $V=x^2h=500(cm^3)$.

Do đó $h=\frac{500}{x^2}, x>0$.

Diện tích của mảnh carton dùng làm hộp là: $S(x)=x^2+4hx=x^2+\frac{2000}{x}, x>0$

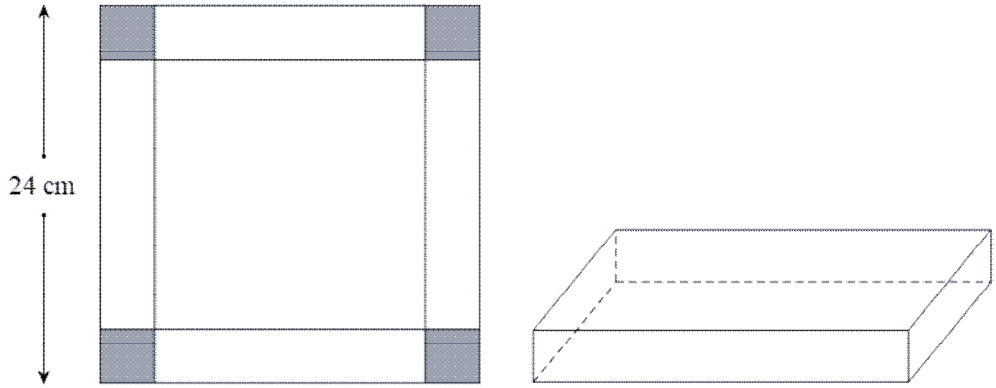
$S'(x)=2x-\frac{2000}{x^2}=\frac{2(x^3-1000)}{x^2}, S'(x)=0\Leftrightarrow x=10$

Bảng biến thiên

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	300	↗	

Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là x = 10 (cm).

Câu 189. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $x(\text{cm})$ là cạnh hình vuông bị cắt $(0<x<12)$.

Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x)=x(24-2x)^2$.

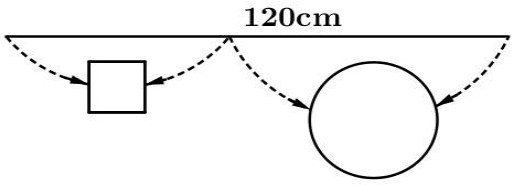
Ta có $V'(x)=(24-2x)(24-6x)$ có $V'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

Bảng biến thiên

x	0		4		12
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	1024	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=4$.

Câu 190. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 504

Gọi độ là của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120-x)\text{cm}$ $(0<x<120)$.

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\dfrac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$.

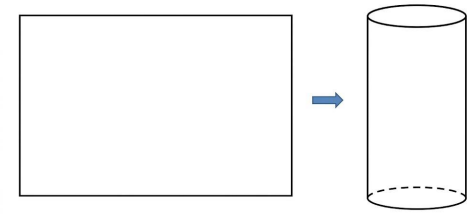
Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$S(x)=\left(\frac{120-x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{4\pi}=\left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)x^2-15x+900$, $(0<x<120)$.

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\frac{120\pi}{4+\pi}\in(0;120)$.

Vậy $\min S(x)=S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right)\approx 504\,\text{cm}^2$.

Câu 191. Bố bạn Trúc Linh là một thợ gò thùng thiếc. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một tấm tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Tấm tôn *Chiếc thùng*

Để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, bố bạn Trúc Linh phải chọn tấm tôn có chiều dài là bao nhiêu cemtimet? (Bỏ qua hao hụt mối ghép của chiếc thùng)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

Gọi một chiều dài là $x(cm)$ $(0<x<60)$, khi đó chiều còn lại là $60-x(cm)$, giả sử quấn cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r=\frac{x}{2\pi};h=60-x.$

Ta có: $V=\pi r^2.h=\frac{-x^3+60x^2}{4\pi}$.

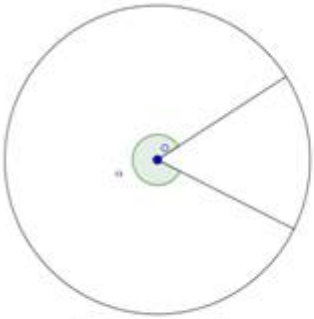
Xét hàm số: $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$

$f'(x)=-3x^2+120x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=40\end{array}\right.$

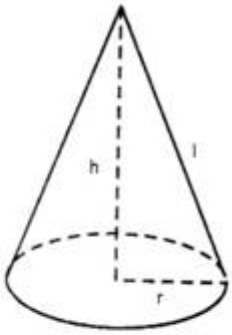
Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$ lớn nhất khi x = 40

Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm.

Câu 192. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích 4π dm^2. Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0<\alpha<2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu múc nước hình nón như Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Thể tích lớn nhất của cái gầu là bao nhiêu decimet khối? (kết quả lấy đến phần trăm của decimet)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $3,22$

Ta có: đường sinh l của hình nón là bán kính $R=\dfrac{4\pi}{2\pi}=2\,dm$ của hình tròn

Bán kính đáy của hình nón: $r=\dfrac{2\alpha}{2\pi}=\dfrac{\alpha}{\pi}$

Đường cao của hình nón: $h=\sqrt{2^2-\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

Khi đó thể tích hình nón: $V(\alpha)=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}\dfrac{1}{\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}=\dfrac{1}{3\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

$$V'(\alpha)=\frac{1}{3\pi^2}\left(2\alpha\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}\right)=\frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{-3\alpha^2+8\alpha\pi^2}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}\right)$$

$$V'(\alpha)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=0\notin(0;2\pi)\\ \alpha=\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}\\ \alpha=-\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}\notin(0;2\pi)\end{array}\right.\Rightarrow V=\frac{1}{3\pi^2}\times\frac{8}{3}\pi^2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}(dm^3)$$

Bảng biến thiên:

α	0		$\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$		2π
$V'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$V(\alpha)$		↗	$V_{max}=\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{27}$	↘	

Thể tích lớn nhất của cái gầu $\dfrac{16\sqrt{3}\pi}{27}\approx 3,22\,(dm^3)$

Câu 193. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $120\,\text{cm}$ từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu centimet?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 80

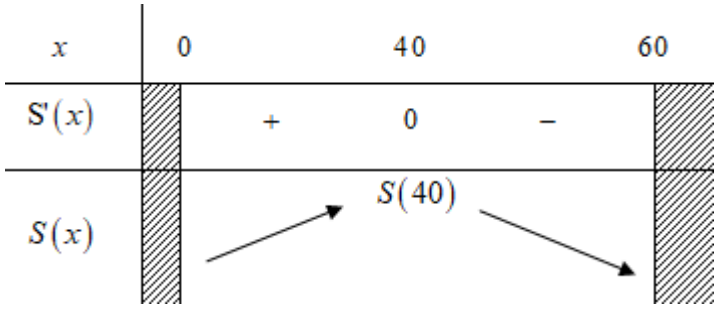
Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x.\sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0;60)$

Ta có $S,(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x.\frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$

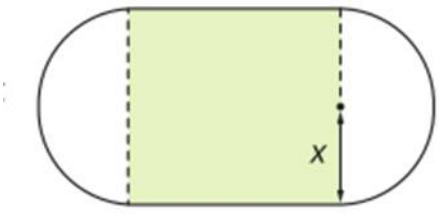
Lập bảng biến thiên ta có:



Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$.

Vậy cạnh huyền của tấm gỗ này là $80cm$

Câu 194. Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính $x(\text{m})\,(x > 0)$ và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m, tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6366

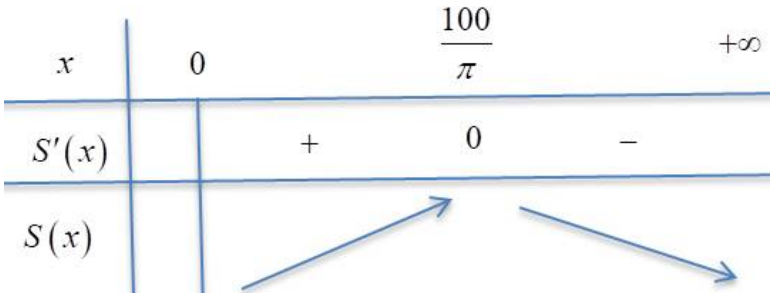
Chu vi phần hình bán nguyệt là $2\pi x$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $200 - \pi x$.

Diện của sân hình chữ nhật là $S(x) = 2x(200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$.

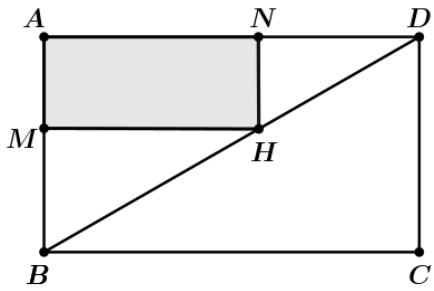
$S'(x)=400-4\pi x$.

$S'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{100}{\pi}$.



Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $S\left(\dfrac{100}{\pi}\right)\approx 6366\ \text{m}^2$.

Câu 195. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25\,\text{m}^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H, với H thuộc cạnh BD. Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu triệu đồng với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2 ? (làm tròn kết quả đến hàng thập phân thứ hai của triệu đồng)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,44$

Ta có $AB.AD=25\left(m^2\right);\dfrac{NH}{AB}=\dfrac{DN}{DA}$. Đặt $\dfrac{NH}{AB}=\dfrac{DN}{DA}=x\Rightarrow NH=x.AB;AN=(1-x)AD$

Diện tích đất trồng cỏ là: $S=AN.NH=x.(1-x).AB.AD=25.x.(1-x)$

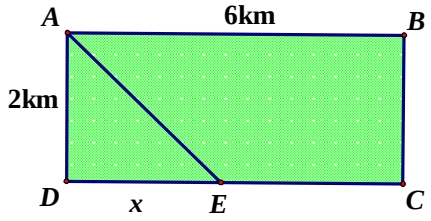
Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất mà $x.(1-x)\le\dfrac{(x+1-x)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S=\dfrac{1}{4}.25=\dfrac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T=\dfrac{25}{4}.70000=437500$ đồng hay $0,44$ triệu đồng

Câu 196. Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD=2$ km và chiều dài $AB=6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C. Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD,

sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C. Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất?(kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm của kilomet)



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,16

Gọi E là điểm trên cạnh CD mà người nông dân đi tới từ A.

Gọi x là khoảng cách DE $(0 \le x \le 6)$.

Khoảng cách đi bộ trên đường là $EC = DC - DE = 6 - x$.

Ta có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 2^2 + x^2 = 4 + x^2$

Suy ra $AE = \sqrt{4 + x^2}$ (km)

Lại có $EC = 6 - x$ (km)

Thời gian người nông dân đi từ A tới E là $t_{AE} = \dfrac{\sqrt{4 + x^2}}{4}$ (giờ)

Thời gian người nông dân đi từ E tới C là $t_{EC} = \dfrac{6 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian người nông dân đi từ A đến C là tổng của hai khoảng thời gian trên:

$$T(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{4} + \frac{6 - x}{8}$$

Ta có $T'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{4 + x^2}} - \dfrac{1}{8}$.

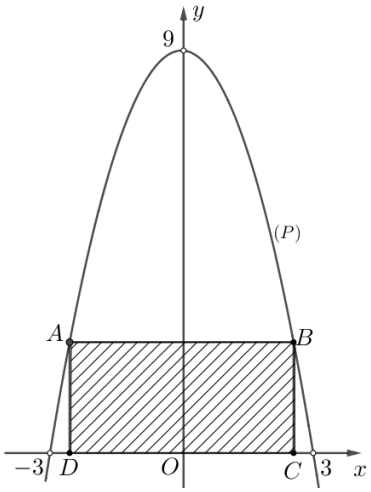
$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{4\sqrt{4 + x^2}} - \dfrac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Vì $0 \le x \le 6$ nên suy ra $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$		6
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$		↘	$-\infty$	↗	

Vậy để tổng thời gian di chuyển ít nhất thì điểm E phải cách điểm D một khoảng là $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ km $\approx 1{,}16$ km.

Câu 197. Một hình chữ nhật $ABCD$ được vẽ bên trong parabol (P) sao cho A, B thuộc (P); C, D thuộc trục Ox như hình vẽ (đơn vị trên trục Ox, Oy là mét). Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20,8

Đồ thị (P) nhận Oy làm trục đối xứng nên có phương trình $y = ax^2 + c$.

Do (P) đi qua điểm $(0;9)$ và $(3;0)$ nên ta có hệ $\begin{cases} c = 9 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ a = -1 \end{cases}$.

Ta thu được $(P): y = -x^2 + 9$.

Giả sử $C(m;0)$, $(0 < m < 3)$, khi đó $B\left(m; -m^2 + 9\right)$.

Ta có $AB = 2m$ và $BC = -m^2 + 9$.

Diện tích hình chữ nhật là $S_{ABCD} = AB.BC = 2m\left(-m^2 + 9\right) = -2m^3 + 18m$.

Xét hàm số $f(m) = -2m^3 + 18m$ với $m \in (0;3)$.

Ta có $f'(m) = -6m^2 + 18$, $f'(m) = 0 \Leftrightarrow -6m^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}$ (do $m > 0$).

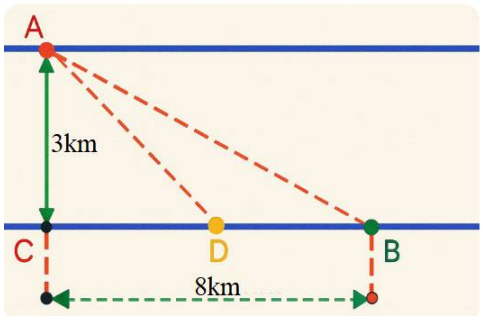
Bảng biến thiên của $f(m)$:

m	0		$\sqrt{3}$		3
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$	0	↗	$12\sqrt{3}$	↘	0

Suy ra $\max S_{ABCD} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể của hình chữ nhật $ABCD$ xấp xỉ $20,8\,m^2$.

Câu 198. Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt *(như hình vẽ)*. Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h, chạy với vận tốc 8km/h, $AC = 3$km, $BC = 8$km và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất *(đơn vị: giờ)* để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,33

Đặt $CD = x\ (km)$ $(0 \le x \le 8)$, $AD = \sqrt{9+x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B.

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\dfrac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$;

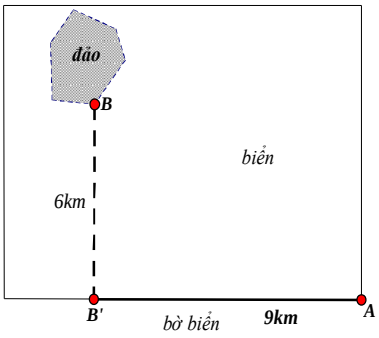
$f'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \dfrac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{\sqrt{7}} \in [0;8]$.

x	0		$\dfrac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[0;8]} f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 199. Một công ty xây dựng muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là $9km$. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng bao nhiêu km?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,5.

Đặt $x = B'C \ \ (km)$, $x \in [0;9]$

$BC = \sqrt{x^2+36}; AC = 9-x$

Chi phí xây dựng đường ống là $C(x) = 130.000\sqrt{x^2+36} + 50.000(9-x) \qquad (USD)$

Hàm $C(x)$, xác định, liên tục trên $[0;9]$ và $C'(x) = 10000.\left(\dfrac{13x}{\sqrt{x^2+36}} - 5\right)$

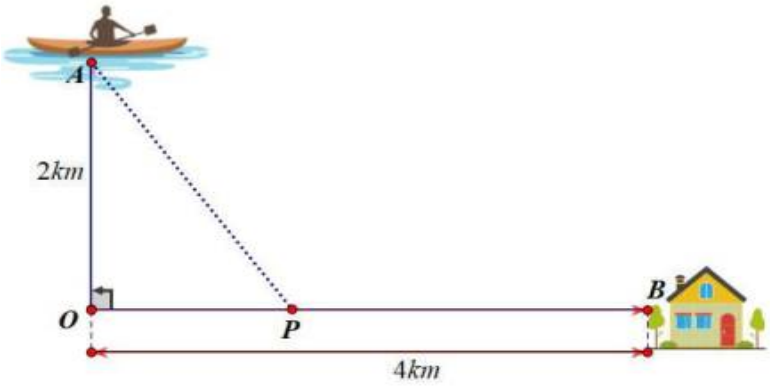
$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2+36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2+36) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

$C(0) = 1.230.000$; $C\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1.170.000$; $C(9) \approx 1.406.165$

Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$.

Vậy C cần cách A một khoảng 6,5km.

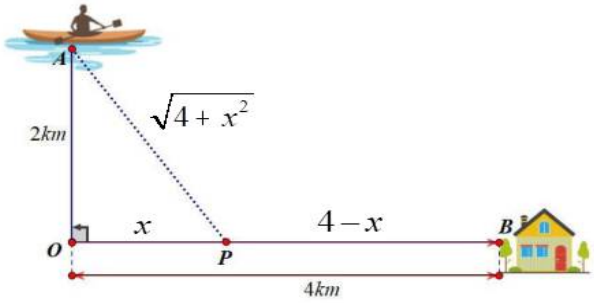
Câu 200. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40



Đặt $OP = x\ \ (0 < x < 4) \Rightarrow BP = 4 - x\ ;\ \ AP = \sqrt{4 + x^2}$.

Khoảng thời gian để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{(x)} = t_{AP} + t_{PB} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{4-x}{10}(h). \quad \Rightarrow t'_{(x)} = \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

$$t'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{4+x^2} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 4x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

BBT:

x	0		$\frac{3}{2}$		4
$t'(x)$		−	0	+	
$t(x)$		↘	$\frac{2}{3}$	↗	

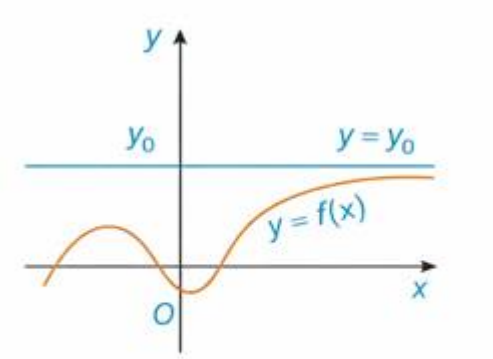
Từ BBT suy ra khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là:

$$t_{\min} = \frac{2}{3}(h) = \frac{2}{3}.60 = 40 \text{ (phút).}$$

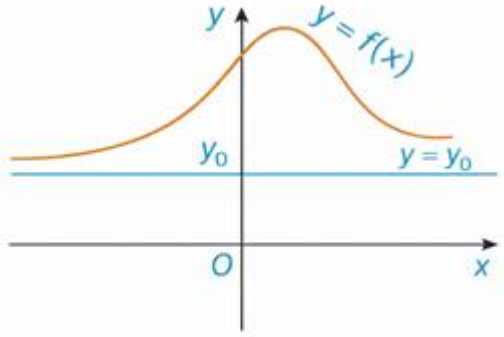
BÀI 3
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

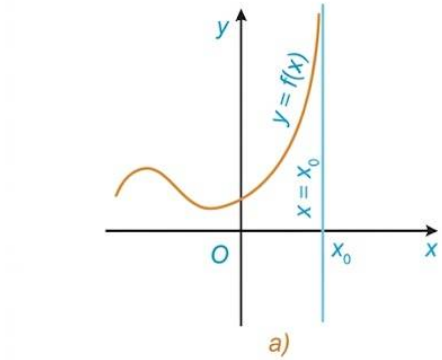


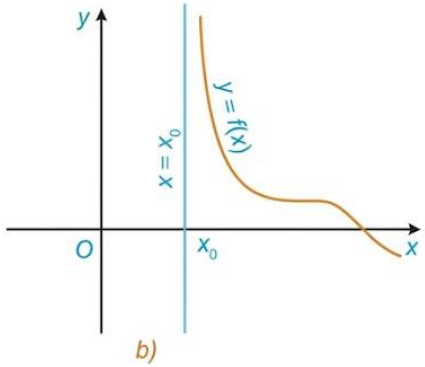
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

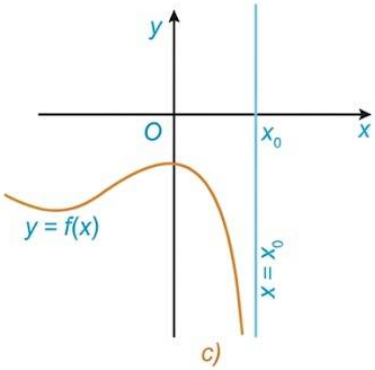
2. Đường tiệm cận đứng

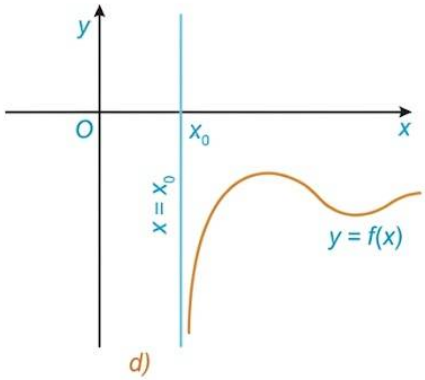
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$







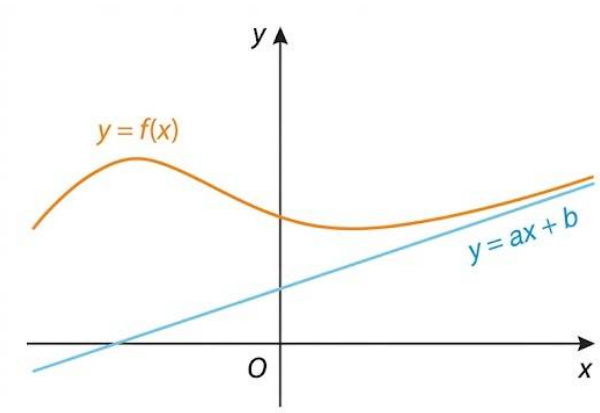


a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

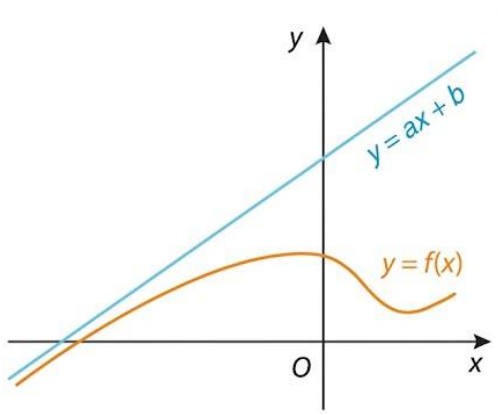
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Chú ý: Nếu đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ được gọi là **tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right].\dfrac{1}{x}=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right].\dfrac{1}{x}=0$

Suy ra $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Khi đó: $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hoặc $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

Ngược lại , với a và b xác định như trên, đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Đặc biệt, nếu $a=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG

DẠNG 1
TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Phương pháp tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định (tập xác định) của hàm số $y=f(x)$

Bước 2: Tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến biên của miền xác định.

Bước 3: Từ các giới hạn và định nghĩa tiệm cận suy ra phương trình các đường tiệm cận.

Chú ý:

• Trường hợp $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x)=0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x=x_0$ (x_0 là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow x=x_0$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $P(x)=$ bậc $Q(x)$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $P(x)>$ bậc $Q(x)+1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ: $\begin{cases}Q(x)=0\\P(x)\neq 0\end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a,b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công thức: $\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]\end{cases}$.

• Thông thường, ta tìm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (phần dư) = 0.

• Hàm đa thức không có các đường tiệm cận.

2. Kỹ năng dùng Casio

a. Giới hạn của hàm số tại một điểm

• $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

b. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=10^9$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=-10^9$.

Bài 1. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-2026}{x+2027}$ b) $y=\dfrac{x}{3x-2}$ c) $y=\dfrac{2027}{2026-x}$

Bài 2. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2025x}{x^2-9}$ b) $y=\dfrac{2-x}{1-x^2}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4}$

Bài 3. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ b) $y=\dfrac{5-x}{x^2-25}$ c) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-8x+7}$

Bài 4. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=x+2025-\dfrac{1}{3-x}$ b) $y=\dfrac{x^2+3}{x+4}$ c) $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x$

Bài 5. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$ b) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ c) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$

Bài 6. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}$ c) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

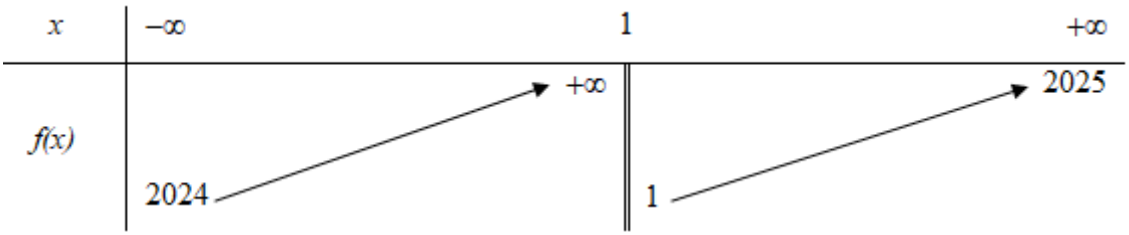
DẠNG 2

TÌM TIỆM CẬN KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Phương pháp

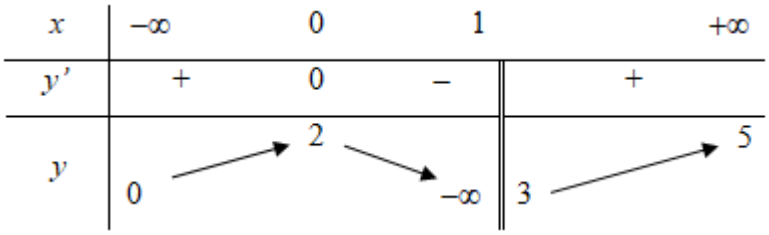
- **Bước 1:** Dựa vào bảng biến thiên và đồ thị để tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2:** Quan sát bảng biến thiên và đồ thị để suy ra giới hạn khi x đến một bên của miền xác định.
- **Bước 3:** Kết luận.

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:



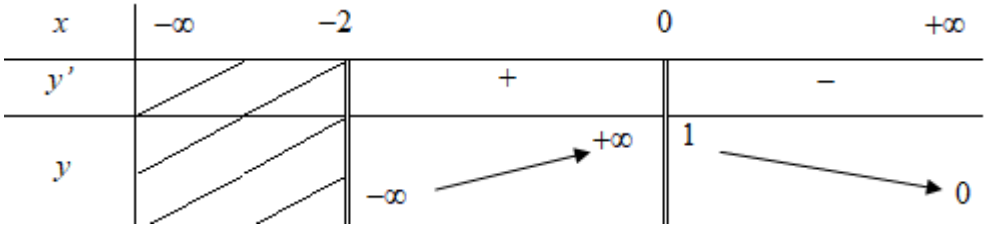
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



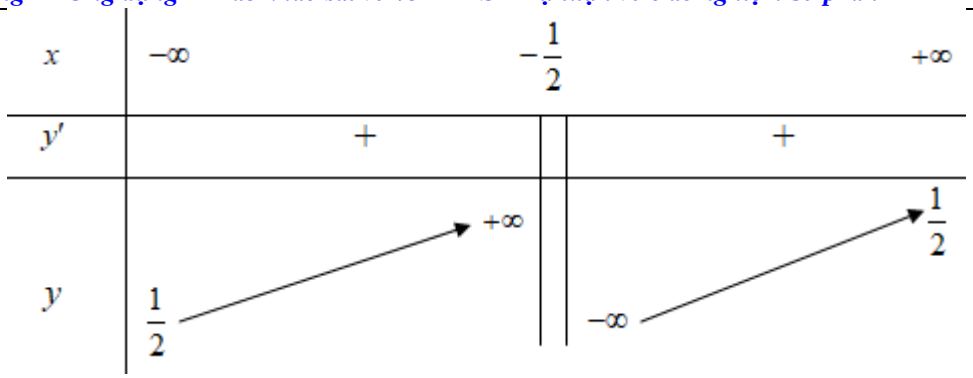
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



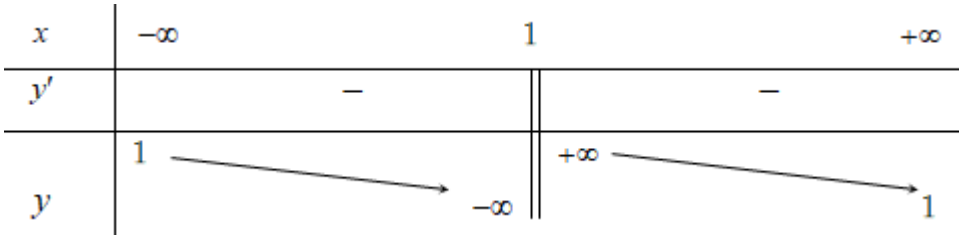
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



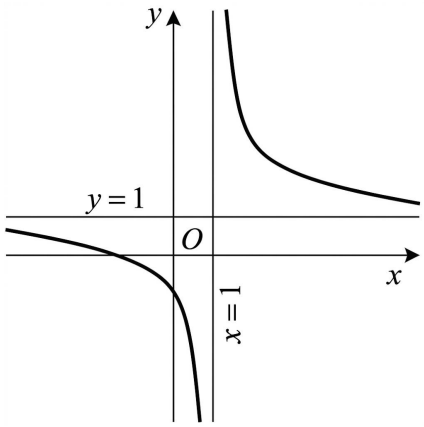
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



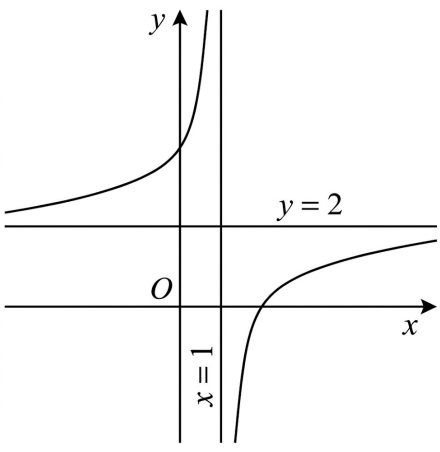
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



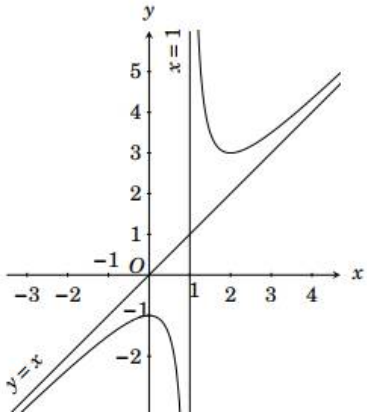
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



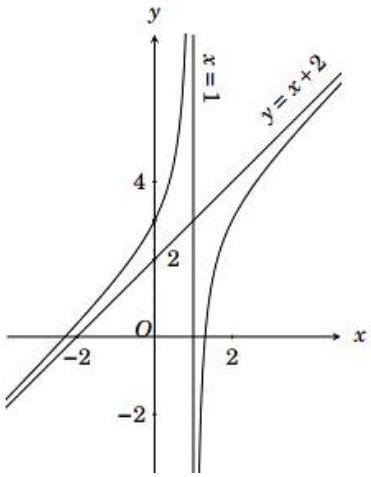
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



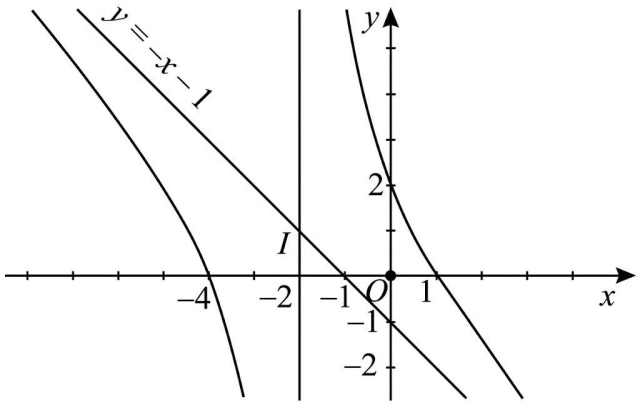
Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



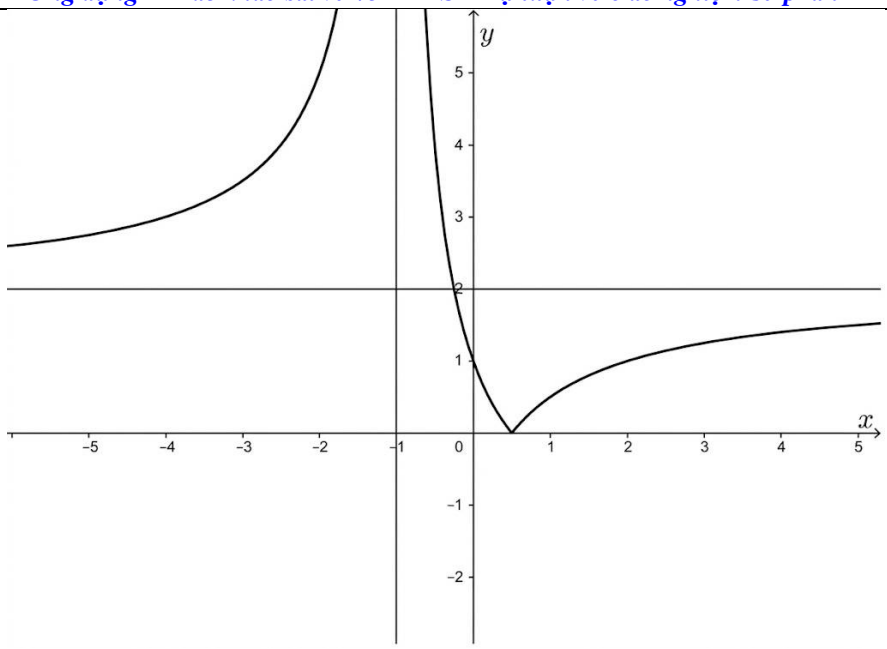
Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



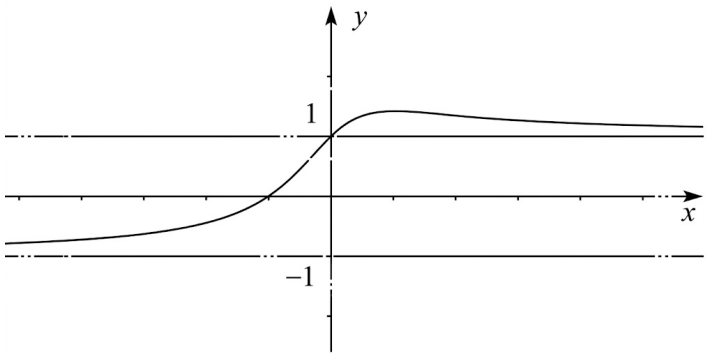
Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



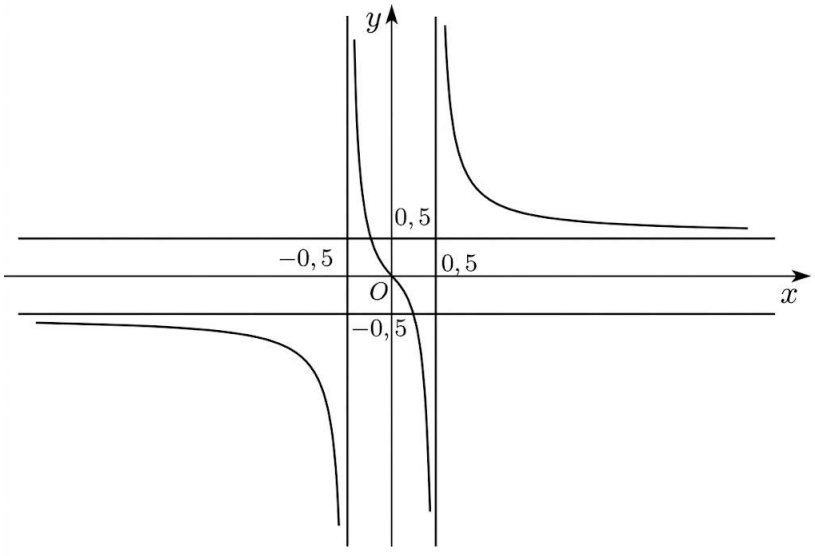
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



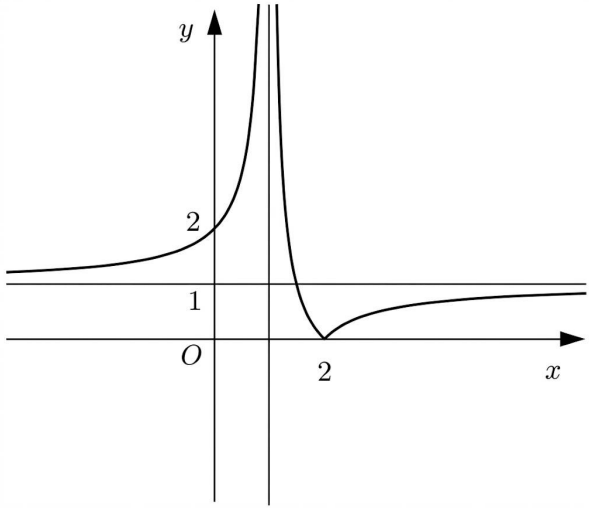
Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

DẠNG 3
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong t (tháng) được tính theo công thức $S(t)=1000-\dfrac{1800}{t+2}$, trong đó $t\ge 1$.

a) Xem $y=S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong t (tháng) khi t đủ lớn.

Bài 2. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\ge 0$.

a) Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=y(t)$.

b) Có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Bài 3. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=2x+50$ (triệu đồng). Khi đó $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Bài 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài 5. Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút.

a) Xác định hàm số $f(t)$

b) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$.

Bài 6. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách với phí xuất bản là 10 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 70000 đồng. Gọi $t(t\ge 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (đơn vị: nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách.

a) Xác định hàm số $f(t)$

b) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$.

DẠNG 4

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

Một số dạng toán thường gặp:

• **Dạng 1:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c\neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $ad-bc\neq 0$.

• **Dạng 2:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-x_0}$ với $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm $x=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)\neq 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0$.

- Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên khi $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên khi $a=0$.

• **Dạng 3:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-x_0}{ax^2+bx+c}$ với $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(x_0)\neq 0\end{cases}$.

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0$.

• **Dạng 4:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)}$ với $a\neq 0,\ x_1\neq x_2$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=ax^2+bx+c=0$ không nhận x_1,x_2 là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}g(x_1)\neq 0\\ g(x_2)\neq 0\end{cases}$.

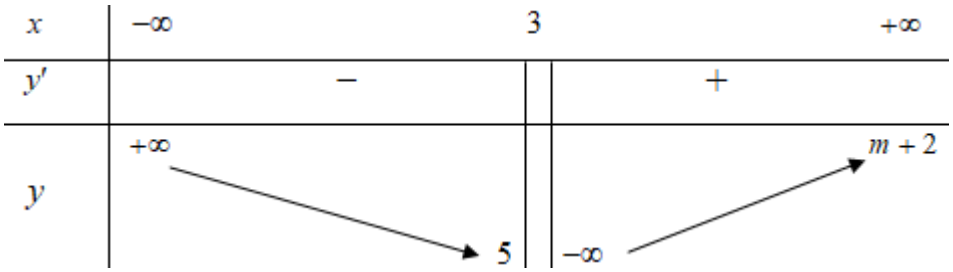
- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x=x_1$ hoặc $x=x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}g(x_1)=0\\ g(x_2)=0\end{array}\right.$ (Chú ý hai điều kiện này không đồng thời xảy ra).

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ nhận $x=x_1$ và $x=x_2$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}g(x_1)=0\\ g(x_2)=0\end{cases}$.

• **Dạng 5:** Biện luận số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

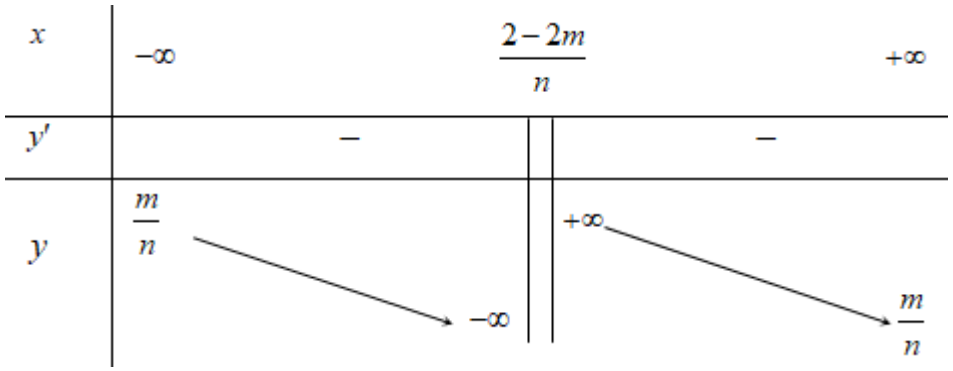
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bậc của mẫu số lớn hơn hoặc bằng bậc của tử số và phải tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

Bài 1. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



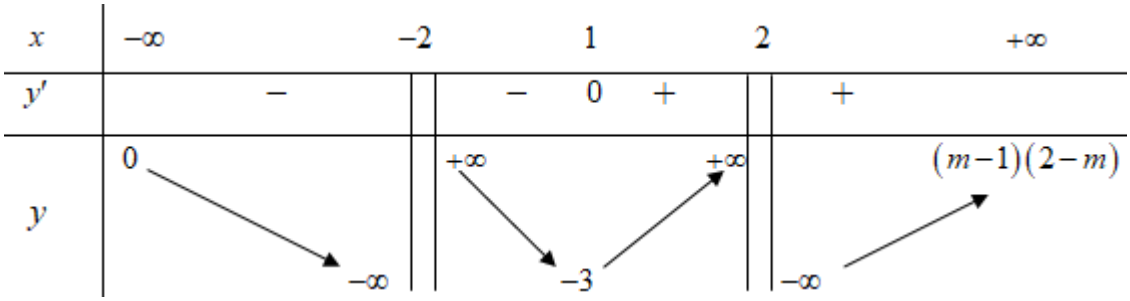
Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_o$ và tiệm cận ngang $y=y_o$ sao cho $x_o y_o<30$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



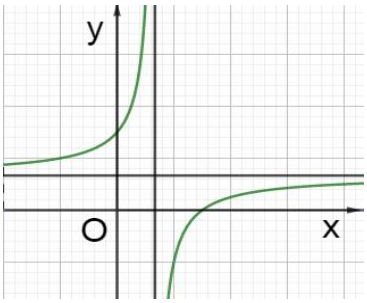
Tìm tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$, $y=2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2026}$?

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{(a-3b)x^2+bx-1}{x^2+ax-a}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=2$ là tiệm cận đứng và $y=1$ là tiệm cận ngang.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=0$ là tiệm cận ngang.

Bài 7. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x=5$.

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

Bài 9. Tìm tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{2x-1}{4x^2+4mx+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Bài 11. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng.

Bài 13. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận

Bài 16. Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\left(m^2-1\right)x^2+x+2}}{x+1}$ có đúng một tiệm cận ngang.

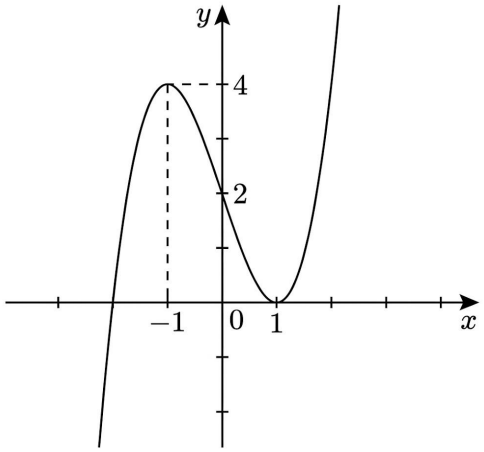
Bài 17. Cho hàm số $y=\sqrt{mx^2+2x}-x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

Bài 18. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=2x+\sqrt{mx^2-x+1}+1$ có tiệm cận ngang.

Bài 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x-m\right)^2\left(2x-m\right)}{\sqrt{4x-x^2}-2}$ có tiệm cận đứng.

DẠNG 5
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN

Bài 1. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

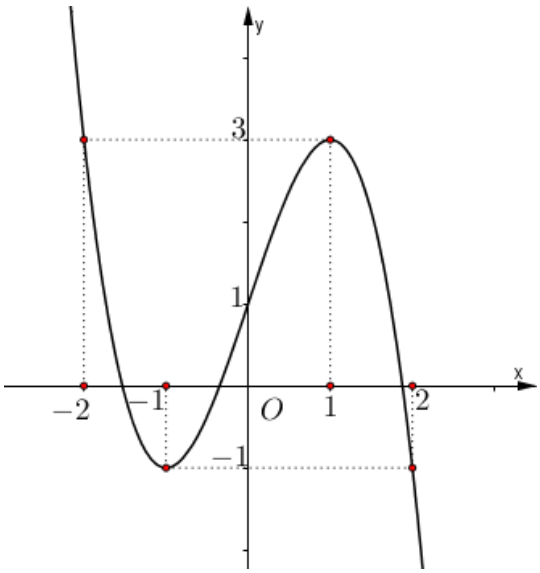
Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}f(x)=1$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}$. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tổng bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

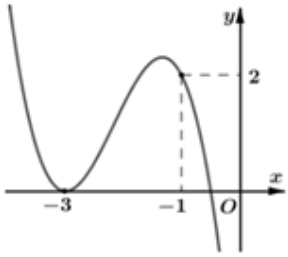
Đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là bao nhiêu?

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

Bài 6. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



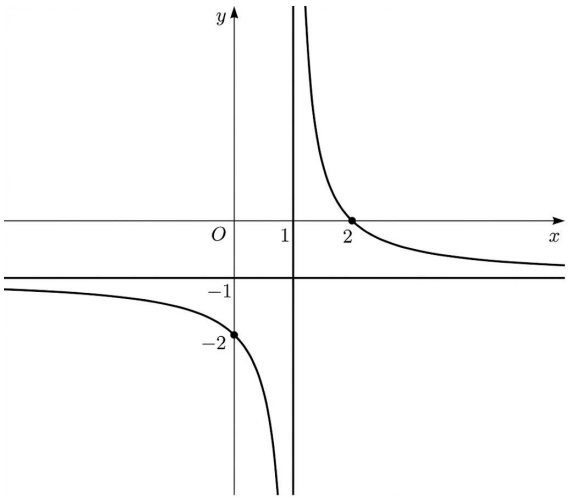
Đồ thị hàm $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là bao nhiêu?

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

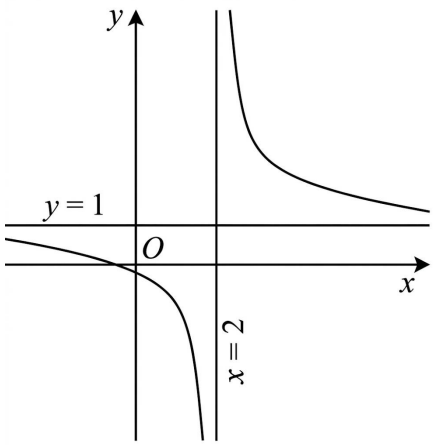
Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

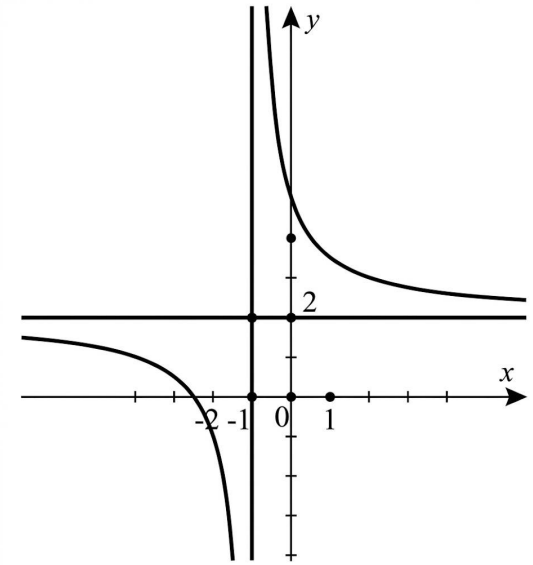
Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang bằng:

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

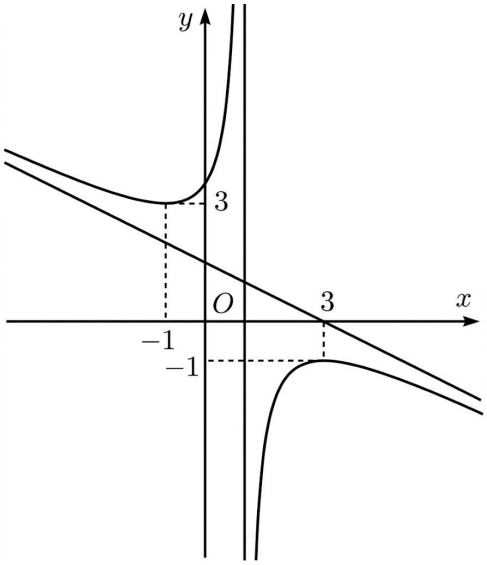
Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang bằng:

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

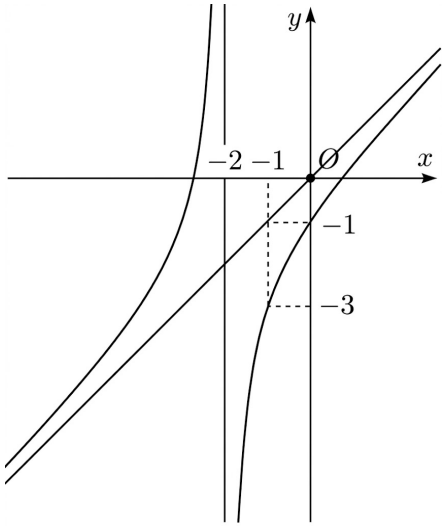
Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là:

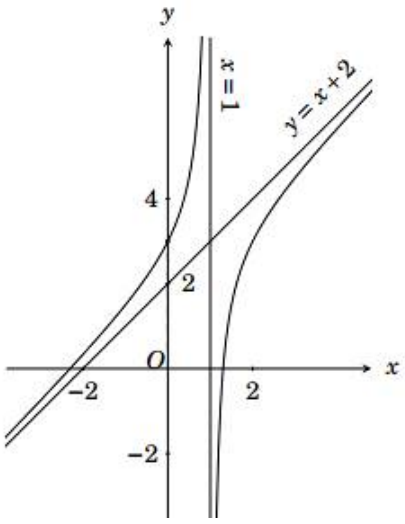
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-2$

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây sai?

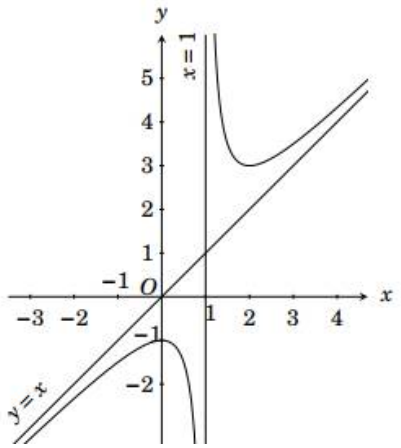
A. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$

B. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

C. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$

D. Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây đúng?

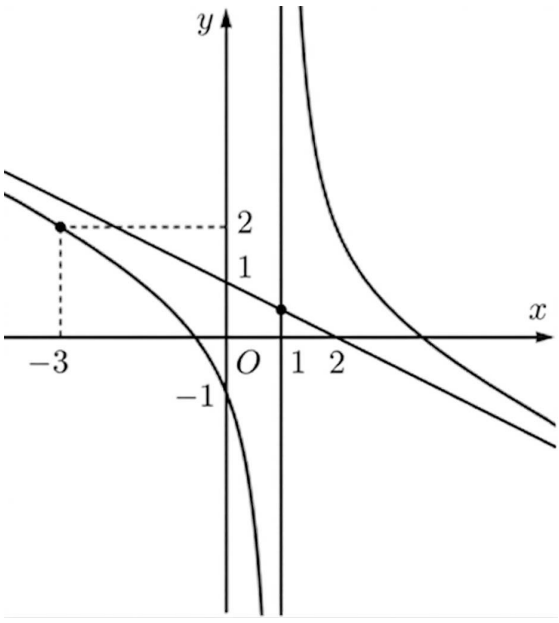
A. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$

B. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=1$

C. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=x$

D. Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;1)$.

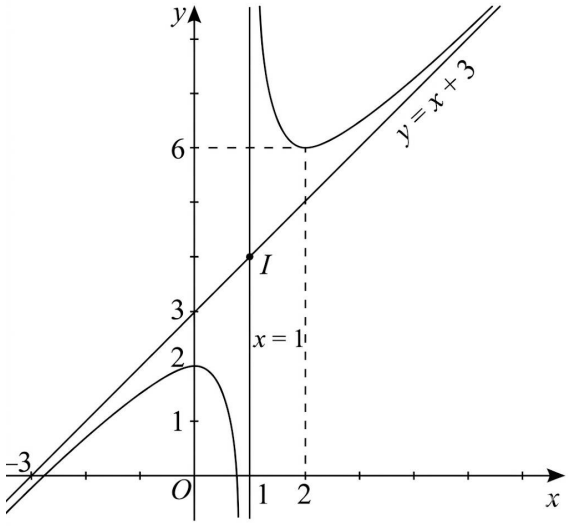
Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-2$.

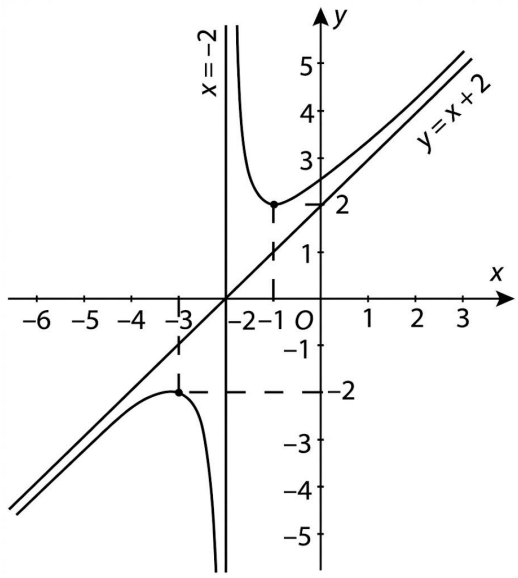
Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=x-3$.

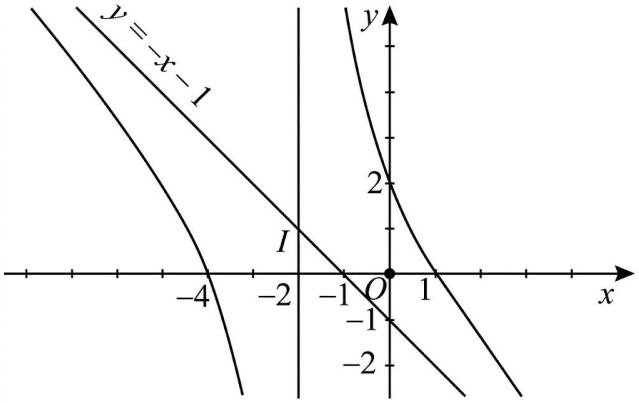
Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

A. $y=x+2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=x-2$.

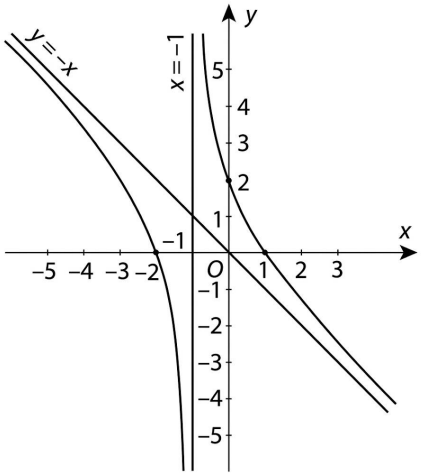
Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

A. $y=x-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=-x-1$.

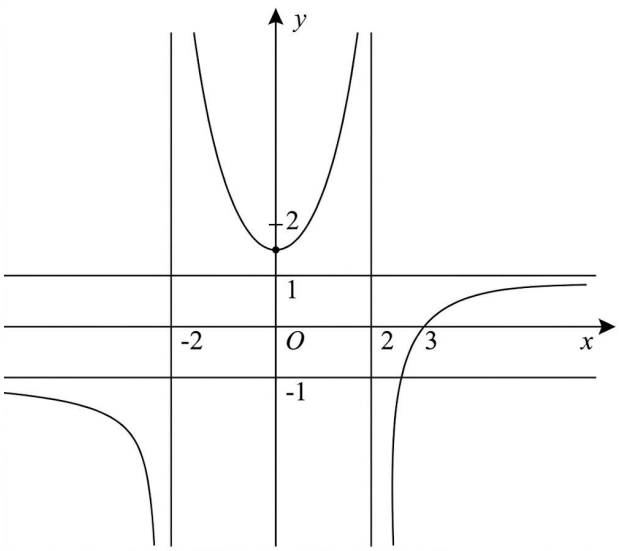
Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

A. $y=x$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=-x$.

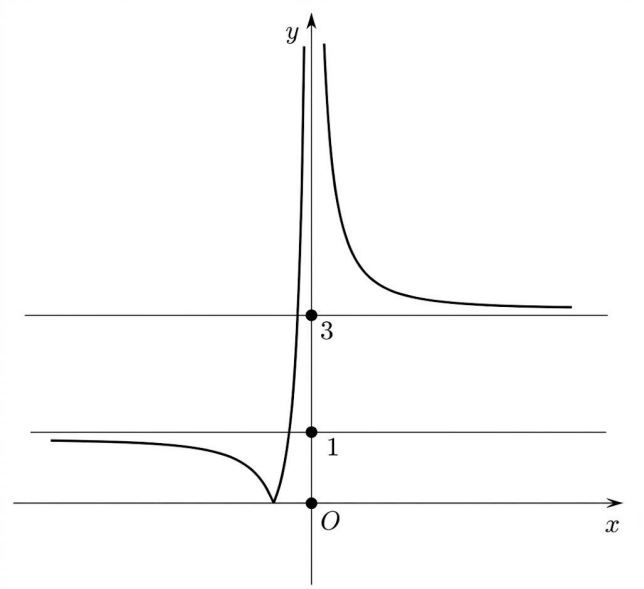
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

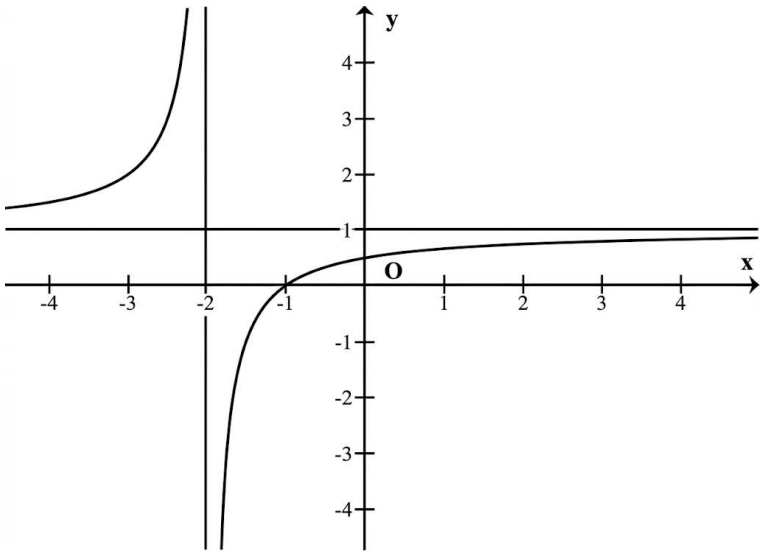
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.

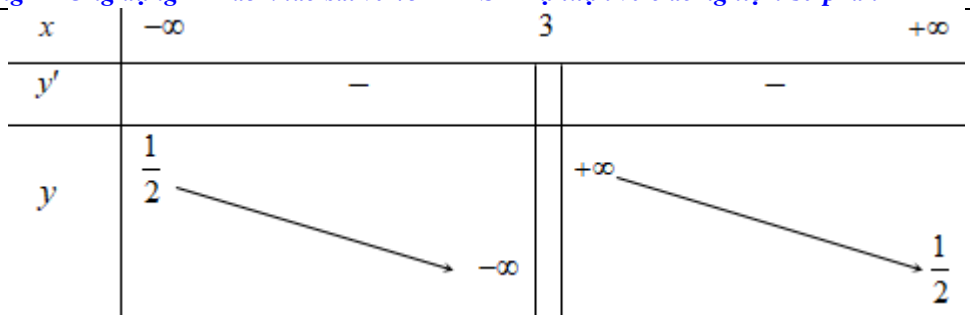


Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. Tiệm cận đứng $x=-2$, tiệm cận ngang $y=1$. **B.** Tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$. **D.** Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

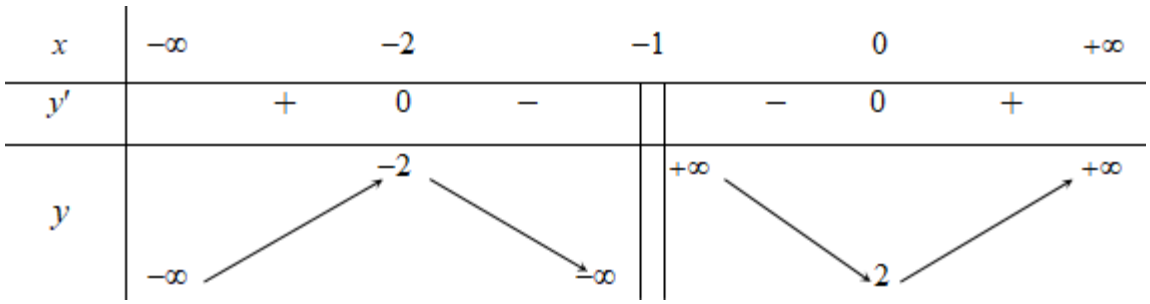
Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $y=3$. **B.** $x=3$. **C.** $y=\frac{1}{2}$. **D.** $y=\frac{1}{2}$.

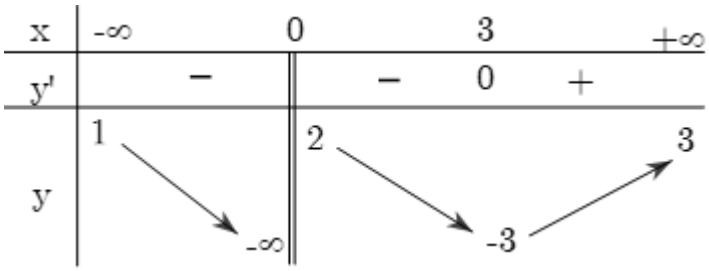
Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

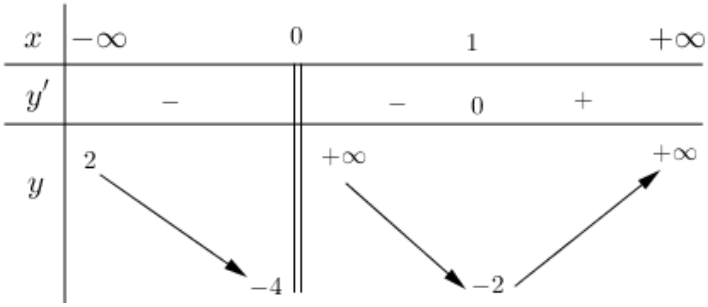
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

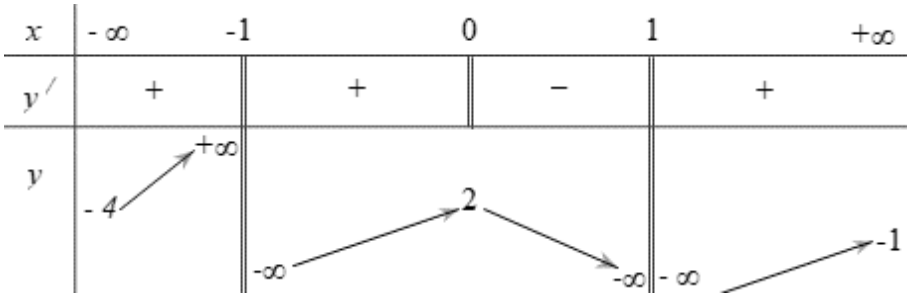
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

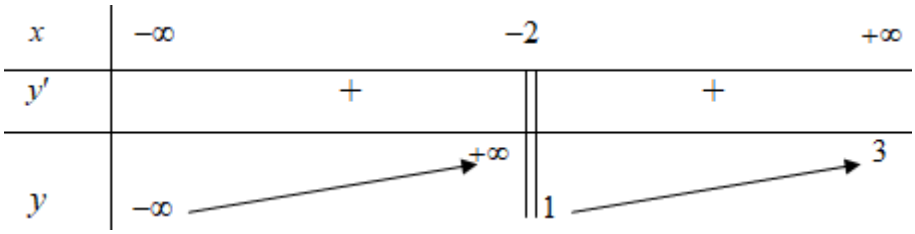
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

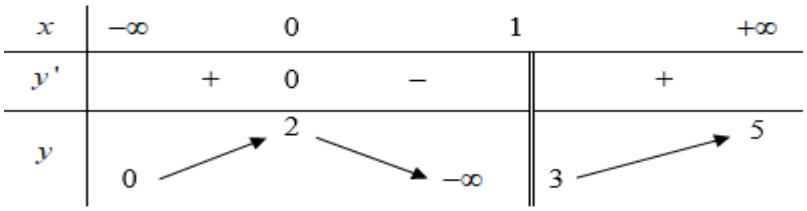
Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

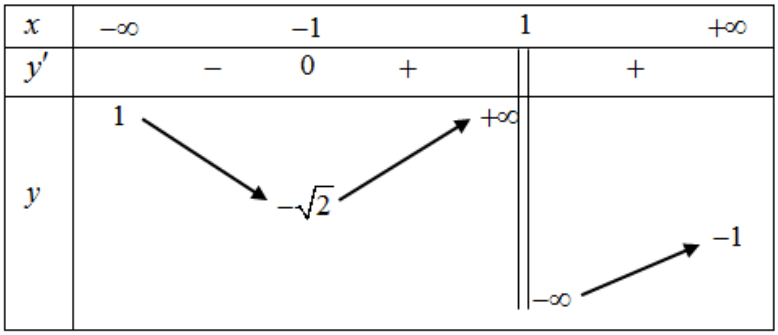
Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

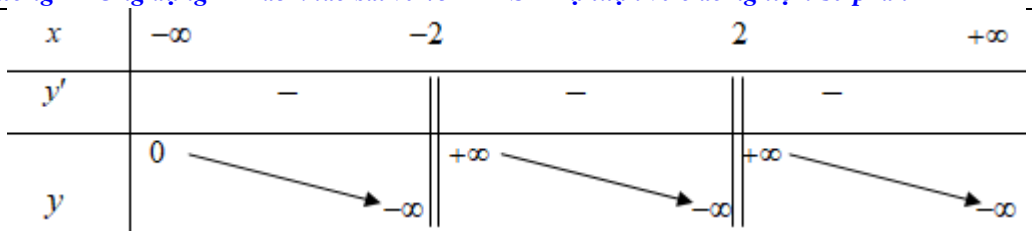
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 25. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-2$.

Câu 26. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 27. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 28. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Câu 29. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 31. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x-2$ **B.** $y=x+2$

C. $y=x-1$ **D.** không có tiệm cận xiên

Câu 32. Đồ thị hàm số $y=x+2025-\dfrac{2026}{x+1}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x+2025$ **B.** $y=x-2025$ **C.** $y=x-2026$ **D.** $y=x+2026$

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+2}{4-x}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x-1$ **B.** $y=-x+1$ **C.** $y=-x-1$ **D.** $y=x+1$

Câu 34. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=x+3+\dfrac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y=2x+1$. **B.** $y=x-3$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=2x-1$.

Câu 35. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(5;3)$. **B.** $(-4;-5)$. **C.** $(6;-1)$. **D.** $(2;-10)$.

Câu 36. Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thì hàm số là đường thẳng:

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Câu 38. Xác định toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

A. $(1;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 39. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

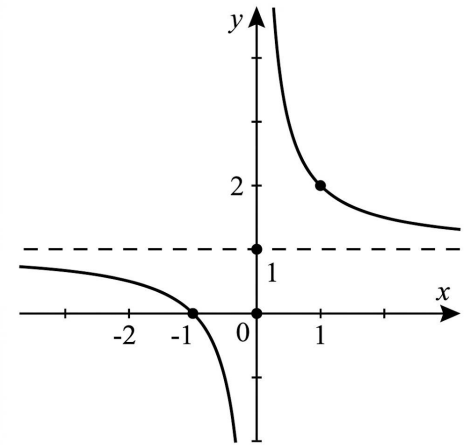
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Câu 40. Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình bên.



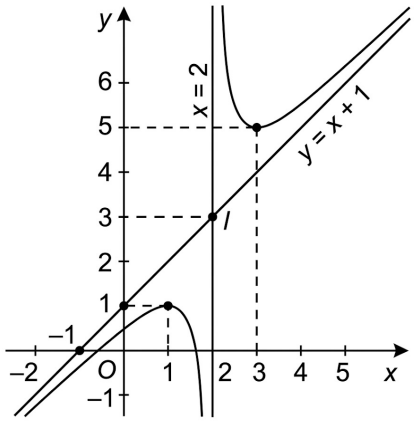
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=1$, đường tiệm cận ngang $y=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



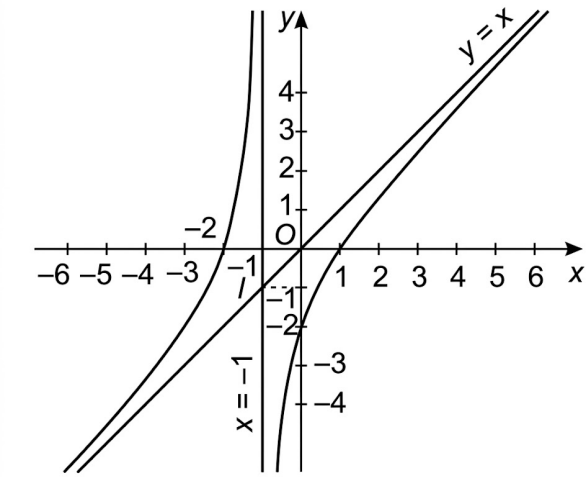
a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, đồng biến trong khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(1;1)$ và điểm cực tiểu $(3;5)$.

d) Trên khoảng $(2;+\infty)$, hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;0)$ và điểm cực tiểu $(0;-2)$.

d) Trên khoảng $(-\infty;-1)$, hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}$.

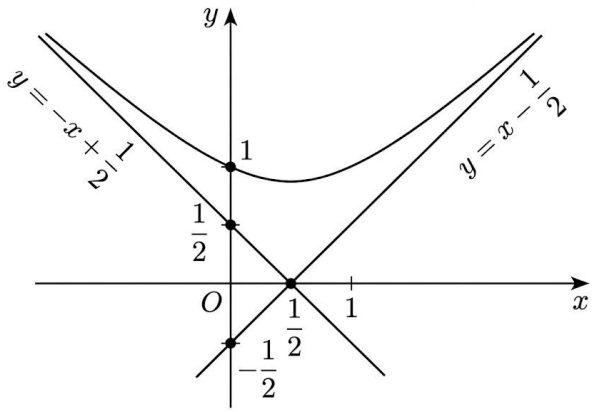
a) Hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



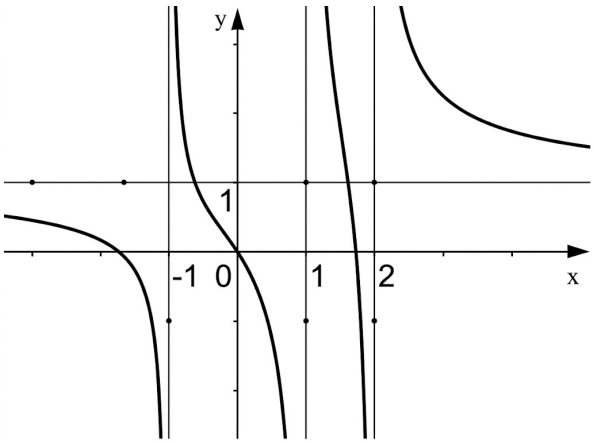
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có một tiệm cận xiên $y=x-\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không cực trị.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$ và có đồ thị như hình bên.



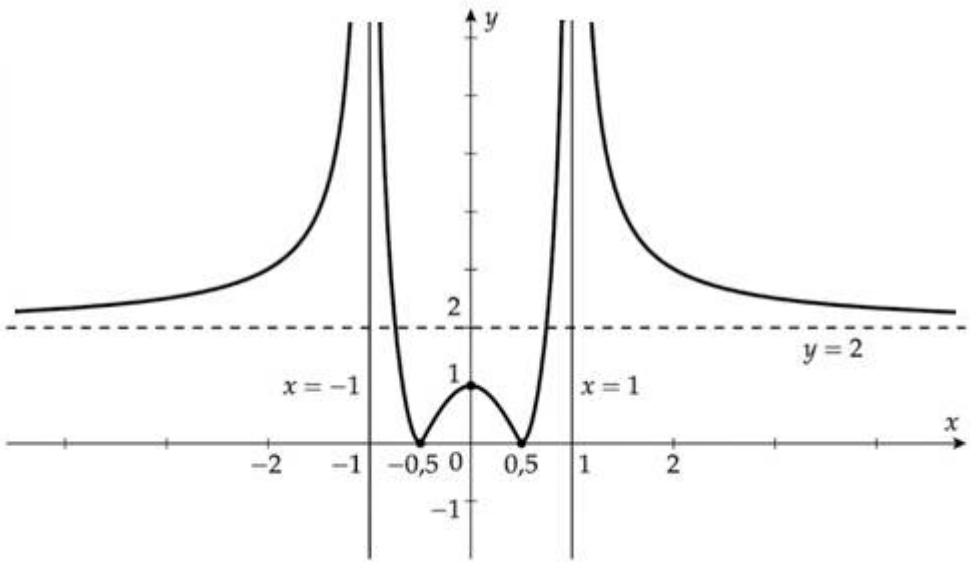
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có đồ thị như hình bên.



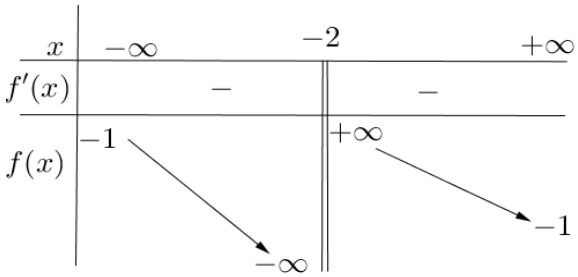
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 3.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và bảng biến thiên như hình sau:



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y=-1$

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
y	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1 | $+\infty$	↗	2	↘	3

a) Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=-2027$, $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=2026$.

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=-2027$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên là $y=x+2$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng ba tiệm cận.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có các giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=2026$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2027$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=0$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

b) Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

c) Đường thẳng $x=2026$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên là $y=2x+1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

b) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-10)$ và $(10;+\infty)$.

d) Trên đoạn $[3;5]$, hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{9}$ và có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{9}{14}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=-x-4$ là tiệm cận xiên của (C).

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực đại là $(-5;12)$ và điểm cực tiểu là $(1;0)$.

Câu 54. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=5$ là tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=x-3$ là tiệm cận xiên của (C).

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;5)$, nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực trị.

Câu 55. Cho hàm số $(C)\colon y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta\colon y=ax+b$

a) Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành bằng 2.

b) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;9)$.

c) Gọi $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ thì diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{9}{4}$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ bằng 3.

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận ngang.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) nằm trên parabol $y=2x^2-1$

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x+y-2025=0.$

Câu 57. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c) Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục tung.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) song song với đường thẳng $x+y=0.$

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị (C_1) và $g(x)=\frac{2x^2-3x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C_2). Biết đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$; đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

a) $x_0+2y_0+3b=8$.

b) Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y=\frac{1}{2}$..

d) Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

c) Giao điểm của ba đường tiệm cận $x=x_0$, $y=y_0$ và $y=ax+b$ tạo thành tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số (C) có một đường tiệm cận ngang.

c) Hệ số góc của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng 2.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{49}{4}$.

Câu 60. Cho đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=-1$ và $x=0$ là hai tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C).

c) Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận xiên.

d) Đồ thị hàm số đã cho chỉ có hai đường tiệm cận.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 61. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0\le x<100$. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=C(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 62. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x\ge 1$.

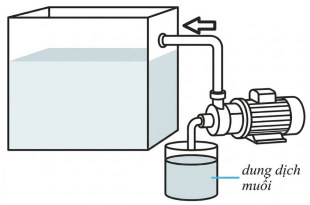
Số lượng sản phẩm lớn nhất mà công ty có thể bán được trong x tháng bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 63. Nồng độ muối trong bể được tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ (t là thời gian nước chảy vào bể (phút)). Nồng độ muối lớn nhất mà bể có thể đạt được là bao nhiêu gam/lit?

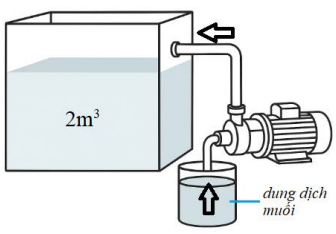
Trả lời: ……..

Câu 64. Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y=a,(a\in\mathbb{R})$. Tìm a



Trả lời: ……..

Câu 65. Một bể chứa $2m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối có trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?



Trả lời: ……..

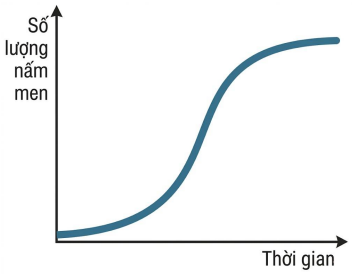
Câu 66. Một bể chứa ban đầu có 300 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 60 lít nước và 20 gam chất khử trùng (hoà tan). Biết rằng nồng độ chất khử trùng luôn tăng theo thời gian và không vượt ngưỡng $\frac{1}{a}$ gam/lít. Tìm a.

Trả lời: ……..

Câu 67. Một nhà Văn muốn xuất bản một cuốn sách Văn Học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t\left(t\ge 1\right)$ là số cuốn sách sẽ in và $f\left(t\right)$ (đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là $y=a,\left(a\in\mathbb{R}\right)$. Tìm a

Trả lời: ……..

Câu 68. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P\left(t\right)=\frac{a}{b+\mathrm{e}^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu con?



Trả lời: ……..

Câu 69. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=400\left(2+\frac{3}{x+2}\right)$ với $x\ge 1$. Ta coi $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong một khoảng thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

Câu 70. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất đư c một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x\left(x\ge 1\right)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P\left(x\right)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x dồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F\left(x\right)=\frac{P\left(x\right)}{x}$. Xem $F\left(x\right)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu (USD)?

Trả lời: ……..

Câu 71. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t)=\dfrac{30000+2000t}{t}(\text{USD})$. Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó không thể thấp hơn hơn bao nhiêu (USD)

Trả lời: ……..

Câu 72. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S(x)=300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x\ge 1$. Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

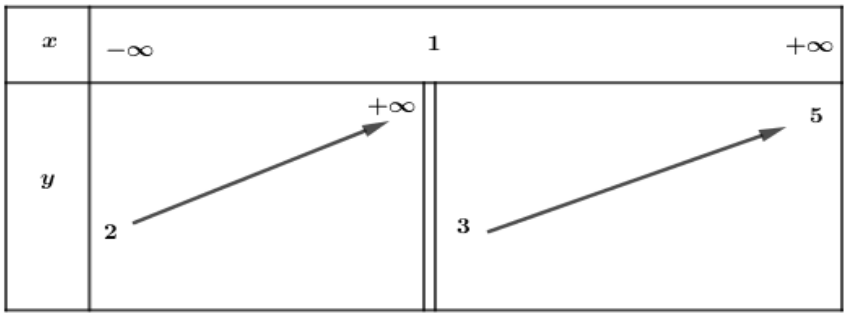
Câu 73. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x)=\dfrac{50x}{x+4}(x\ge 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 74. Một cơ sở sản xuất tính toán rằng số sản phẩm trung bình mà một nhân viên làm được mỗi ngày là $f(x)=\dfrac{100x}{x+10}$ với x là số ngày kinh nghiệm làm việc $(x\ge 0)$. Xem $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$. Khi số ngày kinh nghiệm làm việc tăng lên thì số sản phẩm trung bình tối đa mà một nhân viên có thể làm được trong một ngày là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

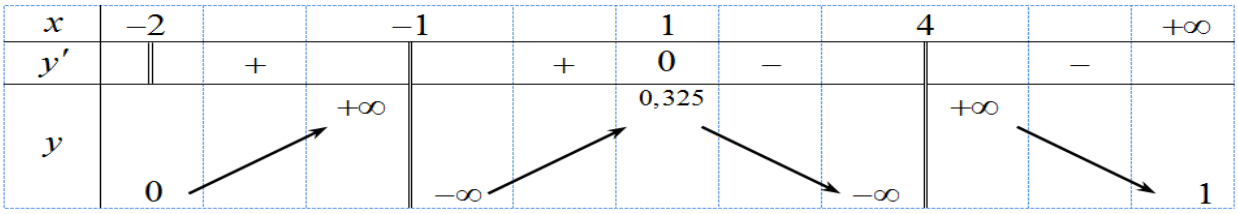
Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

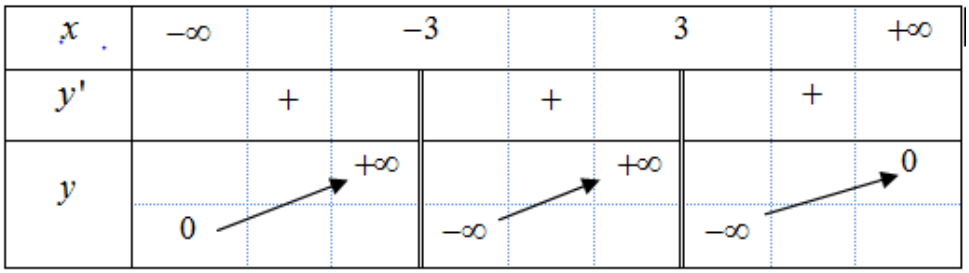
Câu 76. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

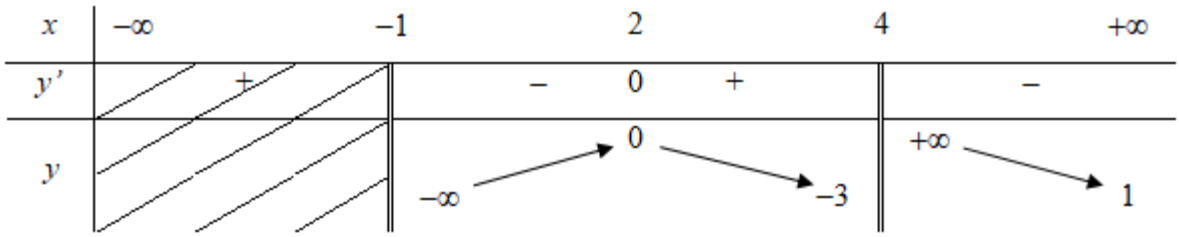
Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến như sau:



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

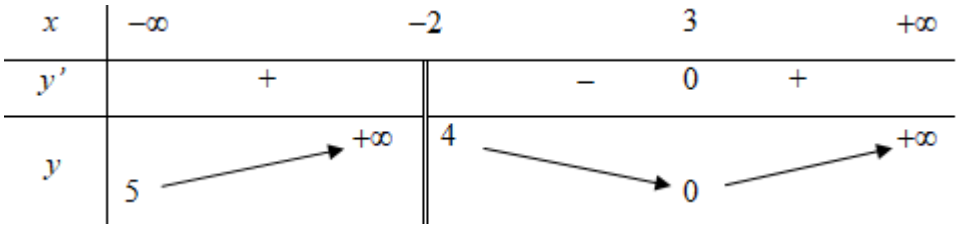
Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-1;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

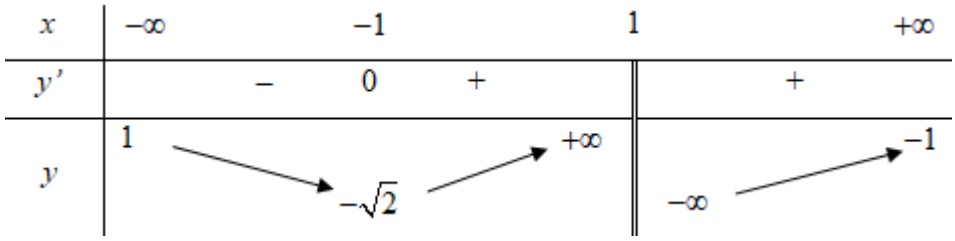
Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

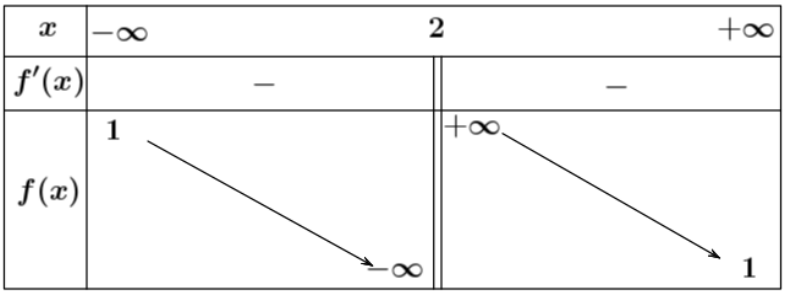
Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

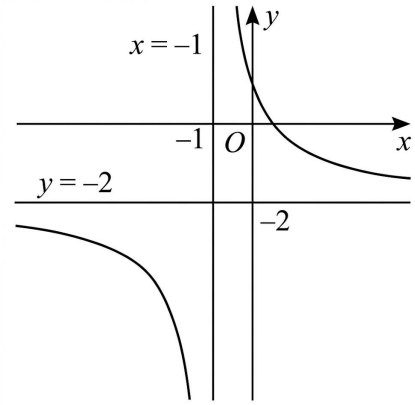
Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính $x_0+2026y_0$.

Trả lời: ……..

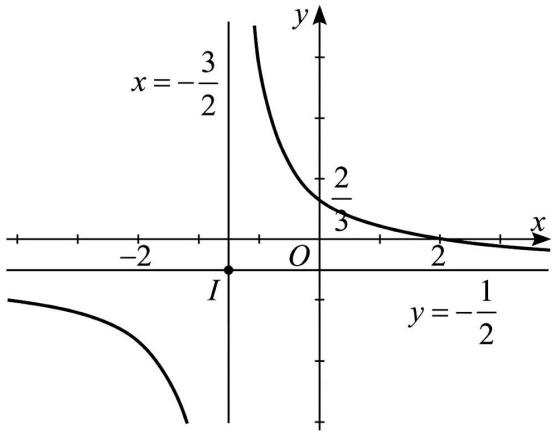
Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính x_0-y_0.

Trả lời: ……..

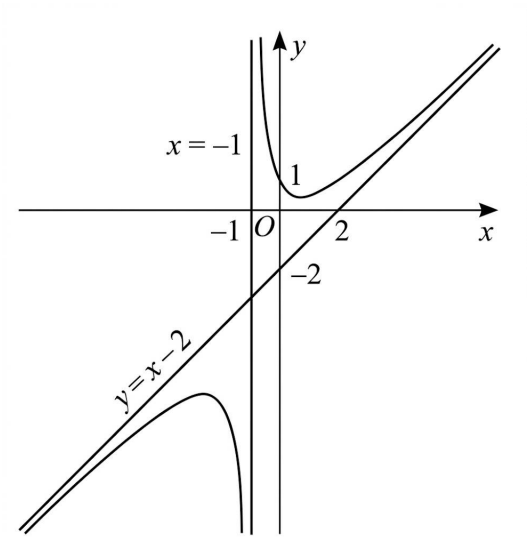
Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

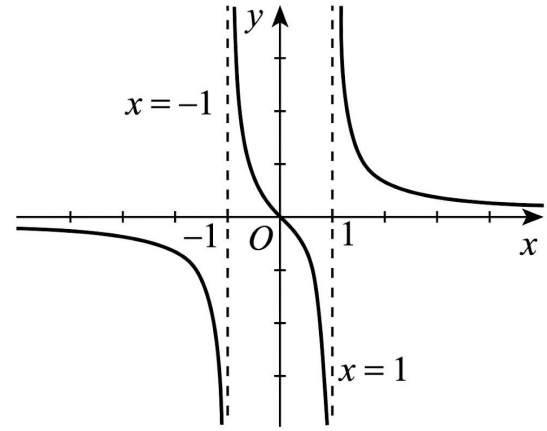
Câu 84. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

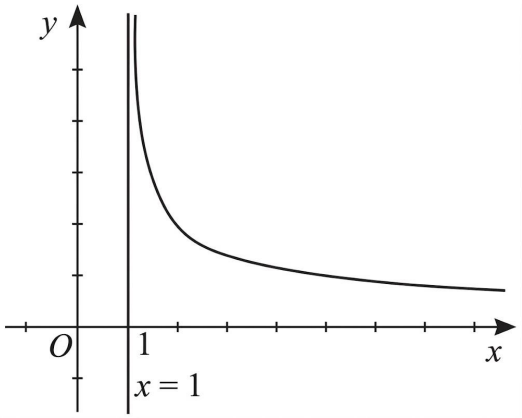
Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

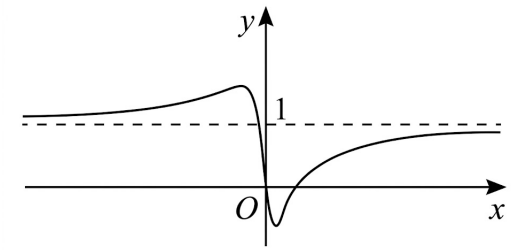
Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 88. Gọi $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Giá trị x_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 89. Gọi $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Giá trị y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 90. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 91. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 92. Cho hàm số: $y=\dfrac{2025}{x^2-6x+5}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 93. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính $3x_0+y_0$.

Trả lời: ……..

Câu 94. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 95. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 96. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 97. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 98. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 99. Cho hàm số: $y=\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 100. Cho hàm số: $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 101. Cho hàm số: $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-8}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 102. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 103. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 104. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-10x+21}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 105. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 106. Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ có dạng $y=ax+b$. Giá trị $2025a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 107. Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ có dạng $y=ax+b$. Giá trị $2025a-2024b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 108. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2024}{x-2}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ tiệm cận xiên của có dạng $y=ax+b$ và tiệm cận đứng có dạng $x=c$. Giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 109. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

Trả lời: ……..

Câu 110. Biết đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Hỏi đường thẳng d có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 111. Gọi $I(x_0;y_0)$ là toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 112. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 113. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Tính $2a^2+2025b$.

Trả lời: ……..

Câu 114. Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB là bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 115. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Câu 116. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$. Biết đồ thị hàm số có tiệm cận ngang dạng $y=a$ và tiệm cận đứng dạng $x=b$. Giá trị $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 117. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 118. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 119. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x\left(x^2-4x+3\right)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 120. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 121. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$, $y=b$ và đường tiệm cận đứng là $x=c$. Khi đó, tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 122. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 123. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 124. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 125. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 126. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}-2x+3}{x^2-4x+3}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 127. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 128. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 129. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 130. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 131. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 132. Tìm giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$.

Trả lời: ……..

Câu 133. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2025;0)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

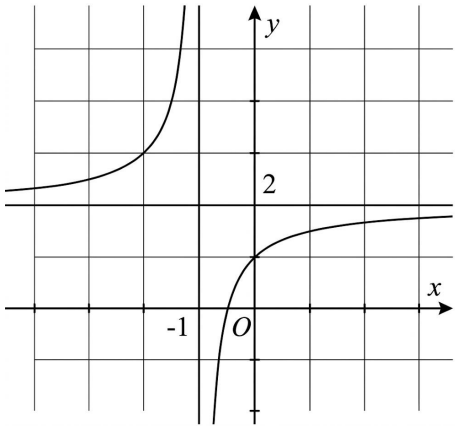
Câu 134. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Câu 135. Tìm giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là $y=1$

Trả lời: ……..

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ xác định trên $R\setminus\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng $m+n$.



Trả lời: ……..

Câu 137. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ ↘	1 || $-\infty$	↗ 8

Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0y_0=16$. Hỏi giá trị m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 138. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	m ↘	$+\infty$ || $-\infty$	↘ m

Tìm giá trị tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1;1)$.

Trả lời: ……..

Câu 139. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2025}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 140. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang thì giá trị $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 141. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

Trả lời: ……..

Câu 142. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Trả lời: ……..

Câu 143. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng 1 tiệm cận ngang.

Trả lời: ……..

Câu 144. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2027;2027]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung?

Trả lời: ……..

Câu 145. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Trả lời: ……..

Câu 146. Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

Trả lời: ……..

Câu 147. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục trung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Câu 148. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ……..

Câu 149. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4?

Trả lời: ……..

Câu 150. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x}$, m là tham số. Tìm m để hàm số (C) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến đường tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời: ……..

Câu 151. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ có đồ thị (C), với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên, đồng thời góc giữa hai đường tiệm cận này bằng 45^0.

Trả lời: ……..

Câu 152. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận ?

Trả lời: ……..

Câu 153. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có tiệm cận xiên?

Trả lời: ……..

Câu 154. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Câu 155. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 156. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in(-2025;2025)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận?

Trả lời: ……..

Câu 157. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Trả lời: ……..

Câu 158. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m\in(-2025;2025)$ để đồ thị có ba đường tiệm cận?

Trả lời: ……..

Câu 159. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Câu 160. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

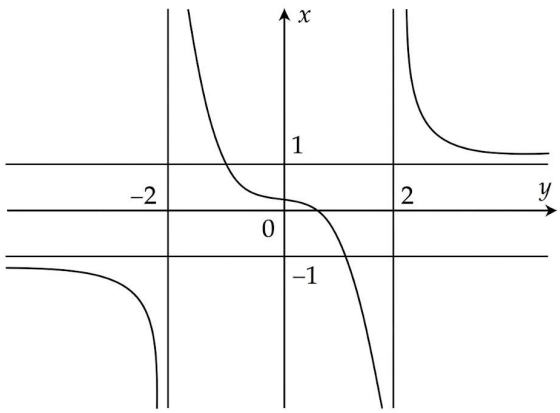
Câu 161. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

Câu 162. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$.

Trả lời: ……..

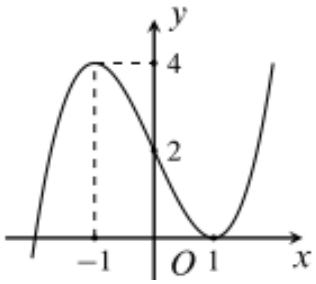
Câu 163. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có tổng bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

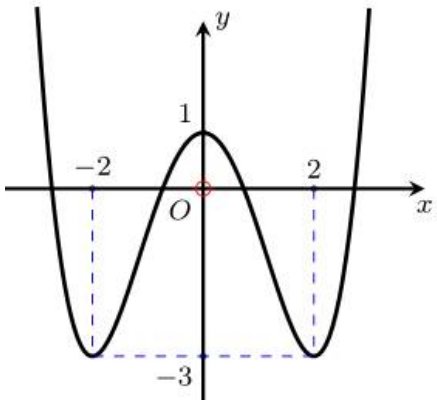
Câu 164. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?

Trả lời: ……..

Câu 165. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Câu 166. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ | 5	↘	3	↗	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-5}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

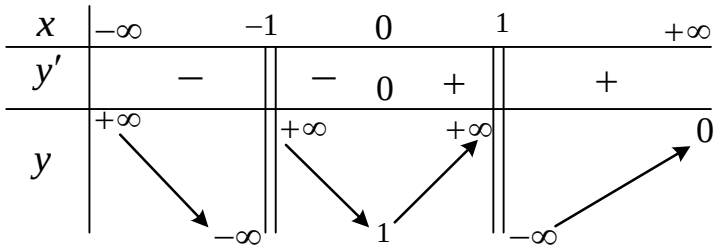
Câu 167. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 168. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Trả lời: ……..

Câu 169. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

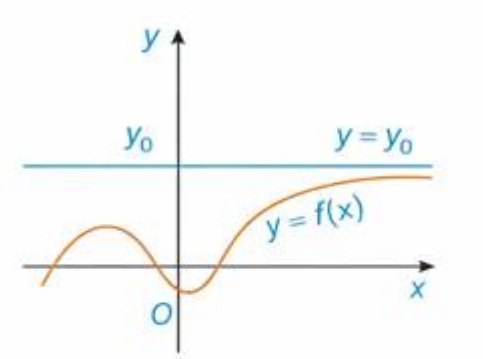
Câu 170. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ và $f(x)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

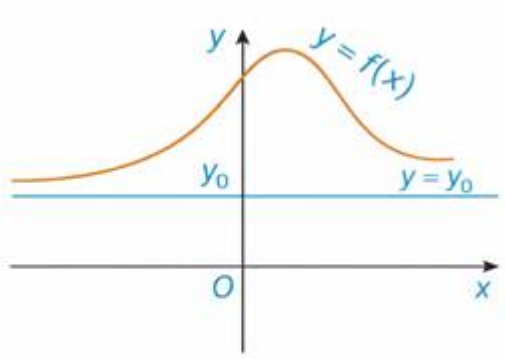
BÀI 3
ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

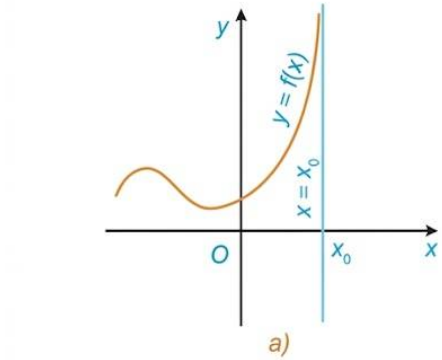


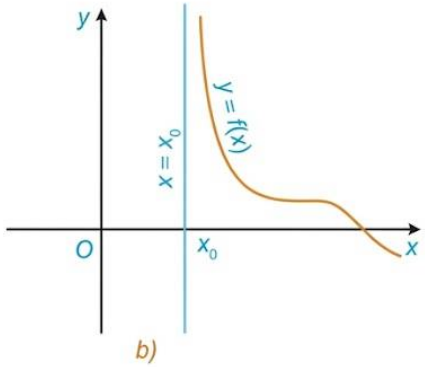
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

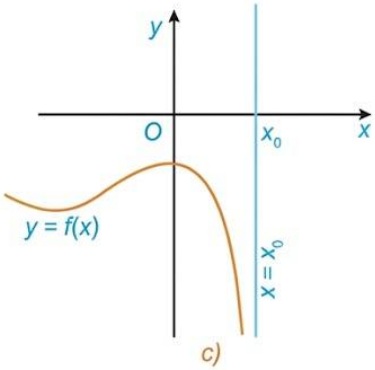
2. Đường tiệm cận đứng

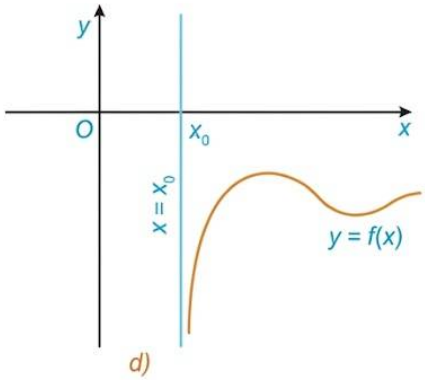
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$







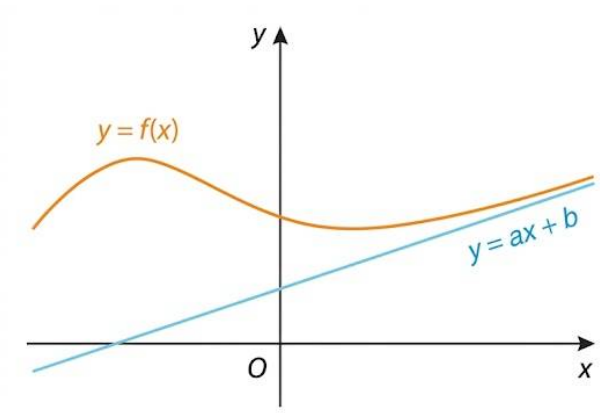


a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

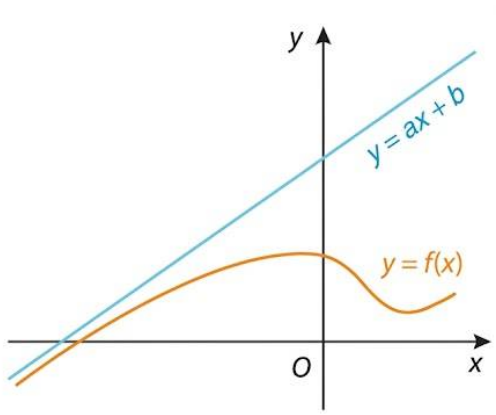
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Chú ý: Nếu đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ được gọi là **tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right].\dfrac{1}{x}=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right].\dfrac{1}{x}=0$

Suy ra $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ hoặc $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Khi đó: $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hoặc $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

Ngược lại , với a và b xác định như trên, đường thẳng $y=ax+b(a\neq 0)$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Đặc biệt, nếu $a=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG

DẠNG 1
TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y=f(x)$ KHI BIẾT HÀM SỐ $y=f(x)$

1. Phương pháp tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm miền xác định (tập xác định) của hàm số $y=f(x)$

Bước 2: Tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến biên của miền xác định.

Bước 3: Từ các giới hạn và định nghĩa tiệm cận suy ra phương trình các đường tiệm cận.

Chú ý:

• Trường hợp $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x)=0$ có nghiệm x_0 thì đồ thị có tiệm cận đứng $x=x_0$ (x_0 là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow x=x_0$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $P(x)=$ bậc $Q(x)$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $P(x)>$ bậc $Q(x)+1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ: $\begin{cases}Q(x)=0\\P(x)\neq 0\end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a,b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công thức: $\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]\end{cases}$.

• Thông thường, ta tìm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (phần dư) = 0.

• Hàm đa thức không có các đường tiệm cận.

2. Kỹ năng dùng Casio

a. Giới hạn của hàm số tại một điểm

• $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

b. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=10^9$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=-10^9$.

Bài 1. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-2026}{x+2027}$ b) $y=\dfrac{x}{3x-2}$ c) $y=\dfrac{2027}{2026-x}$

Bài giải

a) $y=\dfrac{2x-2026}{x+2027}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2027\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to(-2027)^-}\dfrac{2x-2026}{x+2027}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2027)^+}\dfrac{2x-2026}{x+2027}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2025$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2026}{x+2027}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{2026}{x}}{1+\dfrac{2027}{x}}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-2026}{x+2027}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{2026}{x}}{1+\dfrac{2027}{x}}=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

b) $y=\dfrac{x}{3x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}\dfrac{x}{3x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{x}{3x-2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{2}{3}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$.

c) $y=\dfrac{2027}{2026-x}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2026\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(2026)^-}\dfrac{2027}{2026-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(2026)^+}\dfrac{2027}{2026-x}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2026$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2027}{2026-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2027}{x}}{\dfrac{2026}{x}-1}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2027}{2026-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2027}{x}}{\dfrac{2026}{x}-1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Bài 2. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2025x}{x^2-9}$ b) $y=\dfrac{2-x}{1-x^2}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4}$

Bài giải

a) $y=\dfrac{2025x}{x^2-9}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2025x}{x^2-9}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2025x}{x^2-9}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to(3)^-}\dfrac{2025x}{x^2-9}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(3)^+}\dfrac{2025x}{x^2-9}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2025x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2025}{x}}{1-\dfrac{9}{x^2}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2025x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2025}{x}}{1-\dfrac{9}{x^2}}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

b) $y=\dfrac{2-x}{1-x^2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ nên $x=1$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=-\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) $y=\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+5x+1}{(x-1)(x-4)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+5x+1}{(x-1)(x-4)}=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x^2+5x+1}{(x-1)(x-4)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x^2+5x+1}{(x-1)(x-4)}=-\infty$ nên đường thẳng $x=4$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 3. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ b) $y=\dfrac{5-x}{x^2-25}$ c) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-8x+7}$

Bài giải

a) $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x-1}$

Ta có

$\lim\limits_{x\to(1)^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(1)^-}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

b) $y=\dfrac{5-x}{x^2-25}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5;5\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{5-x}{x^2-25}=\dfrac{-(x-1)}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{-1}{x+5}$

Ta có

$\lim\limits_{x\to(-5)^-}\dfrac{-1}{x+5}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-5)^+}\dfrac{-1}{x+5}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-5$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

c) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-8x+7}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;7\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-8x+7}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-7)}=\dfrac{x-2}{x-7}$

Ta có

$\lim\limits_{x\to7^-}\dfrac{x-2}{x-7}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to7^+}\dfrac{x-2}{x-7}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=7$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x-7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{7}{x}}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x-7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{7}{x}}=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

Bài 4. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=x+2025-\dfrac{1}{3-x}$ b) $y=\dfrac{x^2+3}{x+4}$ c) $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x$

Bài giải

a) $y=f(x)=x+2025-\dfrac{1}{3-x}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

• Ta có:

$\lim\limits_{x\to3^-}\left(x+2025-\dfrac{1}{3-x}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+}\left(x+2025-\dfrac{1}{3-x}\right)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2025)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3-x}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2025)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{3-x}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+2025$.

b) $y=f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+4}=x-4+\dfrac{19}{x+4}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

• Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-4)^-}\left(\dfrac{x^2+3}{x+4}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-4)^+}\left(\dfrac{x^2+3}{x+4}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-4$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-4)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{19}{x+4}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-4)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{19}{x+4}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x-4$.

c) $y=f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x=\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}\right)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to(4)^-}\left(\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(4)^+}\left(\dfrac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=4$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-3x-4}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-3x-4}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x$.

Bài 5. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$ b) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ c) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$

Bài giải

a) $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-2^-}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}y=-\infty\Rightarrow$ Đường thẳng: $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(2x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(2x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0\Rightarrow$ Đường thẳng $y=2x+1$ là tiệm cận xiên của (C).

b) $y=\dfrac{x^2}{1-x}=-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty\Rightarrow$ Đường thẳng: $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(-x-1)]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(-x-1)]=0\Rightarrow$ Đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của (C).

c) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}=x+\dfrac{1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to2^-}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}y=+\infty\Rightarrow$ Đường thẳng: $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$, suy ra đồ thị hàm số y có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

Bài 6. Tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}$ c) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

Bài giải

a) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$

Tập xác định: $D=(-\infty;2]\cup[2;+\infty)$.

Ta thấy rằng $x=1\notin D\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Và $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|}{x}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}y=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}y=-1\end{cases}\Rightarrow y=1;\ y=-1\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

b) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}$

Tập xác định: $D=[-3;+\infty)\setminus\{\pm1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x+3-4x^2}{\sqrt{x+3}+2x}}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(3+4x)}{\sqrt{x+3}+2x}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[-\dfrac{3+4x}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2x\right)}\right]=-\dfrac{7}{8}\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)}y=\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{x^2-1}=\infty\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) $y=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lại có: $y=\dfrac{(x-1)(x-3)}{\dfrac{x^2+7-16}{\sqrt{x^2+7}+4}}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)(x-1)}{x+3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-3}y=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)(x-1)}{x+3}=\infty\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

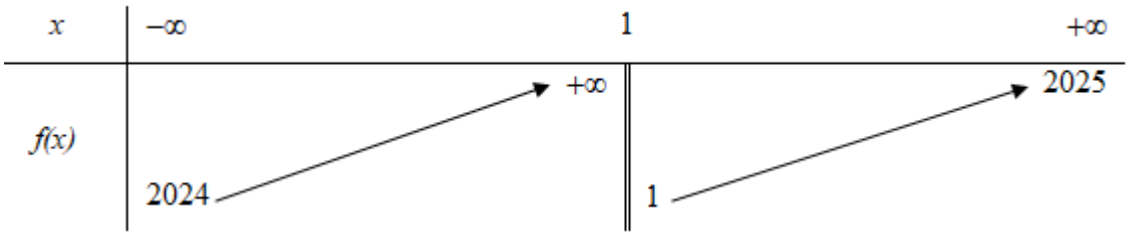
DẠNG 2

TÌM TIỆM CẬN KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$

Phương pháp

- **Bước 1:** Dựa vào bảng biến thiên và đồ thị để tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2:** Quan sát bảng biến thiên và đồ thị để suy ra giới hạn khi x đến một bên của miền xác định.
- **Bước 3:** Kết luận.

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

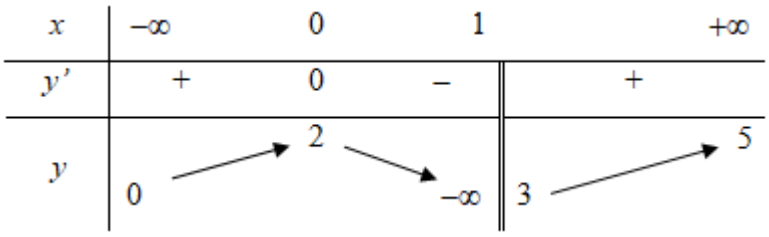
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2024$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2024$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2025$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2025$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

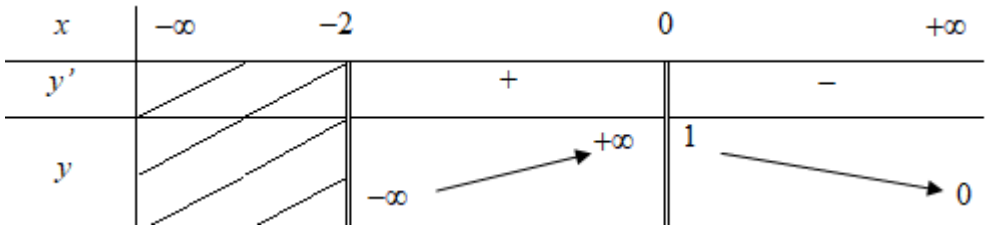
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y=5$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

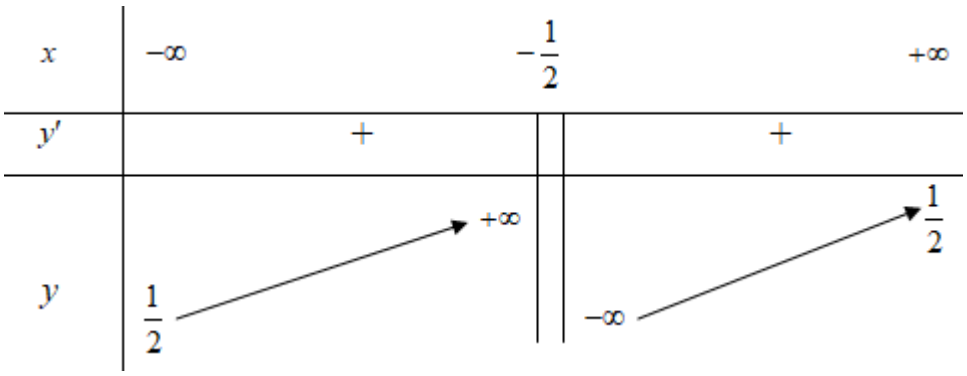
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=0$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

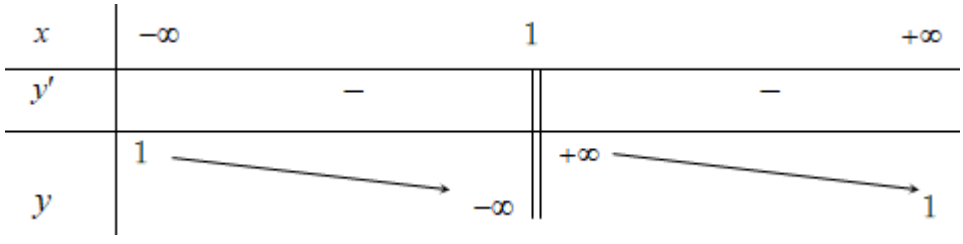
Bài giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

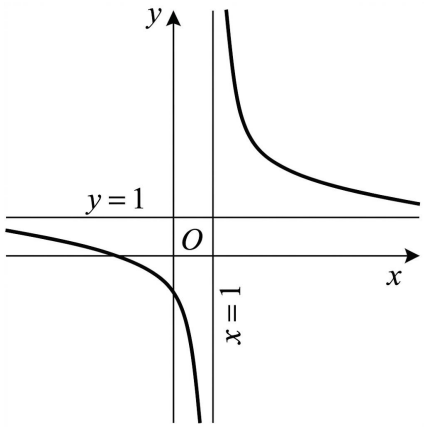
Bài giải

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

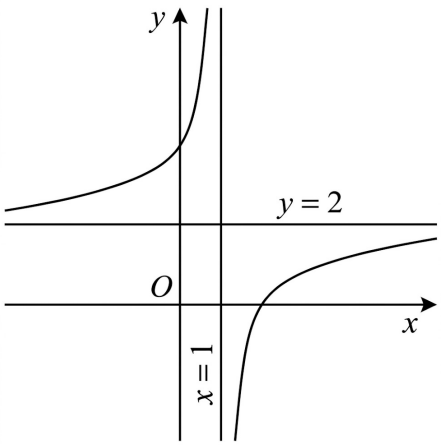
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

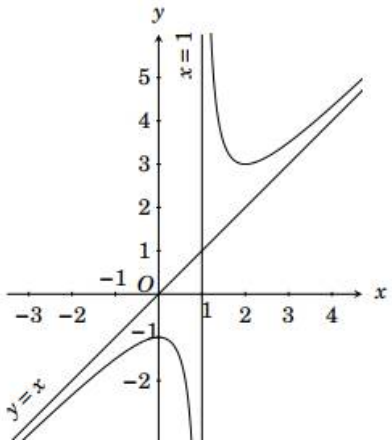
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

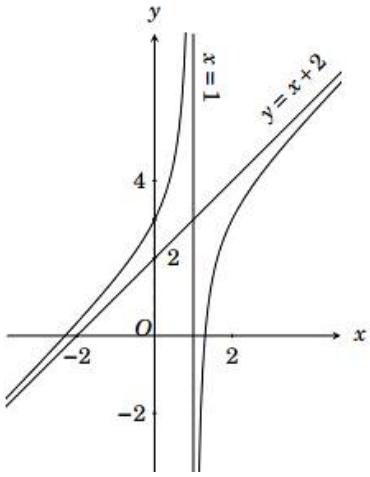
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x$.

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

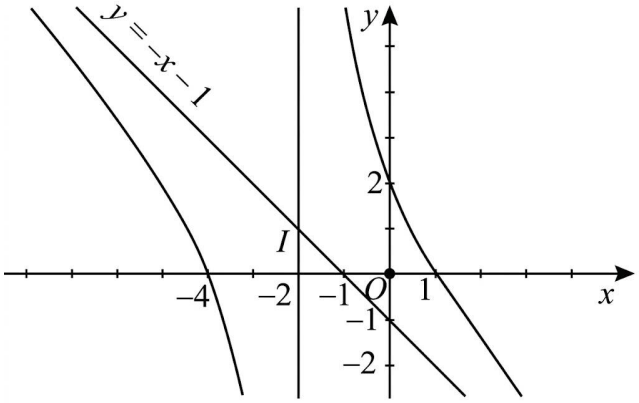
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+2$.

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

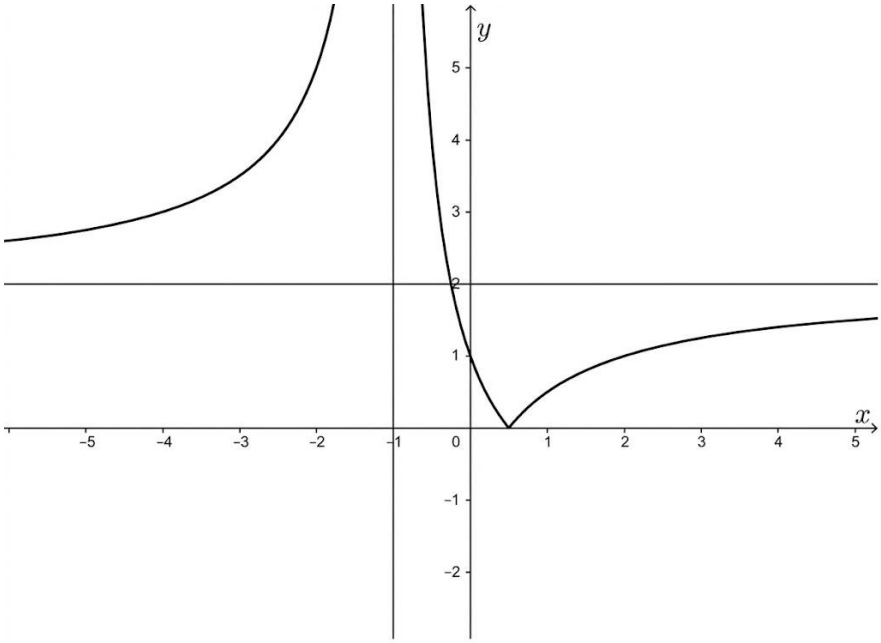
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x-1$.

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

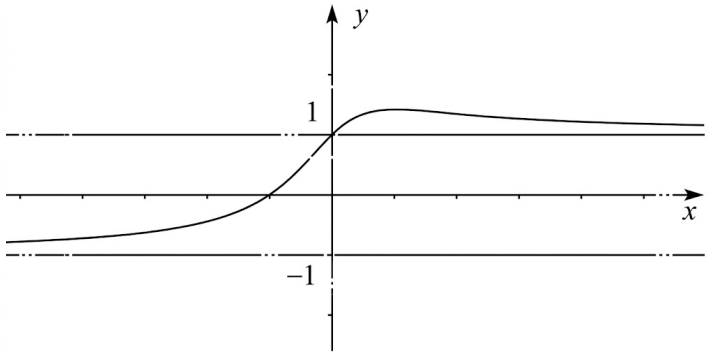
Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Bài 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

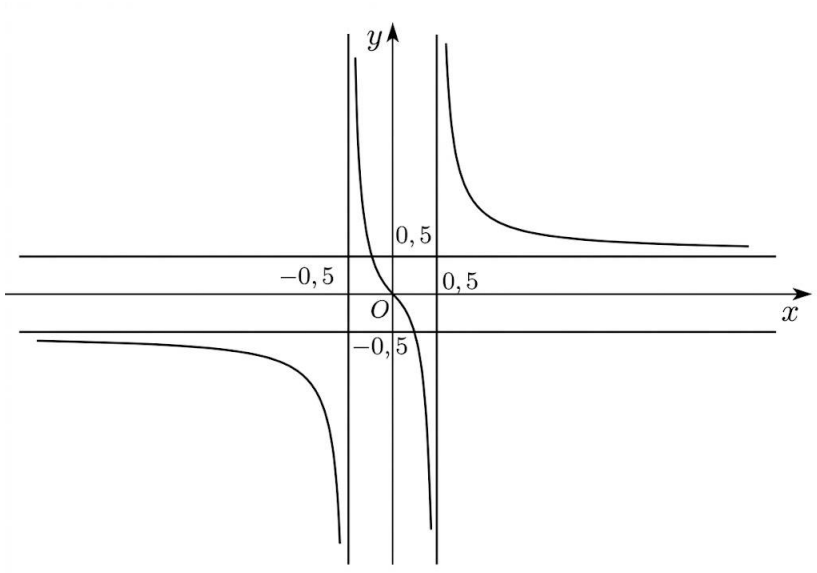
Từ đồ thị hàm số, ta có:

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\pm\frac{1}{2}$.

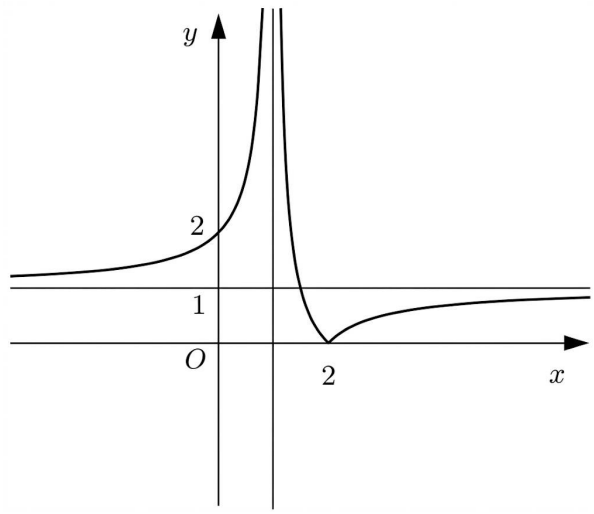
$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x=\pm\dfrac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Bài 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

DẠNG 3
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong t (tháng) được tính theo công thức $S(t)=1000-\dfrac{1800}{t+2}$, trong đó $t\ge 1$.

a) Xem $y=S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong t (tháng) khi t đủ lớn.

Bài giải

a) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)=1000$

Vậy đường thẳng $y=1000$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $S(t)$.

b) Khi t đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong tháng t sẽ gần đạt được 1000 sản phẩm.

Bài 2. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\ge 0$.

a) Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=y(t)$.

b) Có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Bài giải

a) $y=y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}=\dfrac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}$

Tập xác định: $D=[0;+\infty)$

Đồ thị không có đường tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{45-\dfrac{15}{t}+\dfrac{5}{t^2}}{9+\dfrac{1}{t^2}}=\dfrac{45}{9}=5$

Suy ra đường thẳng $y=5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị không có đường tiệm cận xiên.

b) Nhận xét: Nồng độ oxygen trong hồ sẽ gần đạt tới $5mg/l$ khi thời gian t trở nên rất lớn.

Bài 3. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=2x+50$ (triệu đồng). Khi đó $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Bài giải

Ta có: $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{2x+50}{x}$

Vì $f(x)=\dfrac{-50}{x^2}<0$ với mọi số thực x nên hàm số $f(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ giảm.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+50}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{50}{x}}{1}=2$ (điều phải chứng minh)

Tính chất này nói lên rằng khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm giảm, nhưng không dưới 2.

Bài 4. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài giải

a) Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $\dfrac{144}{x}$ (m) với $x>0$

Ta có: chu vi mảnh vườn $P(x)=2\left(x+\dfrac{144}{x}\right)=2x+\dfrac{288}{x}$ (m)

b)

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$

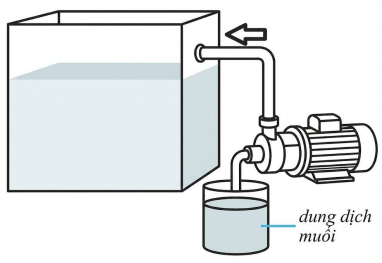
Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\dfrac{288}{x}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $P(x)$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to0^+} P(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x+\dfrac{288}{x}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $P(x)$ có một tiệm cận đứng là $x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[P(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{288}{x}=0$ nên đồ thị hàm số $P(x)$ có một tiệm cận xiên là $y=2x$.

Bài 5. Một bể chứa 1000 lít nước muối có nồng độ 0,1 (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích bể, đơn vị gam/lít). Người ta bơm nước muối có nồng độ 0,2 vào bể với tốc độ 20 lít/phút. Gọi $f(t)$ là nồng độ muối trong bể sau t phút.



a) Xác định hàm số $f(t)$

b) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

Lời giải

a) Khối lượng muối có trong bể trong t phút là $1000 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,2t = 100 + 4t$.

Nồng độ muối trong bể sau t phút là $\dfrac{100+4t}{1000+20t} = \dfrac{25+t}{250+5t}$.

b) Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0,2$.

Vậy $y = 0,2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Bài 6. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách với phí xuất bản là 10 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 70000 đồng. Gọi $t(t \geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (đơn vị: nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách.

a) Xác định hàm số $f(t)$

b) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

Lời giải

a) Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là: $10000 + 70t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f(t) = \dfrac{10000+70t}{t}$ (nghìn đồng).

b) Ta có $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 70$. Suy ra $y = 70$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

DẠNG 4

TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ $y=f(x)$ CÓ CHỨA THAM SỐ

Một số dạng toán thường gặp:

• **Dạng 1:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c\neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $ad-bc\neq 0$.

• **Dạng 2:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-x_0}$ với $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm $x=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)\neq 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x=x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0$.

- Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên khi $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên khi $a=0$.

• **Dạng 3:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-x_0}{ax^2+bx+c}$ với $a\neq 0$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(x_0)\neq 0\end{cases}$.

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=0$.

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0$.

• **Dạng 4:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)}$ với $a\neq 0,\ x_1\neq x_2$.

- Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=ax^2+bx+c=0$ không nhận x_1, x_2 là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}g(x_1)\neq 0\\ g(x_2)\neq 0\end{cases}$.

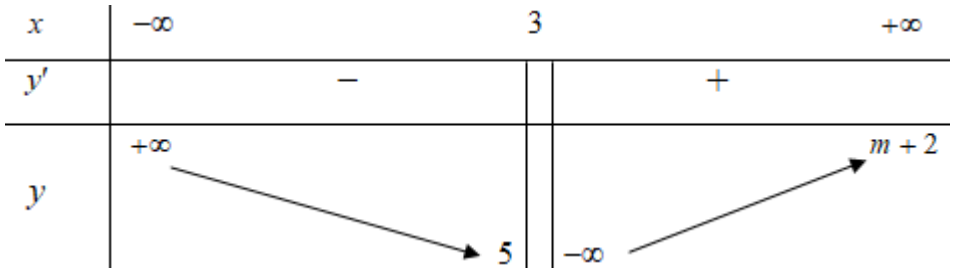
- Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x=x_1$ hoặc $x=x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}g(x_1)=0\\ g(x_2)=0\end{array}\right.$ (Chú ý hai điều kiện này không đồng thời xảy ra).

- Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g(x)=ax^2+bx+c=0$ nhận $x=x_1$ và $x=x_2$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}g(x_1)=0\\ g(x_2)=0\end{cases}$.

• **Dạng 5:** Biện luận số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bậc của mẫu số lớn hơn hoặc bằng bậc của tử số và phải tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

Bài 1. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_o$ và tiệm cận ngang $y=y_o$ sao cho $x_o y_o<30$.

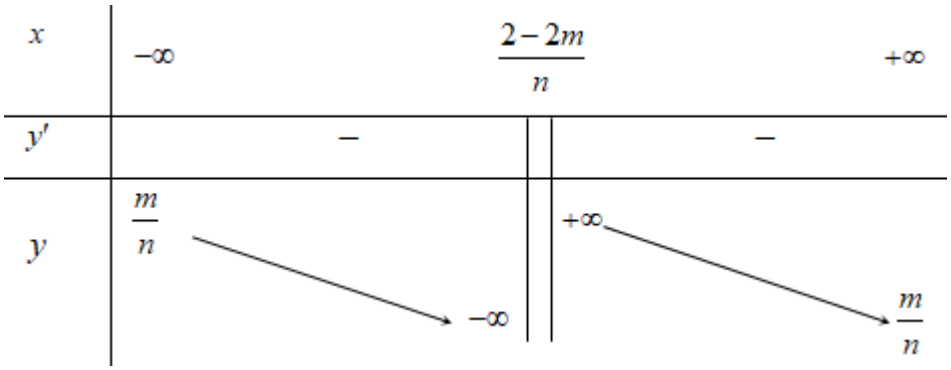
Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=m+2$. Ta có $y_o=m+2$.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$. Ta có $x_o=3$.

$x_o y_o<30\Leftrightarrow 3(m+2)<30\Leftrightarrow m<8$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tìm tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$, $y=2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

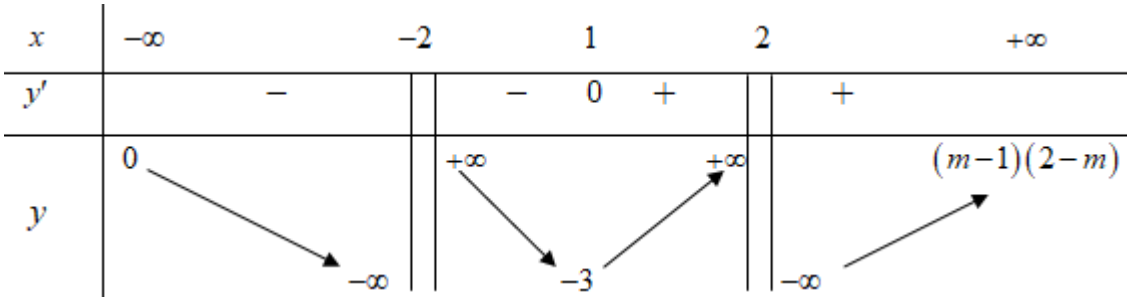
Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra tiệm cận đứng là $x=\dfrac{2-2m}{n}$, và tiệm cận ngang là $y=\dfrac{m}{n}$.

Đường thẳng $x=2, y=2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang nên

$$\begin{cases}\dfrac{2-2m}{n}=2\\ \dfrac{m}{n}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2m=2n\\ m=2n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2n=2\\ m-2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\ n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=(m-1)(2-m)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $y=0$ và $y=(m-1)(2-m)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=-2$.

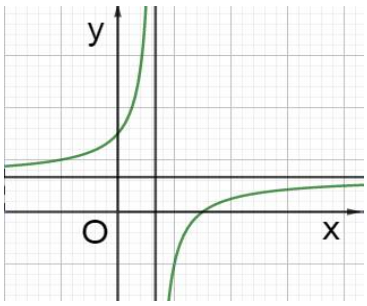
Và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=2$.

Đề đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4 khi và chỉ khi $(m-1)(2-m)\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq1\\m\neq2\end{cases}$.

Vì $m\in(-10;10)$ và m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2026}$?

Lời giải

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra $y'=\dfrac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2}>0\Rightarrow-m(2m-1)+3>0\Leftrightarrow-1<m<\dfrac{3}{2}$.

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x=m$, $y=2m-1$.

Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m;2m-1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ y=2m-1>0 \\ x=m>0 \\ OI<\sqrt{2026} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m>0 \\ (2m-1)^2+m^2<2026 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m>\dfrac{1}{2} \\ 5m^2-4m-2025<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m>\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2-\sqrt{10129}}{5}<m<\dfrac{2+\sqrt{10129}}{5} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $-1<m<\dfrac{3}{2}$, ta suy ra $m=1$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{(a-3b)x^2+bx-1}{x^2+ax-a}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=2$ là tiệm cận đứng và $y=1$ là tiệm cận ngang.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2\Rightarrow$ PT: $x^2+ax-a=0$ có nghiệm $x=2$

$\Rightarrow 4+2a-a=0\Rightarrow a=-4$

Hàm số có tiệm cận ngang $y=-1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y=-1\Leftrightarrow \dfrac{a-3b}{1}=-1\Leftrightarrow a-3b=-1\Leftrightarrow b=\dfrac{a+1}{3}=-1$

Vậy $a=-4;b=-1$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{(a-2b)x^2+bx+1}{x^2+x-b}$. Tìm a,b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=0$ là tiệm cận ngang.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow PT: x^2+x-b=0$ có nghiệm $x=1$ và $(a-2b)x^2+bx+1=0$

không có nghiệm $x=1\Rightarrow \begin{cases} 1+1-b=0 \\ a-2b+b+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a\neq 1 \end{cases}$. Hàm số có dạng $y=\dfrac{(a-4)x^2+2x+1}{x^2+x-2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a-4)x^2+2x+1}{x^2+x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a-4}{1}=0\Leftrightarrow a-4=0\Rightarrow a=4$$

Vậy $a=4;b=2$.

Bài 7. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x=5$.

Lời giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $-3m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{1}{3}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=m$

Theo yêu cầu bài toán suy ra $m=5$ (thoả mãn)

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-1}$ có tiệm cận đứng.

Lời giải

Đồ thị hàm số có TCĐ $\Leftrightarrow g(x)=mx+2=0$ không có nghiệm $x=1\Leftrightarrow g(1)\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2.$

Bài 9. Tìm tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{2x-1}{4x^2+4mx+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

Lời giải

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi đó phương trình $4x^2+4mx+1=0$ vô nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow 4m^2-4m<0\Leftrightarrow -1<m<1\Leftrightarrow m\in(-1;1)$.

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận đứng.

Lời giải

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng $x=m$ thì là nghiệm của $p(x)=2x^2-3x+m$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m+m=0\Leftrightarrow 2m^2-2m=0\Leftrightarrow 2m(m-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=1\end{array}\right.$.

Bài 11. Tìm tất cả giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Lời giải

Xét phương trình $g(x)=x^2-mx+m=0$

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc

$g(x)=0$ có nghiệm kép khác 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta=m^2-4m>0\\ g(1)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta=m^2-4m=0\\ g(1)\neq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4\\ m=0\end{array}\right.$.

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-2x+m}$

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi PT $f(x)=x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq 0\\ f(-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ m-1\neq 0\\ m+8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq -8\end{cases}$.

Bài 13. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

Ta có: $D=(0;+\infty)$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-m}{x-1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Với $m=1\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}}{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Với $m\neq 1$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $m\neq 1$.

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$, đặt $f(x)=x^2+m$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\ f(2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=0\\ m+4=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\{-1;-4\}$.

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{m}{x^2}}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{m}{x^2}}}=-1$ nên đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì nó có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x)=x^2+m$ có nghiệm kép hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm $x=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-16\end{array}\right.$.

Bài 16. Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\left(m^2-1\right)x^2+x+2}}{x+1}$ có đúng một tiệm cận ngang.

Lời giải

Ta có

$$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\left(m^2-1\right)x^2+x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m^2-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m^2-1}\ \text{ với } \left(m^2-1\right)\ge 0$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\left(m^2-1\right)x^2+x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{\sqrt{m^2-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m^2-1}\ \text{ với } \left(m^2-1\right)\ge 0$$

Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y\Leftrightarrow\sqrt{m^2-1}=-\sqrt{m^2-1}\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Bài 17. Cho hàm số $y=\sqrt{mx^2+2x}-x$. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{mx^2-x^2+2x}{\sqrt{mx^2+2x}+x}=\dfrac{\left(m-1\right)x^2+2x}{\sqrt{mx^2+2x}+x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc của tử bé hơn bậc của mẫu và tồn tại

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m-1=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

Bài 18. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=2x+\sqrt{mx^2-x+1}+1$ có tiệm cận ngang.

Lời giải

Ta có: $y=\left(2x+1\right)+\sqrt{mx^2-x+1}=\dfrac{4x^2+4x+1-\left(mx^2-x+1\right)}{2x+1-\sqrt{mx^2-x+1}}=\dfrac{\left(4-m\right)x^2+5x}{2x+1-\sqrt{mx^2-x+1}}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc của tử số bé hơn hoặc bằng bậc của mẫu số và

$\lim\limits_{x\to\infty} y=y_0\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4-m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=4$.

Bài 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x-m\right)^2\left(2x-m\right)}{\sqrt{4x-x^2}-2}$ có tiệm cận đứng.

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\left[0;4\right]\setminus\left\{2\right\}$.

Ta có: $y=\dfrac{(x-m)^2(2x-m)}{\sqrt{4x-x^2}-2}=-\dfrac{(x-m)^2(2x-m)\left(\sqrt{4x-x^2}+2\right)}{(x-2)^2}$

Với $m=2\Rightarrow y=-(2x-2)\left(\sqrt{4x-x^2}+2\right)\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

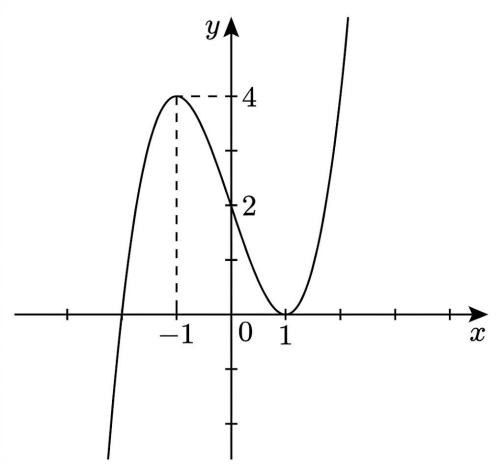
Với $m=4\Rightarrow y=-\dfrac{2(x-4)^2\left(\sqrt{4x-x^2}+2\right)}{x-2}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng .

Với $m\neq\{2;4\}$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$.

Suy ra để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $m\neq 2$.

DẠNG 5
TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ ẨN

Bài 1. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.

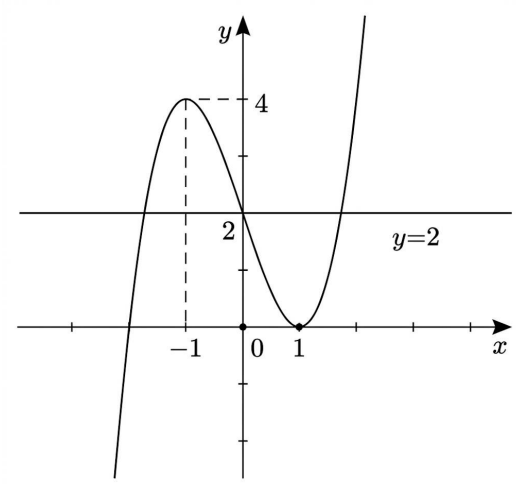


Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải

Ta xét mẫu số: $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f(x)=2 \quad (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+ Phương trình (1) có nghiệm $x_1=a<-1$ (nghiệm đơn) và $x_2=1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f(x)=(x-a)(x-1)^2$.

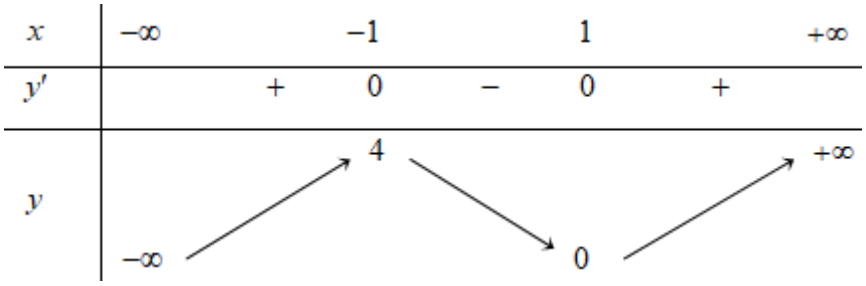
+ Phương trình (2) có nghiệm $x_3=b\in(a;-1)$, $x_4=0$ và $x_5=c>1$

$\Rightarrow f(x)-2=(x-b)x(x-c)$.

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2.(x-b)x(x-c)}=\dfrac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

Lời giải

Xét phương trình $f^2(x)-4f(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=4 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=a,\ a\in(-\infty;-1) \\ x=1 \quad (ng\ kép) \\ x=-1\ \ (ng\ kép) \\ x=b,\ b\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow f^2(x)-4f(x)=h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2;\ h(x)\neq 0$

Do đó

$$y=g(x)=\frac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Bài 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}f(x)=1$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}$. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tổng bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

Lời giải

Ta có :

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$+\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1.$

Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$y=g(x)=\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}.$

Dựa vào BBT ta có $f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a<-1\\x=b>4\end{array}\right.$.

Với $x>0\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $x>a\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng.

Với $x>b\Rightarrow f(x)>3$, $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng.

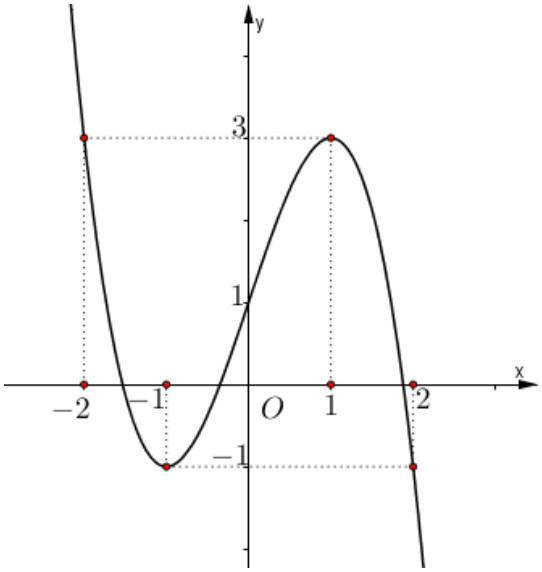
Dựa vào BBT ta có $f(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=c, 0<c<4 \\ x=d, d>4 \end{array}\right.$ khi đó

Với $x>c \Rightarrow f(x)<-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=c$ là tiệm cận đứng.

Với $x>d \Rightarrow f(x)>-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{\left(f(x)+1\right)^2}{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$ là 6.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ f^2(x)-f(x)\neq 0 \end{cases}$ (1).

Xét $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f^2(x)-f(x)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

* Với $f(x)=0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3<x_2<0<x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x=x_1$.

* Với $f(1)=1$:

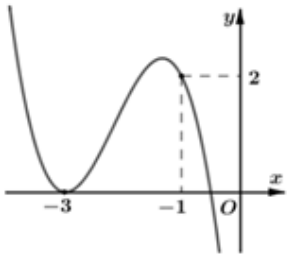
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6 < x_5 = 0 < x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm $x=x_5$ và $x=x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1.

Suy ra phương trình $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

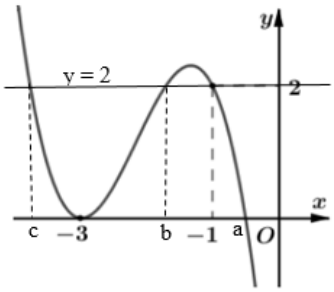
Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Bài 6. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Lời giải



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x=2)$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3$, $x_2=b$. với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f(x)=0\Leftrightarrow-(x+3)^2(x-a)=0$ và $f(x)=2\Leftrightarrow-(x-c)(x-b)(x+1)=0$.

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -3^+} y=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to b^+} y=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)}=0$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Bài 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là bao nhiêu?

Lời giải

* Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

* Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<b<c$.

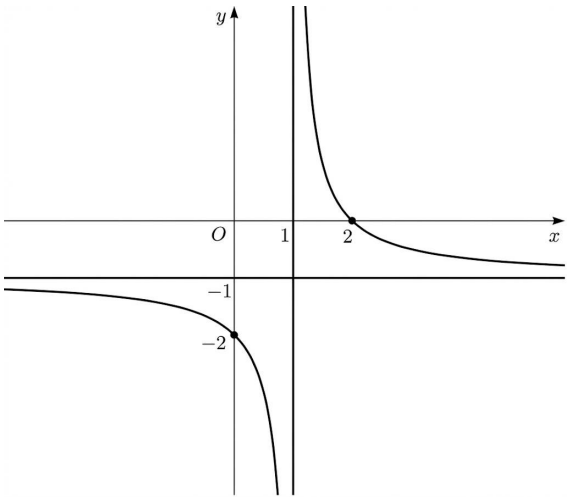
Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=\lim\limits_{x\to b^-} h(x)=\lim\limits_{x\to c^+} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là bốn.

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

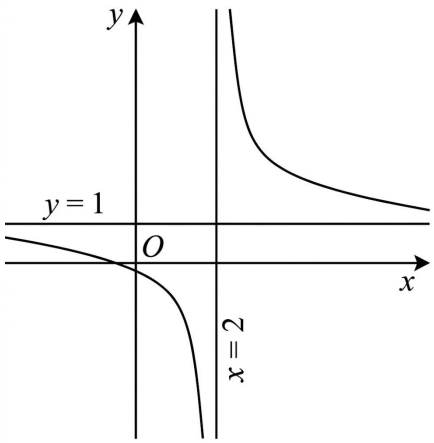
A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=1$

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang bằng:

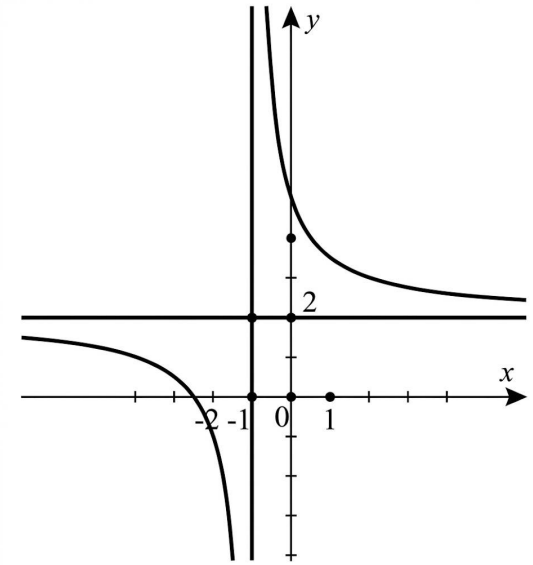
A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y=1$

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang bằng:

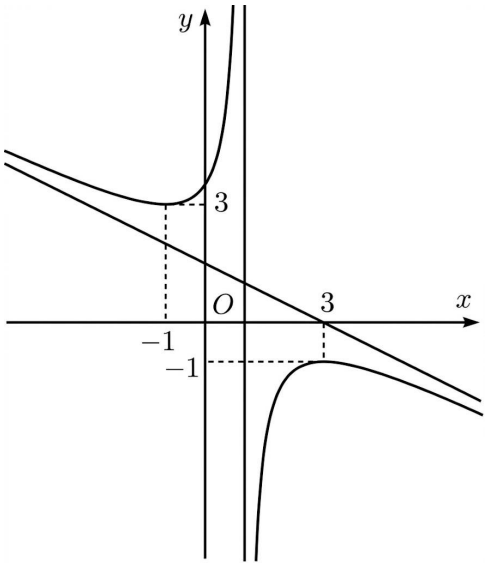
A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y=2$

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

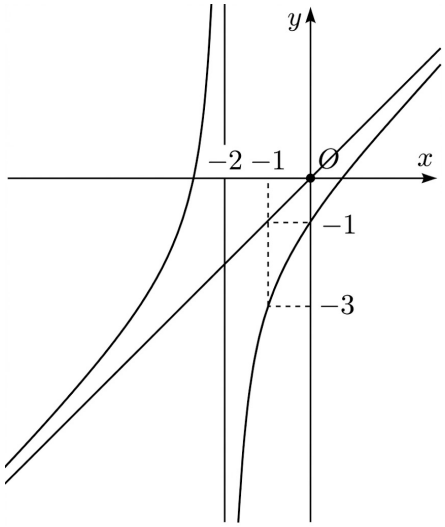
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là:

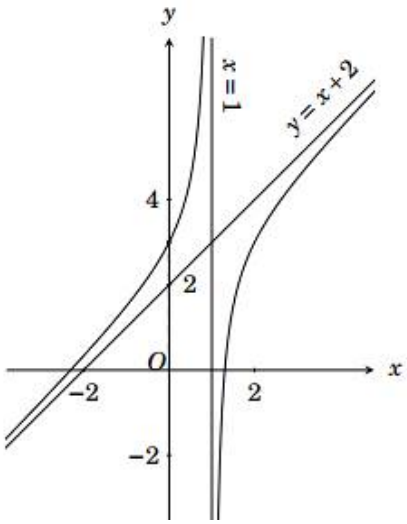
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=-2$

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây sai?

A. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$

B. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

C. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$

D. Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C.

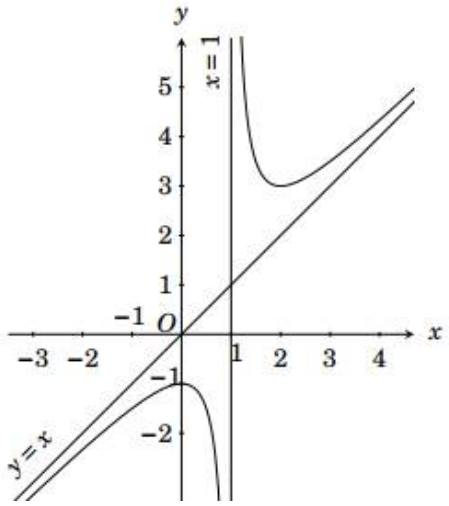
Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x+2$

Đồ thị hàm số Ox không có tiệm cận ngang

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;3)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$

B. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=1$

C. Đồ thị hàm số Ox có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=x$

D. Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;1)$.

Lời giải

Chọn D.

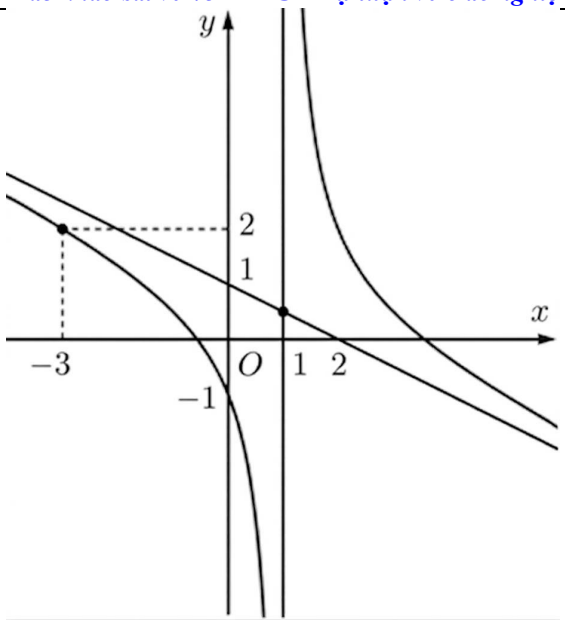
Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x$

Đồ thị hàm số Ox không có tiệm cận ngang

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên có tọa độ $(1;1)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng bằng:

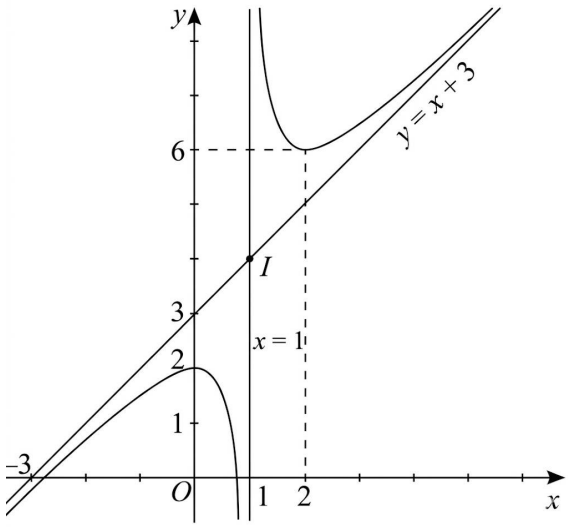
A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận đứng $x=1$

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

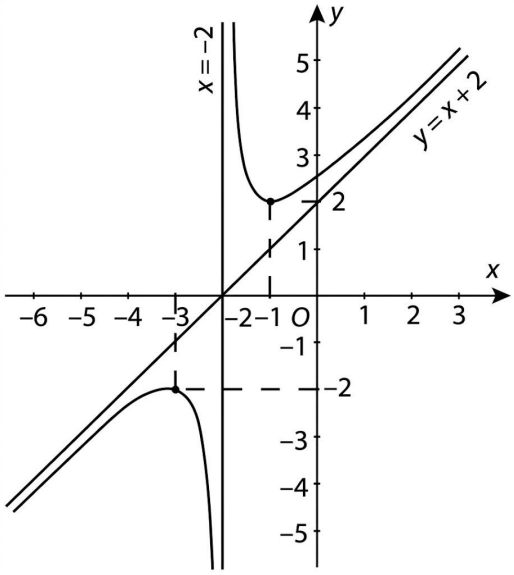
A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=x-3$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận xiên $y=x+3$

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

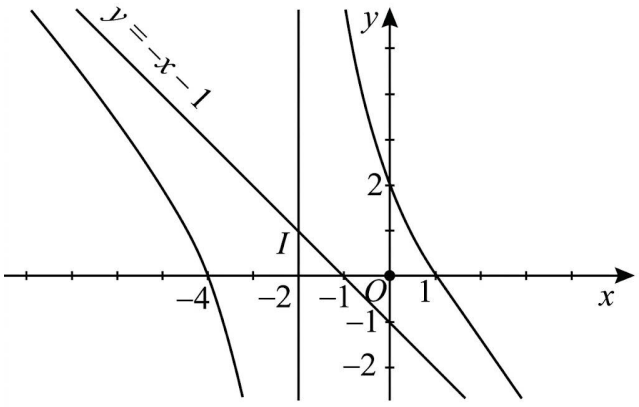
A. $y=x+2$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận xiên $y=x+2$

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

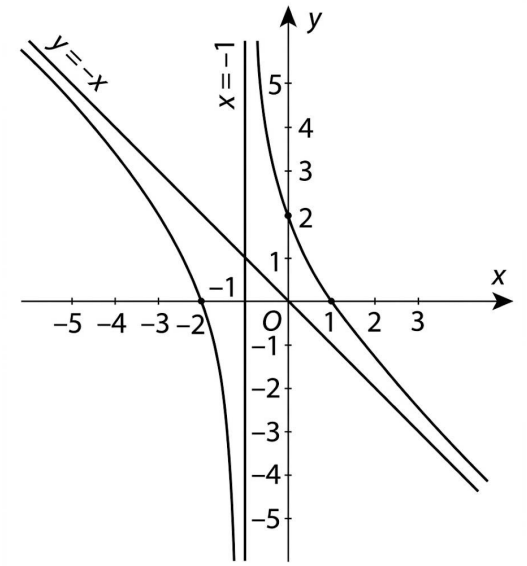
A. $y=x-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $y=-2$. **D.** $y=-x-1$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận xiên $y=x+2$

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên bằng:

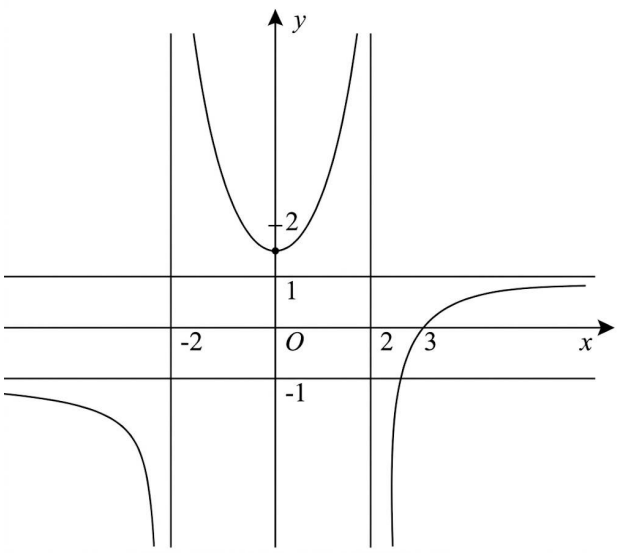
A. $y=x$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=-x$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy: hàm số đã cho có một tiệm cận xiên $y=-x$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\pm 1$.

Tương tự

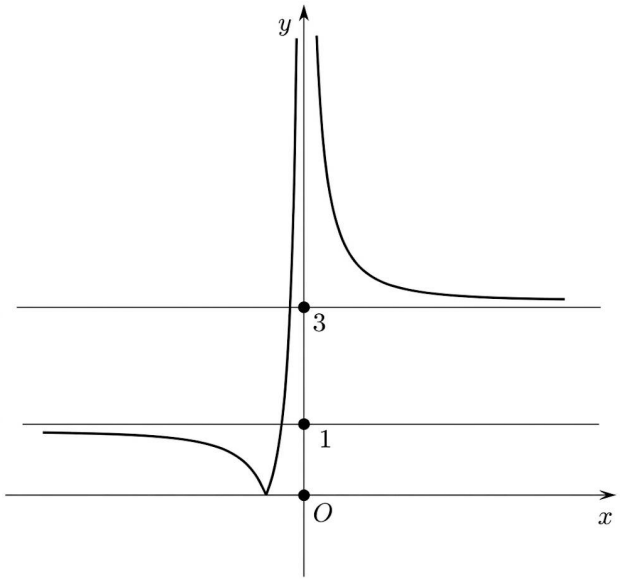
$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=\pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có:

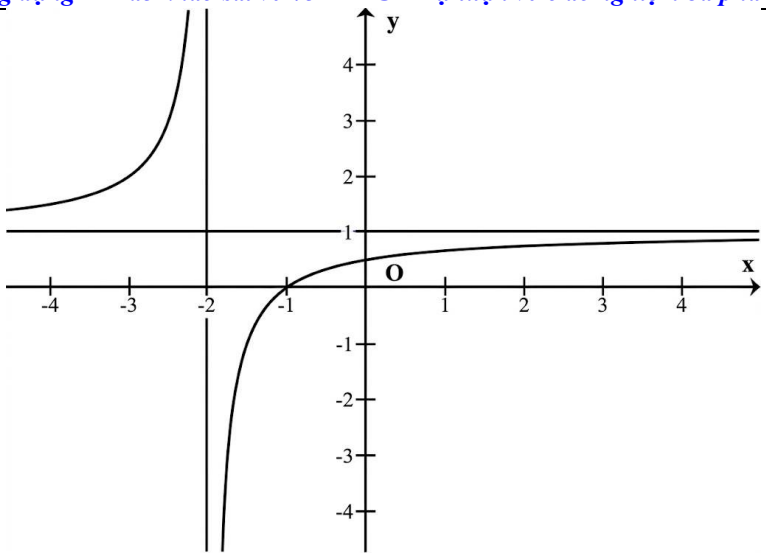
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ nên đường thẳng $y=3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. Tiệm cận đứng $x=-2$, tiệm cận ngang $y=1$. **B.** Tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$. **D.** Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

Lời giải

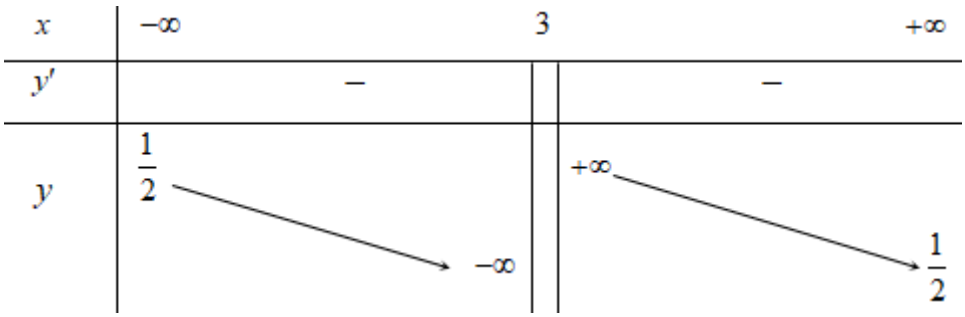
Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ liên tục trên tập xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

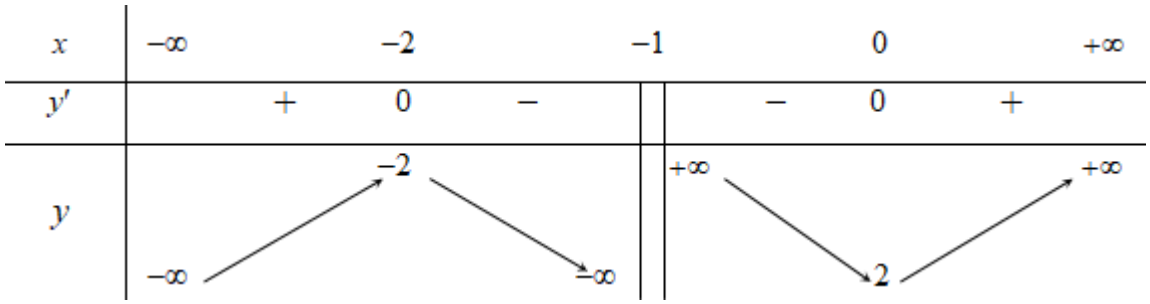
A. $y=3$. **B.** $x=3$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=3$ hàm số không xác định nên $x=3$ là TCĐ của đồ thị hàm số

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

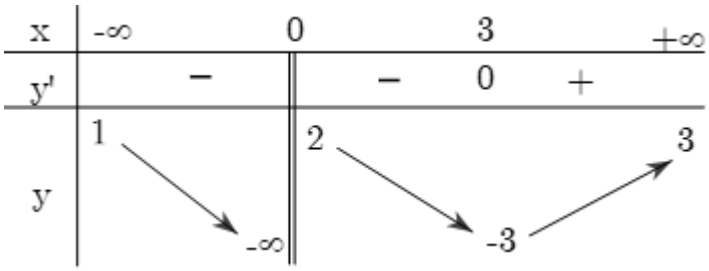
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $x=-1$ hàm số không xác định nên $x=-1$ là TCĐ của đồ thị hàm số

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

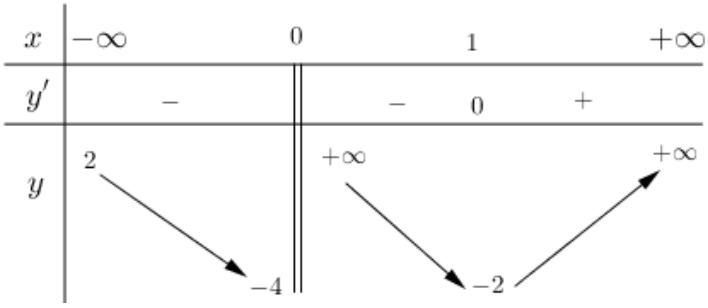
Nhìn bảng biến thiên ta thấy x=0 hàm số không xác định nên x=0 là TCĐ của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\Rightarrow y=3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ Không tồn tại tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

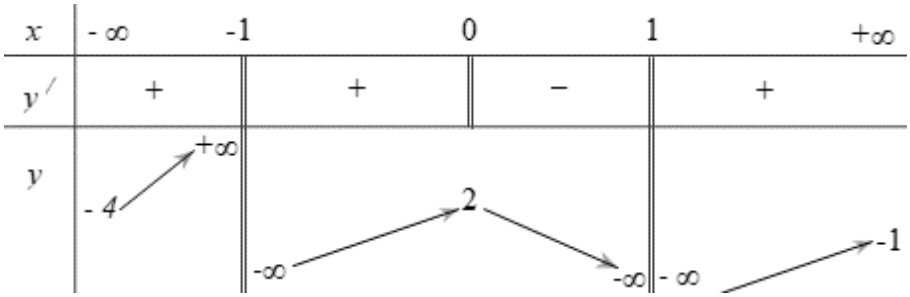
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ vậy hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-4$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

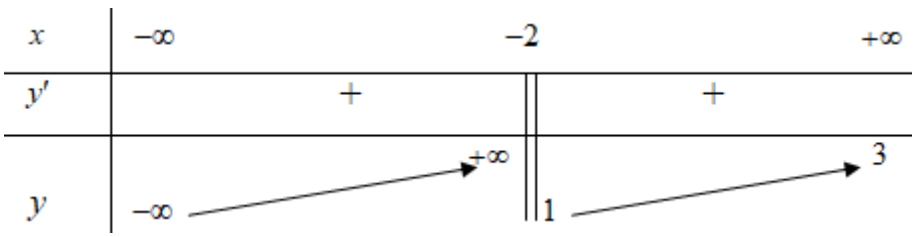
Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4, \lim\limits_{x\to+\infty} y=-1\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=4$.

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty, \lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Nên đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

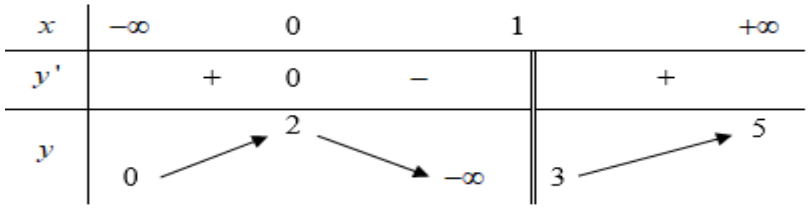
Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ta được tiệm cận ngang $y=3$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ ta được tiệm cận đứng $x=-2$

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

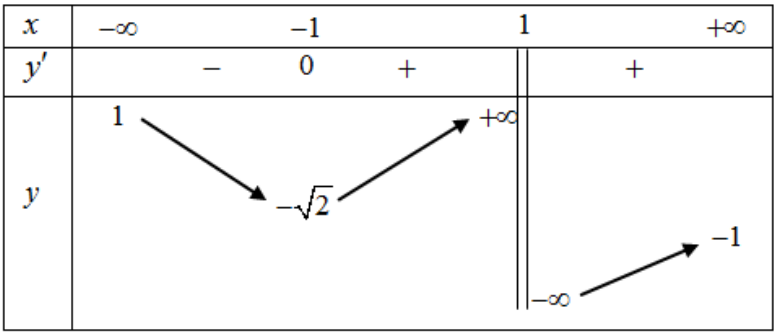
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5\Rightarrow y=5$ là một tiệm cận ngang

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty\Rightarrow x=1$ là một tiệm cận đứng

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

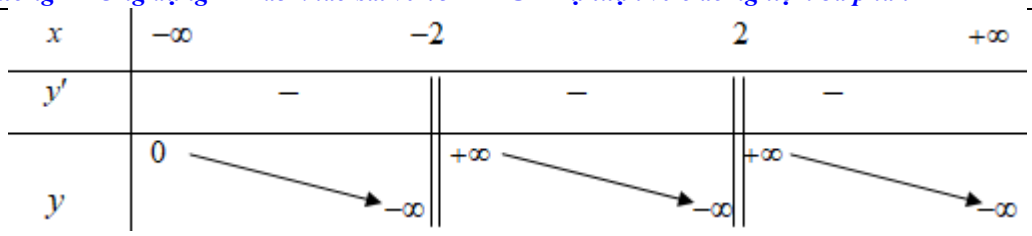
Chọn D.

Do $\lim\limits_{x\to1^+} y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}=+\infty\Rightarrow$ TCĐ: $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=1\Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=\pm1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCĐ và TCN là 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3 tiệm cận.

Câu 25. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+2}{x-2}=+\infty, \lim\limits_{x\to2^-} y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+2}{x-2}=-\infty.$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình $x-2$.

Câu 26. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 27. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$. Suy ta tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.

Câu 28. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 29. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5$ nên đồ thị hàm số có một

tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}\right)=-\infty$

vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0\end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to (-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 31. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x-2$ **B.** $y=x+2$

C. $y=x-1$ **D.** không có tiệm cận xiên

Lời giải

Chọn D.

$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Câu 32. Đồ thị hàm số $y=x+2025-\dfrac{2026}{x+1}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x+2025$ **B.** $y=x-2025$ **C.** $y=x-2026$ **D.** $y=x+2026$

Lời giải

Chọn A.

$y=f(x)=x+2025-\dfrac{2026}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x+2025)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{2026}{x+1}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(x+2025)\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{2026}{x+1}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+2025$.

Câu 33. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+2}{4-x}$ có tiệm cận xiên là:

A. $y=x-1$ **B.** $y=-x+1$ **C.** $y=-x-1$ **D.** $y=x+1$

Lời giải

Chọn B.

$y=f(x)=\dfrac{x^2-5x+2}{4-x}=-x+1-\dfrac{2}{4-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{4-x}\right)=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{4-x}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$.

Câu 34. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=x+3+\dfrac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y=2x+1$. **B.** $y=x-3$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=2x-1$.

Lời giải

Chọn C.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x+1}=0$ nên đường thẳng $y=2x-1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 35. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x+5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(5;3)$. **B.** $(-4;-5)$. **C.** $(6;-1)$. **D.** $(2;-10)$.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^2+5x}=2$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-3x}{x+5}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-13x}{x+5}=-13$

Tương tự do $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=-13$

Vậy đường thẳng $y=2x-13$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng này đi qua điểm $(6;-1)$.

Câu 36. Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=2\Rightarrow TCX: y=x+2$

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thì hàm số là đường thẳng:

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Lời giải

Chọn B.

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=2x+1-\dfrac{1}{x-2} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=2x+1$.

Câu 38. Xác định toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$

A. $(1;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta viết lại $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và đường tiệm cận xiên là đường thẳng $2x-1$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ nên giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(1;1)$.

Câu 39. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số: $D=[-4;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} y=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=-\infty$

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 40. Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

TH1: $x<-1\Rightarrow x+1<0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=-1$, không có TCĐ.

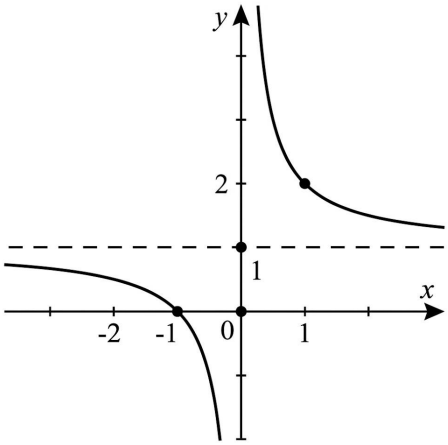
TH2: $x>1\Rightarrow x+1>0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=1$, TCĐ $x=1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCN

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình bên.



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=1$, đường tiệm cận ngang $y=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

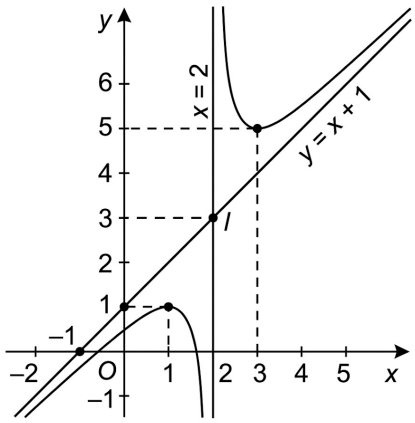
Từ đồ thị ta có:

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=0$, đường tiệm cận ngang $y=1$.

Hàm số không có cực trị.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, đồng biến trong khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(1;1)$ và điểm cực tiểu $(3;5)$.

d) Trên khoảng $(2;+\infty)$, hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 3.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

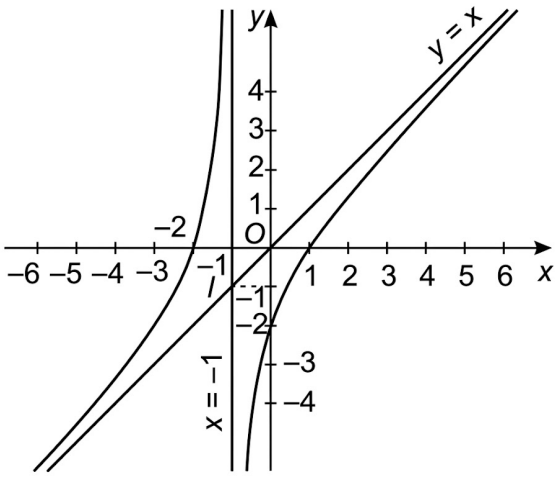
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trong khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận xiên là $y=x+1$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(1;1)$ và điểm cực tiểu $(3;5)$.

d) Trên khoảng $(2;+\infty)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ bằng 5.

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;0)$ và điểm cực tiểu $(0;-2)$.

d) Trên khoảng $(-\infty;-1)$, hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

d) Trên khoảng $(-\infty;-1)$, hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}$.

a) Hàm số có hai tiệm cận.

b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.

c) Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.

d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=x-4+\dfrac{10}{x+2}$.

$\lim\limits_{x\to-2} y=\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

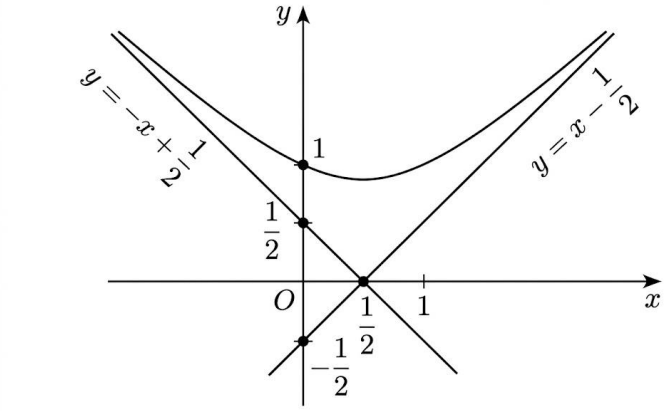
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x+2}=0$ nên $y=x-4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Giao điểm của hai tiệm cận thỏa mãn $\begin{cases}x=-2\\y=x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-6\end{cases}$.

Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác $-4=0-4$ nên M nằm trên tiệm cận xiên.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ chỉ có một tiệm cận xiên $y=x-\frac{1}{2}$

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không cực trị.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị ta có:

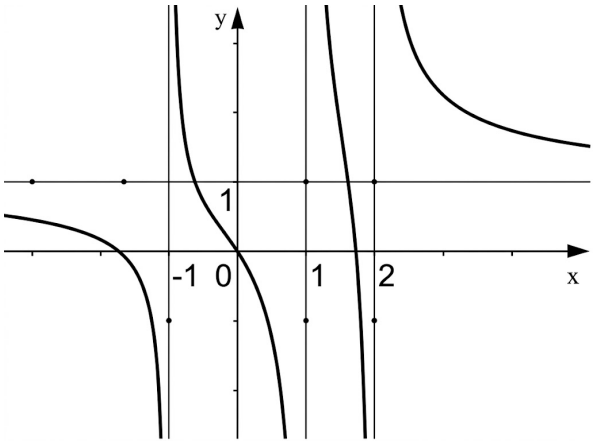
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận xiên $y=x-\frac{1}{2}$ và $y=-x+\frac{1}{2}$

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$ và có đồ thị như hình bên.



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=1$.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1);(-1;1);(1;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta có

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

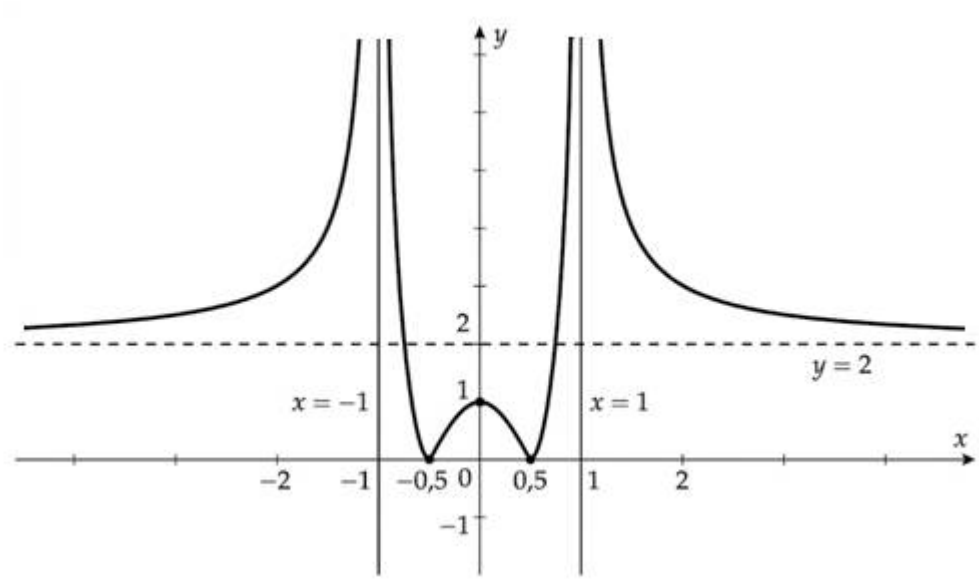
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1);(-1;1);(1;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có đồ thị như hình bên.



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 3.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta có

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=2$

Lại thấy: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là

$x=-1; x=1$

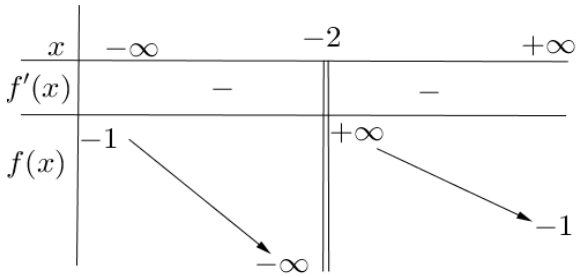
Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$.

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1);\left(-\frac{1}{2};0\right);\left(\frac{1}{2};1\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;-\frac{1}{2}\right);(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị với 1 điểm cực đại $(0;1)$ và 2 điểm cực tiểu $\left(-\frac{1}{2};0\right);\left(\frac{1}{2};0\right)$

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và bảng biến thiên như hình sau:



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y=-1$

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên ta thấy:

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-2$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang $y=-1$

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có điểm cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$ và bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
y	2	↗	$+\infty$	$-\infty$	↗	1	$+\infty$	↗	2 ↘ 3

a) Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 2

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có ba đường tiệm cận ngang.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

a) $\lim\limits_{x\to -2^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} y=-\infty$ suy ra $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$ suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang $y=2; y=3$

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=2$, suy ra $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=3$, suy ra $y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại là $(1;2)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x)=-2027$, $\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=2026$.

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=-2027$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên là $y=x+2$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng ba tiệm cận.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng của $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0 \Rightarrow$ đường thẳng $y=x-2$ là tiệm cận xiên của $y=f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng ba tiệm cận.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có các giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=2026$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2027$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=0$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

b) Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

c) Đường thẳng $x=2026$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận xiên là $y=2x+1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2027$ nên đường thẳng $y=2027$ là tiệm cận ngang của (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=0 \Rightarrow$ đường thẳng $y=2x+1$ là tiệm cận xiên của $y=f(x)$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

b) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-10)$ và $(10;+\infty)$.

d) Trên đoạn $[3;5]$, hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{5}{9}$ và có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{9}{14}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{2}{2}=1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{2}{2}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của của (C).

b) Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x-1}{2x+4}=+\infty;\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x-1}{2x+4}=-\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của của (C).

c) Ta có $y'=\dfrac{10}{(2x+4)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$ nên cũng đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-10)$ và $(10;+\infty)$.

d) Ta có $y'=\dfrac{10}{(2x+4)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\Rightarrow y'>0\ \forall x\in[3;5]$

$\min\limits_{[3;5]} y=f(3)=\dfrac{5}{9};\max\limits_{[3;5]} y=f(5)=\dfrac{9}{14}$

Vậy trên đoạn $[3;5]$, hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{9}{14}$ và có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{5}{9}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=-x-4$ là tiệm cận xiên của (C).

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực đại là $(-5;12)$ và điểm cực tiểu là $(1;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

a) Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}=-\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của của (C).

b) Ta có $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}=-x+4-\dfrac{9}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+4)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{9}{x+2}\right)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+4)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{9}{x+2}\right)=0 \Rightarrow y=-x+4$ là tiệm cận xiên của của (C).

c)

• Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2},\forall x\neq 2$.

• $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CĐ}=y(1)=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=y(-5)=12$.

Nên đồ thị hàm số (C) có điểm cực đại là $(1;0)$ và điểm cực tiểu là $(-5;12)$.

Câu 54. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=5$ là tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=x-3$ là tiệm cận xiên của (C).

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;5)$, nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

a) Ta có $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}=+\infty\Rightarrow x=5$ là tiệm cận đứng của của (C).

b) Ta có $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}=x-3-\dfrac{6}{x-5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{6}{x-5}\right)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{6}{x-5}\right)=0 \Rightarrow y=x-3$ là tiệm cận xiên của của (C).

b) $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-10x+31}{(x-5)^2}>0,\forall x\neq 5$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số (C) không có cực trị.

Câu 55. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

a) Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành bằng 2.

b) Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;9)$.

c) Gọi $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ thì diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{9}{4}$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[0;3]$ bằng 3.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-2x\right]=-3$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $y=2x-3$

a) $\Delta\cap Ox\Rightarrow y=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}<2$

b) tiệm cận đứng của (C) là $x=-3$ với $x_0=-3\Rightarrow y_0=2\cdot(-3)-3=-9$

c) $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A(-3;0)$ và $B=\Delta\cap Ox\Rightarrow B\left(0;\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$

d) hàm số $y=2x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra giá trị lớn nhất trên $[0;3]$ là $\underset{[0;3]}{Max}\,y=2.3-3=3$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận ngang.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) nằm trên parabol $y=2x^2-1$

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $x+y-2025=0.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=x$ đi qua gốc toạ độ nên không hình thành được tam giác.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$ và đường tiệm cận xiên là $y=x$ nên giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $I(1;1)$ nằm trên parabol $y=2x^2-1$

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=x$ vuông góc với đường thẳng $x+y-2025=0.$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c) Giao điểm của hai tiệm cận nằm trên trục tung.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) song song với đường thẳng $x+y=0.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận: đường tiệm cận đứng có phương trình $x=1$ và đường tiệm cận ngang có phương trình $y=x-1$.

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cắt hai trục toạ độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(1;0)$, $B(0;-1)$ nên tam giác OAB là tam giác vuông cân

c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $A(1;0)$nằm trên trục hoành.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=x-1$ vuông góc với đường thẳng $y=-x$

Câu 58. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị (C_1) và $g(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C_2). Biết đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$; đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$

a) $x_0+2y_0+3b=8$.

b) Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$..

d) Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

c) Giao điểm của ba đường tiệm cận $x=x_0$, $y=y_0$ và $y=ax+b$ tạo thành tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Với (C_1) ta có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=3$.

Với (C_2) ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=-1\Rightarrow TCX\ \Delta: y=x-1$

a) $x_0+2y_0+3b=2+3.3+3.(-1)=8$

b) Do bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên (C_2) không có tiệm cận ngang

c) Đồ thị hàm số (C_1) có tiệm cận đứng $x=2$, và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $(C_2): x=\frac{1}{2}\neq 2$

d) Giao điểm của ba đường tiệm cận là $(2;3);(2;1)$ và $(4;3)$.

Tam giác vuông tại đỉnh có tọa độ $(2;3)\Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-2)^2+(1-3)^2}\cdot\sqrt{(4-2)^2+(3-3)^2}=2$

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số (C) có hai đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số (C) có một đường tiệm cận ngang.

c) Hệ số góc của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số bằng 2.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{49}{4}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ nên hàm không có tiệm cận đứng

b) Đồ thị hàm số (C) không có tiệm cận ngang.

c) Ta có: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2-2x-1}{x^2-x+1}=7.$

$\Rightarrow y=2x+7$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số và có hệ số góc $k=2$.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=2x+7$ cắt trục tung tại điểm $A(0;7)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(-\dfrac{7}{2};0\right)$ nên diện tích là: $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot\left|-\dfrac{7}{2}\right|=\dfrac{49}{4}$

Câu 60. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ có đồ thị (C).

a) Đường thẳng $x=-1$ và $x=0$ là hai tiệm cận đứng của (C).

b) Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C).

c) Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận xiên.

d) Đồ thị hàm số đã cho chỉ có hai đường tiệm cận.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định hàm số $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

a) Ta có

$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$

Do đó đường thẳng $x=0$ không phải là tiệm cận đứng của (C).

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty.$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty.$

Do đó, đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

b) Ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = 0$$

Do đó, đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của (C).

c) Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ có mũ tử nhỏ hơn mũ mẫu nên không có tiệm cận xiên.

d) Đồ thị hàm số đã cho chỉ có hai đường tiệm cận là $x=-1$ và $y=0$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 61. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0\le x<100$. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=C(x)$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D=[0;100)$.

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}, 0\le x<100$.

Ta có: $y'=\dfrac{30000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$.

$\lim\limits_{x\to 100^-} C(x)=\lim\limits_{x\to 100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

Câu 62. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x\ge 1$.

Số lượng sản phẩm lớn nhất mà công ty có thể bán được trong x tháng bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1000

Số lượng sản phẩm bán được lớn nhất của công ty là tiệm cận ngang của hàm số $S(x)$.

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $S(x)$ là:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(5-\dfrac{9}{2+x}\right)=1000$

Câu 63. Nồng độ muối trong bể được tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ (t là thời gian nước chảy vào bể (phút)). Nồng độ muối lớn nhất mà bể có thể đạt được là bao nhiêu gam/lit?

Trả lời: ……..

Lời giải

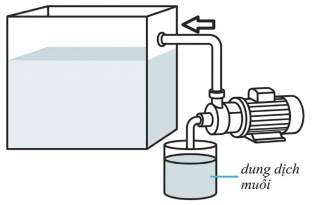
Đáp án: 30

Nồng độ muối lớn nhất mà bể có thể đạt được là tiệm cận ngan của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30}{200+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(30-\dfrac{6000}{200+t}\right)=30$.

Vậy nồng độ muối lớn nhất của bể là 30 gam/lit

Câu 64. Một bể chứa 1000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y=a,(a\in\mathbb{R})$. Tìm a



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

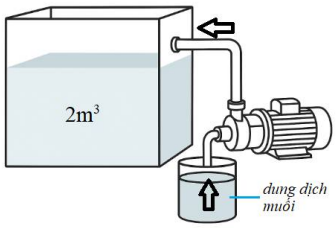
Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20.15t=300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1000+20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\dfrac{300t}{1000+20t}=\dfrac{30t}{100+2t}$ (gam/lit)

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30t}{100+2t}=15$ nên đồ thị hàm số $y=f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y=15$.

Câu 65. Một bể chứa $2m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối có trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3,75

Giả sử nước muối bơm vào có nồng độ a gam/lít.

Sau t phút ta có khối lượng muối trong bể là $20at$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $2000+20t$ (lít).

Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\dfrac{20at}{2000+20t}=\dfrac{at}{100+t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{at}{100+t}=a$, nên đồ thị hàm số $f(t)$ có tiệm cận ngang là $y=a$. Suy ra $a=10$.

Do đó hàm nồng độ muối trong bể sau khi bơm được t phút là $f(t)=\dfrac{10t}{100+t}$.

Nồng độ muối sau 1 giờ bơm là $f(60)=\dfrac{10.60}{100+60}=3,75$ (gam/lít).

Câu 66. Một bể chứa ban đầu có 300 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 60 lít nước và 20 gam chất khử trùng (hoà tan). Biết rằng nồng độ chất khử trùng luôn tăng theo thời gian và không vượt ngưỡng $\dfrac{1}{a}$ gam/lít. Tìm a.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Ta có 1 giờ = 60 phút.

Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Thể tích nước trong bể sau t phút là $300+60t$ (lít).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $\dfrac{20t}{300+60t}$ (gam/lít).

Vì $t\ge 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\dfrac{1}{3}$. Suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$. Do đó khi thời gian t trở nên rất lớn, nồng độ chất khử trùng ngày càng tiến về $\dfrac{1}{3}$. Vậy $a=3$.

Câu 67. Một nhà Văn muốn xuất bản một cuốn sách Văn Học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t\,(t\ge 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y=a,(a\in\mathbb{R})$. Tìm a

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 50

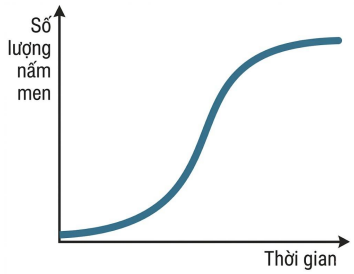
Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là : $7000+50t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f(t)=\dfrac{7000+50t}{t}$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=50$.

Vậy $y=50$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Câu 68. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu con?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 100

Ta có: $P'(t)=\dfrac{0,75a\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(b+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}$, $t\ge 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$.

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \dfrac{15}{b+1}=12\end{cases}$.

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\dfrac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}>0$, $\forall t\ge 0$, tức là số lượng nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0.75t}}=100$ nên số lượng nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Câu 69. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=400\left(2+\dfrac{3}{x+2}\right)$ với $x\ge 1$. Ta coi $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1;+\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong một khoảng thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 800

Ta có: $S'(x) = -\dfrac{1200}{(x+2)^2} < 0$, với mọi $x \ge 1$.

Suy ra hàm số $y = S(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Mặt khác, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 400\left(2+\dfrac{3}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(800+\dfrac{\dfrac{1200}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right) = 800$

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = S(x)$ là $y = 800$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 800 sản phẩm.

Câu 70. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất đư c một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x(x \ge 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x dồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x) = \dfrac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu (USD)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Một đồ chơi A công ty phải trả 6 USD nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x$ (USD) $(x > 1)$. Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là:

$P(x) = 6x + 40000 \Rightarrow F(x) = \dfrac{P(x)}{x} = \dfrac{6x+40000}{x}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x+40000}{x}\right) = 6$

Suy ra $y = 6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$.

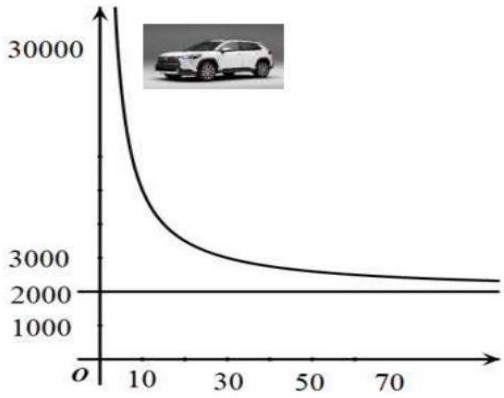
Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn 6 USD.

Câu 71. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t) = \dfrac{30000+2000t}{t}(\text{USD})$. Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó không thể thấp hơn hơn bao nhiêu (USD)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2000



Ta có: $f\left(t\right)=\dfrac{30000+2000t}{t}$.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{30000+2000t}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{30000}{t}+2000\right)=2000$.

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$ là $y=2000$.

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

Câu 72. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức $S\left(x\right)=300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)$ với $x\ge1$. Xem $y=S\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[1;+\infty\right)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 600

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}S\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}300\left(2+\dfrac{4}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(600+\dfrac{\dfrac{1200}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right)=600$.

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=600$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

Câu 73. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N\left(x\right)=\dfrac{50x}{x+4}\left(x\ge0\right)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y=N\left(x\right)$ là một hàm số xác định trên $\left[0;+\infty\right)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 50

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} N(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50x}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{50}{1+\dfrac{4}{x}}=50$

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Câu 74. Một cơ sở sản xuất tính toán rằng số sản phẩm trung bình mà một nhân viên làm được mỗi ngày là $f(x)=\dfrac{100x}{x+10}$ với x là số ngày kinh nghiệm làm việc $(x\ge 0)$. Xem $y=f(x)$ là một hàm số xác định trên $[0;+\infty)$. Khi số ngày kinh nghiệm làm việc tăng lên thì số sản phẩm trung bình tối đa mà một nhân viên có thể làm được trong một ngày là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

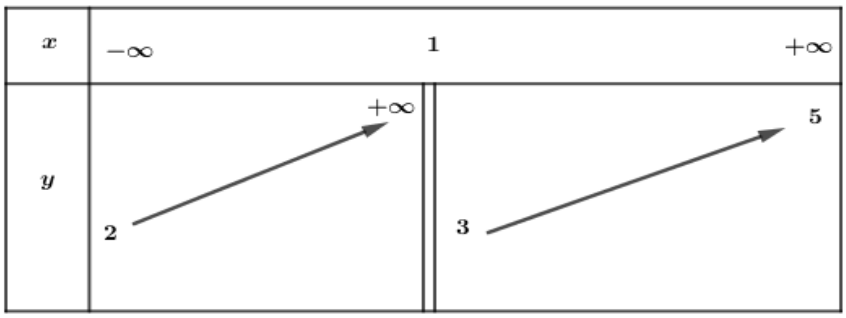
Đáp án: 99

Ta có: $f(x)=\dfrac{100x}{x+10}=100-\dfrac{1000}{x+10}<100$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=100$ nên số sản phẩm tối đa mà một nhân viên làm được trong một ngày là không quá 99 sản phẩm.

Ta có $f(x)=99\Leftrightarrow\dfrac{100x}{x+10}=99\Leftrightarrow x=990$.

Vậy khi số ngày kinh nghiệm làm việc tăng lên thì số sản phẩm trung bình tối đa mà một nhân viên có thể làm được trong một ngày là 99.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

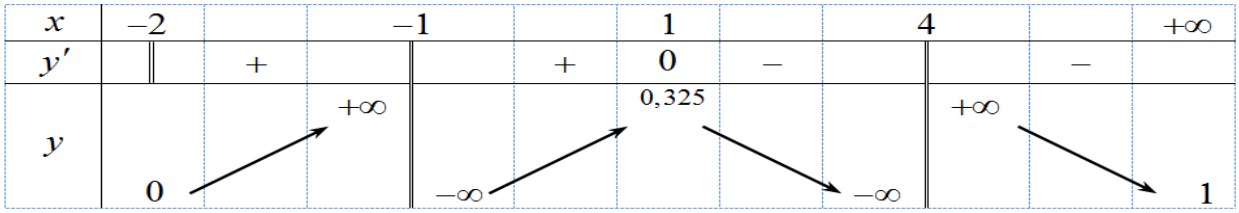
Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 76. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Dựa vào bảng biến thiên ta có

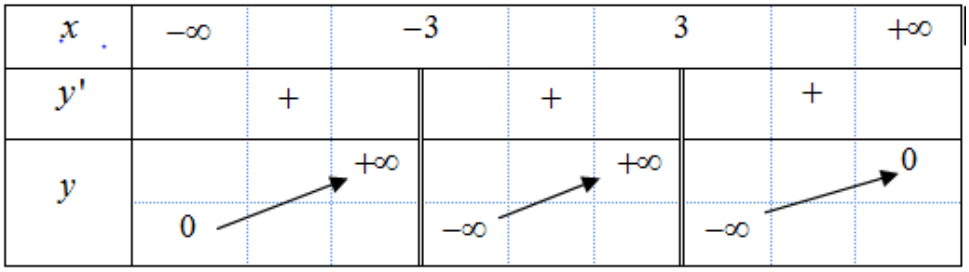
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên $y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=-\infty$ nên $x=4$ là TCĐ.

Vậy có 2 TCĐ và 1 TCN .

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến như sau:



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có:

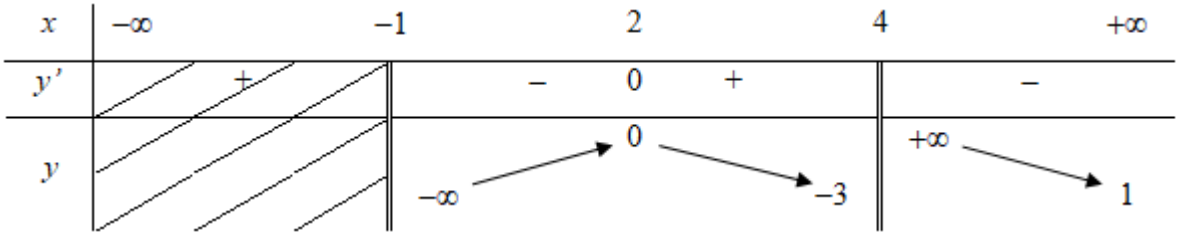
+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+}=-\infty\Rightarrow$đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim\limits_{x\to3^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+}=-\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-1;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=4$.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$	0	$+$	
y	5	↗	$+\infty$ | 4	↘	0	↗	$+\infty$

Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=5$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=5$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

$\Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 80. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 81. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính $x_0+2026y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2028

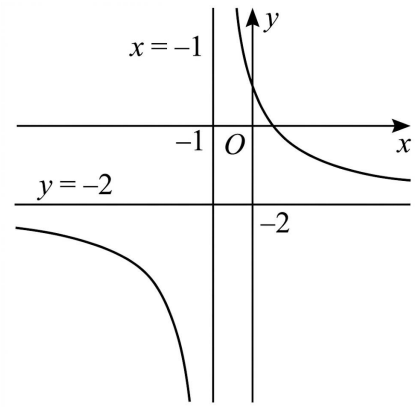
Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

$\Rightarrow x_0+2026y_0=2028$

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang $y=y_0$ và tiệm cận đứng $x=x_0$. Tính x_0-y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

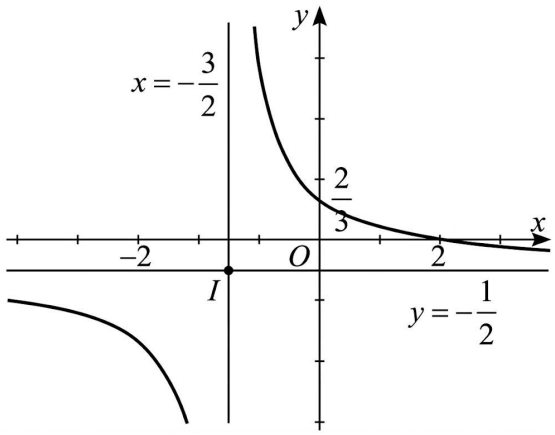
Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$\Rightarrow x_0 - y_0 = 1$

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(x_0; y_0)$. Tính $x_0 + y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

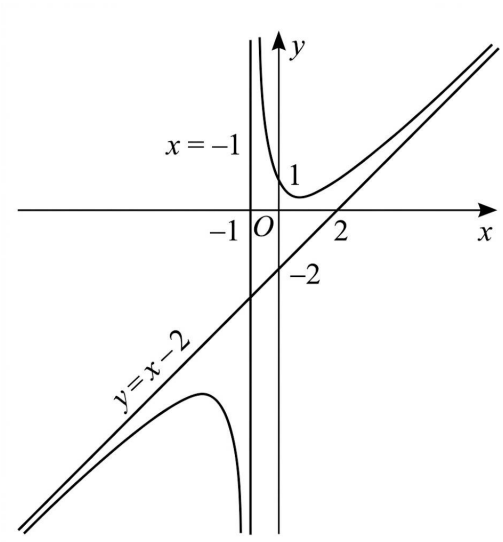
Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow x_0 + y_0 = -2$

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(x_0; y_0)$. Tính $x_0 + y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

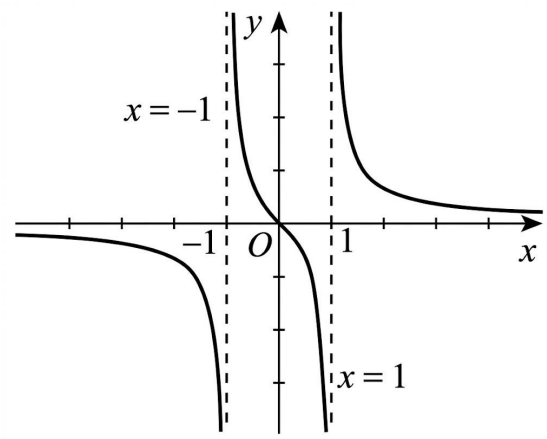
Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x-2$.

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=1-2=-1\Rightarrow x_0+y_0=0$

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

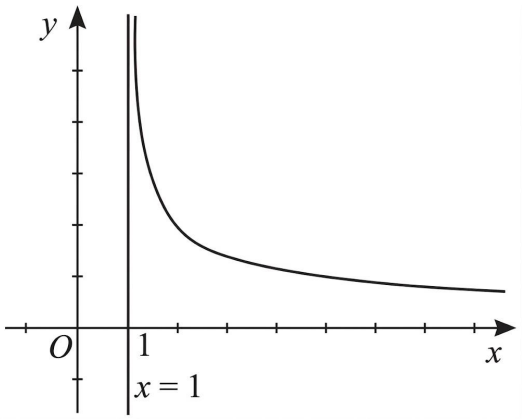
Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ



Biết giao điểm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

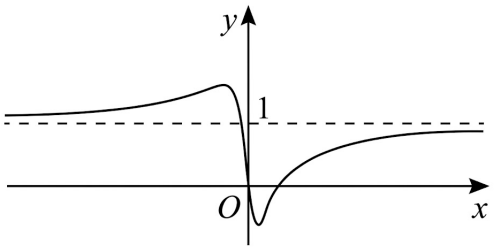
Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\Rightarrow x_0+y_0=1$

Câu 87. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Từ đồ thị hàm số, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Câu 88. Gọi $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Giá trị x_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty, \lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty.$

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình $x=1\Rightarrow x_0=1$.

Câu 89. Gọi $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Giá trị y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2;\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là

$y=2\Rightarrow y_0=2$.

Câu 90. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2;\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

$\Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 91. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x}{x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -5

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{1-3x}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1-3x}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x}{x+2}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

$\Rightarrow x_0+y_0=-5$

Câu 92. Cho hàm số: $y=\dfrac{2025}{x^2-6x+5}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(1)^+}\dfrac{2025}{x^2-6x+5}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(1)^-}\dfrac{2025}{x^2-6x+5}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to(5)^+}\dfrac{2025}{x^2-6x+5}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(1)^-}\dfrac{2025}{x^2-6x+5}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=5$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2025}{x^2-6x+5}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Câu 93. Biết giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính $3x_0+y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{1}{3x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{2}{3}\right)^+}\dfrac{1}{3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{3x+2}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Giao điểm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng $\left(-\dfrac{2}{3};0\right)\Rightarrow 3x_0+y_0=-2$

Câu 94. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}$ là $(x_0;y_0)$.

Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{2}{x}}{2x-4}=\frac{1}{2};\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x-4}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{2x-4}=1.$$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=1$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+1$

$\Rightarrow x_0+y_0=2+2=4$

Câu 95. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -11

Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3-\dfrac{6}{x}}{x+2}=2$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x-6}{x+2}=-7.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]=-7$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x-7$

$\Rightarrow x_0+y_0=-11$

Câu 96. Biết giao điểm đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}$ là $(x_0;y_0)$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^-}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^+}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=+\infty$

Vậy đường thẳng $x=-\dfrac{5}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+9+\dfrac{11}{x}}{2x+5}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+11}{2x+5}=2.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=2$

Do đó đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

$\Rightarrow x_0+y_0=-3$

Câu 97. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x+1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{x+1}{x^2-4}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

$\lim\limits_{x\to(2)^+}\dfrac{x+1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(2)^-}\dfrac{x+1}{x^2-4}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x^2-4}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Câu 98. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ta có :

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Câu 99. Cho hàm số: $y=\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Câu 100. Cho hàm số: $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng $x=\pm 1$ và một tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 101. Cho hàm số: $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-8}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$ và một tiệm cận ngang $y=0$

Câu 102. Cho hàm số: $y=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lại có: $\lim\limits_{x\to(-1)}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to(3)}y=\infty$ do đó $x=-1;\ x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 103. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 4\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-16}=\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x+1}{x+4}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=-4$ và tiệm cận ngang $y=1$

Câu 104. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-10x+21}$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3;7\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-10x+21}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-7)}=\dfrac{x+3}{x-7}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=7$ và tiệm cận ngang $y=1$

Câu 105. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự hàm số có thêm một tiệm cận đứng khác là $x=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Câu 106. Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ có dạng $y=ax+b$. Giá trị $2025a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2025

$y=f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x\Rightarrow a=1;b=0\Rightarrow 2025a+b=2025$

Câu 107. Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ có dạng $y=ax+b$. Giá trị $2025a-2024b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$$y=f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+1\Rightarrow a=1;b=1\Rightarrow 2025a-2024b=1$

Câu 108. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2024}{x-2}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ tiệm cận xiên của có dạng $y=ax+b$ và tiệm cận đứng có dạng $x=c$. Giá trị $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$$y=f(x)=\frac{-x^2+3x-2024}{x-2}=-x+1-\frac{2022}{x-2}$$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2022}{x-2}\right)=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2022}{x-2}\right)=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1\Rightarrow a=-1;b=1$

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-x^2+3x-2024}{x-2}=-\infty;\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x^2+3x-2024}{x-2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2\Rightarrow c=2$

Vậy $a+b+c=2$

Câu 109. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = x+1+\dfrac{5}{x-3} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x-3}=0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y=x+1$ nên $a^2+2b=3$.

Câu 110. Biết đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Hỏi đường thẳng d có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x-2}=-1$

Tương tự do $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-1$

Vậy đường thẳng $y=x-1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên có hệ số góc bằng 1

Câu 111. Gọi $I(x_0;y_0)$ là toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –4

Ta có $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x-1$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=-1 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ nên giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1;-3) \Rightarrow x_0+y_0=-4$.

Câu 112. Gọi $I(x_0;y_0)$ là toạ độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Ta viết lại $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}=x+5+\dfrac{10}{x-2}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+5$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=2\\y=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$ nên giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(2;7)\Rightarrow x_0+y_0=9$.

Câu 113. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Tính $2a^2+2025b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases}y=x+\dfrac{2x+1}{x^2-1}\\\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-1}=0\end{cases}\Rightarrow TCX\ d: y=x\Rightarrow a=1\Rightarrow 2a^2+2025b=2$.

Câu 114. Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB là bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases}y=x+2+\dfrac{4x+2}{x^2-2x}\\\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+2}{x^2-2x}=0\end{cases}\Rightarrow TCX\ d: y=x-2.$

Ta có $d\cap Ox$ tại điểm $(0;-2)$ và $d\cap Oy$ tại điểm $(2;0)$

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\,(dvdt)$.

Câu 115. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\dfrac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty;\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 116. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$. Biết đồ thị hàm số có tiệm cận ngang dạng $y=a$ và tiệm cận đứng dạng $x=b$. Giá trị $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x\ne 2,x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=+\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, do đó $b=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, do đó $a=0$

$\Rightarrow a+b=2$

Câu 117. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}=-1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-1$.

$\lim\limits_{x\to\pm2}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}=\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x=\pm2$.

Câu 118. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=1\end{cases}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Và $\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\infty\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 119. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x\left(x^2-4x+3\right)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=(-\infty;2]\setminus\{0;1\}$

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x\left(x^2-4x+3\right)}=\dfrac{1-x}{x(x-1)(x-3)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=-\dfrac{1}{x(x-3)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$.

Suy ra $x(x-3)\left(\sqrt{2-x}+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$. Suy ra đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{x(x-3)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right]=0;\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x(x-3)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}\right]=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 120. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}=\dfrac{\dfrac{x+9-9}{\sqrt{x+9}+3}}{x(x+1)}=\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to(-1)}y=\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}=0;\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{x^2+x}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 121. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$, $y=b$ và đường tiệm cận đứng là $x=c$. Khi đó, tính $a+b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1}{1-\dfrac{1}{x}}=0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1}{1-\dfrac{1}{x}}=-2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}=+\infty;\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{x-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=1$.

$\Rightarrow a+b+c=3$

Câu 122. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.

Ta có:

$$y=\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$
$$=\frac{3x^2-5x-2}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$
$$=\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

Do vậy chỉ có đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow a+b=3$

Câu 123. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Ta có $y=\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)(x^2-1)}=\frac{x^2-1}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)(x^2-1)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}=0\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và không có tiệm cận đứng.

Câu 124. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3;\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=3$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to1} y=\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 125. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Tập xác định: $D=(-3;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có: $y=\dfrac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}=\dfrac{(3x-1)^2-(x+3)}{(x^2+2x-3)(3x-1+\sqrt{x+3})}=\dfrac{9x^2-7x-2}{(x^2+2x-3)(3x-1+\sqrt{x+3})}$

$=\dfrac{9x+2}{(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})}$

Ta thấy $(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})=0\Leftrightarrow x=-3\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-3$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+2}{(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})}=0;\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x+2}{(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})}=0\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

$\Rightarrow a+b=-3$

Câu 126. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}-2x+3}{x^2-4x+3}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{1;3\}$.

Khi đó $y=\dfrac{\dfrac{2x+3-(2x-3)^2}{\sqrt{2x+3}+2x-3}}{x^2-4x+3}=\dfrac{(1-2x)(x-3)}{(\sqrt{2x+3}+2x-3)(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{1-2x}{\left(\sqrt{2x+3}+2x-3\right)(x-1)}$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\Rightarrow a+b=1$

Câu 127. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y=2\\\lim\limits_{x\to-\infty} y=-2\end{array}\right.\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai TCN.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2-2x-3=0\\2x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng.

Câu 128. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x+2}=\dfrac{(x+1)^2-\left(x^2+x+2\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)(x-1)(x+2)}$

$=\dfrac{x-1}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{(x+2)\left(x+1+\sqrt{x^2+x+2}\right)}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty\Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\Rightarrow a+b=-2$

Câu 129. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}$. Biết đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a$ và đường tiệm cận đứng là $x=b$. Khi đó, tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}=2\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

Mặt khác $y=\dfrac{3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}}{x^2-3x+2}=\dfrac{\left(3x^2-1-\sqrt{x^4+x+2}\right)\left(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2}\right)}$

$=\dfrac{8x^4-7x-1}{\left(x^2-3x+2\right)\left(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2}\right)}=\dfrac{(x-1)\left(8x^3+8x^2+8x+1\right)}{(x-1)(x-2)\left(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2}\right)}$

$=\dfrac{8x^3+8x^2+8x+1}{(x-2)\left(3x^2-1+\sqrt{x^4+x+2}\right)}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$.

$\Rightarrow a+b=4$

Câu 130. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{-9(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty$

do đó đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}}=-\dfrac{1}{3}$ do đó đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 131. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=(0;1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

+ $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=0, x=1$.

Câu 132. Tìm giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ đi qua điểm $M(3;1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$ nên đồ thị hàm có tiệm cận đứng là $x=3$

Suy ra $x+m=0$ có nghiệm là 3 do vậy $3+m=0\Leftrightarrow m=-3$.

Thử lại, với $m=-3\Rightarrow y=\dfrac{2x-7}{x-3}$ có $\lim\limits_{x\to 3^+} y=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-7}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-7}{x-3}=+\infty$.

Vậy $m=-3$.

Câu 133. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2025;0)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2023

Để $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{2x+4}{x-m}$ thì $\begin{cases}v(m)=0\\u(m)\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m-m=0\\2m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\m\neq -2\end{cases}\Rightarrow m\neq -2$

$\begin{cases}m\in(-2025;0)\\m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m=\{-2024;-2023;...;-1\}\setminus\{-2\}$

Câu 134. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq 0\\ 4.(-1)-1.m=0\end{cases}\\ m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=0\end{array}\right.$.

Câu 135. Tìm giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là $y=1$

Trả lời: ……..

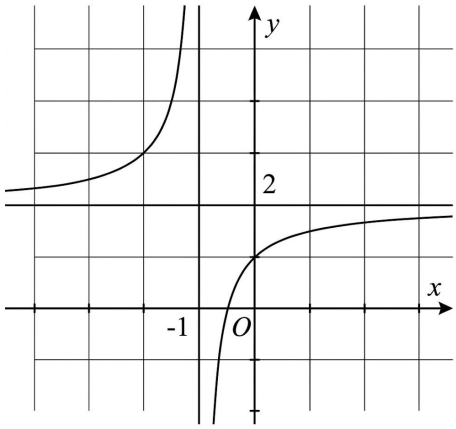
Lời giải

Đáp án: 1

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $-m(m+1)+10m\neq 0$

Tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{m+1}{2}$ theo đề bài $\dfrac{m+1}{2}=1\Leftrightarrow m=1$ (thoả mãn)

Câu 136. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m};\ (mn\neq 1)$ xác định trên $R\setminus\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng $m+n$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3.

Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m};\ (mn\neq 1)$ có hai đường tiệm cận $x=-m=-1;\ y=n=2\Rightarrow m=1;$

$n=2\Rightarrow m+n=3$

Câu 137. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới.

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$ ↘	1 || $-\infty$	↗ 8

Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0y_0=16$. Hỏi giá trị m bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\lim\limits_{x\to m^+} y=-\infty$ nên $x=m$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=8$ nên $y_o=8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m=16\Leftrightarrow m=2$.

Câu 138. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	m ↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘ m

Tìm giá trị tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1;1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Từ BBT suy ra TCĐ là $x=-m$, TCN là $y=m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(-m;m)$.

YCBT $I(-m;m)\equiv I(-1;1)\Leftrightarrow\begin{cases}-m=-1\\ m=1\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 139. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2025}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x=-\dfrac{d}{c}=-m-3=0$ làm TCĐ $\Rightarrow m=-3$

Đồ thị hàm số nhận $y=\dfrac{a}{c}=n-3=0$ làm TCN $\Rightarrow n=3$.

Vậy $m+n=0$.

Câu 140. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang thì giá trị $a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

+ $b=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

+ $b\neq 0$, tập xác định của hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ là $D=R\setminus\left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+1}{bx-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+\dfrac{1}{x}}{b-\dfrac{2}{x}}=\frac{a}{b}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b=2a$.

$$\lim_{x\to\frac{2^+}{b}} y=\lim_{x\to\frac{2^+}{b}}\frac{ax+1}{bx-2}=\begin{bmatrix}+\infty\\-\infty\end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{2}{b}\Rightarrow\dfrac{2}{b}=1\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=1$.

Vậy $a=1;b=2\Rightarrow a+b=3$

Câu 141. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 14

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiện cận ngang $y=0$.

Hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi hàm số có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-m>0\\m-7\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\m\neq 7\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m \in \{1;2;3;...;6;8;...;15\}$. Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 142. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2+m=0$ nhận nghiệm $x=1$ hoặc $x=2$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

Với $m=-1$ có một tiệm cận đứng $x=2$.

Với $m=-4$ có một tiệm cận đứng $x=1$.

Vậy $m\in\{-1;-4\}$.

Câu 143. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}$ có đúng 1 tiệm cận ngang.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

+ Với $m=0$, ta có $y=\dfrac{x-1}{2x+2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty} y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ Với $m<0$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

+ Với $m>0$, ta có $y=\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{mx^2+4}}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{2x+|x|\sqrt{m+\dfrac{4}{x^2}}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{1}{2+\sqrt{m}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{1}{2-\sqrt{m}} \end{array}\right.$

Để hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{1}{2-\sqrt{m}}=\infty$

Cho $2-\sqrt{m}=0\Leftrightarrow m=4\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} y=\infty$.

Vậy $m=0$; $m=4$ là giá trị cần tìm.

Câu 144. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2027;2027]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2026

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=m\ (m\neq -2)$ nằm bên trái trục tung

$\Leftrightarrow m<0$.

$\begin{cases} m\in[-2027;2027] \\ m\in\mathbb{Z} \\ m\neq -2 \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2027;-2026;...;-3;-1\}$.

Vậy có 2026 giá trị nguyên của m thoả mãn yêu cầu.

Câu 145. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có:

Tiệm cận đứng: $x=1$, song song với Oy và cắt Ox tại điểm $A(1;0)$.

Tệm cận ngang: $y=2m$, song song với Ox và cắt Oy tại điểm $B(2m;0)$.

Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ là

$S=OA.OB=1.|2m|=8\Rightarrow m=\pm 4$.

Câu 146. Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Xét hàm nhất biến $y=\dfrac{x-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x=m$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5

khi và chỉ khi: $|m|.1=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-5 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn và tổng chúng bằng 0.

Câu 147. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục trung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Điều kiện: $x^2+mx+n-6\neq 0$.

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=2m-n$.

Vì đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $2m-n=0$.

Đặt $f(x)=(2m-n)x^2+mx+1$ và $g(x)=x^2+mx+n-6$.

Vì $f(0)\neq 0$ với mọi m,n nên đồ thị nhận trục tung $x=0$ là tiệm cận đứng khi $g(0)=0\Leftrightarrow n=6$.

Suy ra $m=\dfrac{n}{2}=3$. Vậy $m+n=9$.

Câu 148. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}=-x-m+\dfrac{m^2-m+1}{1-x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y=-x-m$.

Tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0;-m)$ và $B(-m;0)$.

Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|y_A|.|y_B|=\dfrac{1}{2}m^2$.

Theo giả thiết $S=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Câu 149. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}=2x+3m+2+\dfrac{2m+4}{x-1}$.

Với $m=-2$ thì hàm số trở thành $y=2x-4$. Đây là hàm số bậc nhất nên không có tiệm cận.

Với $m\neq 2$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(2x+3m+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2m+4}{x+2}=0$.

Do đó với $m\neq 2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta:\ y=2x+3m+2$.

Δ cắt trục hoành tại điểm $A\left(\dfrac{-3m-2}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0;3m+2)$.

Từ đó $OA=\dfrac{|-3m-2|}{2}=\dfrac{|3m+2|}{2}$, $OB=|3m+2|$.

Theo giả thiết:

$$S_{OAB}=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=4\Leftrightarrow\frac{|3m+2|}{2}.|3m+2|=8\Leftrightarrow(3m+2)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m+2=-4\\3m+2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2(\text{loaïi})\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy có một giá trị m là $m=\dfrac{2}{3}$.

Câu 150. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x}$, m là tham số. Tìm m để hàm số (C) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến đường tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định: D $=\mathbb{R}$. Ta có $y'=m-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{mx^2-1}{x^2}$.

Hàm số (C) có cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}>0\Leftrightarrow m>0$.

Lúc đó $y'=0\Leftrightarrow x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{m}},x_2=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Lập bảng biến thiên để suy ra: Điểm cực tiểu của (C) là $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$.

Tiệm cận xiên $\Delta:y=mx\Leftrightarrow mx-y=0$.

Theo đề $d(M,\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\sqrt{m}-2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 2m=m^2+1\Leftrightarrow m=1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=1$.

Câu 151. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}$ có đồ thị (C), với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên, đồng thời góc giữa hai đường tiệm cận này bằng 45^0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$.

Khi $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận.

Khi $m\neq\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta_1: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$

Tiệm cận đứng là $\Delta_2: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0$.

Góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0 nên

$\cos 45^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Câu 152. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

+ $g(x)=mx^2-2x+3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang

+ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$ không có tiệm cận xiên

+ Do đó theo yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng nữa là đủ.

TH1 : $m=0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=0$ thỏa bài toán.

TH1 : $m\neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-2x+3=0$ có nghiệm kép hoặc nhận $x=1$ làm nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta_f=0\\ f(1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{3}\\ m=-1\end{array}\right.$

Vậy: $m\in\left\{0;\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Câu 153. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có tiệm cận xiên?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17

Đồ thị hàm số có đường tiệm xiên đứng khi và chỉ khi phương trình $g(x)=2x^2-3x+m=0$ không có nghiệm $x=m$ tức là $g(m)\neq 0\Leftrightarrow 2m^2-2m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 1\end{cases}$

$\begin{cases}m\in(-10;10)\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{-9;-8;...;9\}\setminus\{0;1\}$

Câu 154. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16

Ta có đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2+4x-m-3$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}2^2-(-m-3)>0\\ 1^2+4.1-m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-7\\ m\neq 2\end{cases}$

Từ đó ta suy ra $m=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 155. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-2mx-m-2}$. Biết với $m=\dfrac{a}{b}(a,b\in\mathbb{N},\ \dfrac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có nghiệm kép $x=2$ hoặc phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ phải có hai nghiệm (một nghiệm $x_1=2$ và một nghiệm $x_2\neq 2$).

Do $\Delta'=m^2+m+2>0,\forall m$ nên ta chỉ xét trường hợp thứ hai phương trình $x^2-2mx-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt. Thay $x=2$ vào phương trình ta được $m=\dfrac{2}{5}$ (thỏa mãn).

Vậy $a=2,b=5\Rightarrow a+b=7$.

Câu 156. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in (-2025;2025)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = m \Rightarrow y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 tiệm cận $\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng. Ta có:

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m.1^2-1=0 \\ m.2^2-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy có 2 giá trị tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 157. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2+4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị phải có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) = x^2+4x+m = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-m=0 \\ \begin{cases} 4-m>0 \\ 1-4+m=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=3 \end{array}\right. .$$

Câu 158. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m \in (-2025;2025)$ để đồ thị có ba đường tiệm cận?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4044.

+ Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ luôn có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$ và không có tiệm cận xiên.

+ Do đó theo yêu cầu bài toán thì đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng nữa là đủ. Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có ba đường tiệm cận thì $x^2-2mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (-1)^2-2m(-1)+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Do $m\in\mathbb{Z}; m\in(-2025;2025)$ nên có 4044 số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 159. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $x^2+x-2=0$.

Hay phương trình $f(x)=x^2-2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2.

Khi đó ta có $\begin{cases} \Delta'>0 \\ f(1)\neq 0 \\ f(-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m-1\neq 0 \\ 8+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\neq 1 \\ m\neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow -8\neq m<1.$

Vì m là nguyên dương nên không có giá trị nào thỏa.

Câu 160. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{2m}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

Phương trình $f(x)=x^2-2mx+9=0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một

nghiệm bằng $-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta' = m^2-9=0\\ \begin{cases}\Delta' = m^2-9>0\\ f(-3)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\\ \begin{cases}m^2-9>0\\ m=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$

Câu 161. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có nghiệm kép hoặc phương trình

$x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\Delta=0\\ \begin{cases}\Delta>0\\ 1-(2m+1)+m^2-3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2m+1)^2-4(m^2-3)=0\\ \begin{cases}(2m+1)^2-4(m^2-3)>0\\ m^2-2m-3=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{13}{4}\\ m=3\\ m=-1\end{array}\right.$$

Câu 162. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-3)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

Ta có:

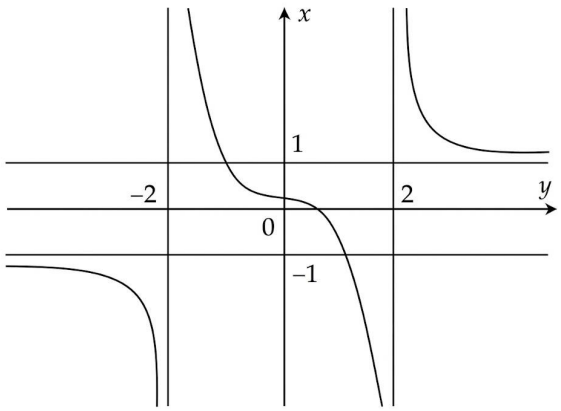
$$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2m+1+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}=2m+1$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2m+1+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}=2m+1$$

$\Rightarrow d: y=2m+1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Do $A(1;-3)\in d \Leftrightarrow 2m+1=-3 \Leftrightarrow m=-2.$

Câu 163. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có tổng bao nhiêu đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{2}{3.(-1)-2}=-\dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\dfrac{2}{3.1-2}=2$

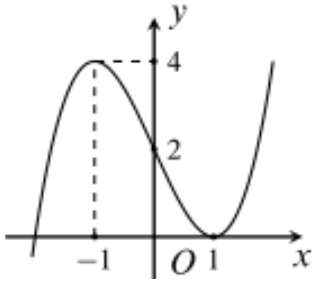
Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

Xét phương trình $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 164. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Xét $f^2(x)-4f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=4\end{array}\right.$.

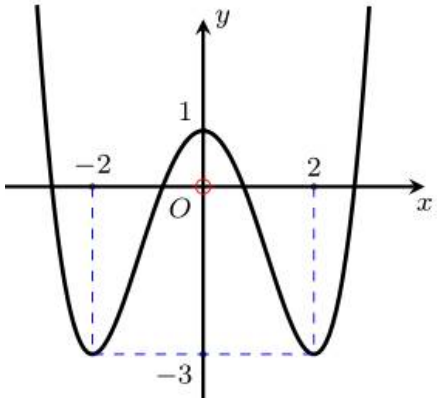
Xét $f(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1\neq\pm1$ và $x_2=1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x=1$.

Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x)=4$ có 2 nghiệm $x_3\neq\pm1$ và $x_4=-1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại $x=-1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Câu 165. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Xét phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=x_1<-2;x=x_2>2\\x=-2;x=2\end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x=0$, $x=-2$, $x=2$ đều có bội 2 và $x=x_1\left(x_1<-2\right)$; $x=x_2\left(x_2>2\right)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCĐ là $x=0$; $x=2$; $x=x_1$; $x=x_2$

Câu 166. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ 5	↘	3	↗	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-5}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Hàm số $y=g(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x)\neq 5$ hay $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq a\ (a<1) \\ x\neq b\ (b>2) \end{cases}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)<5 \text{ khi } x\to 1^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)>5 \text{ khi } x\to a^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=+\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)>5 \text{ khi } x\to b^+ \end{cases}$

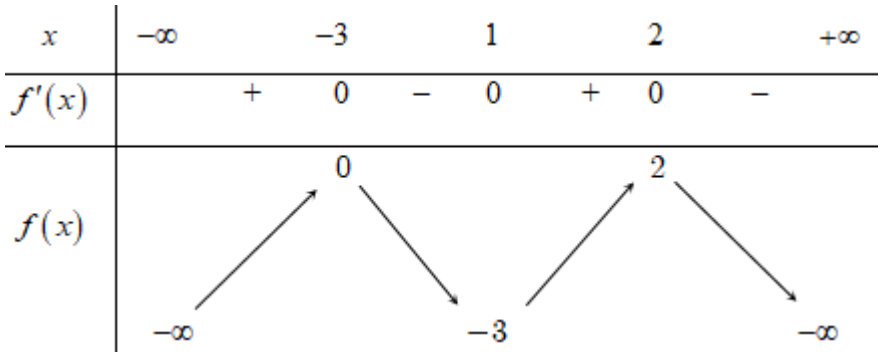
nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng : $x=1$, $x=a$, $x=b$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\dfrac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang:

$y=0$, $y=-\dfrac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 5.

Câu 167. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có BBT như sau:



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Xét PT $f^2(x)+3f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=-3\end{array}\right.$ trong đó:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=x_1\in(1;2)\quad(ng\ kép)\\x=x_2\in(2;+\infty)\end{array}\right.$$

$$f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\quad(ng\ kép)\\x=x_3\in(-\infty;-3)\quad(kot/m\ do\ x\ge-3)\\x=x_4\in(2;+\infty)\end{array}\right.$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là

$x=0;x=1;x=x_1;x=x_2;x=x_4$

Câu 168. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=-1;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=0.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-1;\ y=0.$

$f(x)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;a<-1\\x=1\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$. Vì $f(x)>1$ khi $x\to0$.

Tương tự , $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng

$x=a;\ x=1.$

Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 169. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f(x)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2 \Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f(x)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=4 \Rightarrow y=4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} y=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{10}.f(-3)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} y=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f(x)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{10}.f(-3)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng.

Câu 170. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $f(x)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{f(x)}-\frac{2}{f^2(x)}-\frac{1}{f^3(x)}}{1-\frac{4}{f(x)}+\frac{5}{f^2(x)}-\frac{2}{f^3(x)}}=2 \text{ vì } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty .$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số hàm số $g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f^3(x)+f^2(x)-2f(x)-1}{f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[2f(x)+1\right]\left[f(x)+1\right]\left[f(x)-1\right]}{\left[f(x)-1\right]^2\left[f(x)-2\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[2f(x)+1\right]\left[f(x)+1\right]}{\left[f(x)-1\right]\left[f(x)-2\right]}=+\infty \text{ vì } \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \text{ và } f(x)<1\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$.

BÀI 4
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ bài toán khảo sát

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số
- Tìm cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và tìm tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số .
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

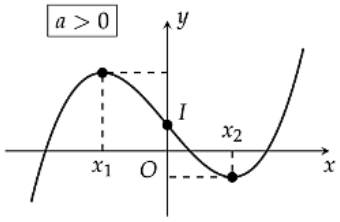
Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên:

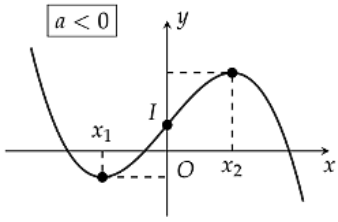
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm).
- Vẽ đồ thị của hàm số.

2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đa thức bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

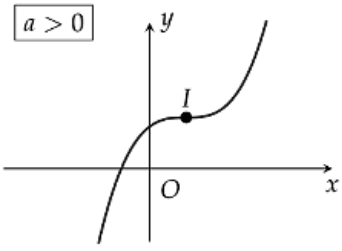
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Các dạng đồ thị:

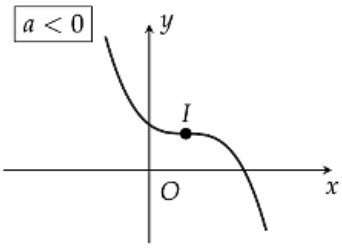
+ Trường hợp 1: Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



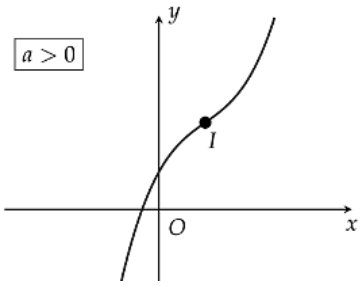


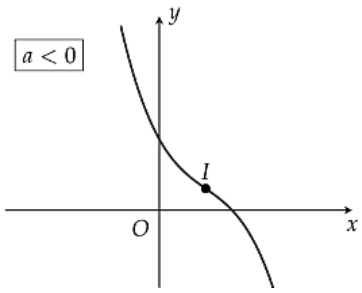
+ Trường hợp 2: Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac = 0$ thì $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





+ **Trường hợp 3:** Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac<0$ thì $y'=0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữa tỉ

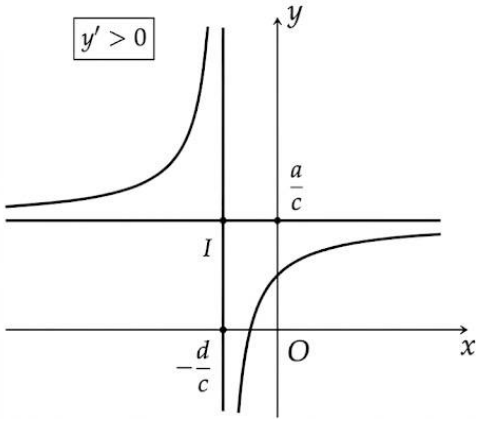
a. Hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$**.**

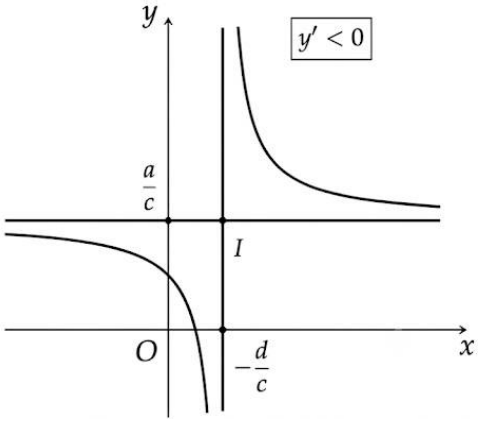
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\dfrac{a}{c}=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$.

  + Trục 1: hướng đi lên (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=x+\dfrac{d}{c}$

  + Trục 2: hướng đi xuống (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=-\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$

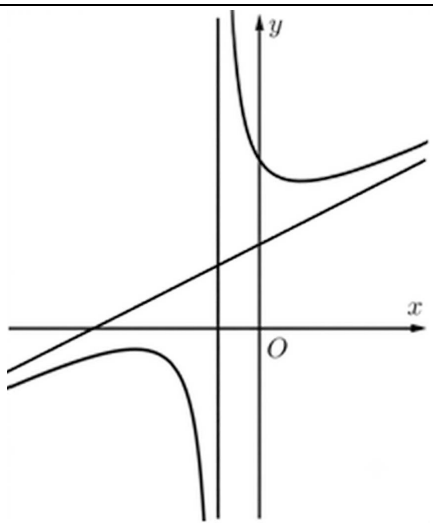
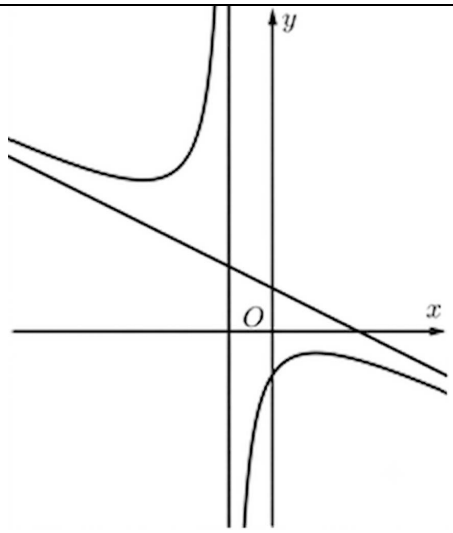
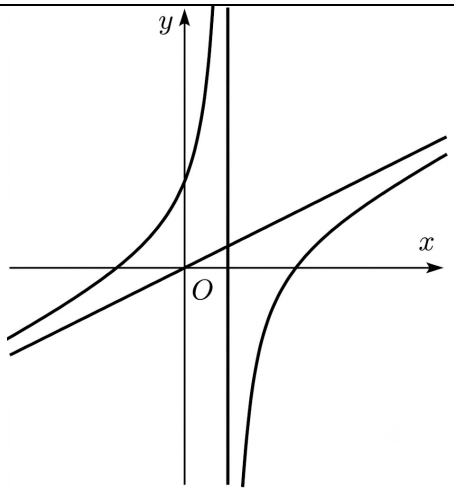
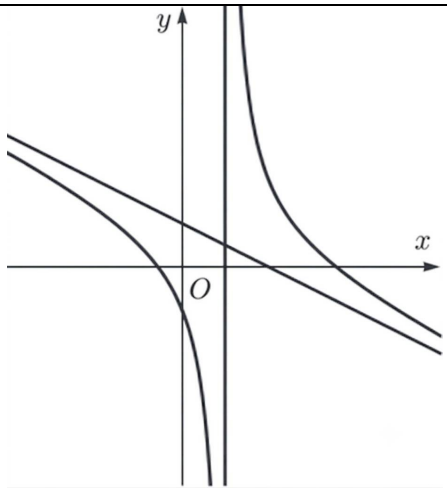
- Các dạng đồ thị:





b. Hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$**.**

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{2amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận.
- Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

	$am>0$	$am<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		

CHỦ ĐỀ 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

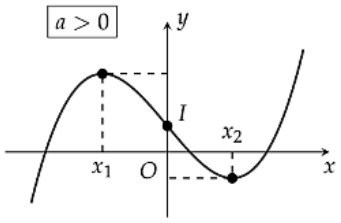
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

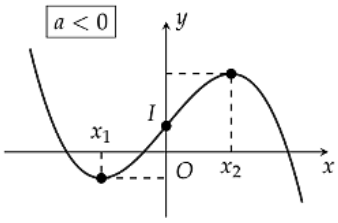
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.
- Tìm các giới hạn tại vô cực của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Chú ý: Đồ thị nhận điểm $I(x_0;y_0)$ làm tâm đối xứng, với x_0 là nghiệm của $y''=0$ và $y_0=y(x_0)$. Tọa độ tâm đối xứng $I(x_0;y_0)$ của đồ thị chính là tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị.

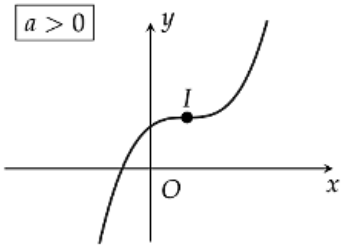
2. Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba

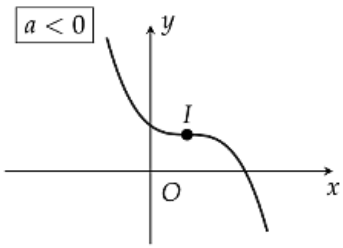
• Trường hợp 1: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac>0$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x=x_1$ và $x=x_2$



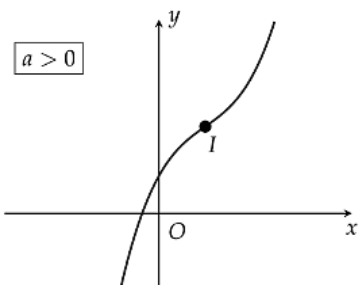


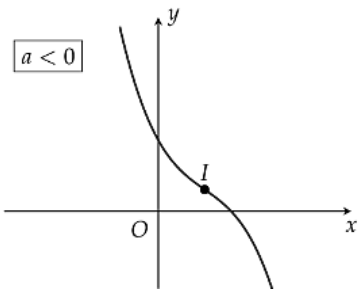
• Trường hợp 2: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac=0$ thì $y'=0$ có nghiệm kép $x=x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





• Trường hợp 3: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac<0$ thì $y'=0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=2x^3-6x$ b) $y=-x^3+3x^2-1$ c) $y=-x^3+2$ d) $y=x^3-3x^2+3x-1$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+1$ b) $y=-2x^3-3x^2+1$ c) $y=x^3+3x^2+3x+2$ d) $y=x^3-3x^2+4x-2$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=-x^3+3x+1$ b) $y=x^3-6x^2+1$ c) $y=x^3-3x^2+3x-1$

d) $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x$ e) $y=-x^3+2x^2-2x+1$ f) $y=x^3-3x^2+4x$

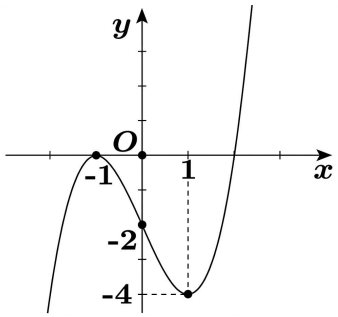
Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=x\left(x^2+1\right)+1$ b) $y=x\left(2x-3\right)^2-1$ c) $y=-\left(x-1\right)^3+3x+2$

d) $y=\left(x-1\right)^2\left(2-x\right)$ e) $y=\left(x-1\right)^2\left(4-x\right)$ f) $y=x\left(x+3\right)^2$

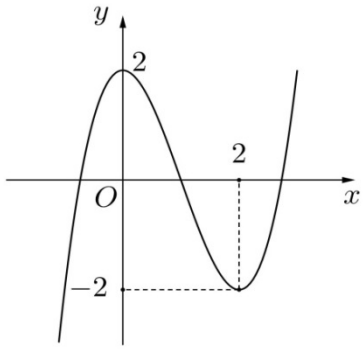
DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



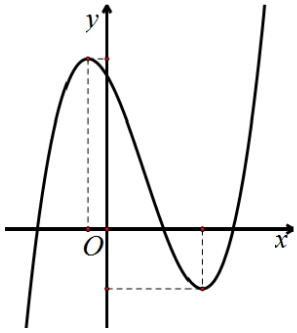
Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Bài 2. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



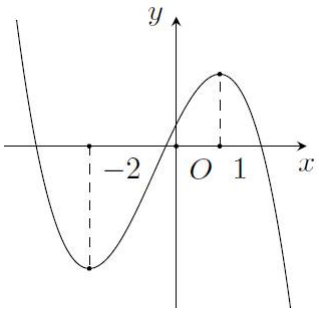
Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Bài 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau



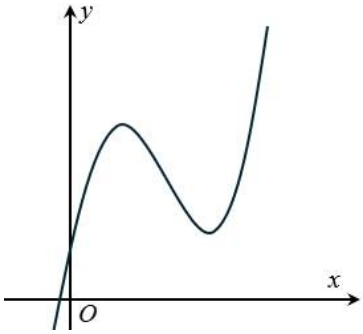
Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



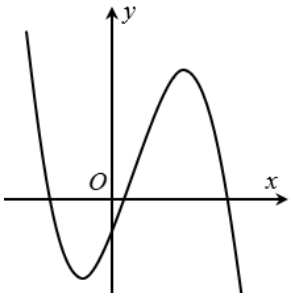
Hãy cho biết các hệ số a, b, c, d âm hay dương?

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hãy cho biết các hệ số a, b, c, d âm hay dương?

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong ba số $b,\ c,\ d$?

DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ BẬC 3

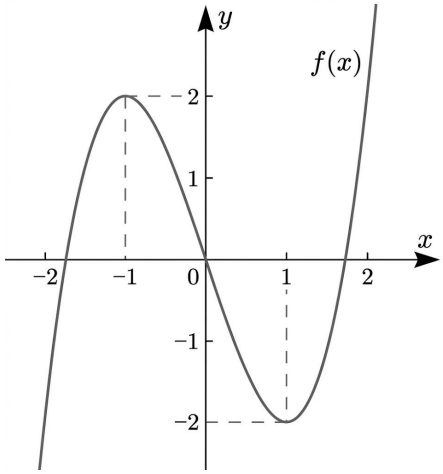
Bài 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

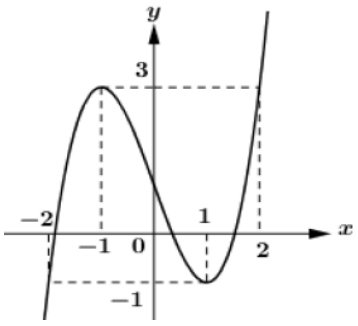
Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y=1$.

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=2027$

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3+3x^2-8x+1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y=x-2026$?

Bài 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(\frac{\sqrt{a}}{2};\frac{b-\sqrt{c}}{4}\right);N\left(-\frac{\sqrt{d}}{2};\frac{e+\sqrt{f}}{4}\right)$ $(a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $d:2x-y+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{a+b+c-(d+e+f)}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}$.

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt .

Bài 9. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

Bài 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho $AB=BC$.

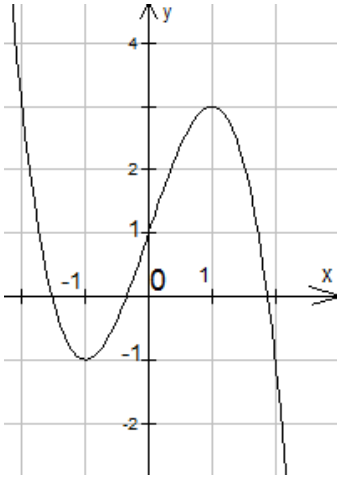
Bài 12. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2-m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d:y=m^2x+2m^3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4+x_2^4+x_3^4=83$.

Bài 13. Tìm m để đồ thị (C)của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

Bài 14. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d):y=x+4$ cắt (C_m)tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$.

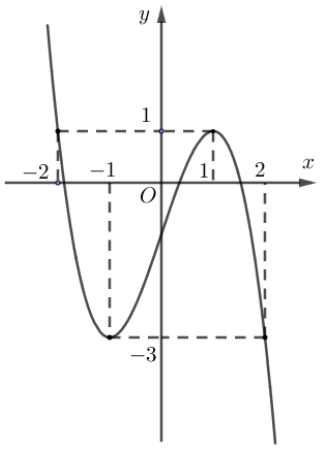
Bài 15. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d):y=mx-1$và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A,B,C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y=2x+1$. Tìm các giá trị của tham số m.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



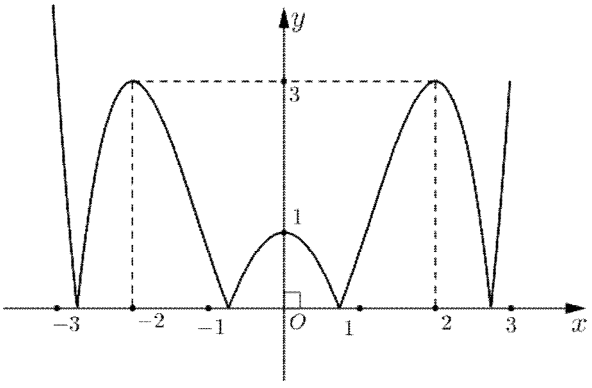
Tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$.

Bài 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(1-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

Bài 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



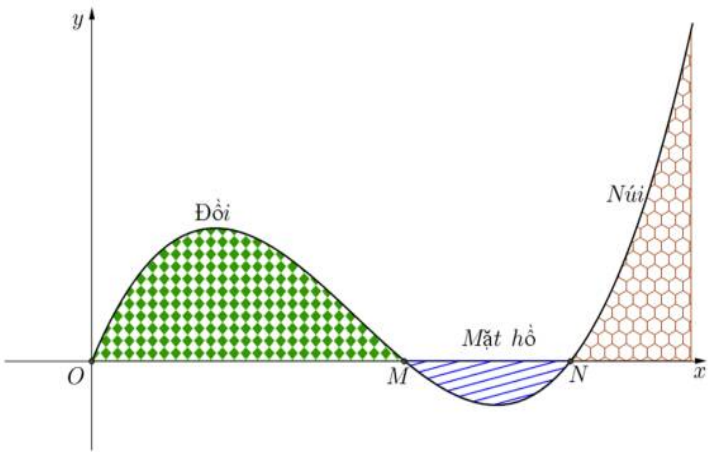
Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x)=8$.

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Cô Thuỷ theo dõi sự tiến bộ của bạn Bảo Toàn qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các hệ số. Trong đó $x\left(0\le x\le 9, x\in\mathbb{N}\right)$ là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x. Qua theo dõi, Cô Thuỷ ghi nhận tháng đầu tiên bạn Bảo Toàn đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba bạn Bảo Toàn đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của bạn Bảo Toàn tăng lên. Vậy ở tháng thứ năm, bạn Bảo Toàn được bao nhiêu điểm?

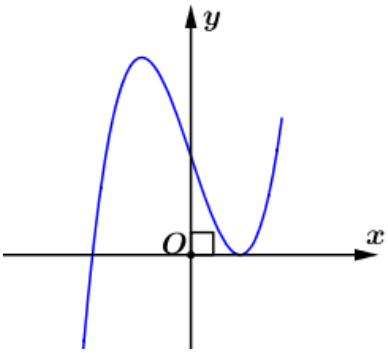


Bài 2. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa là một phần hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilomét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OM=2(km)$, độ rộng của hồ nước $MN=1(km)$ và ngọn đồi cao $528(m)$. Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)



Bài 3. Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí Suối Tiên có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x+2$. Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a;b)$ và $B(c;d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $y=-x+2025$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b-3c-4d$, biết $a>0$.

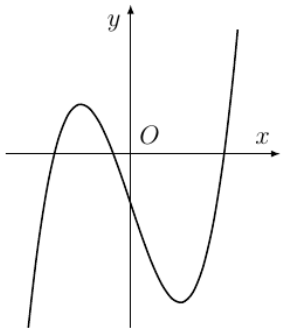



y
O
x

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

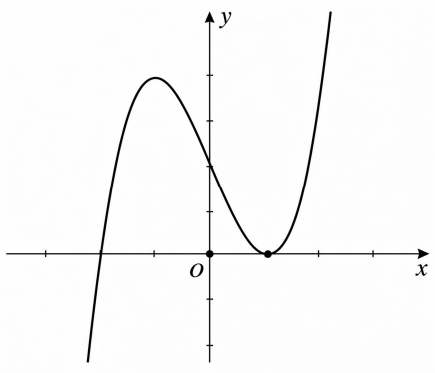
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



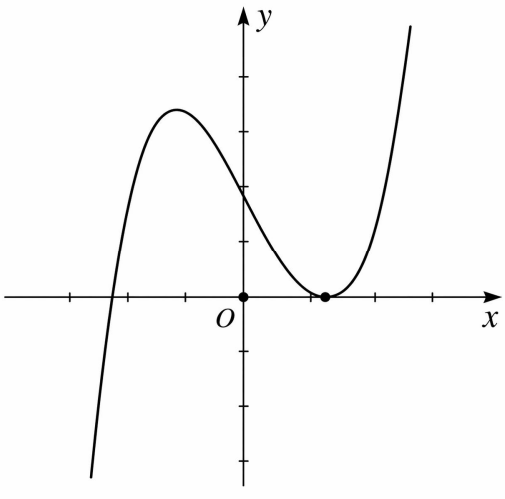
A. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Câu 2. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



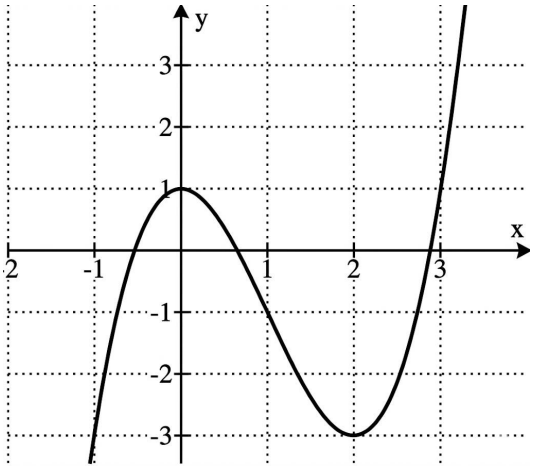
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^2+1$ **C.** $y=x^3+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x-1$ **B.** $y=3x^2-1$ **C.** $y=-x^3-3x-1$ **D.** $y=-x^4+x^3-1$

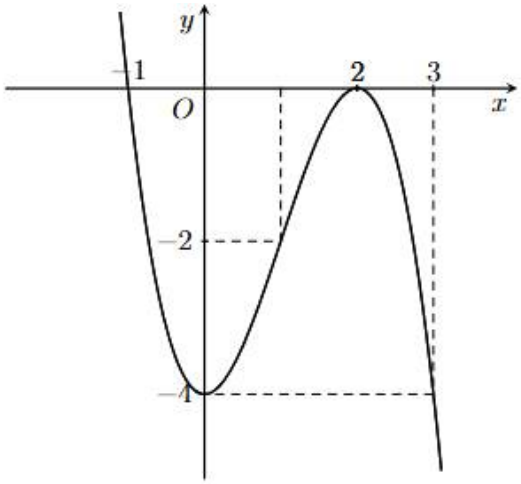
Câu 4. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



Chọn một khẳng định ĐÚNG.

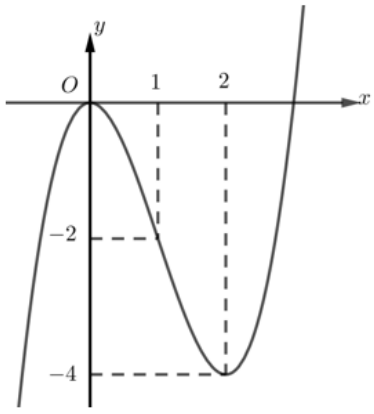
A. $y=-x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$. **C.** $y=2x^3-6x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+1$.

Câu 5. Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



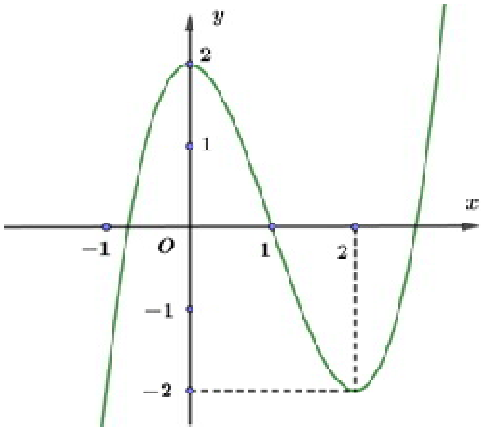
A. $y=x^3-3x-4$. **B.** $y=-x^3+3x^2-4$. **C.** $y=x^3-3x\ -4$. **D.** $y=-x^3-3x^2-4$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ



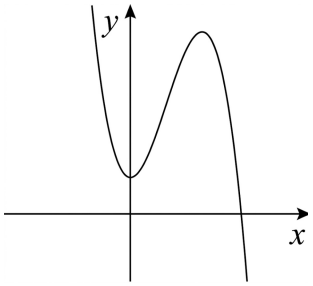
A. $y=x^3+3x$. **B.** $y=x^3-3x$. **C.** $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=x^3+3x^2$.

Câu 7. Đường cong ở hình sau là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=x^3-6x+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

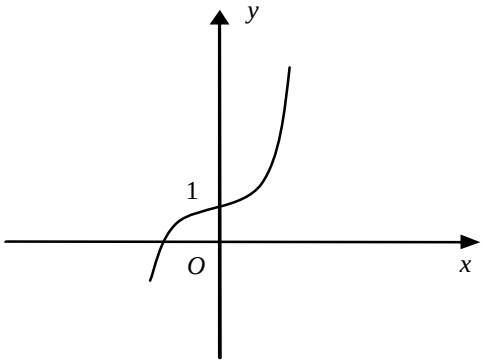
Câu 8. Cho đồ thị sau.



Hỏi hàm số nào sau đây có đồ thị ở hình trên?

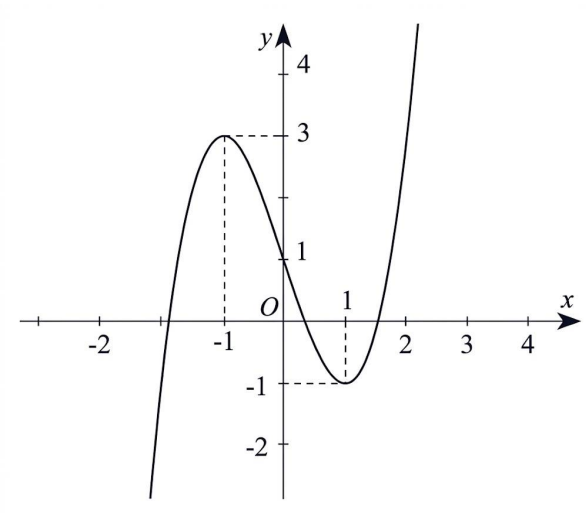
A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=-x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên.

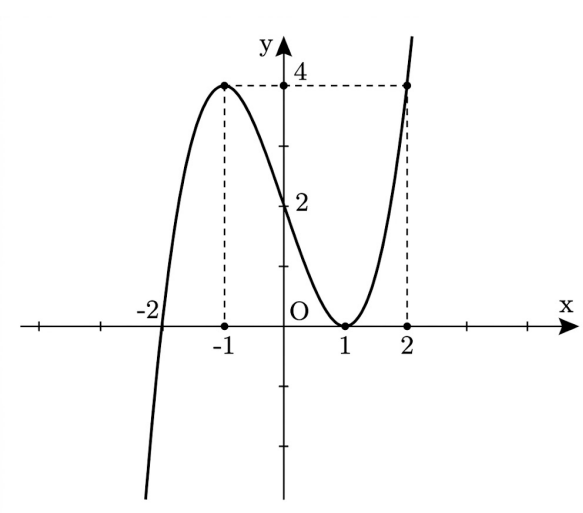


A. $y=x^3+3x+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=-x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

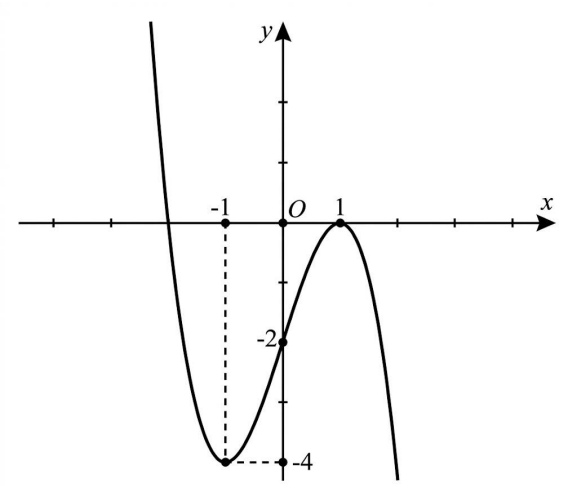
Câu 10. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



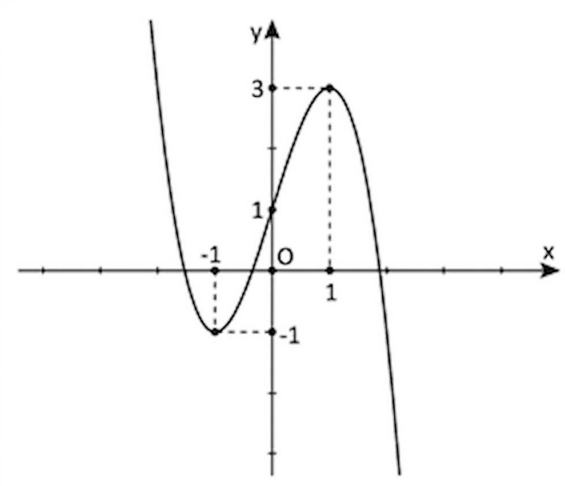
A. Hình 1.



B. Hình 2.

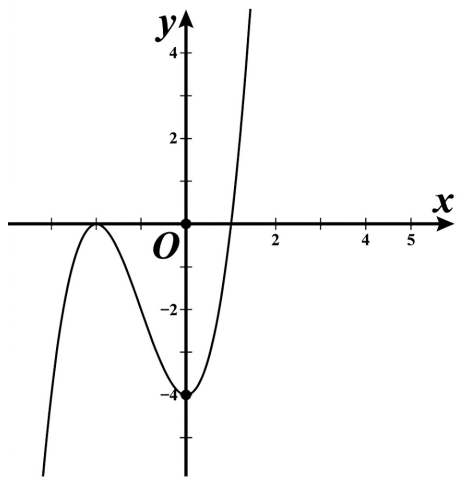


C. Hình 3.

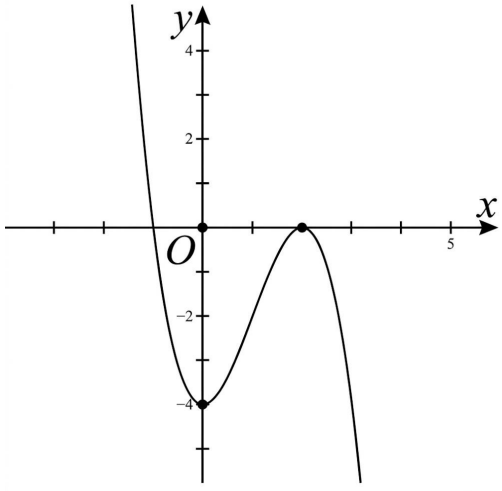


D. Hình 4.

Câu 11. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị là hình nào sau đây?

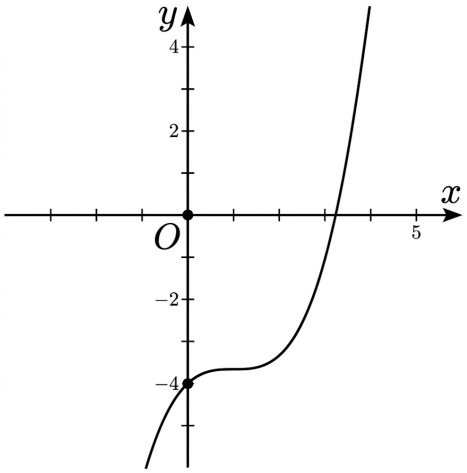


A.

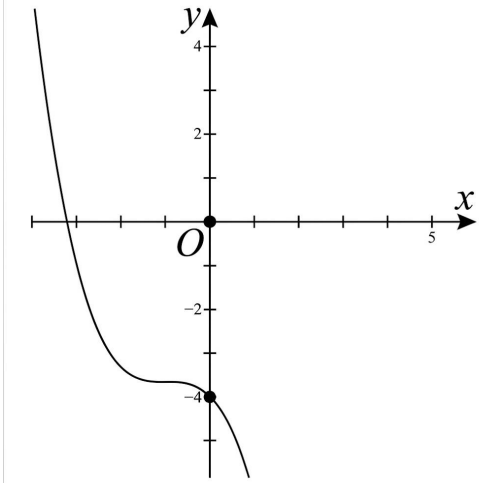


B.

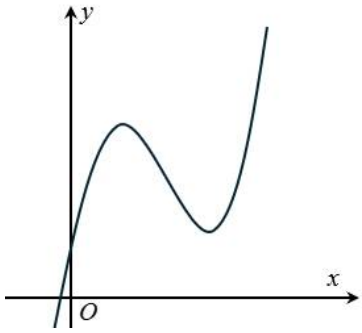
C.



D.



Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



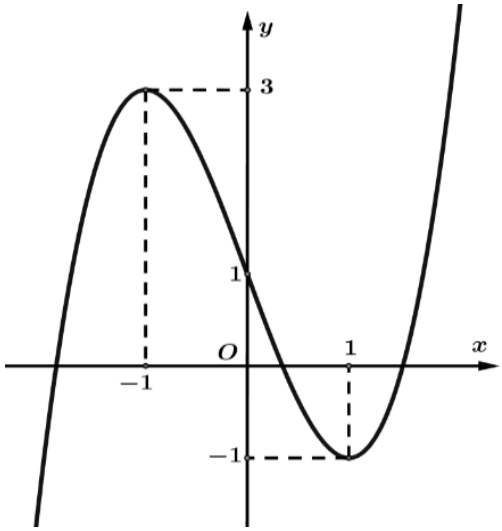
A. $y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1$.

B. $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=-\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

D. $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

Câu 13. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



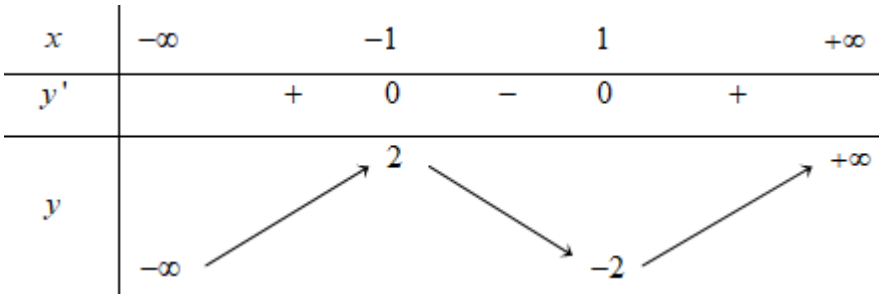
A. $y=x^3-3x+1$.

B. $y=x^3-3x-1$.

C. $y=-x^3-3x-1$.

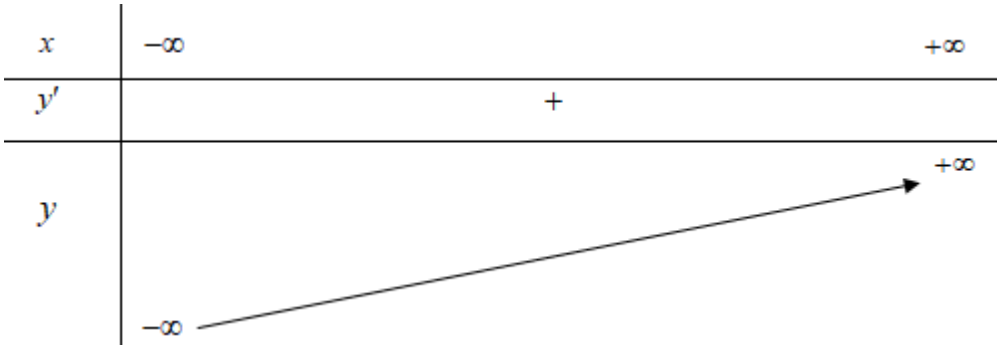
D. $y=-x^3+3x+1$.

Câu 14. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?



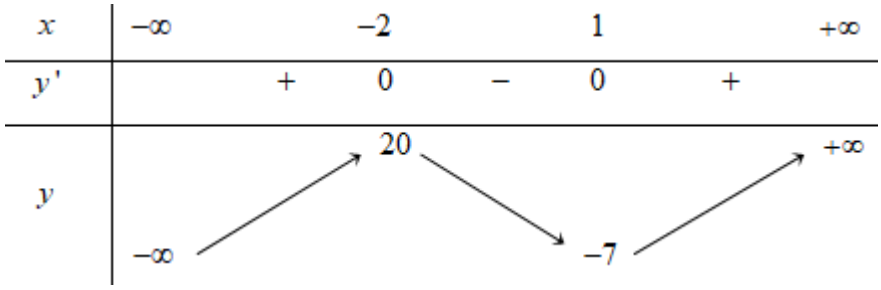
A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. **D.** $y=x^3-3x$.

Câu 15. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?



A. $y=x^2+2x+1$. **B.** $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$. **C.** $y=x^3+x^2+2x-5$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.

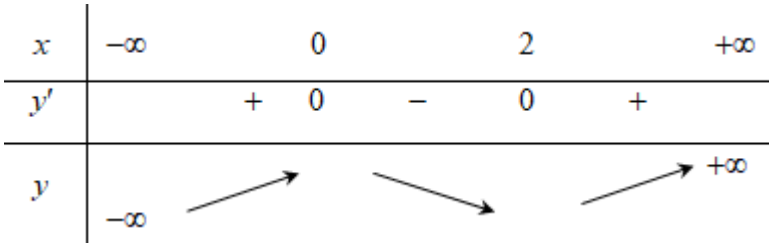
Câu 16. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?



A. $y=-2x^3-3x^2+12x$. **B.** $y=2x^3+3x^2-12x$.

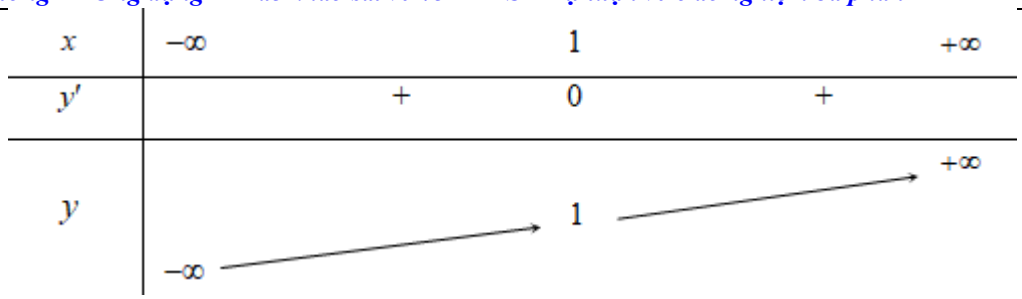
C. $y=-2x^4-3x^2+12x$. **D.** $y=2x^3-3x^2+12x$.

Câu 17. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



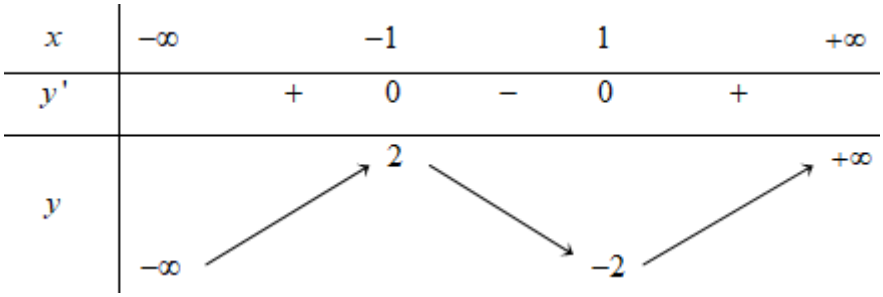
A. $y=-x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?

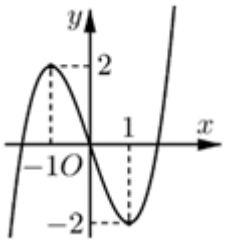


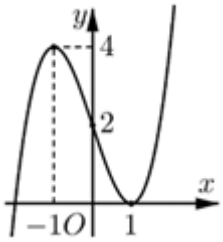
A. $y=-3x^2+1$ **B.** $y=x^3-1$. **C.** $y=x^4+3x^2-1$. **D.** $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x+\frac{2}{3}$

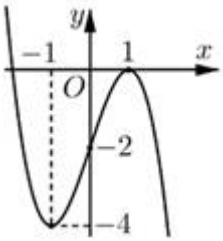
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

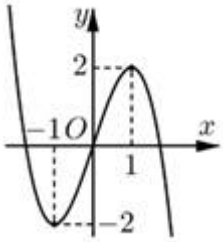


Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là hình nào trong bốn hình sau?



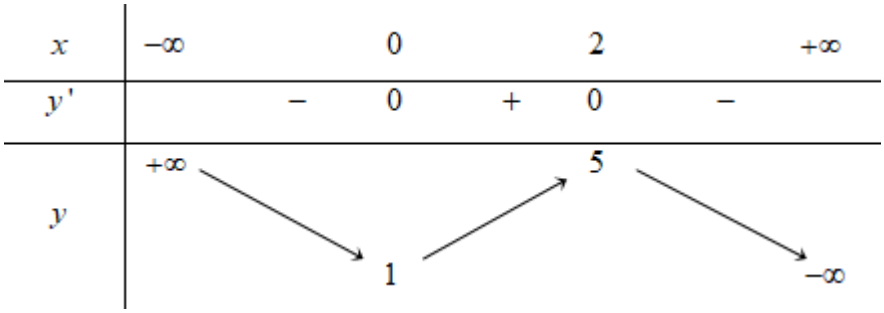






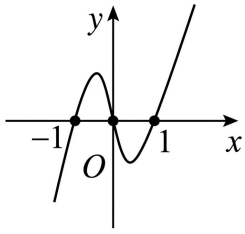
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Câu 20. Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^3-3x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=x^3+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

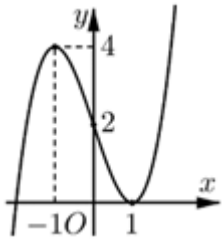
Câu 21. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tọa độ điểm đối xứng I của đồ thị hàm số trên là:

A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(0;0)$. **D.** $I(0;-1)$.

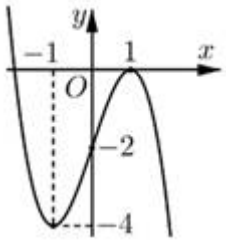
Câu 22. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi I là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Khi đó, tung độ của điểm đối xứng bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

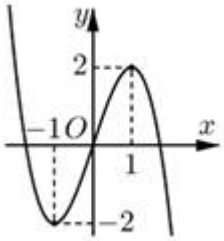
Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng:

A. −2. **B.** 0. **C.** −4. **D.** −1.

Câu 24. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là:

A. $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;0)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Tọa độ điểm đối xứng I của đồ thị hàm số trên là:

A. $I(0;2)$. **B.** $I\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $I(3;-5)$. **D.** $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

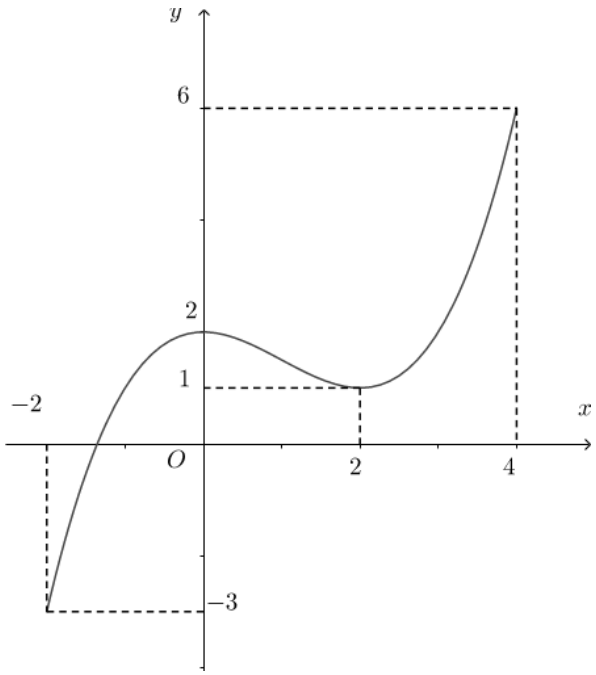
Câu 26. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng:

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2;4]$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2027 = 0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

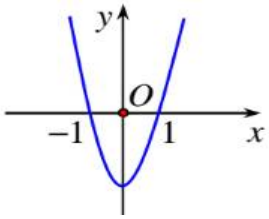
Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

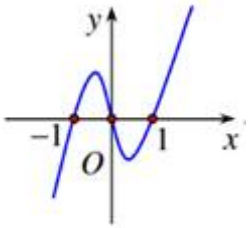
Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0$ là

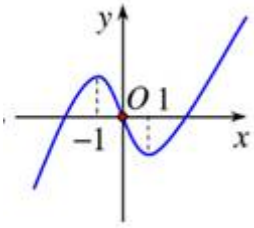
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

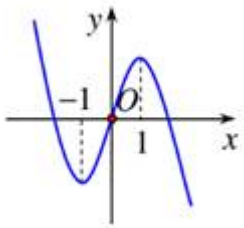
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có dạng như trong hình bên.

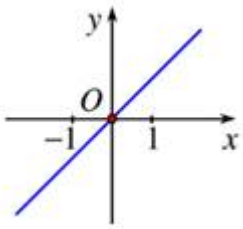


Hỏi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nào trong bốn hình sau?



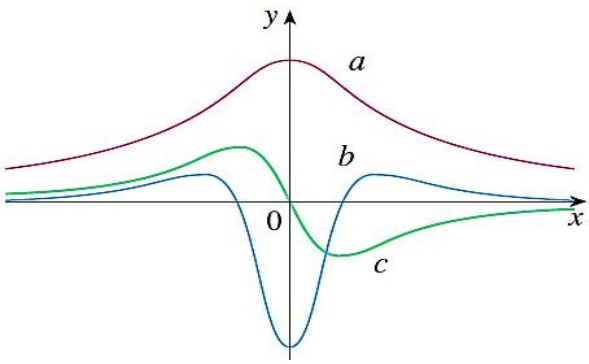






A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

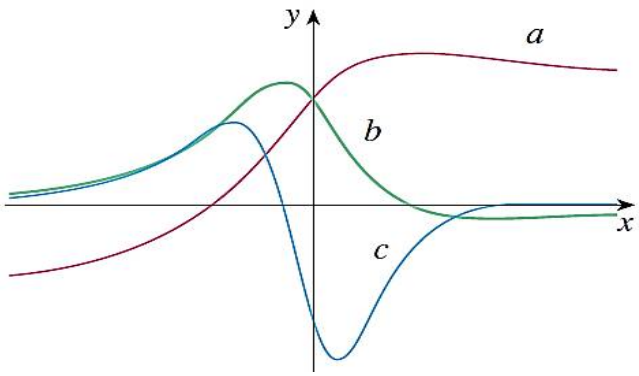
Câu 31. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. a,b,c. **B.** b,a,c. **C.** a,c,b. **D.** b,c,a.

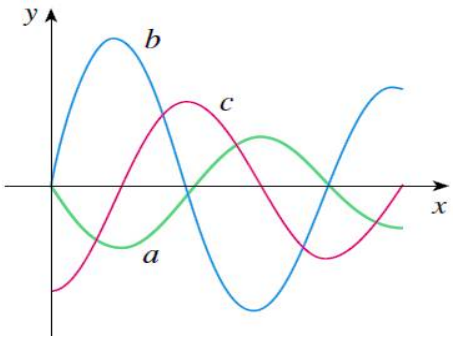
Câu 32. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

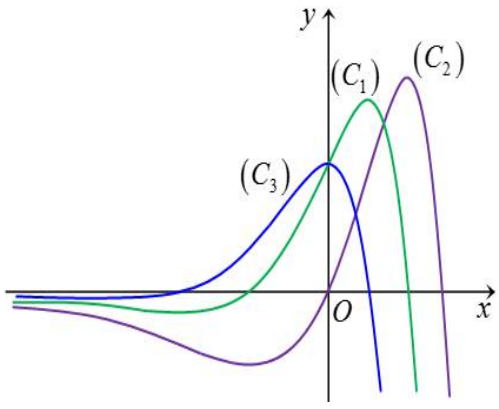
Câu 33. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

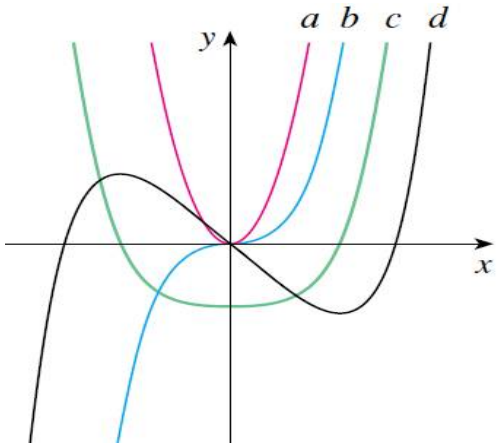
Câu 34. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1).$ **B.** $(C_2);(C_1);(C_3).$ **C.** $(C_2);(C_3);(C_1).$ **D.** $(C_1);(C_3);(C_2).$

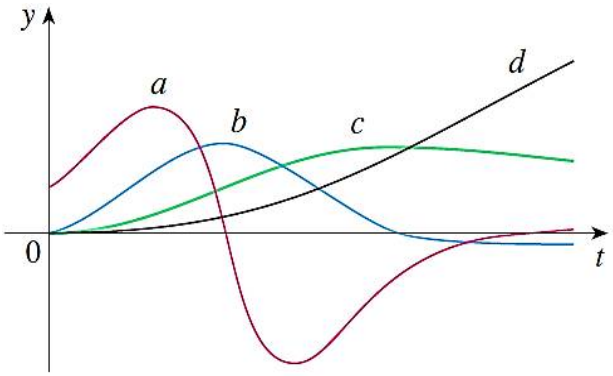
Câu 35. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,b,a.$ **C.** $d,c,a,b.$ **D.** $d,b,c,a.$

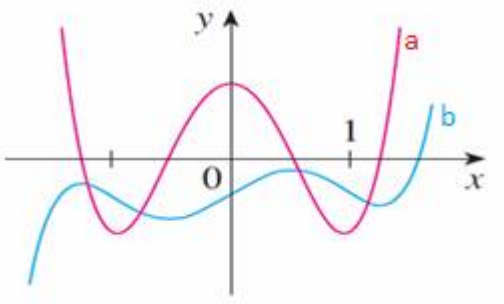
Câu 36. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. c,d,b,a **B.** d,c,a,b **C.** d,c,b,a **D.** d,b,c,a

Câu 37. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.

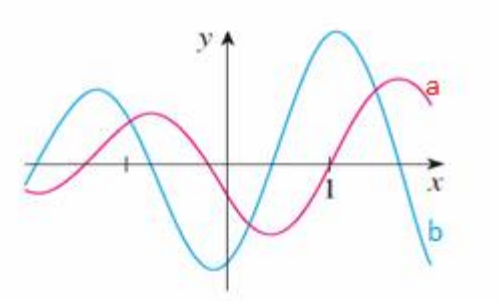


Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(1)<f''(1)$ **B.** $f'(-1)>f''(-1)$

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

Câu 38. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.

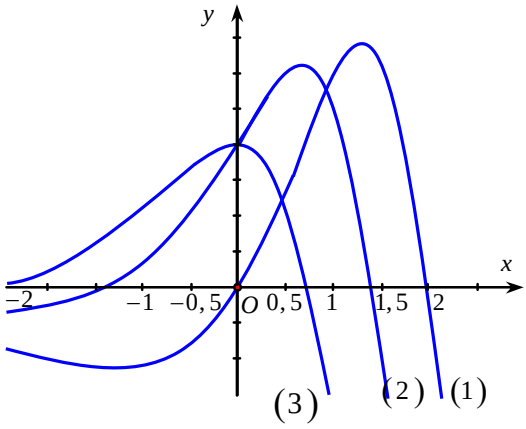


Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$.

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f'(-1)=2f''(1)$.

Câu 39. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.

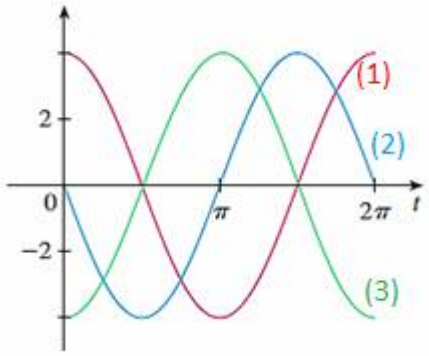


Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$. **B.** $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$. **D.** $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

Câu 40. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.

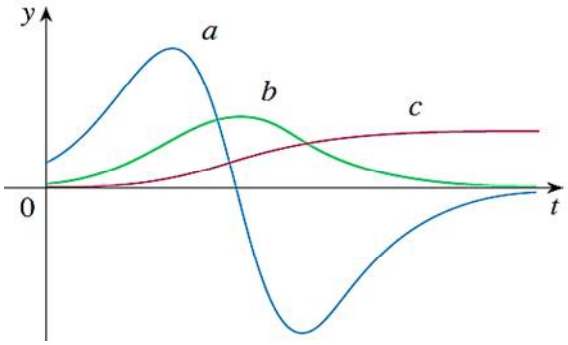


Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(\pi)<v(\pi)<a(\pi)$ **B.** $a(\pi)<v(\pi)<s(\pi)$

C. $s(\pi)<a(\pi)<v(\pi)$ **D.** $v(\pi)<a(\pi)<s(\pi)$

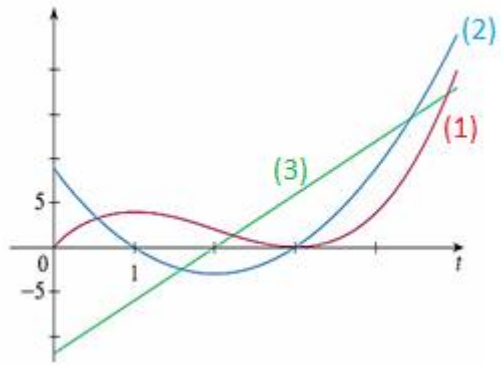
Câu 41. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

A. b,c,a **B.** c,a,b **C.** a,c,b **D.** c,a,b

Câu 42. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.

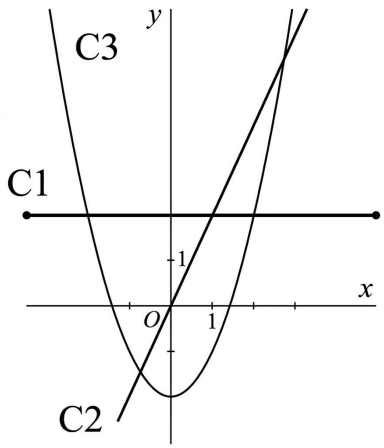


Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(4)<v(4)<a(4)$ **B.** $a(4)<v(4)<s(4)$

C. $s(4)<a(4)<v(4)$ **D.** $v(4)<a(4)<s(4)$

Câu 43. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.

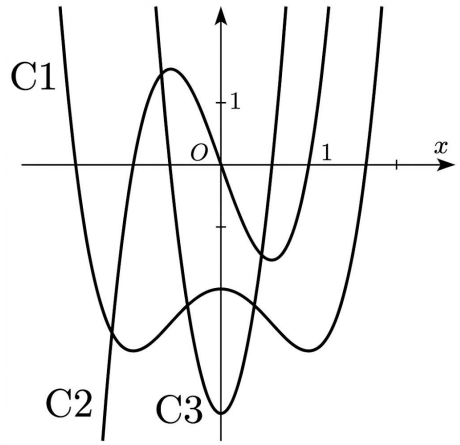


Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Câu 44. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.

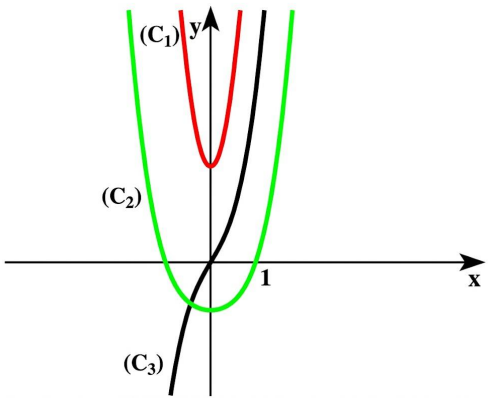


Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

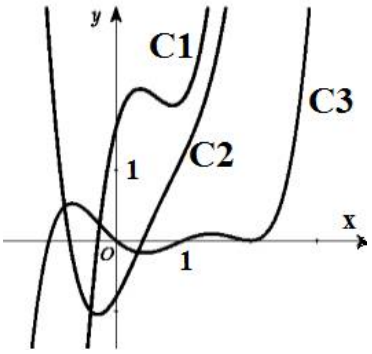
Câu 45. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

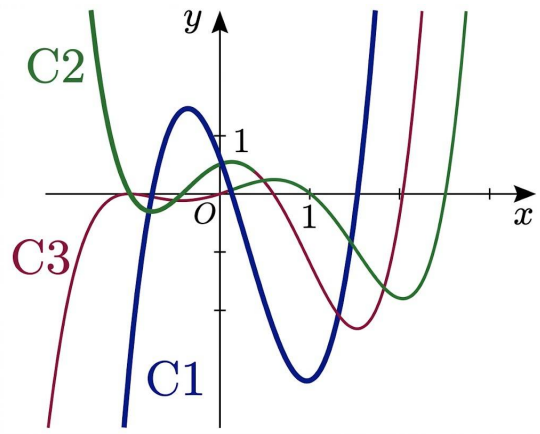
Câu 46. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

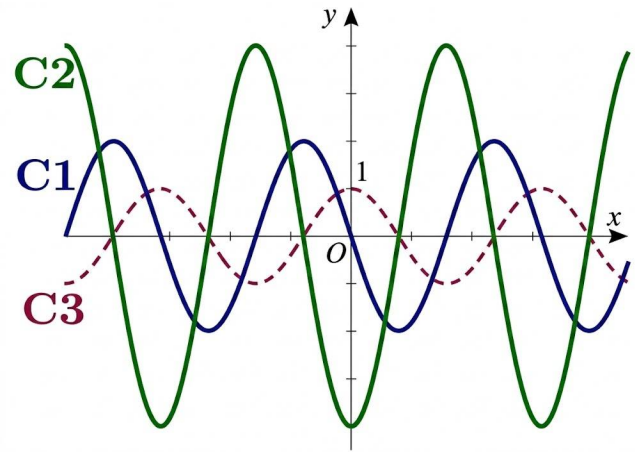
Câu 47. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_2);(C_1);(C_3)$. **B.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

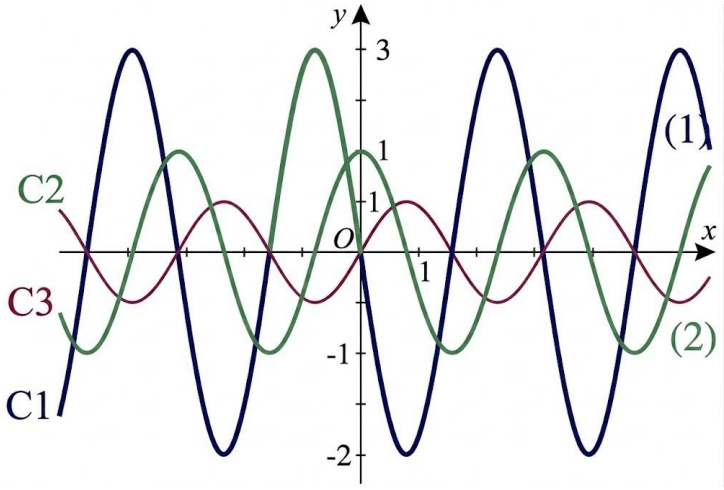
Câu 48. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

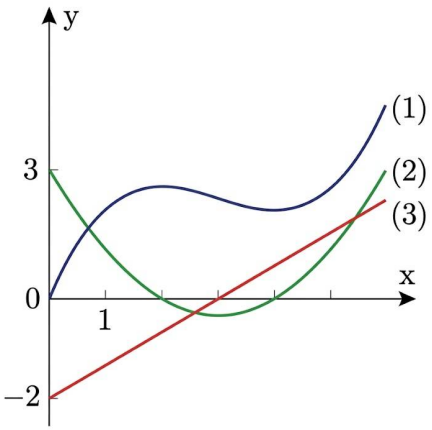
Câu 49. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Câu 50. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(1)>h(1)>f(1)$. **B.** $h(1)>g(1)>f(1)$.

C. $h(1)>f(1)>g(1)$. **D.** $f(1)>g(1)>h(1)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+4$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

c) Đồ thị (C) có điểm cực đại là $(1;-1)$ và điểm cực tiểu là $(-3;31)$.

d) Điểm $(1;15)$ là tâm đối xứng đồ thị (C).

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+4$ có đồ thị (C).

a) $y'=-3x^2+3x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A,B là các điểm cực trị của (C).

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+4$.

a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) Gọi A,B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Khi đó độ dài AB bằng $\sqrt{5}$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{f(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ có đồ thị là (C)

a) Trên đoạn $[4;8]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=4$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1;-2)$.

c) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

d) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0;-\dfrac{7}{3}\right)$.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$ và hàm số $g(x)=f(x)+mx$ (với m là tham số).

a) Hàm số $g(x)$ đạt cực trị khi và chỉ khi $m<3$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Khi $m=-9$, giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên khoảng $(-\infty;0)$ bằng 10.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+bx^2+cx+2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x=1$ (với b và c là hằng số).

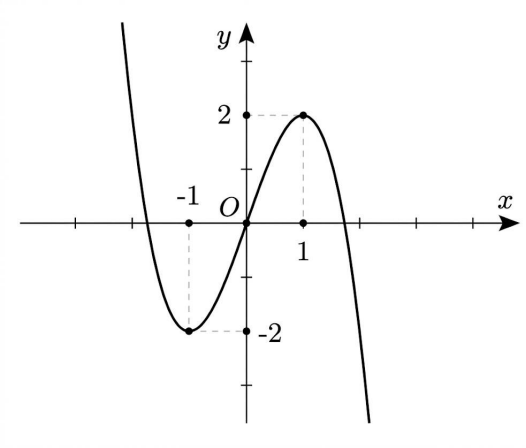
a) Giá trị của $b+c$ bằng -3.

b) Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=-1$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 0.

d) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



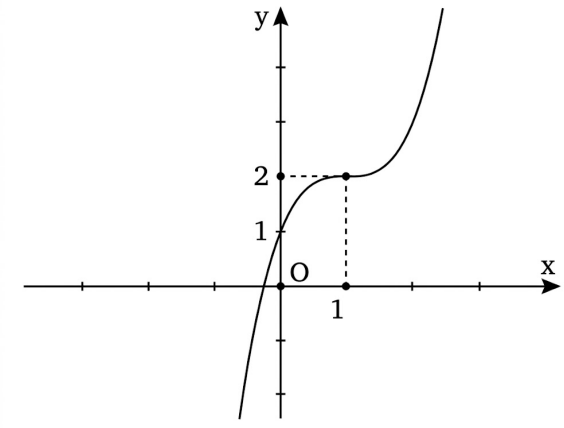
a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm hai cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Điểm $O(0;0)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

d) $a+b+c+d=4$

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



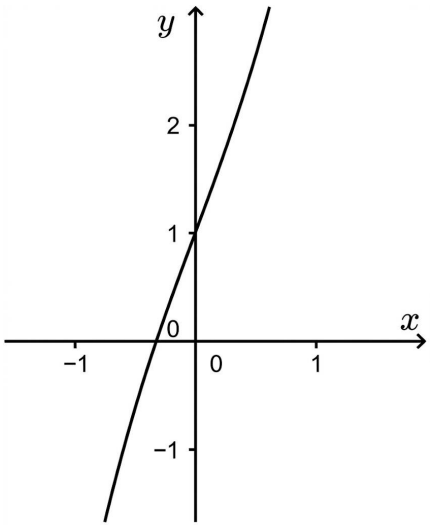
a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có một cực trị.

c) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi đó, $M+m=3$

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



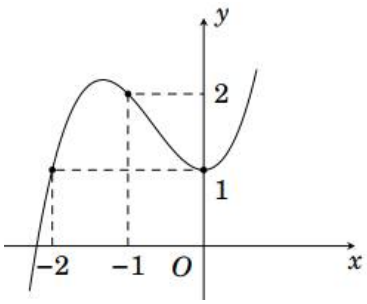
a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $\left(0;1\right)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



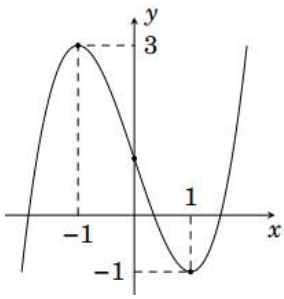
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $\left(0;1\right)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

d) $2a+3b+c=9$

Câu 61. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



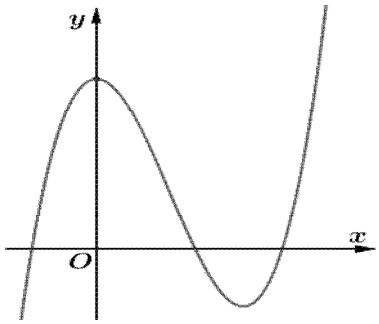
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $\left(0;1\right)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a-b+c+d=-1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$.

Câu 62. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên $\mathbb{R}$.



a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

Câu 63. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -5

d) Hàm số đã cho là $8a+4b+2c+d=-4$

Câu 64. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗		↗	2	↘	$-\infty$

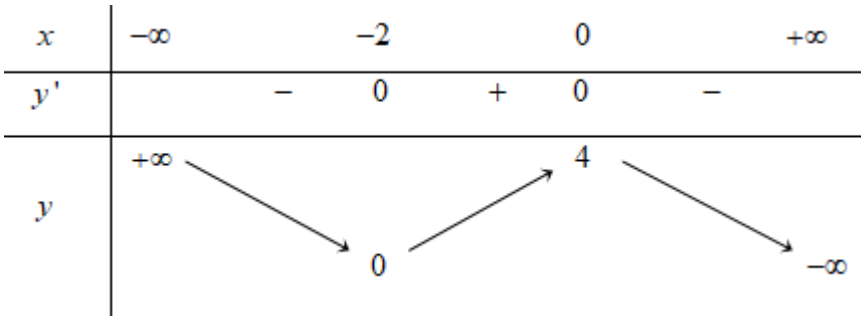
a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



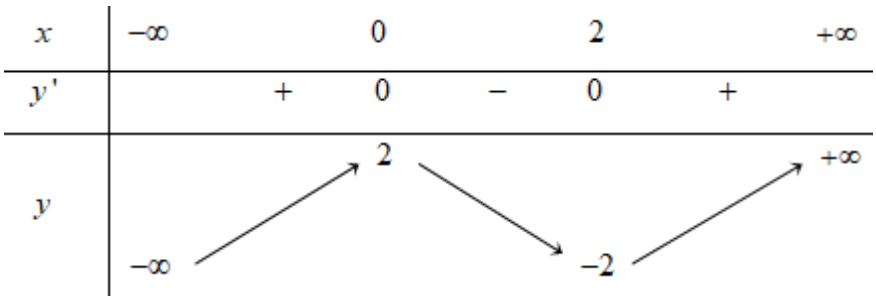
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ



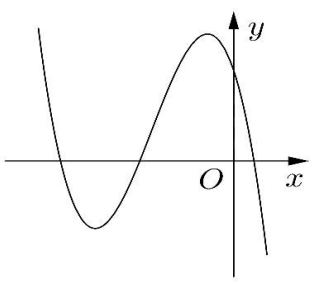
a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng -2.

c) Hàm số $g(x)=3-2f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$.

Câu 67. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



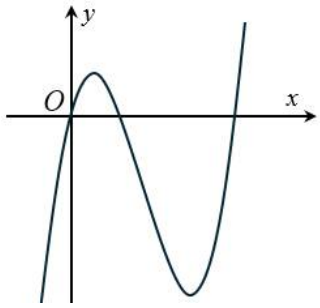
a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

d) $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$

Câu 68. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên.



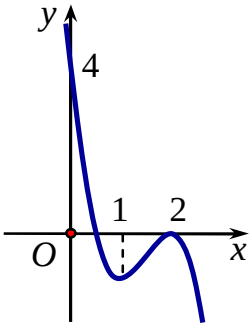
a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số dương.

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Câu 69. Cho hàm số $y=-2x^3+bx^2+cx+d\ \left(b,c,d\in\mathbb{R}\right)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



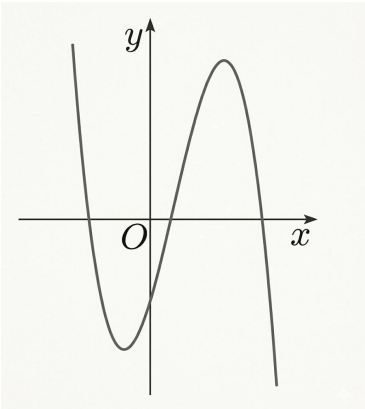
a) $y'=-6x^2+2bx+c$

b) $d=4$

c) $b=4$

d) $c>0$

Câu 70. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



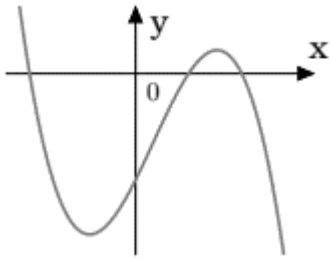
a) $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ đều dương.

d) $a < 0$, $c < 0$, $d < 0$.

Câu 71. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $a < 0$

b) $d < 0$

c) $c > 0$

d) $b > 0$

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2025$ có đồ thị (C).

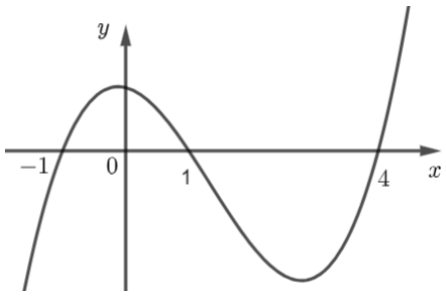
a) Đồ thị hàm số (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \le 2025$.

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

b) Trên đoạn $[-1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

c) $f(1) > f(2) > f(4)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

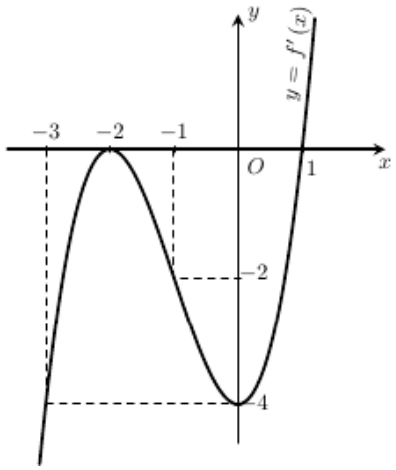
a) Phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất một nghiệm $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x^2-6x+1)$ có ba điểm cực đại.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



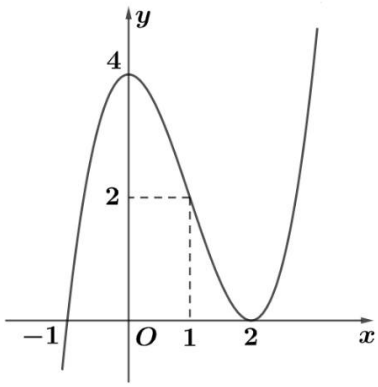
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 76. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



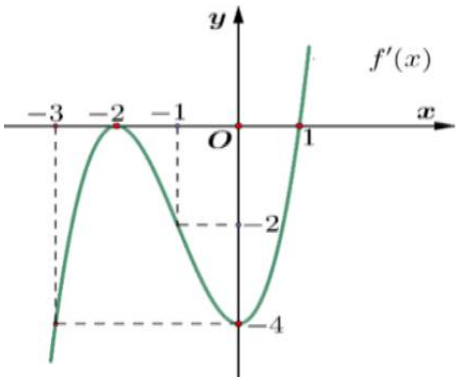
a) Hàm số $g(x)=f(x)-2027x+2026$ có đúng 1 điểm cực trị.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



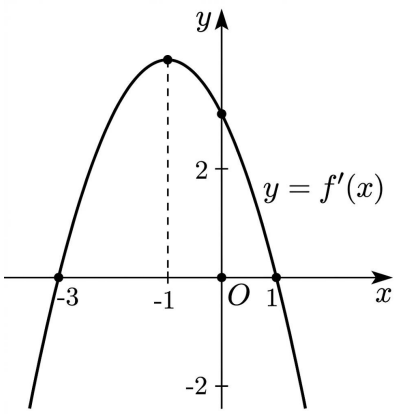
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

c) $\underset{[-2;1]}{Max}\, f(x)=f(-2)$.

d) Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x+2}{f'(x)}$ có tất cả 2 đường tiệm cận.

Câu 78. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



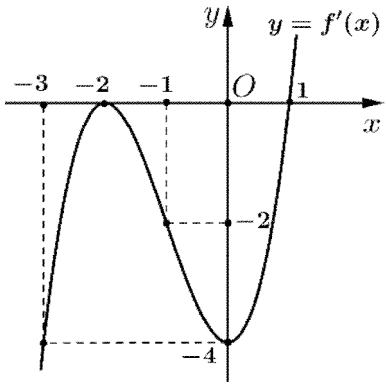
a) Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=-3$.

d) Nếu $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g(2025)<g(2026)$.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



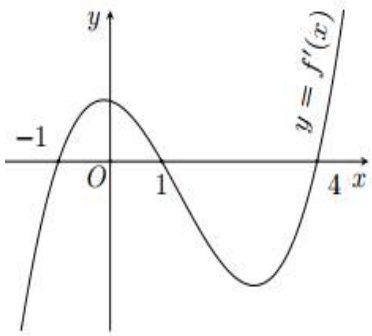
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

d) Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$. Hàm só $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $f(-1)>f(-3)$

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

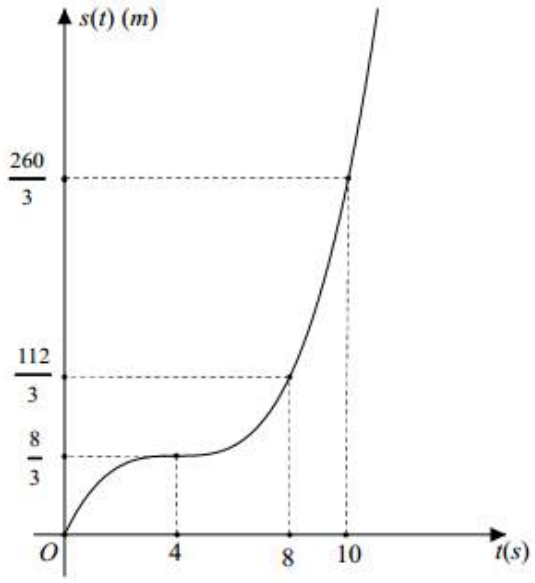
d) Trên đoạn $[2026;2028]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2026$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 81. Ngày khai giảng năm học $2026-2027$. Học sinh khối 12 trường THPT Lý Tự Trọng thả chùm bóng bay gắn thông điệp "Học sinh khối 12 sẽ đậu đại học". Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t)=-t^3+3t^2,(0\le t\le 3)$. Hỏi chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là bao nhiêu mét?

Trả lời: ……..

Câu 82. Một vật chuyển động quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t\ge 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

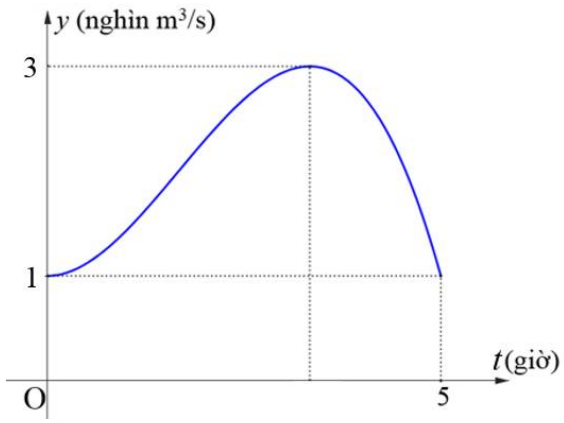


Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Trả lời: ……..

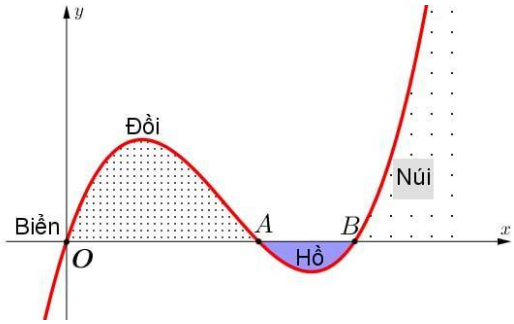
Câu 83. Nhằm điều tiết mực nước của hồ chứa trong những ngày mưa lớn, một hồ thủy điện thông báo mở của xả lũ trong 5 giờ, bắt đầu từ thời điểm 0 giờ . Lưu lượng nước xả lũ là lượng nước hồ thủy điện xả về hạ lưu trên mỗi đơn vị thời gian, được ước tính bởi hàm số $f(t)=at^3+bt^2+c$ (đơn vị nghìn m^3/s), trong đó t được tính bằng đơn vị giờ, là thời gian từ 0 giờ đến 5 giờ. Tại thời điểm 0 giờ, lưu lượng nước xả về hạ lưu là 1 nghìn m^3/s và bắt đầu tăng cho đến khi đạt cực đại bằng 3 nghìn m^3/s thì lưu lượng nước giảm dần, đến thời điểm 5 giờ thì trở về lại 1 nghìn m^3/s. Hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính giá trị của biểu thức $T=500a+100b+c$.





Trả lời: ……..

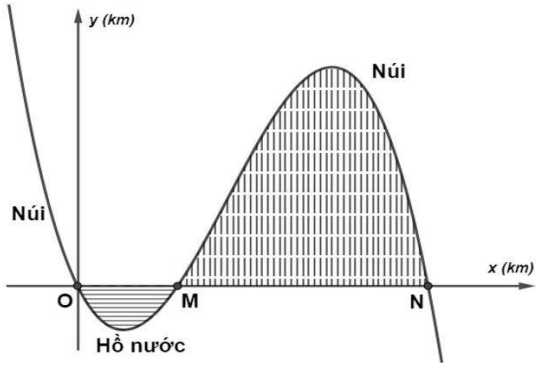
Câu 84. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA=\frac{15}{8}km$, độ rộng của hồ $AB=\frac{9}{8}km$ và chiều cao của ngọn đồi là $243m$. Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất bằng bao nhiêu mét ?



Trả lời: ……..

Câu 85. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM=2km$; độ rộng của núi $MN=3,5km$. Độ sâu của hồ nước là $450m$. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



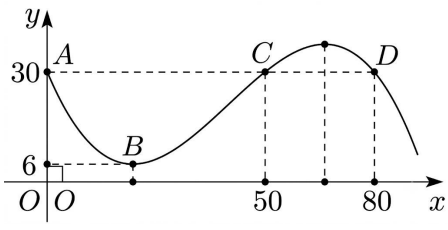


Trả lời: ……..

Câu 86. Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục toạ độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(0\le x<90)$ và đi qua các điểm A,C,D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*



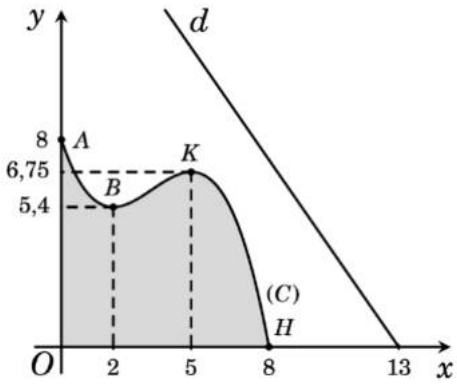
Hình 1



Hình 2

Trả lời: ……..

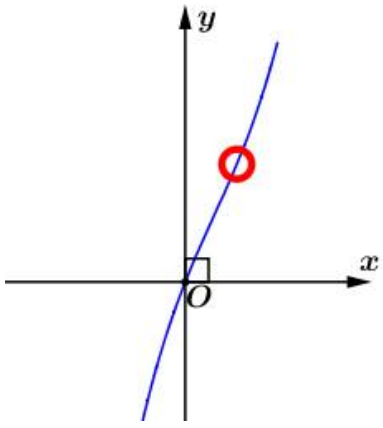
Câu 87. Một khu du lịch sinh thái được mô hình hoá trong mặt phẳng Oxy như hình vẽ bên dưới (phần tô đậm), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ (đơn vị trên các trục là mét) và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8), B(2;5,4), K(5;6,75)$ và $H(8;0)$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y=-\frac{13}{9}x+\frac{169}{9}$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ một điểm thuộc đường giới hạn vườn hoa đến con đường (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

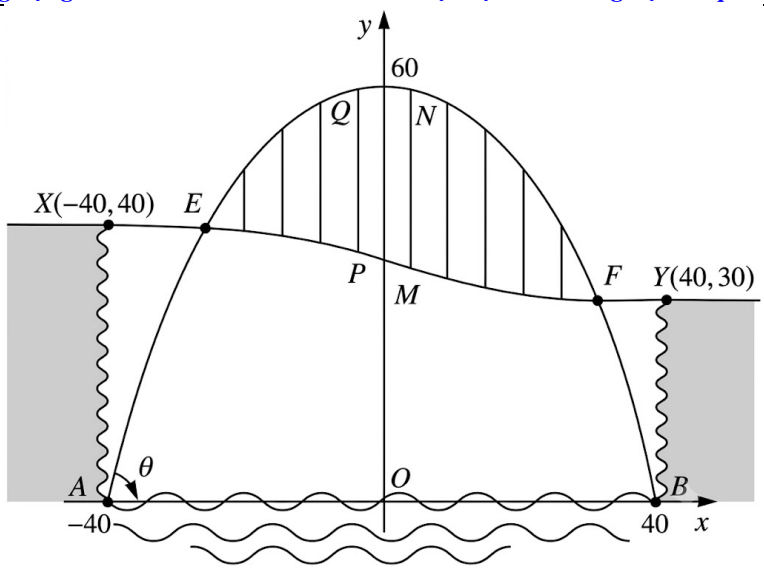
Câu 88. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y=\frac{x^3}{100}-\frac{x^2}{10}+\frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2{,}44\,m$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu độ? Biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{100}-\frac{x^2}{10}+\frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).





Trả lời: ……..

Câu 89. Một con sông chảy qua hẻm núi có chiều ngang 80m. Một bên hẻm núi cao $40\ m$ và bên còn lại cao $30\ m$. Một cây cầu được xây dựng bắc qua sông trên hai hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



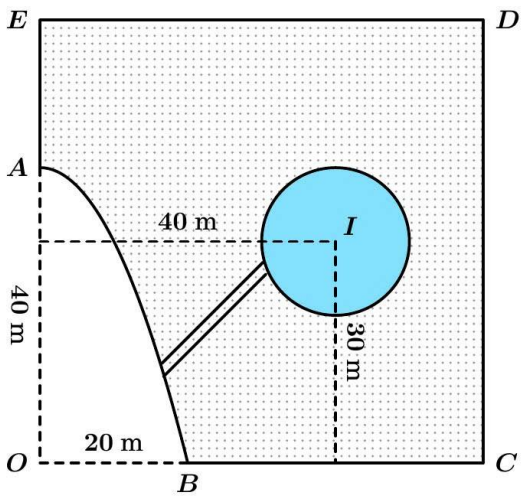
Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y=\frac{x^3}{25600}-\frac{3x}{16}+35$.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Trả lời: ……..

Câu 90. Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (*làm tròn đến chữ số hàng phần chục*), biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.

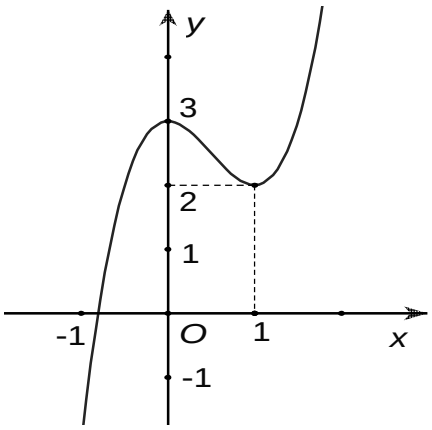


Trả lời: ……..

Câu 91. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2-x$. Tính giá trị $T=27x_0+27y_0$.

Trả lời: ……..

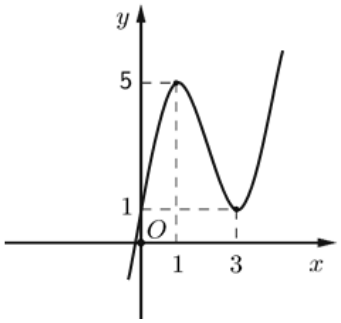
Câu 92. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị x_0+3y_0.

Trả lời: ……..

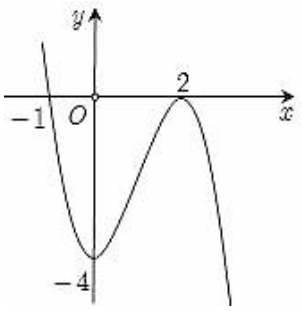
Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ ở bên dưới.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị $2x_0+y_0$.

Trả lời: ……..

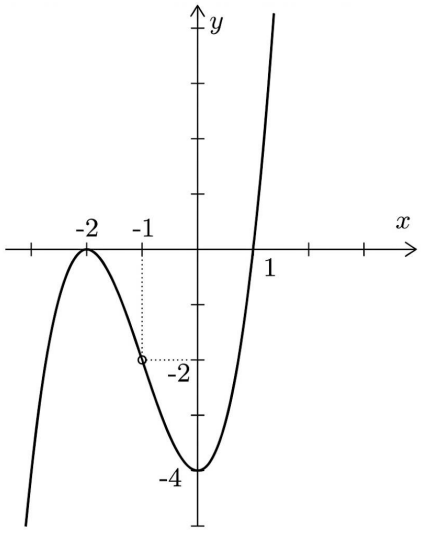
Câu 94. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị $2x_0-y_0$.

Trả lời: ……..

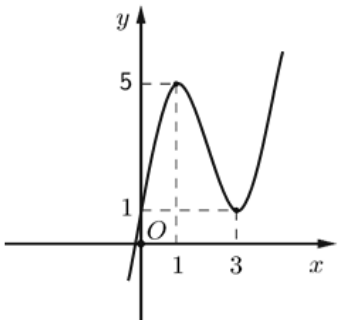
Câu 95. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) có dạng: $y=ax+b$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi đó, tính giá trị $a-2b$.

Trả lời: ……..

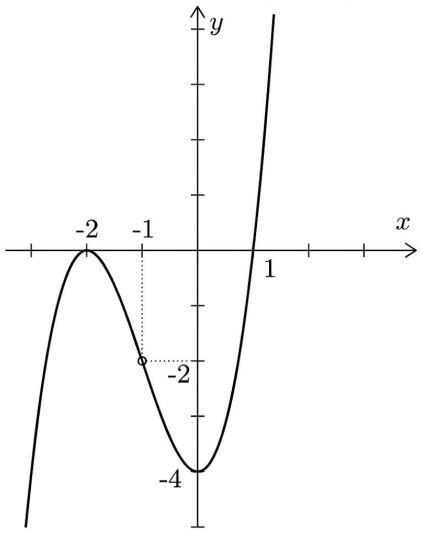
Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ ở bên dưới. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.



Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

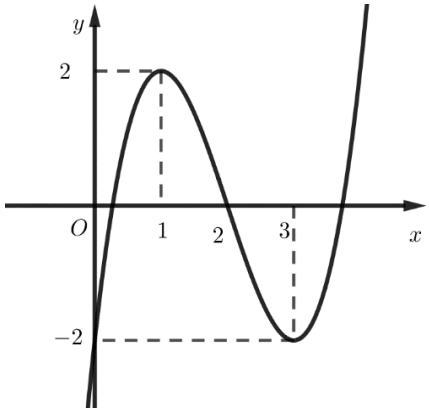
Câu 97. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



Số nhỏ nhất trong các số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

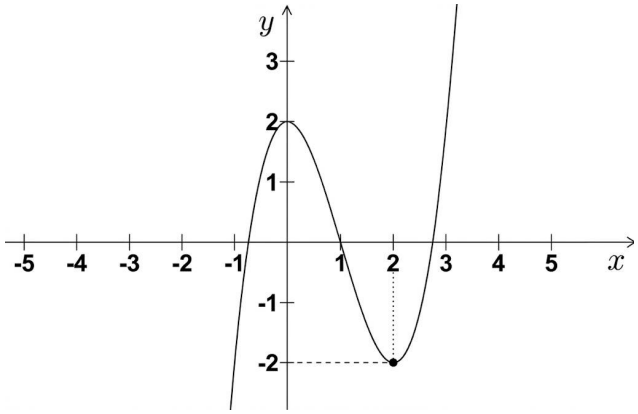
Câu 98. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$.



Trả lời: ……..

Câu 100. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $P(a;b); Q(c;d)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c + d$.

Trả lời: ……..

Câu 101. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(a;\frac{b}{c}\right); N\left(d;\frac{e}{f}\right)$ ($\frac{b}{c}, \frac{e}{f}$ là các phân số tối giản, $a, d \in \mathbb{Z}$ và $a > d$) sao cho chúng đối xứng nhau qua trục tung Oy. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c + d + e + f$.

Trả lời: ……..

Câu 102. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + x + 2$ tại điểm $M(-2;8)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 103. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 104. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là đường thẳng có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 105. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y=9x+10$?

Trả lời: ……..

Câu 106. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{18}x+1$?

Trả lời: ……..

Câu 107. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2027$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 108. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $2026y+2026x=1$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

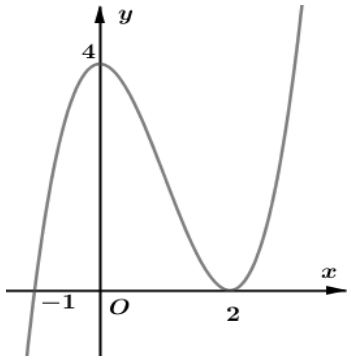
Câu 109. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất là $(x_0;y_0)$. Tìm y_0

Trả lời: ……..

Câu 110. Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất là $(x_0;y_0)$. Tính $2026x_0+2027y_0$.

Trả lời: ……..

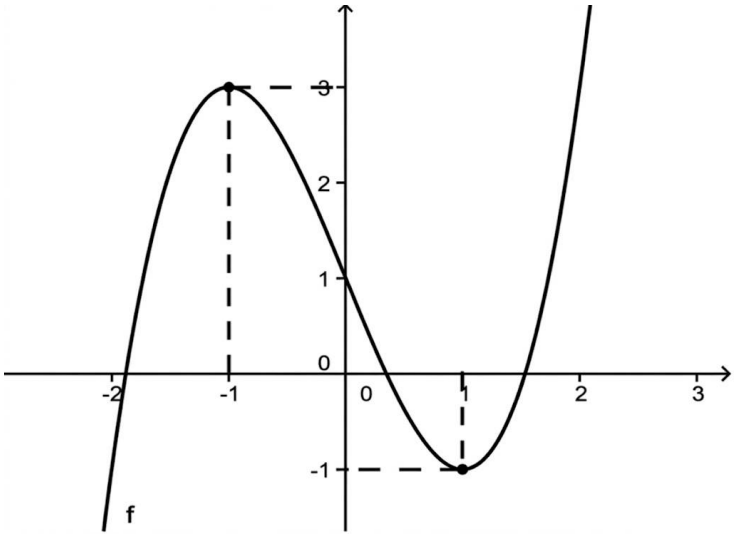
Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x)-7=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

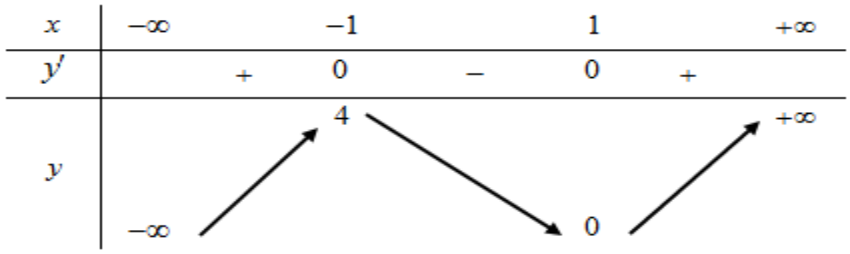
Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

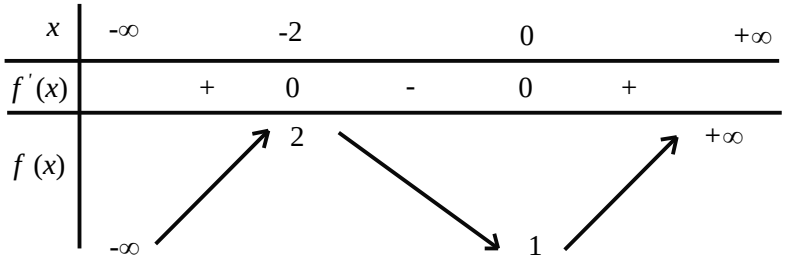
Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=4$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

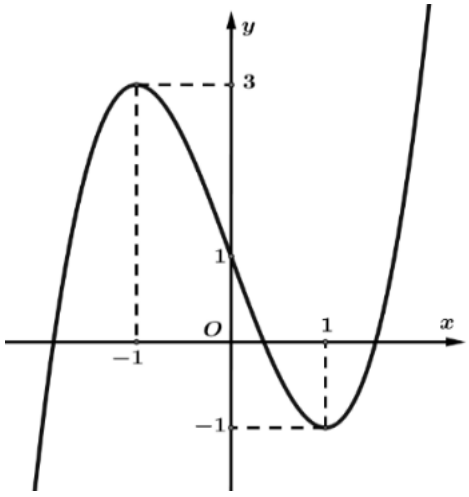
Câu 115. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

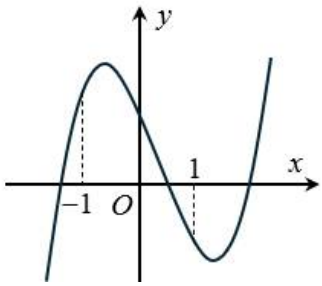
Câu 116. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

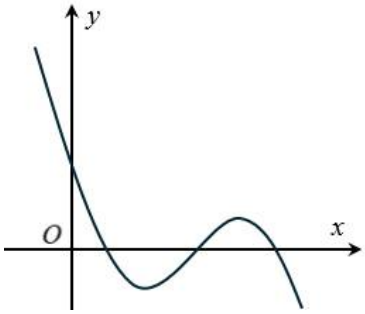
Câu 117. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

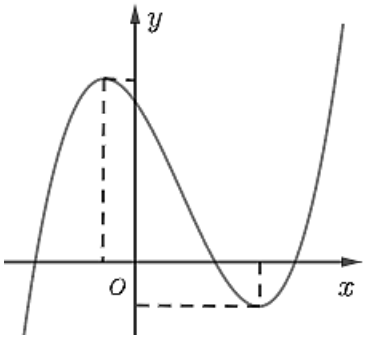
Câu 118. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

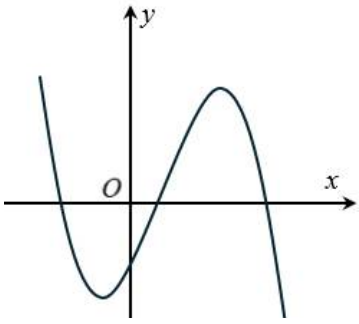
Câu 119. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

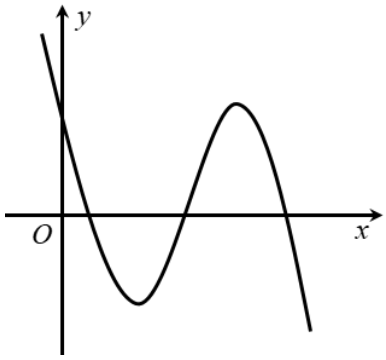
Câu 120. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

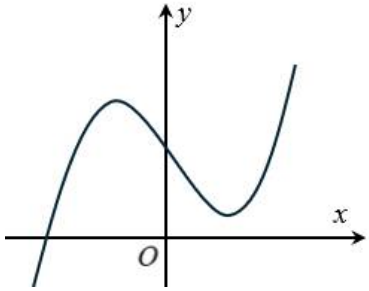
Câu 121. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số âm trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

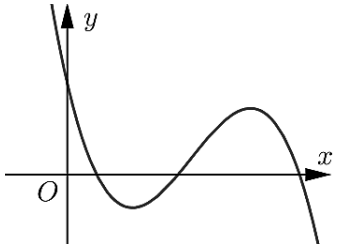
Câu 122. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong các số b, c, d ?

Trả lời: ……..

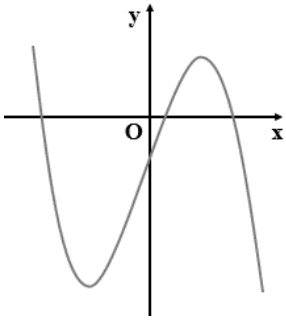
Câu 123. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong ba số b, c, d ?

Trả lời: ……..

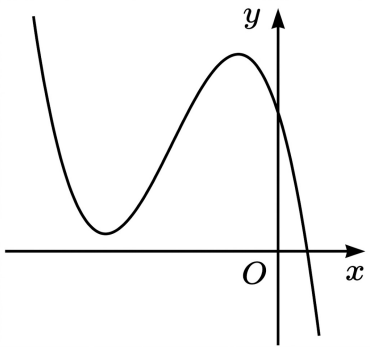
Câu 124. Cho hàm số $y=ax^3+3x+d\ (a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Có bao nhiêu số dương trong hai số a, d ?

Trả lời: ……..

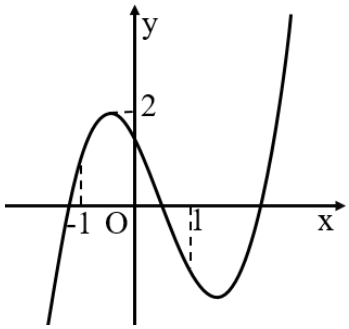
Câu 125. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

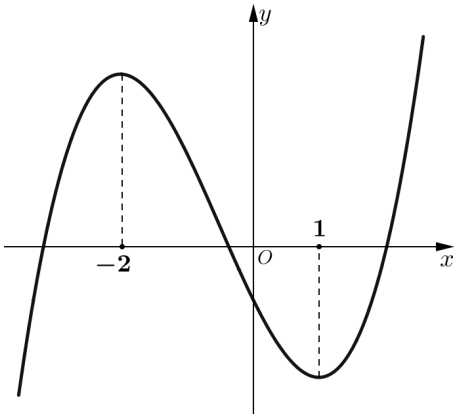
Câu 126. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

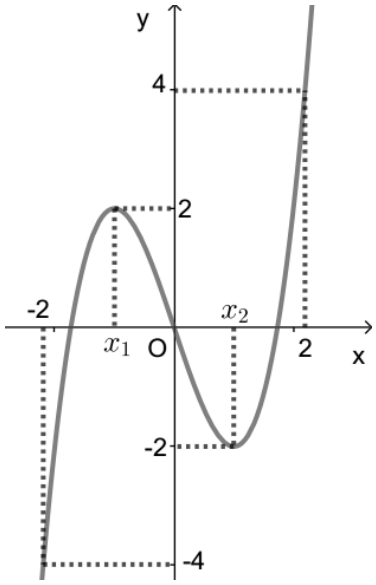
Câu 127. Cho đường cong $(C): y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Câu 128. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)|-1=0$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 129. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $-x^3-3x^2+1-m=0$ có ba nghiệm phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 130. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 131. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

Trả lời: ……..

Câu 132. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 133. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt ?

Trả lời: ……..

Câu 134. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 135. Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Trả lời: ……..

Câu 136. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 137. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=(x-2)\left(x^2+mx+m^2-3\right)$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 138. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt *I, A, B* sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

Trả lời: ……..

Câu 139. Cho đồ thị $(C_m): y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$. Tổng các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 140. Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Trả lời: ……..

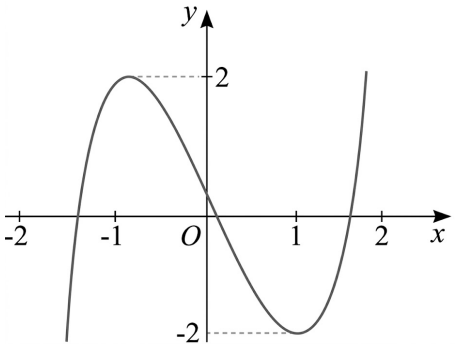
Câu 141. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm tổng các giá trị của tham số m.

Trả lời: ……..

Câu 142. Cho hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(-\frac{a}{b};+\infty\right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

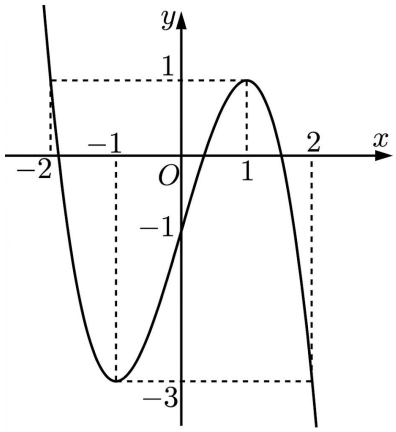
Câu 143. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm.

Trả lời: ……..

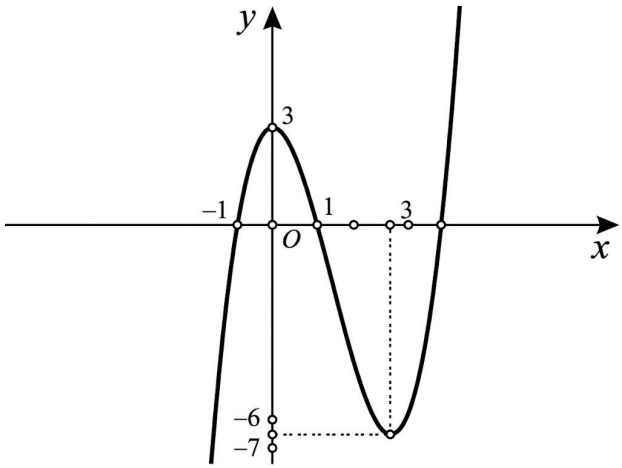
Câu 144. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

Trả lời: ……..

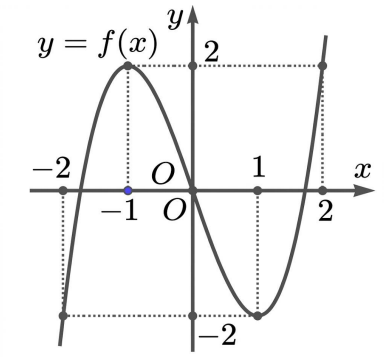
Câu 145. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

Trả lời: ……..

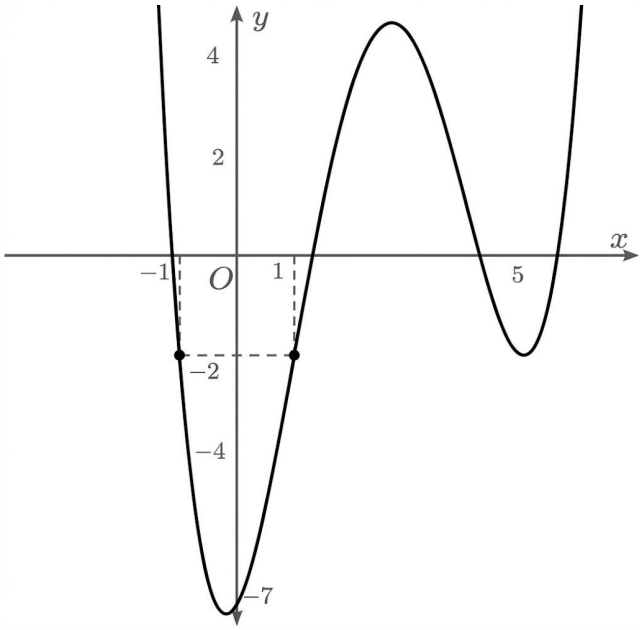
Câu 146. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$.

Trả lời: ……..

Câu 147. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=-4$.

Trả lời: ……..

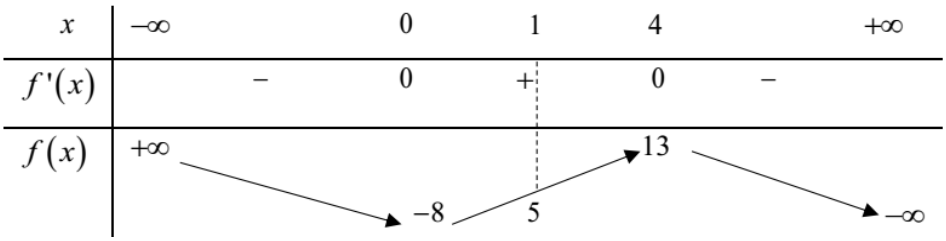
Câu 148. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $f\left(1-3x\right)=6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

Trả lời: ……..

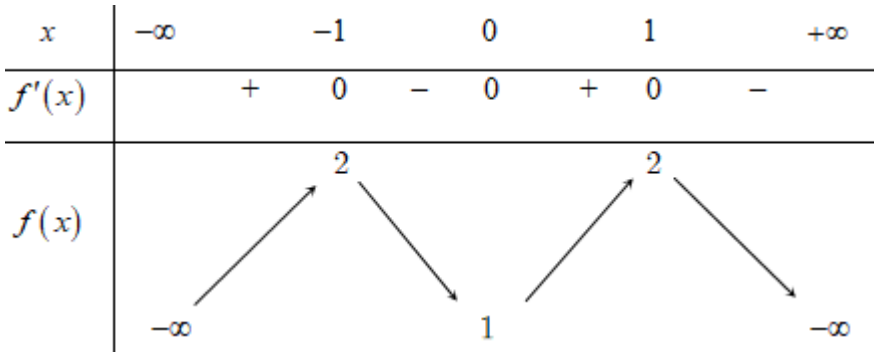
Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $f(\sin x)-1=0$.

Trả lời: ……..

BÀI 4
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ bài toán khảo sát

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

- Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số
- Tìm cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và tìm tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số .
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

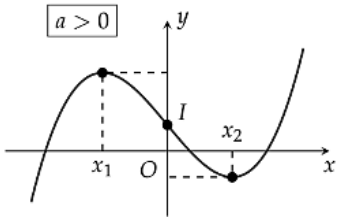
Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên:

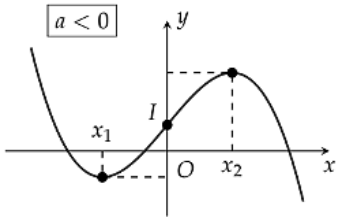
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm).
- Vẽ đồ thị của hàm số.

2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đa thức bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

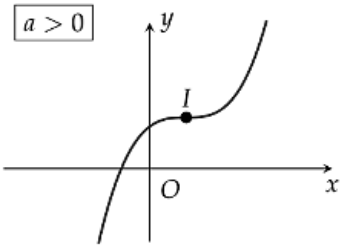
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Đồ thị nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng. Với x_0 là nghiệm của $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- Các dạng đồ thị:

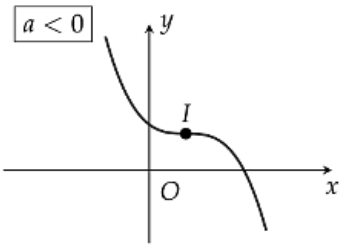
+ Trường hợp 1: Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x = x_1$ và $x = x_2$



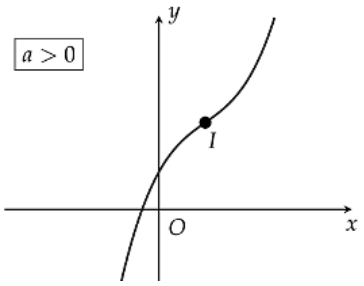


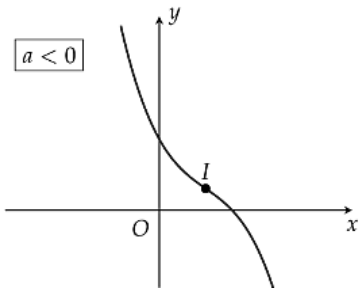
+ Trường hợp 2: Nếu $y' = 0$ có $\Delta = b^2 - 3ac = 0$ thì $y' = 0$ có nghiệm kép $x = x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





+ **Trường hợp 3:** Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac<0$ thì $y'=0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữa tỉ

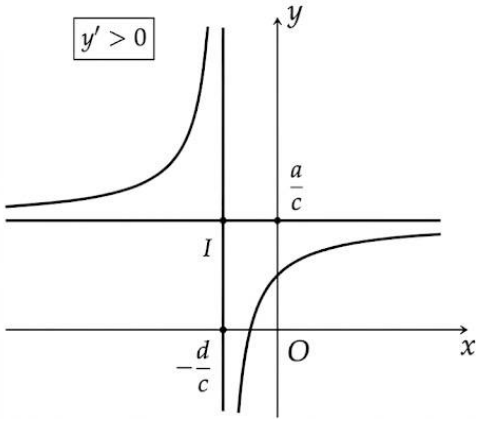
a. Hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$**.**

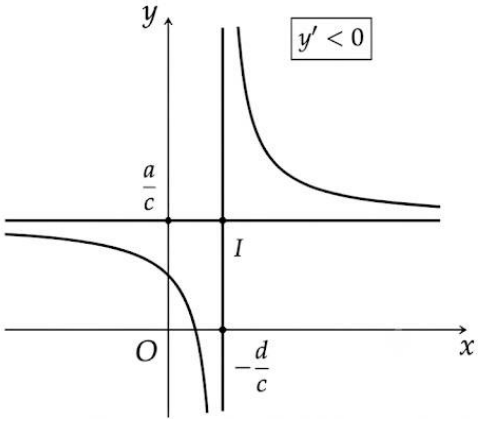
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\dfrac{a}{c}=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$.

  + Trục 1: hướng đi lên (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=x+\dfrac{d}{c}$

  + Trục 2: hướng đi xuống (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=-\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$

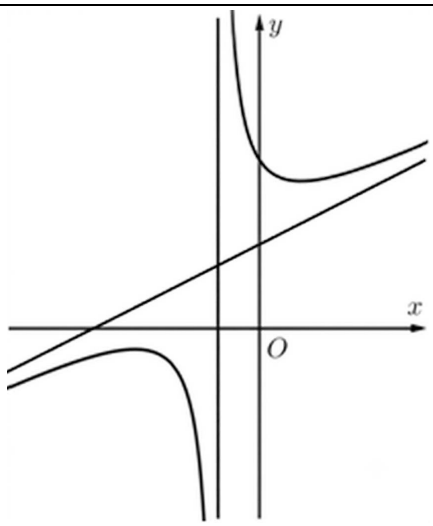
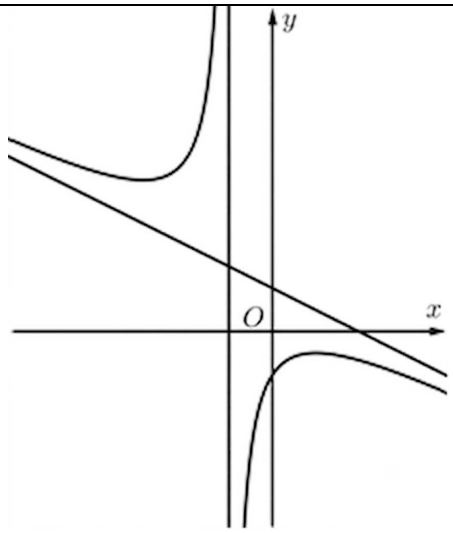
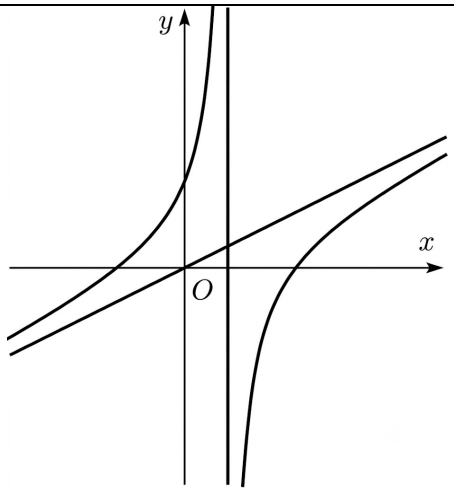
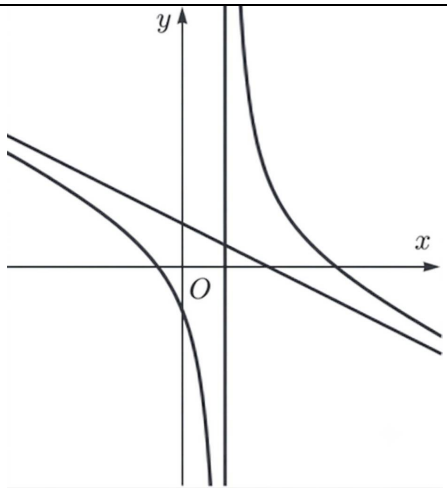
- Các dạng đồ thị:





b. Hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$**.**

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{2amx^2+2anx+bn-cm}{(mx+n)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{m}x+\dfrac{b-am}{m^2}$.
- Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận.
- Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng.
- Các dạng đồ thị:

	$am>0$	$am<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		

CHỦ ĐỀ 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

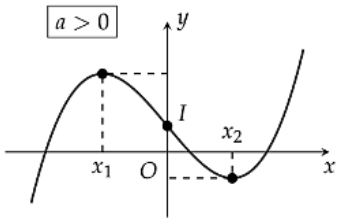
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc ba: $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

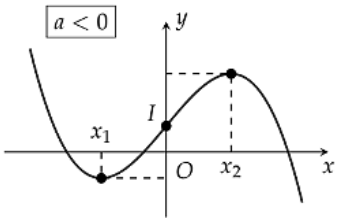
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.
- Tìm các giới hạn tại vô cực của đồ thị hàm số
- Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số
- Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Chú ý: Đồ thị nhận điểm $I(x_0;y_0)$ làm tâm đối xứng, với x_0 là nghiệm của $y''=0$ và $y_0=y(x_0)$. Tọa độ tâm đối xứng $I(x_0;y_0)$ của đồ thị chính là tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị.

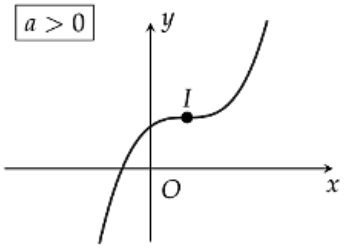
2. Các dạng đồ thị của hàm số bậc ba

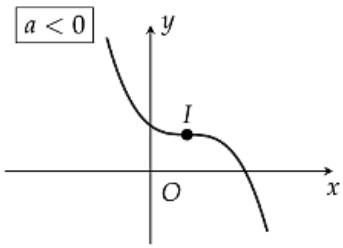
• Trường hợp 1: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac>0$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2. Khi đó hàm số có hai điểm cực trị là $x=x_1$ và $x=x_2$



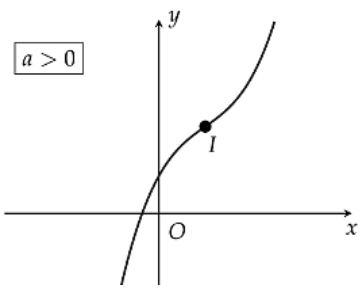


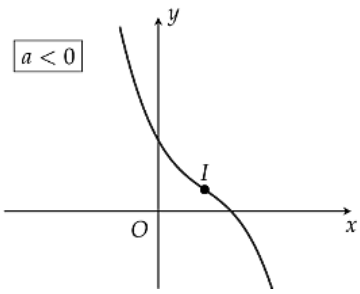
• Trường hợp 2: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac=0$ thì $y'=0$ có nghiệm kép $x=x_0$. Khi đó hàm số không có cực trị





• Trường hợp 3: Nếu $y'=0$ có $\Delta=b^2-3ac<0$ thì $y'=0$ vô nghiệm. Khi đó hàm số không có cực trị





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=2x^3-6x$ b) $y=-x^3+3x^2-1$ c) $y=-x^3+2$ d) $y=x^3-3x^2+3x-1$

Lời giải

a) $y=2x^3-6x$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=6x^2-6=6\left(x^2-1\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow 6\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$.

Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ ta có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

Trên khoảng $(-1;1)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CD}=f(-1)=4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=f(1)=-4$

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-6x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2-\frac{6}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-6x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(2-\frac{6}{x^2}\right)=+\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-4	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;0)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$2x^3-6x=0$

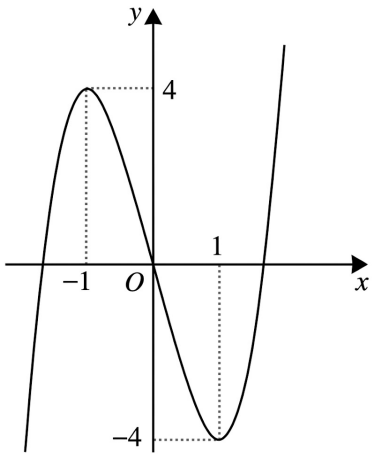
$\Leftrightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-\sqrt{3}$ hoặc $x=\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại ba điểm $(0;0),\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};0\right)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-1;4)$ và điểm cực tiểu $(1;-4)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $O(0;0)$.



b) $y=-x^3+3x^2-1$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$.

$y'=0\Leftrightarrow -3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

Trên khoảng $(0;2)$ ta có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và $y_{CĐ}=f(2)=3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=-1$

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

+ Bảng biến thiên:

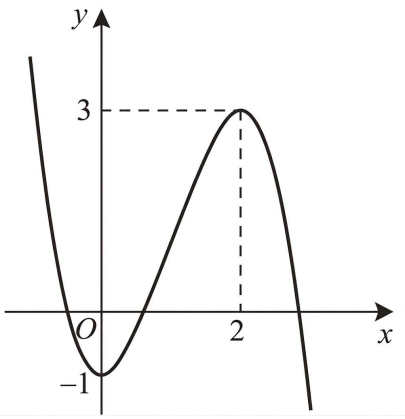
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(-1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(2;3)$ và điểm cực tiểu $(0;-1)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.



c) $y=-x^3+2$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=-3x^2\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+2\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+2\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$

• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;2)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$-x^3+2=0$

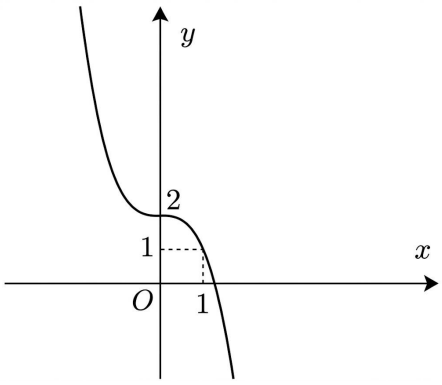
$\Leftrightarrow x^3=2$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $\left(\sqrt[3]{2};0\right)$.

+ Chọn $x=1\Rightarrow y=1$ ta được điểm $(1;1)$

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0;2)$.



d) $y=x^3-2x^2+2x-1$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=3x^2-4x+2>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

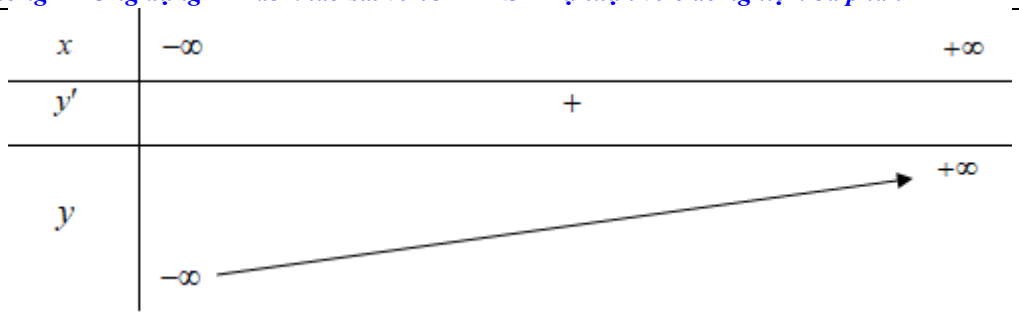
+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-2x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

+ Bảng biến thiên:



• Đồ thị:

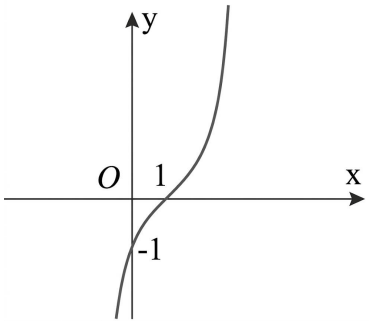
+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;-1)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$x^3-2x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại điểm $(1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{27}\right)$.



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+1$ b) $y=-2x^3-3x^2+1$ c) $y=x^3+3x^2+3x+2$ d) $y=x^3-3x^2+4x-2$

Lời giải

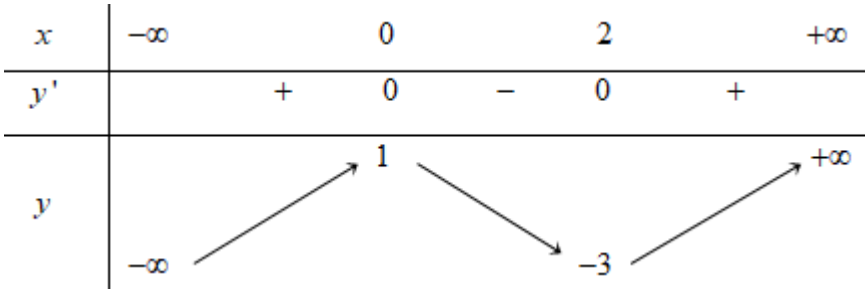
a) $y=x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:



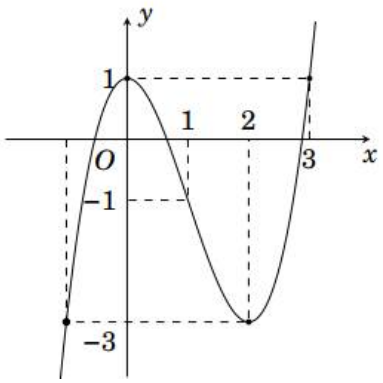
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$

và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=2; y_{CT}=-3$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;-3);(-1;-3);(3;1)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;-1)$ làm tâm đối xứng



b) $y=-2x^3-3x^2+1$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=-6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:

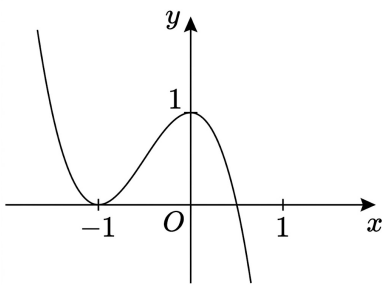
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0; y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=-1; y_{CT}=0$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;-4);(-2;5)$

Đồ thị nhận điểm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

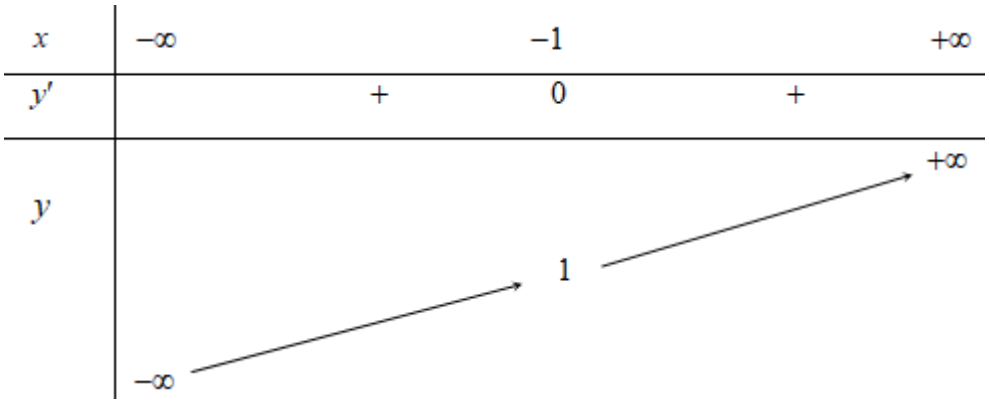


c) $y=x^3+3x^2+3x+2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

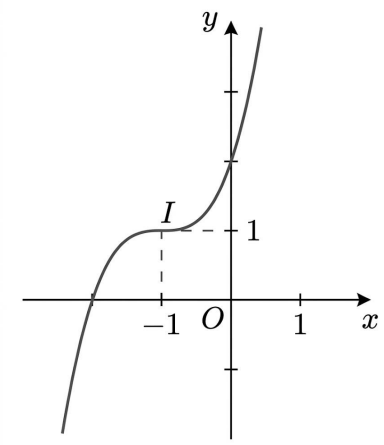
Sự biến thiên: $y'=3x^2+6x+3=0\Leftrightarrow x=-1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị nhận điểm $I(-1;1)$ làm tâm đối xứng

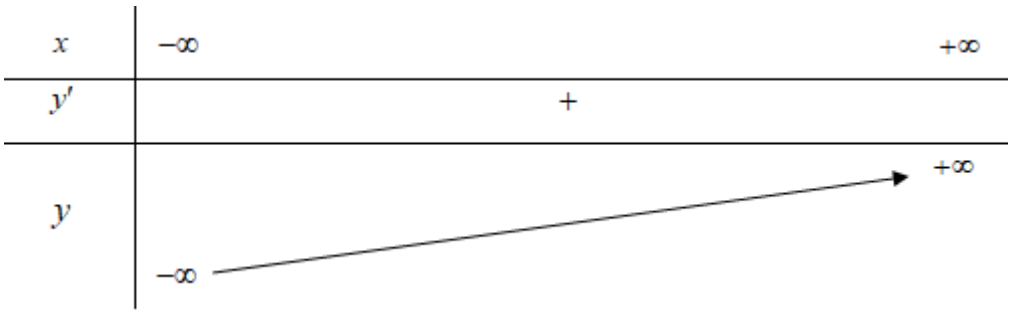


d) $y=x^3-3x^2+4x-2$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y'=3x^2-6x+4>0\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

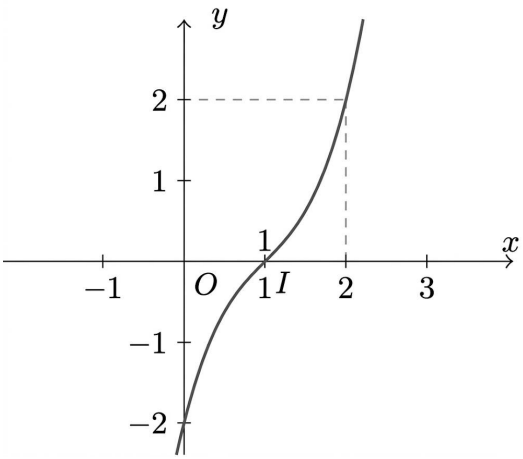
Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2;2);(0;-2);(1;0)$

Đồ thị nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=-x^3+3x+1$ b) $y=x^3-6x^2+1$ c) $y=x^3-3x^2+3x-1$

d) $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x$ e) $y=-x^3+2x^2-2x+1$ f) $y=x^3-3x^2+4x$

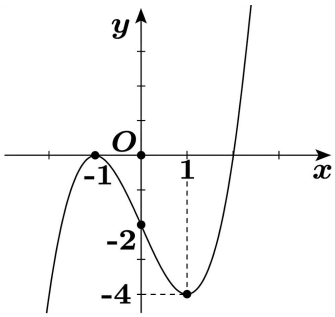
Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=x\left(x^2+1\right)+1$ b) $y=x\left(2x-3\right)^2-1$ c) $y=-\left(x-1\right)^3+3x+2$

d) $y=\left(x-1\right)^2\left(2-x\right)$ e) $y=\left(x-1\right)^2\left(4-x\right)$ f) $y=x\left(x+3\right)^2$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

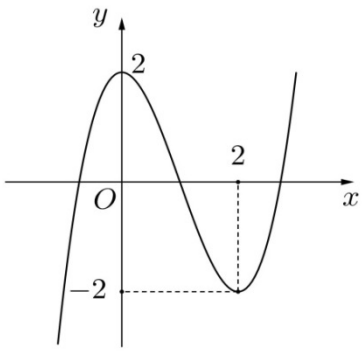
Ta có $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;0);(1;4)$, do đó phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ phải có hai nghiệm là $x=1;x=-1$ và $f(1)=-4;f(-1)=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a+2b+c=0\\3a-2b+c=0\\a+b+c+d=-4\\-a+b-c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=-2\end{cases}$ (Casio hệ 4 ẩn)

$\Rightarrow T=a+b+c+d=-4$

Bài 2. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Lời giải

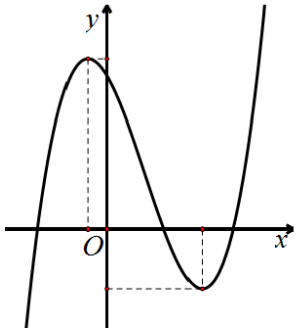
Ta có $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0;2),(2;-2)$, do đó phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ phải có hai nghiệm là $x=0; x=2$ và $f(0)=2; f(2)=-2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=0$

Bài 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$ suy ra $d>0$.

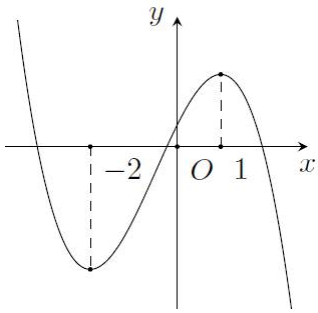
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \end{cases}$, mà $a>0$, suy ra $b<0$, $c<0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Bài 4. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có các nhận xét.

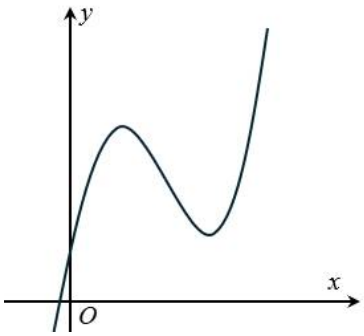
Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta suy ra $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung lại điểm có tung độ dương suy ra $d>0$.

Hàm số có các điểm cực trị $x=1$ và $x=-2$ nên phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=-2$. Ta có $\frac{-2b}{3a}=-1$ và $\frac{c}{3a}=-2$. Do đó $b<0$ và $c>0$.

Như vậy $a<0$, $b<0$, $c>0$ và $d>0$.

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hãy cho biết các hệ số a,b,c,d âm hay dương?

Lời giải

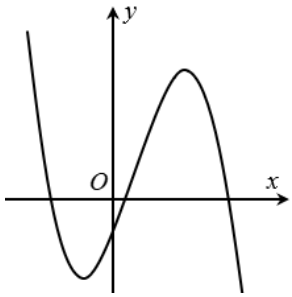
Dựa vào dạng đồ thị hàm bậc ba ta có $a>0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $M(0;1)$ suy ra $d=1>0$.

Hàm số có hai điểm cực trị dương suy ra $\begin{cases}-\frac{b}{a}>0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b<0\\ c>0.\end{cases}$.

Vậy $a>0,b<0,c>0,d>0$.

Bài 6. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong ba số b, c, d?

Lời giải

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Nhìn vào đồ thị ta có: Phần bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

Giao điểm với trục tung nằm phía dưới điểm O nên $d<0$.

Hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục tung nên suy ra phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái

dấu $\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow c>0$. Điểm uốn lệch phải so với trục tung nên $-\frac{b}{3a}>0 \Leftrightarrow b>0$.

Vậy suy ra $a<0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$.

DẠNG 3
BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=x^3-3x+1\Rightarrow y'=3x^2-3$

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành ($y=0$) tại 3 điểm phân biệt.

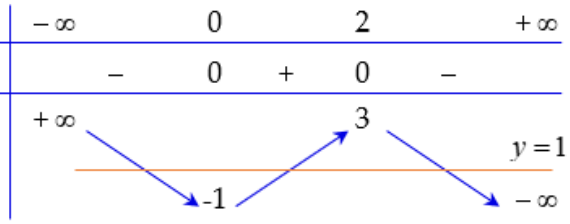
Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y=1$.

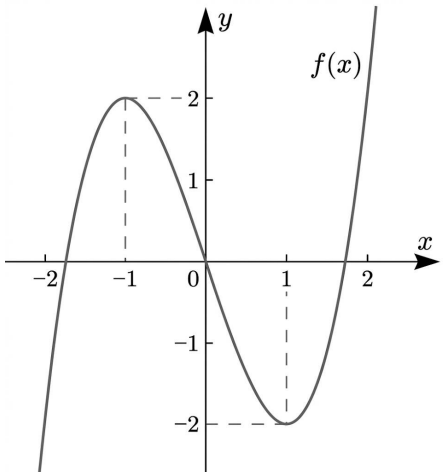
Lời giải

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm.

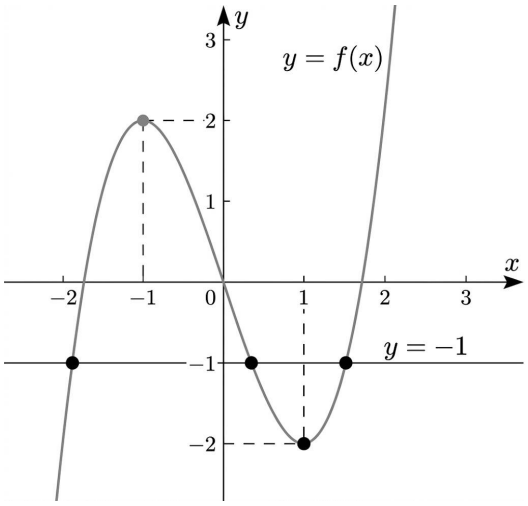
Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$.

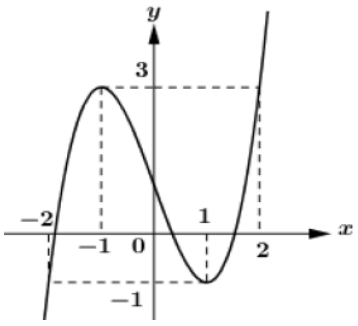
Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Bài 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=2027$

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=2027$ cắt $y=f(x)$ tại 1 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=2027$ có 1 nghiệm phân biệt.

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=x^3+3x^2-8x+1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y=x-2026$?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2+6x-8$.

Tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $y=x-2026$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là 1.

Ta có phương trình $1=3x^2+6x-8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Với $x=1 \Rightarrow y=-3$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=x-4$.

Với $x=-3 \Rightarrow y=25$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=x+28$.

Bài 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+1$.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$.

Lời giải

Cách 1. Tiếp tuyến Δ của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$,suy ra phương trình Δ có dạng $y=5x+m$

Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x^3}{3}-x^2+2x+1=5x+m \quad (1) \\ x^2-2x+2=5 \quad (2) \end{array}\right.$ có nghiệm.

Giải hệ trên, (2) $\Leftrightarrow$ $x=-1$; $x=3$.

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $m=\frac{8}{3}$

Thay $x=3$ vào (1) ta được $m=-8$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=5x+\frac{8}{3}$ hoặc $y=5x-8$

Cách 2. Tiếp tuyến Δ vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{x}{5}+2$ suy ra hệ số góc của Δ : $k=5$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của Δ với (C),ta có : $k=f'(x_0) \Leftrightarrow 5=x_0^2-2x_0+2 \Leftrightarrow x_0=-1, x_0=3$.

Suy ra phương trình $\Delta: \left[\begin{array}{l} y=5(x+1)+f(1)=5x+\frac{8}{3} \\ y=5(x+3)+f(3)=5x-8 \end{array}\right.$.

Bài 7. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $M\left(\frac{\sqrt{a}}{2};\frac{b-\sqrt{c}}{4}\right);N\left(-\frac{\sqrt{d}}{2};\frac{e+\sqrt{f}}{4}\right)$ $(a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua đường thẳng $d:2x-y+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{a+b+c-(d+e+f)}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}$.

Lời giải

Gọi $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)$ thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d

I là trung điểm của AB nên $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, ta có $I\in d$

Có: $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\left(-x_1^3+3x_1+2\right)+\left(-x_2^3+3x_2+2\right)}{2}=2.\frac{x_1+x_2}{2}+2$

$\Rightarrow -(x_1+x_2)^3+3x_1x_2(x_1+x_2)+3(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\end{array}\right.$

Mặt khác: $MN\perp d\Rightarrow(x_2-x_1).1+(y_2-y_1).2=0$

$\Rightarrow 7(x_2-x_1)-2(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2}$

- Xét $x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\frac{7}{2}};x_2=\mp\sqrt{\frac{7}{2}}\Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{14}}{2};\frac{8-\sqrt{14}}{4}\right);N\left(-\frac{\sqrt{14}}{2};\frac{8+\sqrt{14}}{4}\right)$

- Xét $\left\{\begin{array}{l}x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\\x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1^2+x_2^2=\frac{9}{4}\\x_1x_2=\frac{5}{4}\end{array}\right.\Rightarrow$ vô nghiệm

Vậy 2 điểm cần tìm là: $M\left(\frac{\sqrt{14}}{2};\frac{8-\sqrt{14}}{4}\right);N\left(-\frac{\sqrt{14}}{2};\frac{8+\sqrt{14}}{4}\right)$

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt .

Lời giải

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+1=m$

Ta có: $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Do đó, đồ thị cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt khi $-3<m<1$.

Vậy chọn $-3<m<1$.

Bài 9. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3-3x^2=2m+1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tính tổng các phần tử của S.

Lời giải

Xét hàm số: $y=2x^3-3x^2 \Rightarrow y'=6x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases}(C): y=2x^3-3x^2\\ d: y=2m+1\end{cases}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m+1=-1\\ 2m+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$.

Bài 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+(m+3)x+m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x^2+(m+3)x+m^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+(m+3)x+m^2=0\end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2+(m+3)x+m^2=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+3)^2 - 4m^2 > 0 \\ 1^2 + (m+3).1 + m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m^2 + m + 4 \neq 0 \ (luon\ dung) \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$

Do đó với $-1 < m < 3$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2\}$.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Đặt nghiệm $x_2 = 1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1 + x_3 = 2 = 2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta' = 1 - (m-2) > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2 x + 2m^3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$x^3 + 3mx^2 - m^3 = m^2 x + 2m^3$

$\Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2 x - 3m^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - m^2 x) + (3mx^2 - 3m^3) = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - m^2) + 3m(x^2 - m^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3m)(x^2 - m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{array} \right.$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83$

$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Bài 13. Tìm m để đồ thị (C) của $y=x^3-3x^2+4$ và đường thẳng $y=mx+m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

Lời giải

$$d(O,BC)=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_b-y_c)^2}=\sqrt{(m^2+1)(x_B-x_C)^2}$$

$$=\sqrt{(m^2+1)\left[(x_B+x_C)^2-4x_Bx_C\right]}=\sqrt{(m^2+1)4m}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}d(O,BC).BC=m\sqrt{m}=64\Leftrightarrow m=16.$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-3x^2+4=mx+m\Leftrightarrow(x+1)(x^2-4x+4-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\(x-2)^2=m\,(*)\end{array}\right.$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m\neq 9\end{cases}$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{m}\Rightarrow B\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right)\\x=2+\sqrt{m}\Rightarrow C\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(2-\sqrt{m};3m-m\sqrt{m}\right),\overrightarrow{OC}=\left(2+\sqrt{m};3m+m\sqrt{m}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=m\sqrt{m}=64\Rightarrow m=16.$$

Bài 14. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d):y=x+4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0$$

$$\Leftrightarrow x.\left[x^2+2mx+(m+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x^2+2mx+m+2=0\quad(2)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow(1)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m.0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B(x_1; x_1 + 4)$ và $C(x_2; x_2 + 4)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB} = (x_1 - 1; x_2 + 1)$ và $\overrightarrow{KC} = (x_2 - 1; x_2 + 1)$.

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{\left|(x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_2 - 1)(x_1 + 1)\right|}{2} = \left|x_1 - x_2\right|.$$

Theo đề bài: $S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 128 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$.

Bài 15. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Tìm các giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ: $x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0 \ (1) \end{array}\right.$

Suy ra $A(0;-1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

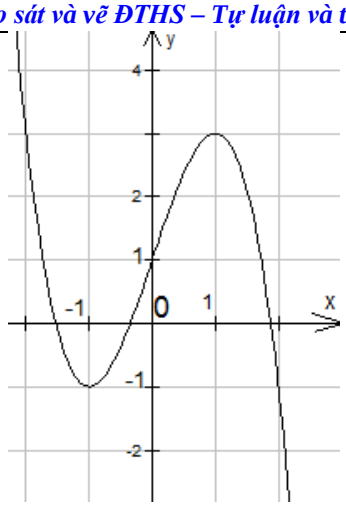
Khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$

Giả sử: $B(x_1; \mathrm{m}\, x_1 - 1)$, $C(x_2; \mathrm{m}\, x_2 - 1)$. Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = 2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC: $\begin{cases} x_G = \dfrac{4 + x_1 + x_2}{3} \\ y_G = \dfrac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \dfrac{2m + 9}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(2; \dfrac{2m + 9}{3}\right)$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ suy ra $\dfrac{2m + 9}{3} = 2.2 + 1 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn $(*)$

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Tìm số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$.

Lời giải

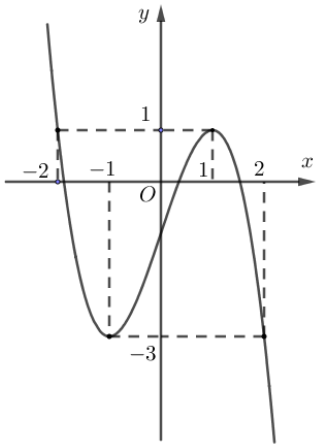
Đặt $f\left(x\right)=t$, khi đó $f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=a & \left(-2<a<-1\right)\\ t=0 & \\ t=b & \left(1<b<2\right)\end{array}\right.$.

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=a & \left(-2<a<-1\right)\\ f\left(x\right)=0 & \\ f\left(x\right)=b & \left(1<b<2\right)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f\left(x\right)=a$ có 1 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=b$ có 3 nghiệm. Và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ có 7 nghiệm.

Bài 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

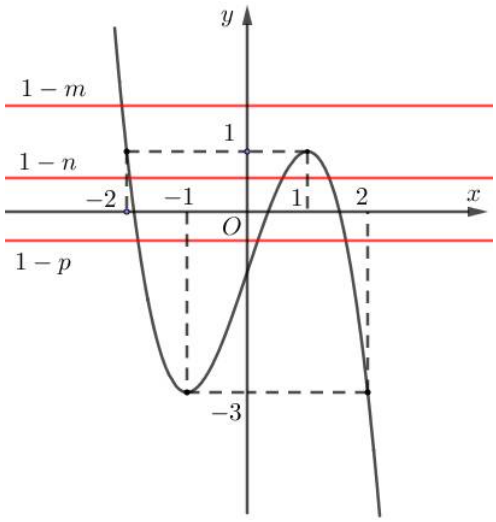
Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có $f\left(1-f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}1-f\left(x\right)=m & \left(-2<m<-1\right)\\ 1-f\left(x\right)=n & \left(0<n<1\right)\\ 1-f\left(x\right)=p & \left(1<p<2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1-m\\ f\left(x\right)=1-n\\ f\left(x\right)=1-p\end{array}\right.$.

+) Do $-2<m<-1\Rightarrow 2<1-m<3\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-m$ có 1 nghiệm x_1.

+) Do $0<n<1\Rightarrow 0<1-n<1\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-n$ có 3 nghiệm x_2,x_3,x_4.

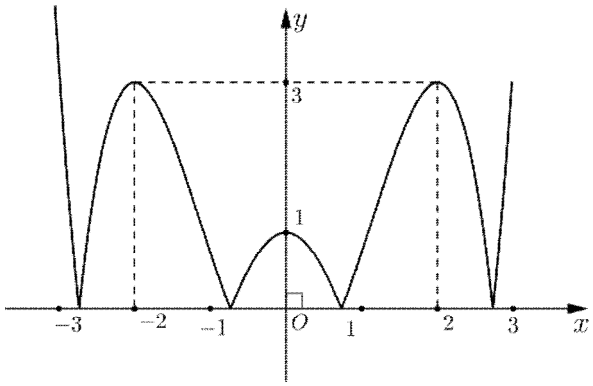
+) Do $1<p<2\Rightarrow -1<1-p<0\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-p$ có 3 nghiệm x_5,x_6,x_7.



Dễ thấy 7 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

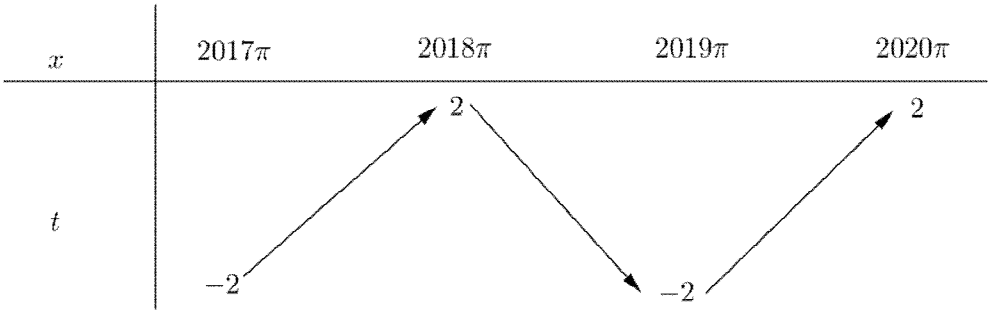
Bài 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x)=8$.

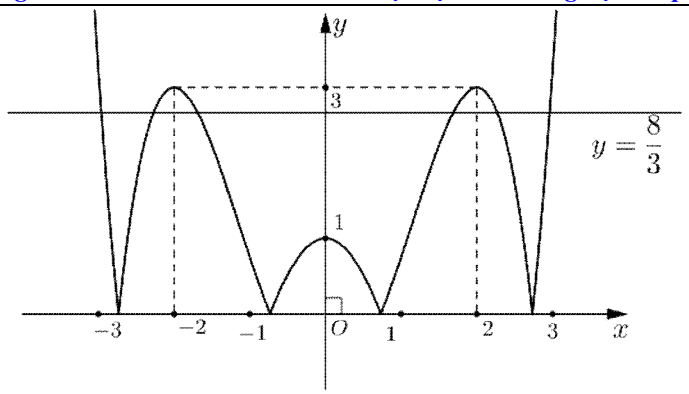
Lời giải

Đặt $t=2\cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2\cos x)=8\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ trên đồ thị $y=f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2;2]$, đường thẳng $y=\dfrac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1\in(-2;-1)$ và $t_2\in(1;2)$.

Từ bảng biến thiên của t, ứng với giá tị t_1, ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_1$, tươngtự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2\cos x=t_2$.

Vậy phương trình $3f(2\cos x)=8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi;2020\pi]$

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Bài 1. Cô Thuỷ theo dõi sự tiến bộ của bạn Bảo Toàn qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các hệ số. Trong đó $x\left(0\le x\le 9, x\in\mathbb{N}\right)$ là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x. Qua theo dõi, Cô Thuỷ ghi nhận tháng đầu tiên bạn Bảo Toàn đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba bạn Bảo Toàn đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của bạn Bảo Toàn tăng lên. Vậy ở tháng thứ năm, bạn Bảo Toàn được bao nhiêu điểm?



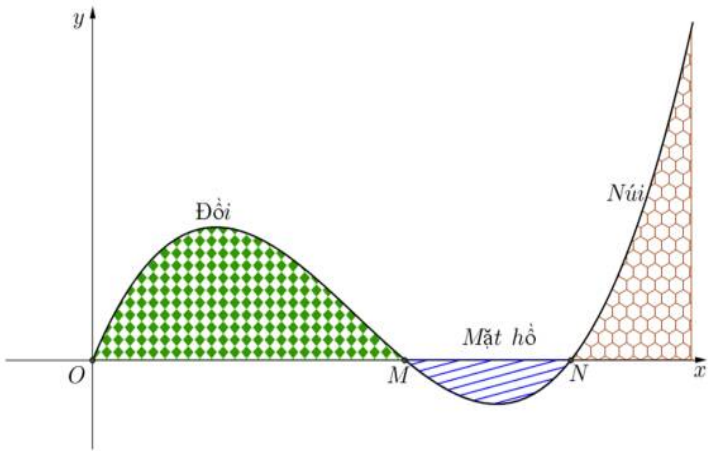
Lời giải

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

Dựa vào đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(1)=19 \\ f'(3)=0 \\ f(3)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=28 \\ 6a+b=-27 \\ 9a+3b+c=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-9 \\ c=30 \end{cases}.$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-9x+30 \Rightarrow f(5)=35.$

Bài 2. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa là một phần hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilomét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OM=2(km)$, độ rộng của hồ nước $MN=1(km)$ và ngọn đồi cao $528(m)$. Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)



Lời giải

Đổi $528(m)=0,528(km)$

Ta có: $ON=OM+MN=3km\Rightarrow M(2;0),N(3;0)$.

Từ đồ thị hàm số suy ra:

$f(x)=kx(x-2)(x-3)=k\left(x^3-5x^2+6x\right)\Rightarrow f'(x)=k\left(3x^2-10x+6\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

Gọi $h(h>0)$ là độ sâu của hồ khi đó $\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3};0,528\right)$ là đỉnh đồi, $\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3};-h\right)$ là đáy hồ

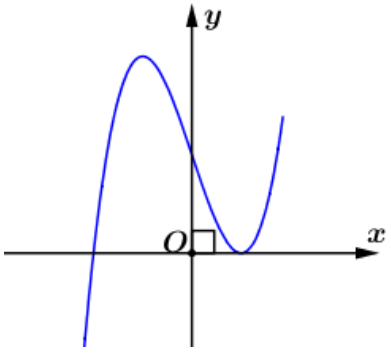
Ta có: $k\left[\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3-5\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}\right)\right]=0,528\Leftrightarrow k\approx 0,25$.

$$f(x)=0,25\left(x^3-5x^2+6x\right)\Rightarrow -h=\left[\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^3-5\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^2+6\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)\right]\Leftrightarrow h\approx 0,15778(km)$$

$\Rightarrow h\approx 158(m)$.

Bài 3. Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí Suối Tiên có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x+2$. Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a;b)$ và $B(c;d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $y=-x+2025$. Tính giá trị biểu thức $T=a+2b-3c-4d$, biết $a>0$.





Lời giải

$y=x^3-3x+2\Rightarrow y'=3x^2-3$

Tiếp tuyến với (C) tại A,B có cùng hệ số góc và chỉ khi $f'(x_A)=f'(x_B)\Leftrightarrow x_A^2=x_B^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=x_B\,(L)\\ x_A+x_B=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow A,B$ đối xứng nhau qua $I(0;2)$ là tâm đối xứng của (C).

$AB \perp d : y = -x + 2025 \Rightarrow AB : x - y + m = 0.$

AB qua I nên ta có $m = 2 \Rightarrow AB : x - y + 2 = 0.$

Khi đó hoành độ A, B thỏa mãn phương trình

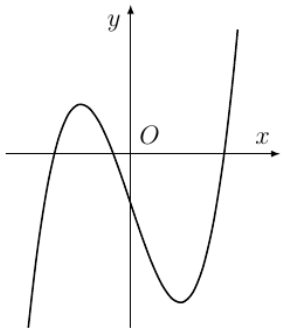
$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (L) \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow A(2;4), B(-2;0).$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 4, c = -2; d = 0 \Rightarrow T = a + 2b - 3c - 4d = 16$$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



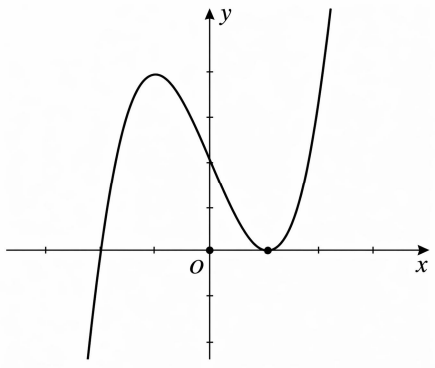
A. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y=x^3-3x-1$. **D.** $y=x^2+x-1$.

Lời giải

Chọn C.

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x-1$.

Câu 2. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



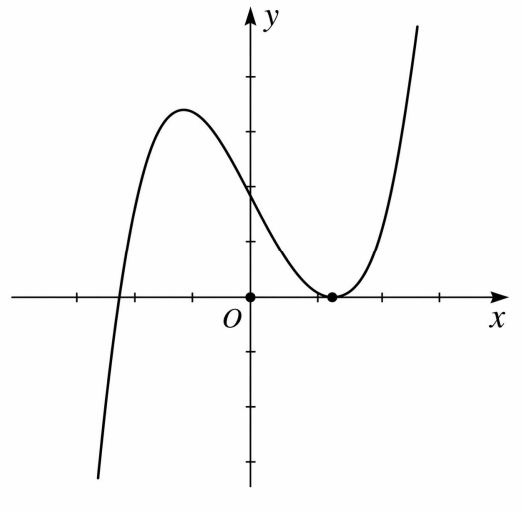
A. $y=-x^3+3x+2$ **B.** $y=x^2+1$ **C.** $y=x^3+x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+2$

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x+2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x-1$ **B.** $y=3x^2-1$ **C.** $y=-x^3-3x-1$ **D.** $y=-x^4+x^3-1$

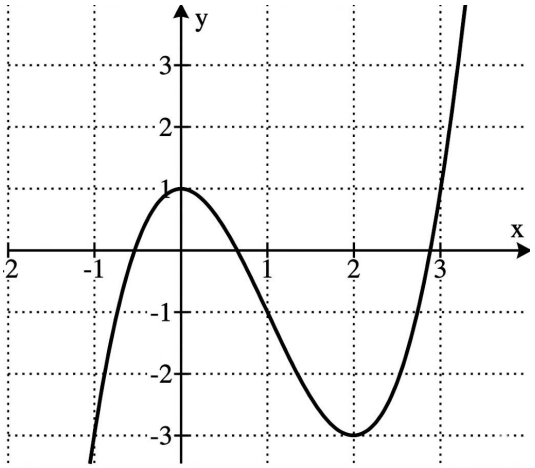
Lời giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại B và **D.**

Đồ thi hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên **A** đúng.

Câu 4. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



Chọn một khẳng định ĐÚNG.

A. $y=-x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+1$. **C.** $y=2x^3-6x^2+1$. **D.** $y=x^3-3x^2+1$.

Lời giải

Chọn D.

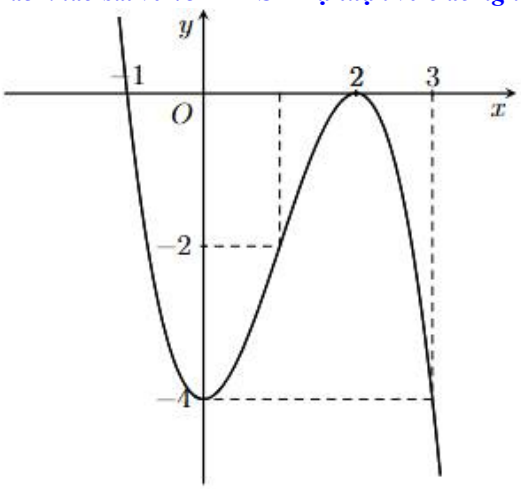
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi lên nên $a>0$, do đó loại A và B

+ đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $x=2, y=-3$, do đó loại C

Vậy chọn D

Câu 5. Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



A. $y=x^3-3x-4$. **B.** $y=-x^3+3x^2-4$. **C.** $y=x^3-3x\ -4$. **D.** $y=-x^3-3x^2-4$.

Lời giải

Chọn B.

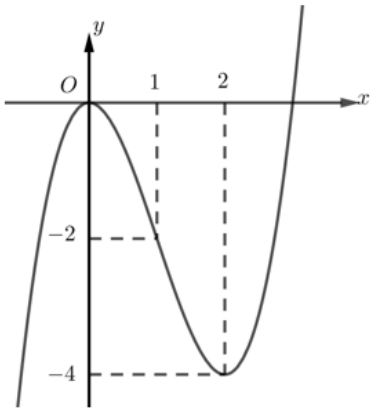
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi xuống nên $a<0$, do đó loại A và C

+ đồ thị hàm số có điểm cực đại $x=2, y=0$, do đó loại D

Vậy chọn B

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ



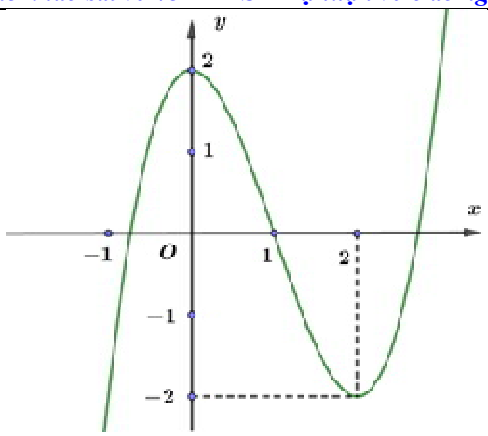
A. $y=x^3+3x$. **B.** $y=x^3-3x$. **C.** $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=x^3+3x^2$.

Lời giải

Chọn C.

Nhìn vào đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ 0 (nghiệm kép) và điểm có hoành độ $a>2$ nên đồ thị trên là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2$.

Câu 7. Đường cong ở hình sau là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=x^3-6x+2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

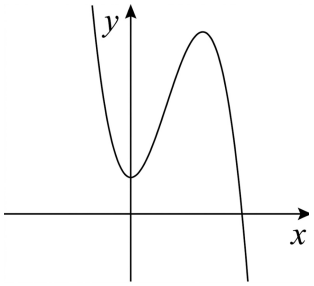
Lời giải

Chọn B.

Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a>0 \Rightarrow$ Loại **D.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2;-2)$; $(1;0) \Rightarrow$ Chọn B

Câu 8. Cho đồ thị sau.



Hỏi hàm số nào sau đây có đồ thị ở hình trên?

A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=-x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn D.

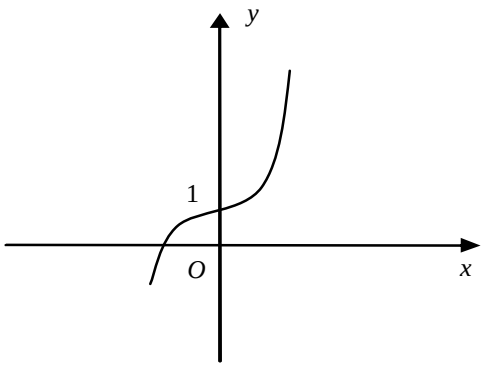
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi xuống nên $a<0$, do đó loại A và C

+ đồ thị hàm số có điểm cực trị dương , do đó loại B

Vậy chọn D

Câu 9. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên.



A. $y=x^3+3x+1$. **B.** $y=x^3-3x+1$. **C.** $y=-x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn A.

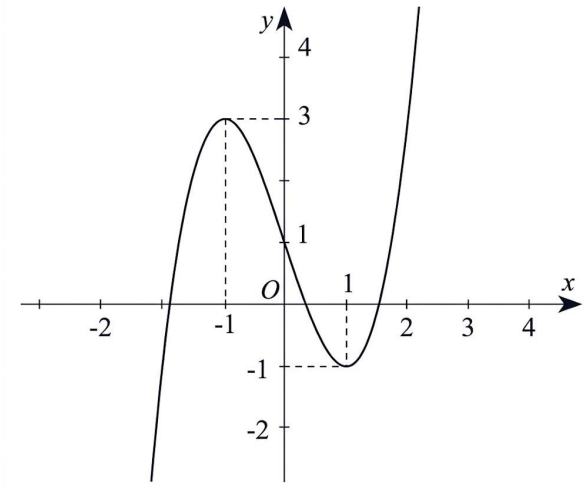
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có nhánh bên phải đi lên nên $a>0$, do đó loại C và D

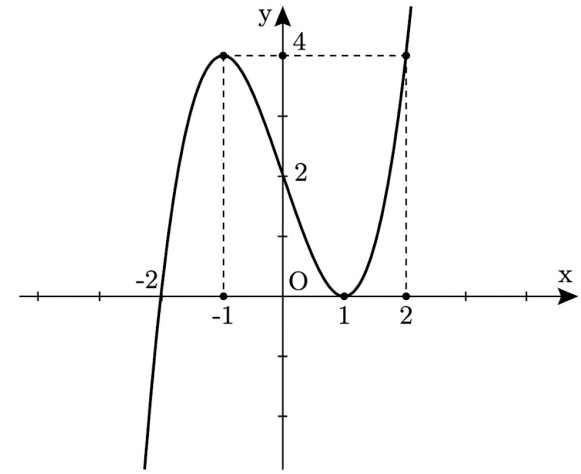
+ đồ thị hàm số không có điểm cực trị , do đó loại B

Vậy chọn A

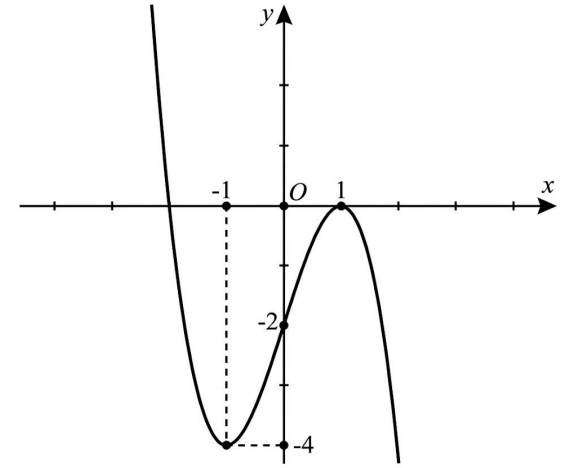
Câu 10. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ là hình nào trong 4 hình dưới đây?



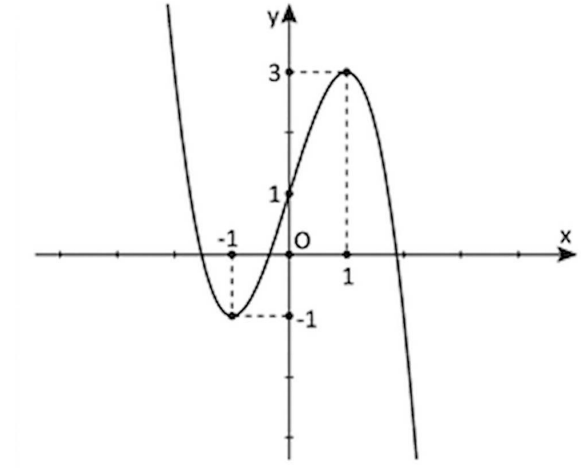
A. Hình 1.



B. Hình 2.



C. Hình 3.



D. Hình 4.

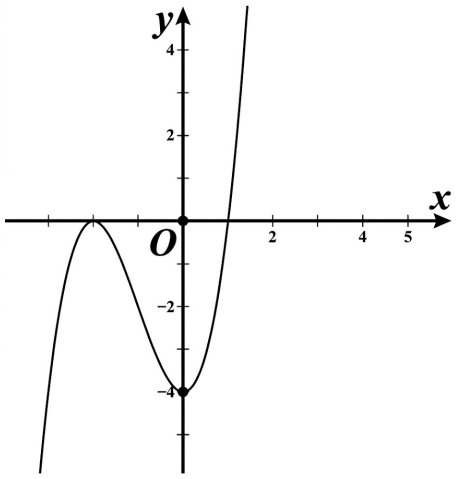
Lời giải

Chọn B.

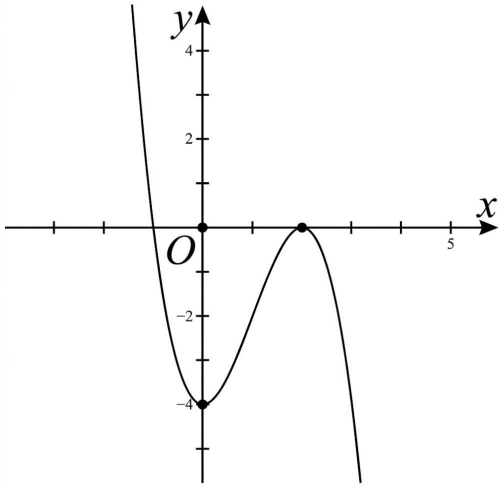
Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm $(0;2)$. Từ 4 đồ thị ta thấy chỉ có hình 2 cắt trục tung tại điểm $(0;2)$. Vây chọn B.

Câu 11. Hàm số $y=x^3+3x^2-4$ có đồ thị là hình nào sau đây?

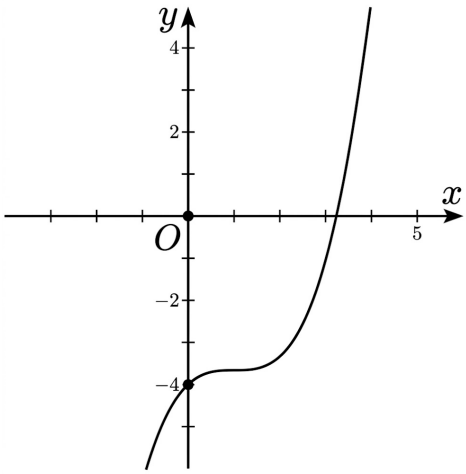
A.



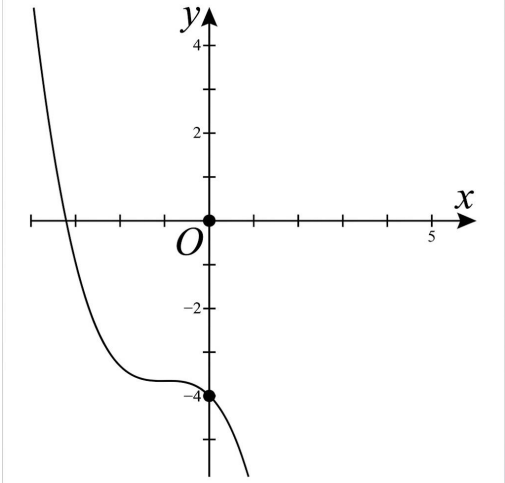
B.



C.



D.



Lời giải

Chọn A.

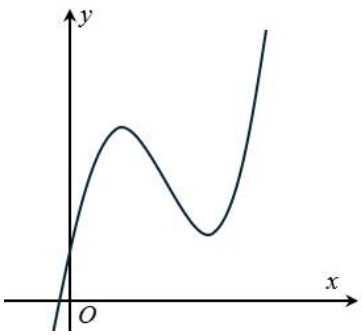
Từ hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $a > 0$ nên nhánh bên phải đilên, do đó loại B và D

+ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị , do đó loại C

Vậy chọn A

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

D. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

Lời giải

Chọn D.

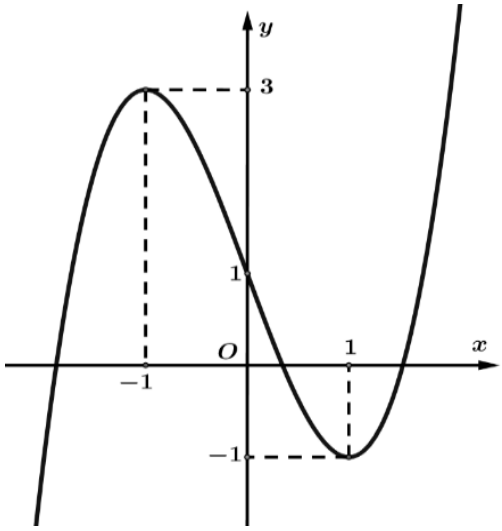
Dựa vào dạng đồ thị ta có $a>0$.

$y=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+1\Rightarrow y(1)=1$ (loại); $y=x^3-3x^2+1\Rightarrow y(1)=-1$ (loại).

Xét hàm $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$, $y'=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=3\Rightarrow y=1.\end{array}\right.$

Vậy đồ thị là của hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+1$.

Câu 13. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^3-3x-1$. **C.** $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

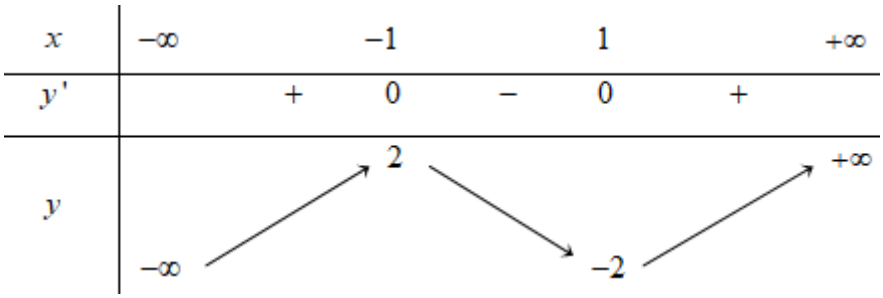
Chọn A.

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$.

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=1$. Vậy hàm số thỏa đề là $y=x^3-3x+1$.

Câu 14. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?



A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=\frac{x-2}{x+3}$. **D.** $y=x^3-3x$.

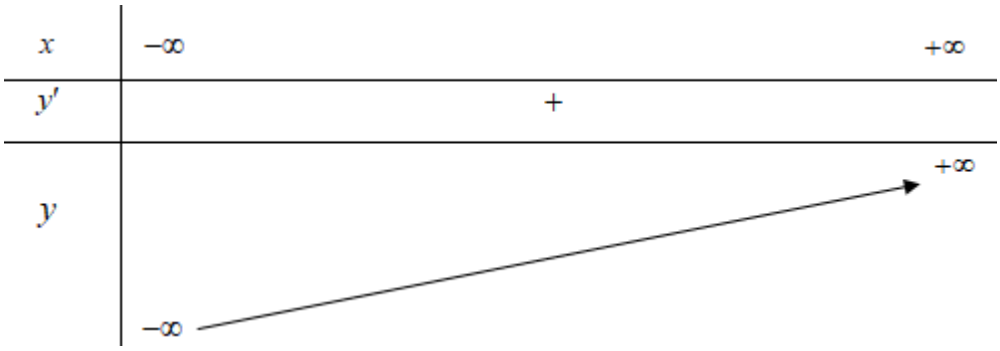
Lời giải

Chọn D.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ nên loại A và B.

Có $x\in\mathbb{R}$ nên loại C $\Rightarrow$ chọn D.

Câu 15. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?



A. $y=x^2+2x+1$. **B.** $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$. **C.** $y=x^3+x^2+2x-5$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên, ta thấy

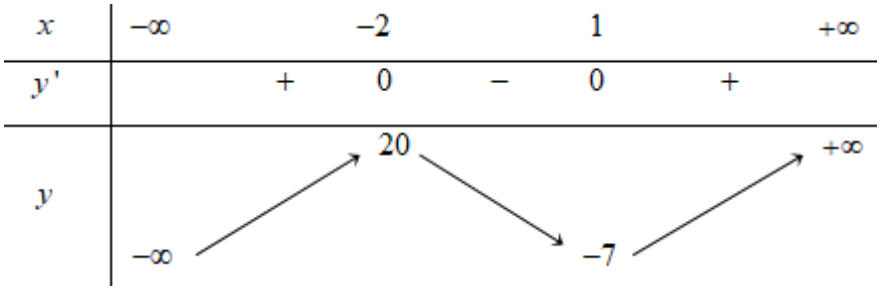
+ hàm số cần tìm có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Do đó, phương án B, D bị loại.

+ hàm số cần tìm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hàm số bậc 2 đã học không thể đơn điệu trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$.

Do đó, phương án A bị loại.

Kiểm tra phương án C thấy $y'=3x^2+2x+2,\ y'>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy, đáp án là **C.**

Câu 16. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D?



A. $y=-2x^3-3x^2+12x$. **B.** $y=2x^3+3x^2-12x$.

C. $y=-2x^4-3x^2+12x$. **D.** $y=2x^3-3x^2+12x$.

Lời giải

Chọn B.

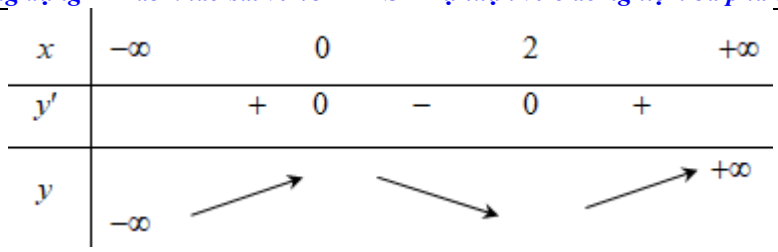
Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A và C

+ Hàm số có 2 điểm cực trị $(-2;20),(1;-7)$, do đó loại D

Vậy chọn B

Câu 17. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$. **C.** $y=x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2+2$.

Lời giải

Chọn B.

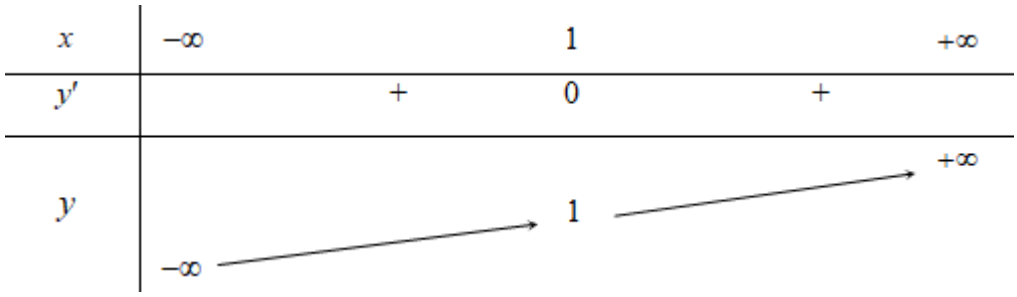
Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho là hàm bậc 3 có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A và D

+ Hàm số có 2 điểm cực trị $x=0;x=2$, do đó loại C

Vậy chọn B

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào ?



A. $y=-3x^2+1$ **B.** $y=x^3-1$. **C.** $y=x^4+3x^2-1$. **D.** $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D.

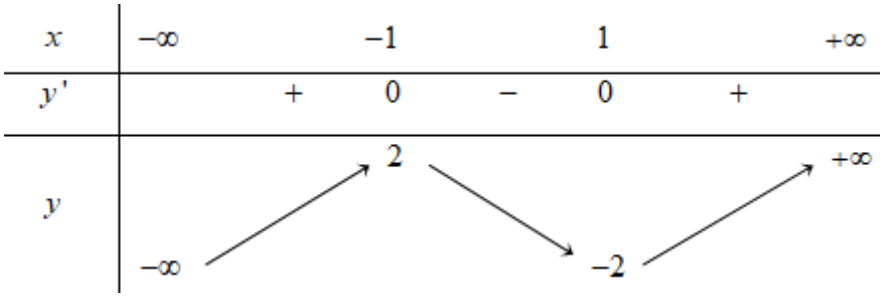
Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Hàm số đã cho có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$, do đó loại A

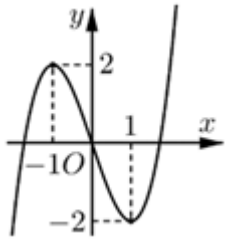
+ Hàm số không có điểm cực trị , do đó loại B, C

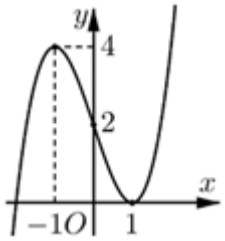
Vậy chọn D

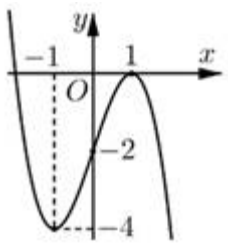
Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:

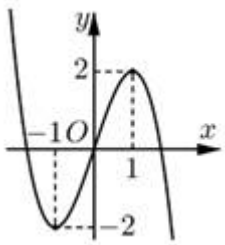


Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là hình nào trong bốn hình sau?









A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Lời giải

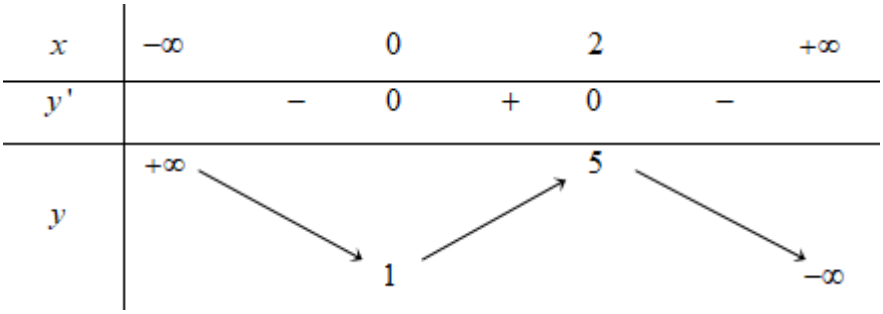
Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2 nên loại **B** và **C.**

Khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$ nên chỉ có chọn **A** là phù hợp.

Câu 20. Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?



A. $y=-x^3-3x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$. **C.** $y=x^3+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

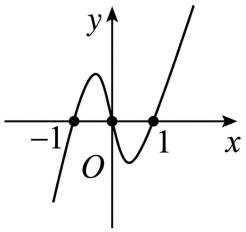
Lời giải

Chọn D.

Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên $a<0$

Ta có $f(0)=1$ nên hàm số cần tìm là $y=-x^3+3x^2+1$

Câu 21. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tọa độ điểm đối xứng I của đồ thị hàm số trên là:

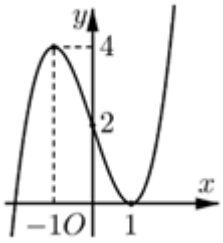
A. $I(-1;0)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(0;0)$. **D.** $I(0;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có tọa độ điểm đối xứng là $I(0;0)$

Câu 22. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi I là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Khi đó, tung độ của điểm đối xứng bằng:

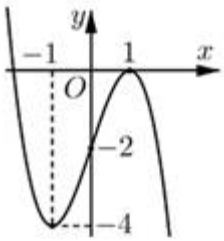
A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta có tọa độ điểm đối xứng là $I(0;2)$, suy ra tung độ của điểm đối xứng là $y=2$

Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng:

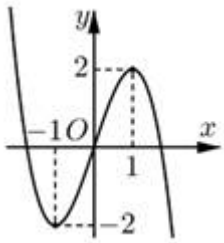
A. -2. **B.** 0. **C.** -4. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta có hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng: $x=0$

Câu 24. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là:

A. $(-1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;0)$.

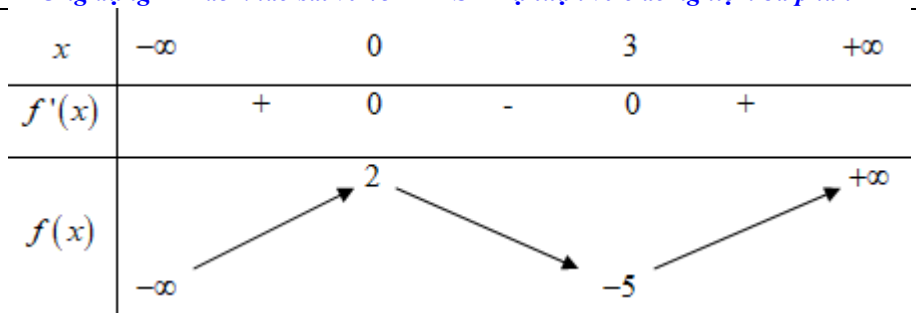
Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có tọa độ điểm đối xứng là $(0;0)$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là điểm đối xứng nên điểm cần tìm là $(0;0)$

Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:



Tọa độ điểm đối xứng I của đồ thị hàm số trên là:

A. $I(0;2)$. **B.** $I\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $I(3;-5)$. **D.** $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

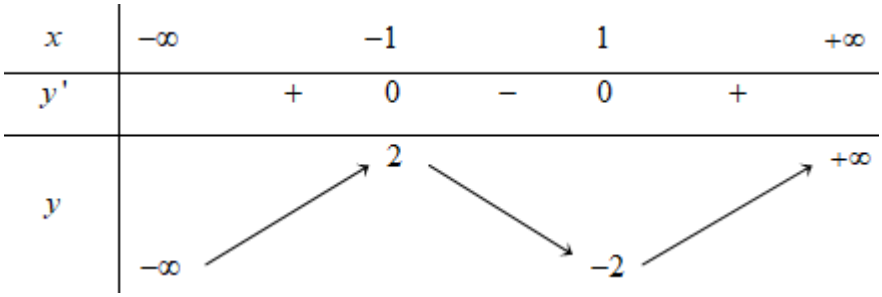
Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại $(0;2)$ và cực tiểu $(3;-5)$

Tọa độ điểm đối xứng I là trung điểm điểm cực đại và cực tiểu, do đó $I\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Câu 26. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:



Hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng:

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

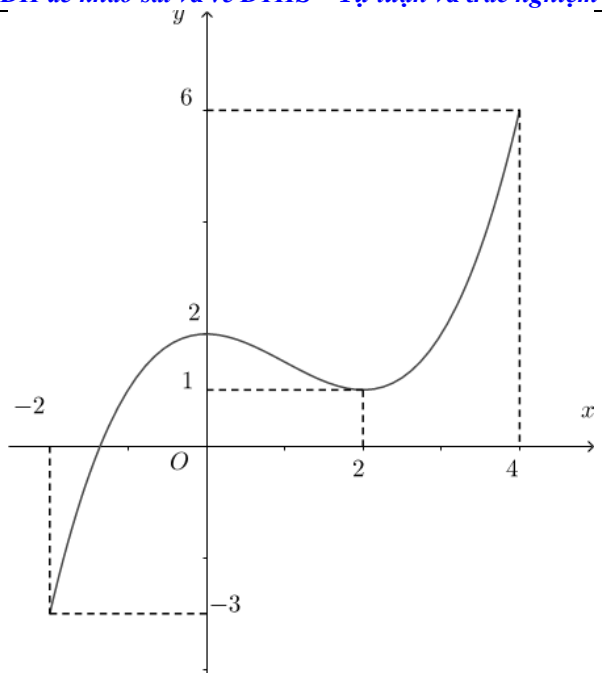
Lời giải

Chọn B.

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại $(-1;2)$ và cực tiểu $(1;-2)$

Tọa độ điểm đối xứng I là trung điểm điểm cực đại và cực tiểu, do đó $I(0;0)$ hay hoành độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên bằng $x=0$

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$.

Do đó phương trình $3f(x)-5=0$ có ba nghiệm thực.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2027=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x)-2027=0 \Leftrightarrow f(x)=2027 \quad (1)$

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=2027$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=2027$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có 1 nghiệm thực phân biệt.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

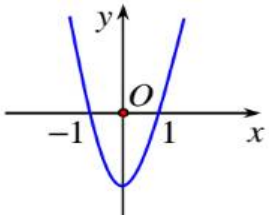
Ta có $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$ (1)

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

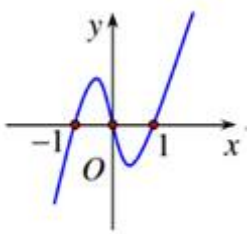
Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $y=f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

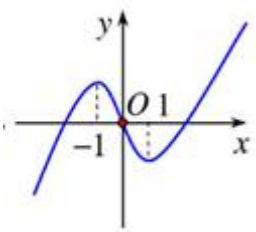
Do đó phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt.

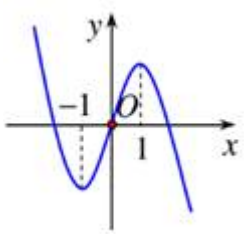
Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, sao cho đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là parabol có dạng như trong hình bên.

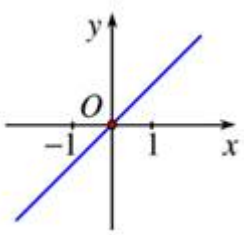


Hỏi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nào trong bốn hình sau?









A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Lời giải

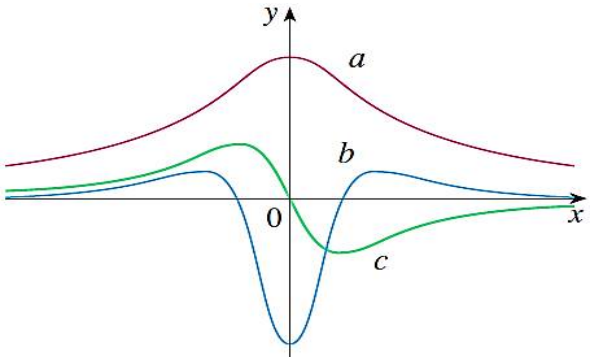
Chọn B.

+ Từ đồ thị ta thấy $y=f'(x)$ là parabol nên là hàm bậc 2 suy ra đồ thị của hàm số $y=f(x)$ hàm bậc 3 suy. Loại đáp án D

+ đồ thị ta thấy $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại 2 điểm có hoành độ $x=-1;x=1$ suy ra đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có hoành độ điểm cực trị là $x=-1;x=1$. Loại đáp án A

+ Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy $\begin{cases} f'(x)>0 \Leftrightarrow x<-1;x>1 \\ f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1 \end{cases}$ suy ra đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đồng biến $x<-1;x>1$ và nghịch biến $-1<x<1$

Câu 31. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị b cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của c. Suy ra b là đạo hàm của c.

+ Đồ thị c cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của a. Suy ra c là đạo hàm của a.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $a,c,b.$

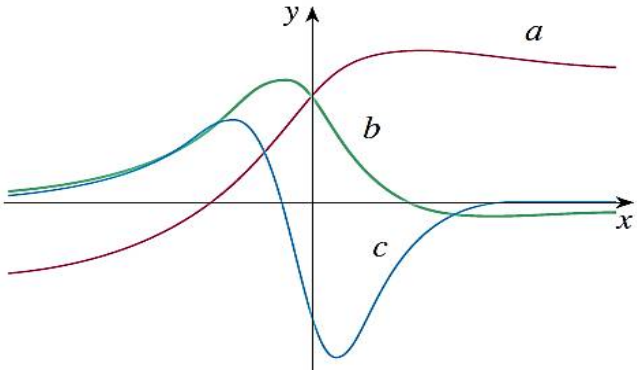
Cách 2: Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c, đồ thị của a đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c, đồ thị của a đi xuống, suy ra c là đạo hàm a .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $a,c,b.$

Câu 32. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn A.

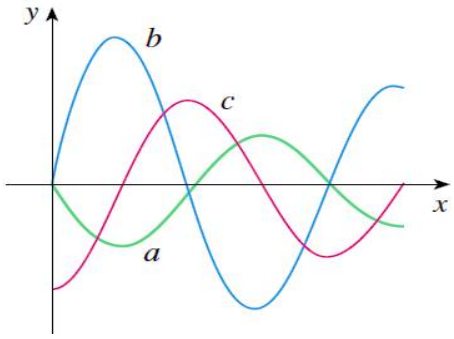
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của a đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của a đi xuống, suy ra b là đạo hàm a.

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c, đồ thị của b đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c, đồ thị của b đi xuống, suy ra c là đạo hàm b.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $a,b,c.$

Câu 33. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $a,b,c.$ **B.** $b,a,c.$ **C.** $a,c,b.$ **D.** $b,c,a.$

Lời giải

Chọn C.

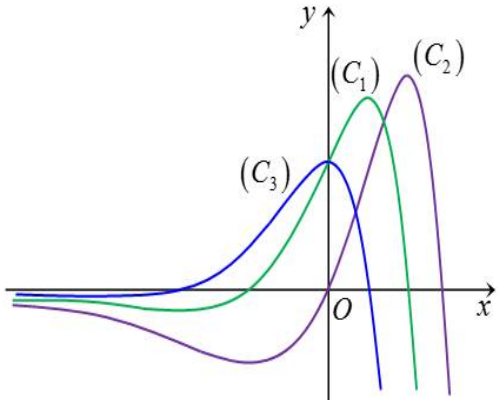
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị c cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của b,a. Suy ra c là đạo hàm của a hoặc b.

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b, đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c.

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $a,c,b.$

Câu 34. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn B.

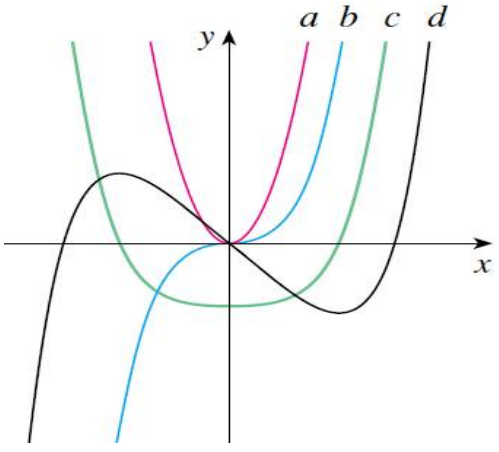
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi xuống, suy ra (C_3) là đạo hàm (C_1) . Loại A, C

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_2) .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_1);(C_3)$

Câu 35. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $c,d,b,a.$ **B.** $d,c,b,a.$ **C.** $d,c,a,b.$ **D.** $d,b,c,a.$

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy:

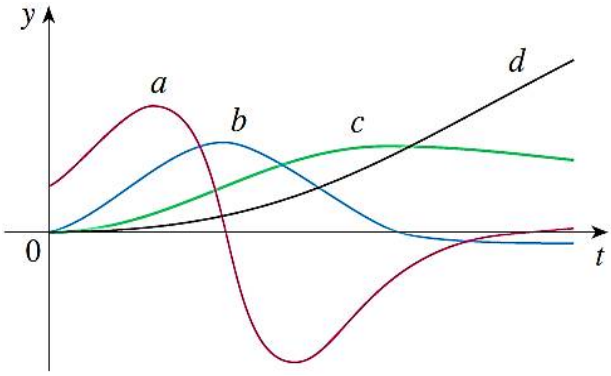
+ đồ thị a nằm trên trục Ox và của đồ thị b luôn đồng biến. Suy ra a là đạo hàm b . Loại C, D

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị b , đồ thị của c đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị b , đồ thị của c đi xuống, suy ra b là đạo hàm c .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị c , đồ thị của d đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị c , đồ thị của d đi xuống, suy ra c là đạo hàm d .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt $d,c,b,a.$

Câu 36. Cho đồ thị của bốn hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. c,d,b,a **B.** d,c,a,b **C.** d,c,b,a **D.** d,b,c,a

Lời giải

Chọn C.

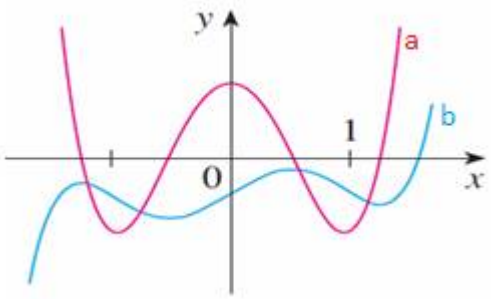
Từ đồ thị ta thấy:

+ đồ thị c nằm trên trục Ox và của đồ thị d luôn đồng biến. Suy ra c là đạo hàm d .

+ đồ thị a cắt trục Ox tại 2 điểm, đồ thị b cắt trục Ox tại 1 điểm. Suy ra b là đạo hàm a .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$, $y=f'''(x)$ và theo thứ tự, lần lượt d,c,b,a

Câu 37. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(1)<f''(1)$ **B.** $f'(-1)>f''(-1)$

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f''(0)\neq f''(1)$.

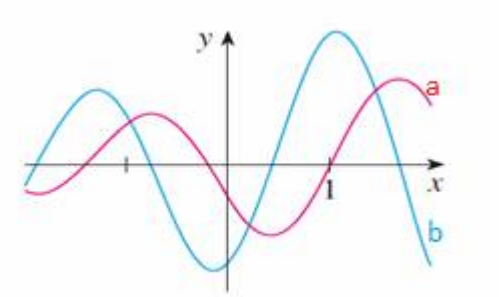
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy: Đồ thị a cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của b. Suy ra a là đạo hàm của b.

Do đó $f'(-1)>f''(-1)$

Câu 38. Cho đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $f'(-1)<f''(1)$. **B.** $f'(-1)>f''(1)$.

C. $f'(-1)=f''(1)$. **D.** $f'(-1)=2f''(1)$.

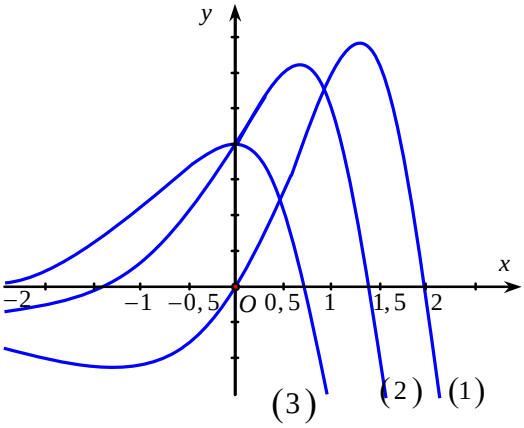
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy: Đồ thị b cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của a. Suy ra b là đạo hàm của a.

Do đó $f'(-1)>f''(1)$.

Câu 39. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1)>h(-1)>f(-1)$. **B.** $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

C. $h(-1)>f(-1)>g(-1)$. **D.** $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị ta thấy:

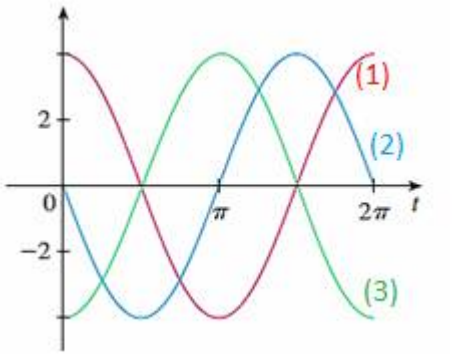
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Suy ra đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $h(-1)>g(-1)>f(-1)$

Câu 40. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(\pi)<v(\pi)<a(\pi)$ **B.** $a(\pi)<v(\pi)<s(\pi)$

C. $s(\pi)<a(\pi)<v(\pi)$ **D.** $v(\pi)<a(\pi)<s(\pi)$

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy:

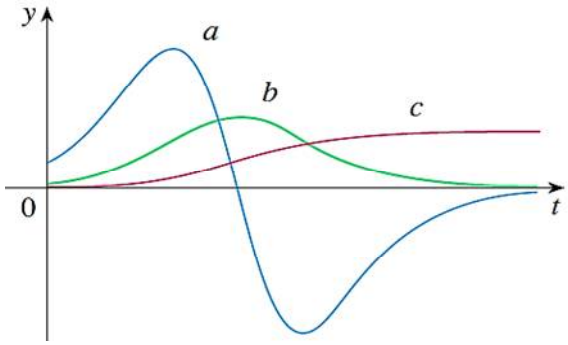
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $s(\pi)<v(\pi)<a(\pi)$

Câu 41. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số trên theo thứ tự là các đường cong nào?

A. b,c,a **B.** c,a,b **C.** a,c,b **D.** c,a,b

Lời giải

Chọn D.

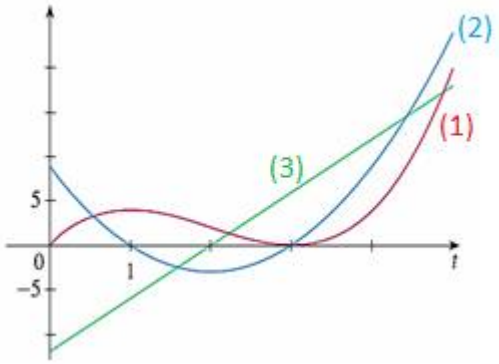
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị a, đồ thị của b đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị a, đồ thị của b đi xuống, suy ra a là đạo hàm b . Loại B, C

+ đồ thị c nằm trên trục Ox , mà của đồ thị a không luôn đồng biến. Loại A

Vậy đồ thị của hàm quãng đường, hàm vật tốc và hàm gia tốc theo thứ tự, lần lượt c,a,b

Câu 42. Một vật chuyển động có đồ thị của hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thời gian t được mô tả ở hình dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $s(4)<v(4)<a(4)$ **B.** $a(4)<v(4)<s(4)$

C. $s(4)<a(4)<v(4)$ **D.** $v(4)<a(4)<s(4)$

Lời giải

Chọn A.

Từ đồ thị ta thấy:

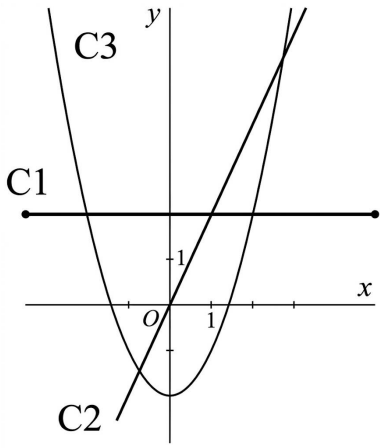
+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó hàm quãng đường $s(t)$, hàm vật tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$ theo thứ tự, lần lượt $(1),(2),(3)$

Vậy $s(4)<v(4)<a(4)$

Câu 43. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$.

B. $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$.

D. $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn A.

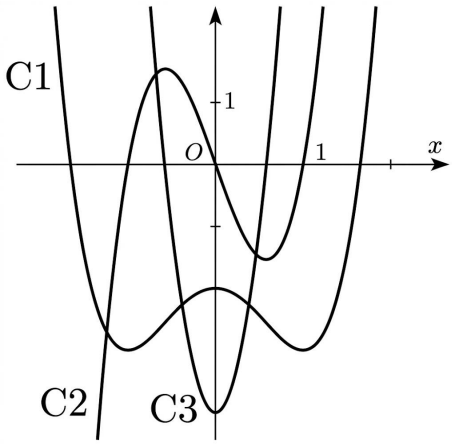
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_2) đi lên. Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_2).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_2);(C_1)$

Câu 44. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$.

B. $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$.

D. $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Lời giải

Chọn D.

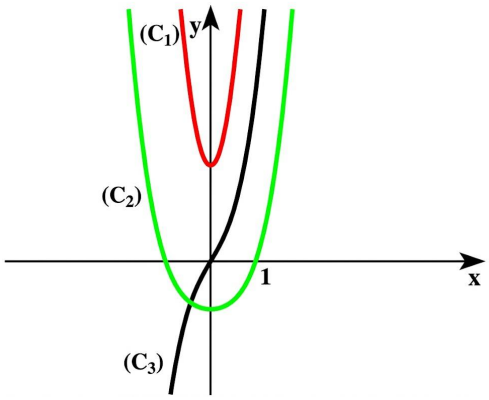
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_1).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_1);(C_2);(C_3)$

Câu 45. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Lời giải

Chọn B.

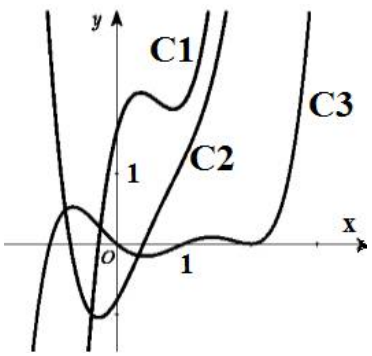
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1) hoặc (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_1) hoặc (C_2).

+ Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi xuống và ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_1) đi lên. Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_1).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_1);(C_3)$.

Câu 46. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

Lời giải

Chọn D.

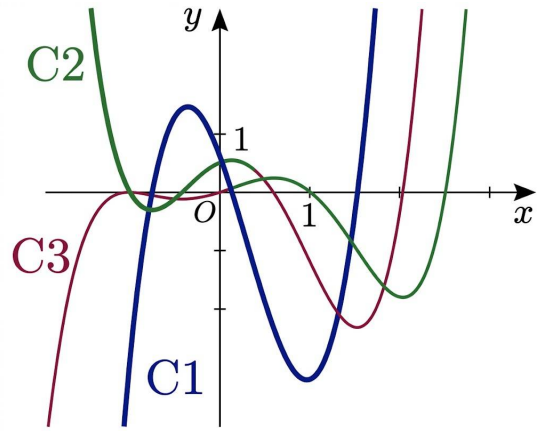
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_1).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_1);(C_3);(C_2)$

Câu 47. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_2);(C_1);(C_3)$. **B.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **C.** $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_2);(C_3)$.

Lời giải

Chọn B.

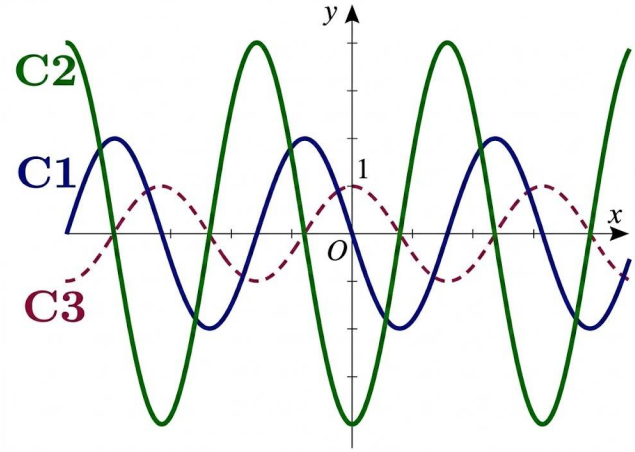
Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_2);(C_1)$

Câu 48. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_3);(C_1);(C_2)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_1). Suy ra (C_2) là đạo hàm của (C_1).

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_1);(C_2)$

Cách 2:

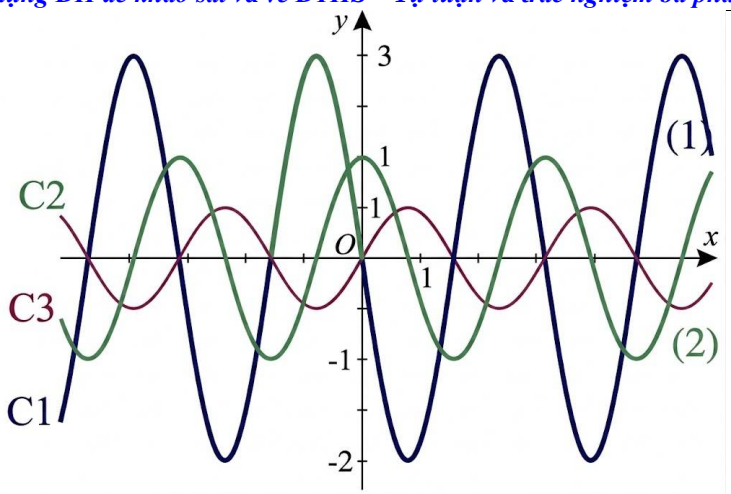
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_2), đồ thị của (C_1) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_2), đồ thị của (C_1) đi xuống, suy ra (C_2) là đạo hàm (C_1) .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_3) .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_3);(C_1);(C_2)$

Câu 49. Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây.



Hỏi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A. $(C_1);(C_2);(C_3)$. **B.** $(C_1);(C_3);(C_2)$. **C.** $(C_3);(C_2);(C_1)$. **D.** $(C_2);(C_3);(C_1)$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (C_3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_2). Suy ra (C_3) là đạo hàm của (C_2).

+ Đồ thị (C_1) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (C_3). Suy ra (C_1) là đạo hàm của (C_3).

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_3);(C_1)$

Cách 2:

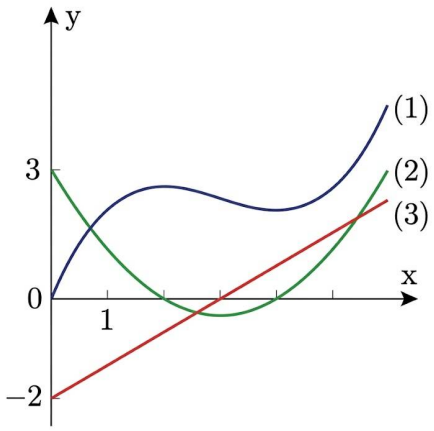
Từ đồ thị ta thấy:

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1), đồ thị của (C_3) đi xuống, suy ra (C_1) là đạo hàm (C_3) .

+ Ứng các khoảng nằm trên trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_2) đi lên. Ứng các khoảng nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_3), đồ thị của (C_2) đi xuống, suy ra (C_3) là đạo hàm (C_2) .

Vậy đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(C_2);(C_3);(C_1)$

Câu 50. Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(1) > h(1) > f(1)$.

B. $h(1) > g(1) > f(1)$.

C. $h(1) > f(1) > g(1)$.

D. $f(1) > g(1) > h(1)$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị (3) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (2). Suy ra (3) là đạo hàm của (2).

+ Đồ thị (2) cắt trục Ox tại điểm ứng hoành độ cực trị của (1). Suy ra (2) là đạo hàm của (1).

Do đó đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = f'(x)$, $y = h(x) = g'(x)$ theo thứ tự, lần lượt $(1); (2); (3)$

Vậy $f(1) > g(1) > h(1)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+4$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

c) Đồ thị (C) có điểm cực đại là $(1;-1)$ và điểm cực tiểu là $(-3;31)$.

d) Điểm $(1;15)$ là tâm đối xứng đồ thị (C).

Lời giải

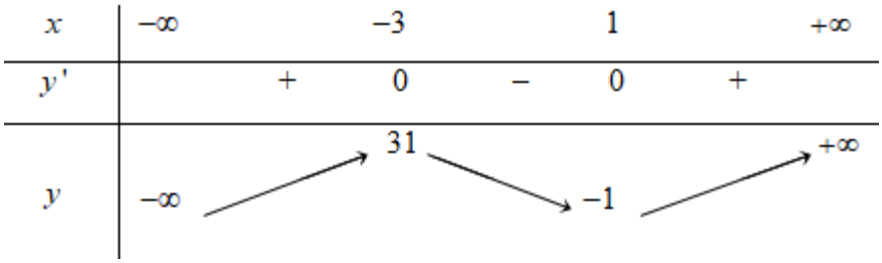
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

b) c) Ta có: $y'=3x^2+6x-9$.

$$y'=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y(1)=-1\\y(-3)=31\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có:

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-3;1)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ với $y_{CĐ}=y(-3)=31$, cực tiểu tại $x=1$ với $y_{CT}=y(1)=-1$.

d) $y''=6x+6\Rightarrow y''=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=15$

Do đó điểm $(-1;15)$ là tâm đối xứng đồ thị (C).

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+4$ có đồ thị (C).

a) $y'=-3x^2+3x$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x+y-4=0$.

d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A,B là các điểm cực trị của (C).

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

a) Xét hàm số $y=-x^3+3x^2+4$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

$y'=-3x^2+6x$.

b) $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	8	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

c) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4),B(2;8)$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-4}{8-4}\Leftrightarrow y=2x+4\Leftrightarrow 2x-y+4=0$.

d) $S_{OAB}=\frac{1}{2}.AB.d(O;AB)$.

Trong đó $AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$d(0;AB)=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy diện tích tam giác OAB là: $S_{OAB}=\frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{4}{\sqrt{5}}=4$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+4$.

a) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

c) Gọi A,B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Khi đó độ dài AB bằng $\sqrt{5}$.

d) Đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{f(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$;

$f'(x)<0\Leftrightarrow 3x^2-6x<0\Leftrightarrow 0<x<2$. Do đó hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4), B(2;0)$.

$AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

d) Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{f(x)}$:

$f(x)=x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$.

$\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{f(x)}=\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x+1)}=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{f(x)}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ có đồ thị là (C)

a) Trên đoạn $[4;8]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=4$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1;-2)$.

c) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

d) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0;-\dfrac{7}{3}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Ta có $y=\dfrac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)\Rightarrow y'=\dfrac{1}{8}\left(3x^2-6x-9\right)$

a) Hàm số $y=\dfrac{1}{8}\left(x^3-3x^2-9x-5\right)$ liên tục trên $[4;8]$

Giải $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\notin[4;8]\\x=3\notin[4;8]\end{array}\right.$.

Ta có $y(4)=-\dfrac{25}{8}$; $y(8)=\dfrac{243}{8}\Rightarrow \max\limits_{[4;8]} y=y(8)=\dfrac{243}{8}$.

b) Ta có: $y''=\frac{1}{8}(6x-6)$. Giải $y''=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}(6x-6)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-2$ nên tọa độ tâm đối xứng là $(1;-2)$.

c) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(-1;0);B(3;-4)$.

d) Ta có

$$y'=\frac{1}{8}(3x^2-6x-9)=\frac{3}{8}\left[(x-1)^2-4\right]\geq-\frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_0=1\Rightarrow y_0=-2$.

Vậy tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số (C) là tiếp tuyến tại điểm $(1;-2)$ có phương trình là $y=y'(1)(x-1)-2=-\frac{3}{2}(x-1)-2=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ nên tiếp tuyến không đi qua điểm $A\left(0;-\frac{7}{3}\right)$

Câu 55. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$ và hàm số $g(x)=f(x)+mx$ (với m là tham số).

a) Hàm số $g(x)$ đạt cực trị khi và chỉ khi $m<3$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Khi $m=-9$, giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên khoảng $(-\infty;0)$ bằng 10.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) $g'(x)=f'(x)+m=3x^2-6x+m$

Hàm số đạt cực trị khi $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $3x^2-6x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow\Delta'=9-3m>0\leftrightarrow m<3$.

b) Ta có: $f'(x)=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

c) $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+5=0$. Sử dụng máy tính thấy phương trình có 1 nghiệm suy ra đồ thị cắt trục hoành tại 1 điểm.

d) Với $m=-9$ thì $g(x)=x^3-3x^2-9x+5$

$$g'(x)=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in(-\infty;0)\\x=3\notin(-\infty;0)\end{array}\right.$$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	10	↘	

$\max\limits_{(-\infty;0)} g(x) = g(-1) = 10$.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = 1$ (với b và c là hằng số).

a) Giá trị của $b + c$ bằng -3.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 0.

d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.

Hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = 1$ nên

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b + c + 2 = 0 \\ 3 + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Khi đó $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

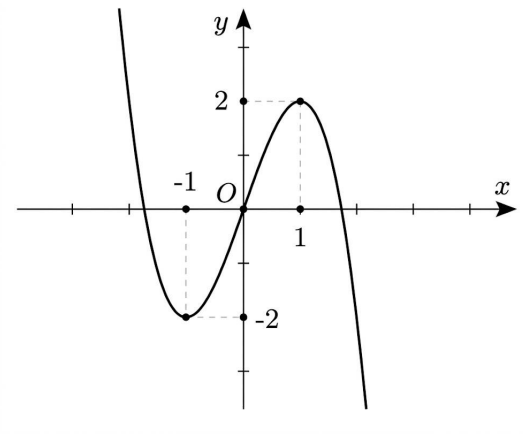
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

b) Theo bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Theo bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

d) Theo bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;1)$

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm hai cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Điểm $O(0;0)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

d) $a+b+c+d=4$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(-1;-2);(1;2)$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1);(1;+\infty)$

c) đồ thị có điểm cực trị $(-1;-2);(1;2)$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{-1+1}{2}=0=x_O\\ \dfrac{-2+2}{2}=0=y_O\end{cases}$ suy ra điểm $O(0;0)$ là trung điểm hai điểm cực trị $(-1;-2);(1;2)$.

Vậy điểm $O(0;0)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

d) $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (C) và $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

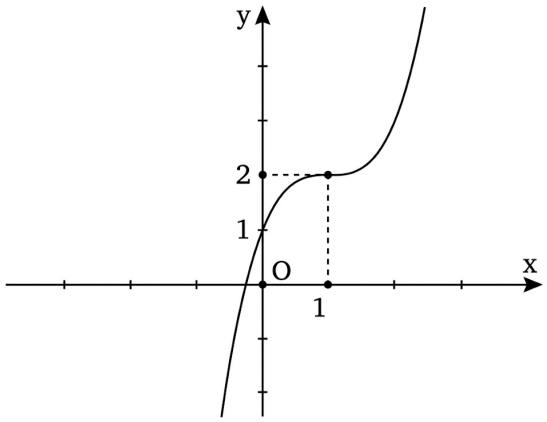
+ đồ thị qua gốc tọa độ $\Rightarrow O(0;0)\in(C)\Rightarrow d=0$

+ đồ thị có điểm cực trị $(-1;-2);(1;2)\in(C)\Rightarrow\begin{cases}-2=-a+b-c\\ 2=a+b+c\end{cases}$

+ $f'(-1)=0\Leftrightarrow 3a-2b+c=0$

Ta có hệ: $\begin{cases}-2=-a+b-c\\ 2=a+b+c\\ 3a-2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\\ c=3\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=2$

Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số đã cho có một cực trị.

c) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi đó, $M+m=3$

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số đã cho không có một cực trị.

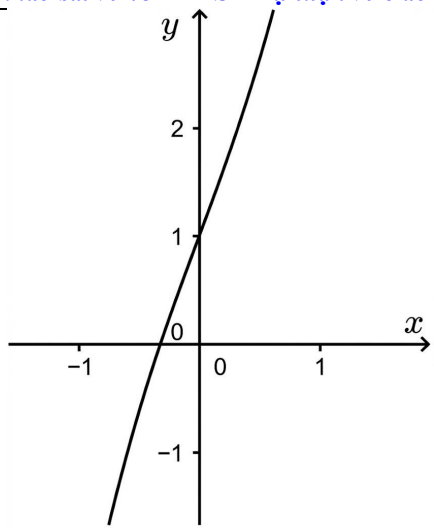
c) Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} m=\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=1 \\ M=\max\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow M+m=3$

d) Từ đồ thị ta có 2 điểm $(0;1);(1;2)$ thuộc đồ thị.

Thay $(0;1)$ vào hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ ta có: $1=-1$ vô lý

Vậy đồ thị hàm số đã cho không phải là hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho không có cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

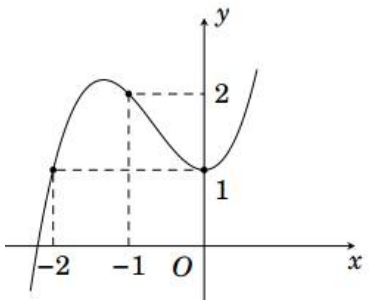
c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.

d) Từ đồ thị ta có 2 điểm $(0;1)$ thuộc đồ thị.

Thay $(0;1)$ vào hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$ ta có: $1=2$ vô lý

Vậy đồ thị hàm số đã cho không phải là hàm số $y=x^3-3x^2+3x+2$.

Câu 60. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

d) $2a+3b+c=9$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, giá trị cực tiểu là $y=1$

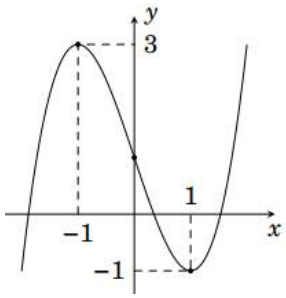
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có toạ độ $(0;1)$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_0)$ với $-2<x_0<-1$

d) Đồ thị đi qua ba điểm $(-2;1);(-1;2);(0;1)$ và đạt cực trị tại $x=1$ nên ta được hệ:

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=1\\-a+b-c+d=2\\d=1\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1;b=2;c=0;d=1\Rightarrow 2a+3b+c=8$$

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có toạ độ $(0;1)$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng

c) $a-b+c+d=-1$

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;3)$ và $(1;-1)$ suy ra toạ độ tâm đối xứng là $(0;1)$ nên đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0;1)$.

b) Do $I(0;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I,A,B với I là trung điểm của AB. Suy ra $x_A+x_B=2x_I$.

Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.

c) Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ hình vẽ ta có: $\begin{cases} f(-)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$

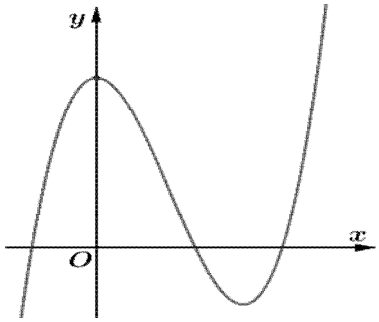
Giải hệ này ta được $a=1;b=0;c=-3;d=1$.

Vậy $a-b+c+d=-1$

d) Do $a=1;b=0;c=-3;d=1$ nên hàm số đã cho là $y=x^3-3x+1$

Vậy hàm số không đi qua điểm có toạ độ $(3;18)$

Câu 62. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên $\mathbb{R}$.



a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho là hàm số $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

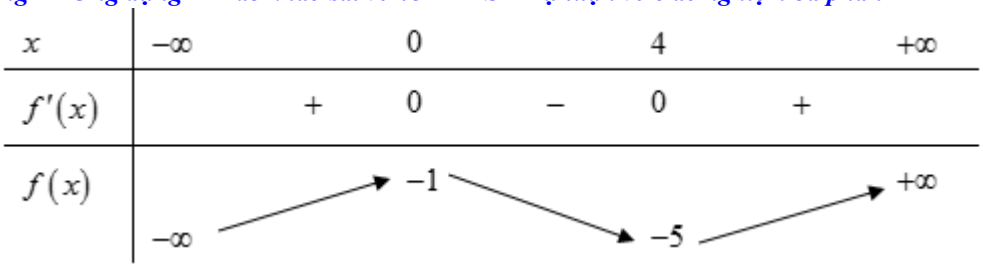
a) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên một khoảng và nghịch biến trên một khoảng.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

d) Đồ thị hàm số đã cho tập xác định trên $\mathbb{R}$, mà $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Câu 63. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -5

d) Hàm số đã cho là $8a+4b+2c+d=-4$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại là $(0;-1)$.

b) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0);(4;+\infty)$

c) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

d) Ta có: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

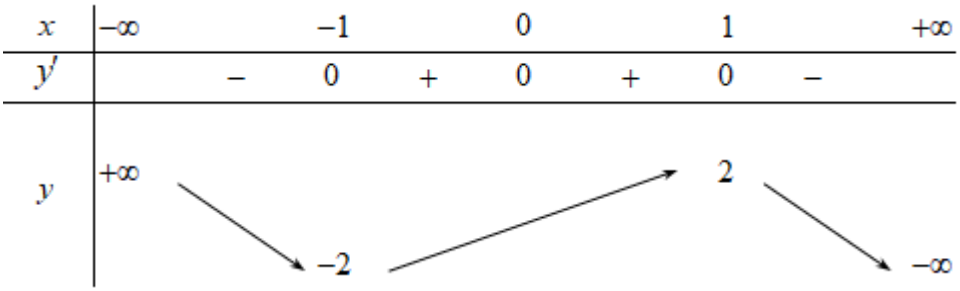
$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;-1),B(4;-5)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(4)=-5 \\ f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-1 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{8} \\ b=-\dfrac{3}{4} \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 8a+4b+2c+d=4$

Câu 64. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.



a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

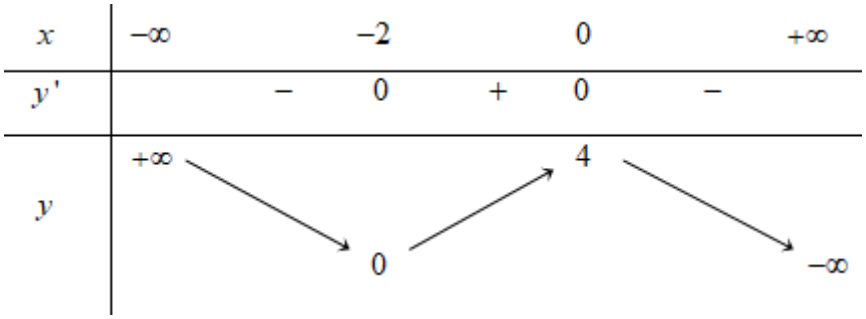
a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(-1;-2)$ và $(1;2)$

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4

b) Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt

c) Trong bốn hệ số a,b,c,d có đúng hai số âm

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4;20)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$

b) Kẻ đường thẳng $y=2$ đi qua điểm $(0;2)$ và song song với Ox thì đường thẳng này cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt.

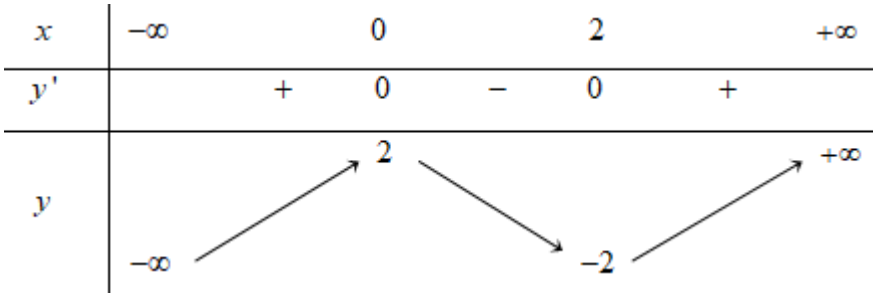
c) Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(0)=4 \\ f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-1;\ b=-3;\ c=0;d=4$

Vậy có đúng hai số âm trrong bốn số trên

d) Do $a=-1;\ b=-3;\ c=0;d=4$ nên hàm số đã cho là $y=-x^3-3x^2+4$.

Thay toạ độ điểm $(-4;20)$ vào phương trình thì thoả mãn nên đồ thị hàm số đi qua $(-4;20)$.

Câu 66. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ



a) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

b) Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng -2.

c) Hàm số $g(x)=3-2f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên a) đúng

b) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên b) sai.

c) Ta có $g'(x)=-2f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $g(x)=3-2f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$ nên c) Sai.

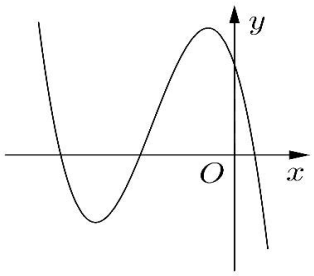
d)Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $M(0;2)$ và $N(2;-2)$ nên:

$$\begin{cases}f'(0)=0\\f'(2)=0\\f(0)=2\\f(2)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\12a+4b=0\\d=2\\8a+4b+2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\12a+4b=0\\d=2\\8a+4b=-4\end{cases}\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}.$$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(-1;-2)$

Câu 67. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

d) $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị ta thấy :

a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm, trong đó có hai điểm có hoành độ âm và một điểm có hoành độ dương

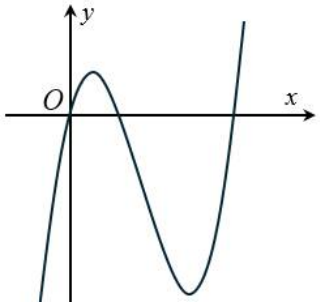
d) Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a<0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-9ac>0\\ -\dfrac{2b}{3a}<0\\ \dfrac{c}{3a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b<0\\ c<0\end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d>0$.

Vậy $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$

Câu 68. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số dương.

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị ta thấy :

a) Hàm số có hai điểm cực trị dương nên cùng dấu

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

a) Hàm số có hai điểm cực trị nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Ta có: $y=ax^3+bx^2+cx+d;\ y'=3ax^2+2bx+c$

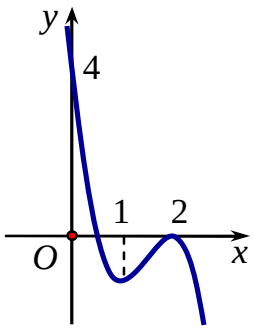
"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a>0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0=0\Rightarrow y_0=d=0$.

Gọi $x_1;x_2$ là hoành độ các cực trị $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}>0\Rightarrow\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow b<0;x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0\Rightarrow c>0$

Vậy $a>0,b<0,c>0,d=0$

Câu 69. Cho hàm số $y=-2x^3+bx^2+cx+d\ \left(b,c,d\in\mathbb{R}\right)$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $y'=-6x^2+2bx+c$

b) $d=4$

c) $b=4$

d) $c>0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

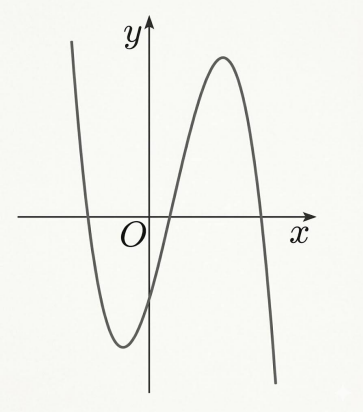
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;4)$ nên $d=4$.

Ta có $y'=-6x^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra hàm số có hai điểm cực trị là $x=1$ và $x=2$, do đó

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6+2b+c=0 \\ -24+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6+2b+c=0 \\ -24+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=9 \\ c=-12<0 \end{cases}.$$

Câu 70. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $y'=3ax^2+2bx+c$

b) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ đều dương.

d) $a<0$, $c<0$, $d<0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$

b) Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.

c) Dựa vào đồ thị ta có đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương và 1 điểm có hoành độ âm

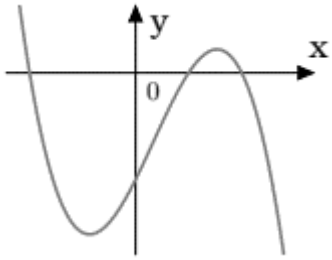
d) Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a<0$

Do $(C)\cap Oy$ tại điểm $(0;d)\Rightarrow d<0.$

$y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a.c<0\Rightarrow c>0$

Do đó $a<0$, $c>0$, $d<0$.

Câu 71. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình bên.



a) $a<0$

b) $d<0$

c) $c>0$

d) $b>0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a<0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d<0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 trái dấu kéo theo $3a.c<0\Rightarrow c>0$.

- Mặt khác $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3m^2x+2025$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi thì đồ thị (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổ thì đồ thị (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị thì đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y=ax+b$. Đặt $S=a+b$ thì $S\le 2025$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $y'=3x^2-3m^2$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

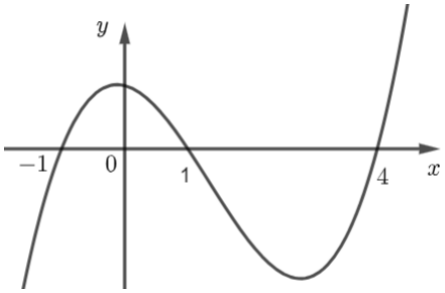
c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. (Hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

d) Ta có: $y'=3x^2-3m^2;\ y''=6x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=2025; y=\frac{1}{3}x.y'+\left(-2m^2+2025\right)$

Tại các điểm cực trị, $y'=0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình $y=-2m^2x+2025$.

$\Rightarrow a=-2m^2; b=2025\Rightarrow S=a+b=-2m^2+2025<2025$

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

b) Trên đoạn $[-1;4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ là $f(1)$.

c) $f(1)>f(2)>f(4)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

a) Hàm số đồng biến trên $(-1;1),(4;+\infty)$.

b) Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;4]$ là $f(1)$.

c) Vì hàm số nghịch biến trên $(1;4)$ nên $f(1)>f(2)>f(4)$

d) Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

a) Phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất một nghiệm $x=2$

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

c) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.

d) Hàm số $y=f(x^2-6x+1)$ có ba điểm cực đại.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-3x+2)$

Khi $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2-3x+2)=0\Leftrightarrow(x-1)^3(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Vậy $f'(x)=0$ có 2 nghiệm.

b) Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.

c) Vì $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

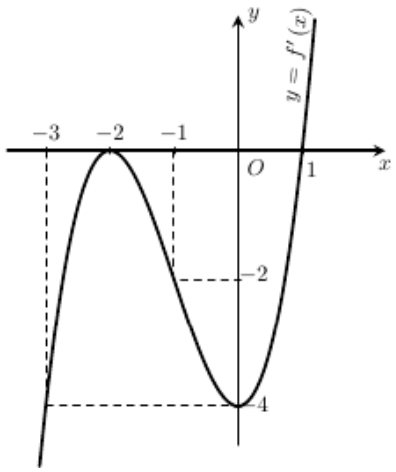
d) Ta có $y=f(x^2-6x+1)\Rightarrow y'=(2x-6)f'(x^2-6x+1)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-6=0\\f'(x^2-6x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x^2-6x+1=1\\x^2-6x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\\x=6\\x=3+\sqrt{10}\\x=3-\sqrt{10}\end{array}\right.$$

x	$-\infty$	$3-\sqrt{10}$		0		3		6		$3+\sqrt{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f\left(x^2-6x+1\right)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị.

c) $f'(2)=4$.

d) $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x+2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

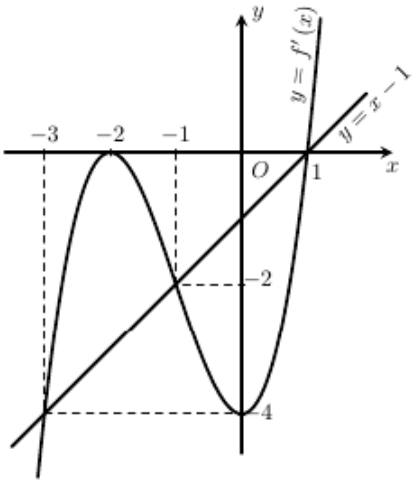
a) Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) Hàm số có một điểm cực trị.

c) Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra: $f'(x)=(x+2)^2(x-1)$.

Do đó $f'(2)=(2+2)^2(2-1)=16$.

d) Ta có $g'(x)=f'(x)-x+1=f'(x)-(x-1)$.



Ta vẽ hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

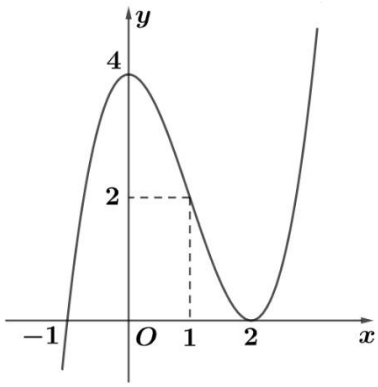
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-3)$	↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta thấy $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)\subset(-3;-1)$ nên hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 76. Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



a) Hàm số $g(x)=f(x)-2027x+2026$ có đúng 1 điểm cực trị.

b) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Phương trình $f'(\cos x)=3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Ta có $g'(x)=f'(x)-2027$ nên $g'(x)=0$ cho ta $f'(x)=2027$. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(x)=2027$ có một nghiệm đơn $x=x_0$ nên $g'(x)$ đổi dấu qua nghiệm này. Vậy hàm số $g(x)=f(x)-2027x+2026$ có đúng một điểm cực trị.

b) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$.

c) Dựa vào bảng biến thiên ta cũng thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$

d) Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ thì ta có phương trình $f'(\cos x)=3$ có các nghiệm thoả mãn $\cos x=a\in(-1;0)$; $\cos x=b\in(0;1)$ và $\cos x=c\in(1;2)$.

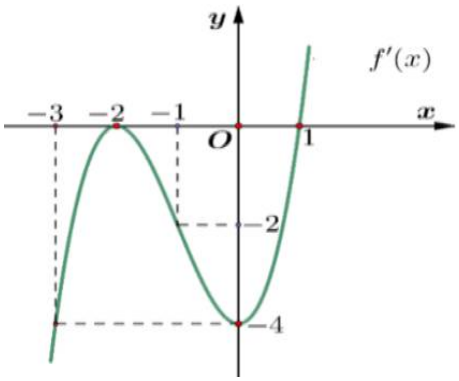
+ $\cos x=a\in(-1;0)$ cho 2 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x=b\in(0;1)$ cho 3 nghiệm x phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ $\cos x = c \in (2;+\infty)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f'(\cos x) = 3$ có đúng 5 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

c) $\underset{[-2;1]}{Max}\, f(x) = f(-2)$.

d) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x+2}{f'(x)}$ có tất cả 2 đường tiệm cận.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta suy ra $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$; $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

b) Cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$. $f'(x)$ chỉ đổi dấu từ $-$ *qua* $+$ khi qua $x = 1$. Suy ra hàm số $f(x)$ chỉ có một điểm cực trị.

c) Ta cũng suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-2;1]$ nên $\underset{[-2;1]}{Max}\, f(x) = f(-2)$.

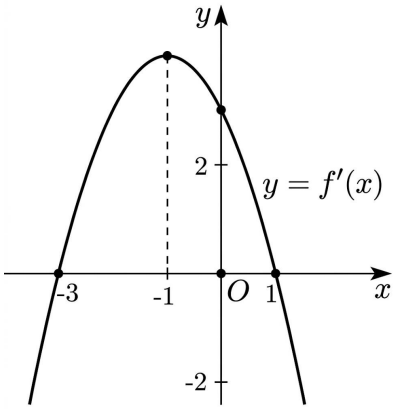
d) $f'(x)$ là hàm số bậc ba nên từ đồ thị ta suy ra $f'(x) = a(x+2)^2(x-1)$.

$f'(0) = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f'(x) = (x+2)^2(x-1)$.

$g(x) = \dfrac{x+2}{(x+2)^2(x-1)} = \dfrac{1}{(x+2)(x-1)}, \forall x \ne 2.$

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận đứng là $x = -2; x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



a) Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

c) Hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $x=-3$.

d) Nếu $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g(2025)<g(2026)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f'(x)$ ta thấy: đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm $x=-3;x=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x=-3;x=1$.

b) Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f'(x)$ ta thấy: $f'(x)>0$ với mọi $x\in(-1;1)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.

c) Từ đồ thị hàm số hàm số $y=f'(x)$ ta thấy: $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(-3;1)$ nên hàm số có điểm cực tiểu tại $x=-3$.

d) Ta có: $g(x)=f(1-x^2)$ thì $g'(x)=-2x.f'(1-x^2)$

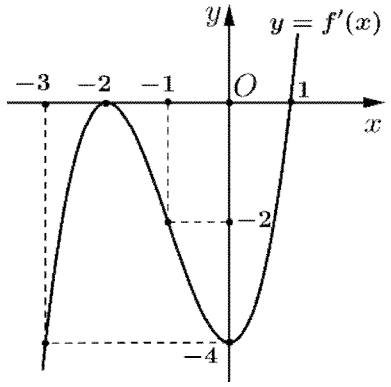
Với mọi $x\in(2025;2026)$ thì $1-x^2<-3$ nên từ đồ thị trên suy ra $f'(1-x^2)<0$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ trên $(2025;2026)$

x	$(2025;2026)$
$f'(1-x^2)<0$	-
$g'(x)=-2x.f'(1-x^2)$	+

Vậy hàm số $g(x)=f(1-x^2)$ đồng biến trên $(2025;2026)$ nên $g(2025)<g(2026)$.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

d) Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ dễ thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có duy nhất một điểm cực trị tại $x=1$.

c) Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến nên giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=1$.

d) Xét $g'(x)=2xf'(x^2-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $f'(x)$:

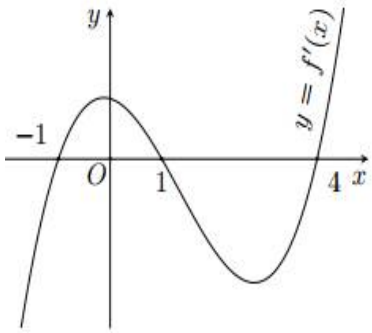
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$ hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) $f(-1) > f(-3)$

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Trên đoạn $[2026;2028]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2026$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu $f(-1) < f(-3)$.

b) Dựa bảng biến thiên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $x=4$.

c) Vì $y'=-f'(2-x) \Leftrightarrow f'(2-x)=0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=-1 \\ 2-x=1 \\ 2-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(2-x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Do đó hàm số $y=f(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

d) Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(2-x)$ ta thấy:

Trên đoạn $[2026;2028]$ hàm số $g(x)=f(2-x)$ đồng biến nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=2028$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 81. Ngày khai giảng năm học $2026-2027$. Học sinh khối 12 trường THPT Lý Tự Trọng thả chùm bóng bay gắn thông điệp "Học sinh khối 12 sẽ đậu đại học". Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t)=-t^3+3t^2,(0\le t\le 3)$. Hỏi chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là bao nhiêu mét?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4000

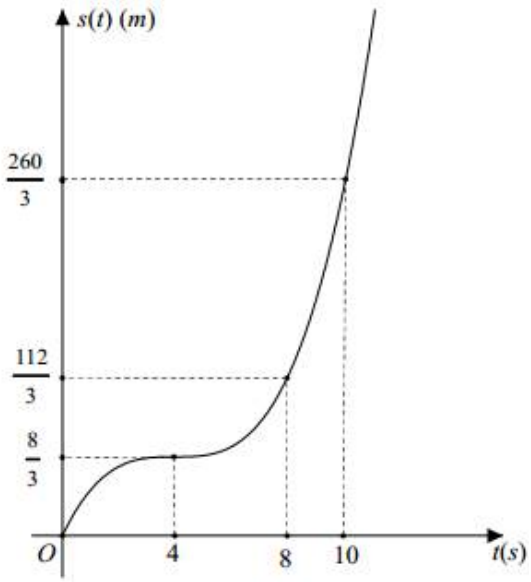
Ta có $h'(t)=-3t^2+6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $h(t)=-t^3+3t^2,(0\le t\le 3)$

t	0		2		3
$h'(t)$		+	0	–	
$h(t)$	0	↗	4	↘	0

Vậy chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $4(km)$ hay $4000m$

Câu 82. Một vật chuyển động quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t\ge 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Giả sử $s(t)=at^3+bt^2+ct+d\ (a\neq 0)$.

Vì đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm $(0;0)$, $\left(4;\frac{8}{3}\right)$, $\left(8;\frac{112}{3}\right)$ và $\left(10;\frac{260}{3}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases}64a+16b+4c=\frac{8}{3}\\ 512a+64b+8c=\frac{112}{3}\\ 1000a+100b+10c=\frac{260}{3}\\ d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\ b=-1\\ c=2\\ d=0\end{cases}.$$

Do đó $s(t)=\frac{1}{6}t^3-t^2+2t$.

Ta có $v(t)=s'(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+2\Rightarrow v'(t)=t-2=0\Leftrightarrow t=2$.

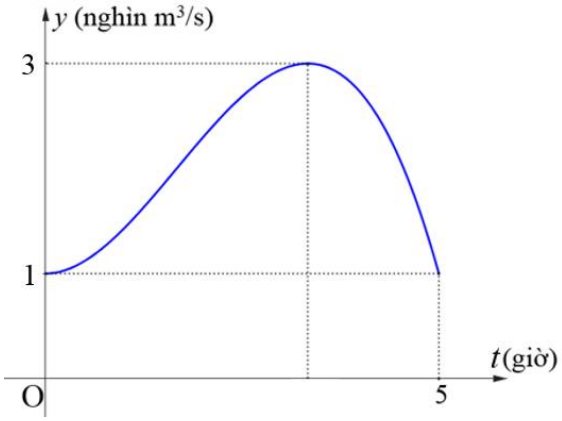
Bảng biến thiên:

t	0		2		10
v'		$-$	0	$+$	
v	2	↘	0	↗	32

Dựa vào bảng biến thiên, từ giây thứ 2 trở đi vận tốc của vật tăng dần theo thời gian. Do đó trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài trong 8 giây.

Câu 83. Nhằm điều tiết mực nước của hồ chứa trong những ngày mưa lớn, một hồ thủy điện thông báo mở của xả lũ trong 5 giờ, bắt đầu từ thời điểm 0 giờ . Lưu lượng nước xả lũ là lượng nước hồ thủy điện xả về hạ lưu trên mỗi đơn vị thời gian, được ước tính bởi hàm số $f(t)=at^3+bt^2+c$ (đơn vị nghìn m^3/s), trong đó t được tính bằng đơn vị giờ, là thời gian từ 0 giờ đến 5 giờ. Tại thời điểm 0 giờ, lưu lượng nước xả về hạ lưu là 1 nghìn m^3/s và bắt đầu tăng cho đến khi đạt cực đại bằng 3 nghìn m^3/s thì lưu lượng nước giảm dần, đến thời điểm 5 giờ thì trở về lại 1 nghìn m^3/s. Hàm số $y=f(t)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính giá trị của biểu thức $T=500a+100b+c$.





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

$f(t)=at^3+bt^2+c$

Vì đồ thị đi qua các điểm $(1;0),(1;5)$ nên ta có hệ phương trình:

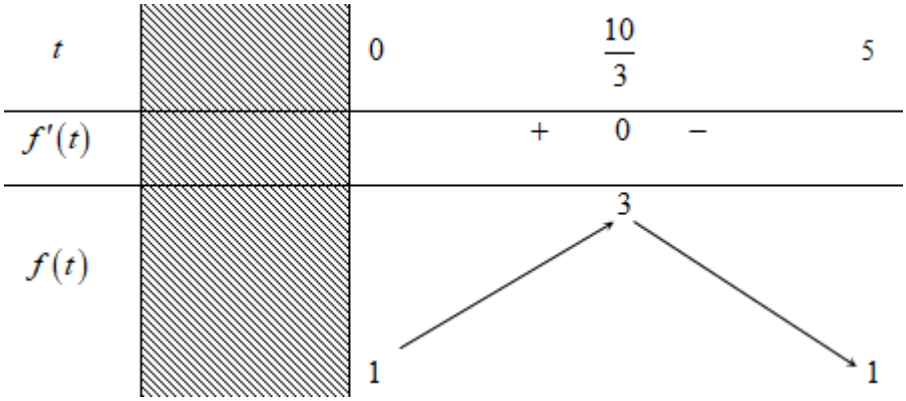
$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(5)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=c \\ 125a+25b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-5a \end{cases}.$$

$\Rightarrow f(t)=at^3-5at^2+1$

$\Rightarrow f'(t)=3at^2-10at$

Ta có: $f'(t)=0 \Leftrightarrow 3at^2-10at=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ t=0 \\ t=\dfrac{10}{3} \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có $a<0$ nên có bảng biến thiên:



Do đó:

$f\left(\dfrac{10}{3}\right)=3$

$\Leftrightarrow a\left(\dfrac{10}{3}\right)^3-5a\left(\dfrac{10}{3}\right)^2+1=3$

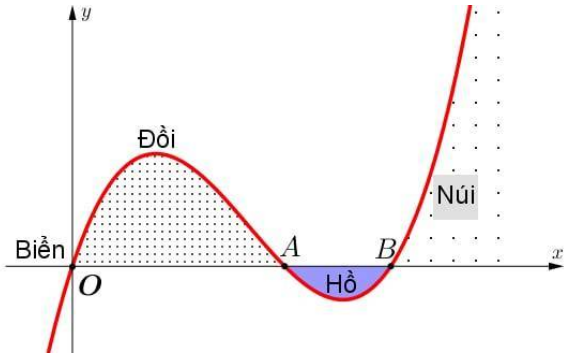
$\Leftrightarrow a=-\dfrac{27}{250}$

$\Rightarrow b=-5.\left(-\dfrac{27}{250}\right)=\dfrac{27}{50}$

Vậy $T=500a+100b+c=500.\left(-\dfrac{27}{250}\right)+100.\dfrac{27}{50}+1=1$

Câu 84. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA=\dfrac{15}{8}km$, độ

rộng của hồ $AB=\dfrac{9}{8}km$ và chiều cao của ngọn đồi là $243m$. Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất bằng bao nhiêu mét ?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 100

Ta có $OA=\dfrac{15}{8}\text{km}$, $OB=OA+AB=\dfrac{15}{8}+\dfrac{9}{8}=3(\text{km})$ và chiều cao của ngọn đồi là $243\text{m}=0,243\text{km}$.

Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm: $O(0;0)$, $A\left(\dfrac{15}{8};0\right)$, $B(3;0)$ nên hàm số bậc ba có dạng $y=f(x)=a.x\left(x-\dfrac{15}{8}\right)(x-3)=a\left(x^3-\dfrac{39}{8}x^2+\dfrac{45}{8}x\right)$ với $a>0$.

Khi đó $y'=a\left(3x^2-\dfrac{39}{4}x+\dfrac{45}{8}\right)$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-\dfrac{39}{4}x+\dfrac{45}{8}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}\\ x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Chiều cao của ngọn đồi đạt tại điểm cực đại của đồ thị hàm số, do đó

$$y\left(\frac{3}{4}\right)=0,243\Leftrightarrow a.\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{15}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-3\right)=0,243\Leftrightarrow a=\frac{16}{125}.$$

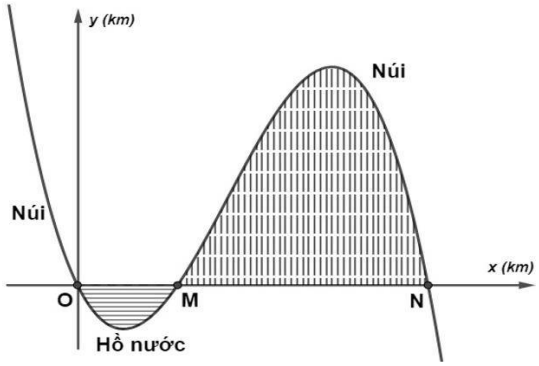
Suy ra $y\left(\dfrac{5}{2}\right)=-0,1.$

Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất đạt tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất là $0,1km=100m$.

Câu 85. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM=2km$; độ rộng của núi $MN=3,5km$. Độ sâu của hồ nước là $450m$. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1191

Hàm số bậc ba $y=f(x)$ có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$

Ta có: $ON=OM+MN=2+3,5=5,5(km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0), M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt là $x=0; x=2; x=5,5$.

$\Rightarrow f(x)=k.x(x-2)(x-5,5)=k\left(x^3-7,5x^2+11x\right)$ với đồ thị hàm số $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty$ nên $k<0$

Ta có: $f'(x)=k\left(3x^2-15x+11\right)$

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow k\left(3x^2-15x+11\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-15x+11=0\Leftrightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{93}}{6}$.

Độ sâu của hồ nước là $450m=0,45km$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT}=-0,45$.

Suy ra, $f\left(\dfrac{15-\sqrt{93}}{6}\right)=-0,45\Leftrightarrow k.\dfrac{-135+31\sqrt{93}}{36}=-0,45\Leftrightarrow k=\dfrac{-16,2}{-135+31\sqrt{93}}$.

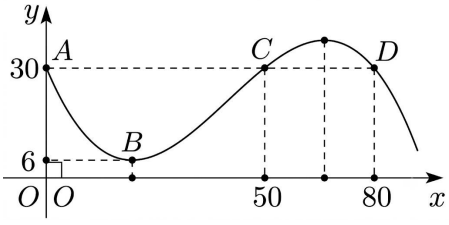
Chiều cao của ngọn núi tương ứng với $y_{CĐ}=f\left(\dfrac{15+\sqrt{93}}{6}\right)\approx 1,19106(km)\approx 1191(m)$.

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

Câu 86. Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục toạ độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(0\le x<90)$ và đi qua các điểm A,C,D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*



Hình 1



Hình 2

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 39,9

Dựa vào hình 2 ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a<0)$ và đường thẳng $y=30$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x=0;x=50;x=80.$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d=30\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d-30=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=0;x=50;x=80.$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+d-30=ax(x-50)(x-80)=a\left(x^3-130x^2+4000x\right)$

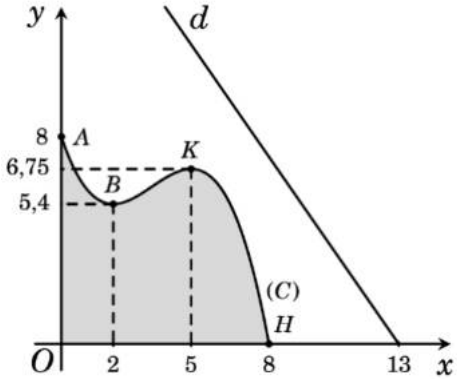
Suy ra $f(x)=a\left(x^3-130x^2+4000x\right)+30\ \Rightarrow f'(x)=a\left(3x^2-260x+4000\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20\ (TM)\\ x=\dfrac{200}{3}(TM)\end{array}\right.\cdot$$

Theo bài ra độ cao nhỏ nhất bằng 6 hay $f(20)=6\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{1500}$

Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là $f\left(\dfrac{200}{3}\right)=\dfrac{3230}{81}\approx 39,9m$

Câu 87. Một khu du lịch sinh thái được mô hình hoá trong mặt phẳng Oxy như hình vẽ bên dưới (phần tô đậm), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ (đơn vị trên các trục là mét) và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8),B(2;5,4),K(5;6,75)$ và $H(8;0)$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d:y=-\dfrac{13}{9}x+\dfrac{169}{9}$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ một điểm thuộc đường giới hạn vườn hoa đến con đường (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,16

Gọi M là điểm thuộc (C). Khi đó khoảng cách ngắn nhất từ một điểm thuộc đường giới hạn vườn hoa đến con đường chính là khoảng cách từ M đến d .

Đồ thị (C) của một hàm số bậc ba có dạng: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

Vì đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8), B(2;5,4), K(5;6,75)$ và $H(8;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d=8 \\ 8a+4b+2c+d=5,4 \\ 125a+25b+5c+d=6,75 \\ 512a+64b+8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{10} \\ b=\dfrac{21}{20} \\ c=-3 \\ d=8 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x)=-\dfrac{1}{10}x^3+\dfrac{21}{20}x^2-3x+8$.

Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất khi và chỉ khi tiếp tuyến của (C) tại M song song với d $((x_M>5)$.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{3}{10}x^2+\dfrac{21}{10}x-3$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k=-\dfrac{13}{9}$.

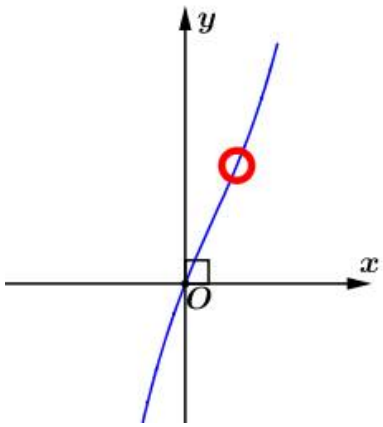
Suy ra: $-\dfrac{3}{10}x^2+\dfrac{21}{10}x-3=-\dfrac{13}{9}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6,16 \\ x=0,84<5 \end{array}\right.$.

Do $x_M>5$ nên $x_M=6,16$ thỏa mãn.

Vây khoảng cách ngắn nhất từ một điểm thuộc đường giới hạn vườn hoa đến con đường là $6,16m$

Câu 88. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y=\dfrac{x^3}{100}-\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2,44\,m$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu độ? Biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{100}-\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 67

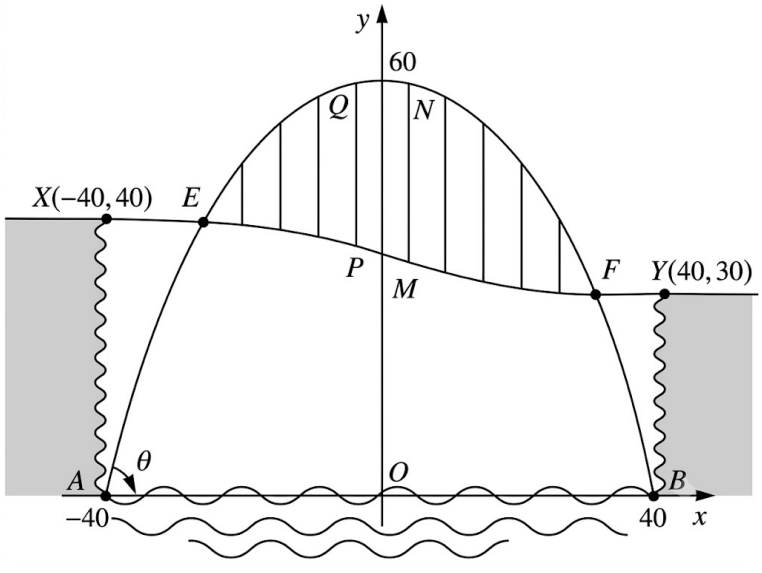
Ta có bóng chạm xà ngang nên ta có tung độ $y = 2,44$

Khi đó $2,44 = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100} \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 253x - 244 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k_{tt} = f'(1) = \frac{3}{100} - \frac{1}{5} + \frac{253}{100} = \frac{59}{25}$

Gọi α là góc của tiếp tuyến với trục Ox, ta có $\tan\alpha = \frac{59}{25} \Rightarrow \alpha \approx 67^0$

Câu 89. Một con sông chảy qua hẻm núi có chiều ngang 80m. Một bên hẻm núi cao 40 m và bên còn lại cao 30 m. Một cây cầu được xây dựng bắc qua sông trên hai hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY. Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $49,5$

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y=60-\frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D=60-\frac{3}{80}x^2-\left(\frac{x^3}{25600}-\frac{3x}{16}+35\right) \text{ với } x\in(-23,71;27,99)$$

Xét $D'=-\frac{3}{40}x-\frac{3x^2}{25600}+\frac{3}{16}=0\Leftrightarrow x=2,49$

Bảng biến thiên:

x	$-23,71$		$2,49$		$27,99$
D'(x)		+	0	−	
D(x)	0	↗	$25,23$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi

$$x=2,49\Rightarrow MN=D_{MN}=60-\frac{3}{80}.2,49^2-\left(\frac{2,49^3}{25600}-\frac{3.2,49}{16}+35\right)\approx 25,23$$

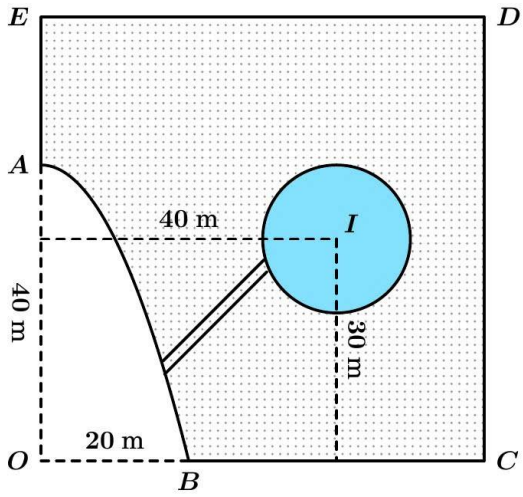
Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy\Rightarrow x_{PQ}\approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ=D_{PQ}=60-\frac{3}{80}.2,49^2-\left(\frac{-2,49^3}{25600}-\frac{3.-2,49}{16}+35\right)\approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN+PQ=49,5$.

Câu 90. Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (*làm tròn đến chữ số hàng phần chục*), biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17,7

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc như sau: Gốc O, chiều dương trục hoành là tia OC, chiều dương trục tung là tia OE, đơn vị hai trục là đơn vị độ dài (1m).

Khi đó ta có phương trình Parabol là: $y=-\frac{1}{10}x^2+40$ và phương trình đường tròn là: $(x-40)^2+(y-30)^2=100$

Đường tròn có tâm $I(40;30)$ và bán kính $R=10$

Lấy điểm $M\left(t;-\frac{1}{10}t^2+40\right)$ (với $0\le t\le 20$) nằm trên parabol thì khoảng cách ngắn nhất từ M đến đường tròn là $IM-R=\sqrt{\frac{1}{100}t^4-t^2-80t+1700}-10$

Tìm GTNN của hàm số $f(t)=\frac{1}{100}t^4-t^2-80t+1700$ trên đoạn $[0;20]$ ta được $\min\limits_{[0;20]} f(t)\approx 768,0877$

Do đó độ dài ngắn nhất $l\approx\sqrt{768,0877}-10\approx 17,7$.

Câu 91. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2-x$. Tính giá trị $T=27x_0+27y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$y=-x^3+x^2-x$

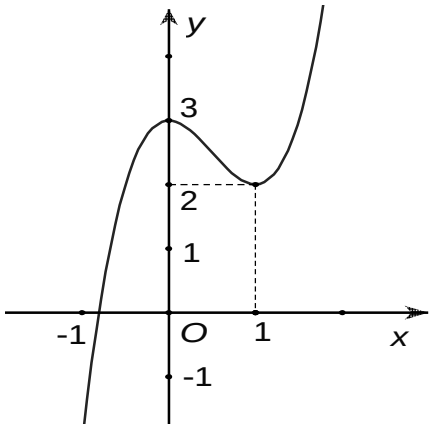
$y'=-3x^2+2x-1$

$y''=-6x+2$

$y''=0\Leftrightarrow -6x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=-\frac{7}{27}\Rightarrow I\left(\frac{1}{3};-\frac{7}{27}\right)$

$\Rightarrow T=27x_0+27y_0=27.\frac{1}{3}+27.\left(-\frac{7}{27}\right)=2$

Câu 92. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị x_0+3y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

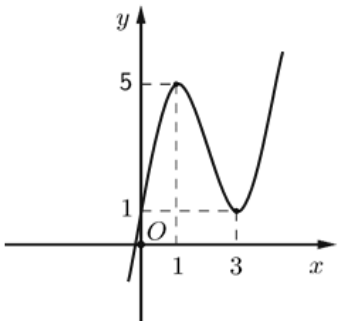
Đáp án: 2

Từ đồ thị ta có điểm cực đại $\left(0;3\right)$ và cực tiểu $\left(1;2\right)$

Tọa độ điểm đối xứng I là trung điểm điểm cực đại và cực tiểu, do đó $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow x_0+3y_0=2$

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ ở bên dưới.



Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị $2x_0+y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 7

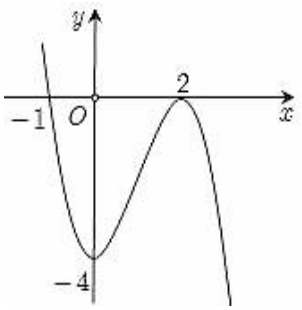
Đồ thị $\left(C\right)$ có hai điểm cực trị là $B(1;5)$ và $C(3;1)$ nên tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$ là trung điểm của BC

Gọi $I(x_I;y_I)$ là tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3)$$

$\Rightarrow 2x_0 + y_0 = 7$

Câu 94. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi $I(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số trên. Tính giá trị $2x_0 - y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

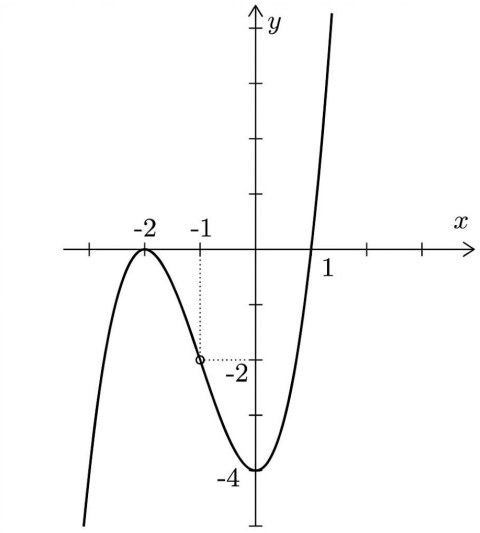
Đáp án: 4

Từ đồ thị ta có điểm cực đại $(2;0)$ và cực tiểu $(0;-4)$

Tọa độ điểm đối xứng I là trung điểm điểm cực đại và cực tiểu, do đó $I(1;-2)$

$\Rightarrow 2x_0 - y_0 = 4$

Câu 95. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) có dạng: $y = ax + b$, với $a,b \in \mathbb{R}$. Khi đó, tính giá trị $a - 2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

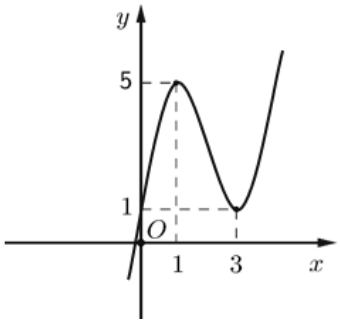
Đáp án: 10

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị là $(-2;0)$ và $(0;-4)$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng: $y=ax+b$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}0=-2a+b\\-4=0.a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}\Rightarrow a-2b=10$

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C) như hình vẽ ở bên dưới. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.



Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

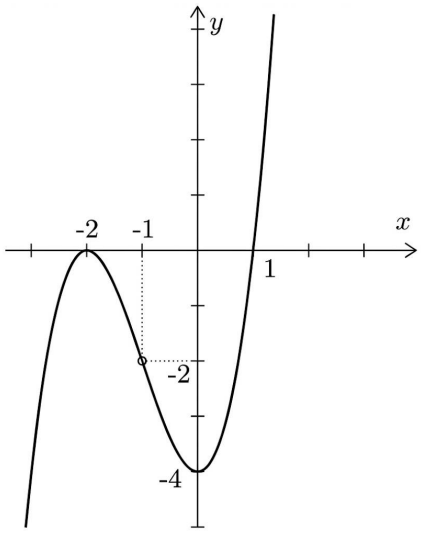
Đáp án: 5

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có: $\begin{cases}f(0)=1\\f(1)=5\\f'(1)=0\\f'(3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=1\\a+b+c+d=5\\3a+2b+c=0\\27a+6b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=9\\d=1\end{cases}\Rightarrow T=a+b+c+d=5.$

Câu 97. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in R)$ có đồ thị (C) trong hình dưới đây.



Số nhỏ nhất trong các số a,b,c,d bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

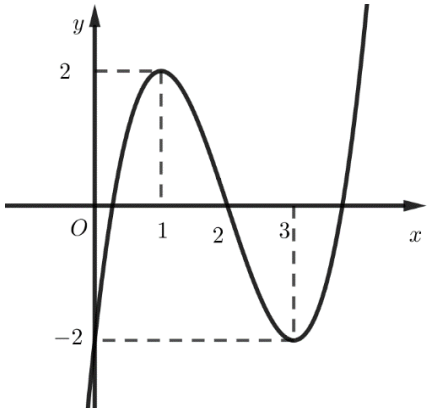
Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(-2;0)$ và $C(0;-4)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Từ đồ thị ta có: $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y(0)=-4 \\ y'(-2)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -8a+4b-2c+d=0 \\ d=-4 \\ 12a-4b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-4 \\ a+b=4 \\ -8a+4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=-4 \\ a=1 \\ b=3 \end{cases}$

Vậy số nhỏ nhất trong các số a, b, c, d là -4

Câu 98. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d \ \ (a,b,c,d\in R)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Số lớn nhất trong các số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

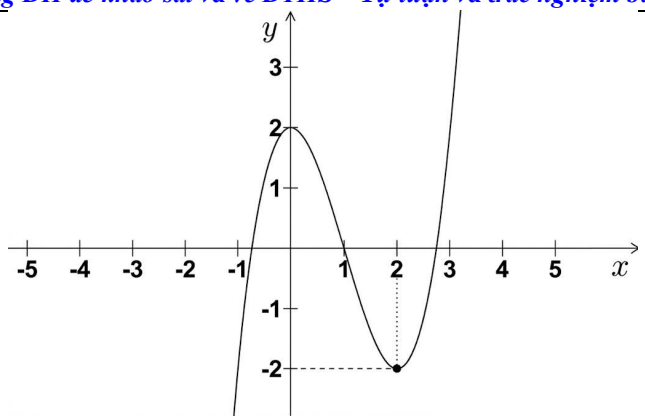
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(3;-2)$ nên:

$$\begin{cases} a.1^3+b.1^2+c.1+d=2 \\ a.3^3+b.3^2+c.3+d=-2 \\ 3a.1^2+2b.1+c=0 \\ 3a.3^2+2b.3+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 27a+9b+3c+d=-2 \\ 3a+2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=9 \\ d=-2 \end{cases}$$

Vậy $c=9$ là số lớn nhất.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S=a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y=2$ nên $d=2$.

$y'=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x=0$ và $x=2$ nên

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-3a \end{cases} \quad (1)$$

Từ đồ thị ta nhận thấy $y(2)=-2 \Leftrightarrow 8a+4b+d=-2 \Leftrightarrow 8a+4b=-4 \Leftrightarrow 2a+b=-1 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a=1, b=-3$.

Vậy $S=-2$.

Câu 100. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm $P(a;b); Q(c;d)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ sao cho chúng đối xứng nhau qua điểm $M(-1;3)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $A(x_0;y_0)$, B là điểm đối xứng với A qua điểm $M(-1;3) \Rightarrow B(-2-x_0;6-y_0)$

$$A,B \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0^3+3x_0+2 \\ 6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2$$
$$\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0+6=0$$
$$\Leftrightarrow x_0=-1 \Rightarrow y_0=0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $(-1;0)$ và $(-1;6)$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=4$

Câu 101. Cho hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị hàm số (C) lấy 2 điểm

$M\left(a;\frac{b}{c}\right);N\left(d;\frac{e}{f}\right)$ ($\frac{b}{c},\frac{e}{f}$ là các phân số tối giản, $a,d\in\mathbb{Z}$ và $a>d$) sao cho chúng đối xứng nhau qua trục tung Oy. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 38

Hai điểm $M(x_1;y_1),\ N(x_2;y_2)\in(C)$ đối xứng nhau qua $Oy\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ y_1=y_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq 0\\ -\frac{x_1^3}{3}+x_1^2+3x_1-\frac{11}{3}=-\frac{x_2^3}{3}+x_2^3+3x_2-\frac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=3\end{cases}$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3;\frac{16}{3}\right),\ N\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

$\Rightarrow T=a+b+c+d+e+f=38$

Câu 102. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+x+2$ tại điểm $M(-2;8)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -11

Ta có $f'(x)=-3x^2+1$

$\Rightarrow f'(-2)=-11$

Câu 103. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến với (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Xét tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ x_0 bất kì trên (C).

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến đó là $y'(x_0)=-x_0^2-4x_0-3=1-(x_0+2)^2\leq 1\ \forall x.$

Câu 104. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là đường thẳng có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $a+b.$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Gọi $M(x_0;x_0^3-3x_0^2+2)$ là tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C)

$y'=3x_0^2-6x_0$

Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $y=k(x-x_0)+y_0$

Mà $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=3(x_0^2-2x_0+1)-3$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2-3\geq -3$

Hệ số góc nhỏ nhất khi $x_0=1\Rightarrow y_0=y(1)=0;\ k=-3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1;0)$ có hệ số góc nhỏ nhất là : $y=-3x+3$

$\Rightarrow a+b=0$

Câu 105. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) song song đường thẳng $y=9x+10$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=3x^2-6x$.

$$k=9\Rightarrow 3x_o^2-6x_o-9=0\Leftrightarrow x_o^2-2x_o-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=3\\ x_o=-1\end{array}\right..$$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 106. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{18}x+1$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{18}x+1$ nên

Ta có: $y'(x_0)=15\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-8=0\Leftrightarrow x_0=-4, x_0=2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y=18x+81$ và $y=18x-27$.

Câu 107. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{1}{9}x+2027$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{9}x+2027$ có dạng $\Delta: y=-9x+c.$

Δ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+3x^2-3=-9x+c \\ -3x^2+6x=-9 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^3+3x^2-3=-9x+c \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn.

Câu 108. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $2026y+2026x=1$. Khi đó $x_1.x_2$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

$2026y+2026x=1 \Rightarrow y=-x+\frac{1}{2026}$

Ta có: $y'=3x^2-4x+2$.

Tiếp tuyến tại M, N của (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+\frac{1}{2026}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 hay $3x^2-4x+1=0$.

Hoành độ x_1, x_2 của các điểm M, N là nghiệm của phương trình $3x^2-4x+1=0$.

Suy ra $x_1.x_2=3$.

Câu 109. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất là $(x_0;y_0)$. Tìm y_0

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 110. Biết rằng đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+4$ tại điểm duy nhất là $(x_0;y_0)$. Tính $2026x_0+2027y_0$.

Trả lời: ……..

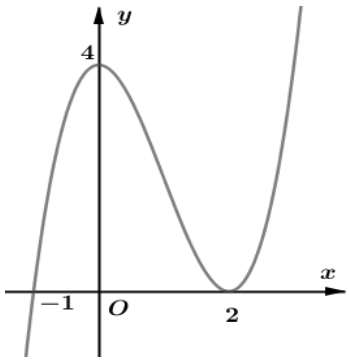
Lời giải

Đáp án: 1

phương trình hoành độ giao điểm: $x+2=x^3-x^2+x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y_0=1$.

$\Rightarrow 2026x_0 + 2027y_0 = 1$

Câu 111. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

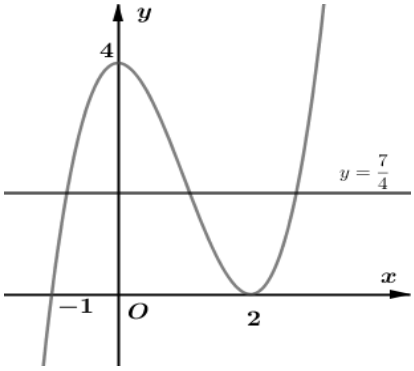


Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 7 = 0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

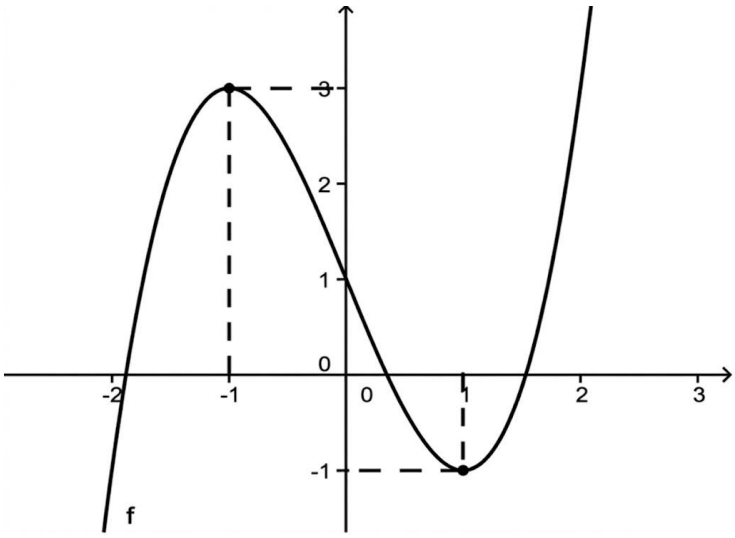
Lời giải

Đáp án: 3



Ta có: $4f(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{7}{4}$. Do đường thẳng $y = \dfrac{7}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại tung độ bằng bao nhiêu?

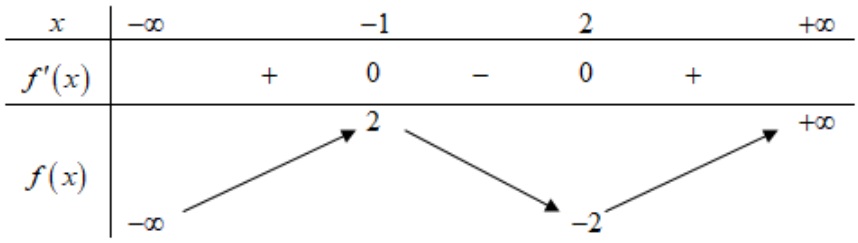
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại 1 điểm $(0;1) \Rightarrow y=1$

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

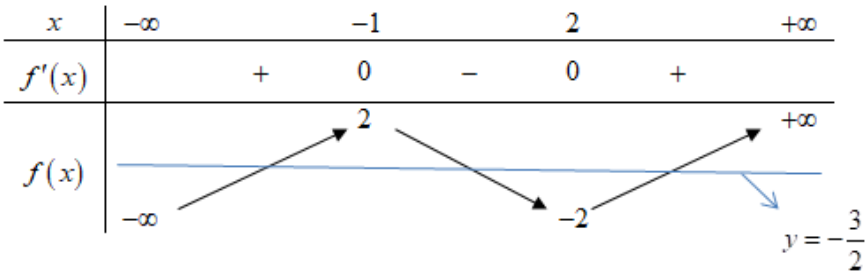


Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

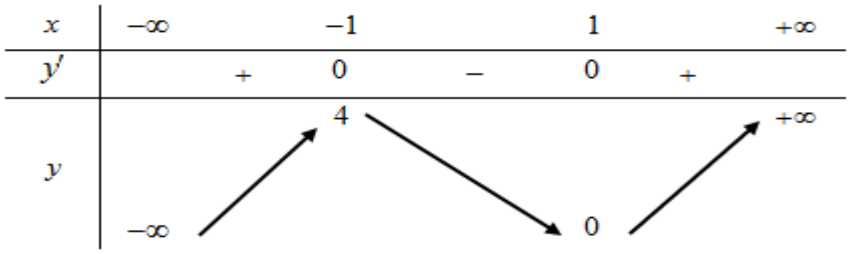
Đáp án: 3



Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=4$ bằng bao nhiêu?

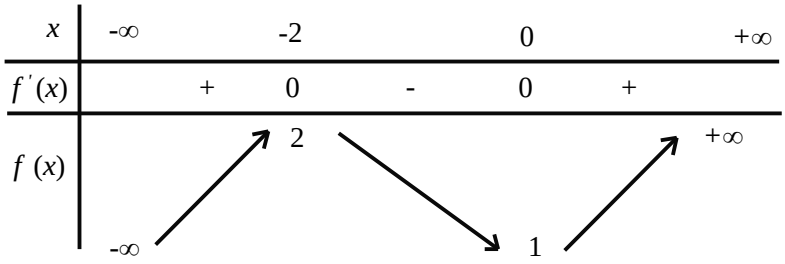
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 2 nghiệm.

Câu 115. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Từ bảng biến thiên hàm số ta có $a>0$.

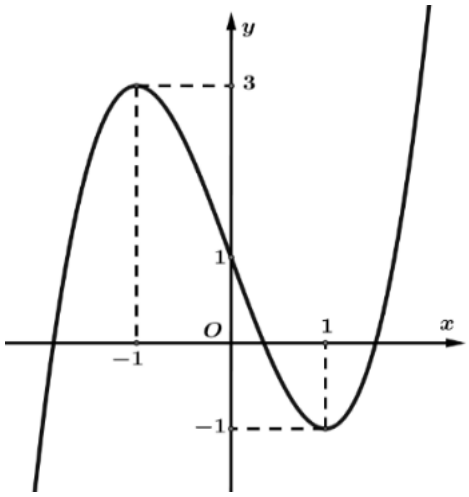
Khi $x=0$ thì $y=d=1>0$.

Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $c=0;\dfrac{-2b}{3a}=-2\Rightarrow b=3a>0$.

Vậy có 3 số dương là $a,\ b,\ d$.

Câu 116. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

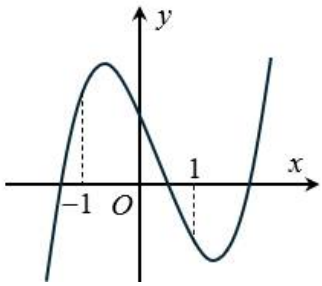
Đáp án: 1

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy: $a>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ thỏa mãn: $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}\\x_1x_2=\dfrac{c}{3a}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}0=-\dfrac{2b}{3a}\\-1=\dfrac{c}{3a}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}b=0\\\dfrac{c}{a}<0\end{array}\right.\Rightarrow b=0;c<0$.

Câu 117. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$

Nhìn vào giao điểm của đồ thị với trục tung ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra $d > 0$.

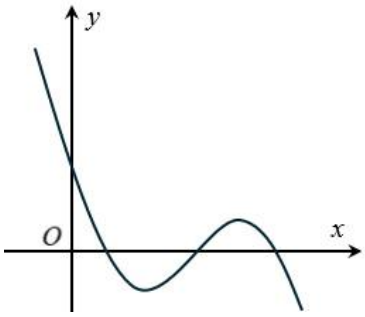
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ với $x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow c < 0$ (vì $a > 0$)

Vì $-1 < x_1 < 0$ và $x_2 > 1$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow -2b > 0 \Leftrightarrow b < 0$ (vì $a > 0$)

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 118. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

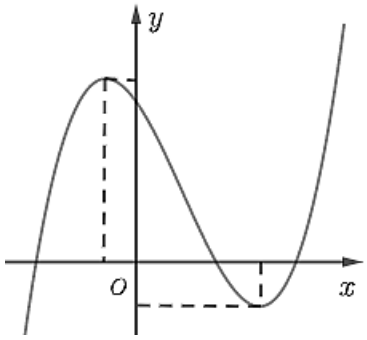
Đáp án: 2

Dựa vào đồ thị suy ra $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy suy ra $d > 0$.

Dựa vào cực trị ta có $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 119. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ theo hình vẽ:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0,d)$ nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$;

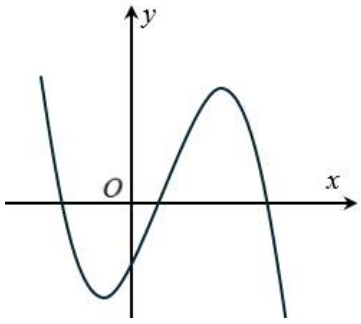
Hàm số có hai cực trị trái dấu nên $ac < 0$ mà $a > 0$, do đó $c < 0$.

Điểm uốn của đồ thị có hoành độ dương nên $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2b}{6a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Do $a > 0$ nên $b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Câu 120. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta thấy nhánh đồ thị ngoài cùng bên phải hướng xuống suy ra $a < 0$

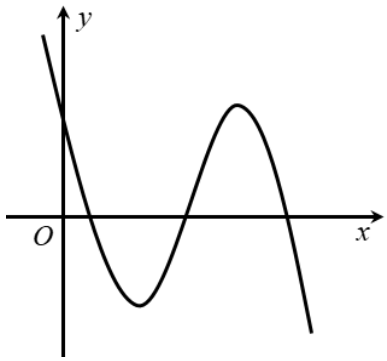
Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm suy ra $d < 0$

Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số.

Ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$ và $x_1.x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 121. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số âm trong các số a, b, c, d ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Do nhánh bên phải của đồ thị đi xuống nên $a<0$.

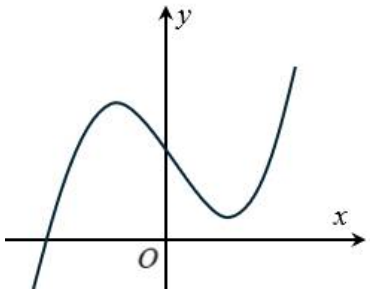
Đồ thị cắt trục tung ở phần dương nên $d>0$

Đồ thị có 2 cực trị tại hai giá trị x dương nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Rightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-3ac>0 \\ -\dfrac{2b}{3a}>0 \\ \dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}.$$

Vậy $a<0, b>0, c<0, d>0$

Câu 122. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong các số b, c, d ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Dựa vào đồ thị hàm bậc ba ta nhận xét:

Nhánh cuối đồ thị hàm số đồng biến nên $a>0$.

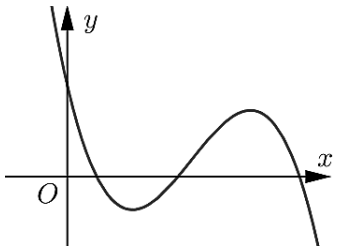
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung nên $ac<0\Rightarrow c<0$.

Đồ thị hàm số có hoành độ điểm uốn dương nên $ab<0\Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0, b<0, c<0, d>0$

Câu 123. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong ba số $b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

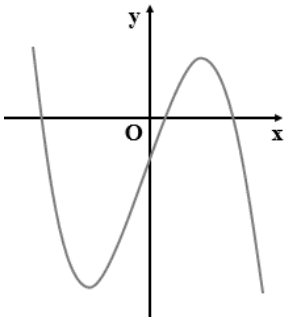
Ta có $a<0$ và đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Mặt khác: $y'=3ax^2+2bx+c; y''=6ax+2b$ và từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương và điểm uốn có hoành độ dương.

Khi đó $\begin{cases} a.c>0 \\ -\dfrac{b}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ c<0 \end{cases}$ do $a<0$.

Vậy $a<0, b>0, c<0, d>0$

Câu 124. Cho hàm số $y=ax^3+3x+d\ (a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Có bao nhiêu số dương trong hai số $a,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

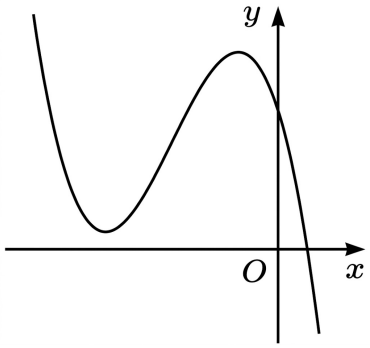
Đáp án: 0

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0 \Rightarrow y=d<0$.

Vậy $a<0, d<0$

Câu 125. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

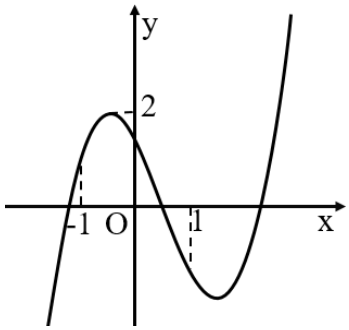
Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 126. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu số âm trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

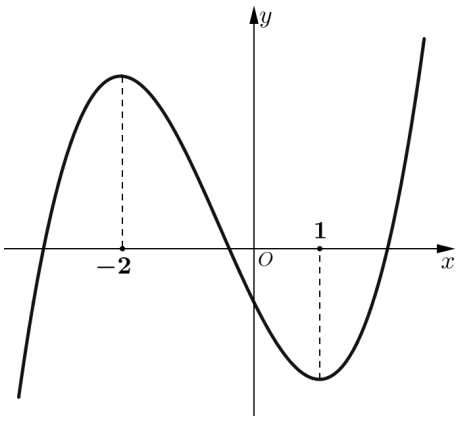
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$.

Câu 127. Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số b, c, d?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

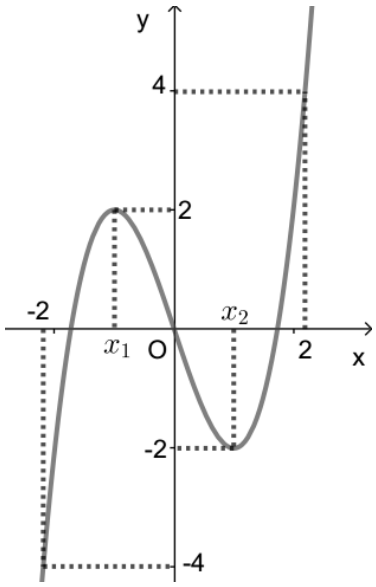
Từ đồ thị ta có $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} = -1$ suy ra $3a = 2b \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$

Câu 128. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



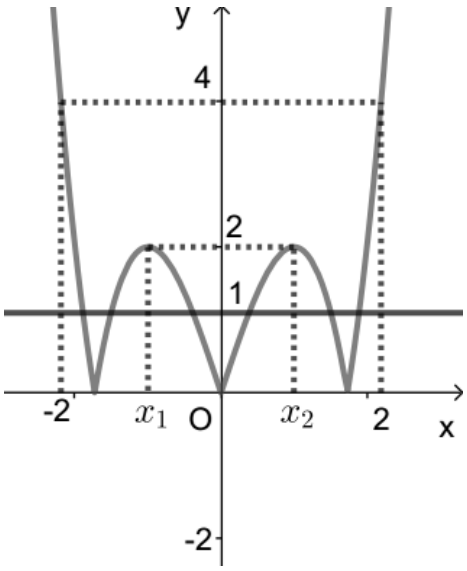
Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-1=0$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-1=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 6 điểm.

Vậy số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-1=0$ là 6.

Câu 129. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có đồ thị $\left(C\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $-x^3-3x^2+1-m=0$ có ba nghiệm phân biệt?

Trả lời: ……..

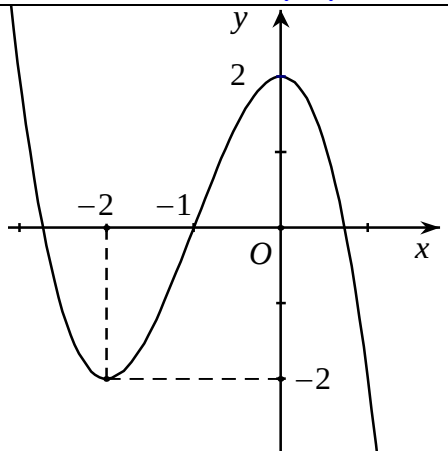
Lời giải

Đáp án: 3

Ta có $-x^3-3x^2+1-m=0\Leftrightarrow -x^3-3x^2+2=m+1\left(*\right)$.

Xem phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C):y=-x^3-3x^2+2$ và đường thẳng $d:y=m+1$. Số giao điểm của (C) và d là số nghiệm của (*).

Vẽ đồ thị $y=-x^3-3x^2+2$



Dựa vào đồ thị hàm số, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2<m+1<2 \Leftrightarrow -3<m<1$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2;-1;0\}$

Câu 130. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(-2;4)$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0;1;2;3\}$

Câu 131. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -12

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình :

$x^3+3x^2-9x+2m+1=0 \Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1$.

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-27	↗	5	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra : $\left[\begin{array}{l} 2m+1=5 \\ 2m+1=-27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-14 \end{array}\right. \Rightarrow S=\{-14;2\}$.

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T=-14+2=-12$.

Câu 132. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Cách 1:

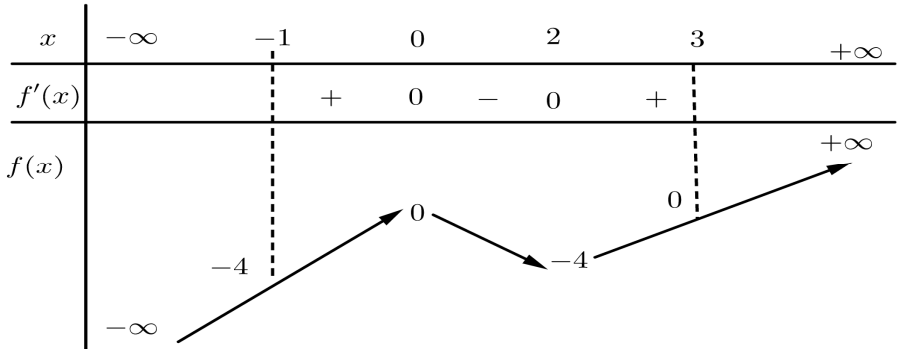
Ta có $x^3-3x^2-m^3+3m^2=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2=m^3-3m^2 \Leftrightarrow f(x)=f(m)\ (1)$

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2$.

$f'(x)=3x^2-6x,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$f(x)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2:

Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - m^3\right) - 3\left(x^2 - m^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m\right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0 \ (*) \end{cases}$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4\left(m^2 - 3m\right) > 0 \\ m^2 + (m-3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$ (vì $m \in \mathbb{Z}$).

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 133. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $3x + m - 2 = (x-1)^3 \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 + 1 \ (1)$

Nhận xét: (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(d): y = m$ và đồ thị

$(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$; $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3<m<1$ nên có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 134. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=2x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2+mx+1=2x+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+(m-2)x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+m-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x+m-2=0 \end{array}\right.$. Đặt $f(x)=x^2-3x+m-2$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^3-3x^2+(m-2)x=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt, khi đó $f(x)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 0. Do đó

$$\begin{cases} f(0)\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ 9-4(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ -4m>-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m<\dfrac{17}{4} \end{cases}.$$

Do m là số nguyên dương nên $m\in\{1,3,4\}$.

Câu 135. Với m là một tham số thực thì đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ có tập xác định: $\mathbb{R}$; $y'=3x^2-4x+1$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{23}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đồ thi hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ và đường thẳng $y=m$ có nhiều nhất là ba giao điểm.

Câu 136. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Đặt $f(x)=x^3-3x^2-m^2+5m$.

Để $x^3-3x^2-m^2+5m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt thì $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $f(x_1).f(x_2)<0$

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$f(0)=-m^2+5m$; $f(2)=-m^2+5m-4$.

Khi đó: $f(0).f(2)<0\Leftrightarrow \left(-m^2+5m\right)\left(-m^2+5m-4\right)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<m<1\\4<m<5\end{array}\right.$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa mãn.

Câu 137. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y=(x-2)\left(x^2+mx+m^2-3\right)$ có ba nghiệm thực phân biệt?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x-2)\left(x^2+mx+m^2-3\right)=0$ (1)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2+mx+m^2-3=0\end{array}\right. (2)$$

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 4+2m+m^2-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2+12>0 \\ m^2+2m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0;1\}$.

Câu 138. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng qua $I(1;2)$ với hệ số góc k. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt *I, A, B* sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Phương trình $d: y = k(x-1)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d :

$x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + k + 2 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - k - 2}_{g(x)} = 0 \quad (*) \end{array} \right.$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+3>0 \\ -3-k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > -3$$

Hơn nữa theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k + 4 = 4 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm *AB*.

Vậy $k > -3$, hay $(-3; +\infty)$.

Mà k là giá trị nguyên âm nên $k = \{-2; -1\}$

Câu 139. Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tổng các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành là $x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \quad (1) \end{array} \right.$

(C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\1-1-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4m>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{4}\\m\neq 0\end{cases}\ (*)$$

Gọi $x_3=1$ còn x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1) nên theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-m\end{cases}$.

Do đó $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+1=4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-3=0\Leftrightarrow m=1$ (thỏa (*))

Vậy $m=1$.

Câu 140. Cho hàm số $y=x^3-(m+2)x^2-(2m+13)x-m-2$ có đồ thị (C_m); đường thẳng $d: y=mx+m+8$ và điểm $I(1;4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -6

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-(m+2)x-(3m+13)x-2m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=m+5\end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C thì $\begin{cases}m\neq -7\\m\neq -6\end{cases}$

Giả sử $B(-1;8), C(m+5; m^2+6m+8)$. Để tam giác IBC cân tại I

thì $IB^2=IC^2\Leftrightarrow 20=(m+4)^2+(m^2+6m+4)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-6\ (loai)\\m=-2\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6.

Câu 141. Gọi đường thẳng d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m>0)$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8. Hãy tìm tổng các giá trị của tham số m.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Phương trình đường thẳng $d: y=m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2)\Leftrightarrow(x-2)(x^2-4x+m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow A(2;0)\\x^2-4x+m+1=0\end{array}\right.$.

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow 4-m-1>0\Leftrightarrow m<3$.

Giả sử $B(x_1,mx_1-2m),C(x_2,mx_2-2m)\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1x_2=m+1\end{cases}$.

Ta có $B'(0,mx_1-2m),C'(0,mx_2-2m)$.

$S_{BB'C'C}=\frac{1}{2}B'C'(BB'+CC')=8\Leftrightarrow B'C'(BB'+CC')=16$.

Mà $B'C'=|m(x_1-x_2)|,BB'=|x_1|,CC'=|x_2|$.

Do m dương nên $x_1x_2=m+1>0$ mà $x_1+x_2=4>0\Rightarrow x_1>0,x_2>0$.

$\Rightarrow B'C'=m|x_1-x_2|,BB'=x_1,CC'=x_2\Rightarrow m|x_1-x_2|(x_1+x_2)=16\Leftrightarrow m|x_1-x_2|=4$

$\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)^2=16\Leftrightarrow m^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=16\Leftrightarrow m^2(16-4m-4)=16$

$\Leftrightarrow m^3-3m^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1(l)\\m=2\end{array}\right.$

Vậy $m=2$

Câu 142. Cho hàm số $f(x)=x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2$. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1. Biết rằng $S=\left(-\frac{a}{b};+\infty\right)$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-6(m+1)x^2+3(2m+1)x+2=0$

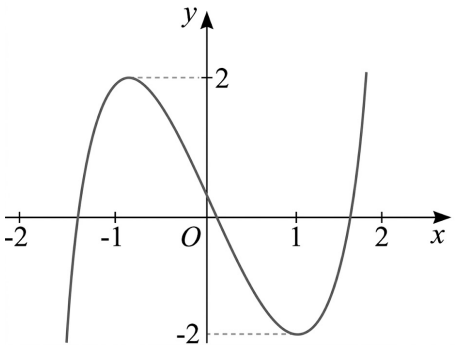
$\Leftrightarrow(x-1)(x^2-(6m+5)x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-(6m+5)x-2=0(*)\end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ lớn hơn -1 và khác

1.Ta có: $\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2>-2\\(x_1+1)(x_2+1)>0\\1^2-(6m+5)-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36m^2+60m+33>0\\6m+5>-2\\6m+4>0\\m\neq-1\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{-2}{3}$

Do đó $a=2;b=3\Rightarrow T=a+b=5$

Câu 143. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

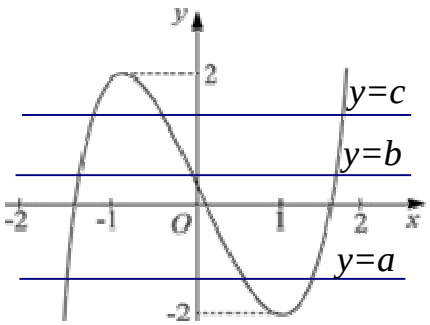


Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án:

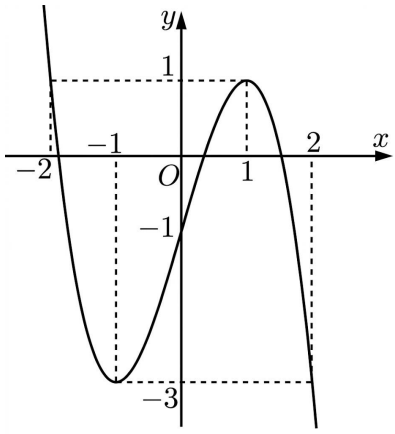


Phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x=a\ \left(a\in\left(-2;-1\right)\right) \\ x=b\ \left(b\in\left(0;1\right)\right) \\ x=c\ \left(c\in\left(1;2\right)\right) \end{array}\right.$

Các phương trình $f\left(x\right)=a, f\left(x\right)=b, f\left(x\right)=c$ đều có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 144. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



Phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Theo đồ thị:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (-2<a<-1)\\x=b\ (0<b<1)\\x=c\ (1<c<2)\end{array}\right.\Rightarrow f\left(2-f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=a\\2-f(x)=b\\2-f(x)=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2-a\ (1)\\f(x)=2-b\ (2)\\f(x)=2-c\ (3)\end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y=2-a$; $y=2-b$; $y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

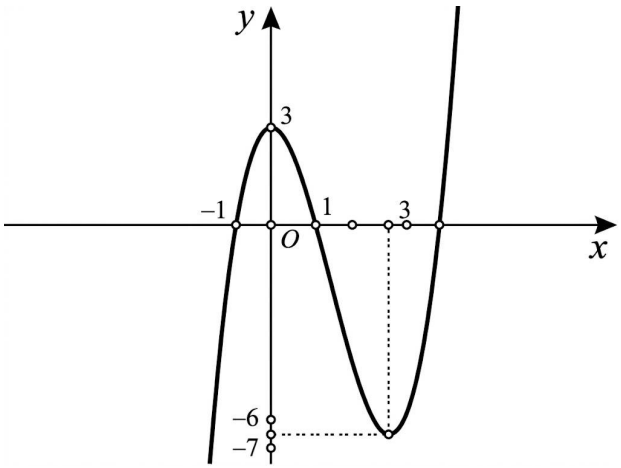
$a\in(-2;1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.

$b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

$c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 145. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=0\\f(x)=m\in(1;3)\end{array}\right.$.

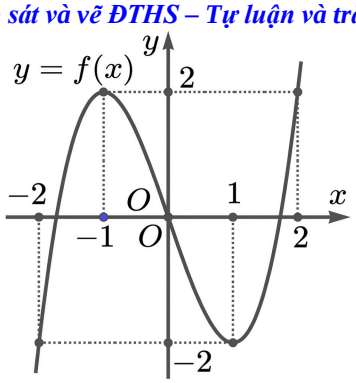
Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x)=m\in(1;3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 146. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=f(x)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

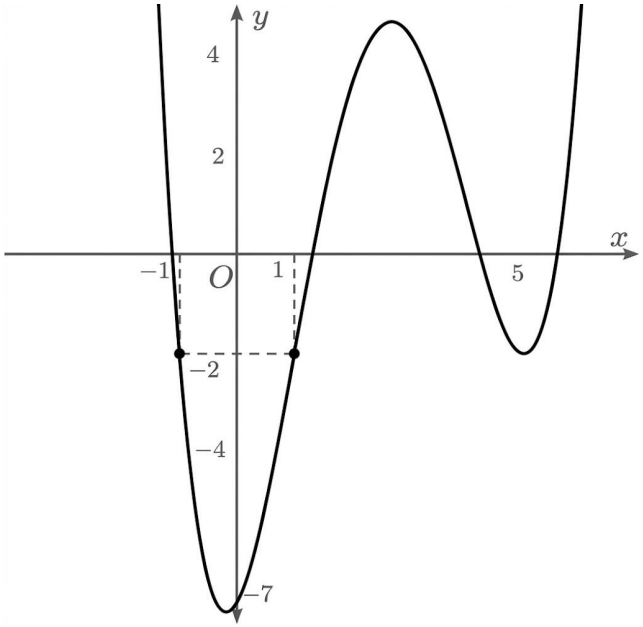
Đáp án: 7

Đặt $t=f(x)$ phương trình trở thành: $f(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$ vì đồ thị $f(t)$ cắt đường thẳng y = t tại ba điểm có hoành độ $t=-2;t=0;t=2$. Vậy:

$$\left[\begin{array}{l}f(x)=-2\\f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1;x=-2\\x=0;x=a\in(-2;-1);x=b\in(1;2).\\x=-1;x=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 7 nghiệm.

Câu 147. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=-4$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Xét phương trình: $f(\sin x)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\alpha \in(-1;0)\\ \sin x=\beta \in(0;1)\end{array}\right.$

Vì $x\in(0;\pi) \Rightarrow \sin x\in(0;1]$. Suy ra với $x\in(0;\pi)$ thì $f(\sin x)=-4 \Leftrightarrow \sin x=\beta\in(0;1)$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x\in(0;\pi)$(thỏa mãn).

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Phương trình $f(1-3x)=6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Xét $g(x)=f(1-3x) \Rightarrow g'(x)=-3f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\ 1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(1-3x)=6$ có 1 nghiệm âm.

Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-8	↗	5	↗	13	↘	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1]$.

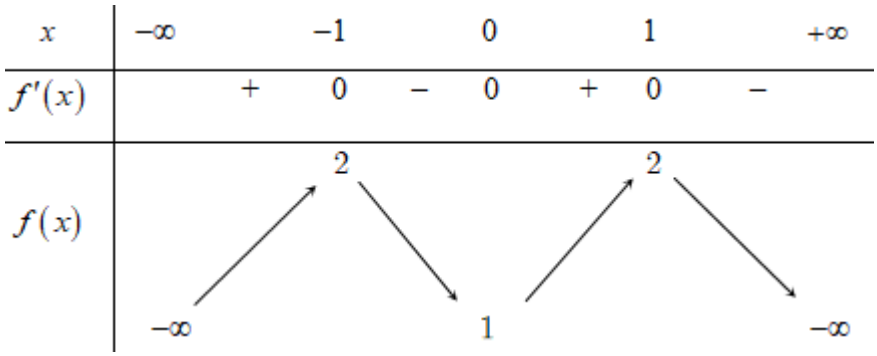
Phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ trở thành $f(t)=\frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t)=\frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in(0;1)$

Với một nghiệm $t\in(0;1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $f(\sin x)-1=0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có $-1\le\sin x\le 1\ \forall x$, nên từ bảng biến thiên suy ra $f(\sin x)-1=0$

$\Leftrightarrow f(\sin x)=1\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ \ k\in Z$

Mà $x\in[-2\pi;2\pi]\Rightarrow x=-2\pi;-\pi;0;\pi;2\pi$

Vậy số nghiệm của phương trình là 5 nghiệm.

CHỦ ĐỀ 2

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$.

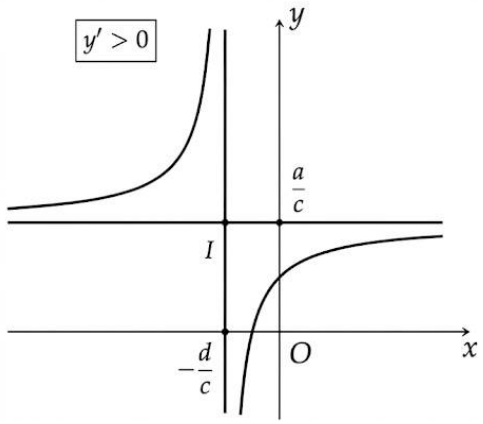
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$

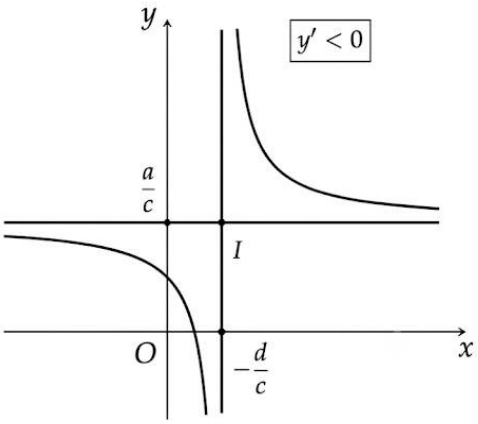
Chú ý: Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\dfrac{a}{c}=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$.

+ Trục 1: hướng đi lên (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=x+\dfrac{d}{c}$

+ Trục 2: hướng đi xuống (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=-\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$.





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (\text{c}\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

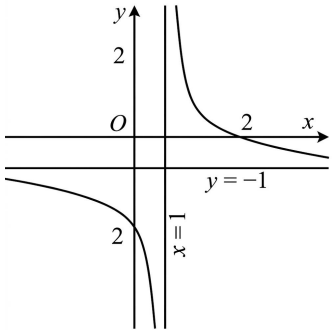
a) $y=\dfrac{x}{2x+1}$ b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$ c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

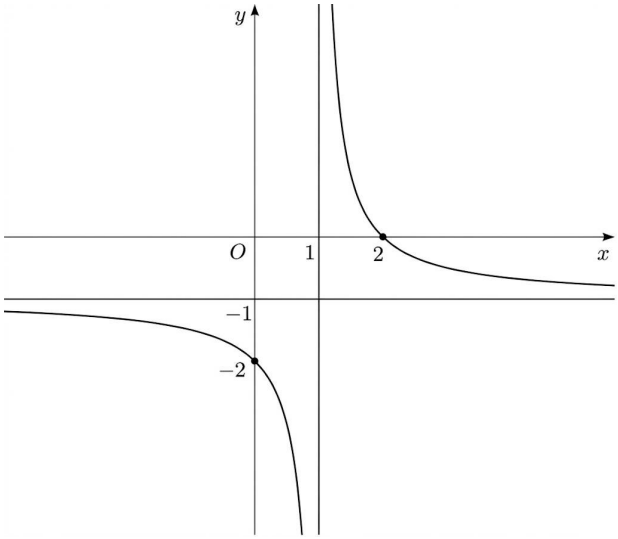
DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



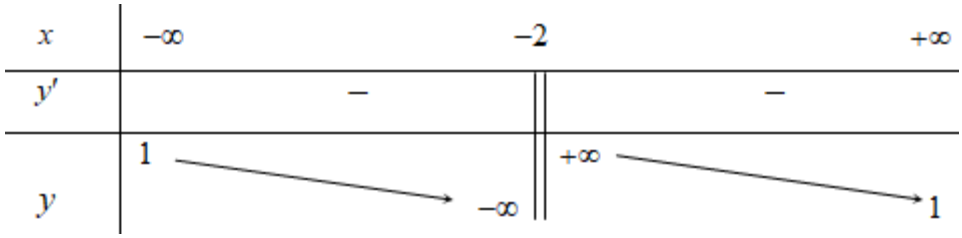
Tích $a.b$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tính khoảng cách giữa A và B.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 4. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:\ y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM HỮU TỈ BẬC NHẤT

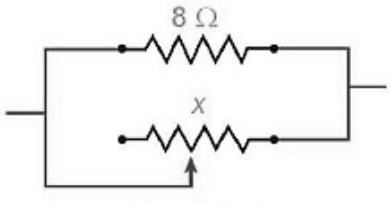
Bài 1. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\,(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \ge 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Bài 2. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

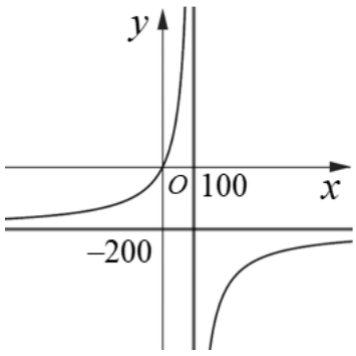


Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được ki hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x)$, $x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

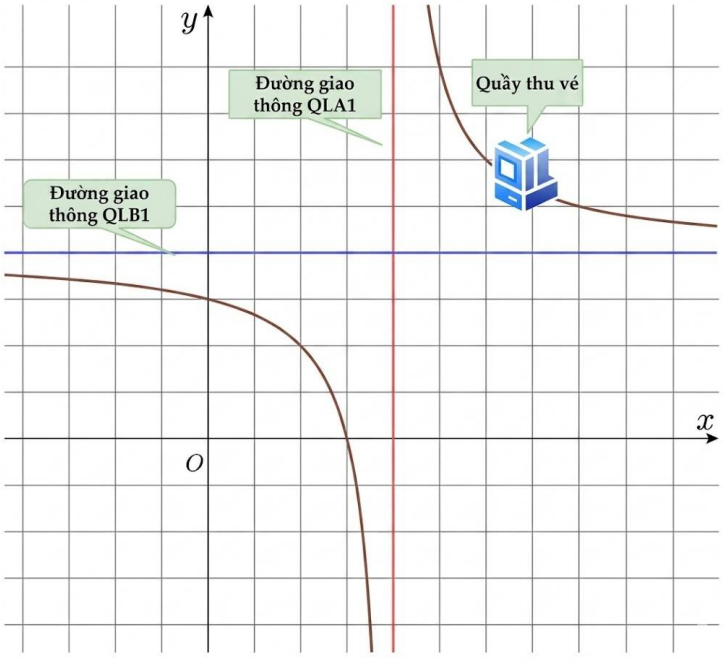
Bài 3. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \dfrac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), $(0 \le x < 100)$. Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Bài 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là $0,075$ nghìn người/năm?

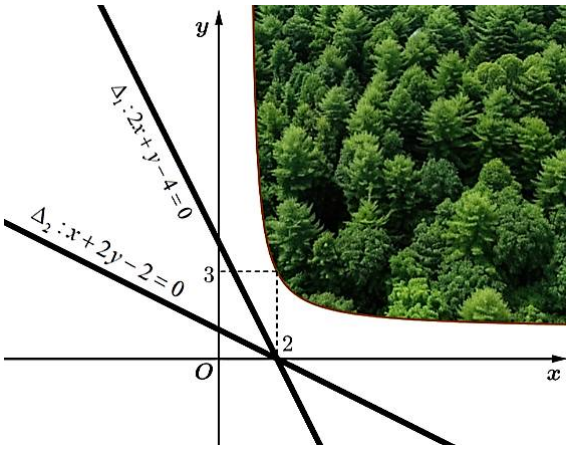
Bài 5. Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/1 lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t\in[0;+\infty)$ (gam/lit). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Bài 6. Một khu du lịch được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy bằng một phần đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$. Người ta xây dựng một quầy thu vé tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (C), với hoành độ $x_0>2$. Khu vực này có hai tuyến đường giao thông. Tuyến đường giao thông QLA1 dọc theo đường tiệm cận đứng của đồ thị (C). Tuyến đường giao thông QLB1 dọc theo đường tiệm cận ngang của đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tuyến đường giao thông này. Hãy xác định điểm M (từ quầy thu vé) (với $x_0>2$) sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai tuyến đường giao thông tại hai điểm A và B, tạo thành một tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính khoảng cách từ quầy thu vé đến giao điểm của hai tuyến đường giao thông chính QLA1 và QLB1 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*



Bài 7. Mảnh đất vườn của nhà cô Minh Nhàn có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (C): $y=\dfrac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2;3)$ và có đường tiệm cận đứng $x=1$. Hàng ngày cô Minh Nhàn phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x+y-4=0$ và $\Delta_2: x+2y-2=0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Cô Minh Nhàn cần

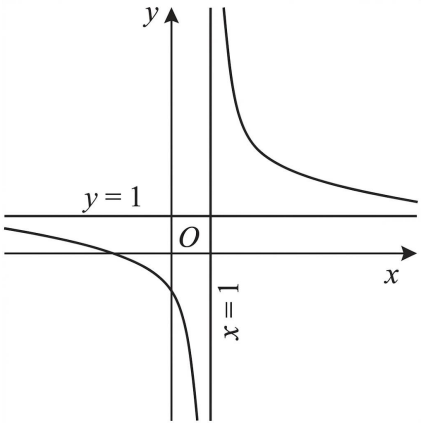
xác định một vị trí $M\left(x_0;\, y_0\right)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

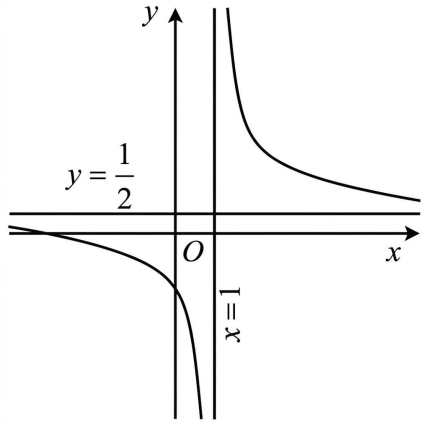
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



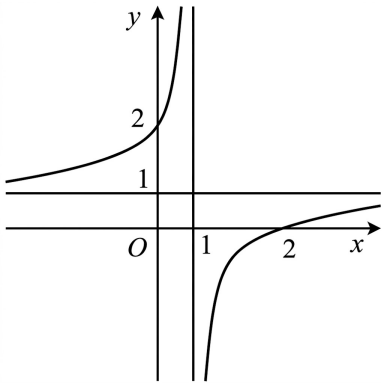
A. $y=\dfrac{x}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Câu 2. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



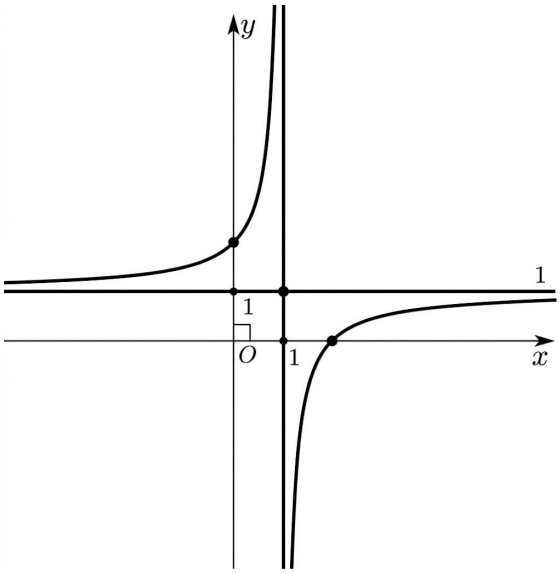
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

Câu 3. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



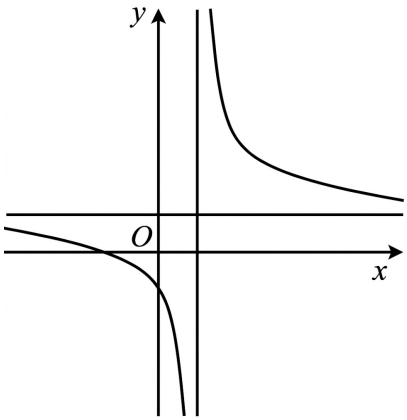
A. $y=\dfrac{x-4}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



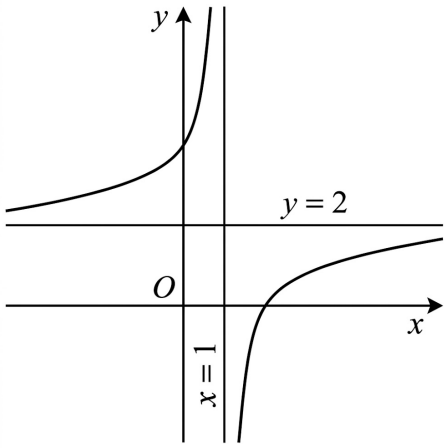
A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=-x^3+3x+2$.

Câu 5. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



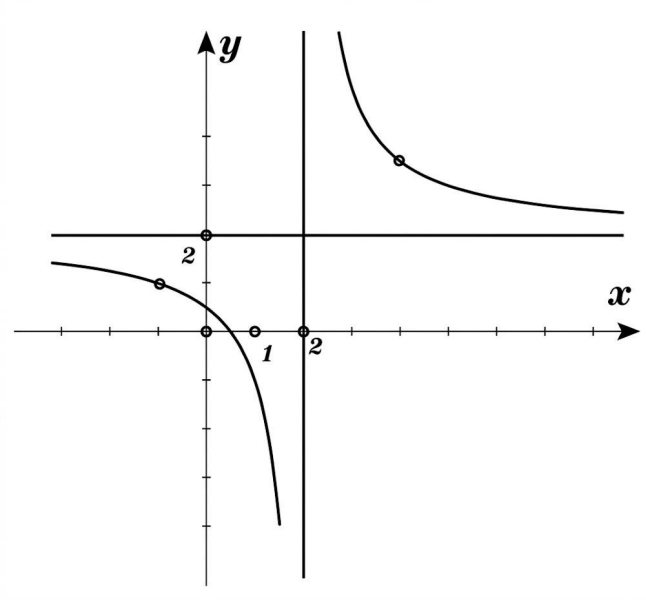
A. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^3-3x-1$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



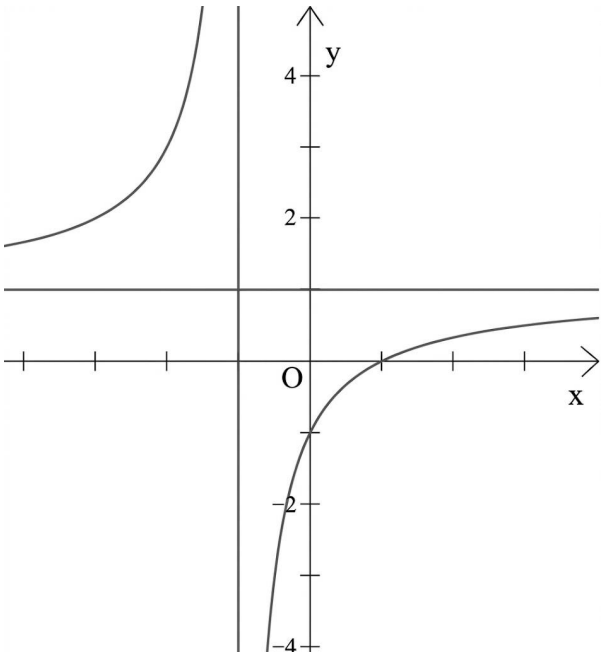
A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



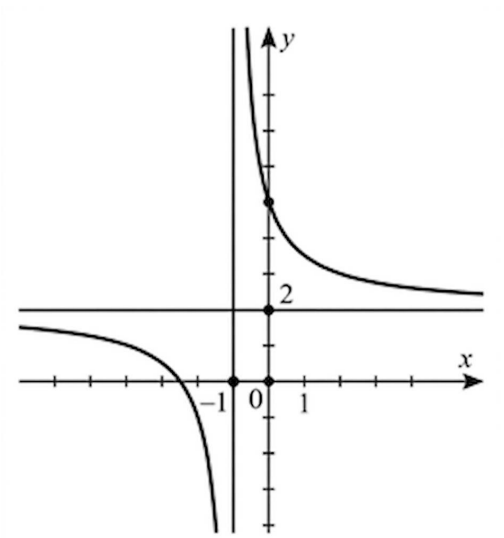
A. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **C.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



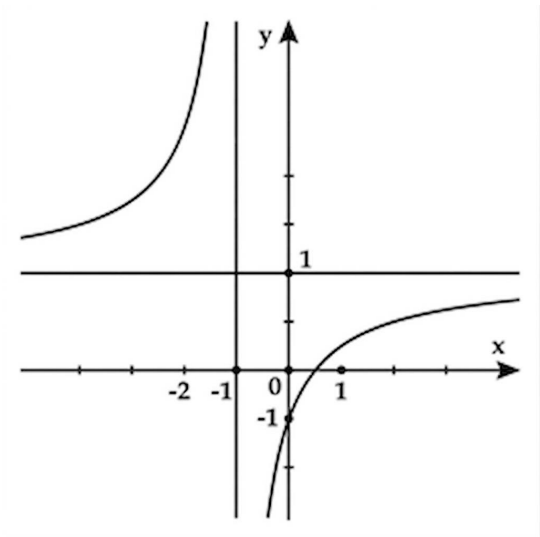
A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x^2$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

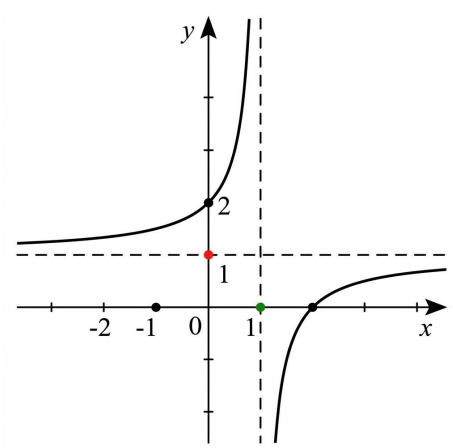
Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



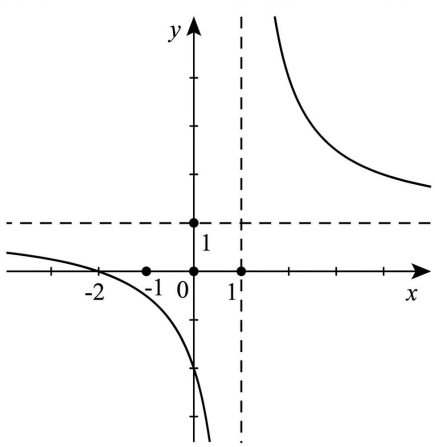
A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

Câu 11. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

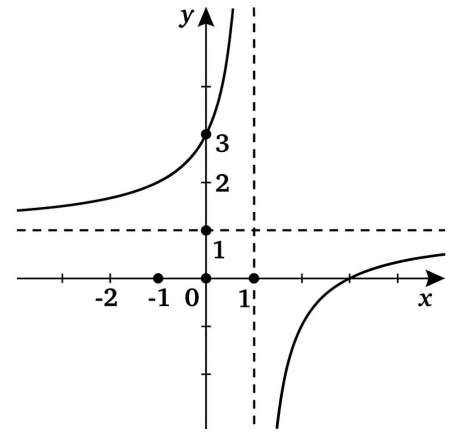
A.



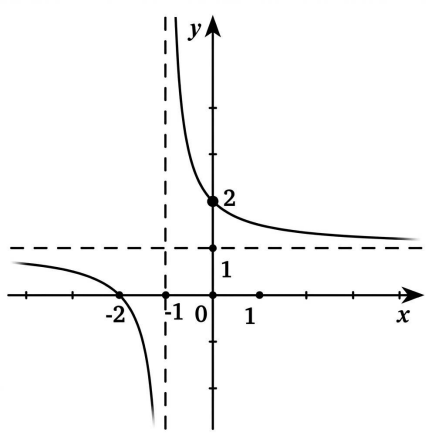
B.



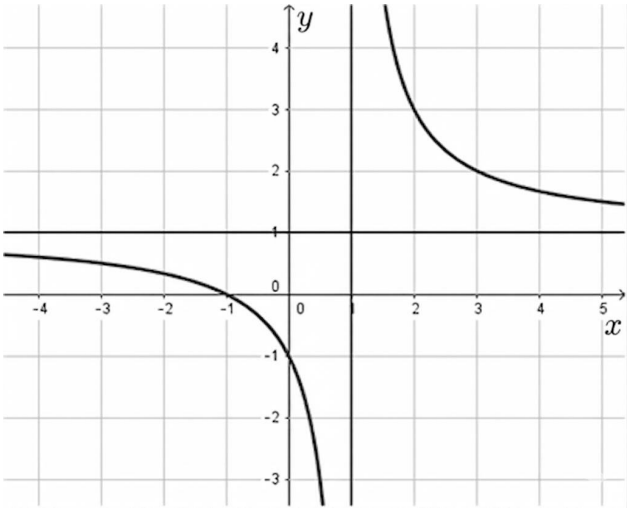
C.



D.

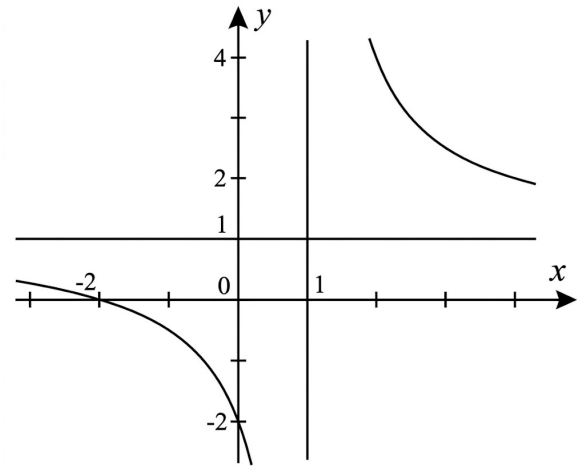


Câu 12. Đồ thị sau đây là của hàm số nào:



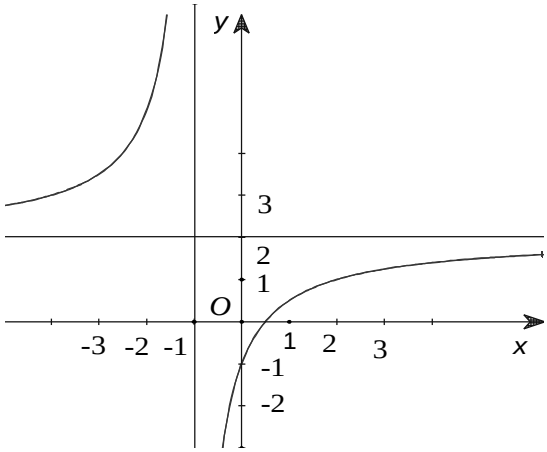
A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Câu 13. Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



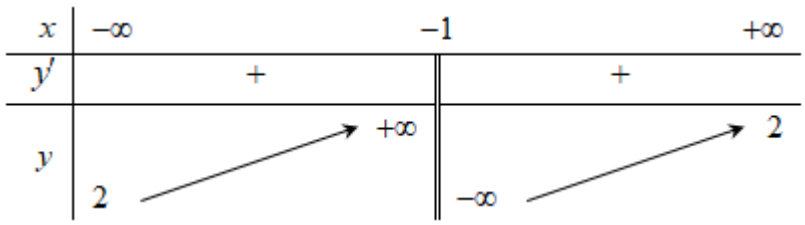
A. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.

Câu 14. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



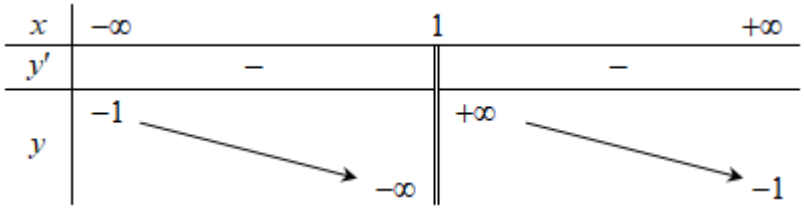
A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Câu 15. Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.



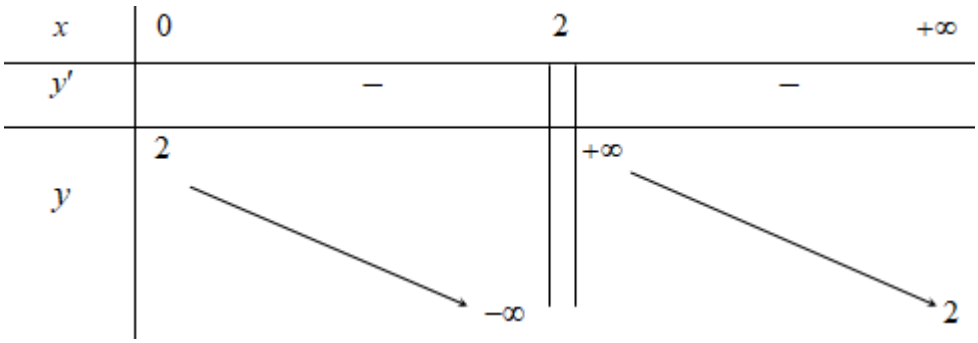
A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2x-3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

Câu 16. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



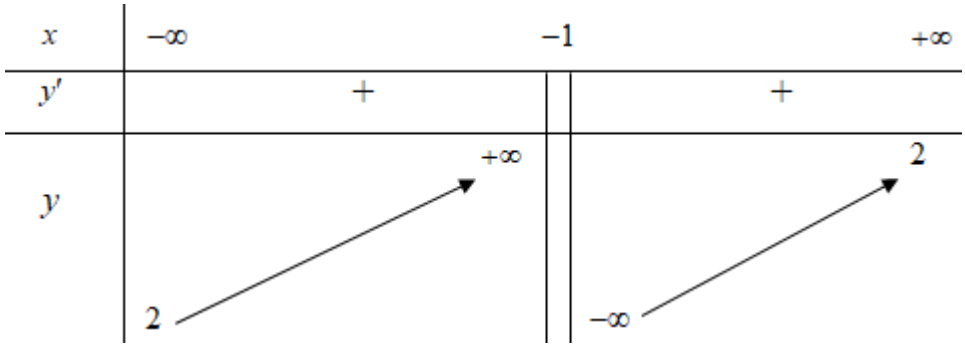
A. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Câu 19. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x+5}$.

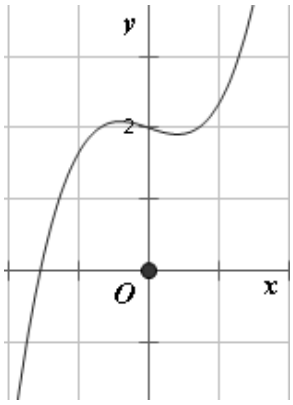
Câu 20. Hoành độ giao điểm của đồ thị (C): $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

A. $x=-\dfrac{3}{2}; x=1$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2}; x=1$ **C.** $x=-2; x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{3}{2}; x=1$.

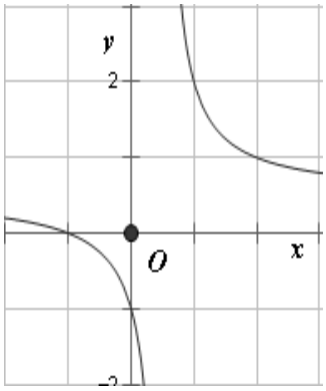
Câu 21. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B hãy tính tổng x_A+x_B

A. $x_A+x_B=2$. **B.** $x_A+x_B=1$. **C.** $x_A+x_B=5$. **D.** $x_A+x_B=3$.

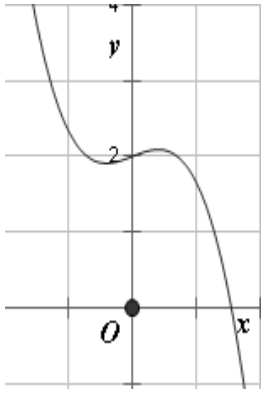
Câu 22. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{m-x}$ (m là tham số) có dạng nào sau đây ?



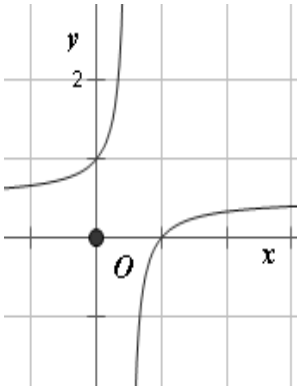
Hình 1



Hình 2



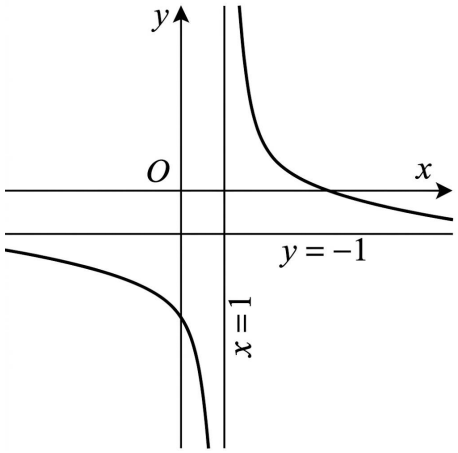
Hình 3



Hình 4

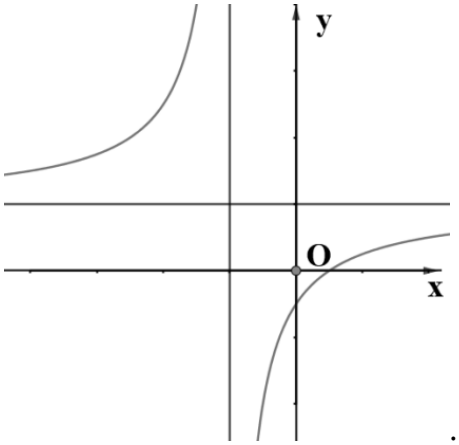
A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Câu 24. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

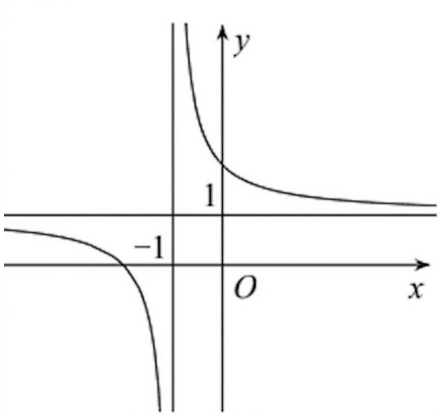


Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$. **B.** $ad>0$ và $ab<0$.

C. $bd<0$ và $ab>0$. **D.** $ad<0$ và $ab<0$.

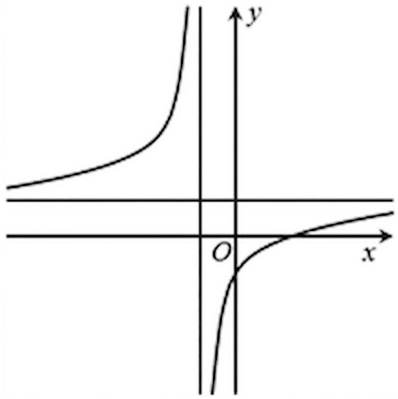
Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

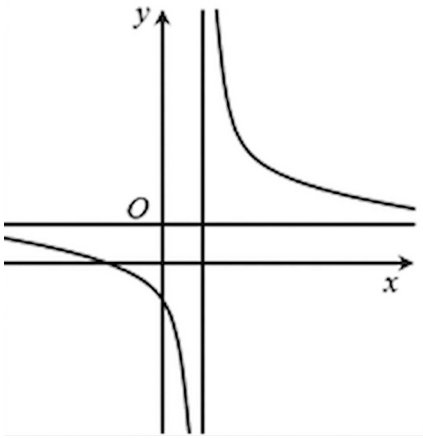
A. $0<b<a$. **B.** $0<a<b$. **C.** $b<0<a$. **D.** $a<b<0$.

Câu 26. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $bd>0, ad>0$. **B.** $bd<0, ab>0$. **C.** $ad>0, ab<0$. **D.** $ab<0, ad<0$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ ($a\neq 0$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

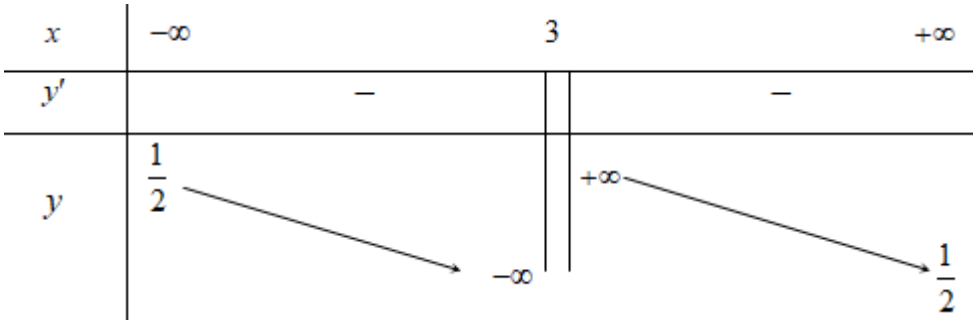


Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0, b<0, c-ab<0$. **B.** $a>0, b>0, c-ab<0$.

C. $a<0, b>0, c-ab<0$. **D.** $a<0, b<0, c-ab>0$.

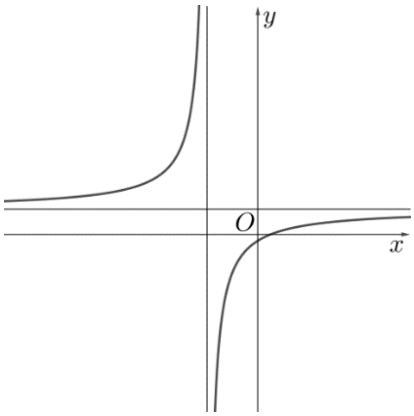
Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. **C.** $-\dfrac{2}{3}<b<0$. **D.** $0\le b<\dfrac{2}{3}$.

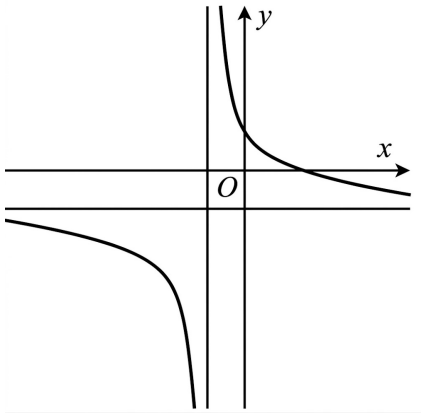
Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a<0)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab<0,bc<0,cd>0$. **B.** $ab>0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd>0$. **D.** $ab<0,bc>0,cd>0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đạo hàm cấp 1 của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ với mọi $x\neq 2$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Giao điểm của đồ thị hàm số (C) với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{5+x}{2-x}$ có đồ thị là (C).

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

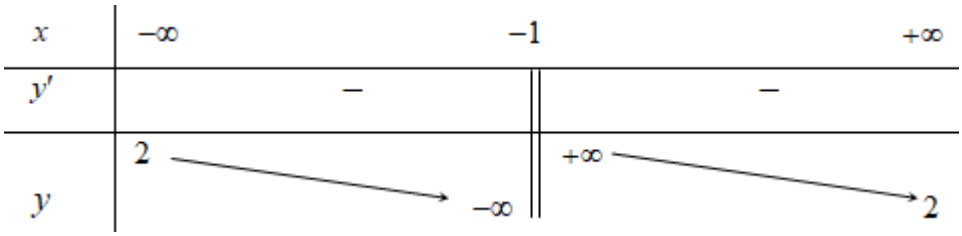
c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x+1$ và $y=-x-3$ làm hai trục đối xứng.

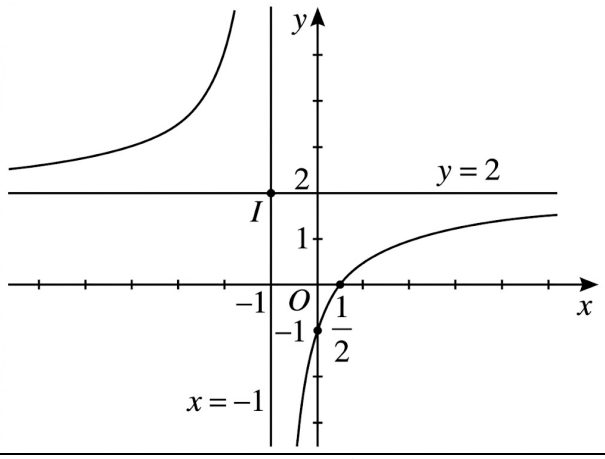
Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:

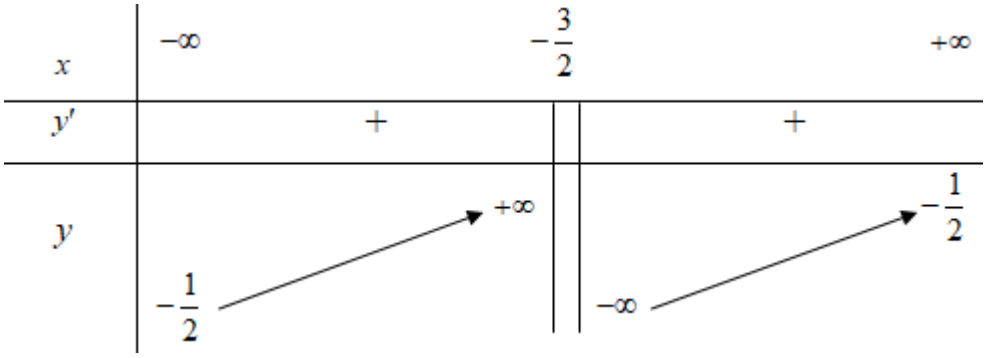


d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;-1)$.

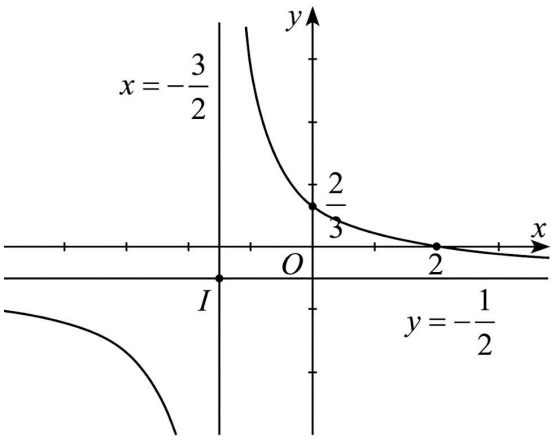
Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{2x+3}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:

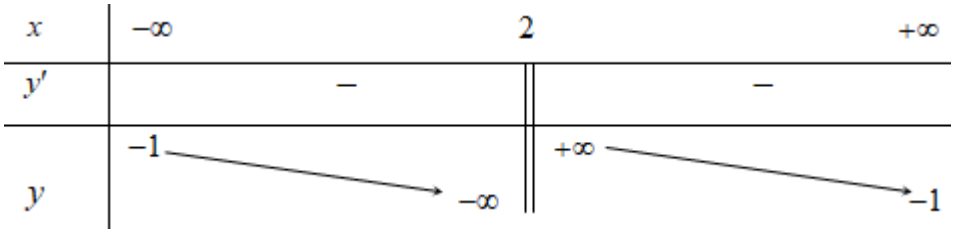


d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x+1$ và $y=-x+2$ làm hai trục đối xứng.

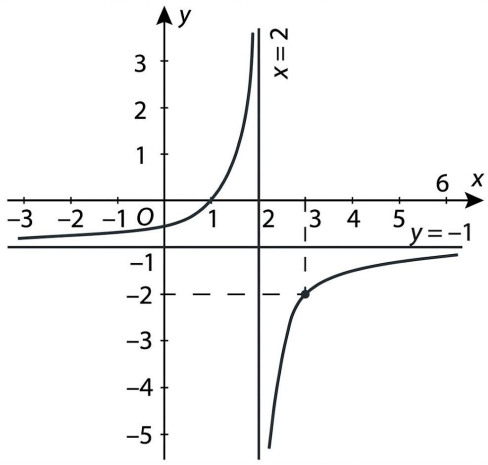
Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

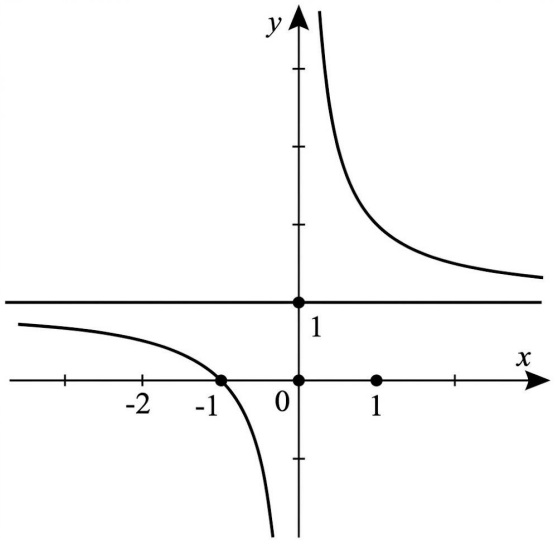


c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x-3$ và $y=x-1$ làm hai trục đối xứng.

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



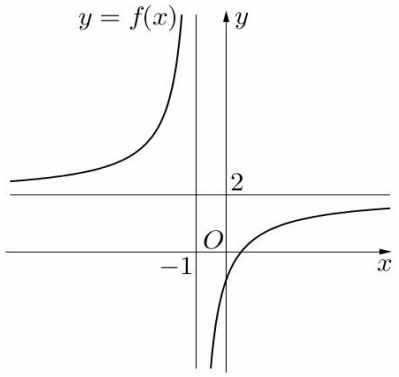
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Điểm $(0;1)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



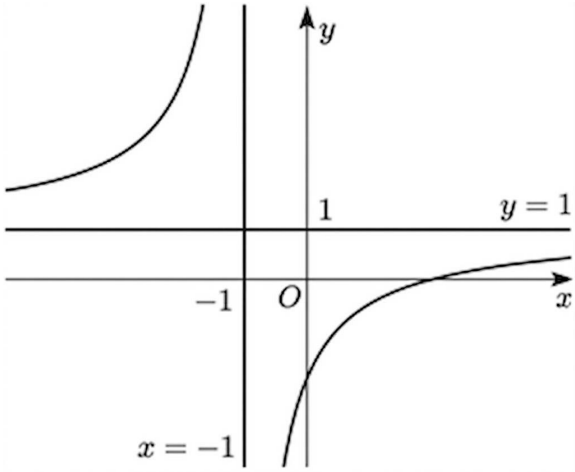
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

b) Điểm $(-1;2)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



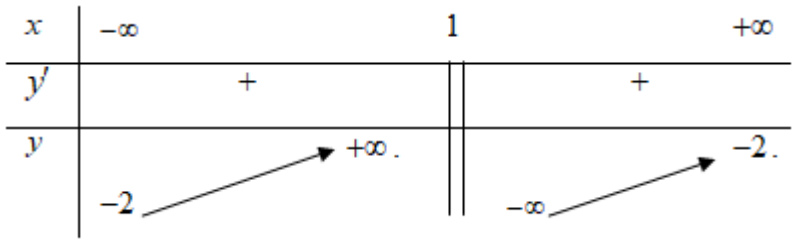
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x+2$ và $y=x$ làm hai trục đối xứng.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



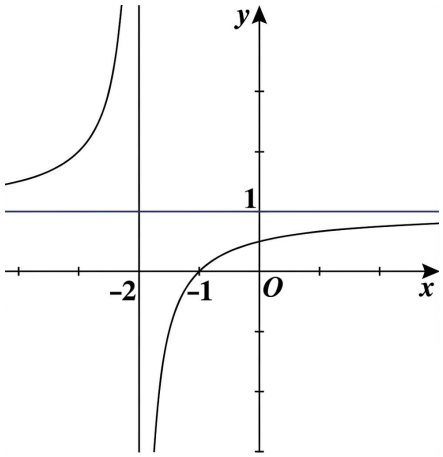
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x-3$ và $y=-x+1$ làm hai trục đối xứng.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



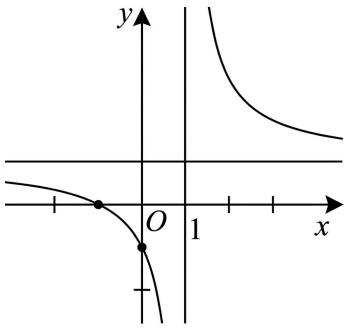
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-2$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(0;-1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



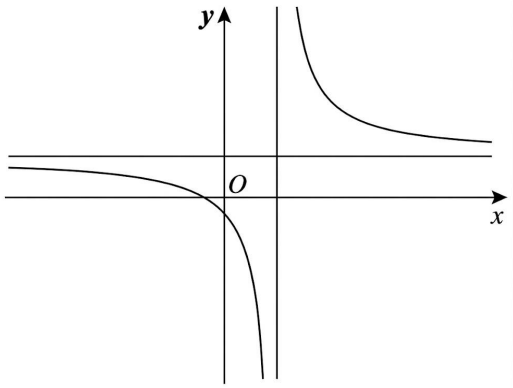
a) $\dfrac{d}{c}>0$

b) $\dfrac{a}{c}<0$

c) $ad<0$

d) $y'<0$ với mọi $x\neq 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



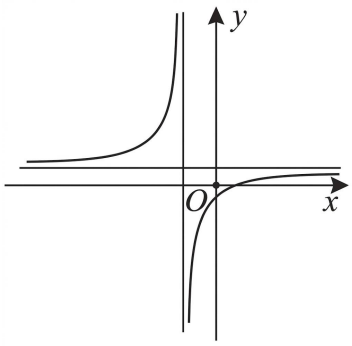
a) $\dfrac{d}{c}>0$

b) $\dfrac{a}{c}>0$

c) $ad>bc$

d) $ad<0$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



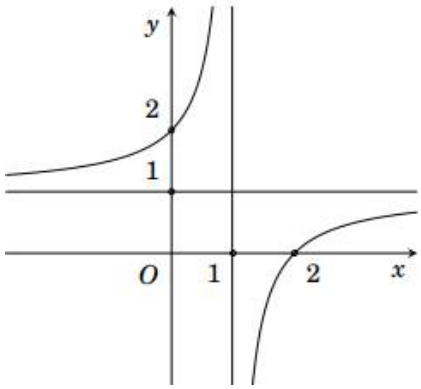
a) a và b trái dấu

b) b và d cùng dấu

c) $ad>0$

d) $bc<0$

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



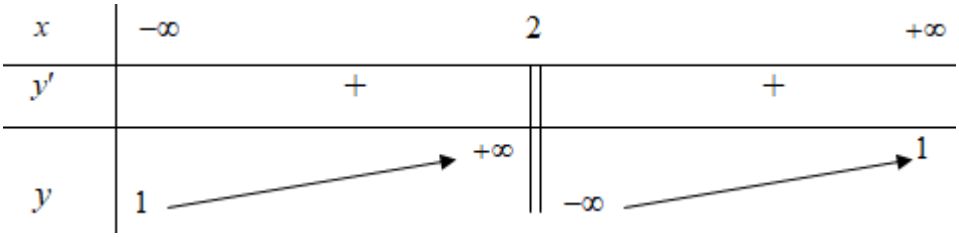
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $a-3b-2c=-3$

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ



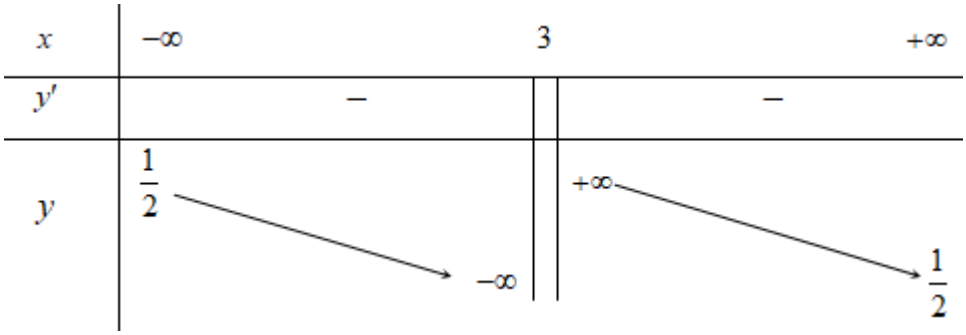
a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$

d) $a+b+c=0$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



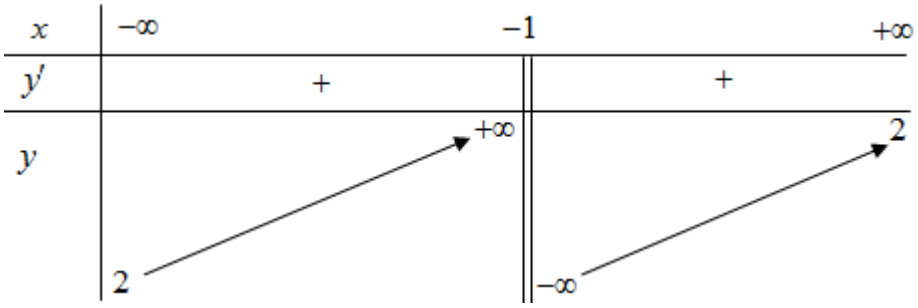
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $b<0$ hoặc $b>\dfrac{2}{3}$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x+3$ và $y=-x+1$ làm hai trục đối xứng.

c) $a+c=-1$

d) $b^3-8<0.$

Câu 48. Cho hầm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

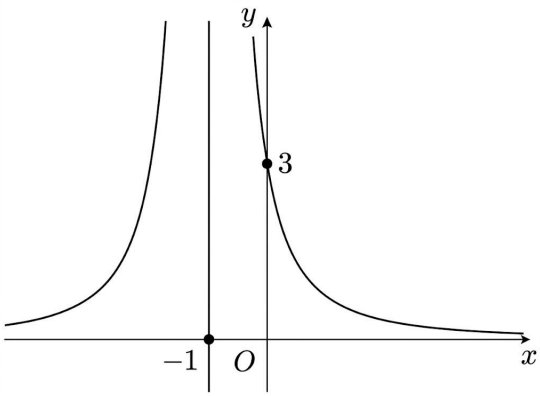
a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$.

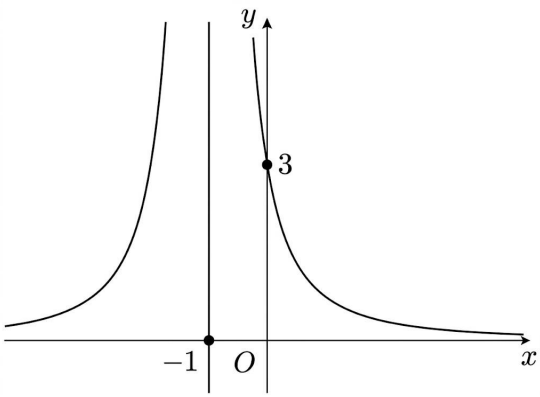
a) $b=4d$

b) $c=d$

c) $y=\dfrac{7x-4}{x+1}$.

d) $f(2)=\dfrac{10}{3}$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+3}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

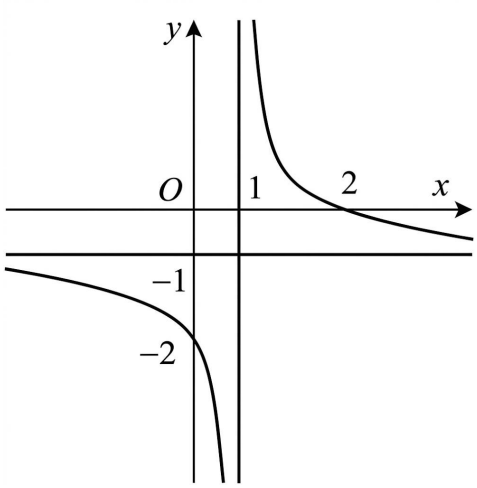
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên?

Trả lời: ……..

Câu 53. Đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $\Delta: y=-x$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

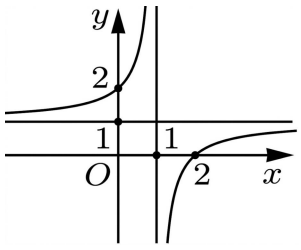
Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

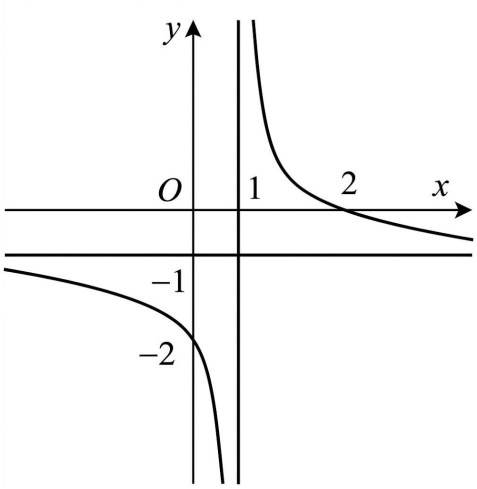
Câu 55. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$.



Khi đó giá trị biểu thức $T=a-3b-2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

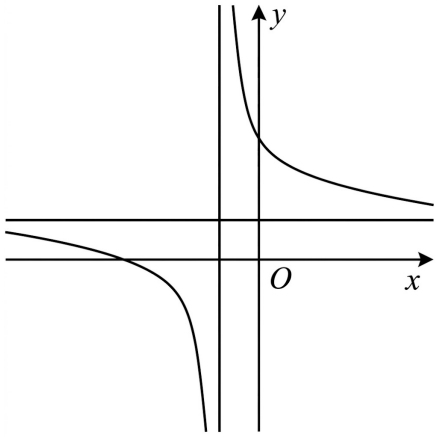
Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

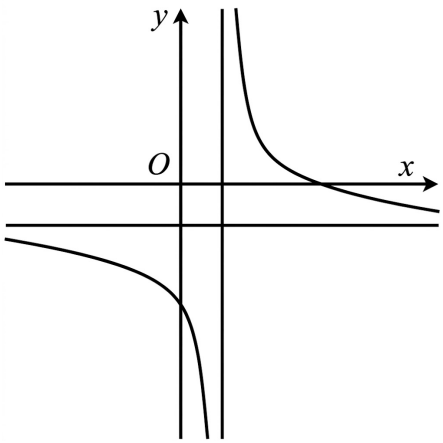
Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

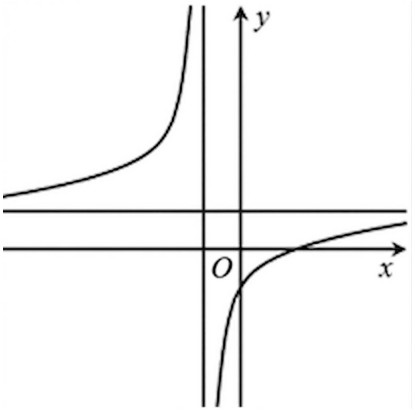
Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

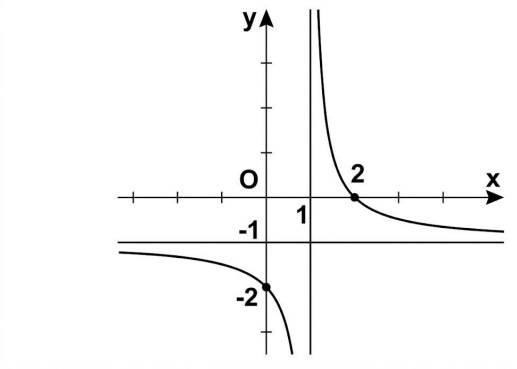
Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

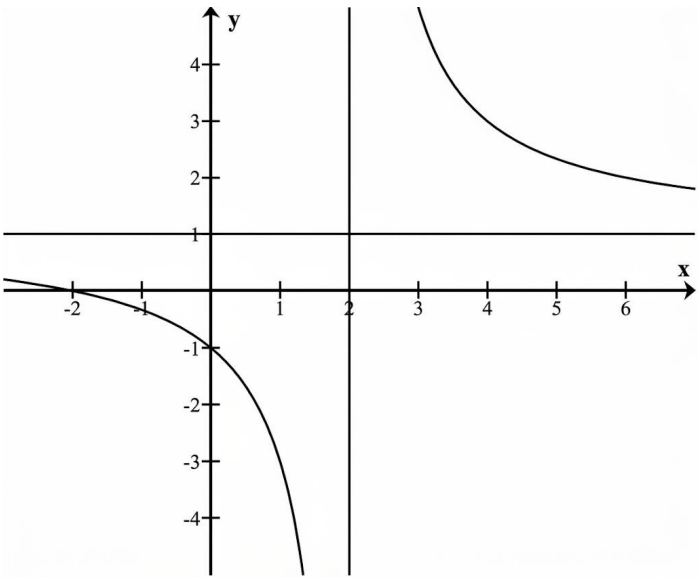
Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ và các hệ số a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$.

Trả lời: ……..

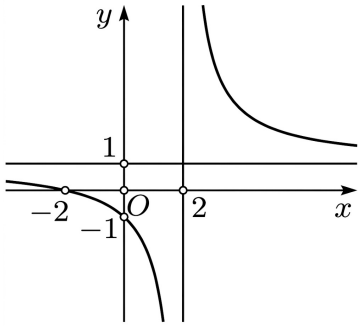
Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T=2025a-b+2c$.

Trả lời: ……..

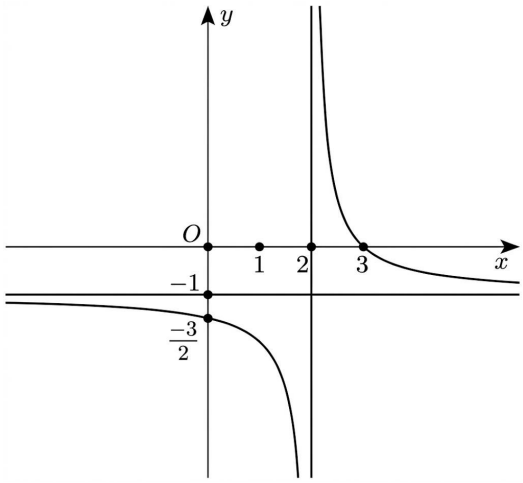
Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

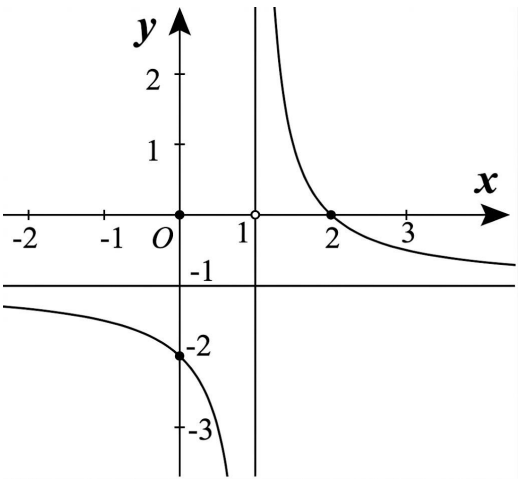
Trả lời: ……..

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



Trả lời: ……..

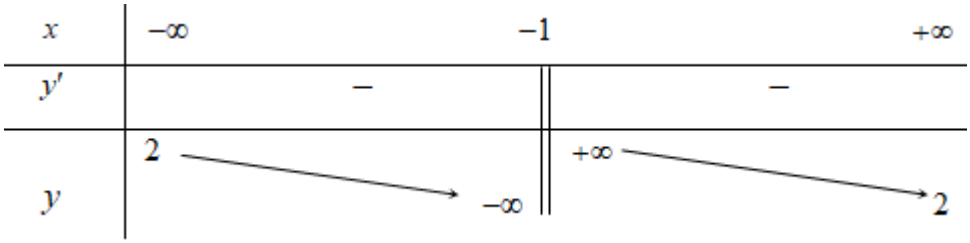
Câu 64. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

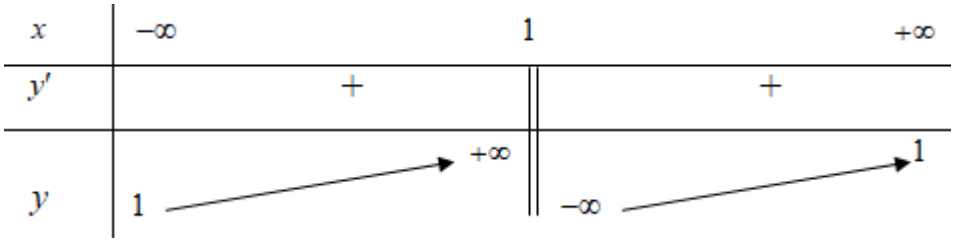
Câu 65. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

Trả lời: ……..

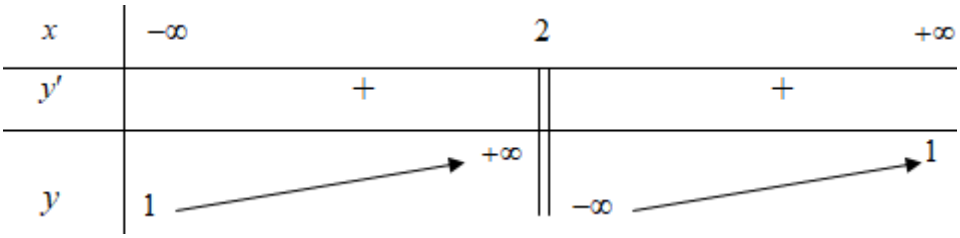
Câu 66. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-4}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

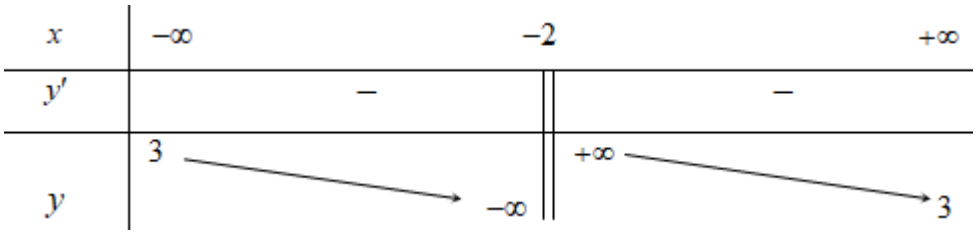
Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

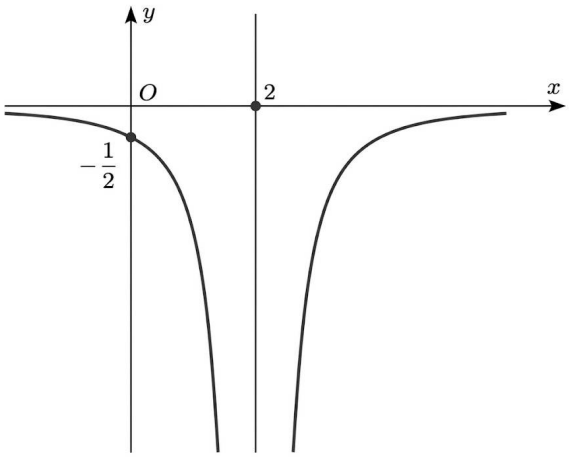
Câu 68. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 70. Cho là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

Trả lời: ……..

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm điểm $M(a;b)$ và điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ cách đều 2 đường tiệm cận của đồ thị (C). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $Q(a;b)$ và điểm $P(c;d)$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$) đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=-2x+2$ bằng $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$?

Trả lời: ……..

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm $M\left(\dfrac{a-\sqrt{b}}{2};\dfrac{c-\sqrt{d}}{2}\right)$ và điểm $N\left(\dfrac{e+\sqrt{f}}{2};\dfrac{g+\sqrt{h}}{2}\right)$ $(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{Z})$ cách đều hai điểm $A(2;0)$

và $B(0;2)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f+g+h$.

Trả lời: ……..

Câu 75. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm $M(a;b)$ và điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ mà tổng khoảng cách từ điểm M và điểm N đến hai tiệm cận của đồ thị (C) nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 76. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là lớn nhất ?

Trả lời: ……..

Câu 77. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Tìm giá trị của m .

Trả lời: ……..

Câu 78. Biết rằng có hai giá trị m_1,m_2 của tham số m để đường thẳng $d:y=m-x$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Giá trị m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 79. Gọi S là tổng các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+3m+1}{2x-m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4. Tính S.

Trả lời: ……..

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=1-x$ tại hai điểm phân biệt?

Trả lời: ……..

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d:y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho $AB=4$?

Trả lời: ……..

Câu 82. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính $T=a+b$.

Trả lời: ……..

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a+b$

Trả lời: ……..

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y=x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị?

Trả lời: ……..

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B và $AB\leq 4$.

Trả lời: ……..

Câu 86. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C)và đường thẳng $(d):y=x+m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Trả lời: ……..

Câu 87. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tính tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Trả lời: ……..

Câu 88. Biết $m=-\dfrac{b}{a}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}^+$) là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta:x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Câu 89. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A,B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Khi đó $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 90. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB\leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 91. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

Trả lời: ……..

Câu 92. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 93. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 94. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y=a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

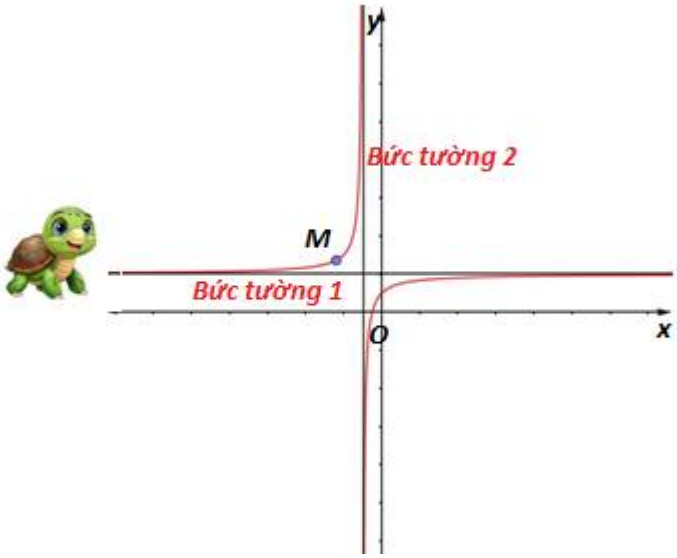
Câu 95. Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t)=\dfrac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c.

Trả lời: ……..

Câu 96. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t\ge 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p.

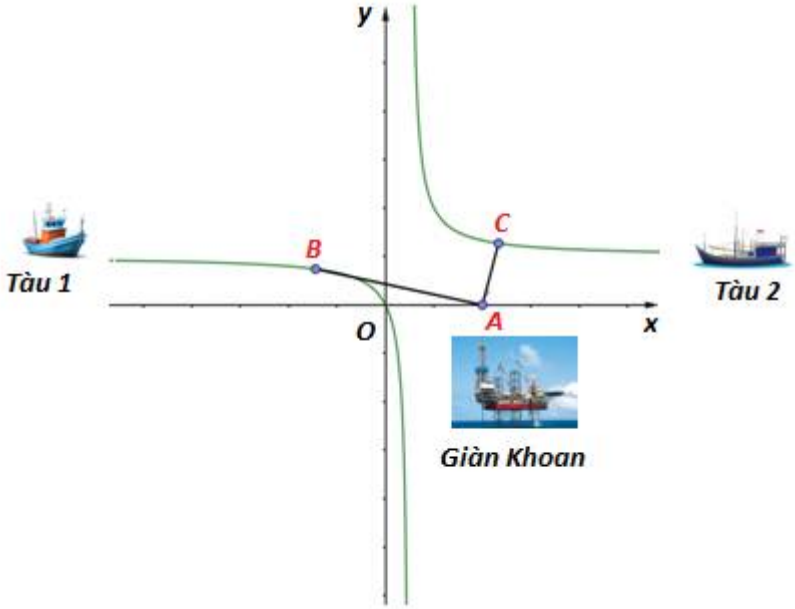
Trả lời: ……..

Câu 97. Trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng mét), mô hình hoá đường đi của con rùa là nhánh bên trái của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, hai bước tường là 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) (như hình vẽ). Khi con rùa bò đến điểm M có toạ độ $M(x_0;y_0)$ thì tổng khoảng cách từ điểm M đến hai bức tường là nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=2025x_0+2026y_0$



Trả lời: ……..

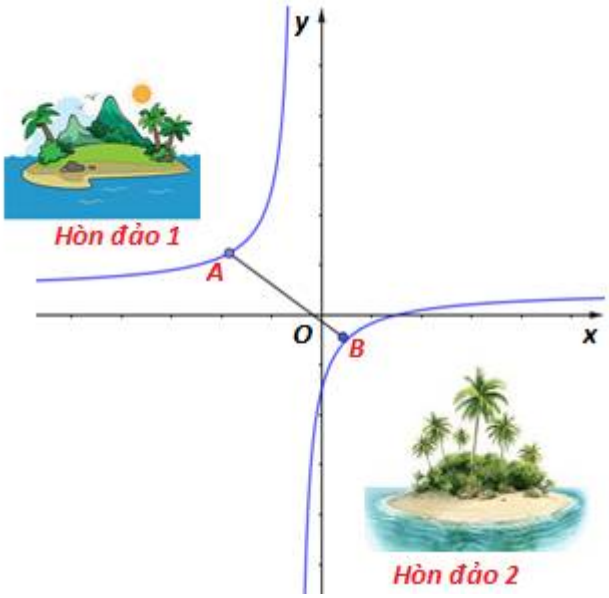
Câu 98. Trong hệ trục tọa độ Oxy, mô tả đường đi của hai tàu đánh cá 1 và 2 (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu đánh cá luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x}{x-1}$. Một giàn khoan được đặt ở vị trí A có toạ độ $A(2;0)$, tàu đánh cá 1 di chuyển đến vị trí B và tàu đánh cá 2 di chuyển đến vị trí C sao cho ba điểm A,B,C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A (như hình vẽ). Khi đó, khoảng cách của hai tàu cá bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



Trả lời: ……..

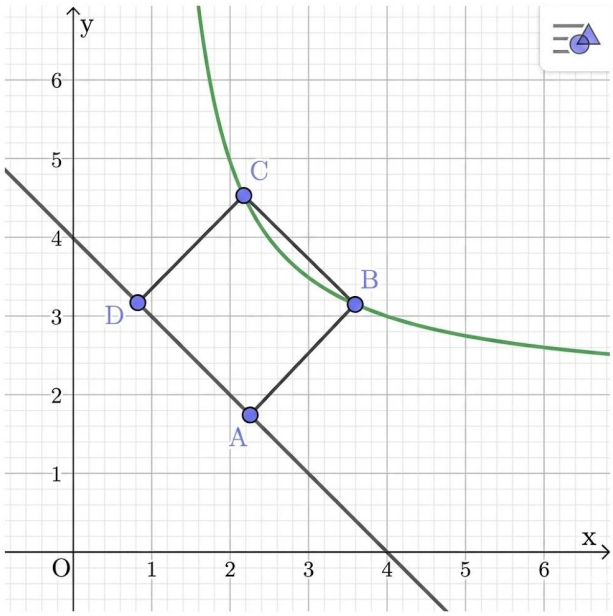
Câu 99. Trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng kilômét), mô hình hoá hai hòn đảo trên biển nằm bao bộc của hai nhánh của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Một công ty muốn xây cây cầu nối hai hòn đảo này từ vị trí A của hòn đảo 1 đến vị trí B của hòn đảo 2 sao cho khoảng cách từ A

đến B là ngắn nhất (2 điểm A và B thuộc hai nhánh của đồ thị (C)). Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm A và B bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



Trả lời: ……..

Câu 100. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y=-x+4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

CHỦ ĐỀ 2

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$.

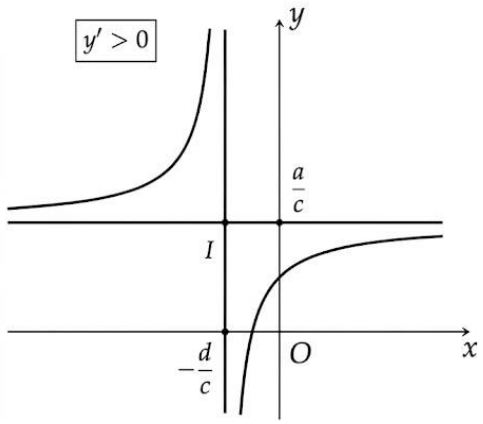
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ và đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng: $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
- Giao với Ox: $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$; giao với Oy: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}$

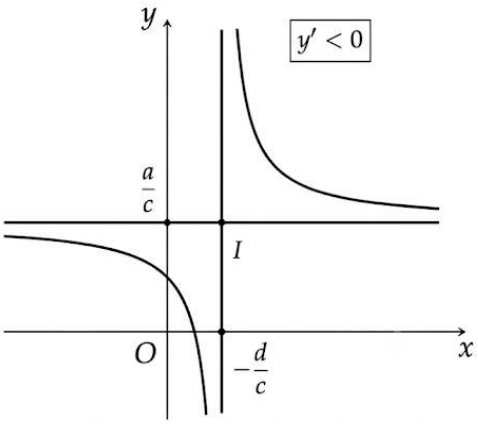
Chú ý: Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\dfrac{a}{c}=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$.

+ Trục 1: hướng đi lên (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=x+\dfrac{d}{c}$

+ Trục 2: hướng đi xuống (nhìn từ bên trái sang bên phải) là $y-\dfrac{a}{c}=-\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$.





PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (\text{c}\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$$

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x}{2x+1}$ b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

Lời giải

a) $y=\dfrac{x}{2x+1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(2x+1)^2}>0\ \ \forall x\neq -\dfrac{1}{2}$.

Do $y'>0$ với mọi $x\neq -\dfrac{1}{2}$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{x}{2x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{x}{2x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

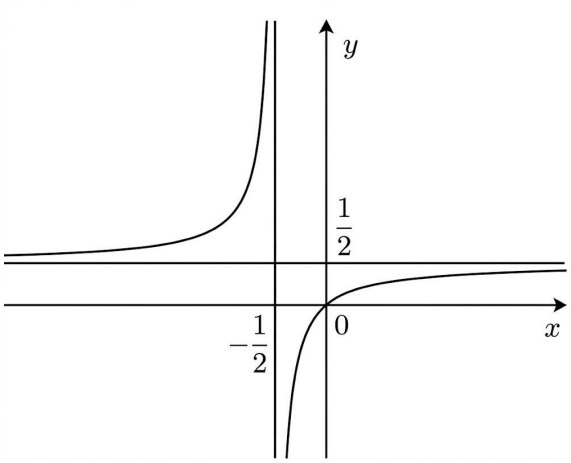
• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;0)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại điểm $(0;0)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=-\frac{1}{2}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.



b) $y=\frac{x+1}{x-1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0 \quad \forall x\neq 1.$

Do $y'<0$ với mọi $x\neq 1$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=1;\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

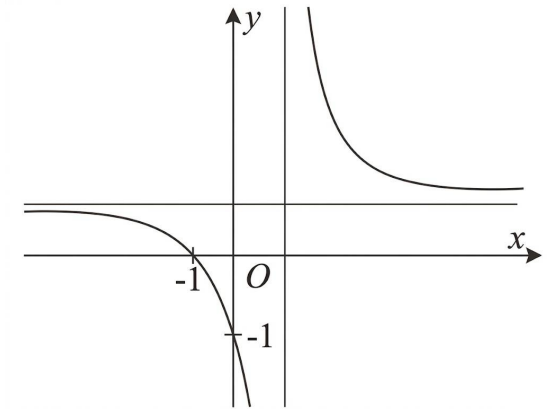
• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;1)$.

+ Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại điểm $(-1;0)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ làm trục đối xứng.



c) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

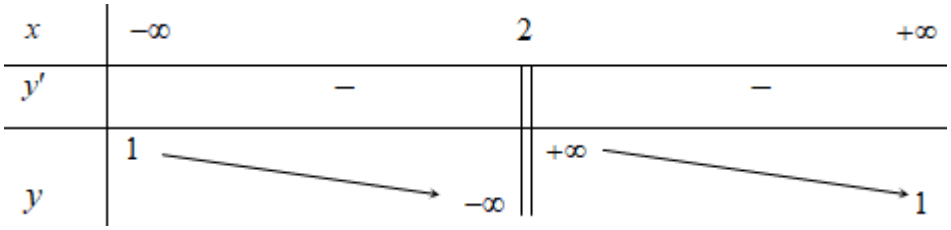
Tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to2^-} y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty;\lim\limits_{x\to2^+} y=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty;$

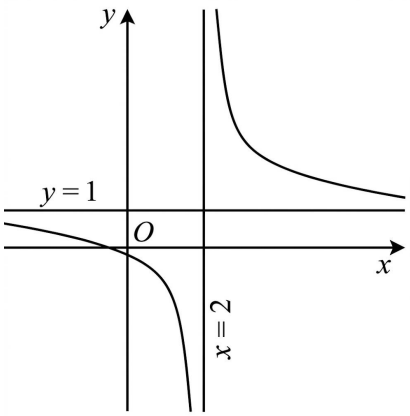
$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1.$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Bảng biến thiên:



Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\frac{2x+1}{x+1}$ b) $y=\frac{x+3}{1-x}$ c) $y=\frac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) $y=\frac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm : $y'=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

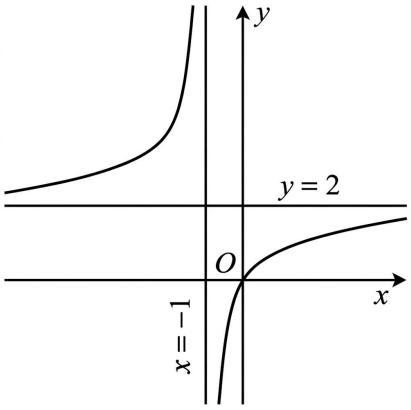
$$\lim_{x\to(-1)^-} y=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty;\ \lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

Do đó $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.

b) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên có đạo hàm $y'=\dfrac{(1-x)+(x+3)}{(1-x)^2}=\dfrac{4}{(1-x)^2}>0$ với mọi $x\neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3}{1-x}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{1-x}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1}=-1;\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

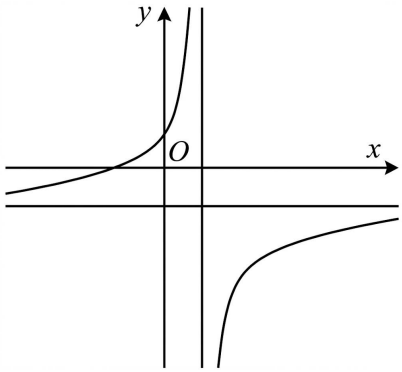
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{1-x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

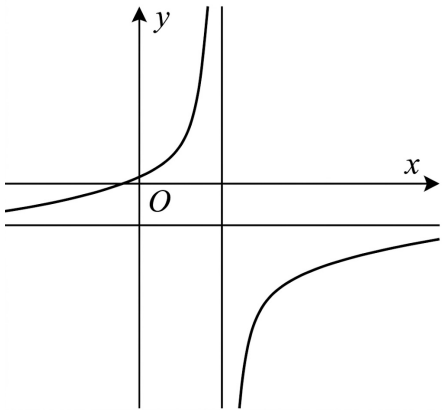
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

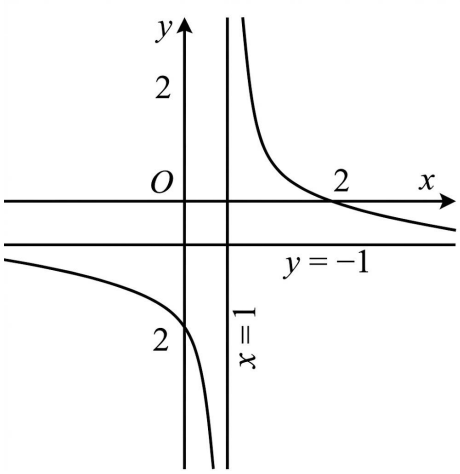
Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(2;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng bao nhiêu?

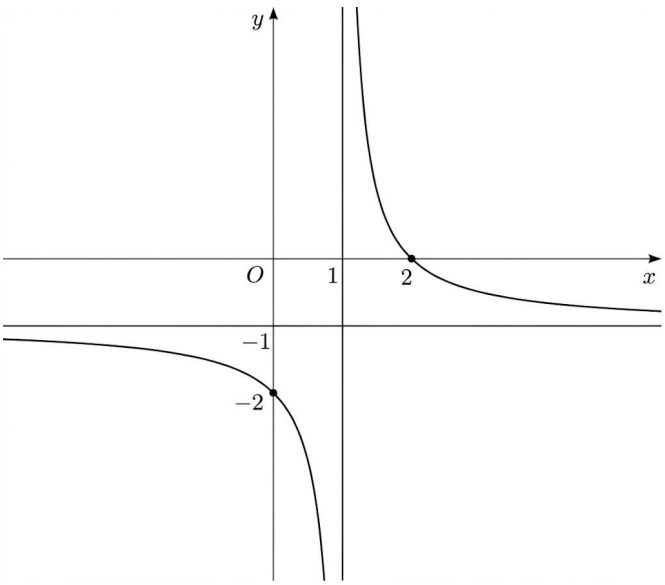
Lời giải

Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a=-1$.

Và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên

$M\left(2;0\right)\in y=\dfrac{-x-b}{x-1}\Leftrightarrow b=-2$. Vậy $a.b=2$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b+3c$?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac-b\neq 0$), ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$.

Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c=-1$, $a=-1$, $b=2$.

Vậy $T=a+2b+3c=(-1)+2.2+3(-1)=0$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

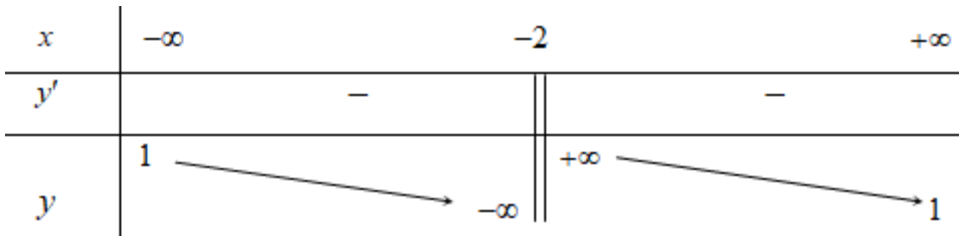
Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=3\\ \dfrac{-d}{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3c\\ d=2c\end{cases}$.

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.

Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}=\dfrac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c}=6$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-6}{bx-c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{c}{b}=-2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc<0\\ ab>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b>0,c<0,a>0\ \ (1)\\ b<0,c>0,a<0\ \ (2)\end{array}\right.$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x)=\dfrac{-ac+6b}{(bx-c)^2}<0 \Rightarrow ac>6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b>0$ thì $ac>6b>0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c>0, a<0$ thì $6b<ac<0$.

Vậy trong các số a,b,c có hai số âm.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:\ y=2x-3$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B. Tính khoảng cách giữa A và B.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d

$$\frac{2x-1}{x+1}=2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ 2x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2\Rightarrow y=1 & \Rightarrow A(2;1)\\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-4 & \Rightarrow B\left(-\dfrac{1}{2};-4\right)\end{array}\right.$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{5}{2};-5\right)$.

Suy ra $AB=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d:y=-x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Đường thẳng $d:y=-x+m$ (C) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}=-x+m$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-(m-2)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m-2)^2-4(m+1)>0\\ 1^2-(m-2).1+m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-8m>0\\ 4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>8\end{array}\right.$$

Vậy, với $m<0$ hoặc $m>8$ thì đường thẳng d cắt đồ thì (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm m để đường thẳng $d:y=x-2m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và đồ thị $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ là:

$\frac{x-3}{x+1}=x-2m$

$\Rightarrow x-3=(x+1)(x-2m)$

$\Leftrightarrow x-3=x^2-2mx+x-2m$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+3-2m=0 \quad (1)$

Đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-(3-2m)>0 \\ S=2m>0 \\ P=3-2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3>0 \\ m>0 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m>0 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}.$$

Vậy $1<m<\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm

Bài 4. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc tọa độ.

Lời giải

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x+m=\frac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow (-3x+m)(x-1)=2x+1$ (vì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình).

$\Leftrightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0$ (*)

Điều kiện: $\Delta>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4.3(m+1)>0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>11 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A+x_B=\frac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A;-3x_A+m)$, $B(x_B;-3x_B+m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\frac{x_A+x_B}{3};\frac{-3(x_A+x_B)+2m}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right)$.

$G\in\Delta \Leftrightarrow \frac{m+1}{9}-2.\frac{m-1}{3}-2=0 \Leftrightarrow m=-\frac{11}{5}$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y=3x-3m$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD.

Lời giải

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\frac{3x-2m}{mx+1} = 3x-3m \Leftrightarrow 3x^2-3mx-1=0$. (*)

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1;3x_1-3m)$, $B(x_2;3x_2-3m)$.

Tọa độ các điểm C, D là $C(m;0)$ và $D(0;-3m)$.

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết: $S_{\triangle OAB} = 2S_{\triangle OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h = 2.\frac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 + \left[3(x_1-x_2)\right]^2 = 4\left[m^2+(-3m)^2\right]$

$\Leftrightarrow 10(x_1-x_2)^2 = 40m^2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 + \frac{4}{3} = 4m^2$

$\Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{9}$.

$\Leftrightarrow m = \pm\frac{2}{3}$

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM HỮU TỈ BẬC NHẤT

Bài 1. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x\,(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \ge 0$. Khảo sát sự biên thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Lời giải

a) Tổng khối lượng KOH sau khi trộn là: $30.100+8x=3000+8x(mg)$.

Tổng thể tích dung dịch sau khi trộn là: $30+x\,(\text{ml})$

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn là $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}(\text{mg}/\text{ml})$.

b) $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}, x\ge 0$. Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

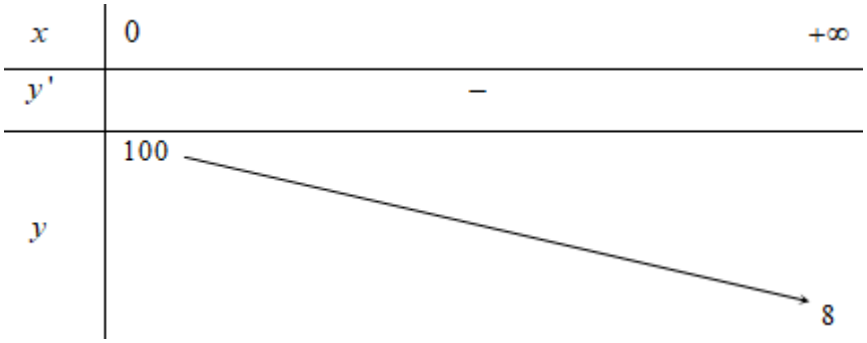
Sự biến thiên: Đạo hàm $C'(x)=\dfrac{8(30+x)-(3000+8x)}{(30+x)^2}=\dfrac{-2760}{(30+x)^2}<0$ với mọi $x\ne -30$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $[0;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3000+8x}{30+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3000}{x}+8}{\dfrac{30}{x}+1}=8$

Do đó $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

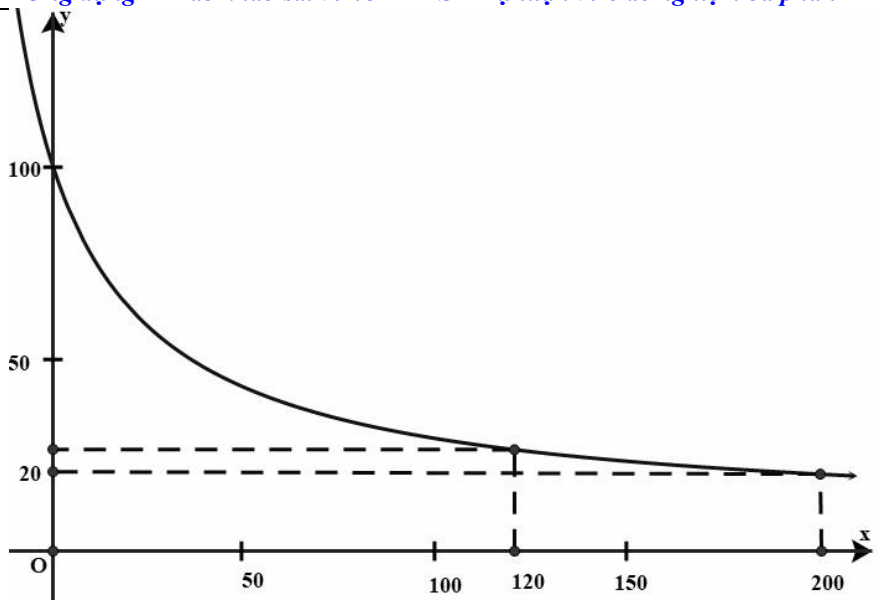
Bảng biến thiên



Đồ thị:

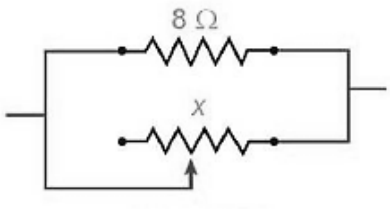
Hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;100)$.

Hàm số đi qua điểm $\left(120;\dfrac{132}{5}\right);(200;20)$.



c) Vì $C'(x)=\dfrac{-2760}{(30+x)^2}<0,\forall x\ge 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}C(x)=8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8\text{mg}/\text{ml}$.

Bài 2. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$



Giả sử một điện trở $8\,\Omega$ được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x),\ x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\,\Omega$.

Lời giải

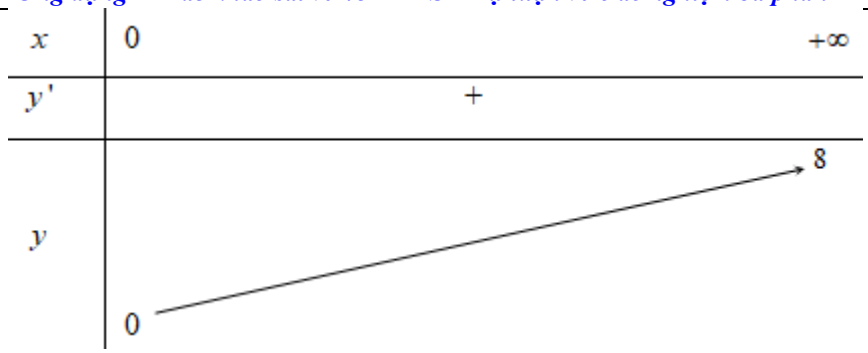
Ta có $y=R(x)=\dfrac{8x}{8+x},x>0$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm: $y'=\dfrac{8(8+x)-8x}{(8+x)^2}=\dfrac{64}{(8+x)^2}>0,\forall x>0$

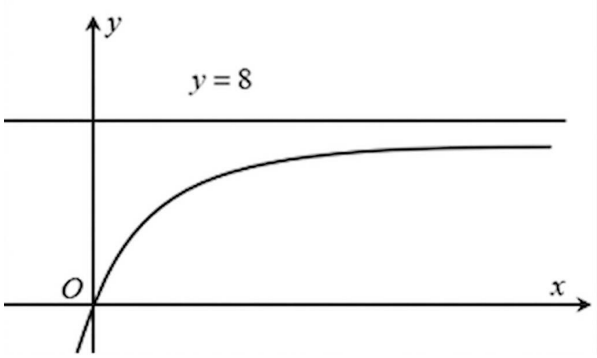
Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ vàm số không có cực trị. Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{\dfrac{8}{x}+1}=8$

Vậy $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên



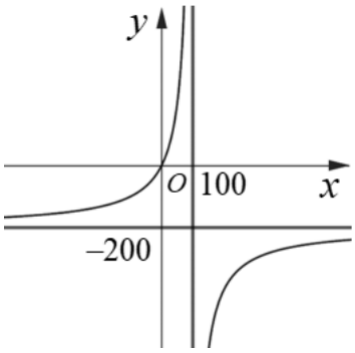
Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với Ox, Oy tại $(0;0)$; Đồ thị hàm số đi qua $\left(1;\frac{8}{9}\right);\left(2;\frac{8}{5}\right)$



a) Vì $y' = \frac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch cũng tăng.

b) Vì $y' = \frac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá $8\ \Omega$.

Bài 3. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax+b}{-x+d}$ (như hình vẽ), $(0 \le x < 100)$. Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $b = 0$.

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 100 \Rightarrow d = 100$.

Đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -200 \Rightarrow -a = -200 \Rightarrow a = 200$.

Vậy ta có $C(x)=\dfrac{200x}{-x+100}$.

Suy ra chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy là:

$C(99)-C(90)=\dfrac{200.99}{-99+100}-\dfrac{200.90}{-90+100}=18000$ (triệu đồng) $=18$ tỉ đồng.

Bài 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là $0,075$ nghìn người/năm?

Lời giải

Ta có: $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$

Vì t là số năm nên $t>0$.

Hàm số xác định với $\forall t>0$.

$f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}$.

$\Rightarrow f'(t)=0,075\Leftrightarrow\dfrac{120}{(t+5)^2}=0,075\Leftrightarrow(t+5)^2=1600\Leftrightarrow(t+5)^2=40^2$.

Vì $t>0$ nên $t=35$.

Vậy sau 35 năm kể từ năm 2002, tức là vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số của thi trấn đó là $0,075$ nghìn người/năm.

Bài 5. Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/1 lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t\in[0;+\infty)$ (gam/lit). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

Lời giải

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25.20.t=500t$ (gam).

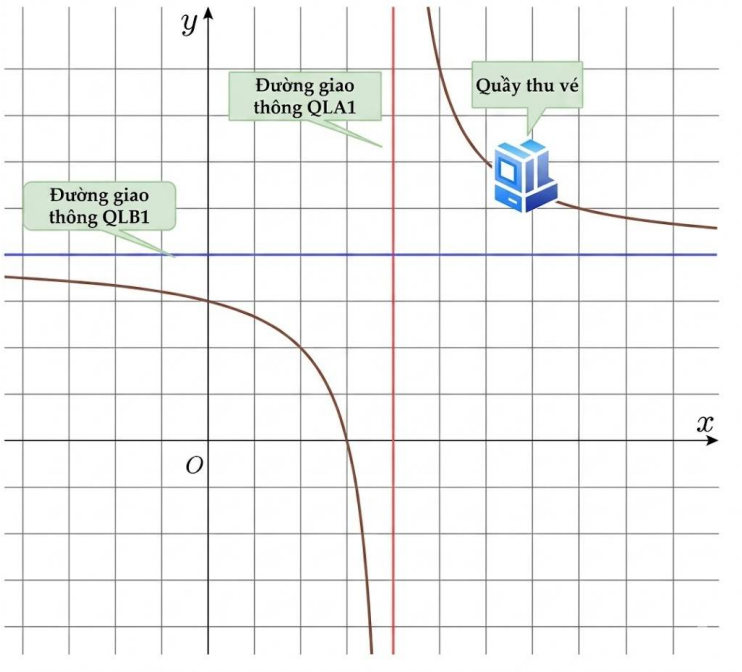
Thể tích của bể sau t phút là $3000+20.t$ (lít).

Khi đó nồng độ muối có trong nước bể là: $f(t)=\dfrac{500t}{3000+20t}=\dfrac{25t}{150+t}$ (gam/lít).

$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25t}{150+t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{150}{t}+1}=25$.

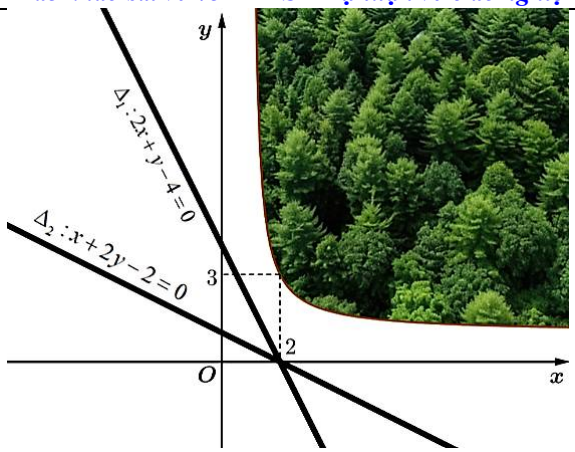
Vậy khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến 25 gam/lít.

Bài 6. Một khu du lịch được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy bằng một phần đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$. Người ta xây dựng một quầy thu vé tại điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (C), với hoành độ $x_0>2$. Khu vực này có hai tuyến đường giao thông. Tuyến đường giao thông QLA1 dọc theo đường tiệm cận đứng của đồ thị (C). Tuyến đường giao thông QLB1 dọc theo đường tiệm cận ngang của đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tuyến đường giao thông này. Hãy xác định điểm M (từ quầy thu vé) (với $x_0>2$) sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai tuyến đường giao thông tại hai điểm A và B, tạo thành một tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính khoảng cách từ quầy thu vé đến giao điểm của hai tuyến đường giao thông chính QLA1 và QLB1 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*



Lời giải

Bài 7. Mảnh đất vườn của nhà cô Minh Nhàn có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (C): $y=\dfrac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2;3)$ và có đường tiệm cận đứng $x=1$. Hàng ngày cô Minh Nhàn phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x+y-4=0$ và $\Delta_2: x+2y-2=0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Cô Minh Nhàn cần xác định một vị trí $M(x_0;y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

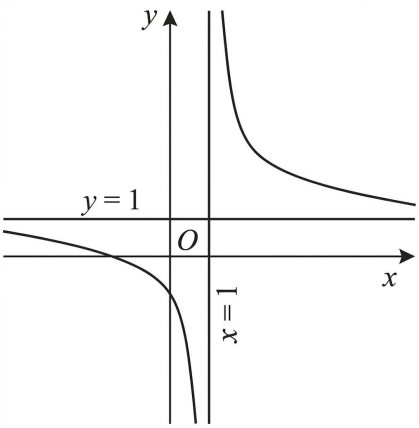


Lời giải

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{x}{1-x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x-1}$.

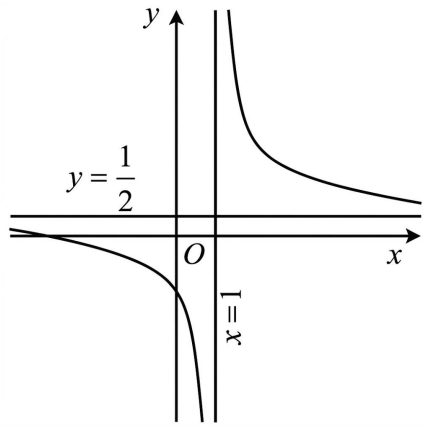
Lời giải

Chọn C.

Đồ thị trong hình bên có đường tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=1$ nên loại đáp A,B,D

Vậy chọn C

Câu 2. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x}{3x-3}$.

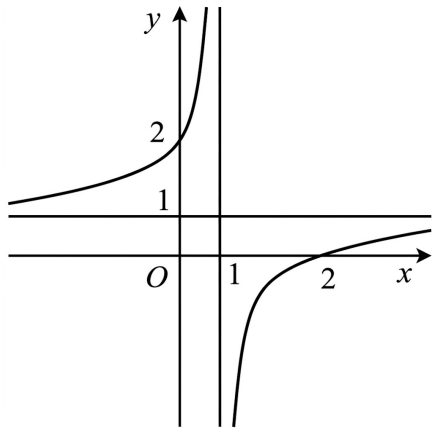
Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$ nên loại A,B,D

Vậy chọn C

Câu 3. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới



A. $y=\dfrac{x-4}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

Lời giải

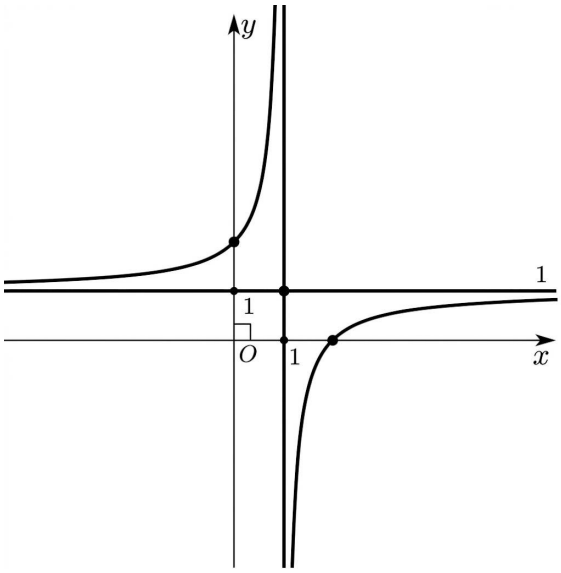
Chọn C.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy có tung độ $y=2$ nên loại B,D

Đồ thị hàm số cắt trục Ox có hoành độ $x=2$ nên loại A

Vậy chọn C

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=-x^3+3x+2$.

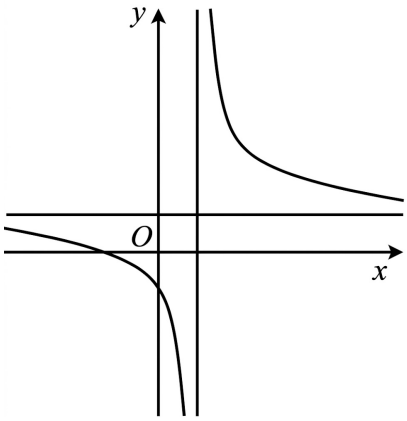
Lời giải

Chọn A.

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên loại B, C, D

Vậy chọn A

Câu 5. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=x^3-3x-1$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Lời giải

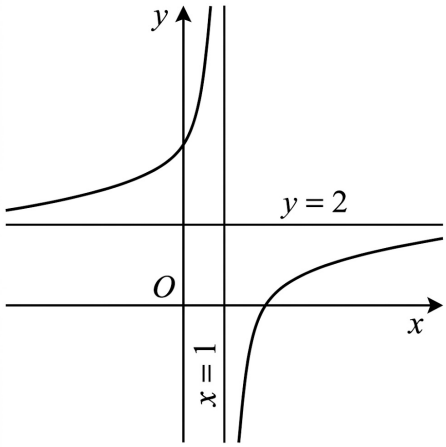
Chọn B.

Ta thấy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang nên loại A, C

Đồ thị hàm số cắt trục tung âm nên loại D

Vậy chọn B

Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x-3}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Lời giải

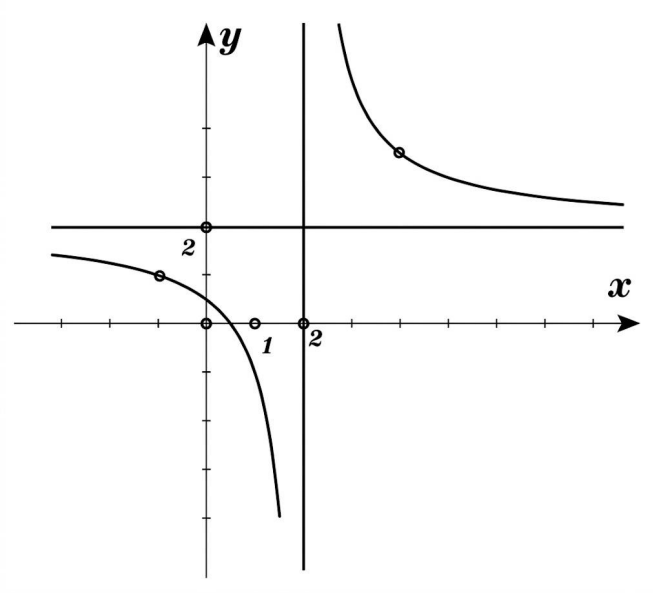
Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$, suy ra loại C

Đồ thị hàm số cắt trục tung dương và lớn hơn 2 , suy ra loại B,D

Vậy chọn A

Câu 7. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ **C.** $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D.

Quan sát đồ thị, ta thấy:

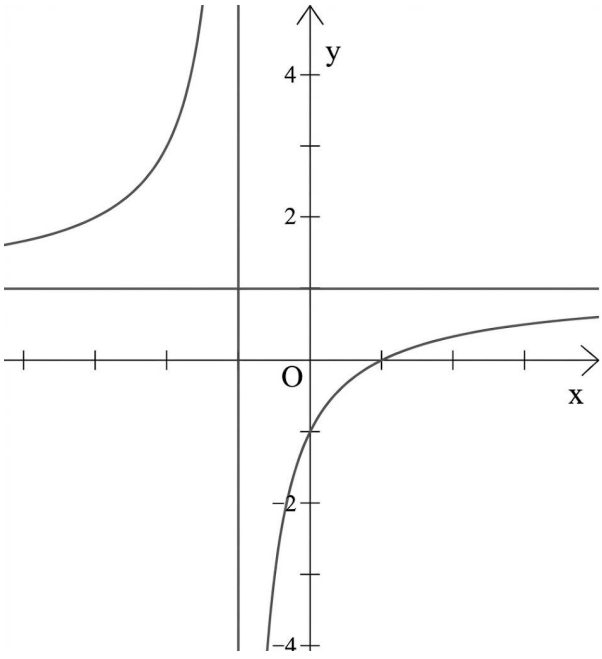
đường tiệm cận đứng $x=2$, loại đáp án B

đường tiệm cận ngang $y=2$, loại đáp án C

đồ thị hàm số cần tìm cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương, loại đáp án A

Vậy chỉ có hàm số cho ở đáp án D thoả mãn.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Lời giải

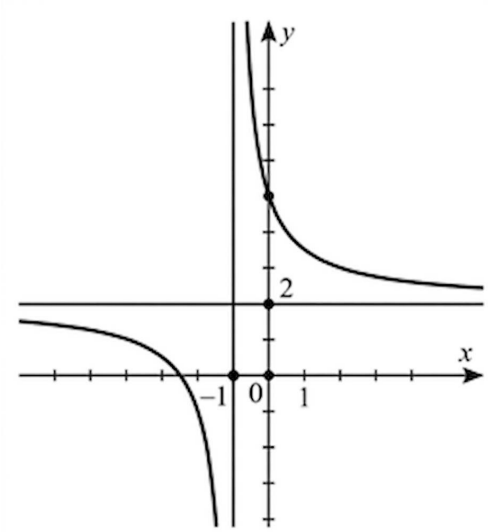
Chọn A.

Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0;ad-bc\neq 0\right)\Rightarrow$ Loại phương án C, D

Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$, loại B

$\Rightarrow$ A đúng.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y=-x^3-3x^2$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$.

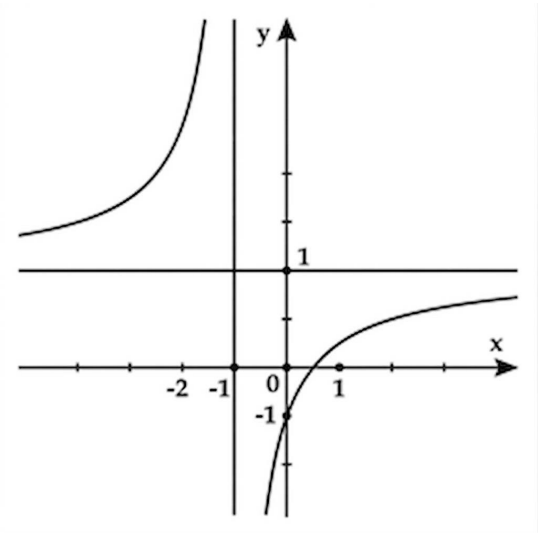
Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại A, C, D

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

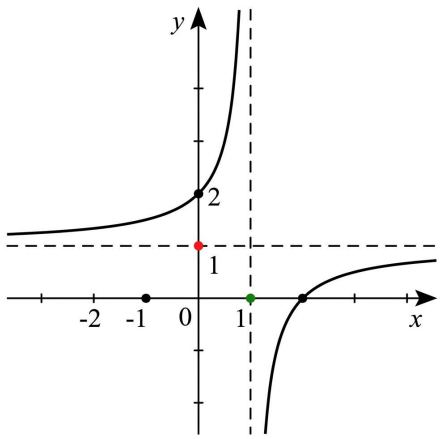
Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, D

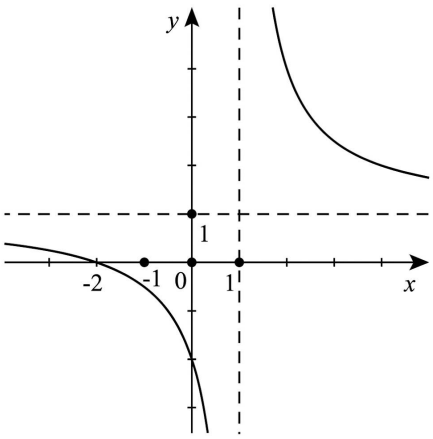
+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại C

Câu 11. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

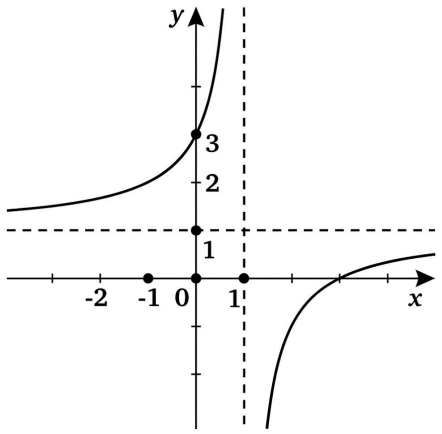
A.



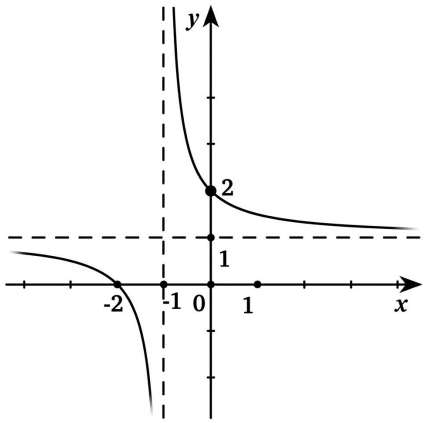
B.



C.



D.



Lời giải

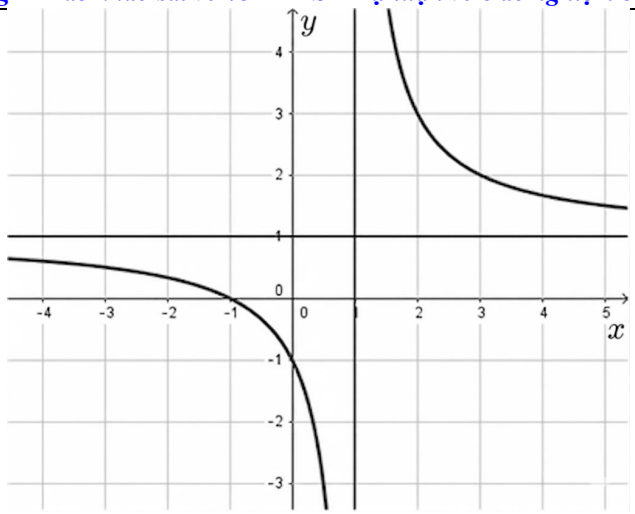
Chọn A.

Từ hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại D

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$, do đó loại B,C

Câu 12. Đồ thị sau đây là của hàm số nào:



A. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Lời giải

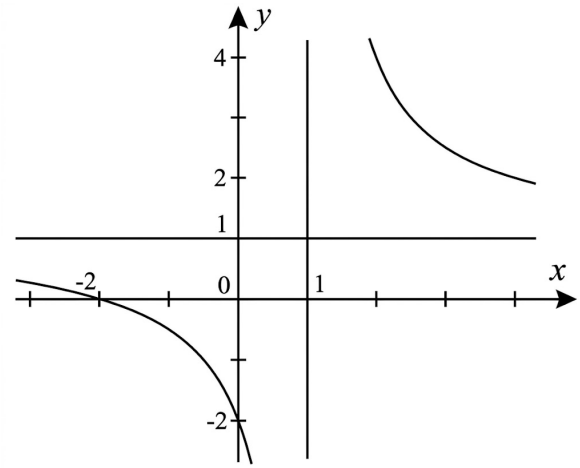
Chọn A.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại B, D

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại C

Câu 13. Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



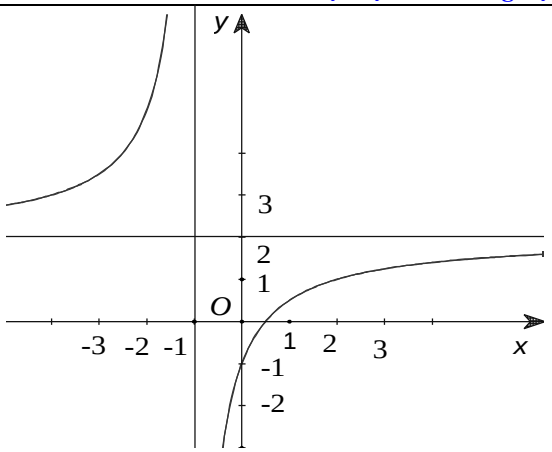
A. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{1-x}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị của hàm số, ta có: đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=1$, do đó loại A, B, D

Câu 14. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

Lời giải

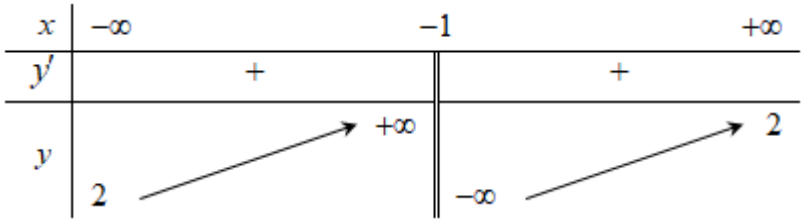
Chọn D.

Từ đồ thị của hàm số, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, C

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$, do đó loại A

Câu 15. Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.



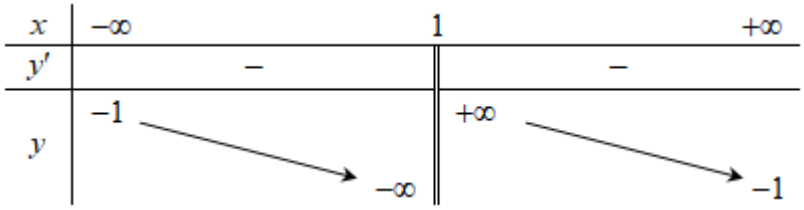
A. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2x-3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ bảng biến thiên, ta có: đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-1;\ y=2$, do đó loại B, C, D

Câu 16. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Lời giải

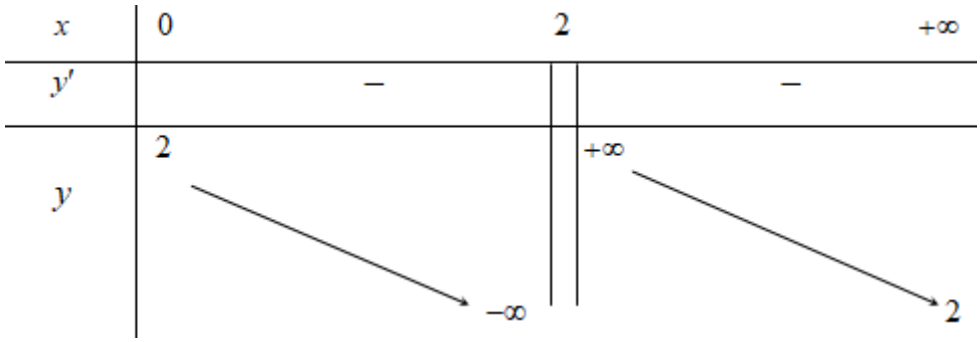
Chọn C.

Từ bảng biến thiên, ta có

+ đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=1;\ y=-1$, do đó loại A

+ hàm số nghịch biến $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, do đó loại B, D

Câu 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-2}$.

Lời giải

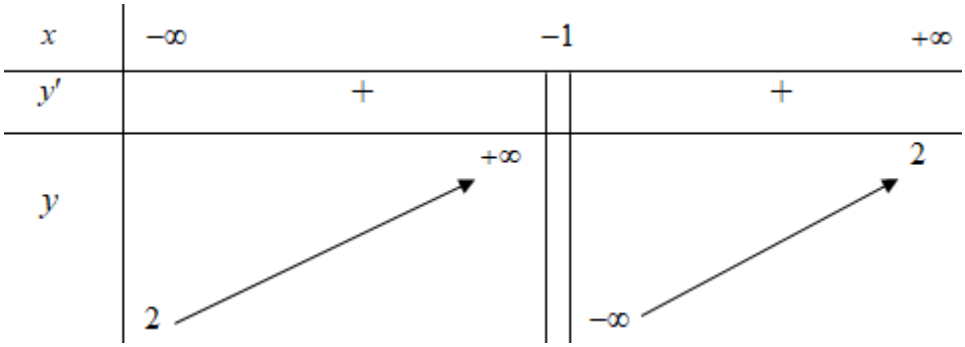
Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ nên ta loại đáp án **B.**

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ nên ta loại đáp án **D.**

Xét đáp án A có $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}>0$ nên loại đáp án **A.**

Câu 18. Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ nên loại $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.

Xét phương án $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$: $y=\dfrac{2x+3}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0,\forall x\neq -1$ suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định (loại).

Xét phương án $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$ suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định (chọn).

Câu 19. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x+5}$.

Lời giải

Chọn D.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $x=0$ và $y<0$.

Chỉ có đáp án C thảo mãn.

Câu 20. Hoành độ giao điểm của đồ thị (C): $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ và đường thẳng $d: y=x+2$.

A. $x=-\dfrac{3}{2};x=1$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2};x=1$ **C.** $x=-2;x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{3}{2};x=1$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{2x-1}=x+2$ (1)

Điều kiện: $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2x+1=(2x-1)(x+2)\Leftrightarrow 2x^2+x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{2}\\x=1\end{array}\right.$

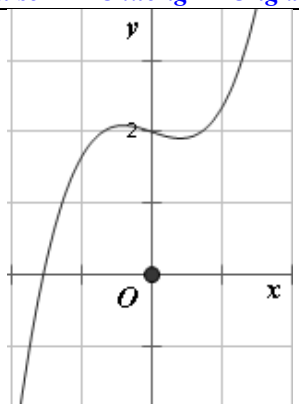
Câu 21. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ lần lượt x_A,x_B hãy tính tổng x_A+x_B

A. $x_A+x_B=2$. **B.** $x_A+x_B=1$. **C.** $x_A+x_B=5$. **D.** $x_A+x_B=3$.

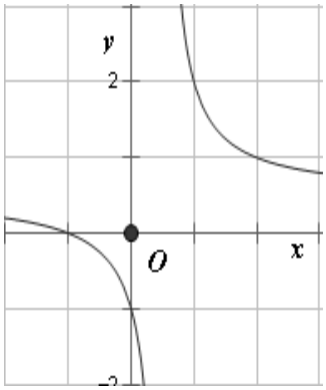
Lời giải

Chọn C.

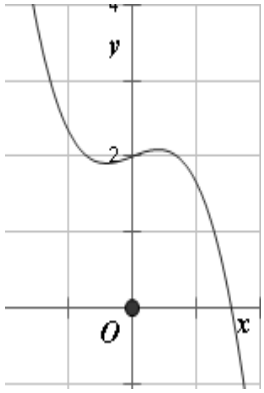
Câu 22. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{m-x}$ (m là tham số) có dạng nào sau đây ?



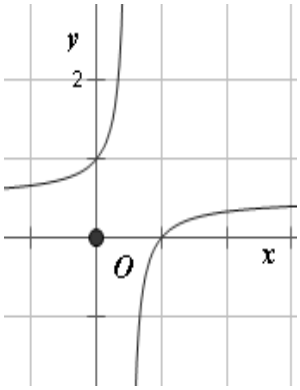
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

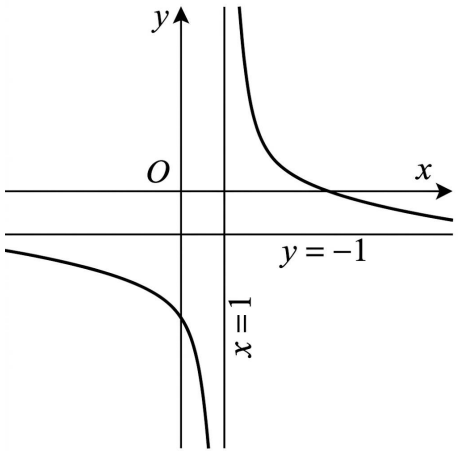
Lời giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số là hàm phân thức suy ra loại câu A, C

$y=\dfrac{mx+1}{m-x}\Rightarrow y'=\dfrac{m^2+1}{(m-x)^2}>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến suy ra loại câu B

Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Lời giải

Chọn C.

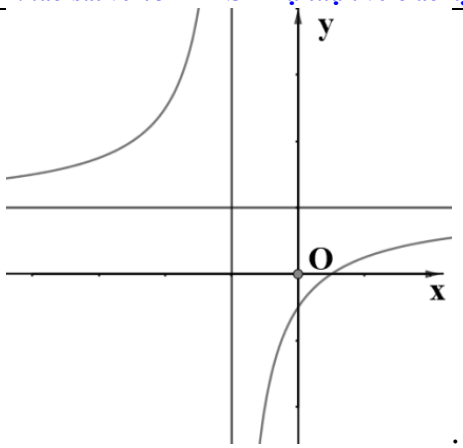
Ta có: $y'=\dfrac{-a+b}{(x-1)^2}$.

Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến nên: $-a+b<0\Leftrightarrow a>b$.

Mặt khác đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$ nên $a<0$.

Vậy $b<a<0$.

Câu 24. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad>0$ và $bd>0$.

B. $ad>0$ và $ab<0$.

C. $bd<0$ và $ab>0$.

D. $ad<0$ và $ab<0$.

Lời giải

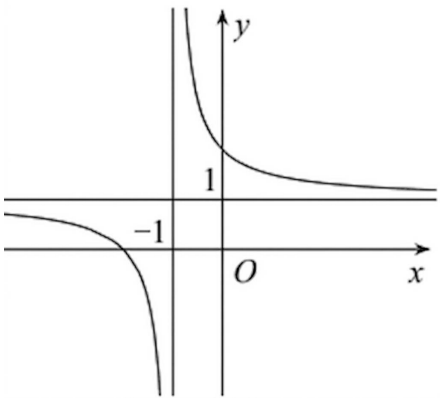
Chọn B.

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x=-\dfrac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y=\dfrac{b}{d}$.

Dựa vào hình vẽ ta có $\begin{cases}-\dfrac{b}{a}>0\\ \dfrac{b}{d}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{a}<0\\ \dfrac{b}{d}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab<0\\ bd<0\end{cases}\Rightarrow ad>0$.

Trong các phương án chỉ có phương án B thỏa mãn.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $0<b<a$.

B. $0<a<b$.

C. $b<0<a$.

D. $a<b<0$.

Lời giải

Chọn B.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y=1;x=-1$

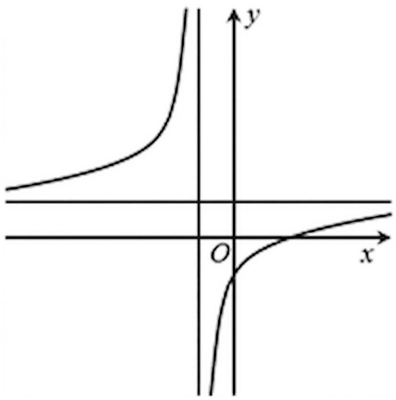
$\Rightarrow\dfrac{a}{c}=1;\dfrac{-d}{c}=-1\Rightarrow a=c;d=c\Rightarrow a=c=d$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn $-1 \Rightarrow \frac{-b}{a} < -1 \Rightarrow \frac{b}{a} > 1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $1 \Rightarrow \frac{b}{d} > 1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ad - bc < 0$ mà $a = c = d; \frac{b}{a} > 1 \Rightarrow b > a > 0$

Câu 26. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?



A. $bd > 0, ad > 0$. **B.** $bd < 0, ab > 0$. **C.** $ad > 0, ab < 0$. **D.** $ab < 0, ad < 0$.

Lời giải

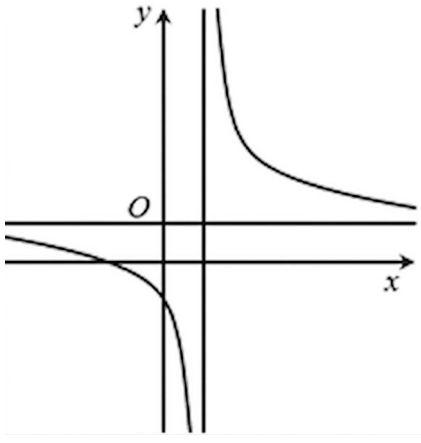
Chọn C.

Từ đồ thị suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hành độ dương.

Mặt khác, từ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Từ đó suy ra : $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$. Từ hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị có các đường tiệm cận ngang và đứng lần lượt $y = \frac{a}{c}; x = -\frac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases} \frac{a}{c} > 0 \\ -\frac{d}{c} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac > 0 \\ dc > 0 \end{cases} \Rightarrow adc^2 > 0 \Rightarrow ad > 0.$

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c-ab<0$.

B. $a>0,b>0,c-ab<0$.

C. $a<0,b>0,c-ab<0$.

D. $a<0,b<0,c-ab>0$.

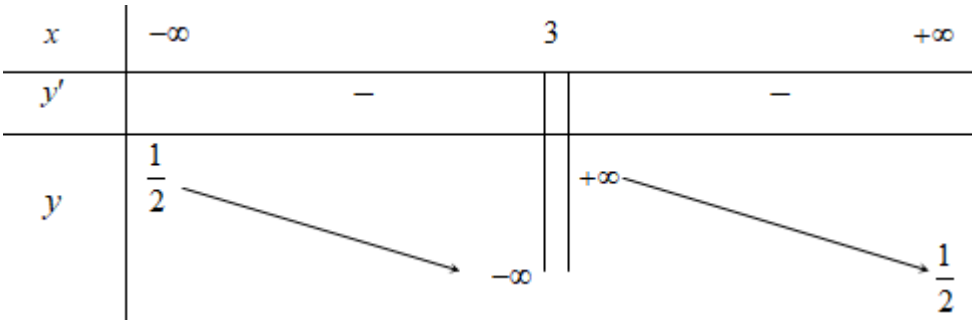
Lời giải

Chọn B.

Vì hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ nghịch biến trên tập xác định nên $-ab+c<0\Leftrightarrow c-ab<0.$

Mặc khác tiệm cận đứng $x=a$ nằm bên phải trục tung nên $a>0.$

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

C. $-\dfrac{2}{3}<b<0$.

D. $0\le b<\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-c}{b}\right\}$

Từ bảng biến thiên ta có

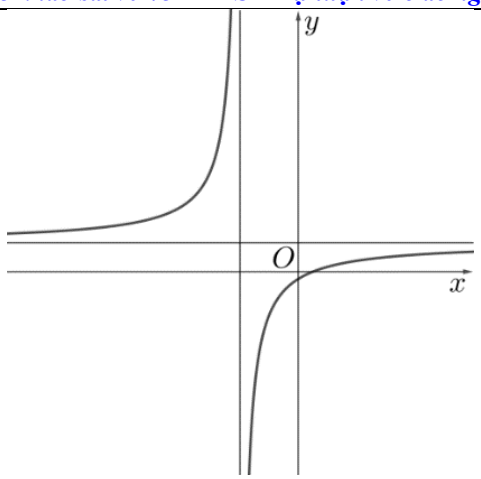
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-c}{b}=3 \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} c=-3b \\ a=\dfrac{1}{2}b \end{array}\right.\ (1)$. Mặt khác : $y'=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}<0\Leftrightarrow ac-b<0\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{1}{2}b.(-3b)-b<0\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}b^2-b<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b>0 \\ b<-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow ac>0\ (1)$

Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow \dfrac{d}{c}>0\Rightarrow cd>0\ (2)$

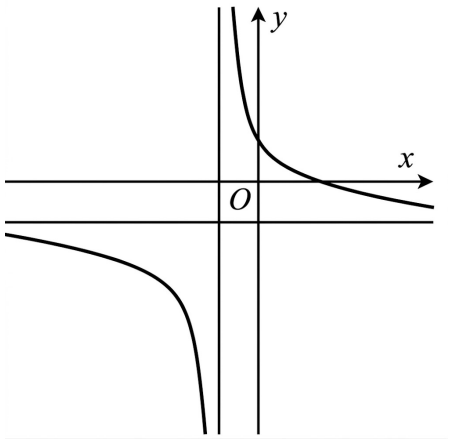
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \dfrac{b}{d}<0\Rightarrow bd<0\ (3)$

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow \dfrac{b}{a}<0\Rightarrow ab<0\ (4)$

Lấy $(3).(4)\Rightarrow adb^2>0\Rightarrow ad>0\ (5)$

Lấy $(1).(4)\Rightarrow bca^2<0\Rightarrow bc<0\ \ (6)$

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (a<0)$ có đồ thị như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab<0,bc<0,cd>0$. **B.** $ab>0,bc<0,cd>0$.

C. $ab>0,bc>0,cd>0$. **D.** $ab<0,bc>0,cd>0$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}<0$, tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}<0$

Mà theo giả thiết $a<0$ nên $c>0$ suy ra $d>0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0;\frac{b}{d}\right)$ và $\frac{b}{d}>0$ nên $b>0$

Do đó: $ab<0, bc>0, cd>0$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đạo hàm cấp 1 của hàm số đã cho là $y'=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ với mọi $x\neq 2$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Giao điểm của đồ thị hàm số (C) với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

: $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1.$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{5+x}{2-x}$ có đồ thị là (C).

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x+1$ và $y=-x-3$ làm hai trục đối xứng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$ với mọi $x\neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{1-x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+3}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

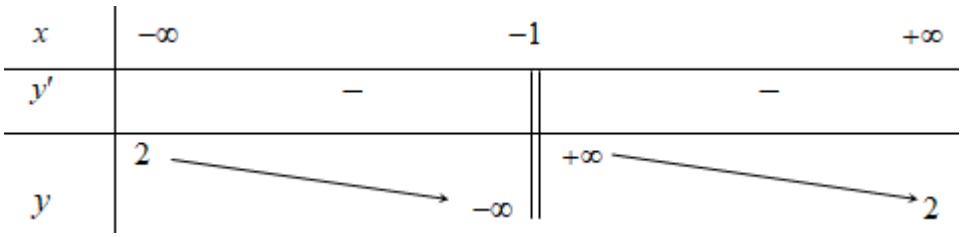
Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(2;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\dfrac{a}{c}=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$ hay $y+1=\pm(x+2)$, do đó $y=x+1,\ y=-x-3$

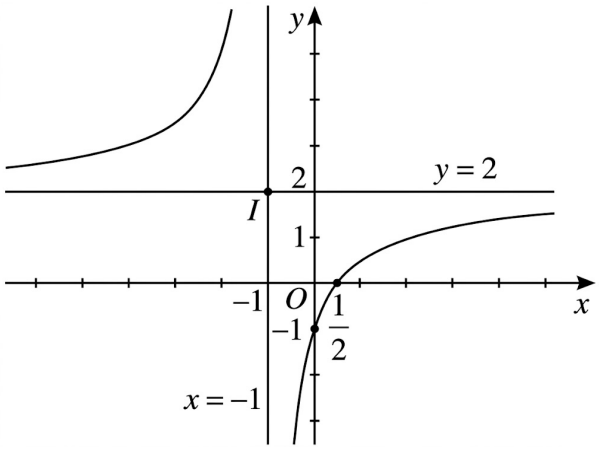
Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(2;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Sự biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y'>0$ với mọi $x\neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Tiệm cận:

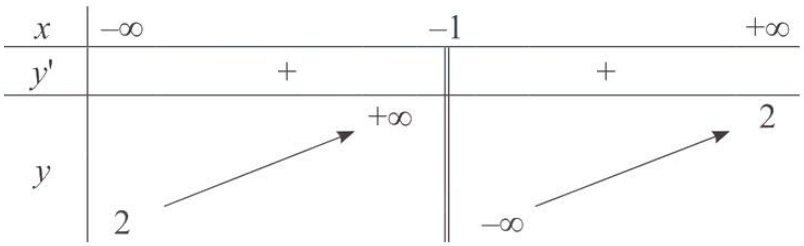
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$.

Suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$.

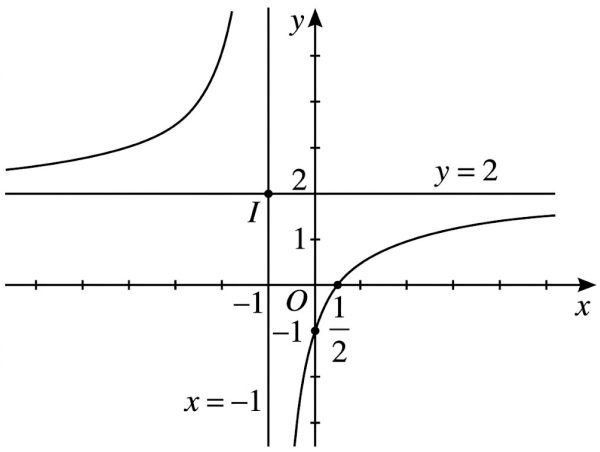
Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



c) Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;-1)$.

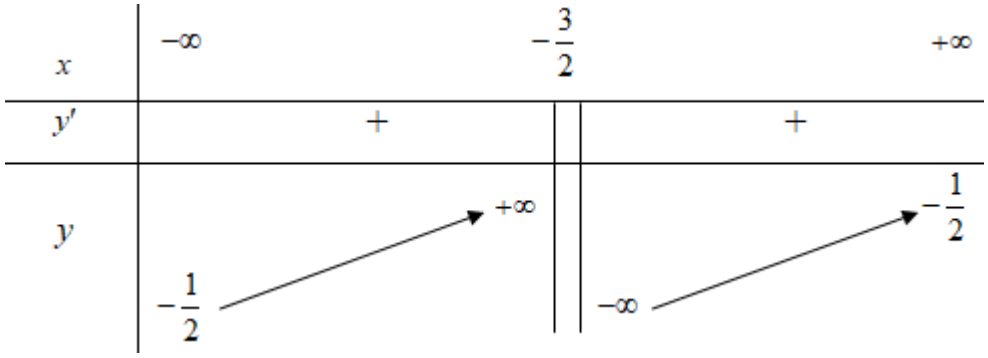


d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=2$ là $I(-1;2)$.

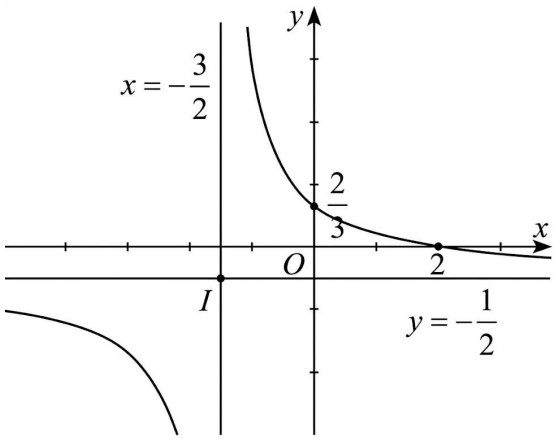
Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{2x+3}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x+1$ và $y=-x+2$ làm hai trục đối xứng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

b) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\frac{-7}{(2x+3)^2}$.

Vì $y'<0$ với mọi $x\neq-\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

- Tiệm cận:

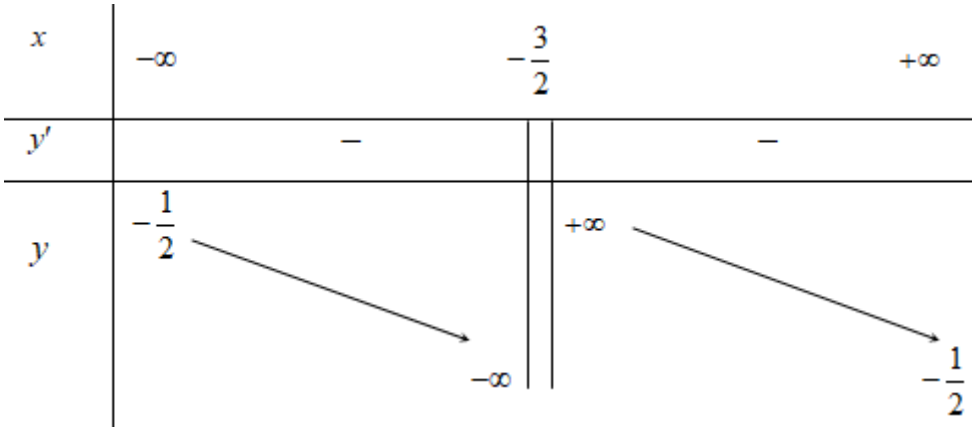
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+2}{2x+3}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{2x+3}=-\frac{1}{2}$.

Suy ra đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}\frac{-x+2}{2x+3}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}\frac{-x+2}{2x+3}=+\infty$.

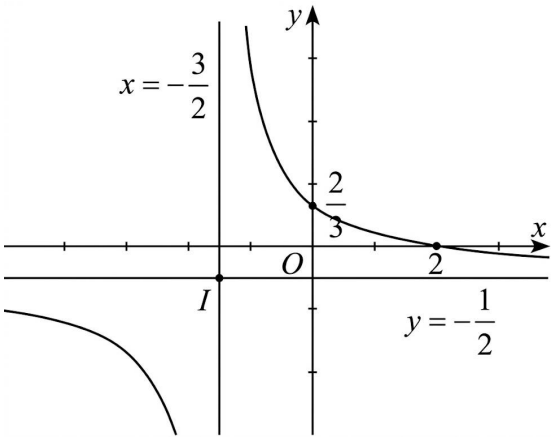
Suy ra đường thẳng $x=-\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



c) Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

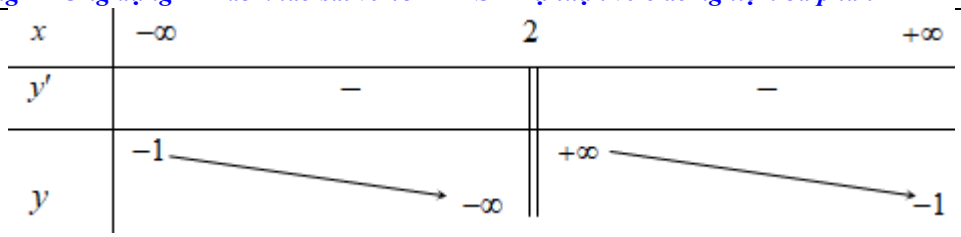


d) Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\frac{a}{c}=\pm\left(x+\frac{d}{c}\right)$ hay $y+\frac{1}{2}=\pm\left(x+\frac{3}{2}\right)$, do đó $y=x+1$, $y=-x-2$

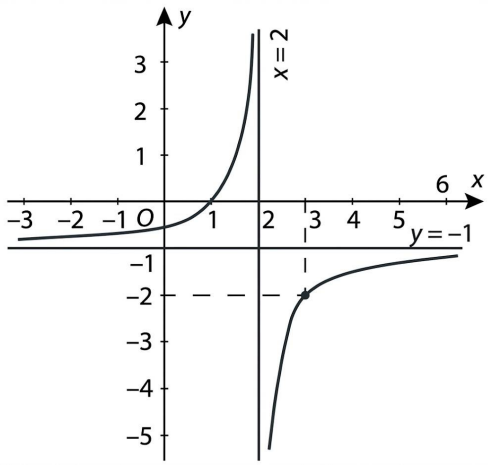
Câu 35. Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Đồ thị (C) nhận hai đường thẳng $y=x-3$ và $y=x-1$ làm hai trục đối xứng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Sự biến thiên:

Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x+1}{x-2}=-\infty;\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x+1}{x-2}=+\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x-2}=-1;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x-2}=-1.$$

Suy ra đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0,\forall x\in D;\ y'$ không xác định tại $x=2$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

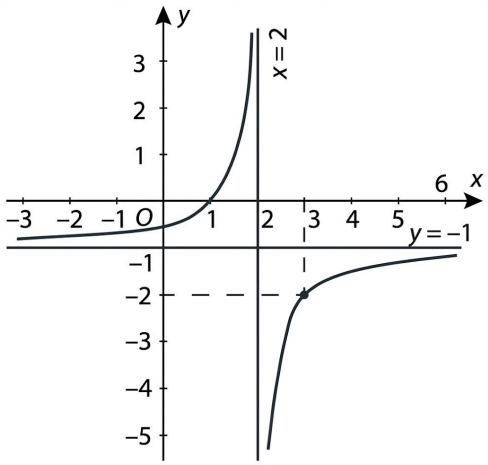
Hàm số không có cực trị.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-1

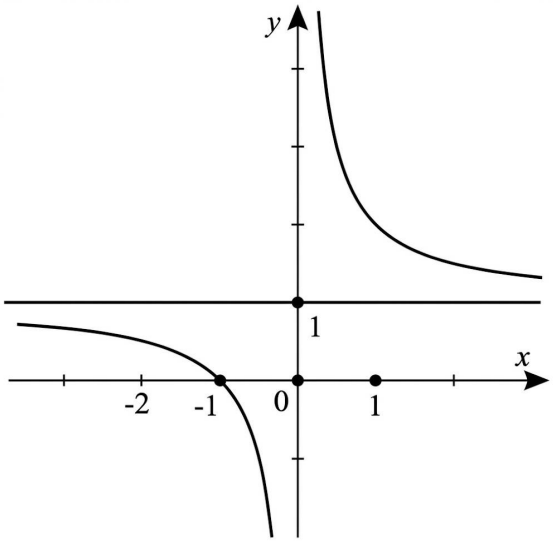
c) Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ và giao với trục Ox tại điểm $(1;0)$.



d) Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-\frac{a}{c}=\pm\left(x+\frac{d}{c}\right)$ hay $y+1=\pm(x-2)$, do đó $y=x-3$, $y=-x+1$

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Điểm $(0;1)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

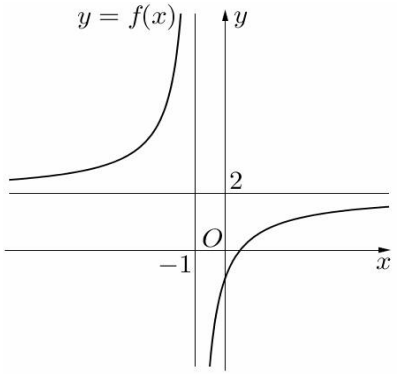
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$, tiệm cận ngang $y=1$.

b) Do điểm $(0;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x=0$ và $y=1$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.

b) Điểm $(-1;2)$ là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào đồ thị, ta có:

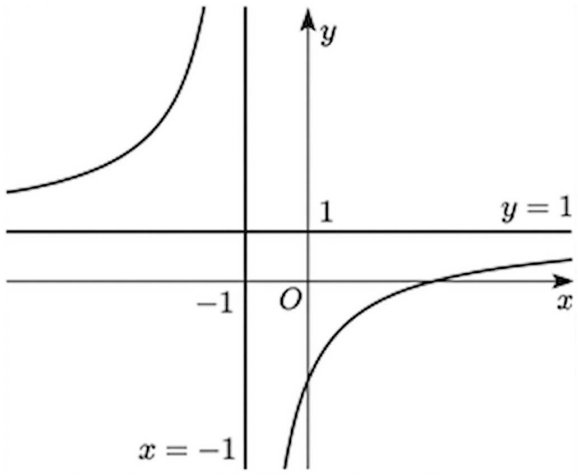
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

b) Do điểm $(-1;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=2$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

c) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$ nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x+2$ và $y=x$ làm hai trục đối xứng.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

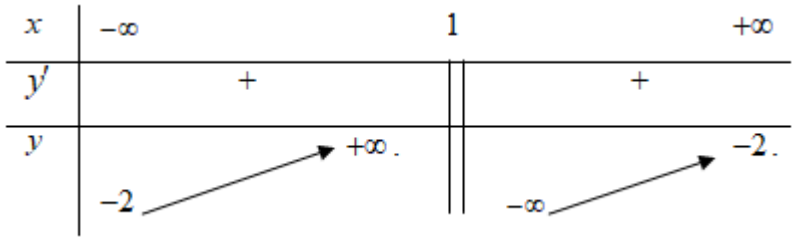
b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$.

c) Do điểm $(-1;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=1$ nên là tâm đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$

Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-1=\pm(x+1)$, do đó $y=x+2$, $y=-x$

d) Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$ nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x-3$ và $y=-x+1$ làm hai trục đối xứng.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

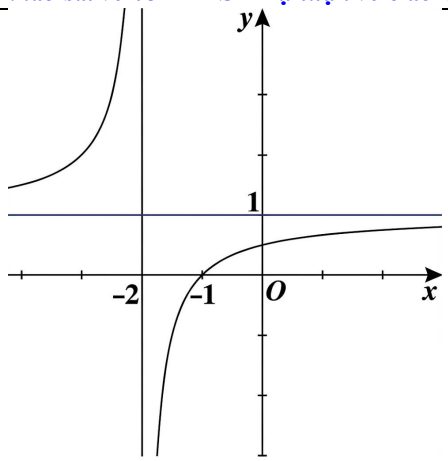
b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

c) Đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y+2=\pm(x-1)$, do đó $y=x-3$, $y=-x-1$

d) Hàm số $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$ thỏa

Ta tiếp tục tính $y'=\dfrac{-5}{(x-1)^2}<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ suy ra nghịch biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-2$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(0;-1)$.

d) Hàm số $y=f(x)$ là hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị ta có:

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$ và tiệm cận ngang là $y=1$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;+\infty)$.

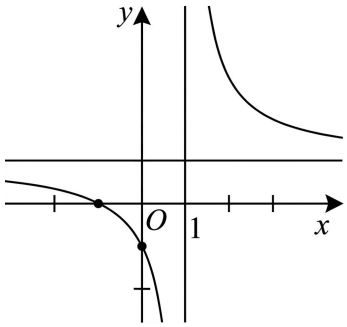
c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ là $(-1;0)$.

d) Hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận ngang là $y=1$ thỏa

Ta tiếp tục tính $y'=\dfrac{-1}{(x+2)^2}<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ suy ra nghịch biến trong khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$

nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) $\frac{d}{c}>0$

b) $\frac{a}{c}<0$

c) $ad<0$

d) $y'<0$ với mọi $x\neq 1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

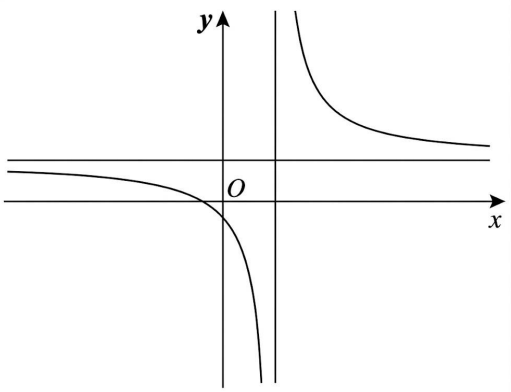
a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=1=-\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{d}{c}<0$

b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}>0\Rightarrow\frac{a}{c}>0$

c) ta có $\begin{cases}\frac{d}{c}<0\\ \frac{a}{c}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{d}{c}.\frac{a}{c}<0\Rightarrow\frac{ad}{c^2}<0\Rightarrow ad<0$

d) Đây là đồ thị của hàm nghịch biến nên $y'<0$ với mọi $x\neq 1$.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) $\frac{d}{c}>0$

b) $\frac{a}{c}>0$

c) $ad>bc$

d) $ad<0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Theo đồ thị:

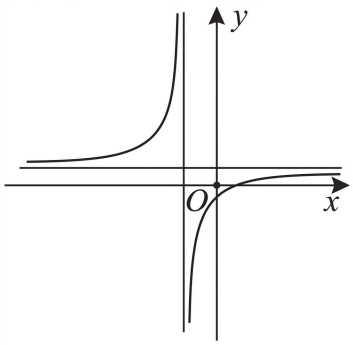
a) Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}>0\Rightarrow\dfrac{d}{c}<0$

b) Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}>0$

c) Đây là đồ thị của hàm nghịch biến nên $y'<0\Leftrightarrow\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}<0\Rightarrow ad-bc<0\Rightarrow ad<bc$.

d) ta có $\begin{cases}\dfrac{d}{c}<0\\ \dfrac{a}{c}>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{d}{c}.\dfrac{a}{c}<0\Rightarrow\dfrac{ad}{c^2}<0\Rightarrow ad<0$

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) a và b trái dấu

b) b và d cùng dấu

c) $ad>0$

d) $bc<0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o=-\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow$ a và b trái dấu (1).

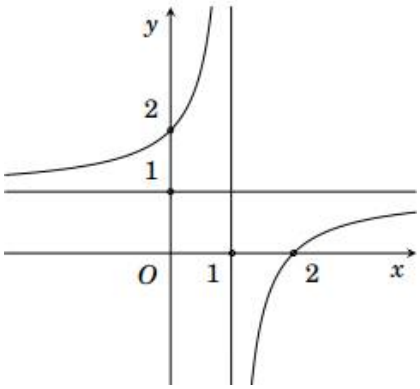
+ Giao với trục tung tại $y_o=\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad>0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc<0$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

d) $a-3b-2c=-3$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị, ta có:

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$

Do đó tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;1)$.

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

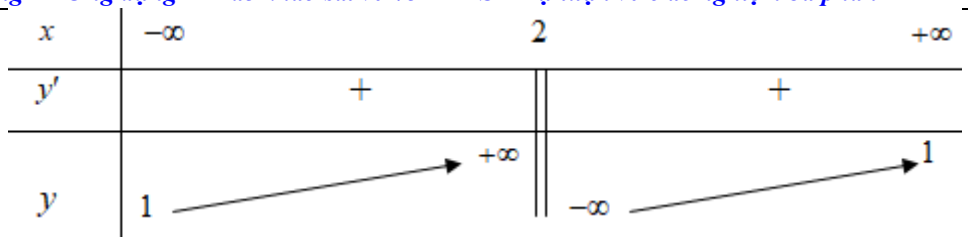
d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ nên $\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow b=1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên $-\dfrac{c}{b}=1$ mà $b=1\Rightarrow c=-1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ nên $\dfrac{a}{c}=2$ mà $c=-1\Rightarrow a=-2$

Vậy $T=a-3b-2c=-2-3.1-2.(-1)=-3$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ



a) Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$

d) $a+b+c=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

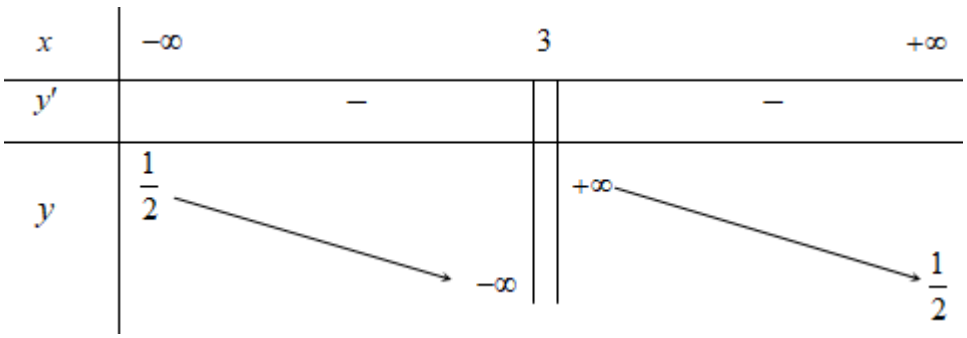
b) Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ nên

d) ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

d) $b<0$ hoặc $b>\dfrac{2}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$

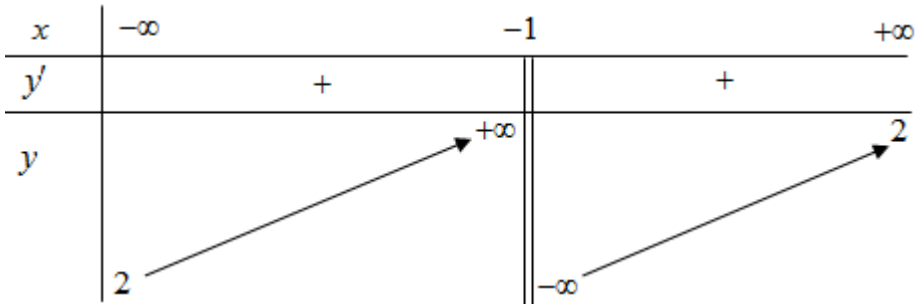
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3

d) Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{c}{b}=3\end{cases}$ (1)

Ta có: $y'=\dfrac{ac+b}{(bx+c)^2}<0,\ \forall x\neq -\dfrac{c}{b}\Leftrightarrow ac+b<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{b}{2}.(-3b).+b<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b>\dfrac{2}{3}\\ b<0\end{array}\right.$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận hai đường thẳng $y=x+3$ và $y=-x+1$ làm hai trục đối xứng.

c) $a+c=-1$

d) $b^3-8<0.$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

b) Hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=-1$ và đường tiệm cận ngang $y=2$.

Do đó đồ thị nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm hai trục đối xứng: $y-2=\pm(x+1)$, do đó $y=x+3$, $y=-x+1$

c) d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Do đó $-\dfrac{1}{c}=-1\Rightarrow c=1$ và $\dfrac{a}{c}=2\Rightarrow a=2$ (vì $c=1$)

$\Rightarrow a+c=3$

Ta có $y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên

$y'=\dfrac{a-bc}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow a-bc>0\Leftrightarrow 2-b>0\Leftrightarrow b<2\Leftrightarrow b^3<8\Leftrightarrow b^3-8<0$.

Câu 48. Cho hầm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(1;-1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $m=2$

d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Khi $m=2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$

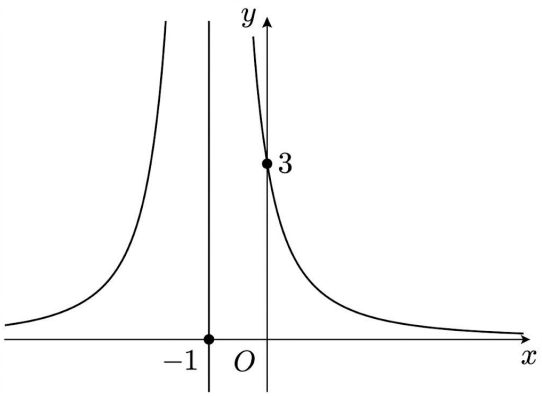
b) Khi $m=2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có toạ độ $I(-1;1)$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m\left(-\dfrac{m}{2}\right)-1\neq 0\Leftrightarrow m^2+2\neq 0$ đúng với mọi giá trị m.

Khi đó đường thẳng $-\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $y'=\dfrac{m^2+2}{(2x+m)^2}>0,\forall x\neq -\dfrac{m}{2}$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$.

a) $b=4d$

b) $c=d$

c) $y=\dfrac{7x-4}{x+1}$.

d) $f(2)=\dfrac{10}{3}$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $A(0;4)$ nên $b=4d\ (1)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\dfrac{d}{c}=-1\Rightarrow c=d\ (2)$.

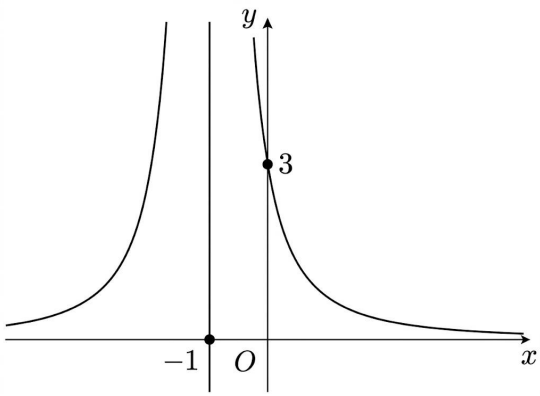
Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua $(0;3)$ nên $\dfrac{ad-bc}{d^2}=3\Rightarrow ad-bc=3d^2\ (3)$.

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ad-4d^2=3d^2\Rightarrow a=7d\ (d\neq 0)$ vì nếu $d=0$ thì $a=b=c=d=0$ (vô lí).

Do đó $f(x)=\dfrac{7dx+4d}{dx+d}=\dfrac{7x+4}{x+1}$.

Vậy $f(2)=6$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.



a) $f'(0)=3$

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$

b) Do $f'(x)>0,\forall x\neq -1$ nên hàm số đã cho $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Do $f'(x)>0,\forall x\neq -1\Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8$ suy ra $f(-3)\neq 8$

d) Ta có $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3\Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$

Vì $f'(x)>0,\forall x\neq 1\Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=8\Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2\\ -c+d=0\\ b-2a=8(d-2c)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=d\\ a-b=3d\\ b-2a=-8d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=5d\\ b=2d\\ c=d\end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x)=\dfrac{5dx+2d}{dx+d}=\dfrac{5x+2}{x+1}\Rightarrow f(2)=4$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+3}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Đồ thị hàm số cắt trục tung thỏa mãn $x=0\Rightarrow y=1$

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị (C) có hoành độ và tung độ đều nguyên với $x_0\neq 2$

Ta có: $y_0=\dfrac{-x_0+1}{x_0-2}=\dfrac{-\left(x_0-2\right)-1}{x_0-2}=-1-\dfrac{1}{x_0-2}$

Vì y_0 nguyên nên $1\vdots\left(x_0-2\right)$ hay x_0-2 là ước của 1

Do đó:

$x_0-2=-1\Rightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=0$

$x_0-2=1\Rightarrow x_0=3\Rightarrow y_0=-2$

Vậy có 2 điểm thỏa yêu cầu bài toán

Câu 53. Đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $\Delta: y=-x$ tại hai điểm phân biệt A và B.

Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính x_0+y_0.

Trả lời: ……..

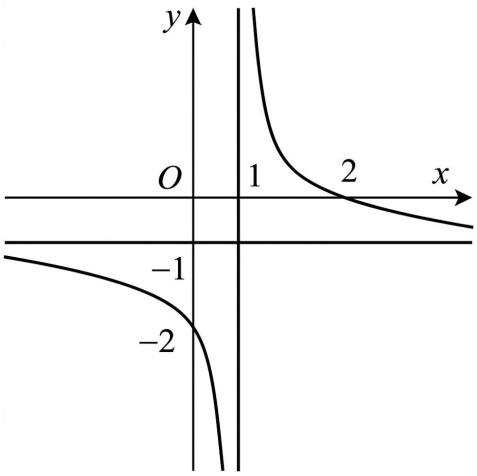
Lời giải

Đáp án: 0

$\dfrac{2x-8}{x}=-x\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x^2+2x-8=0\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=\dfrac{-x_A-x_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_0=-\dfrac{x_A+x_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{-2}{2}=-1\\ y_0=-\dfrac{-2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow I(-1;1)\Rightarrow x_0+y_0=0$

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

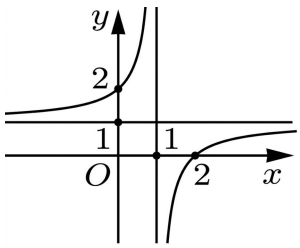
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x=-c$ suy ra $-c=1\Leftrightarrow c=-1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y=a$ suy ra $a=-1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{b}{c}\right)$ nên $\frac{b}{c}=-2$ mà $c=-1$ suy ra $b=2$.

Vậy, $a+2b+3c=0$.

Câu 55. Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\frac{x+a}{bx+c}$, với $a,b,c\in\mathbb{R}$.



Khi đó giá trị biểu thức $T=a-3b-2c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −3

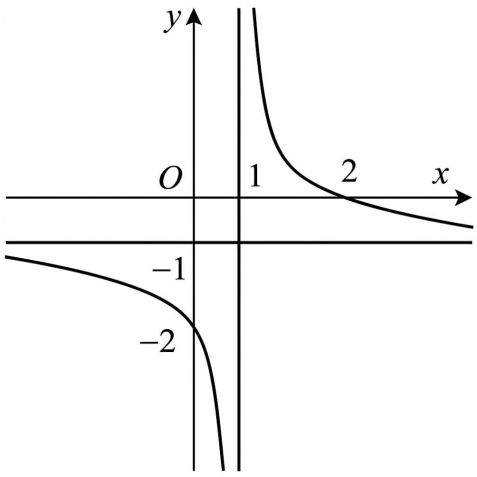
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1\Rightarrow\frac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow-\frac{c}{b}=1\Leftrightarrow b=-c\Rightarrow c=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)\Rightarrow 2=\frac{0+a}{1.0+(-1)}\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy $T=a-3b-2c=(-2)-3.1-2.(-1)=-3$.

Câu 56. Cho hàm số $y=\frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó giá trị biểu thức $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

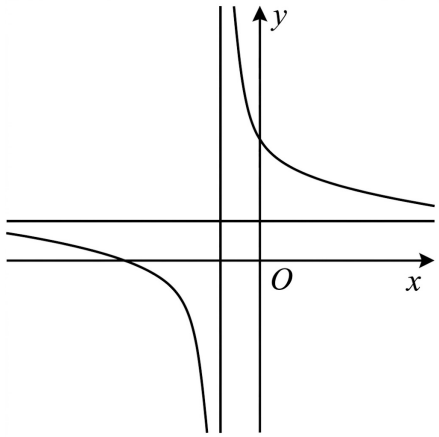
Đáp án: -3

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1 \Rightarrow \dfrac{a}{c}=-1 \Rightarrow a=-1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0) \Rightarrow 2a-b=0 \Rightarrow b=-2$

$\Rightarrow T=a+b=-3$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

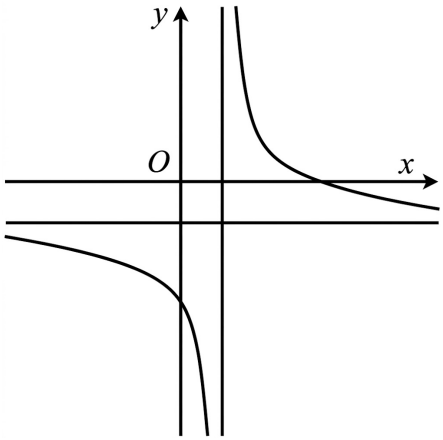
Ta có: $y'=\dfrac{a-b}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=a \Rightarrow y=a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Dựa vào đồ thị ta có: $a>0$.

Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

$\Rightarrow y'<0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow a-b<0 \Leftrightarrow a<b \Rightarrow 0<a<b$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Trong hai số a,b có tất cả bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

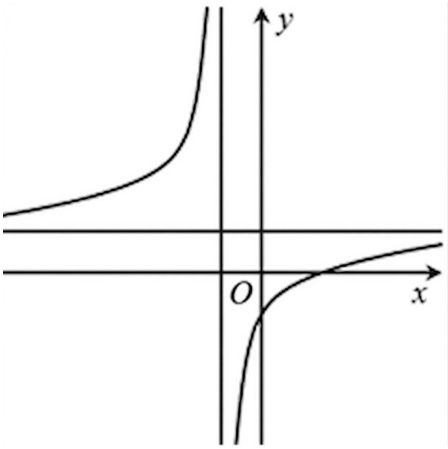
Lời giải

Đáp án: 1

Dựa vào đồ thị, ta thấy tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành

Suy ra $\begin{cases}\dfrac{a}{c}<0\\ -\dfrac{b}{c}>0\\ \dfrac{4-b}{b}>0\\ \dfrac{b-4}{a}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<b<4\\ a>0\\ c<0\end{cases}$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b,c,d có tất cả bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

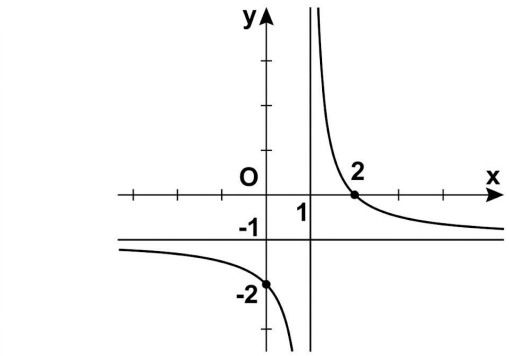
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=\frac{a}{c}>0$ nên $c>0$.

Đồ thì hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-\frac{d}{c}<0$ nên $d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=-\frac{b}{a}>0$ nên $b<0$.

Vậy trong các số b,c,d có 2 số dương,

Câu 60. Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ và các hệ số a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –9

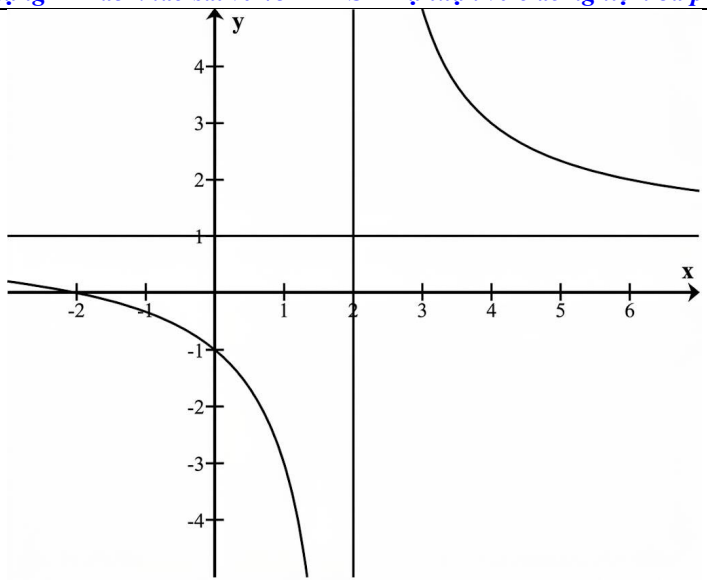
Đồ thị hàm số trên hình vẽ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty}y=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=a$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a$ suy ra $a=-1$

Suy ra $y=\frac{-x+b}{x+c}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;-2),B(2;0)$ suy ra $\begin{cases}\frac{b}{c}=-2\\0=\frac{-2+b}{2+c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-1\end{cases}$

$T=a-3b+2c=-1-6-2=-9$.

Câu 61. Cho hàm số $y=\frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên.



Tính giá trị của biểu thức $T = 2025a - b + 2c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2029.

Đồ thị hàm số trên hình vẽ, ta có:

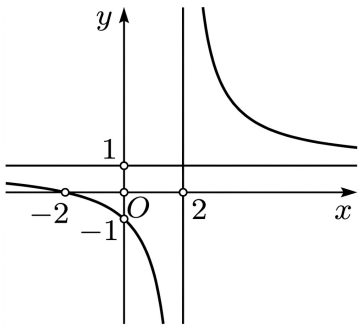
+ Đồ thị hàm số cắt trục tung $x = 0, y = -1 \Rightarrow \dfrac{2}{b} = -1 \Leftarrow b = -2$

+ tiệm cận đứng là $y = 2 \Rightarrow -\dfrac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = -2c \Rightarrow c = 1$

+ tiệm cận ngang là $y = 1 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c = 1$

$\Rightarrow T = 2025a - b + 2c = 2029$

Câu 62. Cho hàm số $y = \dfrac{x - a}{bx + c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –3

Ta có: Tiệm cận đứng: $x = 2 \Rightarrow -\dfrac{c}{b} = 2 \Leftrightarrow 2b + c = 0 \ (1)$.

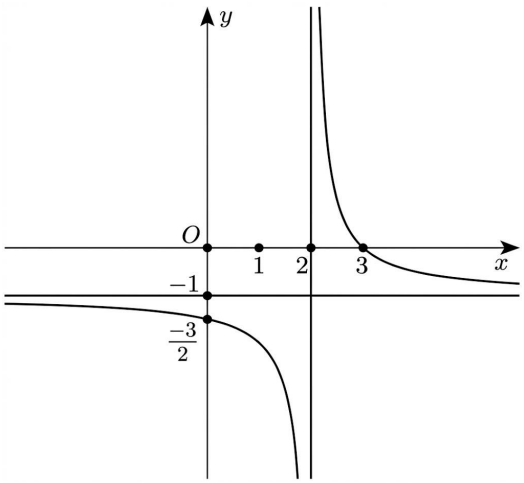
Tiệm cận ngang: $y=1\Rightarrow\dfrac{1}{b}=1\Leftrightarrow b=1\,(2)$.

Thế (2) vào (1) suy ra $c=-2$. Suy ra hàm số có dạng $y=\dfrac{x-a}{x-2}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;0)$ nên ta có: $0=\dfrac{-2-a}{-2-2}\Leftrightarrow a=-2$.

Vậy $P=-2+1-2=-3$.

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Đồ thị hàm số có TCN $y=-1\Leftrightarrow\dfrac{a}{1}=-1\Leftrightarrow a=-1.$

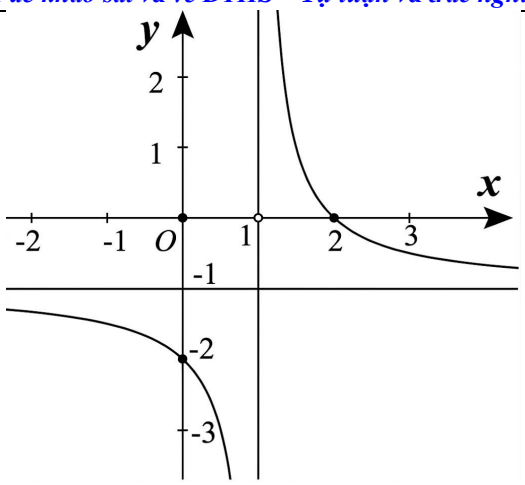
Mặt khác đồ thị hàm số có TCĐ $x=2$ nên $2+c=0\Leftrightarrow c=-2.$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases}0=\dfrac{a.3+3}{3+c}\\-\dfrac{3}{2}=\dfrac{a.0+3}{0+c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+3=0\\-3c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-2\end{cases}$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3.$

Câu 64. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{R}$).



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y=a$, đường tiệm cận đứng $x=-c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y=-1$, đường tiệm cận đứng $x=1$ và cắt Oy tại điểm $(0;-2)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases}a=-1\\-c=1\\\dfrac{b}{c}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-1\\b=-2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\c=-1\\b=2\end{cases}$.

Vậy $a+b+c=-1-1+2=0$.

Câu 65. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

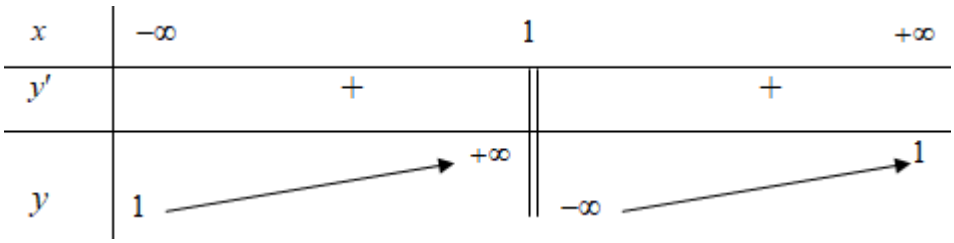
Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=2$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{-c}{b}=-1\\ \dfrac{a}{b}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=b\\ a=2b\end{cases}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó suy ra:

$ac-b<0\Rightarrow 2b^2-b<0\Rightarrow 0<b<\dfrac{1}{2}$.

Suy ra cả ba số a,b,c đều dương.

Câu 66. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-4}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b,c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

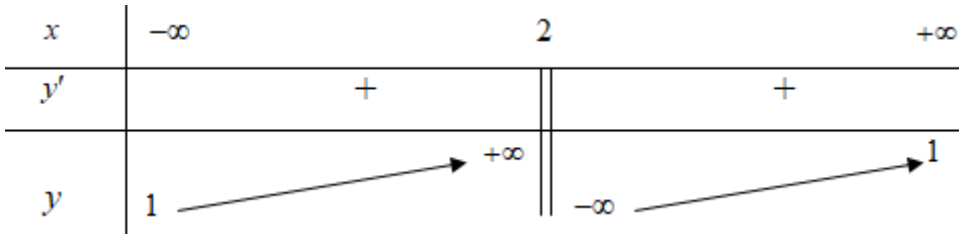
Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{b}=1\Rightarrow a=b$ (1).

Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{c}{b}=1\Rightarrow c=-b$ (2).

Ta có: $y'=\dfrac{ac+4b}{(bx+c)^2}>0\Rightarrow ac+4b>0$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $-b^2+4b>0\Leftrightarrow 0<b<4$. Suy ra $a>0,c<0$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2}\ (1)$

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

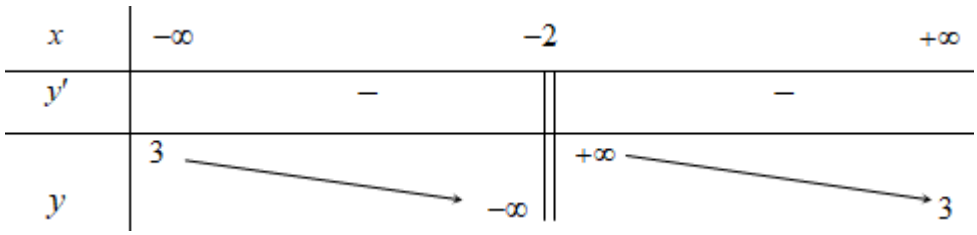
Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow ac-b>0\ (2)$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0\Leftrightarrow -c^2+c>0\Leftrightarrow 0<c<1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số âm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax-3}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=-2\\ \dfrac{a}{b}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=2b\ (1)\\ a=3b\ (2)\end{cases}$

Vì hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$ nên

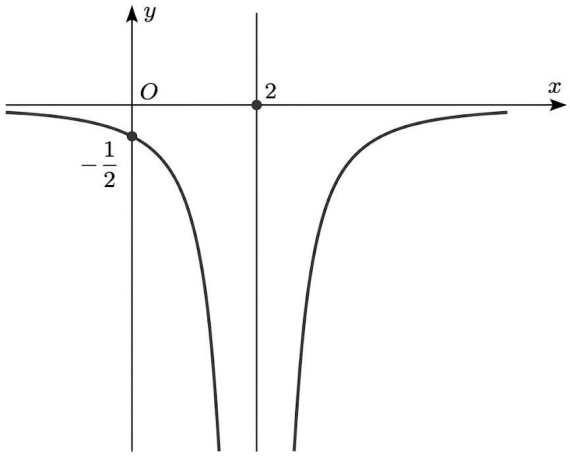
$f'(x)=\dfrac{ac+3b}{(bx+c)^2}<0\Leftrightarrow ac+3b<0\ (3)$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $6b^2+3b<0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<b<0.$

Vậy b là số âm nên a và c cũng là số âm.

Do đó trong các số a,b và c có 3 số âm.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và nhận $x=2$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5

Ta có: $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$

Vì đồ thị thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$ suy ra $f(0)=2\Rightarrow\frac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=2d\ (1).$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $\begin{cases}f'(0)=-\frac{1}{2}\\ x=-\frac{d}{c}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{ad-bc}{d^2}=-\frac{1}{2}\ (2)\\ d=-2c\ (3)\end{cases}.$

Thay (1) vào (2): $\frac{ad-2dc}{d^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a-2c}{d}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}d+2c=-\frac{1}{2}.(-2c)+2c=3c.$

Vậy, $f(3)=\frac{3a+b}{3c+d}=\frac{3.3c-4c}{3c-2c}=\frac{5c}{c}=5.$

Câu 70. Cho là đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d:y=kx+2k+1$ cắt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: –3

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ kx^2+(3k-1)x+2k=0\quad (1)\end{cases}.$$

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $|kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1|$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=k^2-6k+1>0\\ k(x_1+x_2)+4k+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq 0\\ k^2-6k+1>0\\ 1-3k+4k+2=0\end{cases}\Leftrightarrow k=-3$$

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm điểm $M(a;b)$ và điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ cách đều 2 đường tiệm cận của đồ thị (C). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Gọi $M(x;y)\in(C)$ và cách đều 2 tiệm cận $x=2$ và $y=3$.

Ta có:

$$|x-2|=|y-3|$$
$$\Leftrightarrow|x-2|=\left|\frac{3x-4}{x-2}-3\right|$$
$$\Leftrightarrow|x-2|=2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ x=0\end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : $M(4;4)$ M(4; 4) và $N(0;2)$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=10$

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có điểm $Q(a;b)$ và điểm $P(c;d)$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$) đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −2

$\overrightarrow{MN}=(2;-1)\Rightarrow$ Phương trình $MN:\ x+2y+3=0$.

Gọi d là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm Q,P

Phương trình đường thẳng $d\perp MN$ nên có dạng: $y=2x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{2x-4}{x+1}=2x+m\Leftrightarrow 2x^2+mx+m+4=0\ \ (x\neq -1)\quad (1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $Q,P\Leftrightarrow \Delta=m^2-8m-32>0\quad (2)$

Khi đó $Q(x_1;2x_1+m)$, $P(x_2;2x_2+m)$ với x_1, x_2 là các nghiệm của (1)

Trung điểm của QP là $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\frac{m}{4};\frac{m}{2}\right)$ (theo định lý Viète)

Q,P đối xứng nhau qua $MN\Leftrightarrow I\in MN\Leftrightarrow -\frac{m}{4}+2.\frac{m}{2}+3=0\Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow Q(0;-4),P(2;0)$

$\Rightarrow T=a+b+c+d=-2$

Câu 73. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d:y=-2x+2$ bằng $\frac{6\sqrt{5}}{5}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi $M\left(m;\frac{m+2}{m-1}\right)\in(C)$.

Ta có: $d(M,d)=\frac{6\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow |2m^2-3m+4|=6|m-1|\Leftrightarrow m=2;m=\frac{5}{2};m=-2;m=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow M(2;4);\ M\left(\frac{5}{2};3\right);\ M(-2;0);\ M\left(\frac{1}{2};-5\right)$.

Câu 74. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm $M\left(\frac{a-\sqrt{b}}{2};\frac{c-\sqrt{d}}{2}\right)$ và điểm $N\left(\frac{e+\sqrt{f}}{2};\frac{g+\sqrt{h}}{2}\right)$ $(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{Z})$ cách đều hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;2)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d+e+f+g+h$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 24

PT đường trung trực đoạn AB: $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của PT:

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Hai điểm cần tìm là: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=5\\c=1\\d=5\\e=1\\f=5\\g=1\\h=5\end{cases}\Rightarrow T=a+b+c+d+e+f+g+h=24$$

Câu 75. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết trên đồ thị hàm số (C) có hai điểm $M(a;b)$ và điểm $N(c;d)$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ mà tổng khoảng cách từ điểm M và điểm N đến hai tiệm cận của đồ thị (C) nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C),(x_0\neq -1)$ thì $y_0=\frac{2x_0+1}{x_0+1}=2-\frac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCĐ và TCN thì:

$MA=|x_0+1|,\ MB=|y_0-2|=\left|\frac{1}{x_0+1}\right|$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $MA+MB\geq 2\sqrt{MA.MB}=2\sqrt{|x_0+1|.\left|\frac{1}{x_0+1}\right|}=2$

$\Rightarrow$ $MA+MB$ nhỏ nhất bằng 2 khi $|x_0+1|=\frac{1}{|x_0+1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0; 1) và (–2; 3).

$\Rightarrow T=a+b+c+d=2$

Câu 76. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là lớn nhất ?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Giả sử $M\left(x_0;2-\frac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$. PTTT Δ của (C) tại M là:

$$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)\Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến Δ là:

$$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo BĐT Cauchy: $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6\Rightarrow d\leq\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Câu 77. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x-m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Tìm giá trị của m .

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ có $y'=\frac{-2}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\in D$ và đường thẳng $d: y=x-m$ có hệ số $a=1>0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$\frac{x+3}{x+1}=x-m$$

$$\Leftrightarrow x^2-mx-m-3=0\quad(x\neq-1).$$

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2-mx-m-3=0$.

Theo định lí Viet, ta có $x_A+x_B=m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A+x_B+x_O=3x_G$

$$\Leftrightarrow x_A+x_B=6$$

$$\Leftrightarrow m=6.$$

Vậy $m=6$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu 78. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng $d: y=m-x$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Giá trị m_1+m_2 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y=m-x$ là:

$\dfrac{x}{x-1}=m-x \Leftrightarrow x^2-mx+m=0(1) \qquad (x\neq 1)$

Đồ thị hàm số và đường thẳng d có 1 điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1

nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$

Vậy $m_1=0, m_2=4 \Rightarrow m_1+m_2=4$

Câu 79. Gọi S là tổng các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2mx+3m+1}{2x-m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4. Tính S.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,75

Vì đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên ta có:

$$\frac{3m+1}{-m^2}=-4 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 3m+1=4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Do đó $S=1-\dfrac{1}{4}=0,75$

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=1-x$ tại hai điểm phân biệt?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Điều kiện $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+m}{x+1}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x+m-1=0 \ (*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-(m-1)>0 \\ 1-2+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<2$$ vì m nguyên dương nên $m=1$

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=4$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x-1}=x+m\ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+(m-3)x+1-m=0\ (2) \end{cases}$ (C) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ 1^2+(m-3).1+1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2-4(1-m)>0 \\ -1\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+5>0 \\ -1\neq 0 \end{cases} \text{(đúng với mọi } x\in\mathbb{R}\text{)}$$

Khi đó x_A, x_B là nghiệm phân biệt khác 1 của (2).

Theo Viète, ta có: $\begin{cases} x_A+x_B=3-m \\ x_A.x_B=1-m \end{cases}$

$$AB=4 \Leftrightarrow AB^2=16 \Leftrightarrow (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=16 \Leftrightarrow 2(x_B-x_A)^2=16 \Leftrightarrow (x_B-x_A)^2=8.$$

Suy ra: $(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B=8 \Rightarrow (3-m)^2-4(1-m)=8 \Leftrightarrow m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Câu 82. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a;b)$. Tính $T=a+b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Phương trình hoành độ giao điểm $x-2m=\dfrac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+2m-3>0 \\ S=2m>0 \\ P=-2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1, m>3 \\ m>0 \\ m<\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1$ nên $T=a+b=1$

Câu 83. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Tính giá trị của $a+b$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) như sau:

$$\frac{(2m-1)x-m}{x+m}=ax+b \Leftrightarrow ax^2+(am+b-2m+1)x+bm+m=0$$

Do (d) luôn tiếp xúc với (C) nên phải luôn có nghiệm kép với $\forall m\neq 0$

Suy ra $a\neq 0$ và $\Delta'=(am+b-2m+1)^2-4am(b+1)=0,\forall m\neq 0$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2m^2+\left[2(a-2)(b+1)-4a(b+1)\right]x+(b+1)^2=0,\forall m\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2=0\\2(a-2)(b+1)-4a(b+1)=0\\(b+1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}.$$

Vậy $a+b=1$

Cách 2:

Ta có $y=\dfrac{(2x-1)m-x}{m+x}\Rightarrow y'(m)=\dfrac{2x^2}{(m+x)^2}\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow x=0$.

Dự đoán $A(0;-1)$ là tiếp điểm, nên ta có phân tích như sau

$$y=\frac{(2m-1)x-m}{x+m}=\frac{-2x^2+2x^2+(2m-1)x-m}{x+m}=\frac{-2x^2+(2x-1)(x+m)}{x+m}=\frac{-2x^2}{x+m}+2x-1.$$

Do đó phương trình $\dfrac{(2x-1)m-x}{m+x}=2x-1$ luôn có nghiệm kép $x=0$ nên $y=2x-1$ là đường thẳng luôn tiếp xúc với (C), suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 84. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y=x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 10

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+m}{x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ f(x)=x^2-x-m-1=0\ (*)\end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt khi

$\begin{cases}f(1)\neq 0\\ \Delta_{(*)}>0\end{cases}\Leftrightarrow 4m+5>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{5}{4};\forall m\in\mathbb{R}.$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=-m-1\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $(x_1-1)(x_2-1)<0\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0\Leftrightarrow -m-1<0\Leftrightarrow m>-1$

Suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B và $AB\leq 4$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x+1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ (x+1)(x+m)=2x-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\ x^2+(m-1)x+m+1=0\ (*)\end{cases}$

Đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,B\Leftrightarrow$ Phương trình **(*)** có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ (-1)^2+(m-1).(-1)+m+1\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-4(m+1)>0\\ 3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-6m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\ m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Giao điểm của 2 đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1;x_1+m)$ và $B(x_2;x_2+m)$, trong đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình **(*)**.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\ x_1x_2=m+1\end{cases}$

$AB=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}\leq 4\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\leq 8\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leq 8\Leftrightarrow(1-m)^2-4(m+1)\leq 8$

$\Leftrightarrow m^2-6m-11\leq 0\Leftrightarrow 3-2\sqrt{5}\leq m\leq 3+2\sqrt{5}$

Kết hợp với $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3+2\sqrt{3} \\ m < 3-2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3+2\sqrt{3} < m \le 3+2\sqrt{5} \\ 3-2\sqrt{5} \le m < 3-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Có 1 giá trị nguyên dương của m là 7.

Câu 86. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 11

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $\dfrac{x+2}{x+1} = x + m (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1 \\ f(x) = x^2 + mx + m - 2 = 0 (2) \end{cases}$.

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ f(-1) = 1 - m + m - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm phương trình (2). Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành

$\Leftrightarrow y_1.y_2 < 0$

$\Leftrightarrow (x_1 + m)(x_2 + m) < 0$

$\Leftrightarrow x_1.x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 < 0$

$\Leftrightarrow m - 2 - m^2 + m^2 < 0$

$\Leftrightarrow m < 2$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{-9; -8; ...; -1; 0; 1\}$.

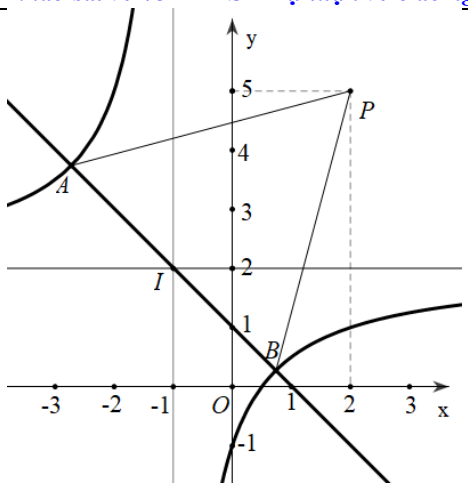
Vậy có 11 giá trị m.

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Tính tổng các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4



Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình $\dfrac{2x-1}{x+1}=-x+m$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ 2x-1=(-x+m)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2-(m-3)x-m-1=0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta_{(1)}=(m-3)^2+4(m+1)=m^2-2m+13=(m-1)^2+12>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1), tọa độ giao điểm của d và (C) là

$A(x_1;-x_1+m), B(x_2;-x_2+m)$

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{-(x_1+x_2)+2m}{2}\right)\equiv I\left(\dfrac{m-3}{2};\dfrac{m+3}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{PI}=\left(\dfrac{m-7}{2};\dfrac{m-7}{2}\right)$, véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d=(1;-1)$, dễ thấy $\vec{u}_d.\overrightarrow{PI}=0$ nên $P\equiv I$ hoặc $PI\perp d$, như vậy hoặc $P\equiv I$ (khi đó P,A,B thẳng hàng) hoặc tồn tại tam giác PAB luôn cân tại P,

Suy ra tam giác PAB tồn tại và đều khi và chỉ khi

$$PI=AB\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 8\left(\frac{m-7}{2}\right)^2=3\left[2(x_1-x_2)^2\right]\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(m-3)^2+4(m+1)\right]\Leftrightarrow m^2+4m-5=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=1 \\ m=-5 \end{bmatrix}.$$

Vậy $m\in\{-5;1\}$.

Suy ra tổng là $-5+1=-4$

Câu 88. Biết $m=-\dfrac{b}{a}$ (với $a,b\in\mathbb{Z}^+$) là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-2=0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a+2b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 21

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m,\ x\neq 1.$

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0\ (*).$

Để hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Suy ra $\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+1<0\\ m+1>12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<-1\\ m>11\end{cases}.$

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $x_1+x_2=\frac{m+1}{3}.$

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB, ta có $G\left(\frac{m+1}{9};\frac{m-1}{3}\right).$

Mà $G\in\Delta$ nên $\frac{m+1}{9}-2\frac{m-1}{3}-2=0\Rightarrow m=-\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases}a=11\\ b=5\end{cases}.$

Vậy $a+2b=21.$

Câu 89. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Khi đó $T=a+b$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3,5

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2}=ax+2b-4; x\neq -2.$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+2b-7)x-10=0(*).$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân

biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ (2a+2b-7)^2-4a(4b-10)>0(2*)\\ 4\neq 0\end{cases}$

Gọi $A(x_1;ax_1+2b-4);B(x_2;ax_2+2b-4).$

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases}x_1+x_2=0\\ 4b-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ b=2\end{cases}$

Theo Viét của phương trình (*) ta có $x_1+x_2=\frac{7-2a-2b}{a}.$

$\Rightarrow\frac{7-2a-2b}{a}=0\Leftrightarrow 7-2a-2b=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}.$

Thay $\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=2 \end{cases}$ vào điều kiện (2*) tháy thỏa mãn.

Vậy $a+b=\dfrac{7}{2}=3,5$

Câu 90. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \le 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -6

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m\,(1)$

Điều kiện: $x \ne -1$.

Phương trình (1) $\Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$

$\Leftrightarrow -2x+1=(-x+m)(x+1)$

$\Leftrightarrow -x^2+(m+1)x+m-1=0\,(2).$

Để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình

(2) có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2+6m-3>0.$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-3-2\sqrt{3}\right) \cup \left(-3+2\sqrt{3};+\infty\right)(3).$

Gọi $A\left(x_A;-x_A+m\right), B\left(x_B;-x_B+m\right)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$AB \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(x_B-x_A\right)^2} \le 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\left(x_B-x_A\right)^2=8 \Leftrightarrow x_B^2-2x_A.x_B+x_A^2-4 \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x_A+x_B\right)^2-4x_A.x_B-4 \le 0.$

$\Leftrightarrow (m+1)^2-4(1-m)-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7<0 \Leftrightarrow m \in (-7;1)(4)$

Từ (3) và (4) ta có $m \in \left(-7;-3-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-3+2\sqrt{2};1\right).$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;0\} \Rightarrow S=-6$

Câu 91. Gọi $M(a;b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y=2x+6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2+(2b-7)^2$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 18

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là:

$$\frac{x-2}{x}=2x+6 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \ (x\neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2;2)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$.

Ta có $d(M;d)\geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M;d)=0$ khi $M\in d$.

Mà $M\in(C) \Rightarrow M=d\cap(C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2;2) \\ M\left(-\dfrac{1}{2};5\right) \end{array}\right.$.

Với $M(-2;2)\Rightarrow a=-2, b=2 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2};5\right)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2},\ b=5 \Rightarrow (4a+5)^2+(2b-7)^2=18$.

Câu 92. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=-1$ và tiệm cận ngang $d_2: y=2$.

Do $M\in(H)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

Xét $d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0+1|+\left|\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}-2\right|=|x_0+1|+\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x_0+1|=\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

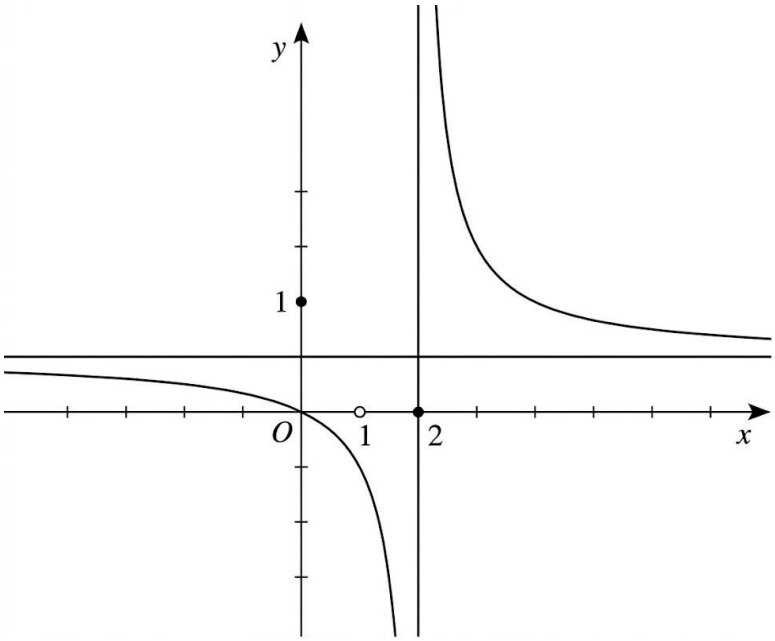
Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

Câu 93. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4



Hàm số $y = \dfrac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Gọi $A\left(a; \dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) $(a < 2 < b)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(b-a; \dfrac{b}{b-2} - \dfrac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \dfrac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $(b-2)(2-a) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra: $AB^2 = (b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^2}{\left[(b-2)(2-a)\right]^2} \ge (b-a)^2 + \dfrac{64}{(b-a)^2} \ge 16$

$\Rightarrow AB \ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2-\sqrt{2}$ và $b = 2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB_{\min} = 4$.

Câu 94. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 26

Ta có: $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{26t+10}{t+5}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{26+\dfrac{10}{t}}{1+\dfrac{5}{t}}=26\Rightarrow$ TCN: $y=26$.

Câu 95. Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn $\left(ClO_2\right)$ được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t)=\dfrac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá ngưỡng c gam/lít. Tìm c.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,32

Nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút là $C(t)=\dfrac{8t}{25t+250}, t>0$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $C(t)$ trên khoảng xác định

Ta có: $C'(t)=\dfrac{2000}{(25t+250)^2}>0,\forall t>0$

Do đó $C(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{8t}{25t+250}=\dfrac{8}{25}=0,32$

Vậy nồng độ chất khử khuẩn tăng theo thời gian và không vượt quá 0,32

Câu 96. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t\ge 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,4

Thể tích nước trong bể sau t phút là $150+50t$ (lít).

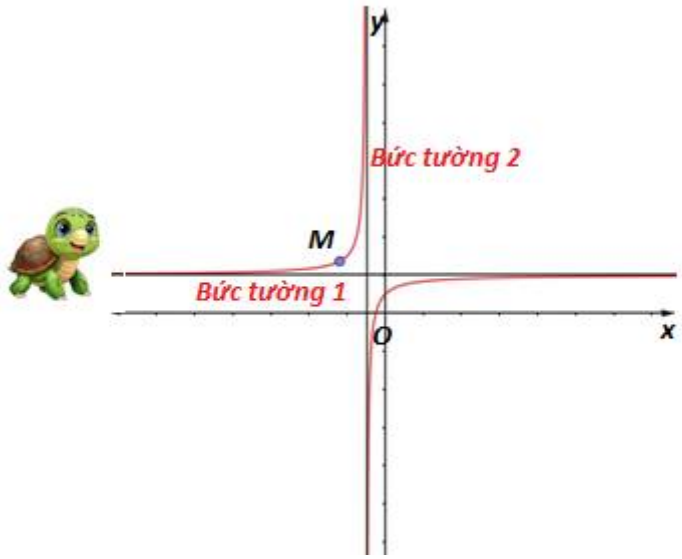
Khối lượng chất khử trùng trong bể sau t phút là $20t$ (gam).

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t)=\dfrac{20t}{50t+150}$ (gam/lít).

Ta có $f'(t)=\dfrac{3000}{(50t+150)^2}>0,\ \forall t\ge 0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{50t+150}=\dfrac{2}{5}=0,4$.

Vậy giá trị hàm $f(t)$ luôn tăng nhưng không vượt ngưỡng $0,4$ gam/lít.

Câu 97. Trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng mét), mô hình hoá đường đi của con rùa là nhánh bên trái của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, hai bước tường là 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) (như hình vẽ). Khi con rùa bò đến điểm M có toạ độ $M(x_0;y_0)$ thì tổng khoảng cách từ điểm M đến hai bức tường là nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T=2025x_0+2026y_0$



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2028

$M(x_0;y_0)\in(C)$, với $x_0<-1$ thì $y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}=2-\dfrac{1}{x_0+1}$

Tiệm cận ngang là bức tường 1 có phương trình là: $y=2$

Tiệm cận đứng là bức tường 2 có phương trình là: $x=-1$

Gọi A,B lần lượt là hình chiếu của M trên tiệm cận đứng và tiệm cận ngang thì:

$MA=|x_0+1|,\ MB=|y_0-2|=\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $MA+MB\ge 2\sqrt{MA.MB}=2\sqrt{|x_0+1|.\left|\dfrac{1}{x_0+1}\right|}=2$

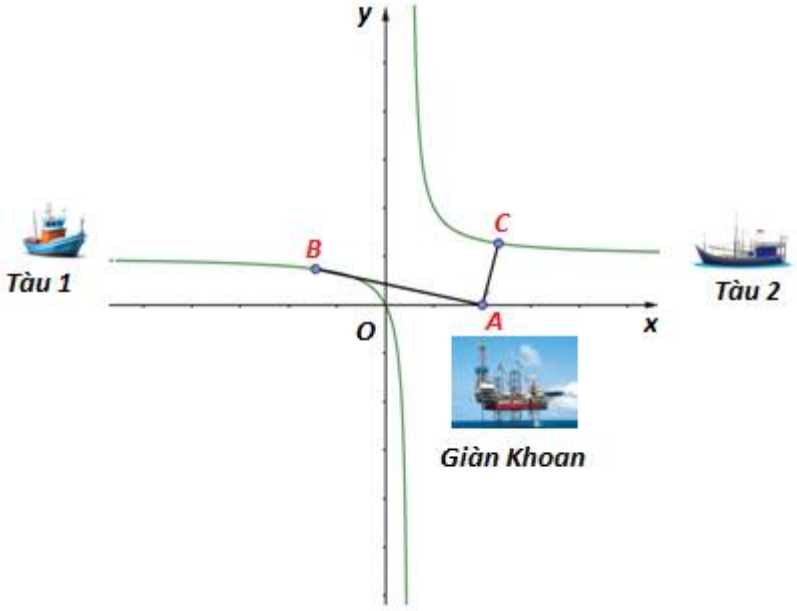
$\Rightarrow$ $MA+MB$ nhỏ nhất bằng 2 khi $|x_0+1|=\dfrac{1}{|x_0+1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Vì $x_0<-1$ nên chọn $x_0=-2$

Vậy ta có điểm cần tìm là $M(-2;3)$

$\Rightarrow T = 2025x_0 + 2026y_0 = 2025(-2) + 2026.3 = 2028$

Câu 98. Trong hệ trục tọa độ Oxy, mô tả đường đi của hai tàu đánh cá 1 và 2 (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu đánh cá luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{2x}{x-1}$. Một giàn khoan được đặt ở vị trí A có toạ độ $A(2;0)$, tàu đánh cá 1 di chuyển đến vị trí B và tàu đánh cá 2 di chuyển đến vị trí C sao cho ba điểm A, B, C tạo thành tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A (như hình vẽ). Khi đó, khoảng cách của hai tàu cá bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



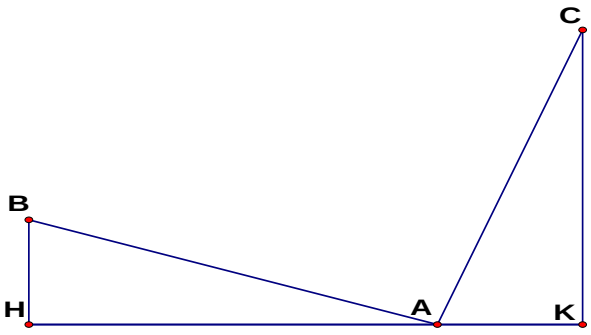
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4,47

Ta có $(C): y = \dfrac{2x}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$.

Gọi $B\left(b; 2 + \dfrac{2}{b-1}\right)$, $C\left(c; 2 + \dfrac{2}{c-1}\right)$ với $b < 1; c > 1$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ox.

Ta có: $AB = AC$; $\widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CAK} + \widehat{BAH} = 90^0 = \widehat{CAK} + \widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACK}$

và: $\widehat{BHA} = \widehat{CKA} = 90^0 \Rightarrow \Delta ABH = \Delta CAK$

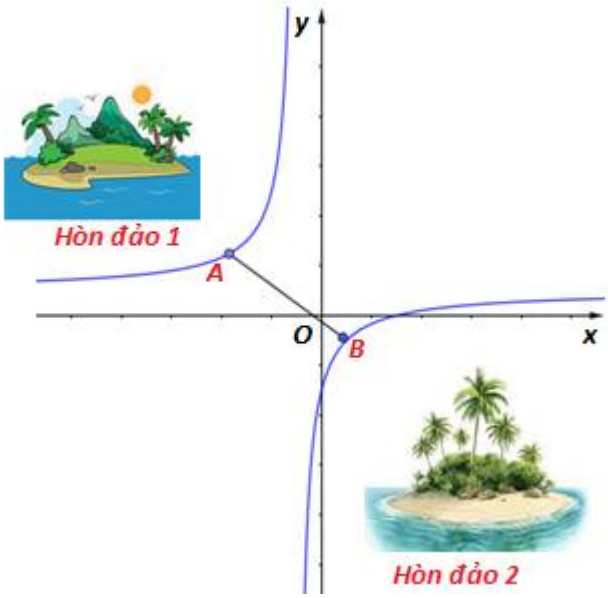
nên $\begin{cases} AH = CK \\ HB = AK \end{cases}$

Hay: $\begin{cases} 2-b = 2+\dfrac{2}{c-1} \\ \left|2+\dfrac{2}{b-1}\right| = |c-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=3 \end{cases}$.

Do đó $B(-1;1)$, $C(3;3)$

Vậy $BC = \sqrt{(3+1)^2+(3-1)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,47(km)$

Câu 99. Trong hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng kilômét), mô hình hoá hai hòn đảo trên biển nằm bao bộc của hai nhánh của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x-3}{x+1}$. Một công ty muốn xây cây cầu nối hai hòn đảo này từ vị trí A của hòn đảo 1 đến vị trí B của hòn đảo 2 sao cho khoảng cách từ A đến B là ngắn nhất (2 điểm A và B thuộc hai nhánh của đồ thị (C)). Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm A và B bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5,66

$(C): y = \dfrac{x-3}{x+1} = 1-\dfrac{4}{x+1}$

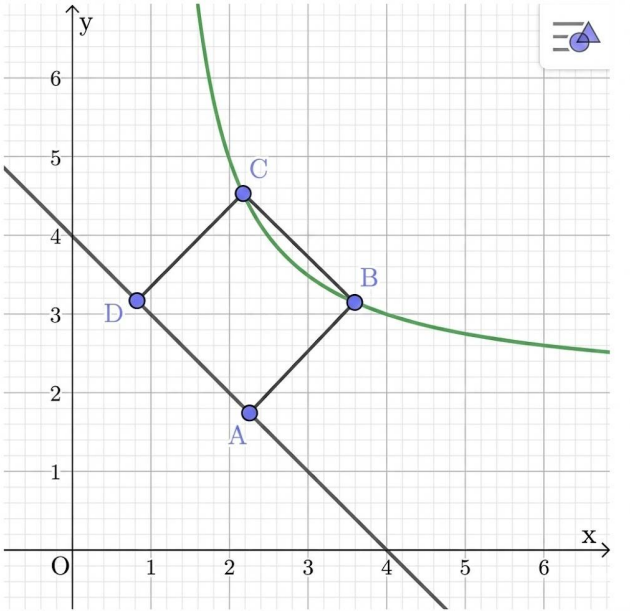
Gọi $A\left(-1-a;1+\dfrac{4}{a}\right)$, $B\left(-1+b;1-\dfrac{4}{b}\right)$ (với $a>0, b>0$) là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C)

$AB^2 = (a+b)^2+16\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2\left[1+\dfrac{16}{a^2b^2}\right] \geq 4ab\left[1+\dfrac{16}{a^2b^2}\right] = 4ab+\dfrac{64}{ab} \geq 32$

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\4ab=\dfrac{16}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a^4=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt[4]{4}$

Vậy $AB=4\sqrt{2}\approx 5,66km$

Câu 100. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y=-x+4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,92

Gọi $(d_1): y=-x+m$ (với $m>4$) song song với $(d): y=-x+4$ và cắt $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B,C $(x_B;x_C>1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (C): $\dfrac{2x+1}{x-1}=-x+m\Leftrightarrow x^2+(1-m)x+m+1=0.$

$\Delta=m^2-6m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3+2\sqrt{3}\\m<3-2\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow m>3+2\sqrt{3}$ (vì $m>4$) (1)

Khi đó ta có: $\begin{cases}x_C+x_B=m-1\\x_C.x_B=m+1\end{cases}$

Suy ra: $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(-x_B+m+x_C-m)^2}=\sqrt{2(x_B-x_C)^2}$

$\Rightarrow CB^2=2(x_B-x_C)^2=2(x_B+x_C)^2-8x_B.x_C=2m^2-12m-6$

Mặt khác chọn $I(0;4)\in(d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d);(d_1)$ bằng

$$AB=d\left(I;(d_1)\right)=\frac{|4-m|}{\sqrt{2}}=\frac{m-4}{\sqrt{2}}$$

Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2=BC^2\Leftrightarrow\frac{(m-4)^2}{2}=2m^2-12m-6\Leftrightarrow m=\frac{8\pm2\sqrt{37}}{3}$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m=\frac{8+2\sqrt{37}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng $\frac{\frac{8+2\sqrt{37}}{3}-4}{\sqrt{2}}\approx1,92.$

CHỦ ĐỀ 3

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$.

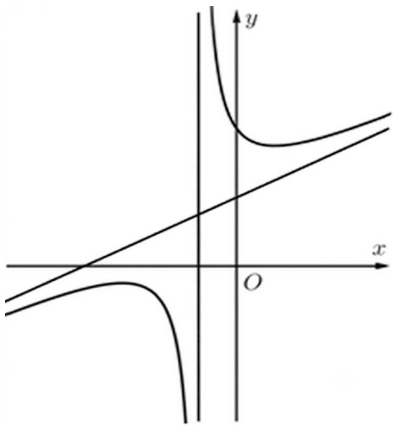
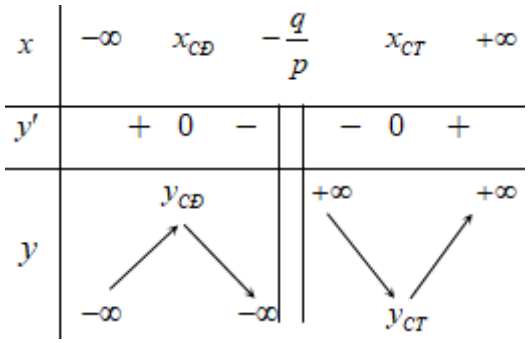
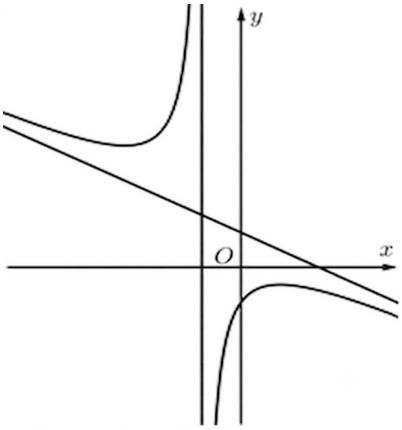
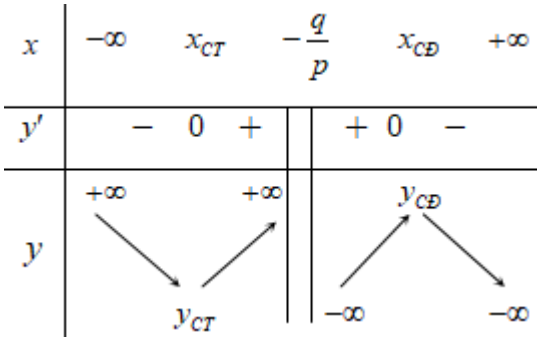
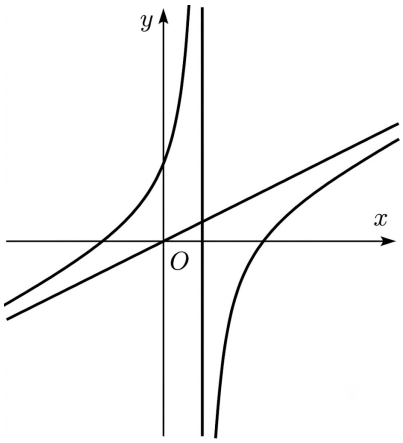
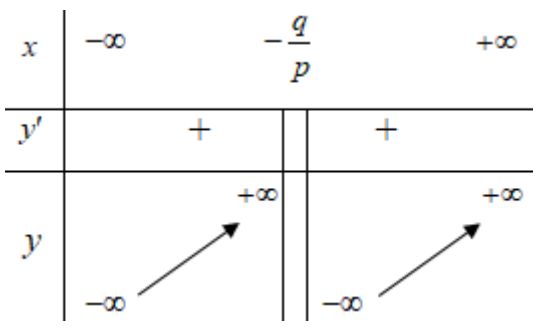
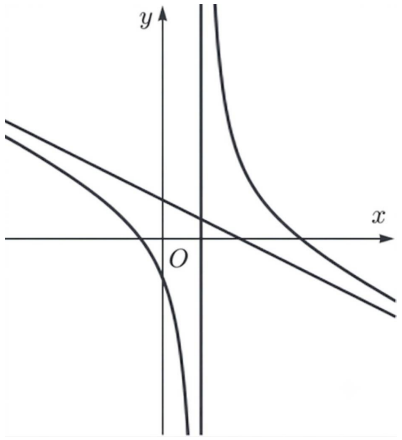
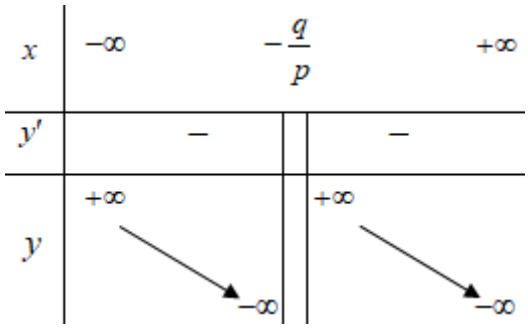
+ Xét dấu y' để tìm khoảng đơn điệu của hàm số.

+ Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số (nếu có).

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{p}{q}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{p}x+\dfrac{b-ap}{p^2}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$

	$ap>0$	$ap<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}\ (a\neq 0,\ p\neq 0)$$

Để khảo sát hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}\ (a\neq 0,\ p\neq 0)$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{q}{p}\right\}$

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Tính đạo hàm $y'=\frac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$

Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Chú ý:

- Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận
- Giả sử đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=x_0$ và đường tiệm cận xiên $y=mx+n$ (hay $mx-y+n=0$) thì trục đối xứng của đồ thị nhận hai đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng là: $x-x_0=\pm(mx-y+n)$.

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ b) $y=\frac{x^2+x-1}{x}$ c) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ d) $y=\frac{-x^2+1}{x}$

Bài 2. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$ b) $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ c) $y=\frac{-x^2-3x+4}{x+2}$ d) $y=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ b) $y=\frac{x^2+x-2}{2-x}$ c) $y=\frac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y = x - \frac{1}{x}$ e) $y = -x + 1 + \frac{1}{x+1}$ f) $y = -3x + 7 - \frac{18}{x+2}$

Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$ b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x-1}$ c) $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$

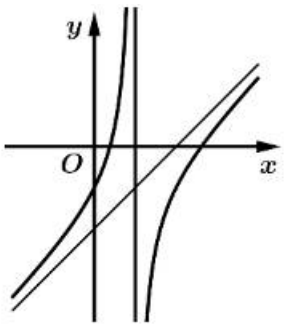
d) $y = x - \frac{2}{x+1}$ e) $y = x - 2 + \frac{4}{x-1}$ f) $y = x + 4 + \frac{5}{x-3}$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

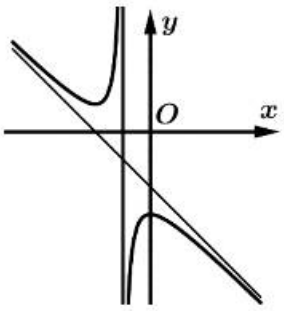
Bài 1. Cho hàm số sau: $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) đi qua các điểm sau $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right),B(1;1),C(3;5),D\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$. Khi đó, tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số sau: $y=ax+b+\dfrac{5}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R};a.c\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+1$. Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4, khi đó tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Bài 3. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$

Bài 3. Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ với mọi giá trị của tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB theo tham số m.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C)tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với(C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}\ (C_m)$. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+1)x+m^2+m+4}{2(x+m)}\ (1)$. Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C_m) . Tìm m để đường thẳng $d: y=2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

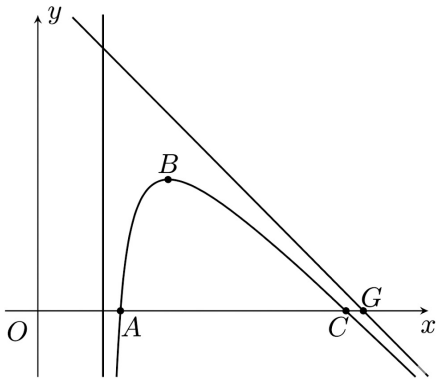
b) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M>1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C))

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM HỮU TỈ BẬC HAI

Bài 1. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ Oxy (với đơn vị trên hệ trục tọa độ là $1\,(km)$) là một đường cong có dạng $y=\dfrac{x^2+bx+c}{dx+e}$ $(a\neq 0, d\neq 0)$ và đường cong này cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875\,(m)$ thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu kilômét?



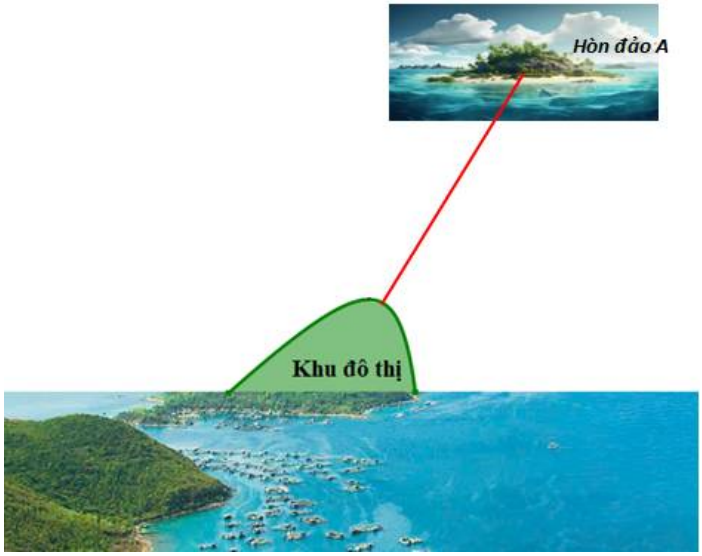
Bài 2. Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gắn với mặt đất.



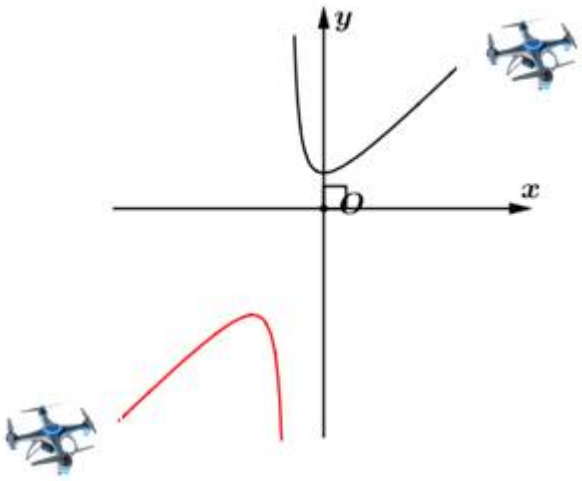
Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Bài 3. Ở vịnh biển Nha Trang, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo A để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy (với đơn vị đo tương ứng $1km$) đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ và vị trí hòn đảo A đặt trùng với gốc toạ độ O. Người ta thiết kế tuyến cáp treo nối

hòn đảo A với đường bao của khu đô thị, hỏi độ dài của tuyến cáp treo đó ngắn nhất là bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của kilômét)?



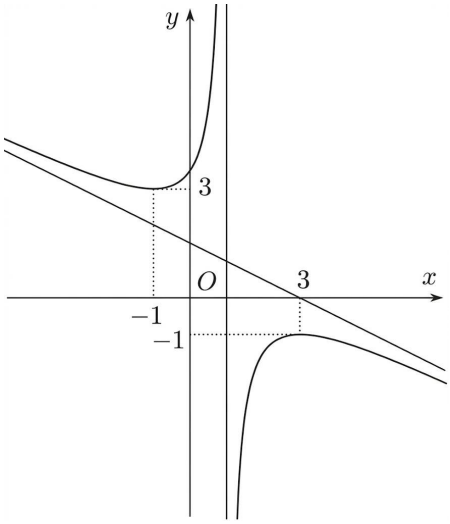
Bài 4. Trong hệ trục tọa độ (Oxy), mô tả chuyển động của hai máy bay không người lái A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai máy bay luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa của hai máy bay A và B bằng bao nhiêu kilômét ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

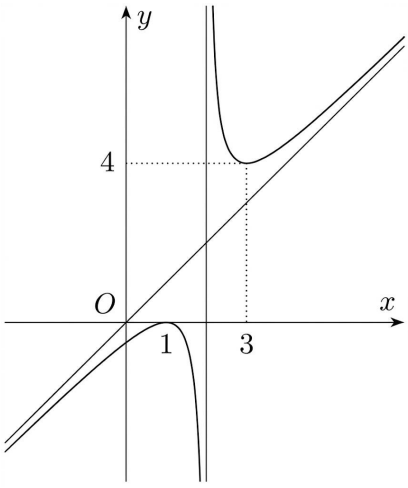
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



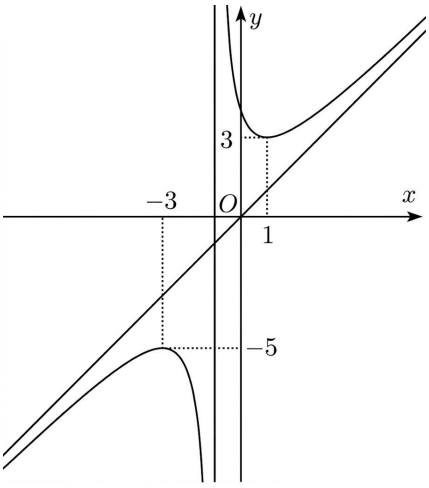
A. $y=\dfrac{-x^2-3x+8}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-8}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{2x-2}$.

Câu 2. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



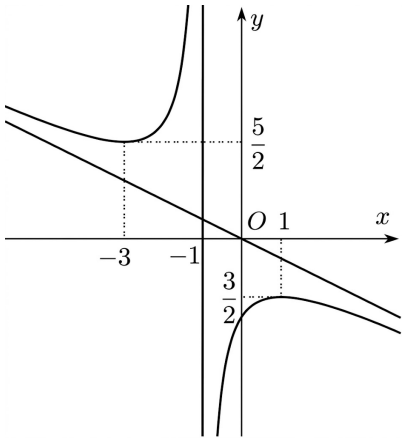
A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+6x-8}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-2x^2+6x-8}{x-2}$.

Câu 3. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



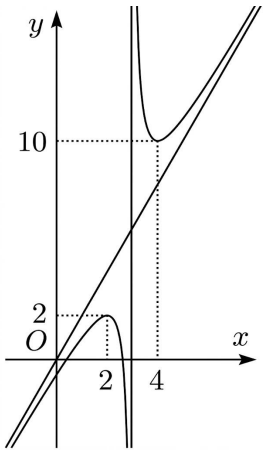
A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

Câu 4. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



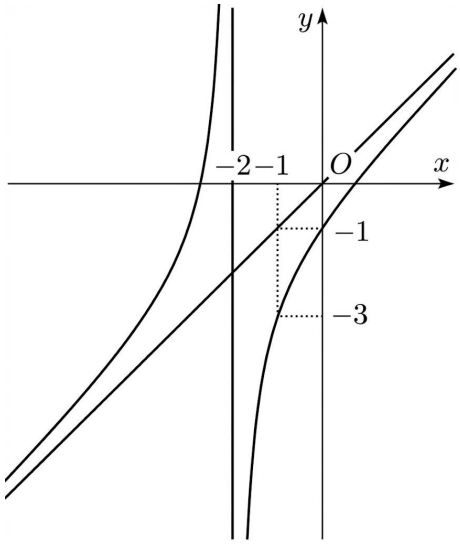
A. $y=\dfrac{2x^2+5x-13}{2x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-4}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-2x^2-3x-1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x-10}{2x+2}$.

Câu 5. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



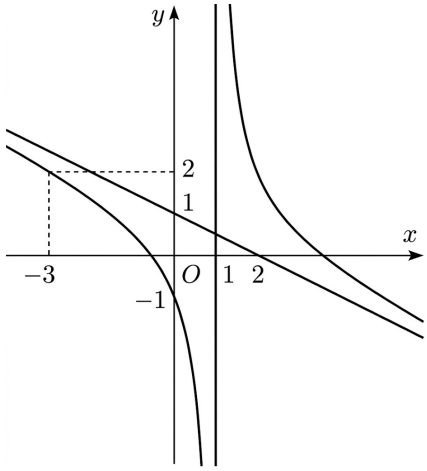
A. $y=\dfrac{x^2-6}{x+3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-6}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x+3}$.

Câu 6. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



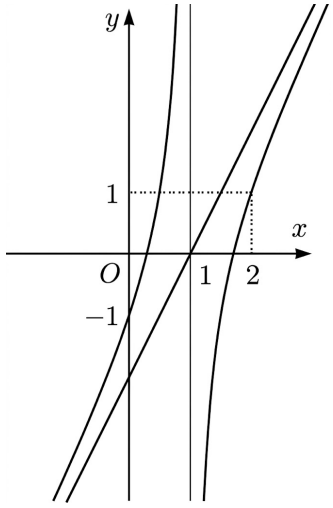
A. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+4x-2}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+4x-2}{x-2}$.

Câu 7. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



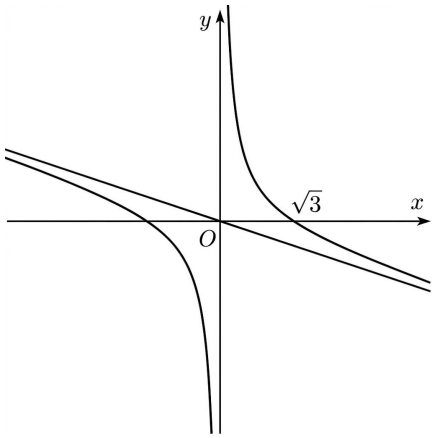
A. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+6x+1}{x-1}$.

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



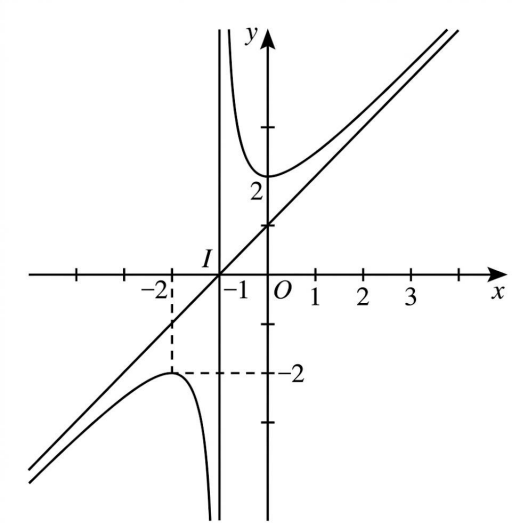
A. $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+6x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3x^2-6x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-1}$.

Câu 9. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



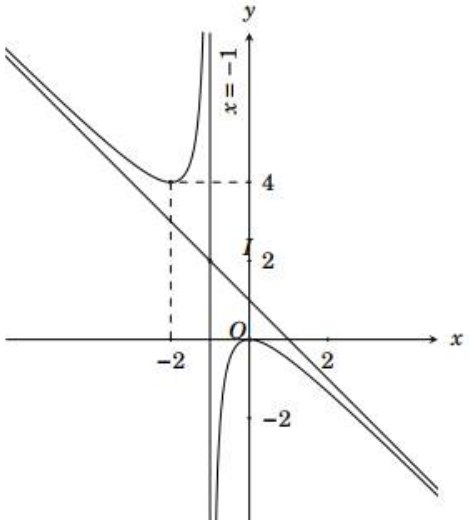
A. $y=\dfrac{x^2-3}{3x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3}{-3x}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3}{-3x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{3x}$.

Câu 10. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



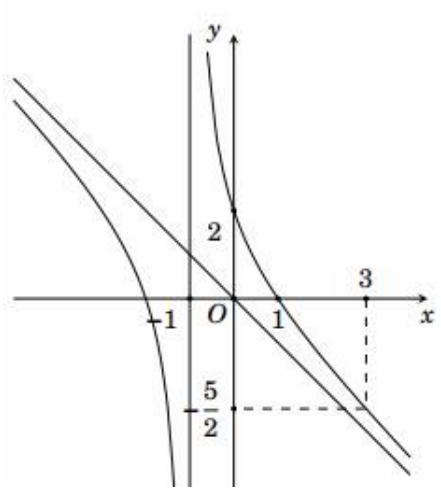
A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Câu 11. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



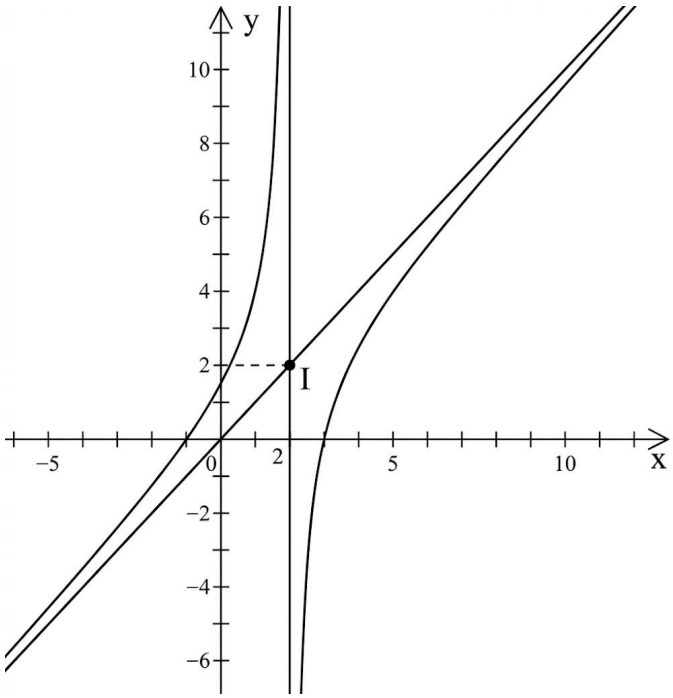
A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

Câu 12. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



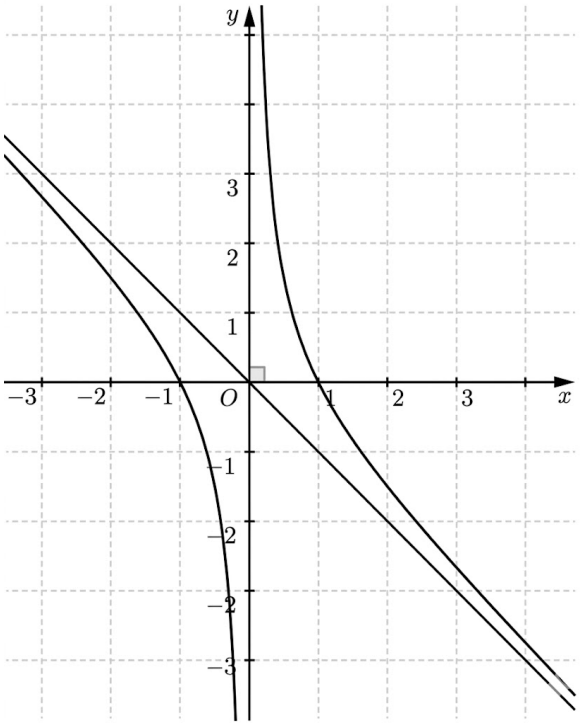
A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Câu 13. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



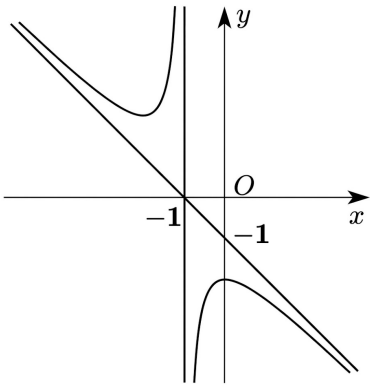
A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

Câu 14. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



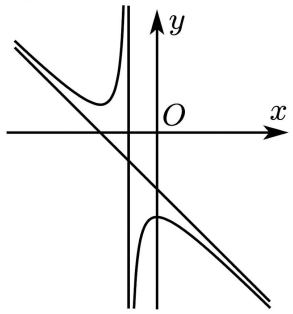
A. $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Câu 15. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số:



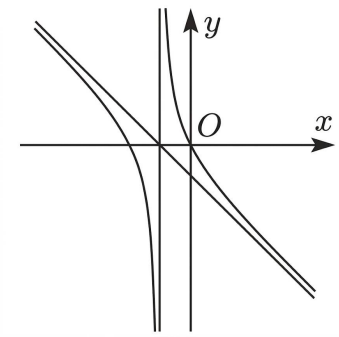
A. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Câu 16. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



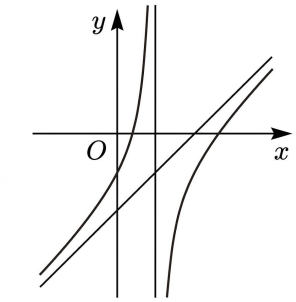
A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-3x-3}{x+1}$.

Câu 17. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{-x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

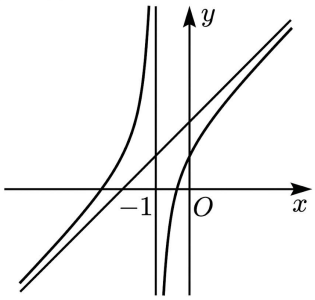
Câu 18. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

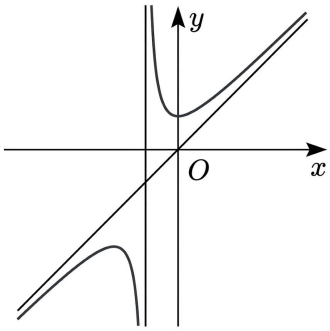
Câu 19. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ với a,b,c,d,e là các số thực.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



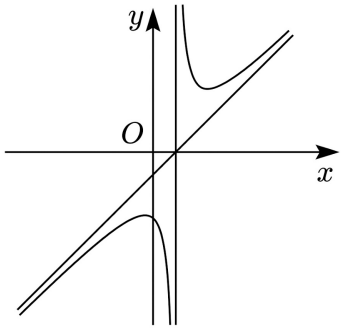
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -1$.

Câu 20. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



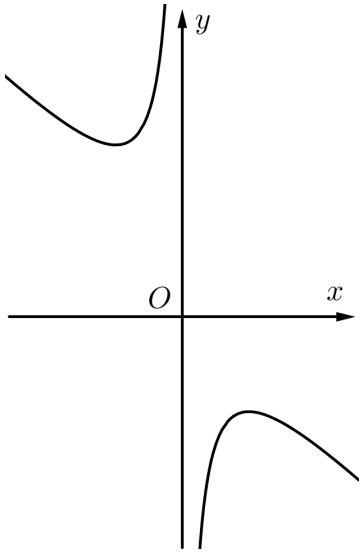
A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$.

Câu 21. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



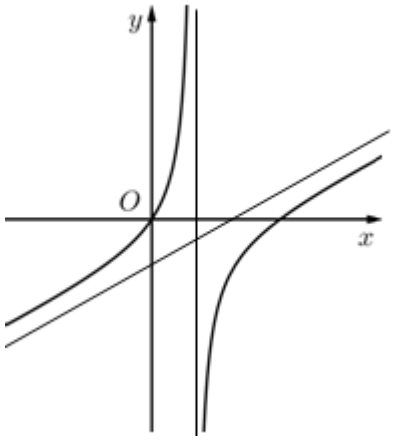
A. $y=x+1-\dfrac{3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x-1}$.

Câu 22. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



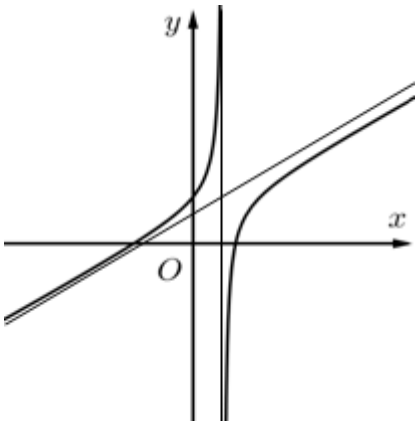
A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}$.

Câu 23. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



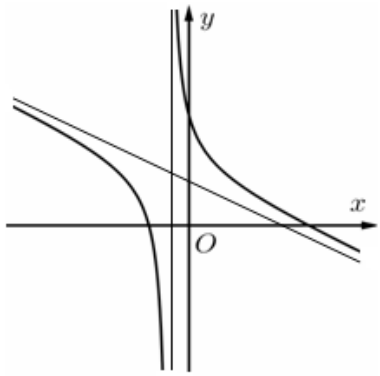
A. $y=\dfrac{x^2+3x}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{2x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

Câu 24. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



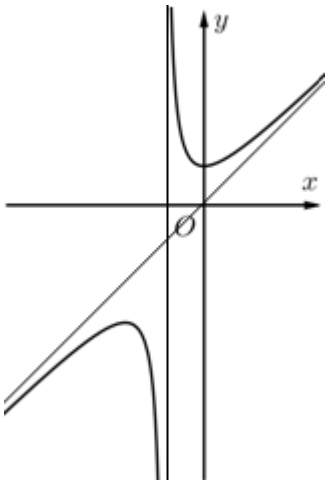
A. $y=\dfrac{3x^2+x-3}{5x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-5x+2}{2x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

Câu 25. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



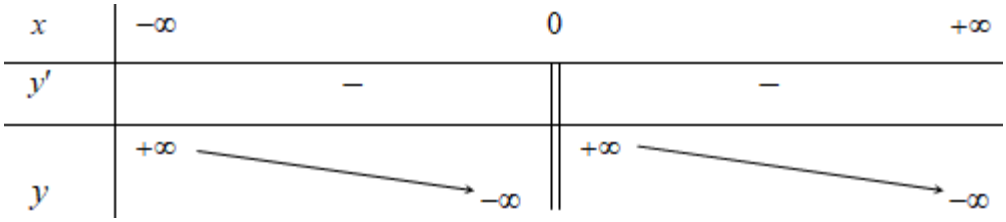
A. $y=\dfrac{-2x^2+x-1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+1}$.

Câu 26. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



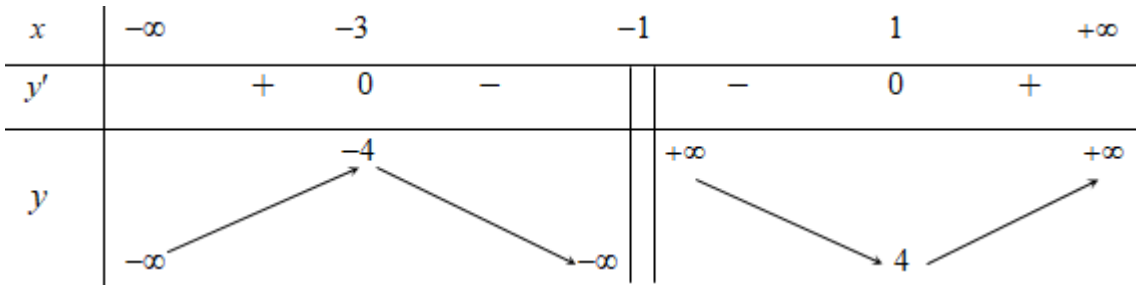
A. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+2}{x+3}$.

Câu 27. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



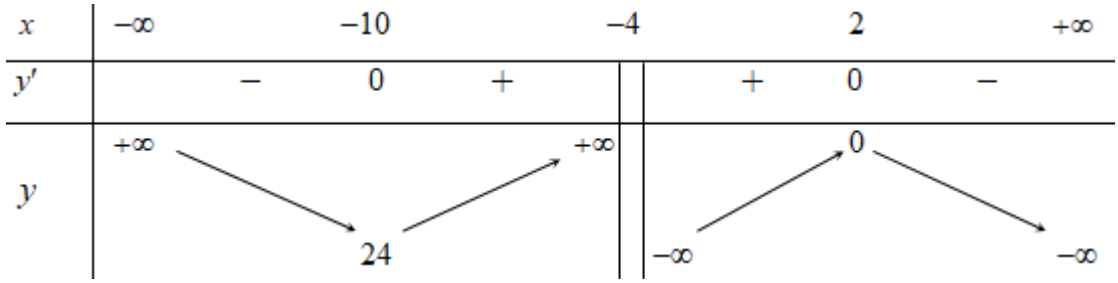
A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

Câu 28. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



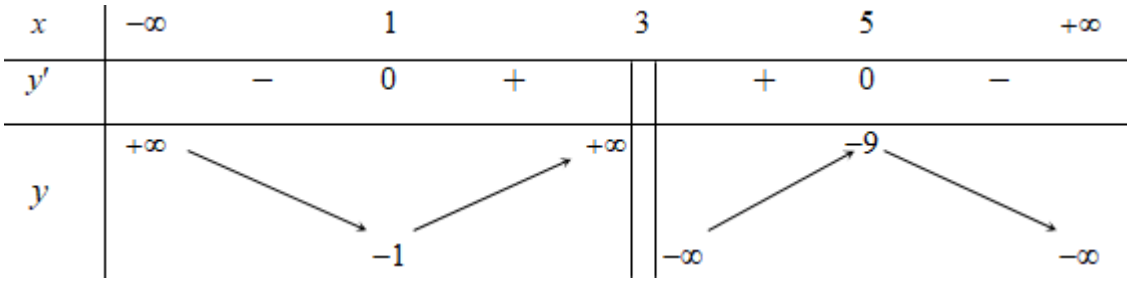
A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Câu 29. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



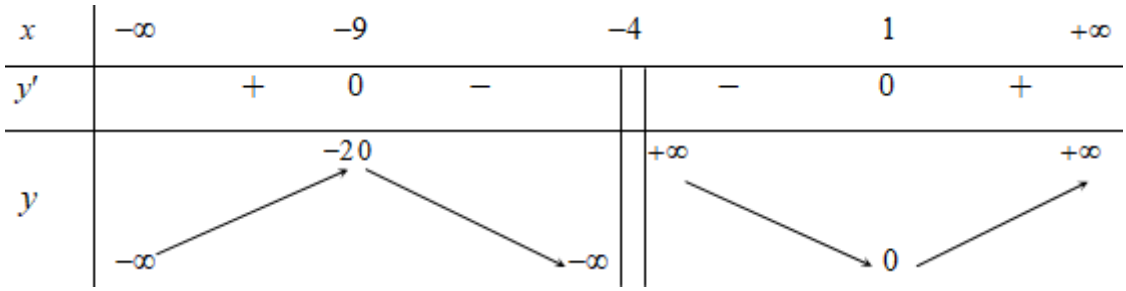
A. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Câu 30. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



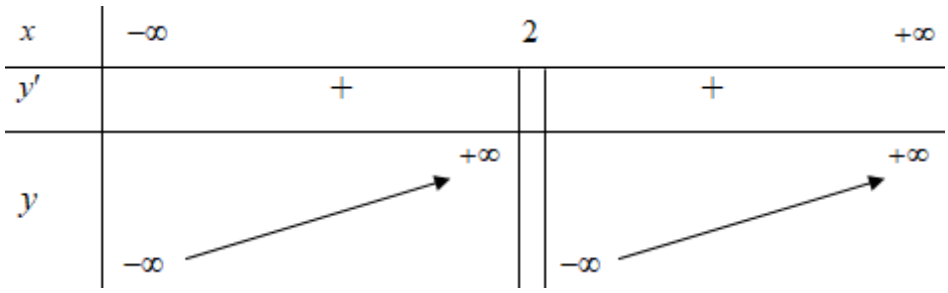
A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Câu 31. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



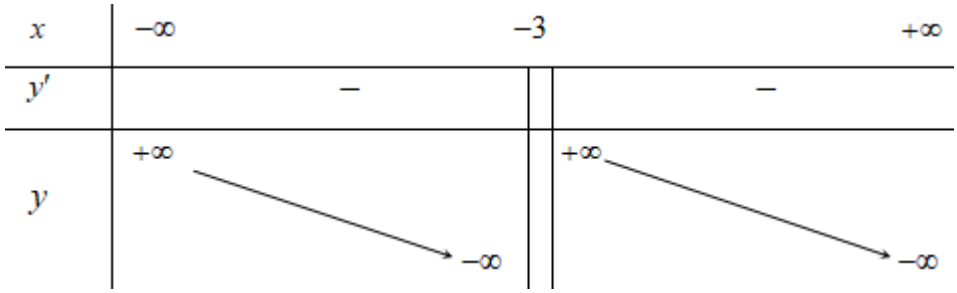
A. $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Câu 32. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

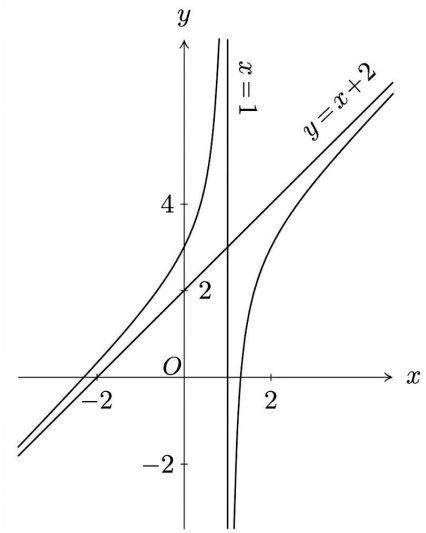
Câu 33. Bảng biến thiên sau là của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -3$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -3$.

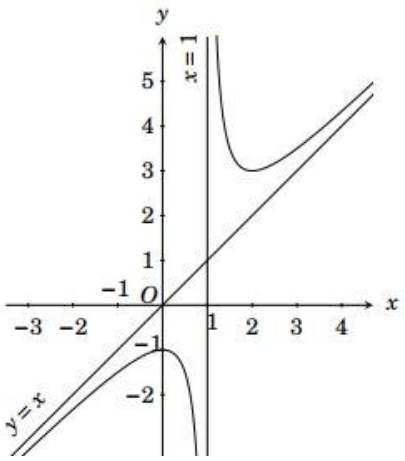
Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là

A. $I(3;1)$. **B.** $I(1;3)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(3;0)$.

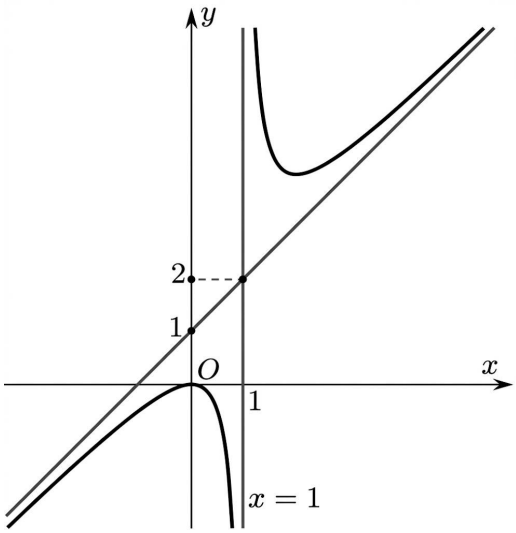
Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(1;1)$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây thuộc đồ thị (C)?

A. $A(1;1)$. **B.** $B(-1;-1)$. **C.** $C\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $D(-2;1)$.

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị (C)?

A. $A(0;2)$. **B.** $B\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $C(2;6)$. **D.** $D(1;0)$.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C). Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị (C) là

A. $I(2;0)$. **B.** $I(-2;0)$. **C.** $I(0;-2)$. **D.** $I(0;2)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Trục đối xứng của đồ thị (C) lần lượt là:

A. $y=1$ và $y=-2x-1$. **B.** $y=1$ và $y=2x-1$

C. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2}$ và $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$. **D.** $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=-x+1+\dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C). Trục đối xứng của đồ thị (C) lần lượt là:

A. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+1+\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x+1-\sqrt{2}$.

B. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-1-\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x+1-\sqrt{2}$.

C. $y=2$ và $y=-2x$.

D. $y=2$ và $y=2x$.

Câu 42. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ có giá trị cực tiểu bằng:

A. $-1-2\sqrt{3}$. **B.** $-1+2\sqrt{3}$. **C.** $1+2\sqrt{3}$. **D.** $1-2\sqrt{3}$.

Câu 43. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ là

A. $y=-2x-2$. **B.** $y=2x+2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Câu 44. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+2}$ có phương trình là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-2x-1$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Câu 46. Biết rằng đồ thị $(H):y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 47. Giao điểm giữa đồ thị $(C):y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d):y=x+1$ là

A. $A(-1;0)$ **B.** $A(3;0)$ **C.** $A(1;0)$ **D.** $A(-3;0)$

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **C.** $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 49. Cho đường cong $(C):y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và điểm $A\in(C)$ có hoành độ $x=3$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

A. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=3x+5$. **C.** $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Tìm tất cả tọa độ tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

A. $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $M(2;3)$

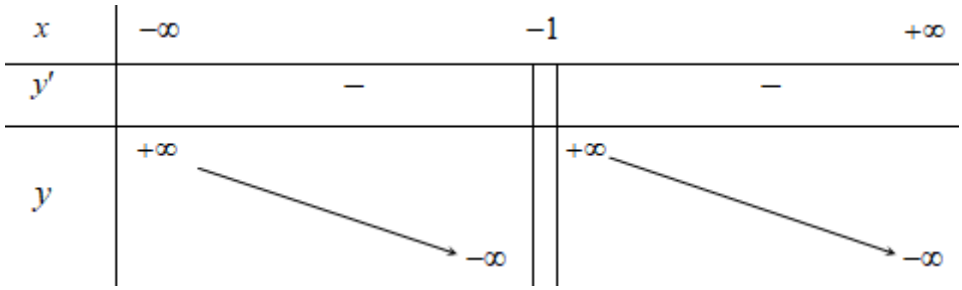
C. $M_1(2;3)$ và $M_2(1;2)$ **D.** Không tồn tại

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

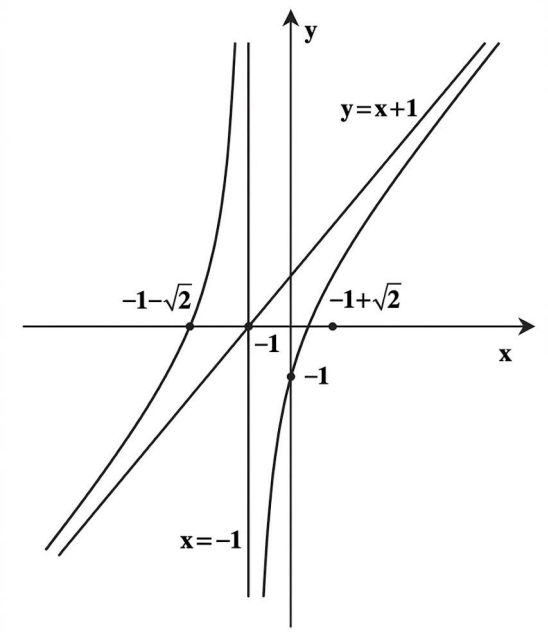
Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:

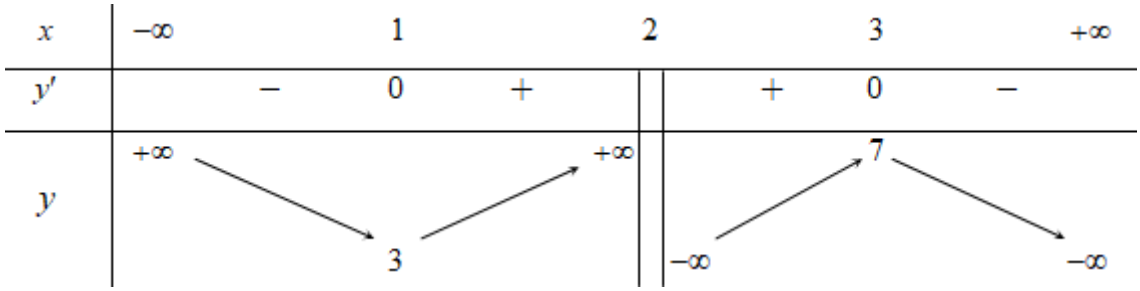


d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(0;-1)$.

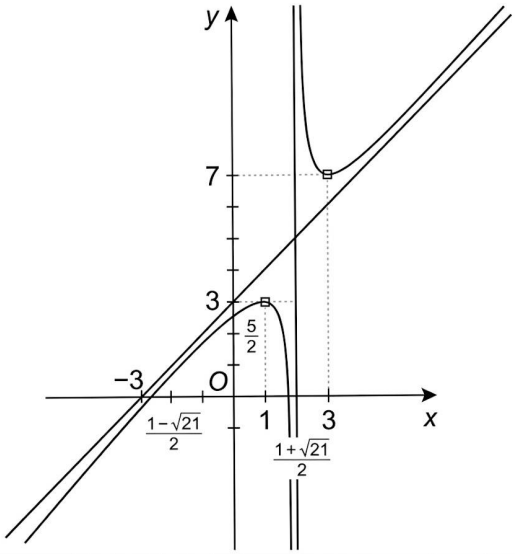
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Đồ thị hàm số (C) có hai trục đối xứng lần lượt là hai đường thẳng $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+3+2\sqrt{2}$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+3-2\sqrt{2}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

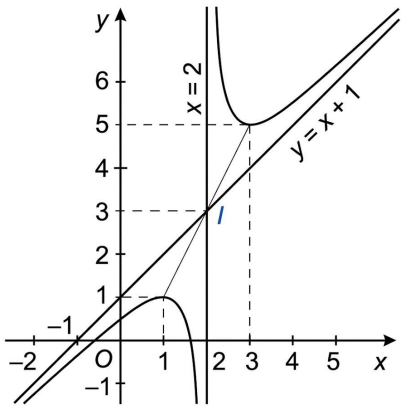
a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

d) Đồ thị (C) là hình sau:



Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm M. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) có hai trục đối xứng lần lượt là hai đường thẳng $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2+2\sqrt{2}$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+2-2\sqrt{2}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Câu 59. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Câu 60. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=2$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0;0)$.

Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị (C) có hai trục đối xứng lần lượt là $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2-\sqrt{2}=0$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x-2-\sqrt{2}$.

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{x}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=0$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O.

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1;1)$.

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=-1$.

c) Đồ thị (C) nhận $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ có đồ thị (C).

a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

Câu 66. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

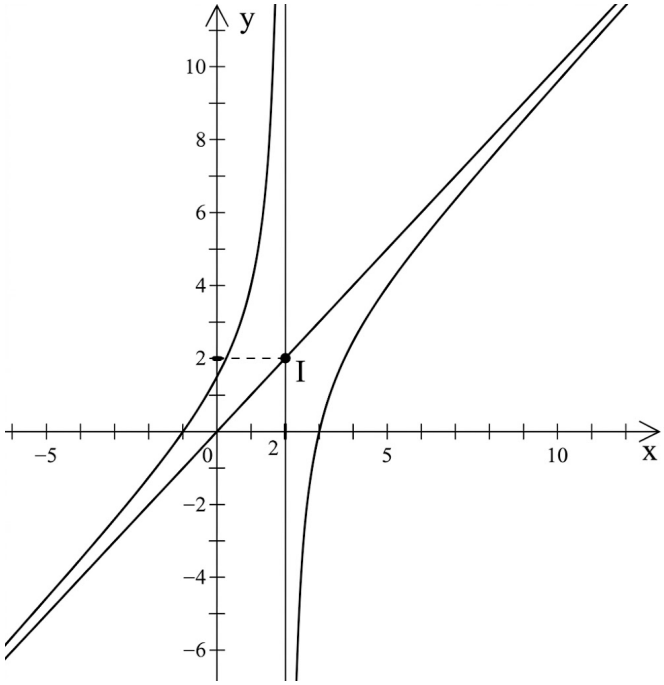
a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đã cho không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



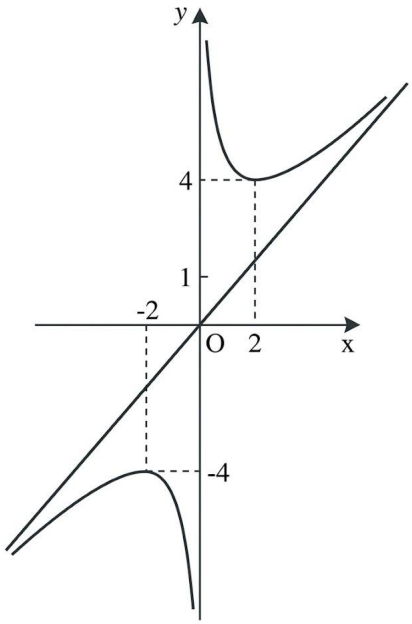
a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



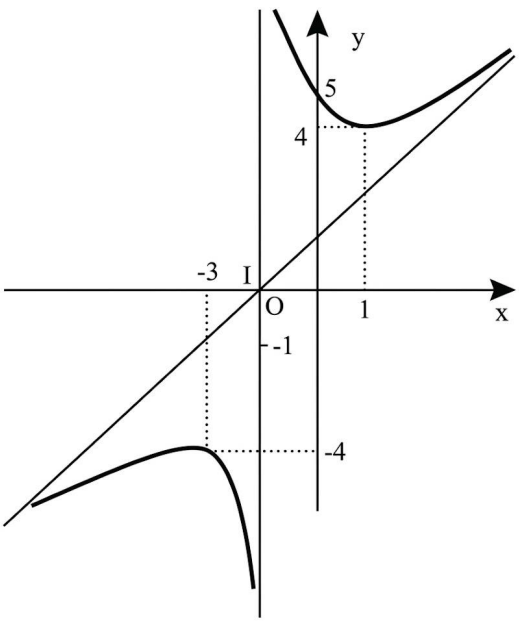
a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;4)$ và điểm cực tiểu $(-2;-4)$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-3;-4)$ và điểm cực tiểu $(1;4)$.

Câu 70. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1) với m là số thực

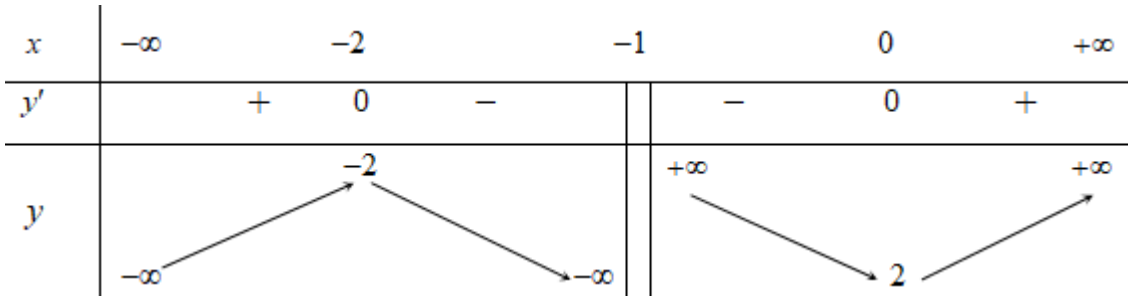
a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3;-5)$

d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



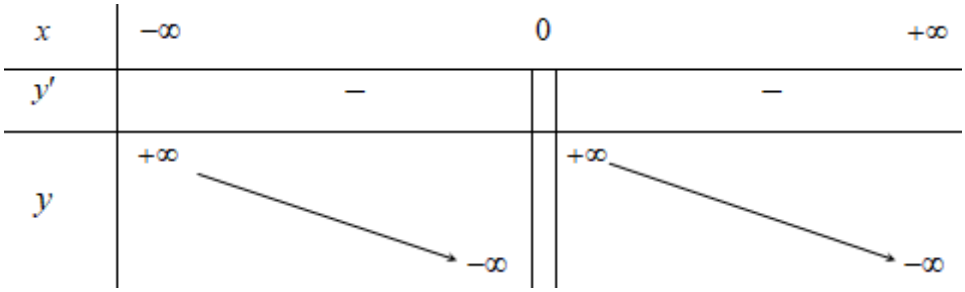
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

c) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

d) Trên đoạn $[2026;2027]$ hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(2027)$ và giá trị lớn nhất là $f(2025)$.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

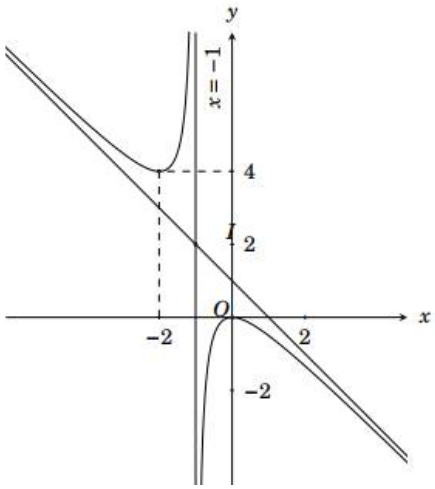
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là như hình vẽ sau:



Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx-1}{mx+2}$ với $(a,b,m\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

a) $f'(x)<0$ khi $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

c) $a+b+m=3$

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là $(-2;3)$.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+2x+c}{x+n}$ với $(a,c,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(4;-6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=2$.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(0;2)\cup(2;4)$

d) $a+c+n=7$.

Câu 76. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C).

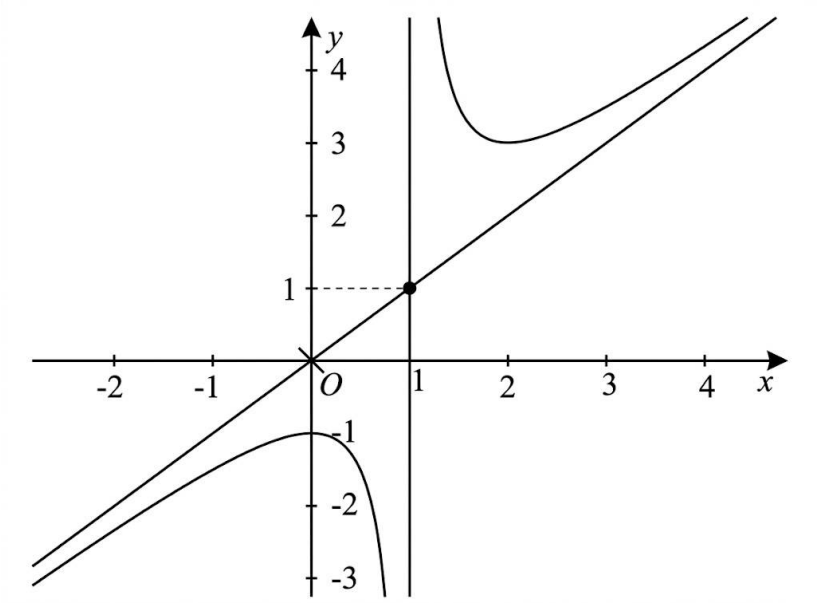
a) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là $x=1$

b) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số (C) cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x+1$.

d) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$ đạt cực đại tại $x=0$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



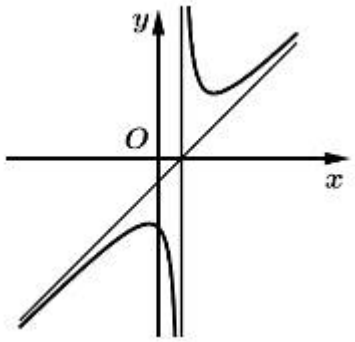
a) Giá trị của biểu thức $a+b+c+d=0$.

b) Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

c) Gọi A,B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số; M là điểm di động trên trục Ox sao cho góc $\widehat{AMB}$ không tù. Giá trị nhỏ nhất của hoành độ điểm M là 3.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có phương trình: $y=x-1$.

Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



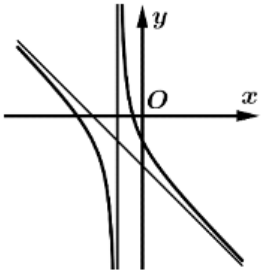
a) $ad>0$.

b) $ed<0$.

c) $ce<0$.

d) $bd>0$.

Câu 79. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad>0$.

b) $de<0$.

c) $ac>0$.

d) $bd>0$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

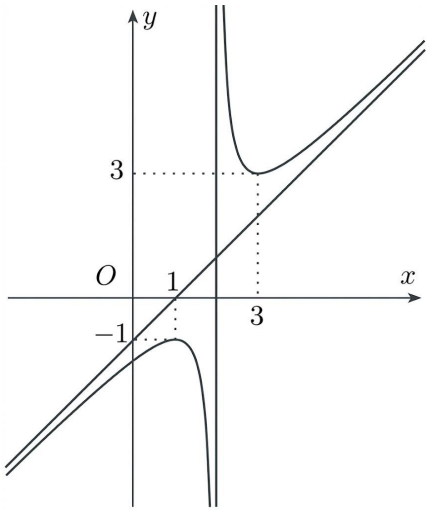
b) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-2;4)$ và $(3;-4)$

c) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$

d) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m>4$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

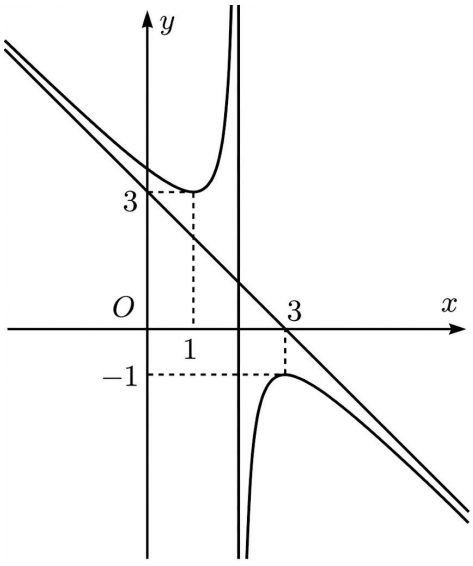
Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) như hình vẽ sau.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C). Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

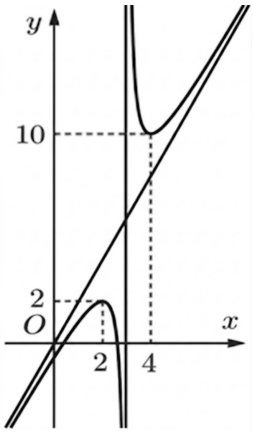
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) như hình vẽ sau.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C). Tính giá trị của $x_0+2027y_0$.

Trả lời: ……..

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) như hình vẽ sau.



Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

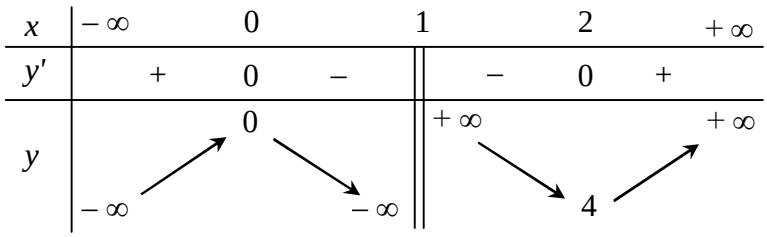
Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	15	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

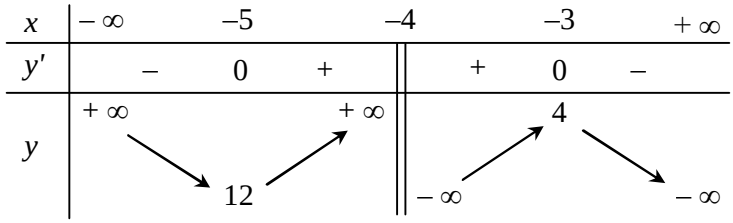
Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Câu 58. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=x-2+\dfrac{4}{x-1}$. Tính giá trị $T=2025x_0-2024y_0$.

Trả lời: ……..

Câu 59. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. Tính giá trị $T=x_0-y_0$.

Trả lời: ……..

Câu 60. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$. Tính giá trị $T=x_0-y_0$.

Trả lời: ……..

Câu 61. Cho hàm số $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$ có đồ thị (C). Biết hai trục đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$ lần lượt có dạng $y=\left(a-\sqrt{b}\right)x+1-2\sqrt{5}$ và $y=\left(c+\sqrt{d}\right)x+1+2\sqrt{5}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=2a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) nhận đường thẳng $y=\left(\sqrt{a}-b\right)x-1-\sqrt{c}$ làm trục đối xứng , với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=a-2027b+c$.

Trả lời: ……..

Câu 63. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $M\left(x_M;y_M\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M$.

Trả lời: ……..

Câu 64. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ cắt trục hoành tại hai điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ và $N\left(x_N;y_N\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+x_N$.

Trả lời: ……..

Câu 65. Đường thẳng $y=2x-1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$?

Trả lời: ……..

Câu 66. Trên đồ thị (C): $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$, có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$?

Trả lời: ……..

Câu 67. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) của hàm số có tọa độ là các số nguyên?

Trả lời: ……..

Câu 69. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+2m}{x+m}(C_m)$. Có bao nhiêu đồ thị (C_m) đi qua điểm $(0,1)$.

Trả lời: ……..

Câu 70. Tìm giá trị m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Trả lời: ……..

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ……..

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $ax+by+c=0$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=2027a+b+2028c$.

Trả lời: ……..

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành có dạng $ax+by+1=0$. Tính giá trị biểu thức $T=2027a-b$.

Trả lời: ……..

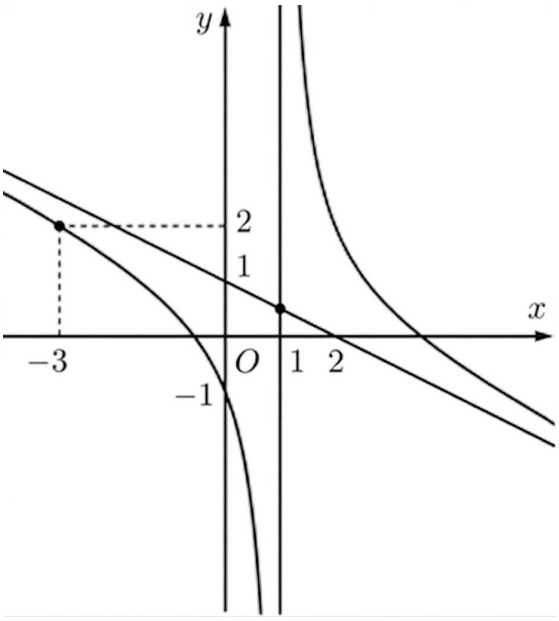
Câu 75. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $y=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b$

Trả lời: ……..

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Có bao nhiêu tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

Trả lời: ……..

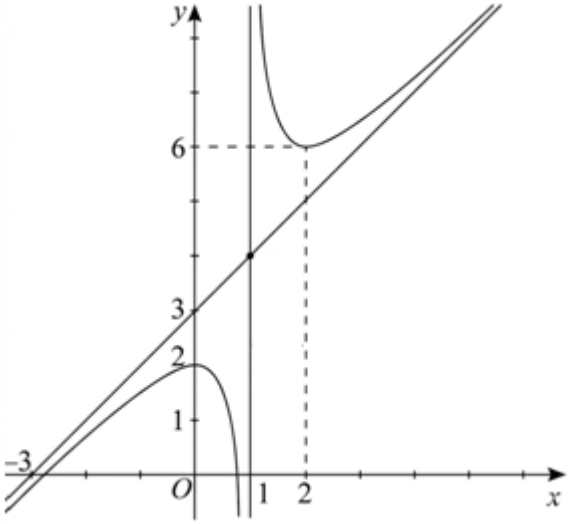
Câu 77. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ với a,b,c,p,q là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận xiên dạng $y=mx+n$, khi đó $n-2m$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

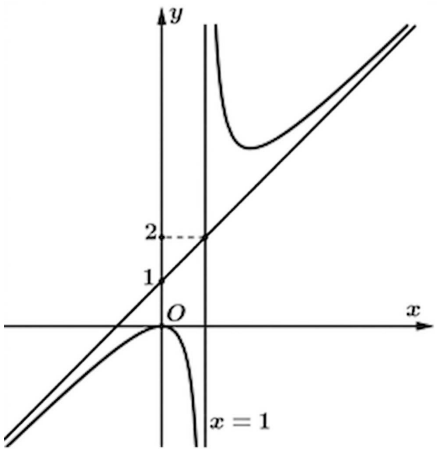
Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ với a,b,c,p,q là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận xiên dạng $y=mx+n$, khi đó $2026m+n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 79. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=ax+b+\dfrac{1}{x+c}$



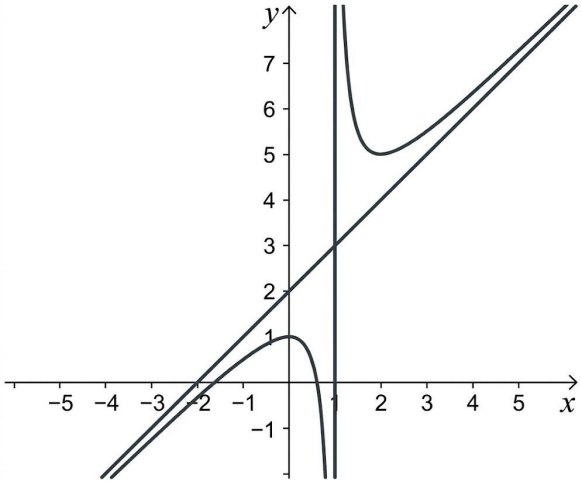
Khi đó tổng $2026a+2027b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 80. Cho hàm số sau: $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R};c\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$. Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2, khi đó tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

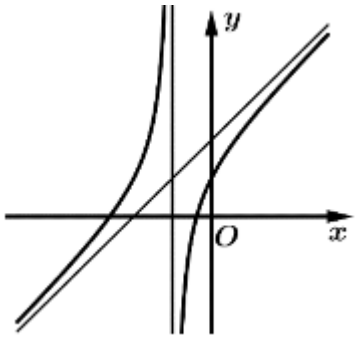
Trả lời: ……..

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a>0,m\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Trả lời: ……..

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Trả lời: ……..

Câu 83. Tìm được trên đồ thị $(C):y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M_1(a;b)$ và $M_2(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$?

Trả lời: ……..

Câu 85. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d:y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d':y=2-m-x$ cắt

(C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D = -3$. Số phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 86. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x-2}$ (1). Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta : 2x + y + 1 = 0$.

Trả lời: ……..

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C). Tính tổng các giá trị của tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Trả lời: ……..

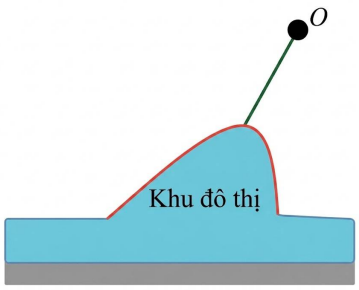
Câu 88. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2mx + 5}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta : y = 2x$?

Trả lời: ……..

Câu 89. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: ……..

Câu 90. Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Trả lời: ……..

CHỦ ĐỀ 3

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN, VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ VÀ ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$.

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$.

• Đạo hàm: $y'=\dfrac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$.

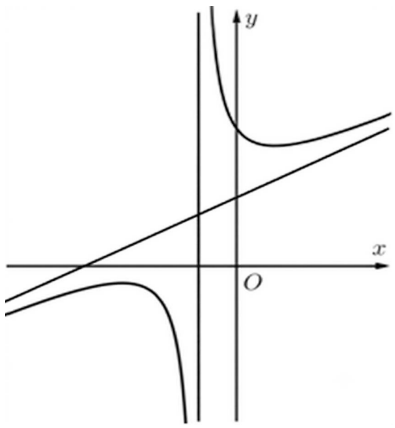
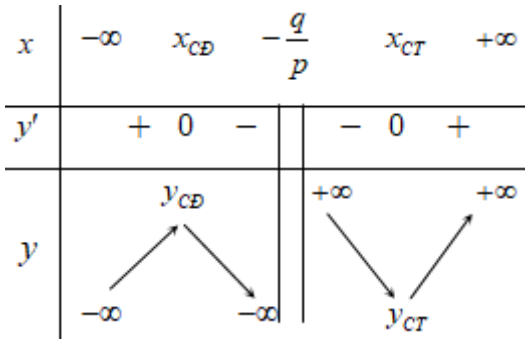
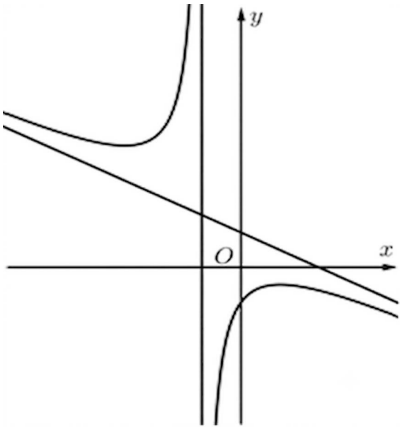
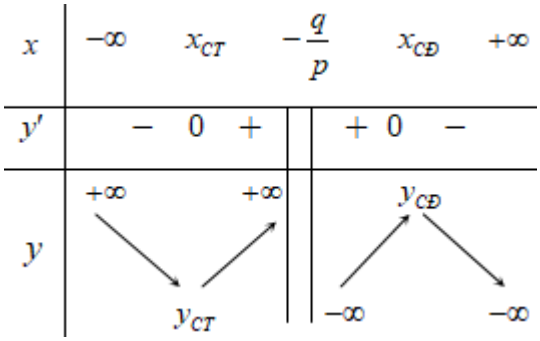
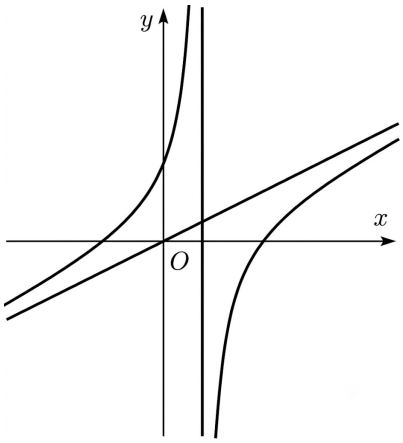
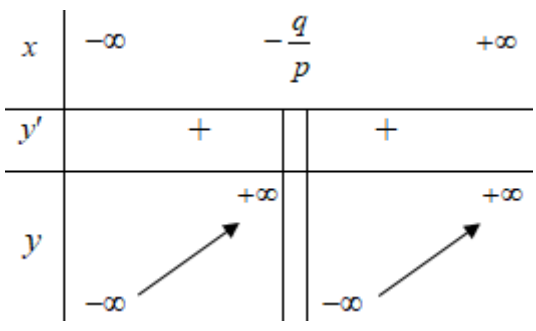
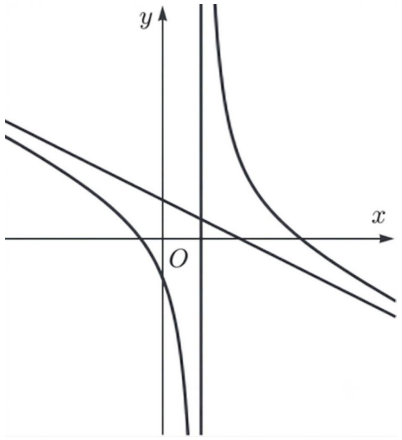
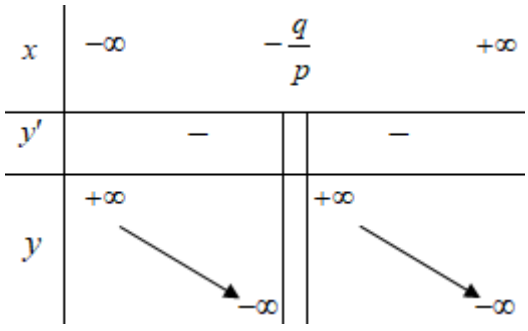
+ Xét dấu y' để tìm khoảng đơn điệu của hàm số.

+ Tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số (nếu có).

• Phương trình các đường tiệm cận: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-\dfrac{p}{q}$ và đường tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{p}x+\dfrac{b-ap}{p^2}$.

• Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận và nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.

2. Các dạng đồ thị của hàm số phân thức: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$

	$ap>0$	$ap<0$
Phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 	• Đồ thị  • Bảng biến thiên 

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}\ (a\neq 0,\ p\neq 0)$$

Để khảo sát hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}\ (a\neq 0,\ p\neq 0)$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{q}{p}\right\}$

Bước 2: Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Tính đạo hàm $y'=\frac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y'=0$

Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

Bước 3: Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

Chú ý:

- Đồ thị có tâm đối xứng I là giao điểm hai đường tiệm cận
- Giả sử đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=x_0$ và đường tiệm cận xiên $y=mx+n$ (hay $mx-y+n=0$) thì trục đối xứng của đồ thị nhận hai đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng là: $x-x_0=\pm(mx-y+n)$.

Bài 1. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ b) $y=\frac{x^2+x-1}{x}$ c) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ d) $y=\frac{-x^2+1}{x}$

Lời giải

a) $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-2$.

Trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

Trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$ ta có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=f(-2)=-2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=f(0)=2$

+ Các giới hạn:

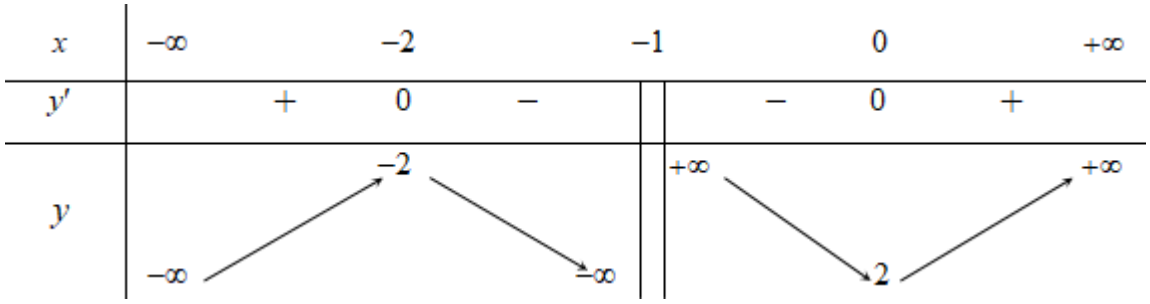
Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$y=f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:



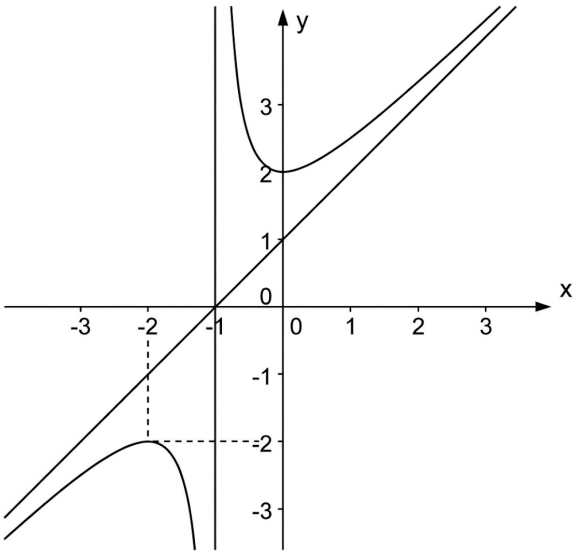
• Đồ thị:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung tại điểm $(0;2)$.

+ Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(-2;-2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(-1;0)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=x+1$ làm trục đối xứng.



b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• Sự biến thiên

+ Chiều biến thiên

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$ với mọi $x\neq 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Các giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+x-1}{x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+x-1}{x}=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$y=f(x)=\frac{x^2+x-1}{x}=x+1-\frac{1}{x}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ nên đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

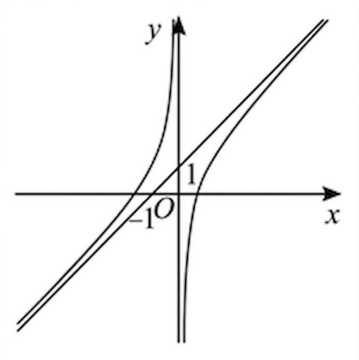
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$

• Đồ thị:

+ Chọn $x=1\Rightarrow y=1; x=2\Rightarrow y=\frac{5}{2}$. Đồ thị qua 2 điểm $(1;1);\left(2;\frac{5}{2}\right)$

+ Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(0;1)$.

+ Đồ thị nhận đường phân giác tạo bởi hai đường tiệm cận đứng $x=0$ và tiệm cận xiên $y=x+1$ làm trục đối xứng.



c) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

•Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

• Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y=x+\frac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty.. \lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$.

Do đó, đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$.

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

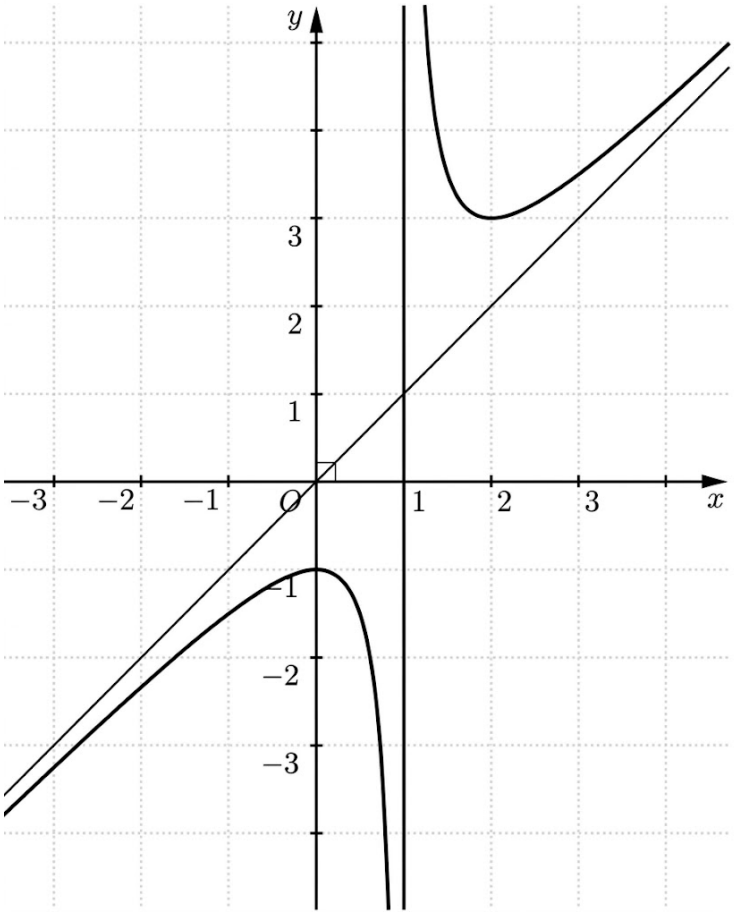
Hàm số đạt cực đại tại $x=0, y_{CĐ}=-1$; đạt cực tiểu tại $x=2, y_{CT}=3$.

- Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0;-1)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;-1),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-1;-\frac{3}{2}\right),(2;3),\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ và $\left(3;\frac{7}{2}\right)$.



Quan sát đồ thị ở Hình, đồ thị đó nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận Hình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

d) $y=\frac{-x^2+1}{x}$

- Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

Ta viết hàm số đã cho dưới dạng: $y=-x+\frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$. $\lim\limits_{x\to0^-} y=-\infty, \lim\limits_{x\to0^+} y=+\infty$. Do đó, đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Do đó, đường thẳng $y=-x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

- $y' = -\dfrac{x^2+1}{x^2}, y' < 0, \ \forall x \neq 0.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$-\infty$
			$-\infty$		$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

- Đồ thị

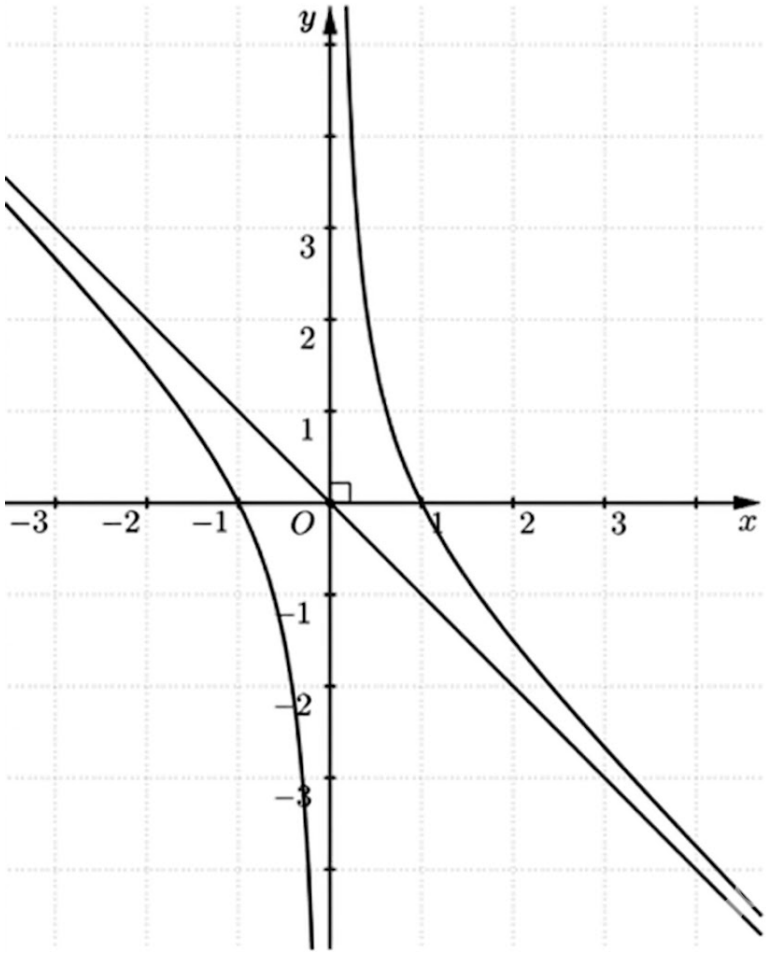
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm $(-1;0),(1;0)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-1;0)$, $(1;0)$, $\left(-2;\dfrac{3}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $O(0;0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2+1}{x}$ được cho ở Hình.



Bài 2. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$ d) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

• Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2), y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$.

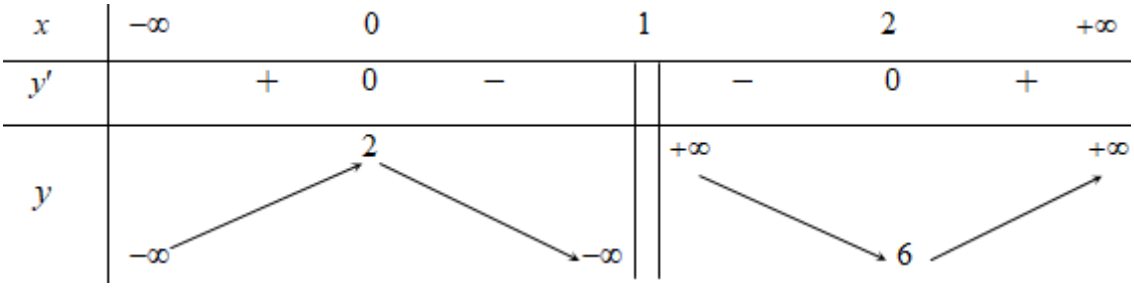
Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x}=1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x-1}=3$.

Suy ra đường thẳng $y=x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:



• Đồ thị:

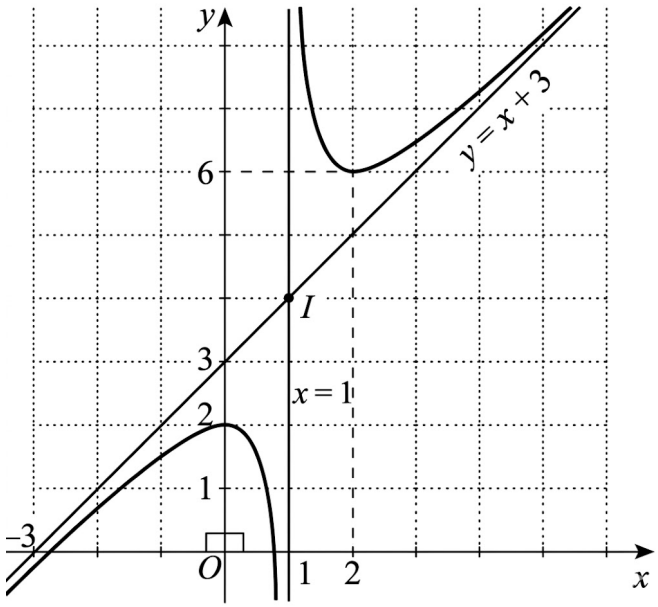
Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2+2x-2=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.



b) $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0.$

Suy ra đường thẳng $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$;

$y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-1$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- Chiều biến thiên:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-3$, $f_{CD}=f(-3)=-2$;

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-1$, $f_{CT}=f(-1)=2$.

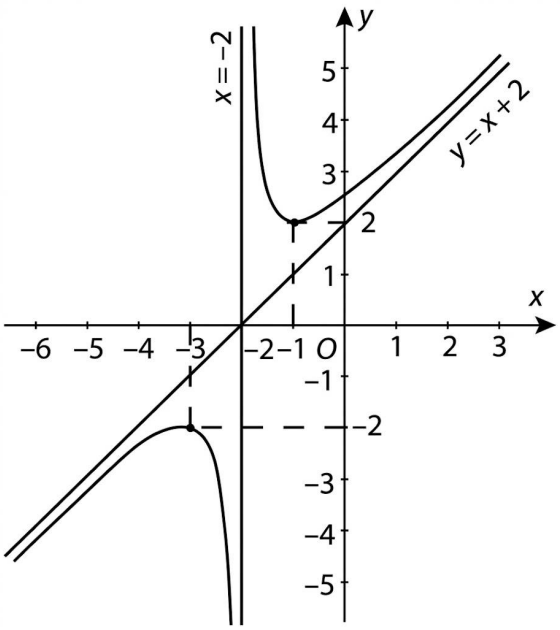
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x=-2$ và $y=x+2$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ và không giao với trục Ox.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2;0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

• Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2}$.

Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = -\infty.$$

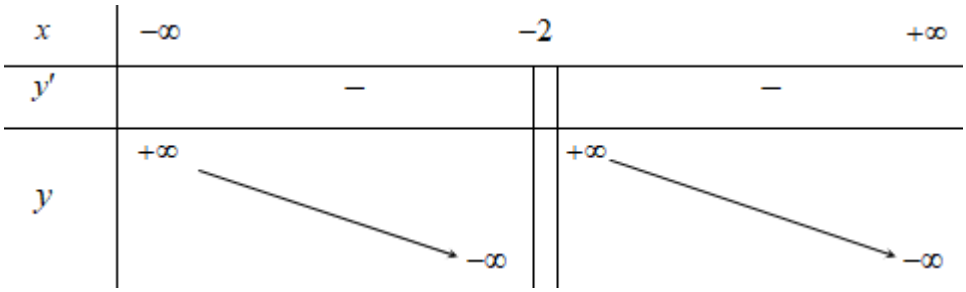
Ta có: $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x^2+2x} = -1$ và $b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-x^2-3x+4}{x+2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x+4}{x+2}\right) = -1.$

Suy ra đường thẳng $y = -x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x\to-2^-} y = \lim_{x\to-2^-} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = -\infty; \lim_{x\to-2^+} y = \lim_{x\to-2^+} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



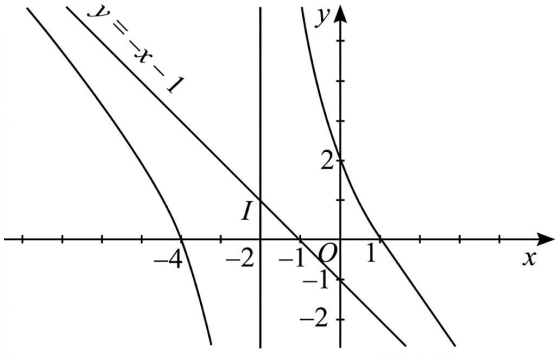
• Đồ thị:

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1.$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$. Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2;1)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -2$ và $y = -x-1$.



d) $y = \frac{-x^2-x+2}{x+1}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có: $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=-x+\dfrac{2}{x+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\dfrac{2}{x+1}\right)=+\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=0$.

Suy ra đường thẳng $y=-x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Bảng biến thiên:

Ta có $y'=-1-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$.

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm, y' không xác định tại $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- Chiều biến thiên: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

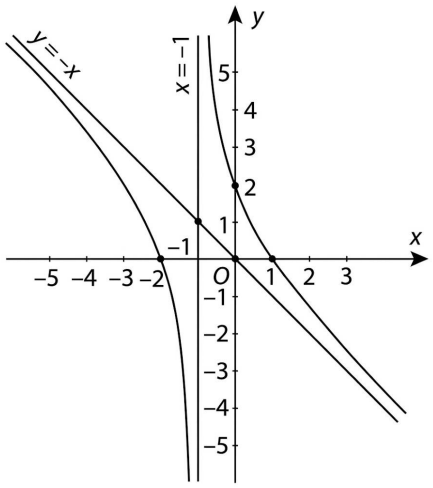
- Đồ thị:

Vẽ các đường tiệm cận $x=-1$ và $y=-x$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại $(0;2)$ và giao với trục Ox tại $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận đó làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số được cho như Hình.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x^2+x-2}{2-x}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y=x-\dfrac{1}{x}$ e) $y=-x+1+\dfrac{1}{x+1}$ f) $y=-3x+7-\dfrac{18}{x+2}$

Bài 4. Khảo sát và vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$ c) $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$

d) $y=x-\dfrac{2}{x+1}$ e) $y=x-2+\dfrac{4}{x-1}$ f) $y=x+4+\dfrac{5}{x-3}$

DẠNG 2
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số sau: $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) đi qua các điểm sau $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right),B(1;1),C(3;5),D\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$. Khi đó, tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đồ thị (C) đi qua các điểm sau $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right),B(1;1),C(3;5),D\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases}\dfrac{b}{d}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1+a+b}{c+d}=1\\ \dfrac{9+3a+b}{3c+d}=5\\ \dfrac{1-a+b}{-c+d}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b-d=0\\ a+b-c-d=-1\\ 3a+b-15c-5d=-9\\ -a+b-\dfrac{1}{3}c+\dfrac{1}{3}d=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-1\\ c=1\\ d=-2\end{cases}$$

Vậy $a+b+c+d=-3$

Bài 2. Cho hàm số sau: $y=ax+b+\dfrac{5}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R};a.c\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+1$. Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4, khi đó tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[ax+b+\frac{5}{cx+d}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{cx+d}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ax+b+\frac{5}{cx+d}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{cx+d}=0$$

Suy ra tiệm cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$

Mà đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=2x+1$ nên $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

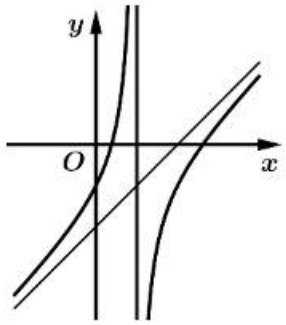
Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}\Rightarrow-\dfrac{d}{c}=1\Leftrightarrow d=-c$

Do đó: $y=2x+1+\dfrac{5}{cx-c}$

Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 nên $x=0,y=-4\Rightarrow-4=1+\dfrac{5}{-c}\Leftrightarrow c=1\Rightarrow d=-1$

Vậy $a+b+c+d=3$

Bài 3. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{1}{d}<0\Rightarrow d<0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=x_0>0$. Suy ra $\dfrac{-d}{c}>0\Rightarrow c>0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dễ thấy hàm số không có cực trị và $ac>0$.

Suy ra $a>0$.

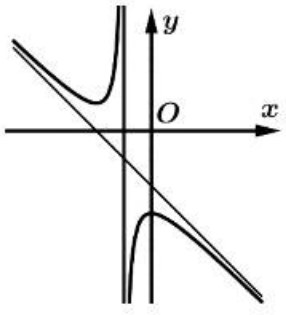
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Nên phương trình $ax^2+bx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1+x_2>0\Rightarrow\dfrac{-b}{a}>0\Rightarrow b<0$.

Vậy có 2 số dương trong các số $a;b;c;d$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số đã cho ta có

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=x_0<0$.

Suy ra $-d<0\Rightarrow d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Nên $\dfrac{c}{d}<0\Rightarrow c<0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị dễ thấy hàm số đã cho có 2 cực trị và $a<0$.

Đồ thị hàm số có đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b<0$.

Vậy có 1 số dương trong các số $a;b;c;d$.

DẠNG 3

BÀI TOÁN LIÊN QUAN HÀM SỐ HỮU TỈ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$

Bài 1. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải

Gọi (d) là đường thẳng $y=kx+\dfrac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=kx_0+\dfrac{5}{4} & (1)\\ \dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}=k & (2)\end{cases}$$ có nghiệm x_0

Thế k từ (2) vào (1): $\dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}.x_0+\dfrac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ (-x_0^2+x_0+1)(x_0+1)=-x_0^2-2x_0^2+\dfrac{5}{4}(x_0+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\ 3x_0^2-2x_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\ x_0=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Tại $x_0=1\Rightarrow k=-\dfrac{3}{4}$, có tiếp tuyến $(T_1): y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Tại $x_0=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow k=\dfrac{5}{4}$, có tiếp tuyến $(T_2): y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{5}{4}$

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ có đồ thị là đường cong (C) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $x-3y-6=0$

Lời giải

Đường thẳng $x-3y-6=0$ có hệ số góc $k_1=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ tiếp tuyến của

(C) vuông góc với đường thẳng này có hệ số góc $k_2=-3$

Xét phương trình $y'_x=-3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x^2+4x+3=-3x^2-12x-12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ 4x^2+16x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{7}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Tại $A\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{7}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_1): y=-3\left(x+\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow y=-3x-11$

Tại $B\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_2): y=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y=-3x-3$

Bài 3. Biết rằng đường thẳng $y=2x+2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ với mọi giá trị của tham số *m*. Tìm hoành độ trung điểm của AB theo tham số *m*.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$\dfrac{x^2+3}{x+1}=2x+2m \Leftrightarrow x^2+2(1+m)x+2m-3=0\ \ (1),\ (x\neq -1).$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,\ B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác

$2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=(1+m)^2-(2m-3)>0 \\ (-1)^2+2(1+m).(-1)+2m-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4>0,\forall m \\ -4\neq 0 \end{cases}.$

Khi đó, gọi $A(x_1;2x_1+2m);\ B(x_2;2x_2+2m)$

Hoành độ trung điểm của *AB* là $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{2+2m}{2}=-m-1.$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA\perp OB$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là

$\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}=m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2+mx-1=mx-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=x^2+m-1=0 \end{cases}.$

Đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1-m>0 \\ g(1)=m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\setminus\{0\}.$

Gọi $A(x_1;m), B(x_2;m)$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$.

Khi đó $OA\perp OB \Leftrightarrow x_1x_2+m^2=0 \Leftrightarrow m^2+m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA\perp OB$ bằng $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=3$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Tìm giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ và trục hoành:

$\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2mx+m=0 \ (*) \\ x\neq -m \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m>0 \\ 3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ m\neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành thì $y_0=x_0^2-2mx_0+m=0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$k=y'(x_0)=\dfrac{(2x_0-2m)(x_0-1)-(x_0^2-2mx_0+m)}{(x_0+m)^2}=\dfrac{2x_0-2m}{x_0+m}$.

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C) tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1=\dfrac{2x_1-2m}{x_1+m}$, $k_2=\dfrac{2x_2-2m}{x_2+m}$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x_1-2m}{x_1+m}\right)\left(\dfrac{2x_2-2m}{x_2+m}\right)=-1$

$\Leftrightarrow 4\left[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2\right]=-\left[x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2\right] \ (**)$.

Ta lại có $\begin{cases} x_1x_2=m \\ x_1+x_2=2m \end{cases}$, do đó $(**) \Leftrightarrow m^2-5m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=5 \end{array}\right.$. Nhận $m=5$.

Bài 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq 1)\ (1)$$

Để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Tức là ta phải có: $\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\ 1+2m+2m^2-1\neq 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\ 2m(m+1)\neq 0\end{cases}$ tức $\begin{cases}-1<m<1\\ m\neq 0\end{cases}(2)$.

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1).

Theo định lý Viète, ta có: $x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I(x_0;0)$ là giao điểm của (C_m) và trục hoành. Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm I có hệ số góc

$$y'(x_0)=\frac{(2x_0+2m)(x_0-1)-(x_0^2+2mx_0+2m^2-1)}{(x_0-1)^2}=\frac{2x_0+2m}{x_0-1}$$

Như vậy, tiếp tuyến tại A,B lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1)=\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'(x_2)=\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại A,B vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2)=-1$ hay

$$\left(\frac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\frac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1\Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)(x_1+x_2)+4m^2+1=0 \text{ tức } 3m^2+m-2=0\Leftrightarrow m=-1$$

hoặc $m=\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}(C_m)$. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d:x+y+2=0$ bằng nhau.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác –1.

$\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+2x+2m-2=0\quad(1)$ (có hai nghiệm $x_1,x_2\neq -1$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\ g(-1;m)=2m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}\quad(*)$$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với $x_1,x_2\neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viète: $x_1+x_2=-2;x_1.x_2=2m-2$.

$$y=\frac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\frac{3-2m}{x+1}\,(C_m)$$

Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=2x+m$ cho nên $y_1=2x_1+m;y_2=2x_2+m\Rightarrow A(x_1;2x_1+m);B(x_2;2x_2+m)$

Theo giả thiết: $\frac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |x_1+y_1+2|=|x_2+y_2+2|$

$\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$

$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2+4m+4)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2+4m+4)=0,(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow 3(-2+4m+4)=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn $(*)$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m=-\frac{1}{2}$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\frac{x^2+(2m+1)x+m^2+m+4}{2(x+m)}$ (1). Tìm điều kiện của m để hàm số (1) có 2 điểm cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm này.

Lời giải

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2mx+m(2m+1)-m^2-m-4}{(x+m)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2mx+m^2-4}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+2mx+m^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m-2\Rightarrow y=-\frac{3}{2}\\ x=-m+2\Rightarrow y=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

$\forall m,(C_m)$ luôn có hai điểm cực trị là $A\left(-m-2,-\frac{3}{2}\right)$; $B\left(-m+2,\frac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

Bài 9. Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx-1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C_m). Tìm m để đường thẳng $d:y=2x$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C_m)

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m):

$$\frac{x^2+mx-1}{x-1}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2+mx-1=2x^2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2-(m+2)x+1=0\end{cases}$$

Để d cắt C_m tại hai điểm thuộc 2 nhánh của (C_m), ta phải có $x_1<1<x_2$, với x_1,x_2 là 2 hoành độ của 2 giao điểm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-1<0 \\ x_2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$$

Ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+2 \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow 1-(m+2)+1<0 \Leftrightarrow m>0.$

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

b) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M>1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C))

Lời giải

a) $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-m-5}{x-1}$

$$y'=\frac{-x^2+2x-2m-2+m+5}{(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x-m+3}{(x-1)^2}$$

y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2+2x-m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-m+3=4-m>0 \Leftrightarrow m<4, x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $y'=0 \Leftrightarrow -1+2-m+3\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4$

Đối chiếu điều kiện ta được: $m<4$

b) $x_M>1 \Rightarrow M$ thuộc nhánh bên phải của (C). $I(1,0)$

$$M\left(m,-m+1-\frac{4}{m-1}\right)$$

$$IM^2=(m-1)^2+\left[(-m+1)^2+\frac{16}{(m-1)^2}+8\right]$$

$$=2(m-1)^2+\frac{16}{(m-1)^2}+8\geq 2\sqrt{2}(m-1)\cdot\frac{4}{(m-1)}+8$$

$$\Rightarrow IM^2\geq 8(\sqrt{2}+1) \Rightarrow IM\geq\sqrt{8(\sqrt{2}+1)}$$

IM ngắn nhất khi $2(m-1)^2=\dfrac{16}{(m-1)^2} \Leftrightarrow (m-1)^4=8 \Leftrightarrow m=1+\sqrt[4]{8}$

$$\Rightarrow y_M=-\sqrt[4]{8}-\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$$

Điểm cần tìm: $M\left(1+\sqrt[4]{8};-\sqrt[4]{8}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}\right)$

DẠNG 4
ỨNG DỤNG THỰC TIỄN CỦA HÀM HỮU TỈ BẬC HAI

Bài 1. Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ Oxy (với đơn vị trên hệ trục tọa độ là $1\,(km)$) là một đường cong có dạng $y=\dfrac{x^2+bx+c}{dx+e}\,(a\neq 0, d\neq 0)$ và đường cong này cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$. Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875\,(m)$ thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu kilômét?



Lời giải

đường cong là $y=\dfrac{x^2+bx+c}{dx+e}$

Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ nên

$x^2+bx+c=(x-1)(x-8)=x^2-9x+8$

Suy ra $y=\dfrac{x^2-9x+8}{dx+e}\Rightarrow y'=\dfrac{(2x-9)(dx+e)-d(x^2-9x+8)}{(dx+e)^2}$

Vì đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(6;5)$ nên suy ra

$$\begin{cases} y'(6)=0 \\ y(6)=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3(6d+e)+10d=0 \\ \dfrac{-10}{6d+e}=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 28d+3e=0 \\ 30d+5e=-10 \end{cases}\Leftrightarrow d=\frac{3}{5};e=-\frac{28}{5}$$

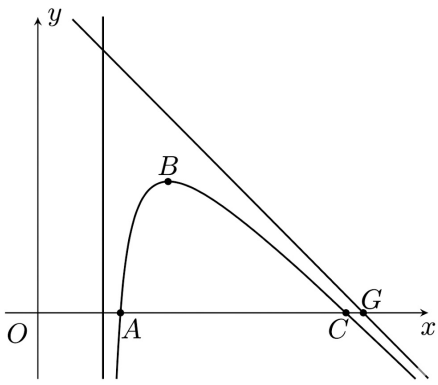
Vậy phương trình của hàm số là: $y=\dfrac{5(x^2-9x+8)}{3x-28}$. Kiểm tra lại điểm cực trị của hàm số này ta thấy điểm $(6;5)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm nghiệm $x>6$ của phương trình

$$\frac{5(x^2-9x+8)}{3x-28}=3,875\Leftrightarrow 5x^2-56,625x+148,5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=7,2 \\ x=4,125\ \ (L) \end{array}\right.$$

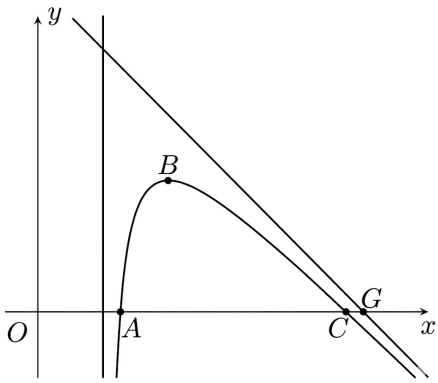
Vậy khi khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất $3875\,(m)$ thì khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang là 7,2 km.

Bài 2. Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gắn với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Lời giải



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là $x=2$.

Hàm số có dạng $y=f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}(a<0)$.

Đồ thị hàm số qua điểm $A\left(\dfrac{5}{2};0\right)$ và nhận $B\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$ làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{5}{2}\right)=0 \\ f(4)=\dfrac{9}{2} \\ f'(4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2}a+b+2c=0 \\ 4a+b+\dfrac{1}{2}c=\dfrac{9}{2} \\ a-\dfrac{1}{4}c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\dfrac{21}{2} \\ c=-4 \end{cases}.$$ Khi đó: $f(x)=-x+\dfrac{21}{2}-\dfrac{4}{x-2}$.

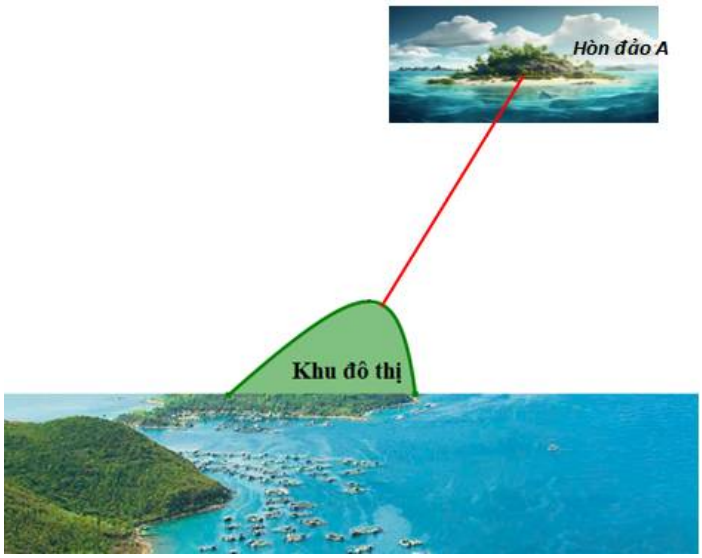
Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y=-x+\dfrac{21}{2}$. Tọa độ điểm $G\left(\dfrac{21}{2};0\right)$.

Phương trình cho hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục Ox là

$$-x+\frac{21}{2}-\frac{4}{x-2}=0\Rightarrow -x^2+\frac{25}{2}x-25=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{2} \\ x=10 \end{array}\right. \Rightarrow C(10;0).$$

$$CG=\frac{21}{2}-10=\frac{1}{2}.$$

Bài 3. Ở vịnh biển Nha Trang, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo A để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy (với đơn vị đo tương ứng $1km$) đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+1}{x}$ và vị trí hòn đảo A đặt trùng với gốc toạ độ O. Người ta thiết kế tuyến cáp treo nối hòn đảo A với đường bao của khu đô thị, hỏi độ dài của tuyến cáp treo đó ngắn nhất là bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của kilômét)?



Lời giải

Lấy điểm $B\left(x;\frac{x^2+1}{x}\right)$, $x\neq 0$ thuộc đồ thị $(C): y=\frac{x^2+1}{x}$ là điểm cần tìm

Khi đó $AB^2=x^2+\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=2x^2+\frac{1}{x^2}+2\geq 2\sqrt{2}+2$

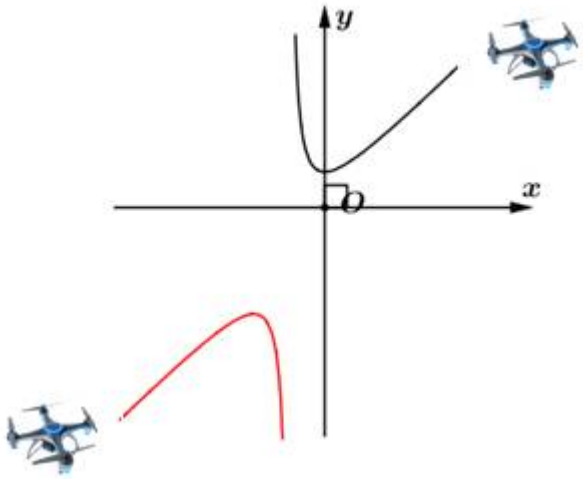
Suy ra $AB\geq\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x^2=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Vậy độ dài tuyến cáp treo ngắn nhất bằng $AB=\sqrt{2\sqrt{2}+2}\approx 2,2$.

Bài 4. Trong hệ trục tọa độ (Oxy), mô tả chuyển động của hai máy bay không người lái A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai máy bay luôn thuộc về hai

nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa của hai máy bay A và B bằng bao nhiêu kilômét ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



Lời giải

Ta có $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1},\ (x\neq -1)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$, gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng $x=-1$.

Gọi A là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó $x_A<-1$.

Đặt $a=-1-x_A>0\Rightarrow x_A=-1-a$

$$\Rightarrow y_A=-1-a+\frac{1}{-1-a+1}=-1-a-\frac{1}{a}\Rightarrow A\left(-1-a;-1-a-\frac{1}{a}\right)$$

Gọi B là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó $x_B>-1$.

Đặt $b=x_B+1>0\Rightarrow x_B=b-1$

$$\Rightarrow y_B=b-1+\frac{1}{b-1+1}=b-1+\frac{1}{b}\Rightarrow B\left(b-1;b-1+\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2=(b+a)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)^2=(b+a)^2+(b+a)^2.\left(\frac{1}{ab}\right)^2=(a+b)^2\left(2+\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}\right)$$

Với $a>0,b>0$ ta có $\begin{cases}(a+b)^2\geq 4ab\\ 2+\dfrac{1}{a^2b^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a^2b^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{ab}\end{cases}$

Nên $AB^2\geq 4ab.\left(\dfrac{2}{ab}+\dfrac{2\sqrt{2}}{ab}\right)=8+8\sqrt{2}\Rightarrow AB\geq\sqrt{8+8\sqrt{2}}\approx 4{,}39$.

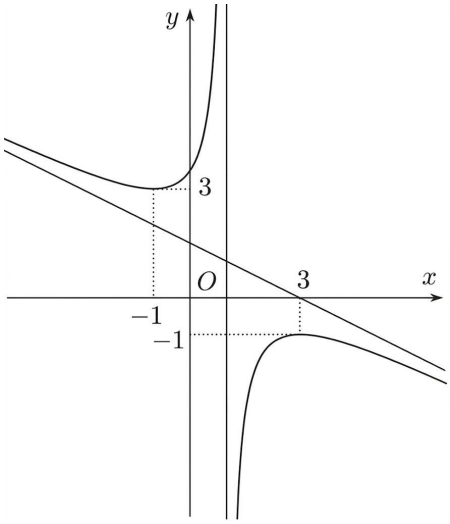
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ 2=\dfrac{1}{a^2b^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai máy bay A và B là $4{,}39(km)$

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-x^2-3x+8}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-8}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+4x-7}{2x-2}$.

Lời giải

Chọn D.

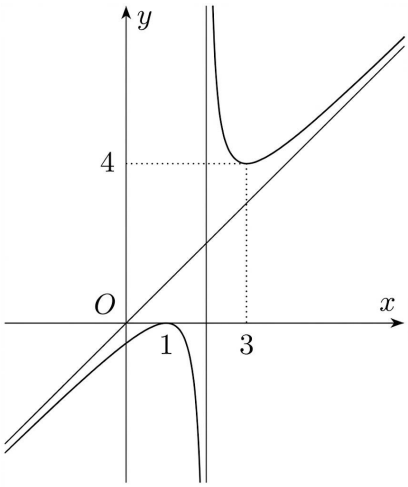
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y>3$ nên loại A

Thay điểm $(-1;3)$ vào các đáp án, ta loại đáp án C

Thay điểm $(3;-1)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 2. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+6x-8}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-2x+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{-2x^2+6x-8}{x-2}$.

Lời giải

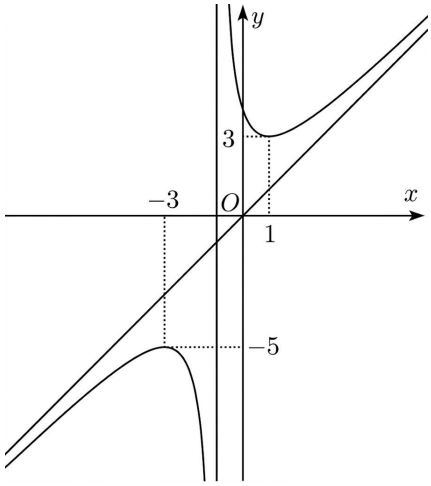
Chọn A.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y<0$ nên loại B, D

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án C

Vậy chọn đáp án A đúng

Câu 3. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{3x^2+5x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x+10}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

Lời giải

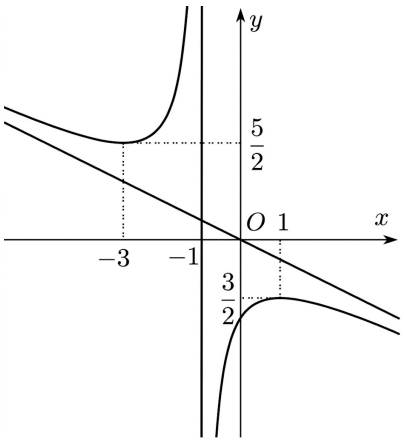
Chọn D.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y>3$ nên loại A,B

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án C

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 4. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2+5x-13}{2x+2}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x-4}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{-2x^2-3x-1}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x-10}{2x+2}$.

Lời giải

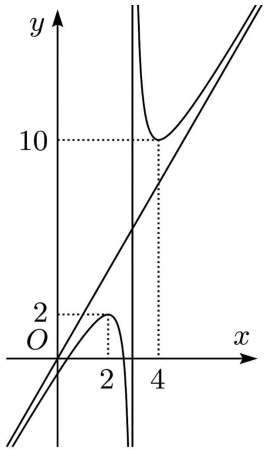
Chọn B.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y<-\dfrac{3}{2}$ nên loại C

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại A, D

Vậy chọn đáp án B đúng

Câu 5. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-6}{x+3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-6}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-6x+2}{x+3}$.

Lời giải

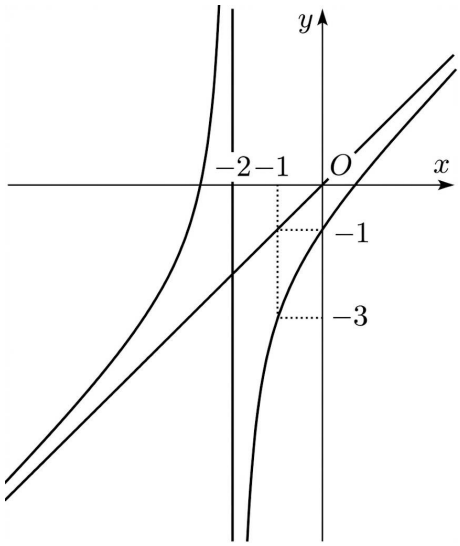
Chọn C.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y<0$ nên loại B, D

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=x_0, 2<x_0<4$, ta loại đáp án A

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 6. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+4x-2}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{3x^2+4x-2}{x-2}$.

Lời giải

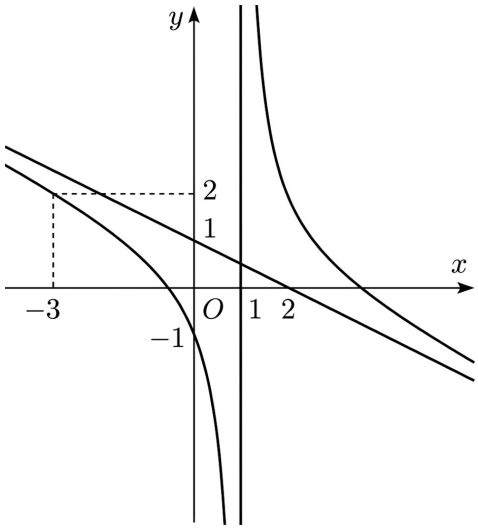
Chọn C.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y=-1$ nên loại A,D

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 7. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+2}{2x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+6x+1}{x-1}$.

Lời giải

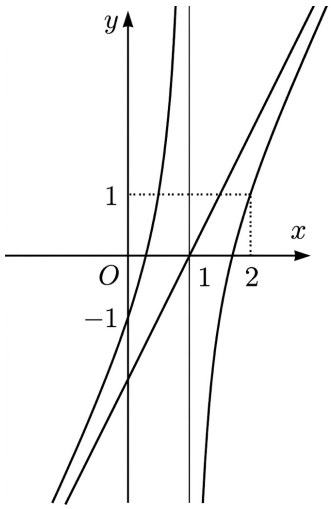
Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A, D

$y=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ nên ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án C đúng

Câu 8. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-3x^2+6x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{3x^2-6x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-1}$.

Lời giải

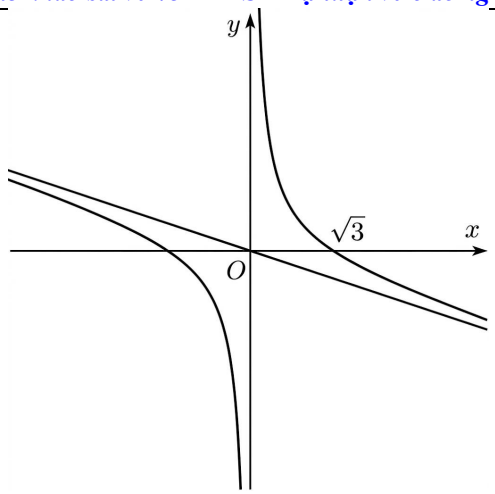
Chọn D.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y=-1$ nên loại A,C

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án B

Vậy chọn đáp án D đúng

Câu 9. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-3}{3x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3}{-3x}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3}{-3x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3}{3x}$.

Lời giải

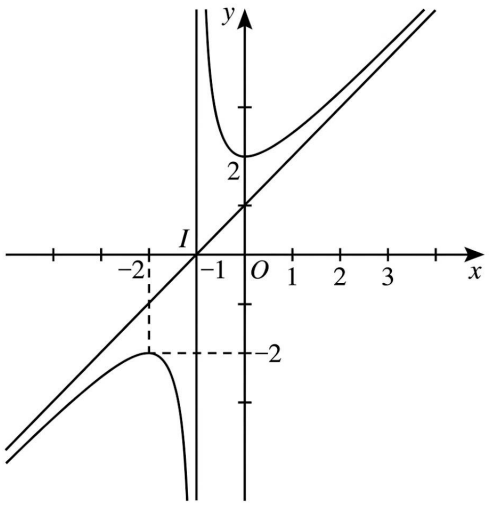
Chọn B.

Đồ thị cắt trục Ox tại hai điểm nên loại C,D

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A

Vậy chọn đáp án B đúng

Câu 10. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Lời giải

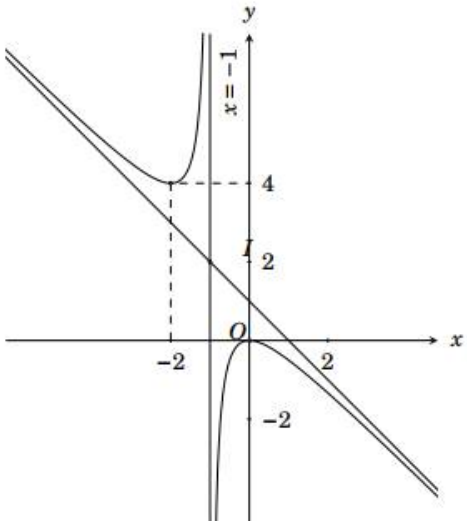
Chọn D.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=-1$ suy ra loại đáp án A và C

đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ suy ra loại đáp án B

Vậy đáo án D đúng

Câu 11. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



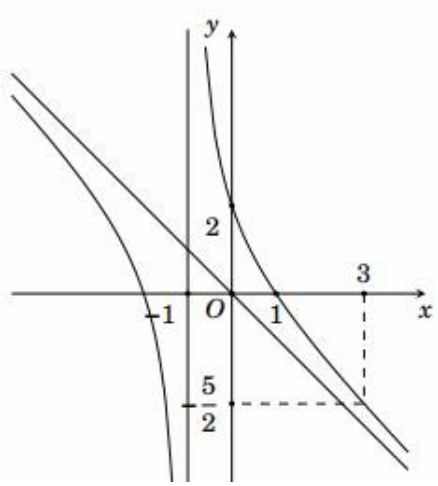
A. $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A,B,C

Câu 12. Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



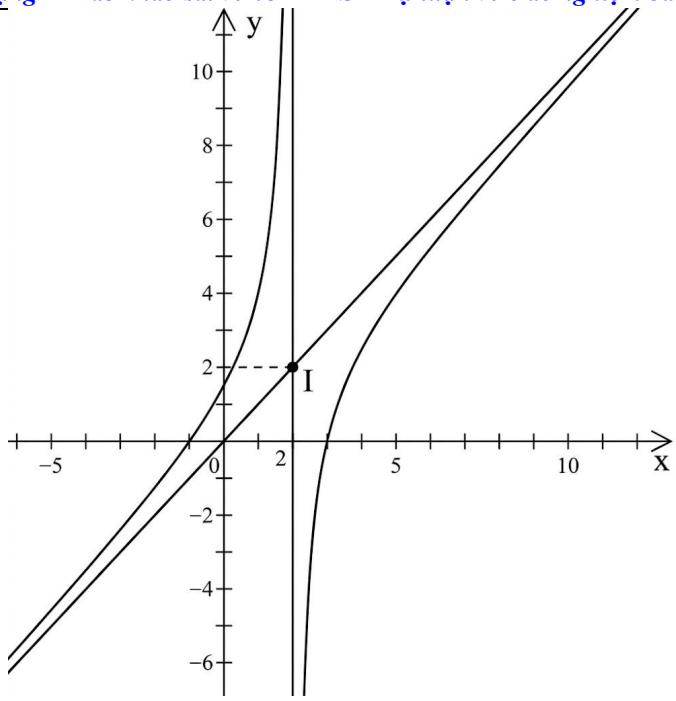
A. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án A,B,D

Câu 13. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

Lời giải

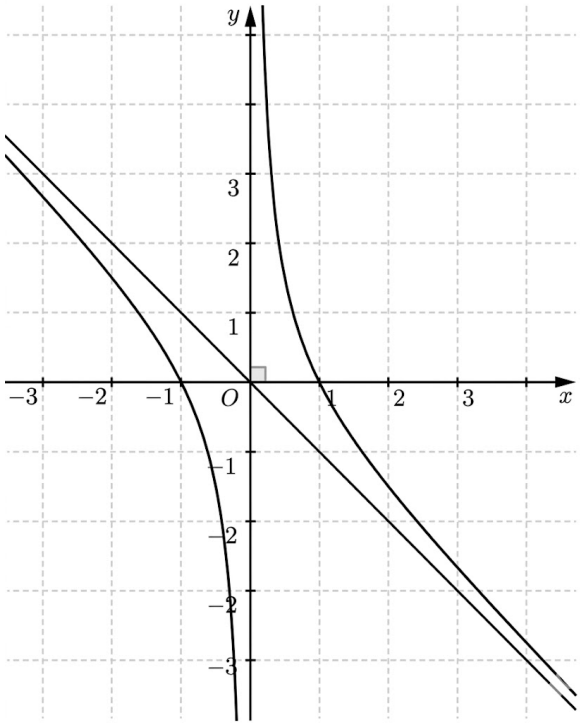
Chọn A.

Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=2$ suy ra loại đáp án B và D

Thay điểm $(-1;0)$ vào hai đáp án còn lại , ta loại đáp án C

Vậy đáp án A đúng

Câu 14. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



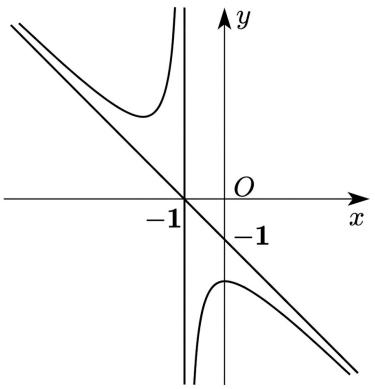
A. $y=\dfrac{-x^2+1}{x}$. **B.** $y=\dfrac{-2x+1}{2x+2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **D.** $y=x^3-3x^2$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=0$, ta loại đáp án B,C,D

Câu 15. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số:



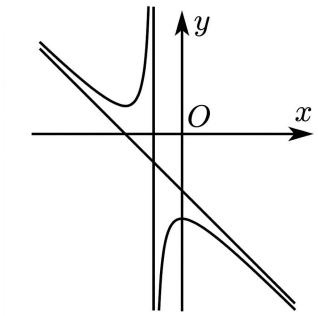
A. $y=\dfrac{x^2+2x+2}{-x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy hàm số đã có có 2 cực trị và $a.m<0$. Chọn đáp án A.

Câu 16. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-3x-3}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

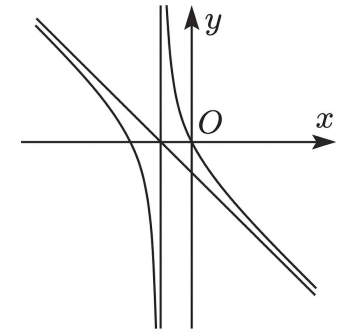
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho 2 cực trị và $am<0$.

Xét các đáp án A,B,C,D suy ra loại B,C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0<0$. Suy ra loại đáp án A

Vậy đáp án đúng là D

Câu 17. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{-x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2-3x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

Lời giải

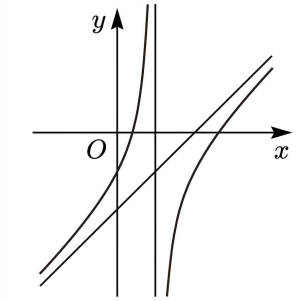
Chọn A.

Từ đồ thị ta có $am<0$, ta loại đáp án B,D

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0<0$. Suy ra loại đáp án C

Vậy đáp án đúng là A

Câu 18. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+3x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D.

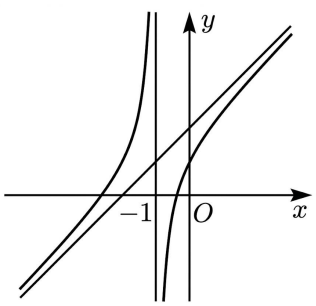
Dựa vào hình dạng đồ thị ta thấy hàm số đã cho là hàm số bậc hai trên bậc nhất , ta loại đáp án A,B

Từ đồ thị ta có $am>0$, ta loại đáp án C

Vậy đáp án đúng là D

Câu 19. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ với a,b,c,d,e là các số thực.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



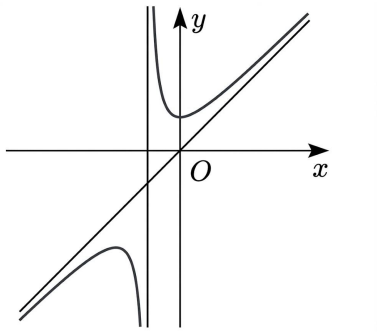
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -1$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số đồng biến trên khoảng xác định Chọn đáp án B

Câu 20. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy

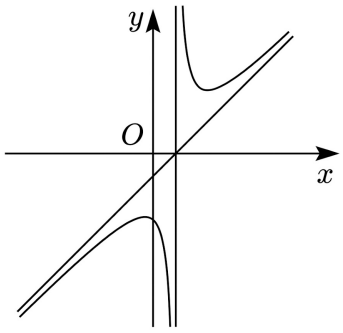
Hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ nên loại đáp án A.

Hàm số có 2 điểm cực trị và $a.m>0$. Loại đáp án **D.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0<0$. Suy ra loại đáp án B

Vậy đáp án đúng là C

Câu 21. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:



A. $y=x+1-\dfrac{3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta thấy

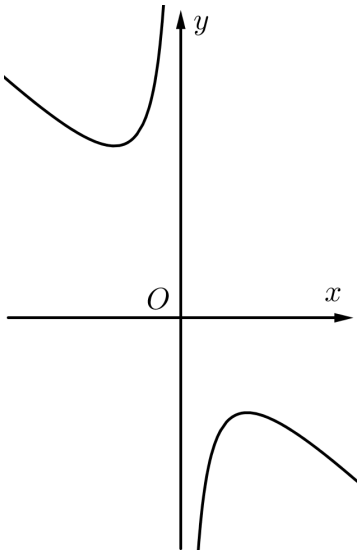
Hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ nên loại đáp án **B.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0>0$. Suy ra loại đáp án C

Hàm số có $a.m > 0$. Loại đáp án **D.**

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 22. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}$. **D.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$.

Tính y' từng đáp án, ta loại đáp án A, B,D

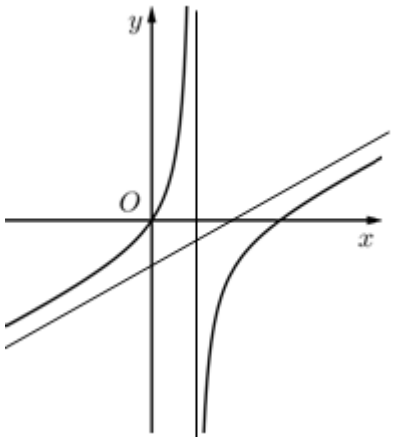
$y=\dfrac{-x^2+x+1}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-1}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án A

$y=\dfrac{-x^2+x+3}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-3}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án B

$y=\dfrac{-x^2+x-3}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+3}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, ta chọn đáp án C

$y=\dfrac{-x^2+x+2}{x}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-2}{x^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ta loại đáp án D

Câu 23. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+3x}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-3x}{2x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn B.

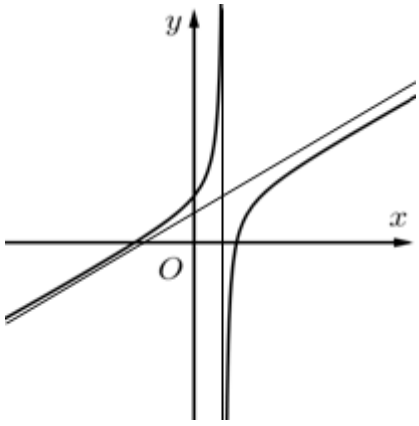
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số không có cực trị và $am>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có: $x=0; x=x_0\,(x_0>0)$ nên ta loại đáp án A, D

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án C

Câu 24. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{3x^2+x-3}{5x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-5x+2}{2x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

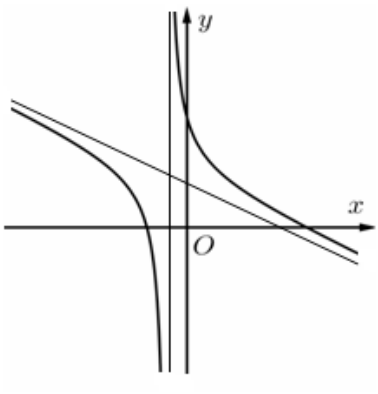
Hàm số không có cực trị và $am>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án B,C

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án D

Chú ý: có thể loại đáp án D bằng cách dùng tiệm cận đứng $x=-2<0$

Câu 25. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{-2x^2+x-1}{2x+1}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn C.

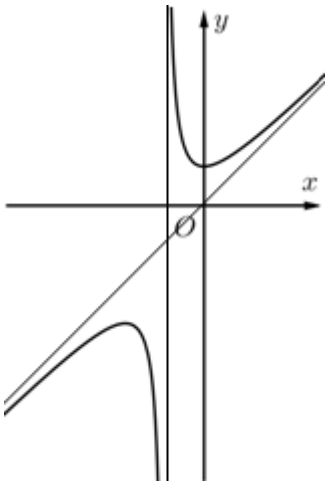
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

Hàm số không có cực trị và $am<0$, ta loại đáp án D

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án A

Tính y' từng hai đáp án còn lại , ta loại đáp án C

Câu 26. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+4x+2}{x+3}$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

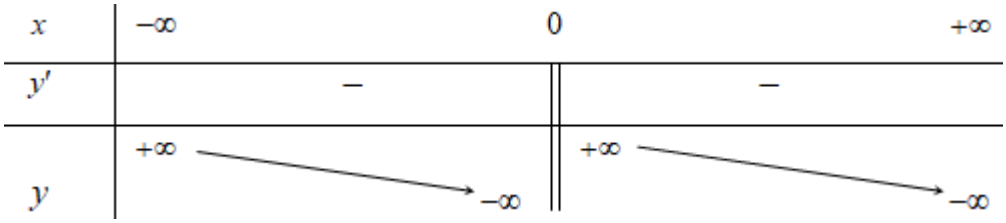
Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có: $y=y_0>0$ nên ta loại đáp án B

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành nên ta loại đáp án A

Tính y' hai đáp án còn lại, ta loại đáp án D

Câu 27. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-1}{x}$.

Lời giải

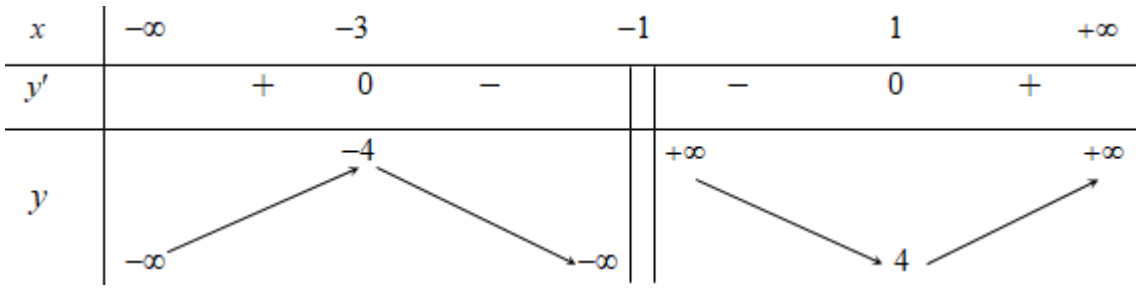
Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có tiệm cận đứng $x=0$ suy ra loại đáp án A và B

Hàm số nghịch biến trên muỗi khoảng xác định suy ra loại đáp án D

Vậy đáo án C đúng

Câu 28. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1-x^2}{x}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Lời giải

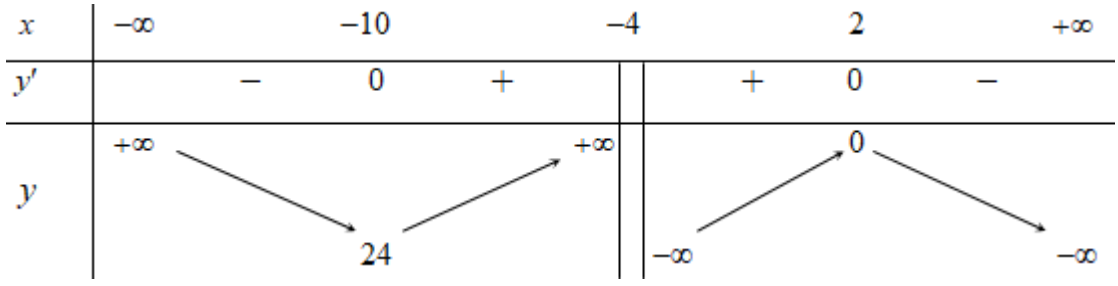
Chọn D.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có tiệm cận đứng $x=-1$ suy ra loại đáp án C

Hàm số có điểm cực đại $(-3;-4)$ và cực tiểu $(1;4)$ suy ra loại đáp án A và B

Vậy đáp án D đúng

Câu 29. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Lời giải

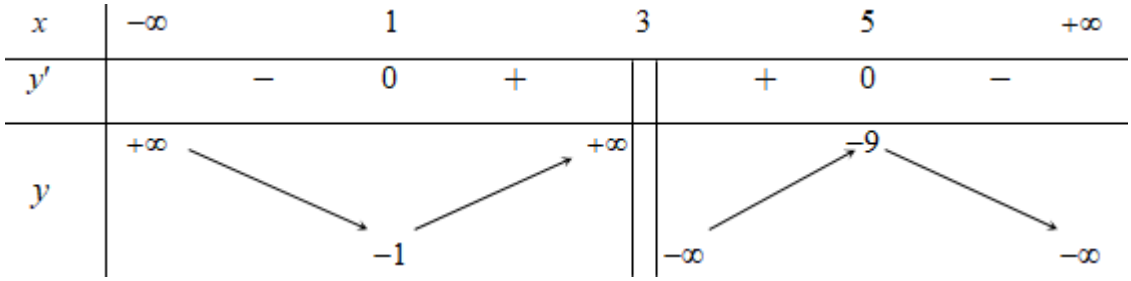
Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$ nên ta loại đáp án C, D

Điểm cực đại $A(2;0)$ và điểm cực tiểu $B(-10;24)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$

Câu 30. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Lời giải

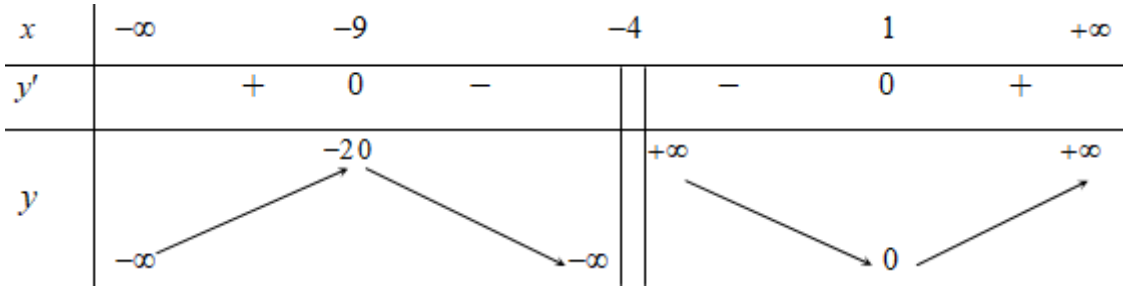
Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am<0$ nên ta loại đáp án A, D

Điểm cực đại $A(5;-9)$ và điểm cực tiểu $B(1;-1)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$

Câu 31. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Lời giải

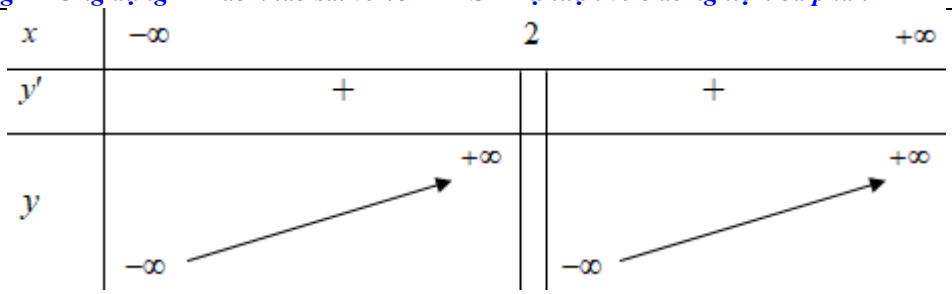
Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có 2 điểm cực trị và $am>0$ nên ta loại đáp án C, D

Điểm cực đại $A(-9;-20)$ và điểm cực tiểu $B(1;0)$. Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$

Câu 32. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Lời giải

Chọn D.

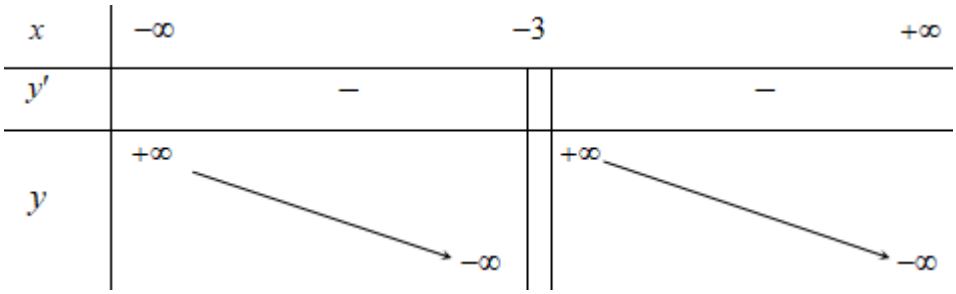
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số không có điểm cực trị và $am>0$

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và có đạo hàm $y'>0$ với mọi $x\neq 2$

Do đó hàm số cần tìm là $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Câu 33. Bảng biến thiên sau là của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

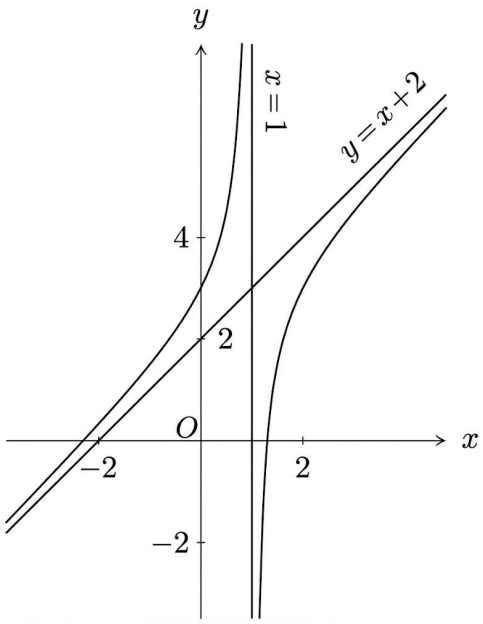
A. $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -3$. **C.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'<0,\forall x\neq -3$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số dễ thấy hàm số nghịch biến trên khoảng xác định nên $y'<0,\forall x\neq -3$

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0,\ m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là

A. $I(3;1)$. **B.** $I(1;3)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(3;0)$.

Lời giải

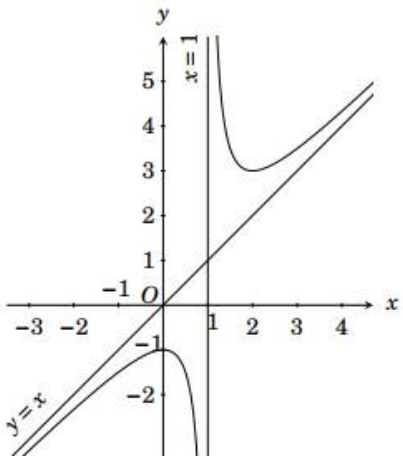
Chọn B.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x+2$

Do đó tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là $I(1;3)$

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị là

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;0)$. **C.** $I(1;0)$. **D.** $I(1;1)$.

Lời giải

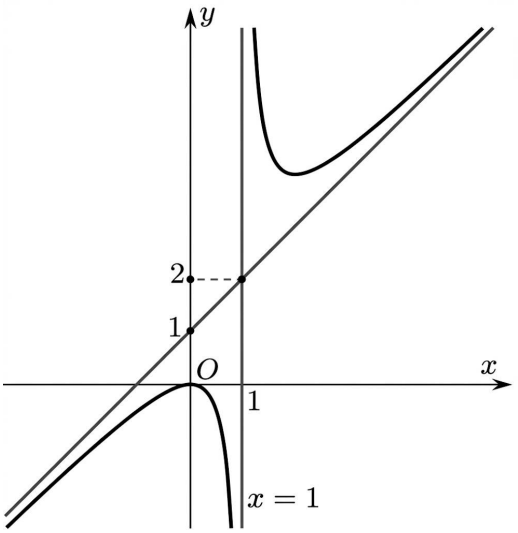
Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x$

Do đó tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là Ox là $I(1;1)$

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và đồ thị có dạng như hình vẽ sau.



Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta thấy: tọa độ tâm đối xứng của đồ thị là $I(1;2)$

Nên tọa độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị của đồ thị là $I(1;2)$

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây thuộc đồ thị (C)?

A. $A(1;1)$. **B.** $B(-1;-1)$. **C.** $C\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $D(-2;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Thay điểm $A(1;1)$ vào hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ ta được: $1=-1$ vô lý, do đó $A\notin(C)$

Thay điểm $B(-1;-1)$ vào hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ ta được: $-1=1$ vô lý, do đó $B\notin(C)$

Thay điểm $C\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ vào hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ ta được: $\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$ đúng, do đó $C\in(C)$

Thay điểm $D(-2;1)$ vào hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ ta được: $1=-1$ vô lý, do đó $A\notin(C)$

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$ có đồ thị (C). Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị (C)?

A. $A(0;2)$. **B.** $B\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $C(2;6)$. **D.** $D(1;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên $D\notin(C)$

Câu 39. Cho hàm số $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C). Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị (C) là

A. $I(2;0)$. **B.** $I(-2;0)$. **C.** $I(0;-2)$. **D.** $I(0;2)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\frac{1}{x+2}$

Do đó đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng và đường thẳng $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Suy ra đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-2;0)$ của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Trục đối xứng của đồ thị (C) lần lượt là:

A. $y=1$ và $y=-2x-1$. **B.** $y=1$ và $y=2x-1$

C. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2}$ và $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$. **D.** $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y=\frac{-x^2-x+2}{x+1}=-x+\frac{2}{x+1}$

Do đó đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng và đường thẳng $y=-x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Suy ra trục đối xứng của đồ thị (C) là:

$$\frac{x+y}{\sqrt{1^2+1^2}}=\pm(x+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{2}\\y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Câu 41. Cho hàm số $y=-x+1+\frac{1}{x+1}$ có đồ thị (C). Trục đối xứng của đồ thị (C) lần lượt là:

A. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x+1+\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x+1-\sqrt{2}$.

B. $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-1-\sqrt{2}$ và $y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x+1-\sqrt{2}$.

C. $y=2$ và $y=-2x$.

D. $y=2$ và $y=2x$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y=-x+1+\dfrac{1}{x+1}$

Do đó đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng và đường thẳng $y=-x+1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Suy ra trục đối xứng của đồ thị (C) là:

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\pm(x+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=(\sqrt{2}-1)x+1+\sqrt{2}\\ y=(-\sqrt{2}-1)x+1-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Câu 42. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x+2}$ có giá trị cực tiểu bằng:

A. $-1-2\sqrt{3}$. **B.** $-1+2\sqrt{3}$. **C.** $1+2\sqrt{3}$. **D.** $1-2\sqrt{3}$.

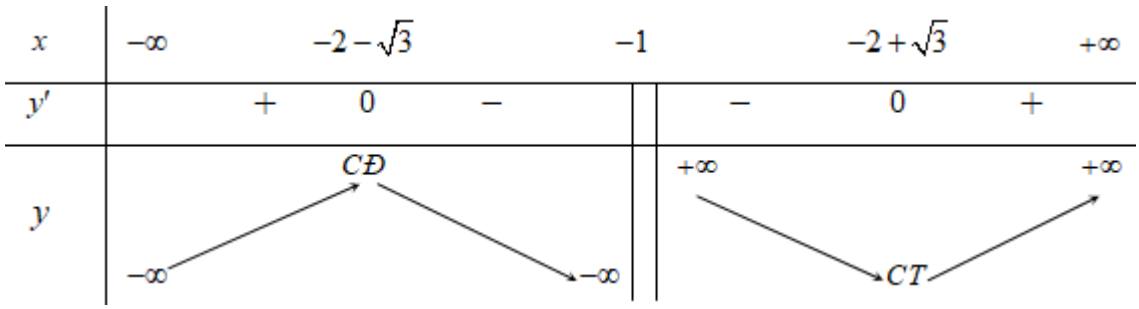
Lời giải

Chọn B.

$$y'=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2-\sqrt{3}\\ x=-2+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



Vậy $y_{CT}=\dfrac{2x_{CT}+3}{1}=-1+2\sqrt{3}$

Câu 43. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ là

A. $y=-2x-2$. **B.** $y=2x+2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Lời giải

Chọn B.

Áp dụng công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

là $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}$.

Vậy với hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}\to y=2x+2$ là đường thẳng cần tìm. Chọn B

Câu 44. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+2}$ có phương trình là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=-2x-1$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$

là $y=\dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị đã cho là $y=\dfrac{\left(x^2-x+2\right)'}{(x+2)'}=2x-1$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\Rightarrow y_1=2x_1+2\\x_2=1+\sqrt{3}\Rightarrow y_2=2x_2+2\end{array}\right.$ 219

Suy ra khoảng cách giữa hai điểm cực trị: $\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{5\left(x_1-x_2\right)^2}=2\sqrt{15}$

Câu 46. Biết rằng đồ thị $(H):y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A.

$y=\dfrac{\left(x^2+2x+m\right)'}{\left(x-2\right)'}=2x+2$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị trên là: $y=2x+2\Leftrightarrow 2x-y+2=0(d)$.

Vậy $d(O;d)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Câu 47. Giao điểm giữa đồ thị $(C):y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ và đường thẳng $(d):y=x+1$ là

A. $A(-1;0)$ **B.** $A(3;0)$ **C.** $A(1;0)$ **D.** $A(-3;0)$

Lời giải

Chọn A.

Lập phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}=x+1\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=0$.

Vậy chọn $(-1;\,0)$.

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **C.** $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ có phương trình là: $y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

$f'(x)=\left(\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\right)'=\dfrac{x^2-2x}{\left(x-1\right)^2}$, $f'(-1)=\dfrac{3}{4};y(-1)=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0=-1$ có dạng $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 49. Cho đường cong $(C):y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ và điểm $A\in(C)$ có hoành độ $x=3$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

A. $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **B.** $y=3x+5$. **C.** $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x}{\left(x-1\right)^2}$. Tại điểm $A\in(C)$ có hoành độ: $x_0=3\Rightarrow y_0=\dfrac{7}{2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại A là : $k=y'(3)=\dfrac{3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm A là : $y=k\left(x-x_0\right)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị $\left(H\right)$. Tìm tất cả tọa độ tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ và tiếp xúc với $\left(H\right)$.

A. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $M\left(2;3\right)$

C. $M_1\left(2;3\right)$ và $M_2\left(1;2\right)$ **D.** Không tồn tại

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ có dạng $\Delta: y=2x+c \quad (c\neq -1)$.

Δ là tiếp tuyến của $\left(H\right) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x-2}=2x+c$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2+(c-2)x+1-2c=0$ có nghiệm kép

$x\neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2+4c=0 \\ 4+2(c-2)+1-2c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-4 \end{array}\right.$

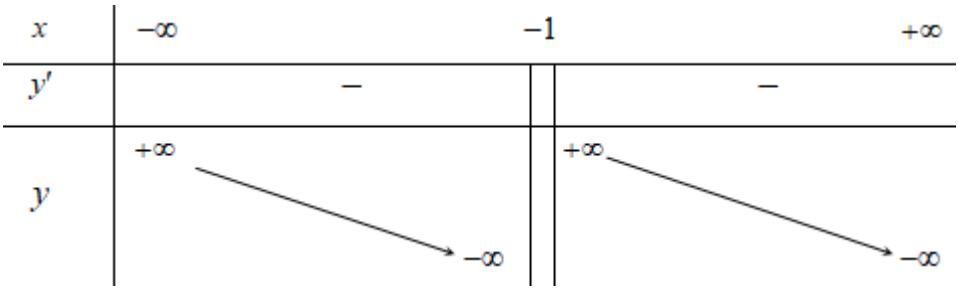
Vậy có hai giá trị c thỏa mãn nên có hai tiếp tuyến tương ứng với hai tiếp điểm.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

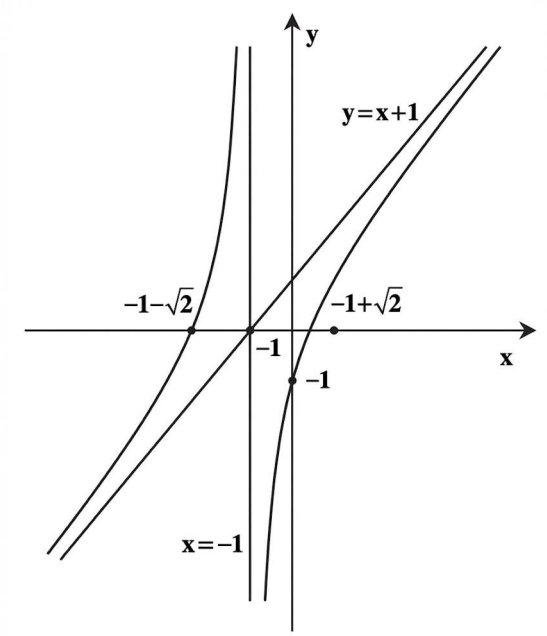
Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:



c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) là điểm $I(0;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}=x+1-\dfrac{2}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Sự biến thiên: $y'=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}>0$ với mọi x thuộc D: hàm số luôn luôn đồng biến trên D, không có cực đại và cực tiểu.

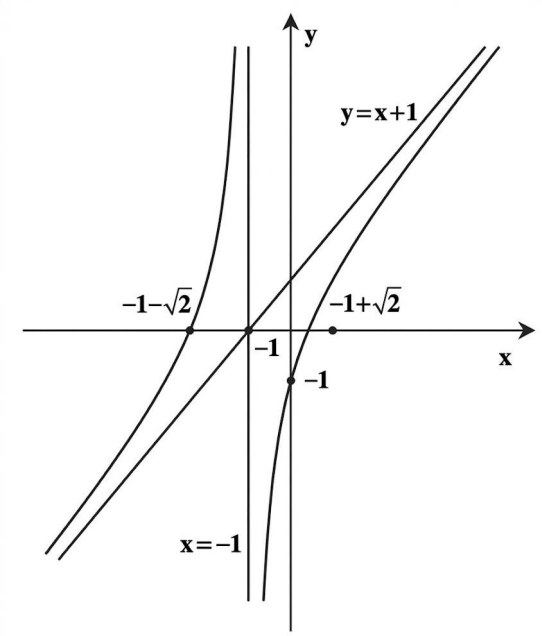
Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 1 1^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1 1^+} y=-\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} y-(x+1)=0 \Rightarrow y=x+1$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Đồ thị nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại $(0,-1)$, cắt trục Ox tại $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2};0\right)$.



d) Đồ thị nhận điểm $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng.

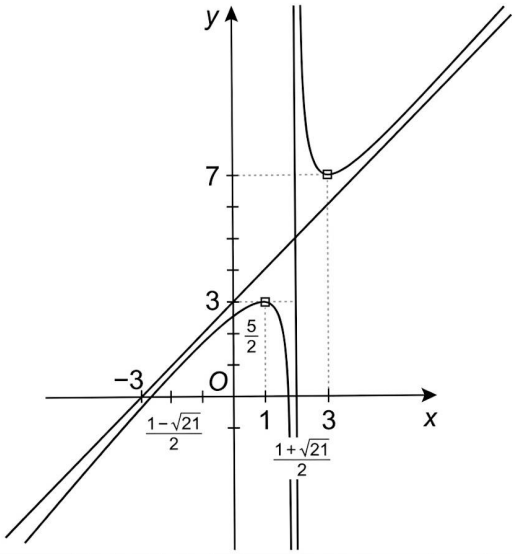
Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

c) Đồ thị (C) là hình sau:



d) Đồ thị hàm số (C) có hai trục đối xứng lần lượt là hai đường thẳng $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+3+2\sqrt{2}$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+3-2\sqrt{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}=x+3+\dfrac{1}{x-2}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=3\\x=3\Rightarrow y=7\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 2\pm} y=\pm\infty : x=2$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=x+3\Rightarrow y=x+3$ là tiệm cận xiên

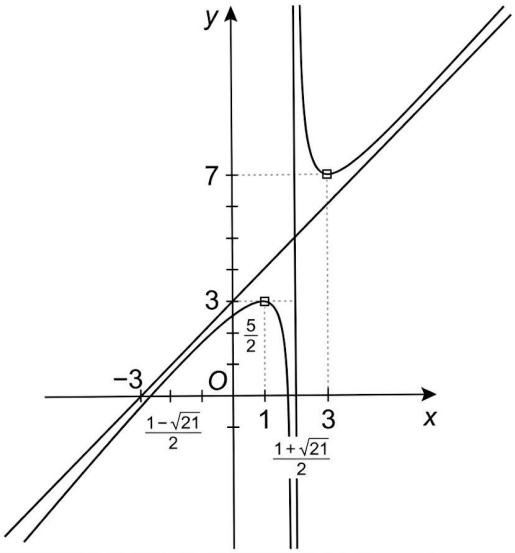
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

c) Đồ thị:

$x=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$

$$y=0\Rightarrow x^2+x-5=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$



d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x+3$ nên trục đối xứng của đồ thị là:

$$\frac{x-y+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x-2}{\sqrt{1^2+0^2}}\Leftrightarrow x-y+3=\pm\sqrt{2}(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(1-\sqrt{2}\right)x-y+3+2\sqrt{2}=0\\ \left(1+\sqrt{2}\right)x-y+3-2\sqrt{2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+3+2\sqrt{2}\\ y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

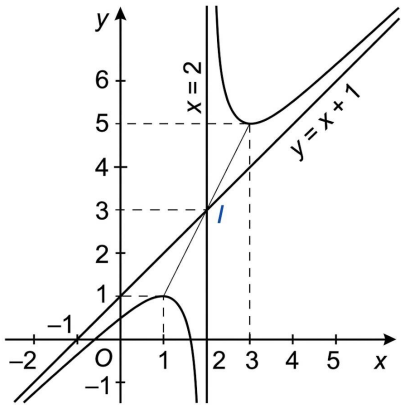
a) Hàm số có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

d) Đồ thị (C) là hình sau:



Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

- Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

- Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CĐ}=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=+\infty$.

- Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to2^-}y=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}y=\lim\limits_{x\to2^+}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

- Bảng biến thiên:

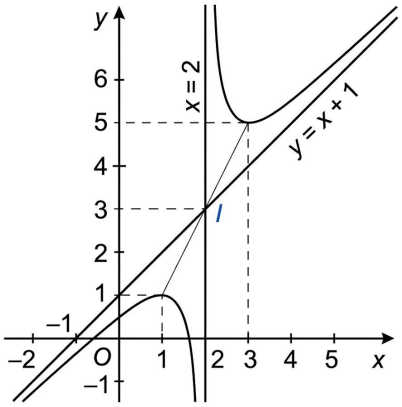
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

d) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

- Ta có $y=0\Leftrightarrow\frac{x^2-x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.



Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có $y=-x-6-\frac{14}{x-3}$

Khi đó tiệm cận xiên là $y=-x-6$ và có tiệm cận đứng là $x=3$.

b) Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3,-9)$ là tâm đối xứng.

c) Ta có: $y'=\frac{-x+6x+5}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x^2-6x-5=0\quad(*)$

Phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm $x_1<0<x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

d) Ta có $y=0\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$. Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1).4<0$)

Suy ra $y=\frac{-x^2-3x+4}{x-3}$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

Câu 55. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang

b) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox.

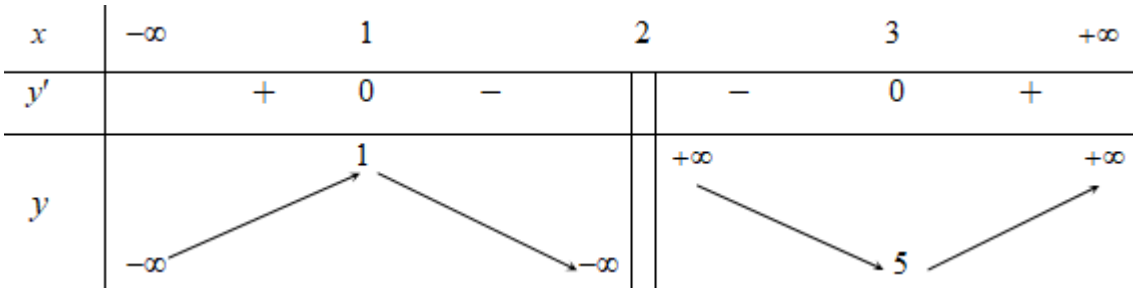
d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm M. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x-4y+2=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

c) Hàm số đạt cực trị tại $x=1$ và $x=3$ nên 2 điểm cực trị nằm cùng phía đối với Oy.

d) Ta có $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$

d) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và $y'(0)=\dfrac{3}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến

của đồ thị hàm số tại M là $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3x-4y+2=0$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) Đồ thị (C) cắt Ox tại một điểm phân biệt.

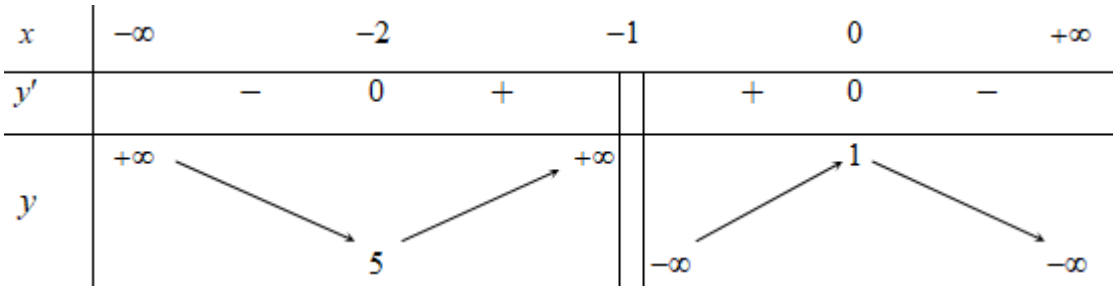
d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Ta có $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$ có đạo hàm $y'=\dfrac{-x-2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Khi đó ta có bảng biến thiên:



a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2,-1)$ và $(-1,0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị $(-2;5)$ và $(0;1)$

c) $y=0\Leftrightarrow -x^2+x+1=0$ $(*)$

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt. Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

d) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y=-x+2$ nên không đi qua điểm $A(1;2)$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

d) Đồ thị hàm số (C) có hai trục đối xứng lần lượt là hai đường thẳng $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2+2\sqrt{2}$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+2-2\sqrt{2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+2$

Giới hạn, tiệm cận: Ta có $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=0$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\left(\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}\right)=+\infty$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận xiên $y=x+2$ nên trục đối xứng của đồ thị là:

$$\frac{x-y+2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x+2}{\sqrt{1^2+0^2}}\Leftrightarrow x-y+2=\pm\sqrt{2}(x+2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(1-\sqrt{2}\right)x-y+2-2\sqrt{2}=0\\ \left(1+\sqrt{2}\right)x-y+2+2\sqrt{2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2-2\sqrt{2}\\ y=\left(1+\sqrt{2}\right)x+2+2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x+2}{-x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

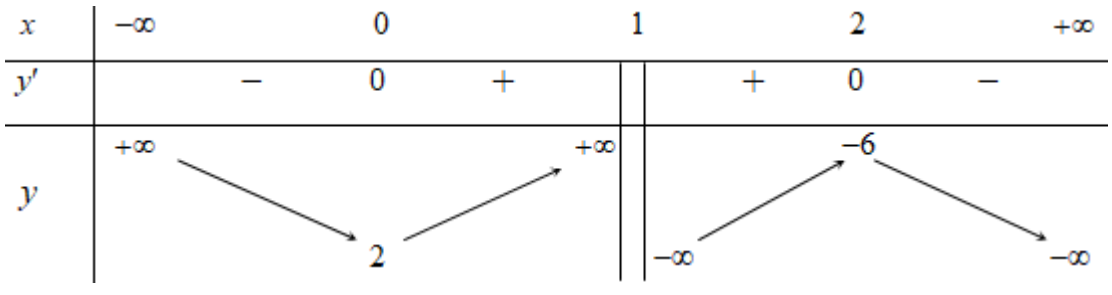
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$ bằng $-\dfrac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x}{(-x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$ và có bảng biến thiên như sau:



a) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty,0)$ và $(2;+\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$ bằng -7 đạt tại $x=\frac{3}{2}$

d) Ta có $2x+y=0\Rightarrow y=-2x$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-2x+2}{-x+1}-(-2x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{-x+1}\right)=0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x+y=0$ hay $y=-2x$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{-x^2+3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

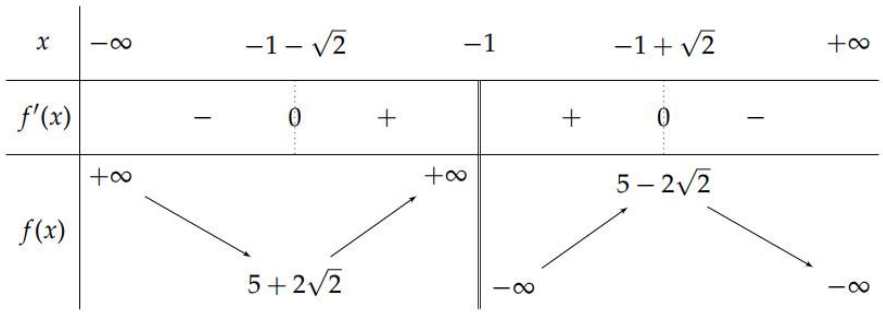
d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Ta có $y'=\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{2}\\x=-1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



a) Hàm số đồng biến trên trên khoảng $(-1-\sqrt{2};-1)$ nên đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Ta có hàm số nghịch biến trên $[1;3]$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=3$.

d) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 60. Cho hàm số $y=x-\frac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=2$.

d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0;0)$.

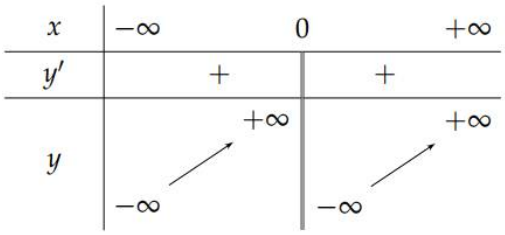
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Tập xác định $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0,\forall x\in D$.

Bảng biến thiên



a) Hàm số đồng biến trên trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Hàm số không có cực trị.

c) Ta có $f(1)=0;\ f(2)=\dfrac{3}{2};\ f(3)=\dfrac{8}{3}$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại $x=1$.

d) Hàm số có đồ thị đối xứng qua điểm $O(0;0)$, là giao điểm của hai tiệm cận đứng và xiên.

Câu 61. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị (C) có hai trục đối xứng lần lượt là $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2-\sqrt{2}=0$ và $y=\left(1+\sqrt{2}\right)x-2-\sqrt{2}$.

Lời giải

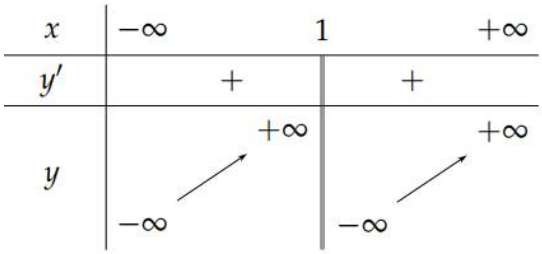
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=\dfrac{x^2-x-3}{x-1}=x-2-\dfrac{1}{x-1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D.$

Bảng biến thiên



a) Hàm số đồng biến trên trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

b) Hàm số không có cực trị.

c) Ta có $f(-3)=-\dfrac{19}{4}$, $f(0)=3$. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;0]$ tại $x=0$.

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=x-2$ nên trục đối xứng của đồ thị là:

$$\frac{x-y-2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm(x-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(1-\sqrt{2}\right)x+2-\sqrt{2}\\ y=\left(1+\sqrt{2}\right)x-2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{x}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=0$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O.

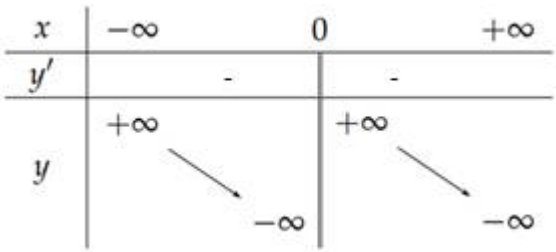
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có $y=f(x)=-x+\dfrac{1}{x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=-1-\dfrac{1}{x^2}<0$.

Bảng biến thiên



a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=0$ vì $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=-x$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x)]=0$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

d) Đồ thì hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 63. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1;1)$.

Lời giải

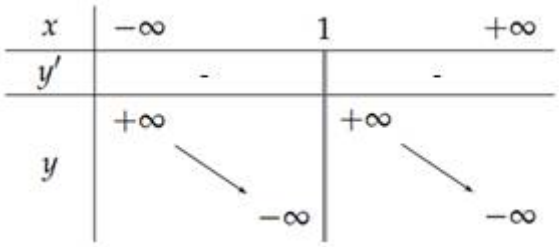
a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận xiên $y=-x+1$.

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x-2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -x^2+2x-2=0$ (vô nghiệm).

Bảng biến thiên



Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số nhận giao điểm hai tiệm cận $I(1,0)$ làm tâm đối xứng.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y=-x+1$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x+1)]=0$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

d) Đồ thì hàm số đối xứng qua $I(1;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Câu 64. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x=-1$.

c) Đồ thị (C) nhận $I(-2;0)$ làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Sự biến thiên:

- Giới hạn, tiệm cận:

Ta có $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$.

Suy ra đường thẳng $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-1$.

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$; Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3,-2)$ và $(-2,-1)$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;2)$.

c) Ta có $x=-2$ là đường tiệm cận đứng và $y=x+2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Suy ra đồ thị nhận giao điểm $I(-2;0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=x+2$ không đi qua điểm $A(1;2)$.

Câu 65. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ có đồ thị (C).

a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang.

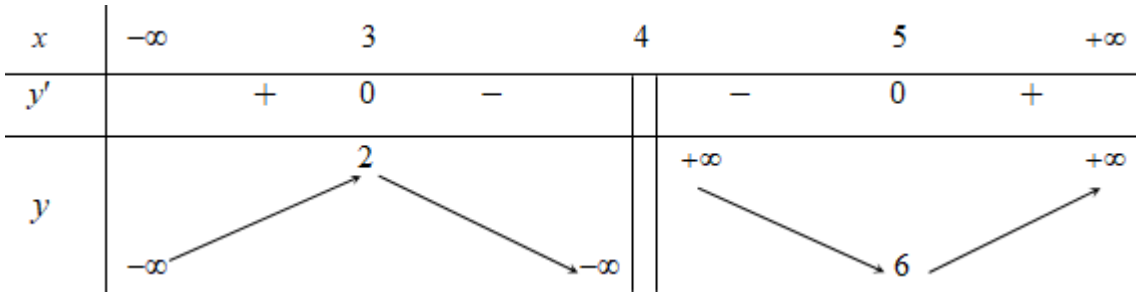
Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$$y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}=x+\frac{1}{x-4}\Rightarrow y'=1-\frac{1}{(x-4)^2}=0\Leftrightarrow (x-4)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=1\\x-4=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:



a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y=x$ vì:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-4}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-4}\right)=0$$

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị hàm số đã cho nhận điểm $I(4;4)$ là tâm đối xứng.

d) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Câu 66. Cho hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

b) Hàm số đã cho không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Ta có: $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$

Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$ ta có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

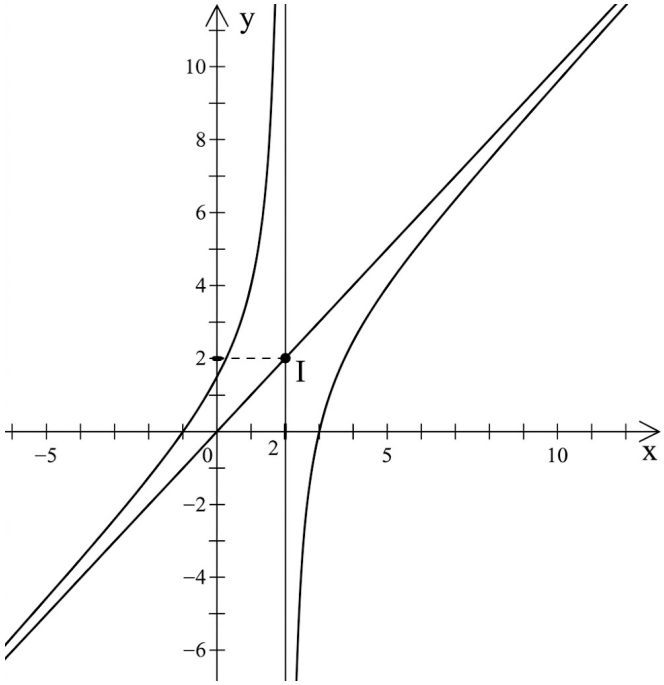
b) Hàm số đạt cực đại tại $x_C = -2$ và $y_C = -3$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 0$ và $y_{CT} = 1$.

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$

Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận xiên $y = x$.

d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(-1;-1)$.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n \in \mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận xiên $y = x$.

d) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

a) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$

Tìm tiệm cận xiên:

Cách 1: Trắc nghiệm

Từ đồ thị ta thấy tiệm cận xiên đi qua 2 điểm $(0;0);(2;2)$ nên thay vào $y=x$ ta được $\begin{cases}0=0\\2=2\end{cases}$ thỏa , do đó $y=x$ là tiệm cận xiên đồ thị hàm số đã cho.

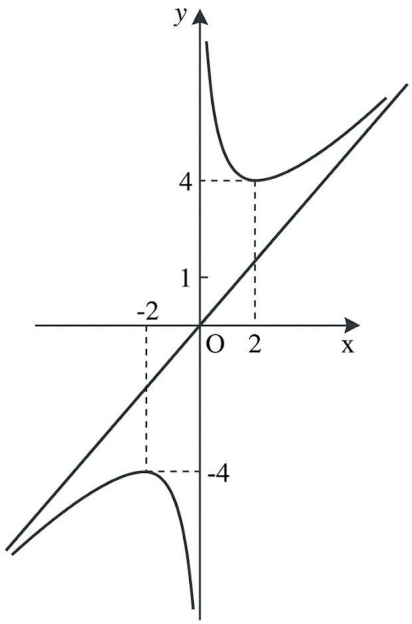
Cách 2: Tự luận *(không nên làm cách này vì mất thời gian)*

Gọi tiệm cận xiên cần tìm là $y=ax+b$

tiệm cận xiên đi qua 2 điểm $(0;0);(2;2)$ nên có hệ phương trình sau: $\begin{cases}0=b\\2=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}\Rightarrow y=x$ là tiệm cận xiên đồ thị hàm số đã cho.

d) Hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$ nên hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ không phải là hàm số $y=f(x)$.

Câu 68. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;4)$ và điểm cực tiểu $(-2;-4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Từ đồ thị ta có:

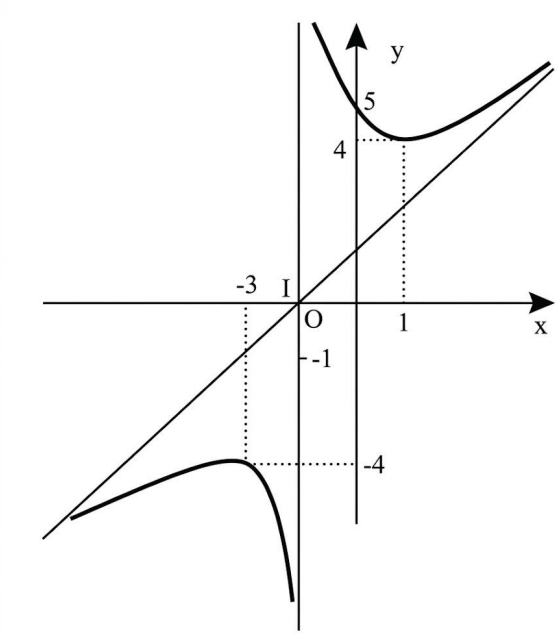
a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng vì O là giao điểm hai đường tiệm cận.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;-4)$ và điểm cực tiểu $(2;4)$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$

b) Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-3;-4)$ và điểm cực tiểu $(1;4)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ đồ thị ta có:

a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$

b) Đồ thị hàm số nhận tọa độ $I(-1;0)$ làm tâm đối xứng vì $I(-1;0)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

c) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-3;-1)$ và $(-1;1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-3;-4)$ và điểm cực tiểu $(1;4)$.

Câu 70. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1) với m là số thực

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3;-5)$

d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Khi $m=1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y=x-2$

c) Khi $m=1\Leftrightarrow y=x-2+\dfrac{4}{x+3}$ có tiệm đứng $x=-3$ và tiệm cận xiên là $y=x-2$ nên có giao điểm là $I(-3;-5)$

d) Ta có: $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

Nếu $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

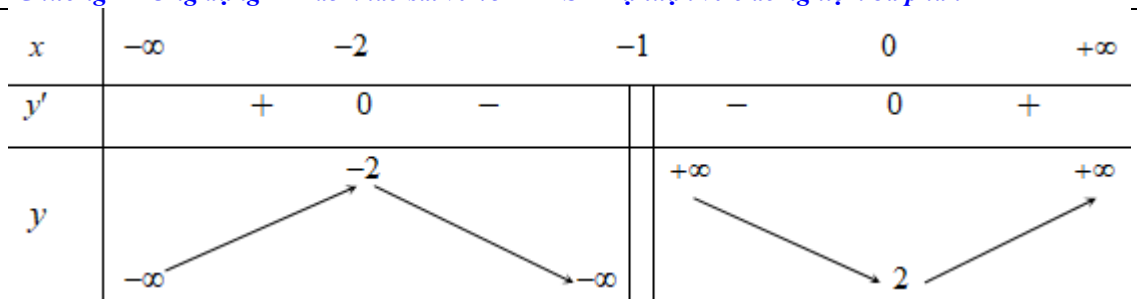
Nếu $m\neq\dfrac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận

$d_1: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0$ và $d_2: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$

$\Rightarrow \vec{n_1}(1;0);\ \vec{n_2}(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng $45^0\Leftrightarrow \cos 45^0=\dfrac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}\Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Câu 71. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có:

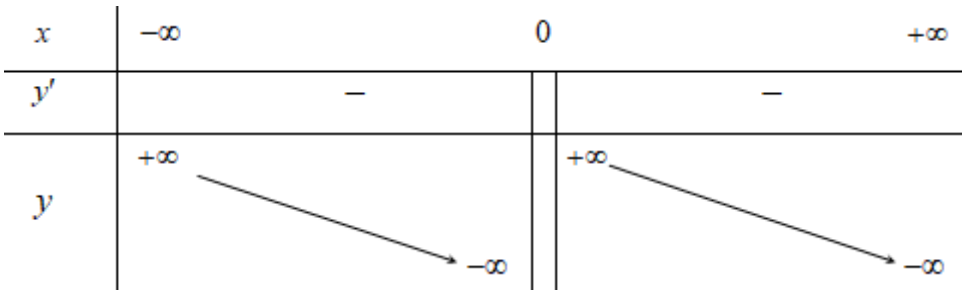
a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(-2;-2)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ có tiệm cận đứng $x=2$ nên hàm số $y=f(x)$ không phải là hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên dưới đây



a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

c) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là của đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$.

d) Trên đoạn $[2026;2027]$ hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $f(2027)$ và giá trị lớn nhất là $f(2025)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$.

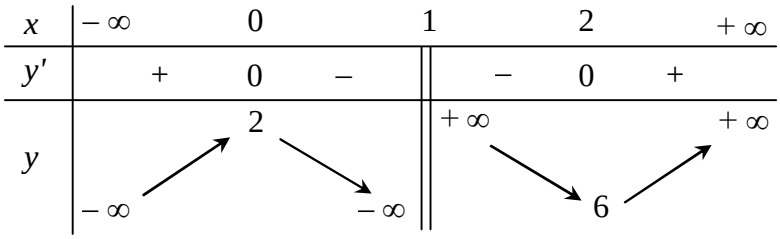
c) $y=\dfrac{x^2-2}{x}$

$y'=\dfrac{x^2+2}{x^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên hàm số $y=\dfrac{x^2-2}{x}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$.

Do đó đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2}{x}$ không phải là của đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

d) Do hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0);(0;+\infty)$ nên $\min\limits_{[2024;2025]}y=f(2027);\max\limits_{[2024;2025]}y=f(2026)$

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $(a,b,c,m,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

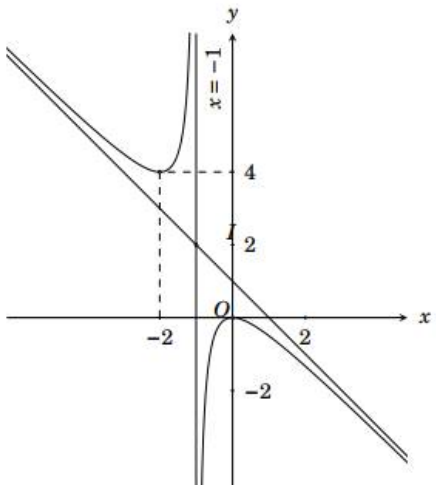


a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(2;6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là như hình vẽ sau:



Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có:

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(0;2)$ và điểm cực tiểu $(2;6)$.

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

d) Từ đồ thị hàm số có điểm cực đại $(0;0)$ và điểm cực tiểu $(-2;4)$ mâu thuẫn giả thiết bảng biến thiên

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx-1}{mx+2}$ với $(a,b,m\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

a) $f'(x)<0$ khi $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

c) $a+b+m=3$

d) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là $(-2;3)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Từ bảng biến thiên ta có: $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

a) $f'(x)<0$ khi $x\in(-3;-2)\cup(-2;-1)$

b) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{-2}{m}=-2\\ -5=\dfrac{a(-3)^2-3b-1}{-3m+2}\\ -1=\dfrac{a(-1)^2-b-1}{-m+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+b+m=3$

d) Từ câu c, ta có $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}=x-1+\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow y=x-1$ là tiệm cận xiên.

Từ bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng $x=-2$

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có tọa độ tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận hay $(-2;-3)$.

Câu 75. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+2x+c}{x+n}$ với $(a,c,n\in\mathbb{R})$ có tập xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(4;-6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=2$.

c) $f'(x)<0$ khi $x\in(0;2)\cup(2;4)$

d) $a+c+n=7$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực đại $(4;-6)$ và điểm cực tiểu $(0;2)$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=2$.

c) $f'(x)>0$ khi $x\in(0;2)\cup(2;4)$

c) Ta có hệ: $\begin{cases} -n=2 \\ 2=\dfrac{a.0+2.0+c}{0+n} \\ -6=\dfrac{a.4^2+2.4+c}{4+n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-2 \\ a=-1 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow a+c+n=-7$

Câu 76. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận đứng là $x=1$

b) Đồ thị của hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y=x$.

c) Đồ thị hàm số (C) cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x+1$.

d) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) $\lim\limits_{x\to -1^{\mp}} y=\pm\infty : x=-1$ là tiệm cận đứng

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=x : y=x$ là tiệm cận xiên

c) $M(0;-1), y'(0)=2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M : y=2(x-0)-1 \Leftrightarrow y=2x-1$

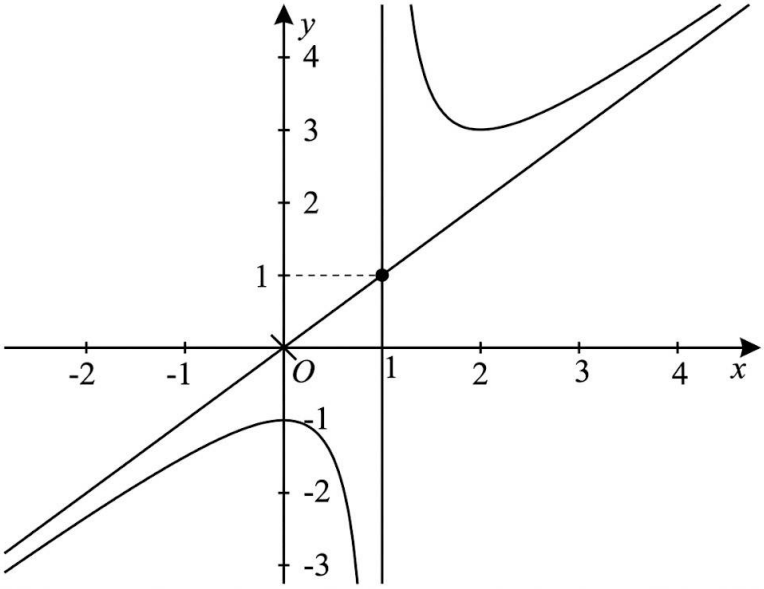
d) $y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in D$

Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1,y_1)$ có hệ số góc $k_1=y'_{x_1}=1+\dfrac{1}{(x_1+1)^2}>0$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2,y_2)$ có hệ số góc $k_2=y'_{x_2}=1+\dfrac{1}{(x_2+1)^2}>0$

Do $y'_{x_1}>0, y'_{x_2}>0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$ đạt cực đại tại $x=0$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



a) Giá trị của biểu thức $a+b+c+d=0$.

b) Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

c) Gọi A,B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số; M là điểm di động trên trục Ox sao cho góc $\widehat{AMB}$ không tù. Giá trị nhỏ nhất của hoành độ điểm M là 3.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có phương trình: $y=x-1$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

a) Xét hàm số có đồ thị $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}$ nhận đường $x=1$ làm tiệm cận đứng và cắt trục tung tại điểm $(0;-1)$ nên ta có: $\begin{cases}c+d=0\\ \dfrac{1}{d}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ d=-1\end{cases}$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên $y=x$

Ta có $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}=ax+b+a+\dfrac{a+b+1}{x-1}$

Nên tiệm cận xiên là đường $y=ax+b+a\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$

Do đó ta có: $a+b+c+d=1-1+1-1=0$.

b) Từ đồ thị ta nhận thấy trong khoảng $(-1;0)$ đồ thị hàm số là đường liền nét đi lên nên hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

c)Ta có $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

$f(0)=-1;f(2)=3\Rightarrow A(0;-1);B(2;3)$.

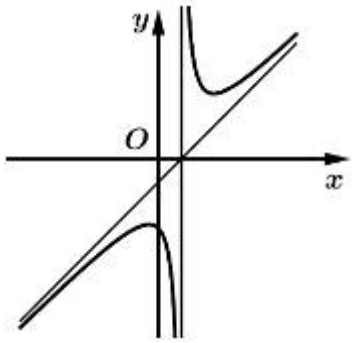
Gọi $M(t;0)\in Ox$. Khi góc $\angle AMB$ không tù thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\ge 0$.

$$\overrightarrow{MA}=(-t;-1);\overrightarrow{MB}(2-t;3)\Rightarrow -t(2-t)-3\ge 0\Leftrightarrow t^2-2t-3\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 3\\ t\le -1\end{array}\right.$$

d) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là: $A(0;-1);B(2;3)$.

Đường thẳng $y=x-1$ không đi qua $B(2;3)$.

Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad>0$.

b) $ed<0$.

c) $ce<0$.

d) $bd>0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

a) $ad>0$.

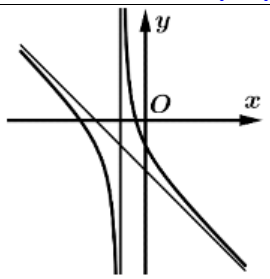
b) đồ thị có tiệm đường tiệm cận đứng $x=\dfrac{-e}{d}>0\Rightarrow ed<0$.

c) hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{c}{e}<0\Rightarrow ce<0$

d) đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số đã cho là $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow bd<0$.

Câu 79. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



a) $ad>0$.

b) $de<0$.

c) $ac>0$.

d) $bd>0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có:

a) $ad<0$

b) đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=\dfrac{-e}{d}<0$. Nên $ed<0$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm.

Nên $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm phân biệt âm.

Suy ra $x_1.x_2>0\Rightarrow\dfrac{c}{a}>0\Rightarrow ca>0$

d) Vì đồ thị hàm số có đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có dạng $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

Mà đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow bd<0$.

Câu 80. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-2;4)$ và $(3;-4)$

c) Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=-x+1$

d) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m>4$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) c) Khi $m=0: y=\dfrac{-x^2+2x-5}{x-1}=-x+1-\dfrac{4}{x-1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+2x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=4\\x=3\Rightarrow y=-4\end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to 1^{\mp}} y=\pm\infty: x=1$ là đường tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-x+1: y=-x+1$ là tiệm cận xiên

c) $y=\dfrac{-x^2+2(m+1)x-m-5}{x-1}$; $y'=\dfrac{-x^2+2x-2m-2+m+5}{(x-1)^2}=\dfrac{-x^2+2x-m+3}{(x-1)^2}$

Hàm số y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2+2x-m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt

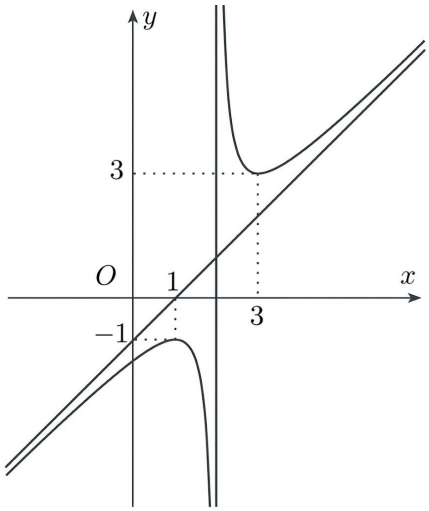
$\Leftrightarrow \Delta'=1-m+3=4-m>0\Leftrightarrow m<4$

Nghiệm $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $y'=0\Leftrightarrow -1+2-m+3\neq 0\Leftrightarrow m\neq 4$

Điều kiện sau cùng: $m<4$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị là (C) như hình vẽ sau.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C). Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

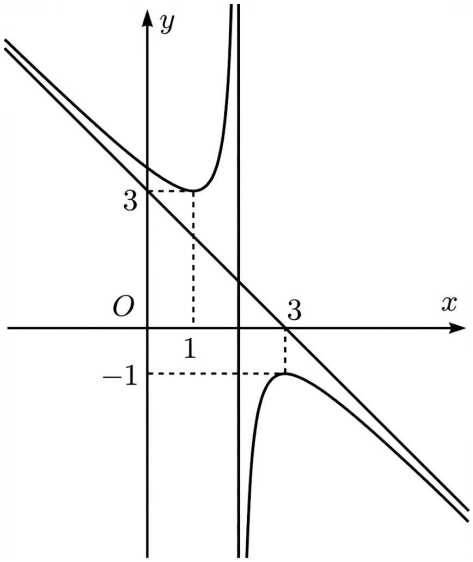
Đáp án: 3

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(3;3);B(1;-1)$

Vì $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C) nên là $I(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) như hình vẽ sau.



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C). Tính giá trị của $x_0+2027y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

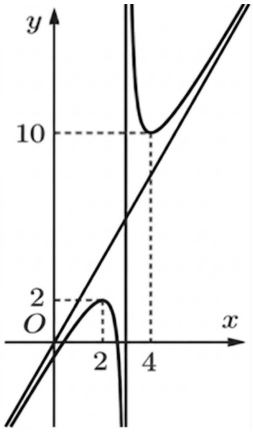
Đáp án: 2029

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(1;3);B(3;-1)$

Vì $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị (C) nên là $I(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow x_0+2027y_0=2029$

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có đồ thị (C) như hình vẽ sau.



Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

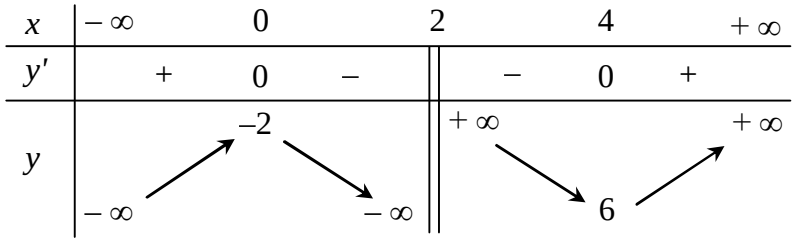
Đáp án: 9

Dựa vào đồ thị ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(2;2);B(4;10)$

Vì $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ y_0=\dfrac{2+10}{2}=6 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=9$

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

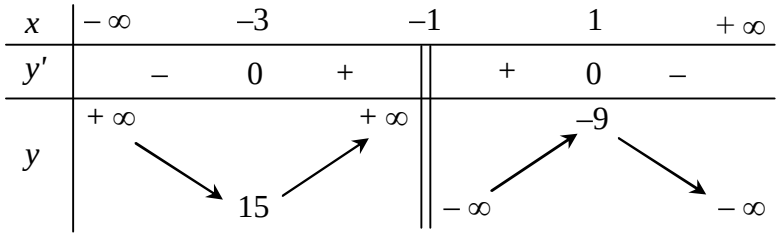
Đáp án: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;-2);B(4;6)$

Vì $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị nên là $I(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{0+4}{2}=2 \\ y_0=\dfrac{-2+6}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=4$

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

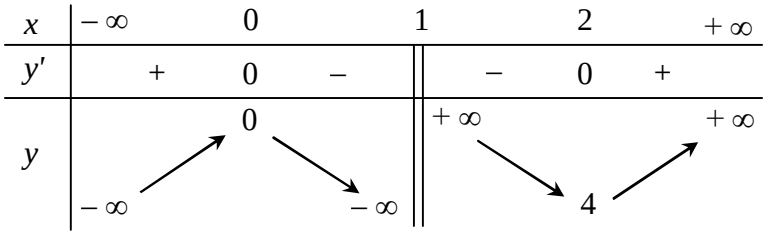
Đáp án: 2

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(-3;15);B(1;-9)$

Vì $I(x_0;y_0)$ là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị nên là $I(x_0;y_0)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Do đó: $\begin{cases} x_0=\dfrac{-3+1}{2}=-1 \\ y_0=\dfrac{15-9}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=2$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

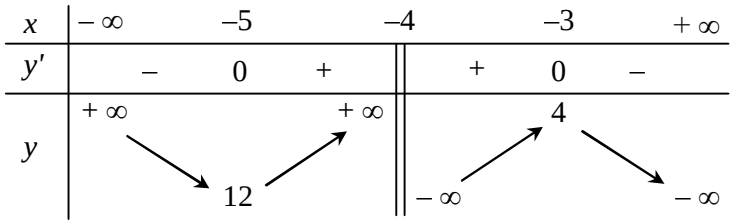
Đáp án: 3

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(0;0);B(2;4)$

Vì $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ y_0=\dfrac{0+4}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow x_0+y_0=3$

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0)$ với a,b,c,m,n là các số thực và có bảng biến thiên như sau:



Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho. Tính giá trị của x_0+y_0.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Điểm cực đại và cực tiểu là $A(-3;4);B(-5;12)$

Vì $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nên cũng là tọa độ tâm đối xứng của đồ thị . Do đó $M\left(x_0;y_0\right)$ trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{-3-5}{2} = -4 \\ y_0 = \dfrac{4+12}{2} = 8 \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 = 4$

Câu 58. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = x-2+\dfrac{4}{x-1}$. Tính giá trị $T = 2025x_0 - 2024y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4049

đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=1$

đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = x-2$

điểm đối xứng của đồ thị hàm số là giao hai đường tiệm cận $\Rightarrow I(1;-1)$

$\Rightarrow T = 2025x_0 - 2024y_0 = 2025.1 - 2024(-1) = 4049$

Câu 59. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$. Tính giá trị $T = x_0 - y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x+2} = \dfrac{x(x+2)-2}{x+2} = x - \dfrac{2}{x+2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{x+2} = 0$ và

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x+2} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=-2$

điểm đối xứng của đồ thị hàm số là giao hai đường tiệm cận $\Rightarrow I(-2;-2)$

$\Rightarrow T = x_0 - y_0 = 0$

Câu 60. Gọi $I(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x}{x-1}$. Tính giá trị $T = x_0 - y_0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

$y = \dfrac{x^2-3x}{x-1} = x-2-\dfrac{2}{x-1}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-3x}{x-1}$ có TCĐ: $x=1$, TCX : $y = x-2$.

Vậy tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ có toạ độ là $(1;-1)$.

$\Rightarrow T=x_0-y_0=2$

Câu 61. Cho hàm số $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$ có đồ thị (C). Biết hai trục đối xứng của đồ thị (C) lần lượt có dạng $y=\left(a-\sqrt{b}\right)x+1-2\sqrt{5}$ và $y=\left(c+\sqrt{d}\right)x+1+2\sqrt{5}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=2a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16

Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận xiên $y=2x+1$ nên trục đối xứng của đồ thị là:

$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\pm(x+2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(2-\sqrt{5}\right)x+1-2\sqrt{5}\Rightarrow a=2,b=5\\ y=\left(2+\sqrt{5}\right)x+1+2\sqrt{5}\Rightarrow c=2,d=5\end{array}\right.$$

$\Rightarrow T=2a+b+c+d=16$

Câu 62. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) nhận đường thẳng $y=\left(\sqrt{a}-b\right)x-1-\sqrt{c}$ làm trục đối xứng , với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=a-2027b+c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2027

Ta có: $y=\dfrac{x^2}{1-x}=-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận xiên $y=-x-1$ nên trục đối xứng của đồ thị là:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\pm(x-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-1-\sqrt{2}\Rightarrow a=2,b=-1,c=-2\\ y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow T=a-2027b+c=2027$

Câu 63. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $M\left(x_M;y_M\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+y_M$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện $x\neq 2$.

Đồ thị của hàm số cắt trục tung nên $x=0\Rightarrow y=2\Rightarrow M\left(0;2\right)$

$T=x_M+y_M=2$

Câu 64. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$ cắt trục hoành tại hai điểm $M\left(x_M;y_M\right)$ và $N\left(x_N;y_N\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=x_M+x_N$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Điều kiện $x\neq 2$.

Đồ thị của hàm số cắt trục hoành nên:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-2}=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(N)\\x=3(N)\end{array}\right.$$

Do đó, đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $(1;0);(3;0)$

$\Rightarrow T=x_M+x_N=4$

Câu 65. Đường thẳng $y=2x-1$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện $x\neq -1$.

Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình $2x-1=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{x+1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Vì phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt nên đường thẳng $y=2x-1$ có hai điểm chung với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

Câu 66. Trên đồ thị $(C):\ y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$, có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi $M\left(x;y\right);M'\left(x';y'\right)$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\left\{\begin{array}{l}x+x'=1\\y+y'=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x'=1-x\\y'=2-y\end{array}\right.\Rightarrow M'\left(1-x;2-y\right)$.

Vì $M(x;y);M'(x';y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases} y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2} \\ 2-y=\dfrac{x^2-x+4}{-x-1} \end{cases}$

$\Rightarrow 2=\dfrac{x^2-3x+6}{x-2}+\dfrac{x^2+x+4}{-x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x\neq -1, x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=-4 \\ x=3\Rightarrow y=6 \end{array}\right.$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2,-4);\ M'(3;6)$

Câu 67. Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 12

Ta có: $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}=2x-1+\dfrac{12}{x+2}$

Điểm $M(x;y)\in(C)$ có toạ độ nguyên thì $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ 12\vdots(x+2) \end{cases}$

12 có 12 ước số nên có 12 điểm có toạ độ nguyên.

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) của hàm số có tọa độ là các số nguyên?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6

Ta có $y=x+\dfrac{4}{x+1}$

$x,y\in Z \Leftrightarrow 4$ chia hết cho $x+1$.

$\Leftrightarrow x+1\in\{\pm1;\pm2;\pm4\} \Leftrightarrow x\in\{-2;0;-3;1;-5;3\}$

Vậy có tất cả 6 điểm nguyên.

Câu 69. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-mx+2m}{x+m}(C_m)$. Có bao nhiêu đồ thị (C_m) đi qua điểm $(0,1)$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $x=0$. Suy ra $y=\dfrac{2m}{m}=2\neq 1$

Vậy không có (C_m) nào qua $(0,1)$

Câu 70. Tìm giá trị m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2+(1-m)x-1=0 \quad (x\neq 0)$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB: $x_I=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-1}{6}$ mà $I\in Oy\Leftrightarrow x_1=0\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{6}=0\Leftrightarrow m=1$

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

Trả lời: ……..

Lời giải

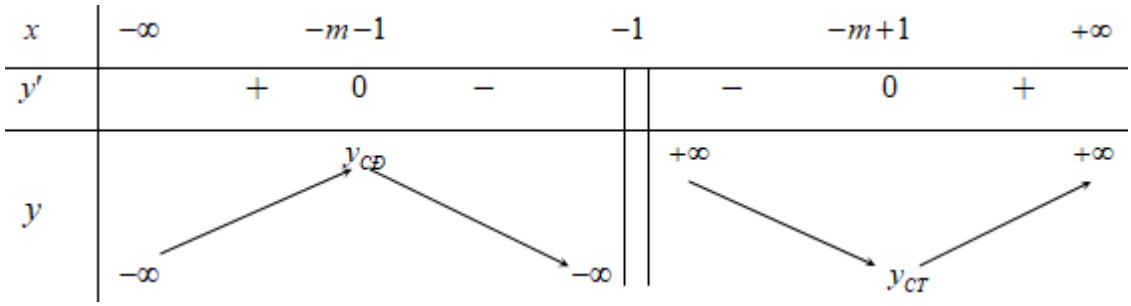
Đáp án: –9

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}\Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ x^2+2mx+m^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -m\\ \left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m+1\\ x=-m-1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7\Leftrightarrow -m-2=7\Leftrightarrow m=-9$.

Câu 72. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$ có dạng $y=ax+b$. Tính giá trị $b-a$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $A(1;-2)$ là: $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0=f'(1).(x-1)-2$

Ta có: $f'(1)=-5$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=-5(x-1)-2\Leftrightarrow y=-5x+3$.

$\Rightarrow b-a=8$

Câu 73. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $ax+by+c=0$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T=2027a+b+2028c$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2029

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0=0\Rightarrow y_0=0$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y=f'(0)(x-0)+0\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x\Leftrightarrow x+2y=0$.

$\Rightarrow T=2027a+b+2028c=2029$

Câu 74. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành có dạng $ax+by+1=0$. Tính giá trị biểu thức $T=2027a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2030

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

Giao điểm N của đồ thị với trục hoành : $y_0=0\Rightarrow\dfrac{x_0^2+x_0}{x_0-2}=0\Leftrightarrow x_0^2+x_0=0\Leftrightarrow x_0=-1;x_0=0$

+ Với $N(0;0)$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là : $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm N là : $y = f'(0)(x-0)+0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x+2y=0$, suy ra không thoả yêu cầu bài toán.

+ Với $N(-1;0)$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là : $f'(-1)=\frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm N là : $y = f'(-1)(x+1)+0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Leftrightarrow x-3y+1=0$.

$\Rightarrow T = 2027a-b = 2030$

Câu 75. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng $y=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b$

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có: $y'=\frac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$.

Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0=0 \Rightarrow y_0=-1$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $k=y'(0)=1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y=k(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=x-1$.

$\Rightarrow P=a+b=0$

Câu 76. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x-2}$ có đồ thị (H). Có bao nhiêu tiếp điểm của đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ và tiếp xúc với (H).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

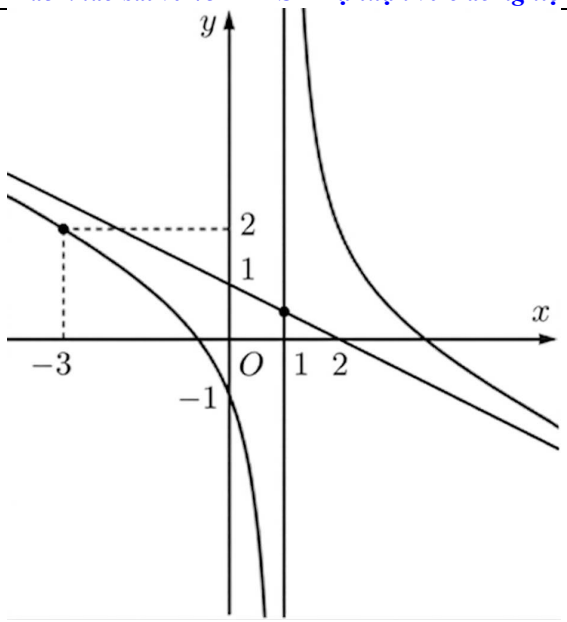
Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: y=2x-1$ có dạng $\Delta: y=2x+c \quad (c\neq -1)$.

Δ là tiếp tuyến của $(H) \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x-2}=2x+c$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2+(c-2)x+1-2c=0$ có nghiệm kép $x\neq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2+4c=0 \\ 4+2(c-2)+1-2c\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=-4 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị c thỏa mãn nên có hai tiếp tuyến tương ứng với hai tiếp điểm.

Câu 77. Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ với a,b,c,p,q là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận xiên dạng $y=mx+n$, khi đó $n-2m$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $(2;0)$ và $(0;1)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases}0=2m+n\\1=0.m+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\n=1\end{cases}$$

Do đó $n-2m=2$

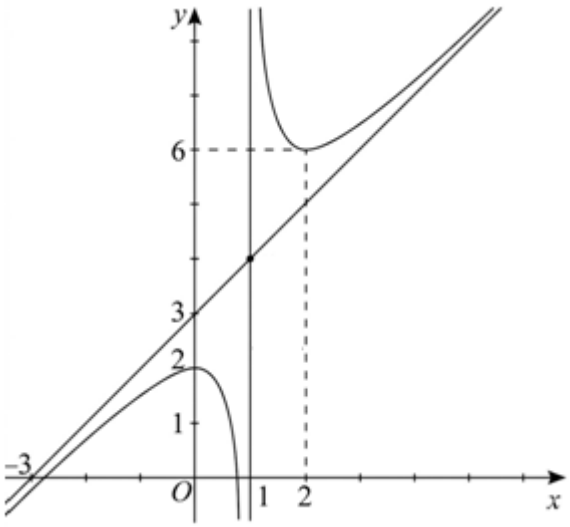
Cách 2

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $(2;0)$ và $(0;1)$ nên có phương trình

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$$

Do đó $n-2m=2$

Câu 78. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ với a,b,c,p,q là các số thực và có đồ thị (C) dạng như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận xiên dạng $y=mx+n$, khi đó $2026m+n$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2029

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $(-3;0)$ và $(0;3)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases}0=-3m+n\\3=0.m+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$$

Do đó $2026m+n=2029$

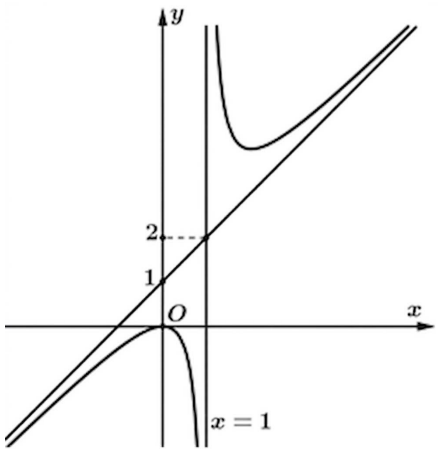
Cách 2

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $(-3;0)$ và $(0;3)$ nên có phương trình

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1\Leftrightarrow y=x+3$$

Do đó $2026m+n=2029$

Câu 79. Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y=ax+b+\dfrac{1}{x+c}$



Khi đó tổng $2026a+2027b+c$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4052

$x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c=-1$.

Ta có $y=ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Từ đồ thị ta thấy tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;2)$ và $(0;1)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2=a+b\\1=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$$

Vậy $2026a+2027b+c=4052$

Câu 80. Cho hàm số sau: $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{R};c\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ và tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$. Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2, khi đó tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -1

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}\Rightarrow -\dfrac{d}{c}=-1\Leftrightarrow d=c$

Do đó $y=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+c}=\dfrac{1}{c}x+\dfrac{a-1}{c}+\dfrac{b-a+1}{cx+c}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{c}x+\frac{a-1}{c}+\frac{b-a+1}{cx+c}-\left(\frac{1}{c}x+\frac{a-1}{c}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{b-a+1}{cx+c}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{c}x+\frac{a-1}{c}+\frac{b-a+1}{cx+c}-\left(\frac{1}{c}x+\frac{a-1}{c}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{b-a+1}{cx+c}=0$$

Suy ra tiệm cận xiên là đường thẳng $y=\dfrac{1}{c}x+\dfrac{a-1}{c}$

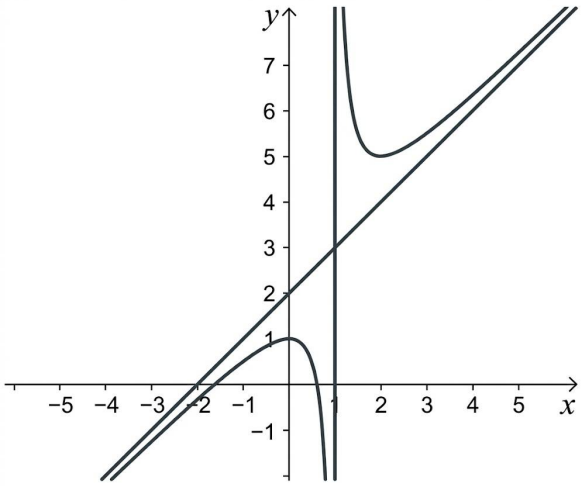
Mà đồ thị (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$ nên $\begin{cases}\dfrac{1}{c}=1\\\dfrac{a-1}{c}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\a=1\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}d=c=1\\a=1\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{x^2+x+b}{x+1}$

Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $x=0,y=-2\Rightarrow -2=\dfrac{b}{1}\Leftrightarrow b=-2$

Vậy $a+b+c+d=-1$

Câu 81. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a>0,m\neq 0\right);D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-n}{m}\right\}$

Tiệm cận xiên $y=x+2$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx}\right)=\frac{a}{m}=1\Leftrightarrow a=m>0$$

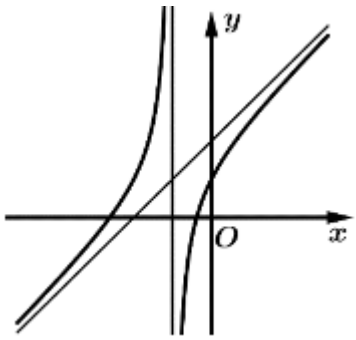
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(b+n\right)x+c}{mx+n}\right]=\frac{b+n}{m}=2$$

$$\Leftrightarrow b+n=2m\Leftrightarrow b-m=2m\Leftrightarrow b=3m=3a>0$$

Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-n}{m}=1\Leftrightarrow n=-m=-a<0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0=\dfrac{c}{n}>0\Rightarrow c<0$

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+1}{cx+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Từ đồ thị hàm số đã cho ta thấy

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $\frac{1}{d}>0\Rightarrow d>0$.

Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=x_0<0$. Suy ra $\frac{-d}{c}<0\Rightarrow c>0$.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số dể thấy hàm số không có cực trị và $ac>0$. Suy ra $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm.

Nên phương trình $ax^2+bx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt dương.

Suy ra $x_1+x_2<0\Rightarrow\frac{-b}{a}<0\Rightarrow b>0$.

Vậy có 4 số dương trong các số $a;b;c;d$.

Câu 83. Tìm được trên đồ thị $(C):y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ hai điểm $M_1(a;b)$ và $M_2(c;d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất. Khi đó, tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+d$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -4

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\frac{x_0^2+4x_0+5}{x_0+2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x+y+6=0$

$$d=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|\frac{4x_0^2+16x_0+17}{x_0+2}\right|=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\right|\geq\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4|x_0+2|=\frac{1}{|x_0+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\frac{-3}{2}\Rightarrow y_0=\frac{5}{2}\\ x_0=\frac{-5}{2}\Rightarrow y_0=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thoả yêu cầu bài toán là $M_1\left(\frac{-3}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{-5}{2};\frac{-5}{2}\right)$

$$T=a+b+c+d=\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{-5}{2}+\frac{-5}{2}=-4$$

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Tọa độ A,B thỏa: $\frac{x^2-1}{x}=-x+m\Leftrightarrow 2x^2-mx-1=0,\ (x\neq 0)\ (1)$

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m.

Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2) \Rightarrow AB^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = 2(x_1-x_2)^2$

Áp dụng định lí viet cho phương trình (1) ta có được:

$$AB^2 = 2\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = \frac{m^2}{2} + 4$$

$$AB = 6 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 4 = 6 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 85. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C;y_C), D(x_D;y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A.x_D = -3$. Số phần tử của tập S bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - m^2 - m = 0$ suy ra $x_A.x_B = -m^2 - m; x_A + x_B = m - 3$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(2-m-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - m^2 + m - 2 = 0$ suy ra $x_C.x_D = -m^2 + m - 2; x_C + x_D = -m - 1$

Mặc khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{array}\right.$. Suy ra

$$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Câu 86. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x-2}$ (1). Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4-4+m^2 = m^2 > 0 \\ 4-8+4-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$.

Nghiệm của phương trình $g(x)=0$ là $x_1 = 2-m$ hoặc $x_2 = 2+m$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2-m;\ 4-m)$, $B(2+m;\ 4+3m)$

$d(A,\Delta) = \dfrac{|9-3m|}{\sqrt{5}}$; $d(B,\Delta) = \dfrac{|9+5m|}{\sqrt{5}}$.

$d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow |9-3m| = |9+5m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9-3m = 9+5m \\ 9-3m = -9-5m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -9 \end{array}\right.$

So với điều kiện $m \neq 0$ nhận $m = -9$.

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi $A;B$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C). Tính tổng các giá trị của tham số m để diện tích ΔOAB bằng 2.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: -2

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $\forall x \neq -1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m+1 \\ x = -2 \Rightarrow y = m-3 \end{array}\right.$.

Do đó hai điểm cực trị là $A(0;m+1); B(-2;m-3)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_A - x_O; y_A - y_O) = (0;m+1) \Rightarrow OA = \sqrt{(0)^2+(m+1)^2} = |m+1| \\ \overrightarrow{OB} = (x_B - x_O; y_B - y_O) = (-2;m-3) \Rightarrow OB = \sqrt{(-2)^2+(m-3)^2} = \sqrt{m^2-6m+13} \end{cases}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(OA.OB)^2 - (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(m+1)^2(m^2-6m+13) - [(m-1)(m-3)]^2} = |m+1|$.

Mà $S_{\Delta ABC} = 2 \Leftrightarrow |m+1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Suy ra tổng các giá trị là: $-3+1 = -2$

Câu 88. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2+2mx+5}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y = 2x$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=\dfrac{-x^2+2x-(2m-5)}{(x-1)^2}=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+2x-(2m-5)=0\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-(2m-5)=0 \ \ (co\ nghiem) \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\neq 0 \\ \Delta'=-2m+6>0 \Leftrightarrow m<3\ (2) \\ -2m+6\neq 0 \end{cases}.$$

Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1,x_2, nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viet: $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=2;\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-5\ \ (3)$

Giả sử $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có: $y_1=-2x_1+2m;\ y_2=-2x_2+2m$.

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

Để hai điểm cực trị $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $\Delta: y=2x$ thì:

$(2x_1-y_1)(2x_2-y_2)<0\Leftrightarrow(4x_1-2m)(4x_2-2m)<0\Leftrightarrow 16x_1x_2-8m(x_1+x_2)+4m^2<0\ (4)$.

Thay (3) vào (4), ta được: $16(2m-5)-8m.2+4m^2<0\Leftrightarrow m^2+4m-20<0$

$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$

So với (2), ta được: $-2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-6;-5;...;1;2\}$ hay có 9 giá trị nguyên của m

Câu 89. Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)x-m^2+4m-2}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,4

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$y'=\dfrac{x^2-2x+m^2-3m+3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow g(x)=x^2-2x+m^2-3m+3=0\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1;x_2\neq 1\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=-m^2+3m-2>0 \Leftrightarrow 1<m<2\ \ (2). \\ g(1)=m^2-3m+2\neq 0 \end{cases}$$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số thì $x_1;x_2$ là nghiệm của $g(x)=0$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1-\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_1=1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2} \\ x_2=1+\sqrt{-m^2+3m-2}\Rightarrow y_2=1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2} \end{array}\right.$.

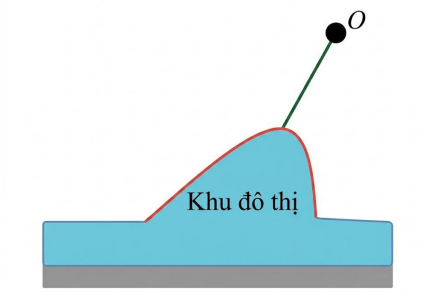
Ta có: $y_1.y_2=\left(1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)\left(1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2}\right)$.

$=(1-m)^2-4\left(-m^2+3m-2\right)=5m^2-14m+9=5\left(m-\frac{7}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\left(y_1.y_2\right)_{\min}=-\frac{4}{5}$ *khi* $m=\frac{7}{5}$

So lại với điều kiện $(2)\Rightarrow m=\frac{7}{5}=1,4$ là giá trị cần tìm.

Câu 90. Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y=\frac{-x^2+2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1,3

Lấy điểm $M\left(x;\frac{-x^2+2}{x}\right)$, $x\neq0$ thuộc đồ thị $(C):y=\frac{-x^2+2}{x}$ là điểm cần tìm

Khi đó $OM^2=x^2+\left(\frac{-x^2+2}{x}\right)^2=2x^2+\frac{4}{x^2}-4\geq4\sqrt{2}-4$

Suy ra $OM\geq2\sqrt{\sqrt{2}-1}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x^2=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{2}$

Vậy độ dài tuyến cáp treo ngắn nhất bằng $OM\geq2\sqrt{\sqrt{2}-1}\approx1,3$.

BÀI 5
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

• Nếu $s=s(t)$ là **hàm vị trí** của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị **vận tốc** tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian).

Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là **gia tốc** tức thời của vật: $a=v'(t)=s''(t)$

• Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hóa học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ **phản ứng tức thời** (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất điểm đó tại thời điểm t.

• Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị **tốc độ tăng trưởng** tức thời của quần thể tại thời điểm t.

• Nếu $C=C(x)$ là **hàm chi phí** , tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hóa, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là **chi phí biên**.

Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa tiếp theo, tức là đơn vị hàng hóa thứ $x+1$.

2. Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Quy trình giải một số bài toán tối ưu

• **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.

• **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.

• **Bước 3:** Dựa vào hàm đã xác lập để giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Chú ý

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là $R(x)=x.p(x)$ và $R(x)$ được gọi là **hàm doanh thu**. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là **hàm doanh thu biên** và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán thì tổng lợi nhuận là $P(x)=R(x)-C(x)$ và $P(x)$ được gọi là **hàm lợi nhuận**. **Hàm lợi nhuận biên** là đạo hàm $P'(x)$ của **hàm lợi nhuận**.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG THẲNG

Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì:

- $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- $a(t) = v'(t) = f''(t)$ là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động thẳng, chiều dương hướng theo chiều chuyển động và điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$, $t \geq 0$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t.

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$.

b) Tính vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$

c) Chất điểm tăng tốc và giảm tốc trong khoảng thời gian nào?

d) Thời điểm nào chất điểm có vận tốc đạt giá trị lớn nhất?

Bài 2. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t) = 6t^2 - 2t^3$, $(t \geq 0)$

a) Sau khi hạt chuyển động, thời điểm nào thì vận tốc của hạt bằng 0?

b) Khi nào hạt chuyển động lên trên và khi nào hạt chuyển động xuống dưới?

c) Hỏi trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của hạt là bao nhiêu?

Bài 3. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

DẠNG 2
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỐI ƯU DẠNG CÓ HÀM

Bài 1. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là: $C(x)=23000+50x-0,5x^2+0,00175x^3$. Biết hàm chi phí biên là $C'(x)$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101.

Bài 2. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 3. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỐI ƯU DẠNG TRUY HÀM

Bài 1. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p=\dfrac{354}{1+0,01x}$, $x\ge 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng.

c) Cho biết ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$.

Bài 2. Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C=C(Q)=\dfrac{Q^2}{4}+3Q+400$ trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Với mức sản lượng là bao nhiêu thì chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất? Khi đó chi phí trung bình tối thiểu bằng bao nhiêu?

Bài 3. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D=656-\dfrac{1}{2}P$ với Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q)=Q^3-77Q^2+1000Q+100$ với C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo bao nhiêu?



Bài 4. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đạt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (đơn vị: triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=\dfrac{1}{2}(200+27x)$ (đơn vị: triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm để mỗi tháng thu được lợi nhuận (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng) cao nhất?

Bài 5. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản

phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50-0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (*đơn vị tính là triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Bài 6. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A $(0\le x\le 250)$ trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x)=0,00024x^3-0,03x^2+5x+30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x)=-0,01x^2+16x-25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 7. Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x\in\mathbb{N}^*$; $1\le x\le 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=-0,01x^2+300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x)=\dfrac{30000}{x}+200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Bài 8. Trung tâm thương mại Center Nha Trang có 50 gian hàng cho thuê bán hàng. Biết rằng nếu cho thuê mỗi gian hàng với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi gian hàng đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một gian hàng bị bỏ trống.



a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Hỏi thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

Bài 9. Chị Mai xây dựng 32 phòng trọ cho sinh viên trường Đại Học Nha Trang thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000 đồng trên 1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000 đồng trên 1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống.



a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Hỏi chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Bài 10. Một cơ sở sản xuất khăn mặt tại Nha Trang đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Bài 11. Doanh nghiệp tư nhân Thành Đạt – Nha Trang chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp Thành Đạt phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?



Bài 12. Mỗi chuyến xe buýt của hãng xe Phương Trang có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi chuyến xe buýt chở bao nhiêu hành khách thì hãng xe Phương Trang thu được số tiền nhiều nhất?



Bài 13. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $200km$. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\left(km/h\right)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.



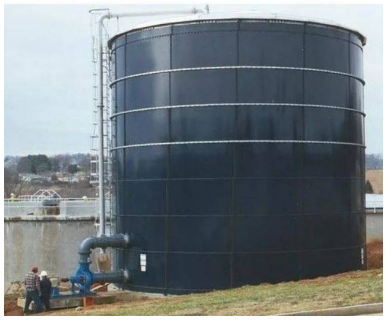
DẠNG 4
CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU LIÊN QUAN HÌNH HỌC PHẲNG VÀ KHÔNG GIAN

Bài 1. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông và thể tích của hộp đứng là $8\ dm^3$.

a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng nào thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp giảm?

b) Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể.

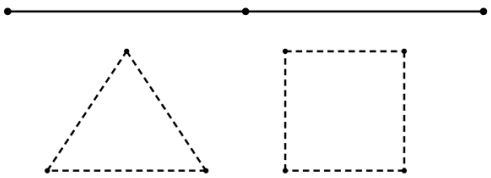
Bài 2. Một công ty xăng dầu cần làm một thùng chứa dạng hình trụ kín, có thể tích $5000m^3$. Vật liệu để làm hai đáy có giá 250000 đồng trên m^2, vật liệu làm phần còn lại có giá 400000 đồng trên m^2.



a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng nào thì tổng chi phí làm thùng chứa sẽ giảm?

b) Tìm chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất.

Bài 3. Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)

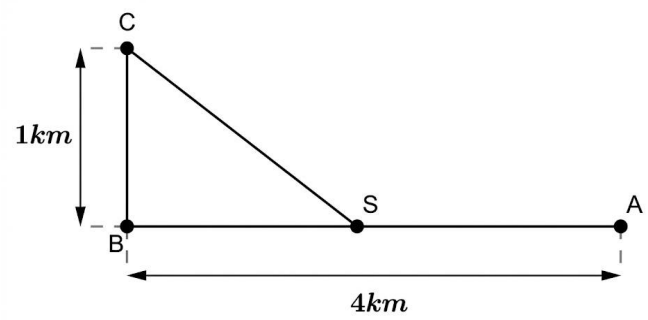


Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Bài 4. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất? Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật bằng bao nhiêu?



Bài 5. Một công ty điện lực cần nối một đường dây điện từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ.

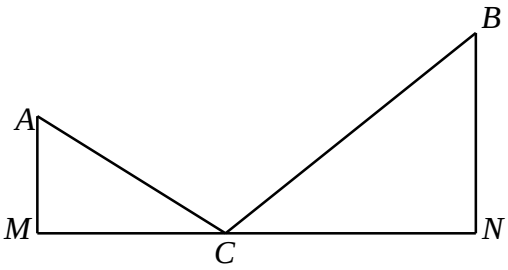


Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km và khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD.

a) Hỏi diểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

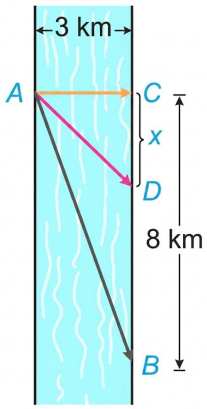
b) Hỏi chi phí mà công ty điện lực cần bỏ ra ít tốn kém nhất là bao nhiêu?

Bài 6. Người ta định xây dựng một trạm biến áp 110 Kv tại ô đất C cạnh đường quốc lộ MN để cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B như hình vẽ.

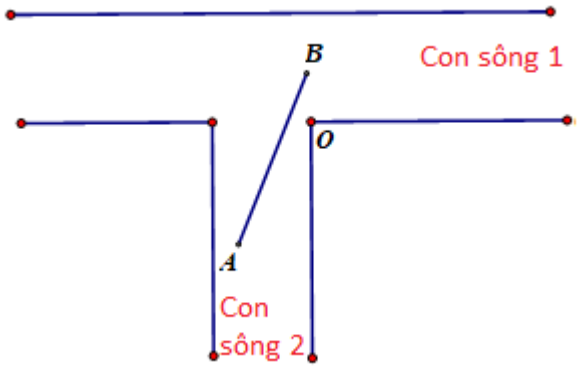


Hai khu công nghiệp A và B cách quốc lộ lần lượt là $AM = 3km$, $BN = 6km$. Biết rằng quốc lộ MN có độ dài $12km$. Hỏi phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A bao nhiêu km để tổng chiều dài đường dây cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B là ngắn nhất.

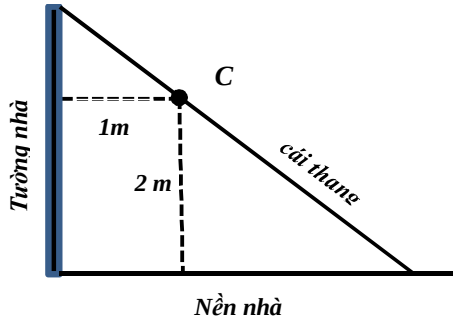
Bài 7. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình vẽ). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Bài 8. Một con sông 1 thông với con sông 2, bờ của con sông 1 vuông góc với bờ của con sông 2 (như hình vẽ). Chiều rộng của hai con sông bằng nhau và bằng $8m$. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương 1 sang mương 2. Độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB (Làm tròn kết quả đến phần chục) sao cho AB khi trôi không bị vướng là bao nhiêu?



Bài 9. Thầy Thanh cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Thầy Thanh muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).



Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi thầy Thanh cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình: $s(t)=-t^3+6t^2+t+5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

A. $1s$. **B.** $2s$. **C.** $3s$ **D.** $3s$.

Câu 2. Trong 7 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+6t^2+15t+1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=4$ giây bằng bao nhiêu m/s?

A. $16(m/s)$. **B.** $20(m/s)$. **C.** $12(m/s)$ **D.** $15(m/s)$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải.



Giả sử từ vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t được cho bởi công thức $s(t)=t^3-9t^2+15t,(t\ge 0)$, trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Biết $(a;b)$ là khoảng thời gian có độ dài lớn nhất mà chất điểm chuyển động sang trái. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=6$. **B.** $P=26$. **C.** $P=10$ **D.** $P=15$.

Câu 4. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t)=-t^3+6t^2+17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $29m/s$. **B.** $20m/s$. **C.** $32m/s$ **D.** $36m/s$.

Câu 5. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $9m/s$. **B.** $8m/s$. **C.** $89m/s$ **D.** $100m/s$.

Câu 6. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $t=6s$. **B.** $t=5s$. **C.** $t=4s$. **D.** $t=3s$.

Câu 7. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quảng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $s(t)=6t^2-t^3,(t>0)$. Thời điểm t (giây) nào mà tại đó gia tốc của tàu bằng 0 ?

A. $t=1s$. **B.** $t=2s$. **C.** $t=3s$. **D.** $t=4s$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu giây?

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

Câu 9. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là $32,5$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t)=32,5t-4,9t^2$. Tính vận tốc của vật tại thời điểm 3 giây.

A. $53,4m/s$. **B.** $6,2m/s$. **C.** $3,1m/s$ **D.** $23,5m/s$.

Câu 10. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T=m+n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

A. $T=10$. **B.** $T=14$. **C.** $T=4$ **D.** $T=20$.

Câu 11. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t)=2t^2+t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t=4$s.

A. $18(A)$. **B.** $12(A)$. **C.** $20(A)$ **D.** $17(A)$.

Câu 12. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó: $n=\frac{t^3}{3}-6t^2+32t$ $(0\le t\le 12)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa?

A. $t=4$ (năm). **B.** $t=6$ (năm). **C.** $t=8$ (năm). **D.** $t=12$ (năm).

Câu 13. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\frac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất.

A. $\sqrt{5}(km/h)$. **B.** $\sqrt{7}(km/h)$. **C.** $2(km/h)$ **D.** $3(km/h)$.

Câu 14. Người ta ước tính được chi phí tiền xăng C (nghìn đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình $v\,(km/h)$ theo công thức: $C(v)=\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\ (0<v\le 120)$. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình thấp nhất là bao nhiêu km/h để số tiền xăng không vượt quá 500 nghìn đồng?

A. $120\,km/h$. **B.** $80\,km/h$. **C.** $40\,km/h$ **D.** $30\,km/h$.

Câu 15. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v(km/h) theo công thức: $C(v)=\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\ (0<v\le 120)$. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

A. $120\,km/h$. **B.** $80\,km/h$. **C.** $60\,km/h$ **D.** $100\,km/h$.

Câu 16. Lợi nhuận thu được P của 1 công ty khi dùng số tiền x chi cho quảng cáo được cho bởi công thức: $P(x)=\dfrac{-x^3}{10}+6x^2+200$, $x\ge 0$, ở đây các số tiền được tính bằng đơn vị nghìn USD. Hỏi công ty thu được lợi nhuận tối đa là bao nhiêu nghìn USD khi quảng cáo?

A. 200 nghìn USD. **B.** 40 nghìn USD. **C.** 3400 nghìn USD. **D.** 2500 nghìn USD.

Câu 17. Tại một nhà máy, khi sản xuất x tạ sản phẩm $(x>0)$ mỗi ngày thì chi phí trung bình trên mỗi tạ sản phẩm được tính bởi công thức: $\overline{C}(x)=\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{8}{x}$ (triệu đồng/tạ). Tính chi phí trung bình thấp nhất (tính theo triệu đồng/tạ) mà nhà máy có thể đạt được trong ngày.

A. 6,5 triệu đồng/tạ. **B.** 7,5 triệu đồng/tạ. **C.** 6 triệu đồng/tạ. **D.** 7 triệu đồng/tạ.

Câu 18. Một nhà máy dự định sản xuất không quá 900 sản phẩm. Nếu nhà máy sản xuất x sản phẩm $(1\le x\le 900)$ thì lợi nhuận nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $f(x)=-x^3+900x^2+56700x+450000$ (đồng). Nhà máy cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất ?

A. 900 sản phẩm. **B.** 630 sản phẩm. **C.** 800 sản phẩm. **D.** 600 sản phẩm.

Câu 19. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x)=-x^2+30x+6$ $(0\le x\le 30)$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ty có thể bán sau đợt quảng cáo?

A. 30 lô hàng. **B.** 15 lô hàng. **C.** 180 lô hàng. **D.** 231 lô hàng.

Câu 20. Giả sử số lượng của một quần thể nấm X tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=120e^{0,15t}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X là bao nhiêu tế bào/giờ ?

A. 18 tế bào/giờ. **B.** 20 tế bào/giờ. **C.** 14 tế bào/giờ. **D.** 17 tế bào/giờ.

Câu 21. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. $0,5$ giờ. **B.** 1 giờ. **C.** $1,5$ giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 22. Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t)=100.e^{0,012t}, 0<t\le 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/ năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

A. năm 2055. **B.** năm 2056. **C.** năm 2065. **D.** năm 2066.

Câu 23. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $17,5$ miligam. **B.** 15 miligam. **C.** 10 miligam. **D.** 9 miligam.

Câu 24. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn . Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?

A. năm 2027. **B.** năm 2037. **C.** năm 2040. **D.** năm 2041.

Câu 25. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm Đèo Cả (Khánh Hoà – Phú Yên) được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$ (xe/giây), trong đó $v(km/h)$ là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính lưu lượng xe là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8 xe/giây. **B.** 9 xe/giây. **C.** 10 xe/giây. **D.** 11 xe/giây.

Câu 26. Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t)=\dfrac{1}{50}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+36t-270$ (hồ sơ) với $1\le t\le 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 30.

Câu 27. Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t)=\dfrac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}$, $(0\le t\le 6)$ trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

A. 1 giờ. **B.** $1,5$ giờ. **C.** 2 giờ. **D.** $2,21$ giờ.

Câu 28. Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức $C(t)=\dfrac{3t}{27+t^3}$ với $t\ge 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

A. $1,42$ giờ. **B.** $1,85$ giờ. **C.** $2,05$ giờ. **D.** $2,38$ giờ.

Câu 29. Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức

$$V=999,87-0,06426t+0,0085043t^2-0,0000679t^3\left(m^3\right).$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ C)

A. $4°C$. **B.** $5°C$. **C.** $6°C$. **D.** $7°C$.

Câu 30. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}$, $(0\le t\le 10)$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là:

A. giảm $\dfrac{250}{169}$. **B.** tăng $\dfrac{250}{169}$. **C.** giảm $\dfrac{170}{169}$. **D.** tăng $\dfrac{170}{169}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Bộ phận sản xuất của một công ty xác định chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $T(x)=x^2+20x+4000$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi sản phẩm là 150 nghìn đồng.

a) Doanh thu khi bán được x sản phẩm là $\dfrac{150}{x}$ (nghìn đồng).

b) Lợi nhuận khi bán x sản phẩm là $x^2-130x+4000$ (nghìn đồng)

c) Để công ty có lãi thì $x\in(50;80)$.

d) Nếu x sản phẩm đều được bán hết thì lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được là 215 nghìn đồng.

Câu 32. Một công ty sản xuất giày dép ước tính rằng tổng chi phí để sản xuất và bán hết q đôi giày mỗi ngày là $C(q)=0,01q^3-0,6q^2+50q+2000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi đôi giày được xác định bởi hàm $h(q)=600-q$ (nghìn đồng). Biết rằng số giày của công ty sản xuất mỗi ngày đều được bán hết.

a) Chi phí sản xuất 50 đôi giày là: 42500 (nghìn đồng)

b) Lợi nhuận thu được khi sản xuất và bán hết 50 đôi giày là 23250 (nghìn đồng).

c) Lợi nhuận công ty đó thu được khi sản xuất và bán hết q đôi giày mỗi ngày là $-0.01q^3-0,4q^2+550q-2000$ (nghìn đồng).

c) Công ty sản xuất và bán hết 122 đôi giày mỗi ngày thì thu lợi nhuận lớn nhất.

Câu 33. Quảng cáo là hình thức tuyên truyền được trả phí hoặc không để thực hiện việc giới thiệu thông tin về sản phẩm, dịch vụ, công ty hay ý tưởng, quảng cáo là hoạt động truyền thông phi trực tiếp giữa người với người mà trong đó người muốn truyền thông phải trả tiền cho các phương tiện truyền thông đại chúng để đưa thông tin đến thuyết phục hay tác động đến người nhận thông tin. Khảo sát tại một công ty A cho thấy nếu chi x triệu đồng để quảng cáo một loại sản phẩm thì số sản phẩm công ty A bán được là $S(x)=-2x^3+27x^2+216x+150$ với $x\in[0;15]$.

a) $S'(x)=-6x^2+54x+216$.

b) Nếu công ty A chi 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm công ty A bán được đạt tối đa bằng 3131 triệu đồng.

c) Nếu không chi cho quảng cáo thì số lượng sản phẩm công ty A bán được là 391 sản phẩm.

d) Nếu công ty A chi từ 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm bán được sẽ tăng.

Câu 34. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t)=40\log_3(2t+1)+12$ (đơn vị: centimet, $0\le t\le 18$). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t)=3^{\frac{2t-17}{t-8}}-3$ (đơn vị: centimet, $9\le t\le 18$).



a) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng $4,85$ (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 80 cm.

c) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

Câu 35. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là x (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được x (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng, gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho nhà máy B là $H(x)=-0,001x^3+15x-100$.

b) Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

c) Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.

d) Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 36. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x)=0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg).



a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Câu 37. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3,\ (t\ge 0)$

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12,\ (t\ge 0)$ và hàm gia tốc là $a(t)=6t,\ (t\ge 0)$.

b) Hạt chuyển động lên trên khi $t>2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t<2$.

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\le t\le 3$ là 9 m.

d) Hạt tăng tốc khi $t>2$ và hạt giảm tốc khi $0<t<2$.

Câu 38. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t)=100.e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0\le t\le 50$).

a) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2035 là 145,488 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Hàm số $N(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0;50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Câu 39. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $400km$. Vận tốc dòng nước là $10km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h), v>10$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun.



a) Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-10(km/h)$.

b) Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $\dfrac{400}{v-10}(h)$.

c) Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $400cv^3(v-10)(jun)$.

d) Khi nước đứng yên, cá phải bơi với vận tốc $18(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Câu 40. Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ USD.



a) Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là : $\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ (USD), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$.

b) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

c) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

d) Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 40 (USD).

Câu 41. Một công ty vận tải ở Nha Trang đang dự định mở tuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng. Mỗi chuyến xe có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $30\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$. Chi phí vận hành mỗi chuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng là 3000000 (đồng).



a) Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

b) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là $30\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)-3000000$ (nghìn đồng).

c) Để công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất thì mỗi chuyến chở 40 hành khách.

d) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 4800000 đồng.

Câu 42. Công ty in Khatoco Khánh Hòa muốn xuất bản $x\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$ cuốn tạp chí giới thiệu về các địa điểm Du Lịch của tỉnh Khánh Hòa. Công ty đã khảo sát, tính được chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x)=x^2-2000x+100000000$ (đồng) và chi phí phát hành (bao gồm: chi phí quảng cáo và vận chuyển đến các nhà sách) cho mỗi cuốn tạp chí là 4000 đồng.



a) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $\frac{x^2-2000x+10000000}{x}$ (đồng)

b) Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

c) Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng.

Câu 43. Cửa hàng Điện Máy Chợ Lớn Nha Trang bán lẻ được 2500 cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng về bán, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 2000000 (đồng) cộng thêm 900000 (đồng) mỗi cái. Mỗi lần cửa hàng đặt hàng về, một nửa số lượng đó được gởi vào kho chứa hàng, biết chi phí gởi trong kho chứa hàng là 1000000 (đồng) một cái mỗi năm. Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$.



a) Chi phí mỗi năm gởi ti vi trong kho chứa hàng cho mỗi lần đặt hàng về bán là $500000x$ (đồng)

b) Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\dfrac{2500}{x}$ (lần).

c) Chi phí mỗi lần đặt hàng về bán là $2900000.\dfrac{2500}{x}$ (đồng).

d) Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 500 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Câu 44. Ban quản lí chung cư Mường Thanh Nha Trang có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống.



a) Gọi x là số lần tăng giá căn hộ thì số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$ (đồng), với $0 < x < 30$.

b) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

c) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Câu 45. Một quán cà phê Highlands Nha Trang sắp khai trương, đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20000 đồng mà cứ tăng giá thêm

1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18000 đồng. Gọi x là số lần tăng giá cốc cà phê, với $0 < x < 20$.



a) Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000 - x$ (cốc).

b) Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000 - x)18000$ đồng

c) Lợi nhuận thu được mỗi tháng là: $100000\left(-x^2 + 18x + 240\right)$ đồng

d) Quán cà phê Highland Nha Trang phải bán mỗi cốc cà phê với giá 29000 đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Câu 46. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi với $x > 0, x \in \mathbb{N}$.

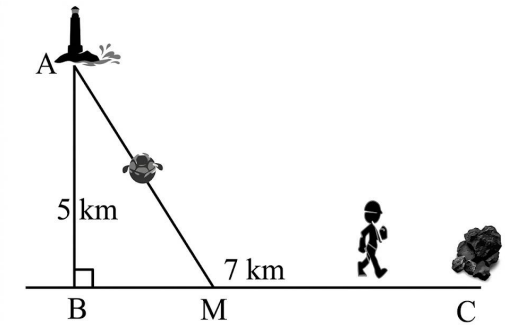
a) Hàm cầu là $P = -\dfrac{1}{200}x + 19$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2 + 3800p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là C(x) = 12000 – 3x (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 47. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $7(km)$ (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Gọi $x(km)$ là khoảng cách từ B đến M, với $0 \le x \le 7$.

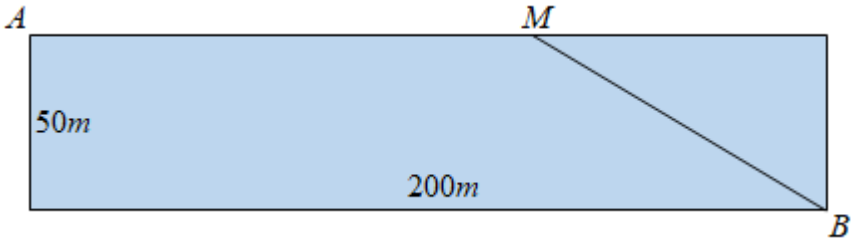
a) Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{6}(h)$.

b) Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $\frac{7-x}{4}(h)$.

c) Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C là: $\frac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\frac{7-x}{6}$.

d) Vị trí của điểm M cách B một khoảng $2\sqrt{5}km$ thì người canh hải đăng đi đến kho nhanh nhất.

Câu 48. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng $50m$, dài $200m$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M và bơi từ điểm M đến điểm B (như hình vẽ). Biết vận tốc chạy $4,8m/s$, vận tốc bơi $2,4m/s$. Gọi $x(m)$ là khoảng cách từ A đến M, với $0\le x\le 200$.



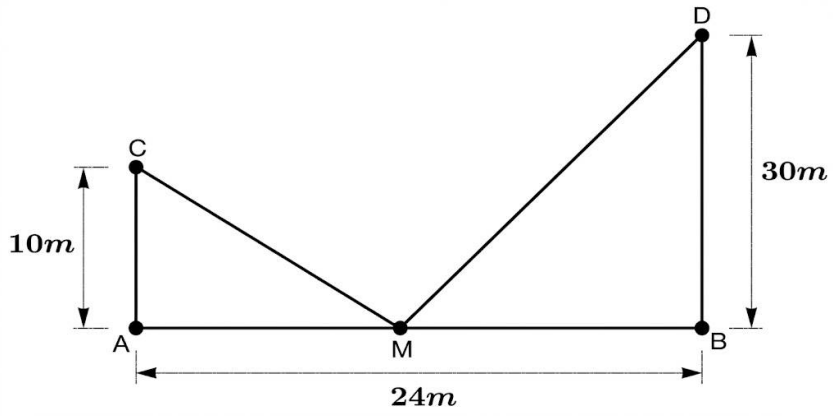
a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\frac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}(s)$

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\frac{x}{2,4}(s)$

c) Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B: $\frac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}+\frac{x}{2,4}(s)$

d) Vận động viên chọn điểm M cách A gần bằng 29 mét thì đến B nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 49. Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố Nha Trang muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón ngày Quốc Khánh $2-9$ nên đã nhờ bạn Nam đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Nam biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí A và B có độ cao lần lượt là $10m$ và $30m$, khoảng cách giữa hai trụ đèn $24m$ và cũng yêu cầu bạn Nam chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Đặt $MB=x(m)$ với $0\le x\le 24$.



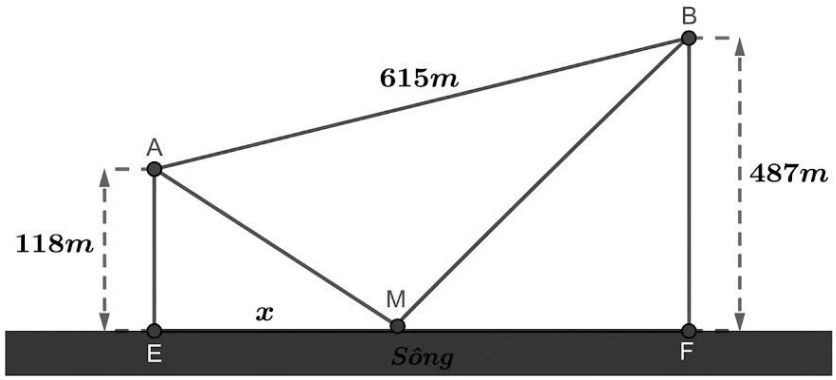
a) Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

b) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ tăng.

c) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ giảm.

d) Bạn Nam phải đặt chốt M ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là $6m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Câu 50. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B. Đặt $EM=x$, với $0\le x\le 492$.

a) Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM=\sqrt{x^2+118^2}\,(m)$

b) Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM=\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

c) Quãng đường bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là:

$\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

d) Đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi A từ đến bờ sông lấy nước và mang về B là $741m$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây(s) và S tính bằng mét (m). Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ……..

Câu 52. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm ở thời gian bao nhiêu giây?

Trả lời: ……..

Câu 53. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t)=6t^2-t^3$, $(t\geq 0)$. Biết trong khoảng thời gian $(a;b)$, với $a,b\in\mathbb{R}$ thì hạt chuyển động lên trên. Tính giá trị $a-b$.

Trả lời: ……..

Câu 54. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời gian bao nhiêu giây thì gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Trả lời: ……..

Câu 55. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}$(con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ……..

Câu 56. Giả sử tăng cân nặng (tính bằng kg) của một giống vật nuôi (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số: $f(t)=\frac{150}{1+3e^{-t}}$, $t\geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi vật nuôi đó bắt đầu sinh ra. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng cân nặng của loài cây đó. Hỏi sau khi vật nuôi sinh ra thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng cân nặng của vật nuôi là nhanh nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời: ……..

Câu 57. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.

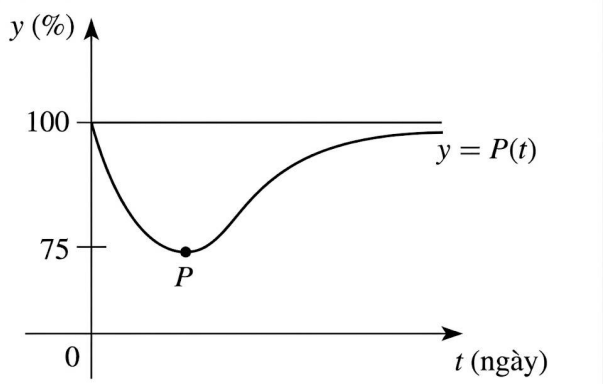


Trả lời: ……..

Câu 58. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $C(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Trả lời: ……..

Câu 59. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao. Giả sử hàm số cho hàm lượng ôxy là $P(t)=100\dfrac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}$ (% mức bình thường), $t\ge 0$.



Khi đó tọa độ của điểm $P(a;b)$ trên đồ thị là điểm cực trị của đồ thị hàm số $P(t)$. Tính $a+b$?

Trả lời: ……..

Câu 60. Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P=\dfrac{80-Q}{4}$, với $0\le Q\le 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Để doanh thu tối đa thì số sản phẩm bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 61. Một xí nghiệp A chuyên cung cấp sản phẩm S cho nhà phân phối B. Hai bên thỏa thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng x tạ sản phẩm S thì giá bán mỗi tạ sản phẩm S là $P(x)=6-0,0005x^2$ (triệu đồng) $(x\le 40)$. Chi phí A phải bỏ ra cho x tạ sản phẩm S trong một tháng là $C(x)=10+3,5x$ (triệu đồng) và mỗi sản phẩm bán ra phải chịu thêm mức thuế là 1 triệu đồng. Hỏi trong một tháng, bên B cần

đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm S thì A có được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời: ……..

Câu 62. Cho $C(x)=16000+500x-1,6x^2+0,004x^3$ là hàm chi phí khi sản xuất x sản phẩm và $p(x)=1700-7x$ là giá bán mỗi sản phẩm. Để tối đa hoá lợi nhuận thì cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

Câu 63. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là x^2+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y-27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày.

Trả lời: ……..

Câu 64. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A $(0\le x\le 250)$ trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x)=0,00024x^3-0,03x^2+5x+30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x)=-0,01x^2+16x-25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Trả lời: ……..

Câu 65. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B**.** Hai nhà máy thỏa thuận rằng: hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B sản phẩm đó theo đơn đặt hàng của nhà máy B với số lượng tối đa là 100 tấn sản phẩm. Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng), gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân)

Trả lời: ……..

Câu 66. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B**.** Hai nhà máy thỏa thuận, mỗi tháng A cung cấp cho B tối đa 45 tấn sản phẩm và nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=60-0,01x^2$ (triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=150+33x$ (triệu đồng) (gồm 150 triệu đồng chi phí cố định và 33 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Để mỗi tháng thu được lợi nhuận lớn nhất thì A cần bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm?

Trả lời: ……..

Câu 67. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0<x<2000)$, tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x)=2000x-x^2$ (chục nghìn đồng) và tổng chi phí doanh nghiệp bỏ ra là $G(x)=x^2+1440x+50$ (chục nghìn đồng). Công ty cũng phải chịu mức thuế phụ thu cho 1 đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) $(0<x<300)$. Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) là bao nhiêu sao cho nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận nhiều nhất theo đúng mức thuế phụ thu đó. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

Trả lời: ……..

Câu 68. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu triệu đồng/tháng để doanh thu là lớn nhất?



Trả lời: ……..

Câu 69. Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?



Trả lời: ……..

Câu 70. Doanh nghiệp A kinh doanh xe máy điện các loại và trong các năm qua đang tập trung bán loại xe X ra thị trường. Chi phí của doanh nghiệp cho mỗi chiếc xe là 30 triệu đồng (gồm chi phí mua vào, lưu kho, quảng cáo,.) và bán ra thị trường với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Để đẩy mạnh lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu cứ giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Từ kết quả nghiên cứu đó, công ty nên bán mỗi chiếc xe với giá bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ……..

Câu 71. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Trả lời: ……..

Câu 72. Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40 đô la/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25$ đô la cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu đô la?

Trả lời: ……..

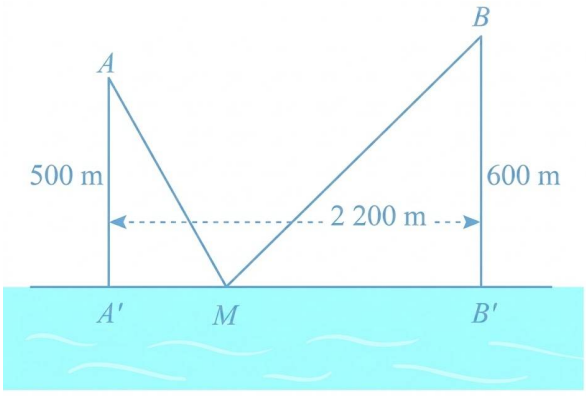
Câu 73. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 16 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 400 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc ti vi mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hàng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần. Nhà sản xuất nên đặt giá bán 1 chiếc tivi bao nhiêu triệu đồng để lợi nhuận là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Câu 74. Nhà xe Quang Hạnh Nha Trang khoán cho hai tài xế Việt và Nam mỗi người lần lượt nhận 32 lít xăng và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu?

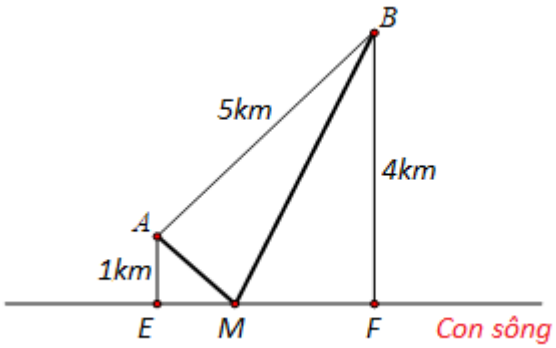
Trả lời: ……..

Câu 75. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA'=500m,\ A'B'=2200m$ (hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Khoảng cách AM bằng bao nhiêu mét?



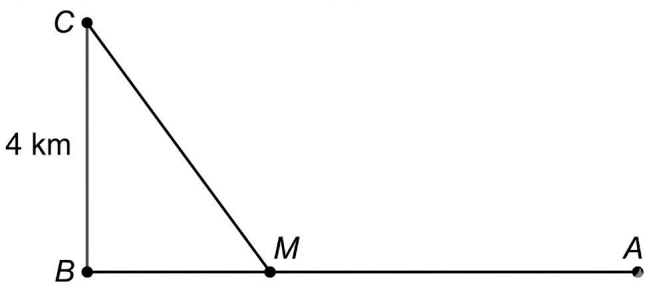
Trả lời: ……..

Câu 76. Anh Bảo Toàn đang ở tháp canh kiểm soát cháy rừng được đặt ở vị trí A, nhìn thấy đám cháy ở vị trí B, cách vị trí A khoảng $5km$. Cách vị trí A và B lần lượt $1km$, $4km$ có một con sông, anh Bảo Toàn cần đi đến vị trí điểm M ở bờ sông để lấy nguồn nước rồi đến vị trí B để dập tắt đám cháy (như hình vẽ). Tính khoảng cách ngắn nhất mà anh Bảo Toàn cần đi để dập tắt đám cháy (kết quả làm tròn đến hàng chục của kilômét).



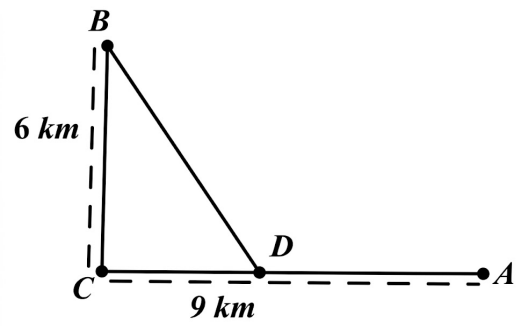
Trả lời: ……..

Câu 77. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) cách điểm B một đoạn bằng bao nhiêu km để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?



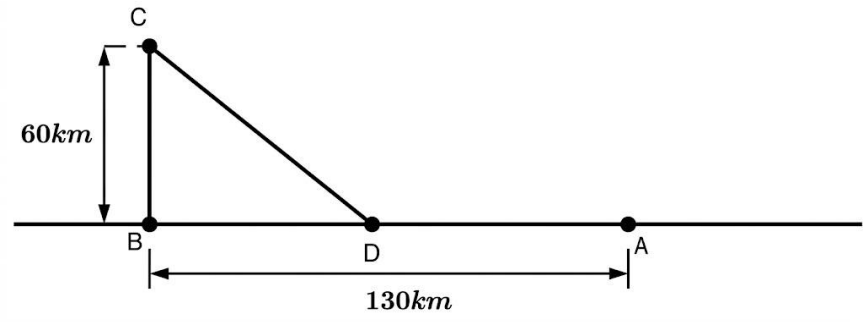
Trả lời: ……..

Câu 78. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD (đơn vị kilômét) để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



Trả lời: ……..

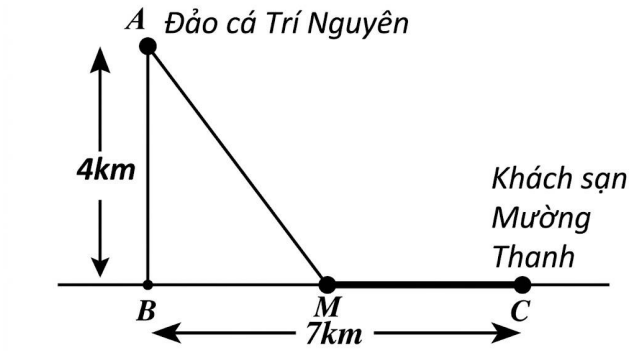
Câu 79. Một kho hàng được đặt tại ví trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB bằng độ dài $CB = 60\,km$ và khoảng cách giữa 2 điểm A, B là $AB = 130\,km$ (như hình vẽ).



Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu kilômét thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?

Trả lời: ……..

Câu 80. Đảo cá Trí Nguyên Nha Trang ở vị trí A cách đường Trần Phú một khoảng $AB = 4(km)$. Trên đường Trần Phú có khách sạn Mường Thanh ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7(km)$ (như hình vẽ).



Bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí Đảo cá Trí Nguyên đến vị trí M trên đường Trần Phú với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe taxi từ M đến khách sạn Mường Thanh với vận tốc $10(km/h)$. Xác định khoảng cách từ M đến khách sạn Mường Thanh để bạn Minh Hiền đi từ Đảo cá Trí Nguyên đến khách sạn Mường Thanh là nhanh nhất (đơn vị kilômét).

Trả lời: ……..

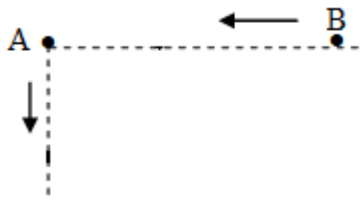
Câu 81. Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sỹ 1km theo đường chim bay và chiến sỹ cách bờ bên kia 100m. Chiến sỹ phải bơi $a\sqrt{2}$ mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 82. Chi phí về nhiên liệu của một tàu hỏa được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của km/h).

Trả lời: ……..

Câu 83. Hai con tàu đang ở hai vị trí A, B cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, tàu thứ nhất ở vị trí A chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu thứ hai ở vị trí B kia chạy về hướng vị trí tàu A (vị trí A lúc đầu của tàu thứ nhất khi chưa khởi hành) với vận tốc 7 hải lý/ giờ (như hình vẽ). Hãy xác định thời điểm (giờ) mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất (kết quả lấy tròn đến phần trăm).

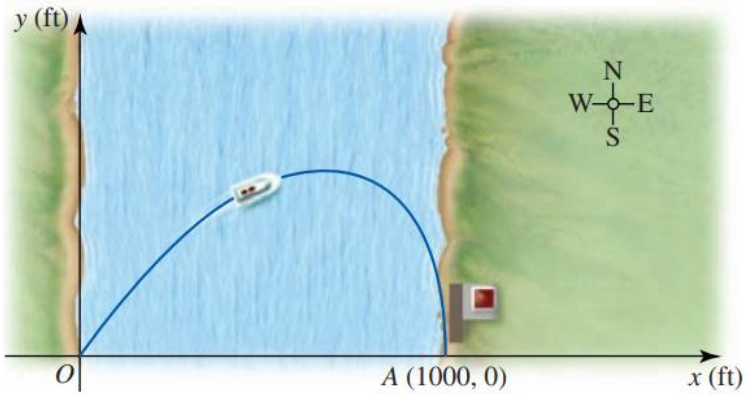


Trả lời: ……..

Câu 84. Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ.

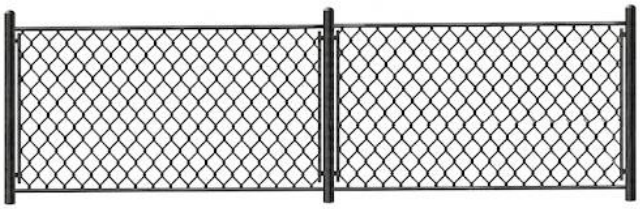
Người ta cho rằng đường đi của thuyền là $y=500\left[\left(\frac{1000-x}{1000}\right)^{3/4}-\left(\frac{1000-x}{1000}\right)^{5/4}\right],\quad 0\le x\le 1000$

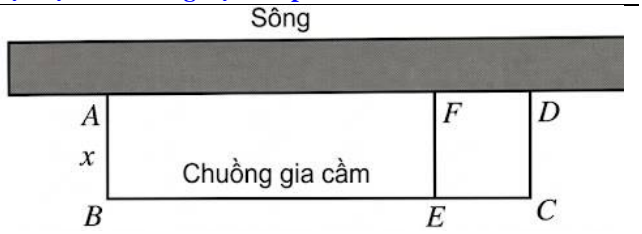
Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



Trả lời: ……..

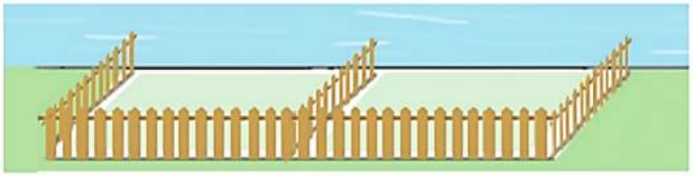
Câu 85. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn $240\,m$ hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu mét vuông?





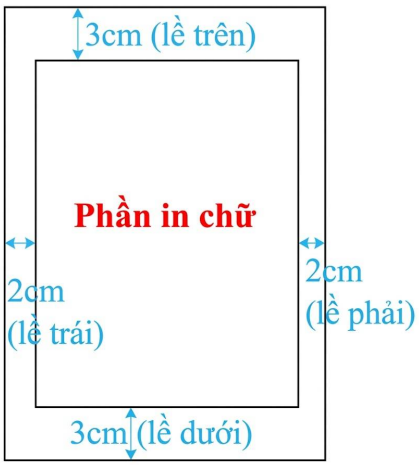
Trả lời: ……..

Câu 86. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (*Hình vẽ*). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất (m^2) của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời: ……..

Câu 87. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ (như hình vẽ). Kích thước tối ưu của trang sách là $a \times b$ (cm) thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất. Tính giá trị $a+b$.



Trả lời: ……..

Câu 88. Bác Nam chia đất cho con trai để người con xây dựng nhà xưởng kinh doanh, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800m$ và xây dựng nhà xưởng kinh doanh sao cho diện tích mặt bằng lớn nhất, khi đó chiều dài hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu mét?



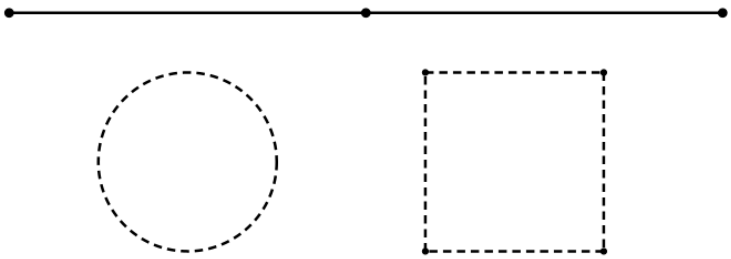
Trả lời: ……..

Câu 89. Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (*xem hình vẽ minh hoạ bên dưới*). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu mét, để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Trả lời: ……..

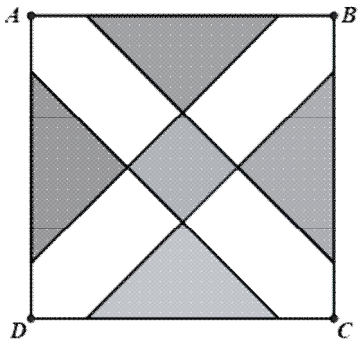
Câu 90. Cắt một đoạn dây dài $30m$ thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 (m^2), đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (m^2) (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

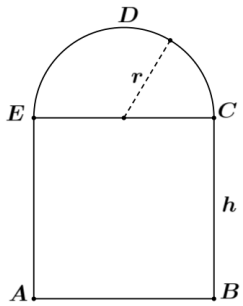
Trả lời: ……..

Câu 91. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Câu 92. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

Câu 93. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $\frac{500}{3}m^3$ Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^3. Nếu biết xác định kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất, chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ……..

Câu 94. Thầy Tiến muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết giá thuê nhân công xây bể là 500000 đồng/m^2, hỏi thầy Tiến cần tốn chi phí thuê công nhân thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



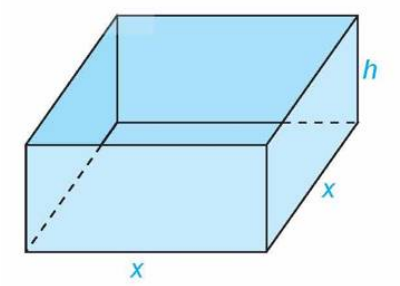
Trả lời: ……..

Câu 95. Ông Việt dự định sử dụng hết $6,7\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Trả lời: ……..

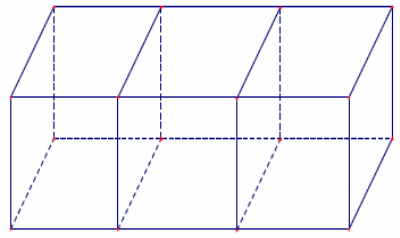
Câu 96. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108\,cm^2$ như hình vẽ.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Câu 97. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152m^2 và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước $a \times b$ (đơn vị là mét và $a < b$) thì tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường), khi đó giá trị $a + 2b$ bằng bao nhiêu?



Trả lời: ……..

Câu 98. Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\,(\text{cm})$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x) = \pi x^2 + \dfrac{20000}{x}\,(\text{cm}^2)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười của mét)?

Trả lời: ……..

Câu 99. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi chứa dầu với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi chiều cao của thùng bằng bao nhiêu mét để tiết kiệm vật liệu nhất?



Trả lời: ……..

Câu 100. Một công ty muốn thiết kế thùng đựng hàng dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp có thể tích là $100dm^3$. Để tiết kiệm vật liệu người ta cần thiết kế thùng sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng nhỏ nhất. Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng nhỏ nhất bằng bao nhiêu decimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……..

BÀI 5
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN THỰC TIỄN

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

• Nếu $s=s(t)$ là **hàm vị trí** của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị **vận tốc** tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian).

Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là **gia tốc** tức thời của vật: $a=v'(t)=s''(t)$

• Nếu $C=C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hóa học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ **phản ứng tức thời** (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất điểm đó tại thời điểm t.

• Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị **tốc độ tăng trưởng** tức thời của quần thể tại thời điểm t.

• Nếu $C=C(x)$ là **hàm chi phí** , tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hóa, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là **chi phí biên**.

Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa tiếp theo, tức là đơn vị hàng hóa thứ $x+1$.

2. Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Quy trình giải một số bài toán tối ưu

• **Bước 1:** Chọn đặt biến x, kèm điền kiện tồn tại x.

• **Bước 2:** Dựa vào giả thiết và các quan hệ bài toán để xác lập hàm số chứa ẩn x.

• **Bước 3:** Dựa vào hàm đã xác lập để giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Chú ý

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x. Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là $R(x)=x.p(x)$ và $R(x)$ được gọi là **hàm doanh thu**. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là **hàm doanh thu biên** và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán thì tổng lợi nhuận là $P(x)=R(x)-C(x)$ và $P(x)$ được gọi là **hàm lợi nhuận**. **Hàm lợi nhuận biên** là đạo hàm $P'(x)$ của **hàm lợi nhuận**.

PHẦN A
TỰ LUẬN PHÂN DẠNG TOÁN

DẠNG 1
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN CHUYỂN ĐỘNG THẲNG

Một vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì:

- $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.
- $a(t) = v'(t) = f''(t)$ là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Bài 1. Một chất điểm chuyển động thẳng, chiều dương hướng theo chiều chuyển động và điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$, $t \geq 0$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t.

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$.

b) Tính vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$

c) Chất điểm tăng tốc và giảm tốc trong khoảng thời gian nào?

d) Thời điểm nào chất điểm có vận tốc đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

a) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 2$ là: $y(2) - y(0) = -2^3 + 6.2^2 = 16(m)$

b) Hàm vận tốc là: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t, \ (t \geq 0)$

Suy ra vận tốc của chất điểm ở thời điểm là $t = 3$: $v(3) = -3.3^2 + 12.3 = 9(m/s)$

Hàm gia tốc là $a(t) = v'(t) = -6t + 12, \ (t \geq 0)$

Suy ra gia tốc của chất điểm ở thời điểm là $t = 3 : a(3) = -6.3 + 12 = -6(m/s^2)$

c) Ta có $v(t) = -3t^2 + 12t, \ (t \geq 0)$

$v'(t) = -6t + 12$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	0	↗	12	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

+ trong khoảng thời gian $0<t<2$ thì chất điểm tăng tốc

+ khi $t>2$ thì chất điểm giảm tốc

d) Từ bảng biến thiên, ta có: $max\left(v(t)\right)=12$ khi $t=2$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $12(m/s)$ tại thời điểm $2(s)$

Chú ý: Để giải câu c và d theo cách khác, ta làm như sau

c)

Chất điểm tăng tốc khi $v'(t)>0\Leftrightarrow -6t+12>0\Leftrightarrow t<2$. Do đó trong khoảng thời gian $0<t<2$ thì chất điểm tăng tốc

Chất điểm giảm tốc khi $v'(t)<0\Leftrightarrow -6t+12<0\Leftrightarrow t>2$. Do đó khi $t>2$ thì chất điểm giảm tốc

d) Ta có

$$v(t)=-3t^2+12t=-3\left(t^2-2.2t+4-4\right)=-3(t-2)^2+12\le 12$$

$$\Rightarrow max\left(v(t)\right)=12 \text{ khi } t=2$$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $12(m/s)$ tại thời điểm $2(s)$

Bài 2. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t)=6t^2-2t^3,\ (t\ge 0)$

a) Sau khi hạt chuyển động, thời điểm nào thì vận tốc của hạt bằng 0?

b) Khi nào hạt chuyển động lên trên và khi nào hạt chuyển động xuống dưới?

c) Hỏi trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

a) Vận tốc của hạt là: $v(t)=s'(t)=12t-6t^2,\ (t\ge 0)$

$$v(t)=0\Leftrightarrow 12t-6t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$$

Do sau khi hạt chuyển động nên $t=0$ loại, nhận $t=2$

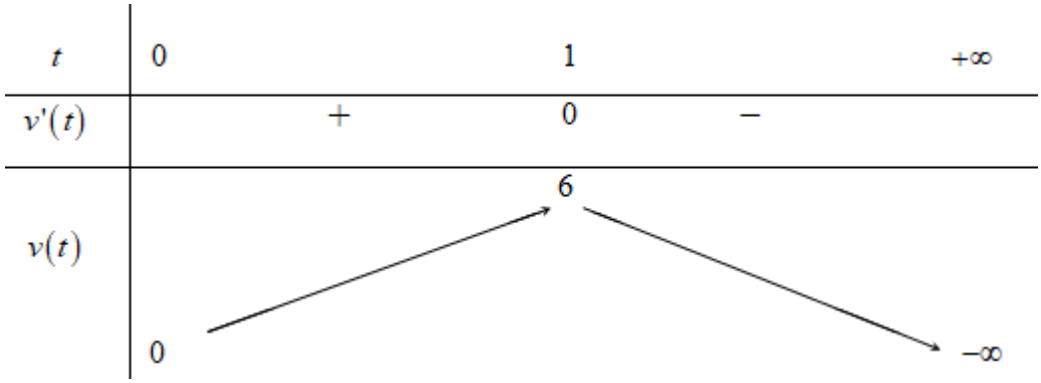
Vậy sau khi hạt chuyển động, thời điểm $t=2$ thì vận tốc của hạt bằng 0.

b) Ta có $v(t)=12t-6t^2,\ (t\ge 0)$

$v'(t)=12-12t$

$v'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có:

+ trong khoảng thời gian $0<t<1$ thì hạt chuyển động lên trên

+ khi $t>1$ thì hạt chuyển động xuống dưới

c) Từ bảng biến thiên, ta có: trong khoảng 6 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động thì $max(v(t))=6(m/s)$ khi $t=1$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng $6(m/s)$ tại thời điểm $1(s)$

Bài 3. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t)=-t^3+6t^2+17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

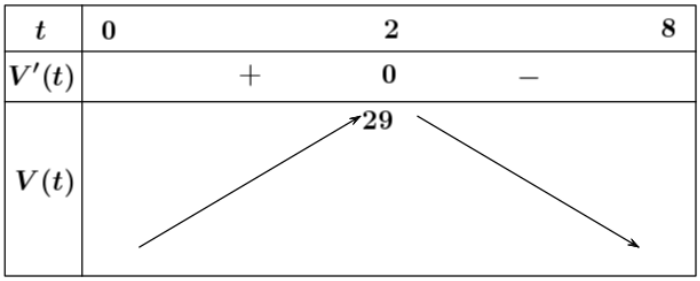
Lời giải

Ta có : $v=s'=-3t^2+12t+17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v=-3t^2+12t+17$ trên khoảng $(0;8)$

Mặt khác: $v'=-6t^2+12=0 \Rightarrow t=2$

Bảng biến thiên:



Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 (m/s).

DẠNG 2
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỐI ƯU DẠNG CÓ HÀM

Bài 1. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là: $C(x)=23000+50x-0,5x^2+0,00175x^3$. Biết hàm chi phí biên là $C'(x)$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x)=50-x+\frac{21}{4000}x^3=\frac{21}{4000}x^3-x+50$

b) $C'(100)=50-100+\frac{21}{4000}100^3=2,5$ (trăm nghìn đồng).

Chi phí biên tại x = 100 là 250000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị hàng hóa tiếp theo (đơn vị hàng hóa thứ 101) là khoảng 250000 đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101 là

C(101) – C(100) = 24752,52675 – 24750 = 2,52675 (trăm nghìn đồng).

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên C'(100) đã tính ở câu b.

Bài 2. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\frac{5000}{1+5e^{-t}},t\ge 0,$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\frac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$. Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

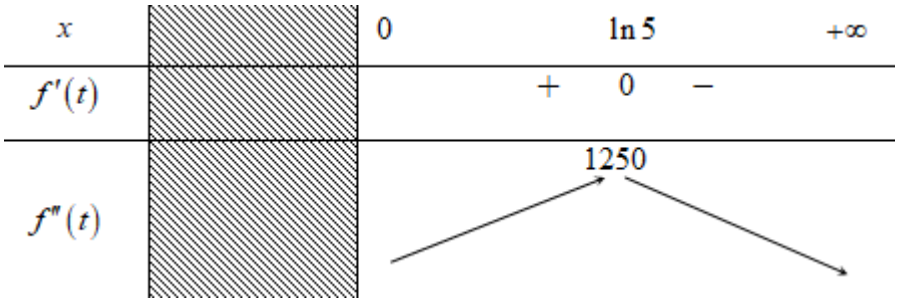
$$f''(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2.\left(-5e^{-t}\right).\left(1+5e^{-t}\right).25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$f''(t)=0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0 \Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow t=\ln 5 \text{ (nhận)}$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:



Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Bài 3. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}$(con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

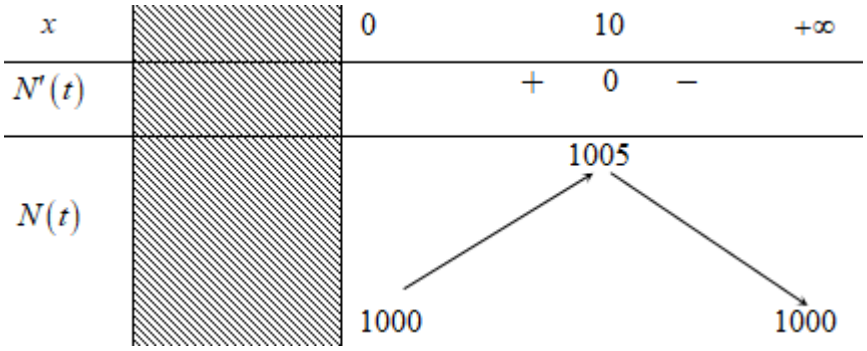
Lời giải

Xét hàm số $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}(t>0)$.

Ta có: $N'(t)=\frac{100.\left(100+t^2\right)-100t.2t}{\left(100+t^2\right)^2}=\frac{100.\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$.

Khi đó, với $t>0$, $N'(t)=0 \Leftrightarrow 100-t^2=0 \Leftrightarrow t^2=100 \Leftrightarrow t=10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:



Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

DẠNG 3
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỐI ƯU DẠNG TRUY HÀM

Bài 1. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p=\dfrac{354}{1+0,01x}$, $x\ge 0$, trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng.

c) Cho biết ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$.

Lời giải

a) Ta có $p=\dfrac{354}{1+0,01x}$, $x\ge 0$

$\Leftrightarrow p(1+0,01x)=345$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{35400}{p}-100$

Đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng là

$x=\dfrac{35400}{240}-100=47,5$

b) $x(p)=\dfrac{35400}{p}-100$

Vì $x\ge 0$ nên $\dfrac{35400}{p}-100\ge 0\Leftrightarrow 0<p\le 354$

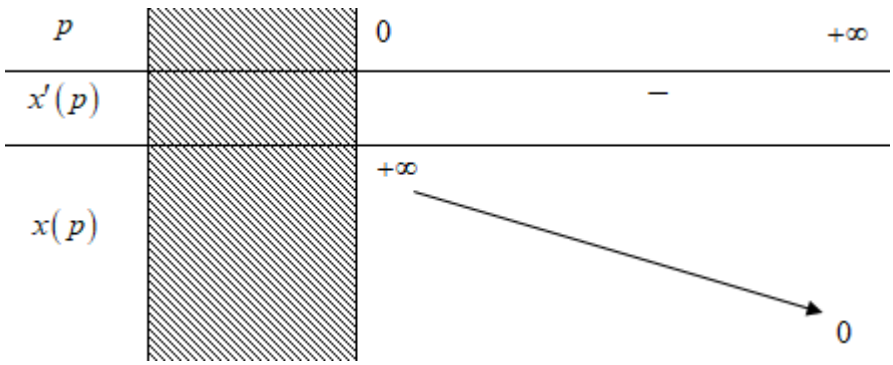
Tập xác định của hàm số $D=(0;354]$

Sự biến thiên

$x'=\dfrac{35400}{p^2}<0,\forall p\in D$. Do đó hàm số luôn nghịch biến với mọi $p\in(0;354)$ và không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim\limits_{p\to 0^+} x=\lim\limits_{p\to 0^+}\left(\dfrac{35400}{p}-100\right)=+\infty$. Do đó $p=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, ta có: Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng.

c) Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$: vì $\lim\limits_{p\to 0^+}\left(\dfrac{35400}{p}-100\right)=+\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

Bài 2. Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C=C(Q)=\dfrac{Q^2}{4}+3Q+400$ trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Với mức sản lượng là bao nhiêu thì chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất? Khi đó chi phí trung bình tối thiểu bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm chi phí trung bình

$$\overline{C}=\overline{C}(Q)=\frac{C}{Q}=\frac{\dfrac{Q^2}{4}+3Q+400}{Q}=\frac{Q}{4}+3+\frac{400}{Q}\ (\text{với } Q>0).$$

Ta có $\overline{C}'(Q)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{400}{Q^2}=\dfrac{Q^2-1600}{4Q^2}=0\Leftrightarrow Q=40$

Vì $\overline{C}''(Q)=\dfrac{800}{Q^2}>0$, nên hàm số $\overline{C}$ đạt cực tiểu tại $Q=40$.

Chi phí trung bình tối thiểu là $\overline{C}(40)=\dfrac{40}{4}+3+\dfrac{400}{40}=23$

Bài 3. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D=656-\dfrac{1}{2}P$ với Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q)=Q^3-77Q^2+1000Q+100$ với C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo bao nhiêu?



Lời giải

Do $Q_D>0\Rightarrow P<1312$

Số tiền thu được khi bán Q_D tấn gạo là $Q_D.P=656P-\dfrac{1}{2}P^2$

Chi phí sản xuất Q_D tấn là

$$C(Q_D)=Q_D^3-77Q_D^2+1000Q_D+100=\left(656-\frac{1}{2}P\right)^3-77\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2+1000\left(656-\frac{1}{2}P\right)+100$$

Suy ra số tiền lãi là :

$$T(P)=Q_D.P-C(Q_D)=656P-\frac{1}{2}P^2-\left(656-\frac{1}{2}P\right)^3+77\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2-1000\left(656-\frac{1}{2}P\right)-100$$

Lợi nhuận lớn nhất khi $T(P)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số :

$$T(P)=656P-\frac{1}{2}P^2-\left(656-\frac{1}{2}P\right)^3+77\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2-1000\left(656-\frac{1}{2}P\right)-100 \text{ với } 0<P<1312$$

$$T'(P)=\frac{3}{2}\left(656-\frac{1}{2}P\right)^2-77\left(656-\frac{1}{2}P\right)+1156-P$$

$$T'(P)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=1208\ (N)\\P=1316\ (L)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

P	0		1208		1312
$T'(P)$		$+$	0	$-$	
$T(P)$	$T(0)$	↗	$T(1208)$	↘	$T(1312)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $T(P)$ đạt giá trị lớn nhất khi $P=1208$

Vậy $Q_D=656-\frac{1}{2}P=52$ tấn gạo

Bài 4. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đạt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (đơn vị: triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=\frac{1}{2}(200+27x)$ (đơn vị: triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm để mỗi tháng thu được lợi nhuận (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng) cao nhất?

Lời giải

Ta có: giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (triệu đồng)

Nên bán x tấn sản phẩm thu được $\left(90-0,01x^2\right)x$ (triệu đồng). Điều kiện $0<x\le 100$

Lợi nhuận hàng tháng của nhà máy A khi sản suất và bán x tấn sản phẩm cho nhà máy B là:

$L(x)=\left(90-0,01x^2\right)x\cdot 90\%-\frac{1}{2}(200+27x)$ (triệu đồng)

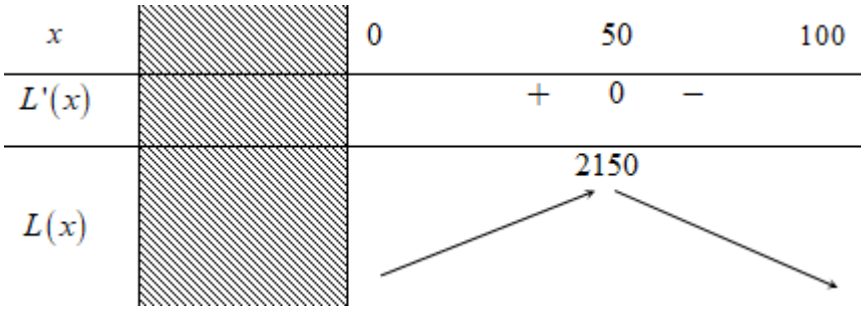
Hay $L(x)=-0,009x^3+67,5x-100$

Xét hàm số $L(x)=-0,009x^3+67,5x-100$ trên nửa khoảng $(0;100]$

$L'(x)=-0,027x^2+67,5$

$L'(x)=0\Leftrightarrow -0,027x^2+67,5=0\Leftrightarrow x^2=2500\Rightarrow x=50$

Bảng biến thiên:



Như vậy nhà máy A cần sản suất và bán 50 tấn sản phẩm cho nhà máy B mỗi tháng để thu được lợi nhuận cao nhất.

Bài 5. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50-0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (*đơn vị tính là triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Lời giải

Doanh thu của nhà máy A khi bán x $(0<x\le 200)$ tấn sản phẩm trong 1 tháng là: $D(x)=x.\left(50-0,0002x^2\right)$.

Chi phí cho x tấn sản phẩm là: $C(x)=150+35x$.

Tiền thuế phải nộp của nhà máy A khi bán x tấn sản phẩm là $T(x)=x.\left(50-0,0002x^2\right).5\%$.

Suy ra lợi nhuận sau thuế của nhà máy A là:

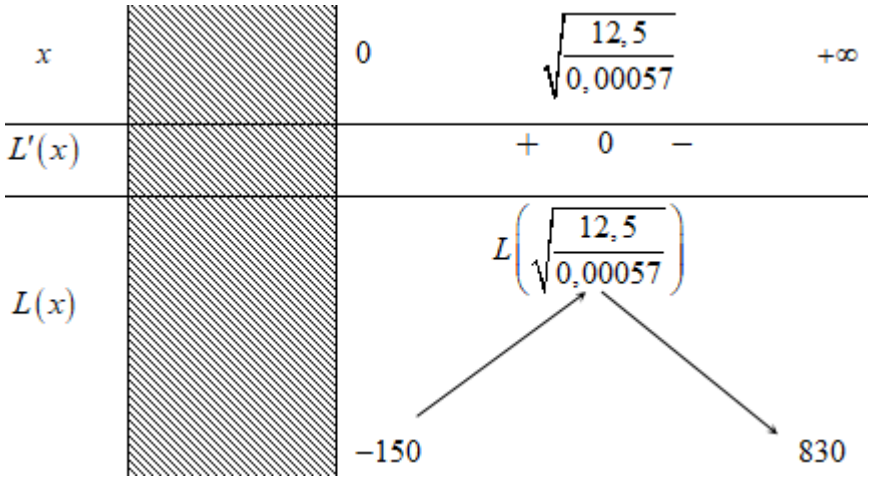
$L(x)=D(x)-C(x)-T(x)=x.\left(50-0,0002x^2\right)-(150+35x)-x.\left(50-0,0002x^2\right).5\%$.

$\Rightarrow L(x)=-0,00019x^3+12,5x-150$.

$L'(x) = -0,00057x^2 + 12,5$.

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,00057x^2 + 12,5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{12,5}{0,00057}}$ (Vì $x > 0$).

Bảng biến thiên



$L\left(\sqrt{\dfrac{12,5}{0,00057}}\right) \approx 1084,06$.

Vậy lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là 1084 triệu đồng

Bài 6. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A $(0 \le x \le 250)$ trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x) = 0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x) = -0,01x^2 + 16x - 25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Lợi nhuận trong một tháng của doanh nghiệp khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A là

$$\begin{aligned} R(x) &= D(x) - C(x) \\ &= \left(-0,01x^2 + 16x - 25\right) - \left(0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30\right) \\ &= -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55 \end{aligned}$$

Xét hàm số $R(x) = -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55$ với $x \in [0;250]$, ta có

$R'(x) = -0,00072x^2 + 0,04x + 11$;

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,00072x^2 + 0,04x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{100\sqrt{130} + 250}{9} \\ x = \dfrac{-100\sqrt{130} + 250}{9} \end{array}\right.$$

Với $x \in [0;250]$ ta được $x = \dfrac{100\sqrt{130} + 250}{9} = 154,463...$

Hàm $R(x)$ liên tục trên $[0;250]$ và ta có

$R(0)=-55$; $R\left(\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}\right)=1236,796...\approx 1237\approx R(154)\approx R(155)$; $R(250)=195$.

Suy ra lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy thu được vào khoảng 1237 (triệu đồng) khi $x=154$ hoặc $x=155$.

Bài 7. Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x\in\mathbb{N}^*$; $1\le x\le 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=-0,01x^2+300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x)=\dfrac{30000}{x}+200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Lời giải

Tổng chi phí sản xuất x sản phẩm là: $C(x)=x.G(x)=x.\left(\dfrac{30000}{x}+200\right)=30000+200x$.

Lợi nhuận $P(x)$ thu được khi bán x sản phẩm là:

$P(x)=F(x)-C(x)=-0,01x^2+100x-30000$.

Để lợi nhuận lớn hơn 100 triệu đồng thì $P(x)>100000\Leftrightarrow -0,01x^2+100x-130000>0$

$\Leftrightarrow 1535,9<x<8464,1$.

Kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{N}^*$; $1\le x\le 4500$.

Suy ra $1536\le x\le 4500$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 1536 sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng.

Bài 8. Trung tâm thương mại Center Nha Trang có 50 gian hàng cho thuê bán hàng. Biết rằng nếu cho thuê mỗi gian hàng với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi gian hàng đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một gian hàng bị bỏ trống.



a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Hỏi thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá gian hàng, với $0<x<50$

Mỗi lần tăng giá thì số gian hàng cho thuê là $50-x$ (căn).

Số tiền thuê một gian hàng sau mỗi lần tăng là: $2000000+50000x$ đồng

Khi đó tổng số tiền cho thuê gian hàng 1 tháng là:

$T(x)=(50-x)(2000000+50000x)=50000\left(-x^2+10x+200\right)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x)=50000\left(-x^2+10x+200\right)$ với $0<x<50$

$T'(x)=50000(10-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 50000(10-2x)=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		50
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	↗	$T(5)$	↘	$T(50)$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

a) Số lần tăng giá gian hàng nằm trong khoảng $(5;50)$ thì tổng doanh thu cho thuê gian hàng của trung tâm thương mại Center sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá gian hàng.

b) Thu nhập cao nhất của trung tâm thương mại Center có thể đạt được trong 1 tháng là: $T(5)=11250000$ (đồng)

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn trong trắc nghiệm:

$$\begin{aligned}T(x)&=50000\left(-x^2+10x+200\right)\\&=50000\left[\left(-x^2+10x-25\right)+225\right]\\&=50000\left[-(x-5)^2+225\right]\le 50000.225=11250000\end{aligned}$$

Vậy $\max T(x)=11250000$ khi $x=5$

Bài 9. Chị Mai xây dựng 32 phòng trọ cho sinh viên trường Đại Học Nha Trang thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000 đồng trên 1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000 đồng trên 1 tháng, thì sẽ có 2 phòng bị bỏ trống.



a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng nào thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Hỏi chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá phòng trọ, với $0<x<16$

Mỗi lần tăng giá thì số phòng trọ cho thuê là $32-2x$ (căn).

Số tiền thuê một phòng trọ sau mỗi lần tăng là: $2000000+200000x$ đồng

Khi đó tổng số tiền cho thuê phòng trọ 1 tháng là:

$T(x)=(32-2x)(2000000+200000x)=400000\left(-x^2+6x+160\right)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x)=400000\left(-x^2+6x+160\right)$ với $0<x<16$

$T'(x)=400000(6-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 400000(6-2x)=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng biến thiên:

x	0		3		16
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	↗	$T(3)$	↘	$T(16)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

a) Số lần tăng giá phòng trọ nằm trong khoảng $(0;3)$ thì tổng doanh thu cho thuê phòng trọ của chị Mai sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá phòng trọ.

b) Để có thu nhập mỗi tháng cao nhất, Chị Mai sẽ cho thuê phòng trọ với giá là:

$2000000+200000x=2000000+200000.3=2600000$ (đồng).

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn trong trắc nghiệm:

$T=400000\left(-x^2+6x+160\right)$

$=400000\left(-x^2+6x-9+169\right)$

$=-400000(x-3)^2+67600000\le 67600000$

Vậy $\max T(x)=67600000$ khi $x=3$

Bài 10. Một cơ sở sản xuất khăn mặt tại Nha Trang đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá chiếc khăn, với $0 < x < 30$

Mỗi lần tăng giá thì số chiếc khăn bán được là $3000-100x$ (chiếc).

Số tiền chiếc khăn sau mỗi lần tăng là: $30000+1000x$ đồng

Chi phí nguyên vật liệu để sản xuất khăn mỗi tháng là $(3000-100x)18000$ đồng

Số tiền thu được mỗi tháng là $(30000+1000x)(3000-100x)$ đồng

Khi đó, lợi nhuận thu được mỗi tháng là:

$T(x)=(30000+1000x)(3000-100x)-(3000-100x)18000=100000\left(-x^2+18x+360\right)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x)=100000\left(-x^2+18x+360\right)$ với $0 < x < 30$

$T'(x)=100000(18-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 100000(18-2x)=0 \Leftrightarrow x=9$

Bảng biến thiên:

x	0		9		30
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	↗	$T(9)$	↘	$T(30)$

Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

Lợi nhuận thu được lớn nhất mỗi tháng là: $T(9)=100000\left(-9^2+18.9+360\right)=44100000$ đồng khi $x=9$

Vậy phải bán mỗi cốc cà phê với giá $30000+1000x=30000+1000.9=39000$ đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$T(x)=100000\left(-x^2+18x+240\right)$$
$$=100000\left[\left(-x^2+18x-81\right)+441\right]$$
$$=100000\left[-(x-9)^2+441\right]\le 100000.441=44100000$$

Vậy $\max T(x)=44100000$ khi $x=9$

Bài 11. Doanh nghiệp tư nhân Thành Đạt – Nha Trang chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp Thành Đạt phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?



Lời giải

Gọi x $(0<x<31$, đơn vị: triệu đồng) là giá bán mới. Khi đó:

Số tiền đã giảm là: $31-x$. Số lượng xe tăng lên là: $200(31-x)$

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: $600+200(31-x)=6800-200x$

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: $(6800-200x)x$

Tiền vốn mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: $(6800-200x).27$

Lợi nhuận mà công ty đạt được sẽ là:

$T(x)=$ Doanh thu – Tiền vốn $=(6800-200x)x-(6800-200x).27=-200x^2+12200x-183600$

Xét hàm số: $L(x)=-200x^2+12200x-183600$ với $0<x<31$

$T'(x)=-400x+12200$

$T'(x)=0\Leftrightarrow x=30,5$

Bảng biến thiên:

x	0		$30,5$		31
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	↗	$T(30,5)$	↘	$T(31)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: lợi nhuật lớn nhất khi $x=30,5$.

Vậy giá bán mới là $30,5$ (triệu đồng)

Bài 12. Mỗi chuyến xe buýt của hãng xe Phương Trang có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi chuyến xe buýt chở bao nhiêu hành khách thì hãng xe Phương Trang thu được số tiền nhiều nhất?



Lời giải

Số tiền thu được là : $f(x)=20x\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2=20\left(\dfrac{x^3}{1600}-\dfrac{3}{20}x^2+9x\right)$(nghìn đồng)

Xét hàm số: $f(x)=20\left(\dfrac{x^3}{1600}-\dfrac{3}{20}x^2+9x\right)$ với $0\le x\le 50$

$$f'(x)=20\left(\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9\right)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=40(N)\\x=120(L)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		40		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	3200	↘	$f(50)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTLN của $f(x)$ là 3200 khi $x=40$

Vậy một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất là 3200 nghìn đồng khi có 40 hành khách.

Bài 13. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $200km$. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v)=cv^3t$ (trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun). Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.



Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-8(km/h)$ với $v>8$

Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $t=\dfrac{200}{v-8}(h)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $E(v)=cv^3.\dfrac{200}{v-8}=200c.\dfrac{v^3}{v-8}(jun)$

Xét hàm số: $E(v)=200c.\dfrac{v^3}{v-8}$ với $v>8$

$$E'(v)=200c.\frac{v^2(2v-24)}{(v-8)^2}$$

$$E'(v)=0\Leftrightarrow v^2(2v-24)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0(L)\\v=12(N)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

v	8		12		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(12)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: Cá phải bơi với vận tốc $12(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

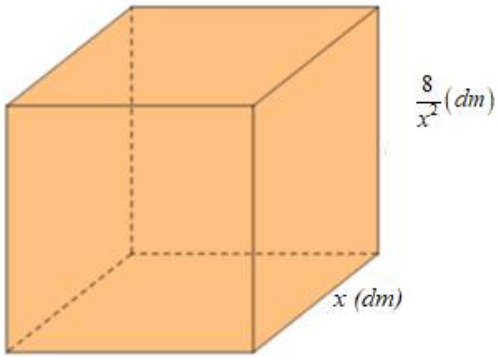
DẠNG 4
CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU LIÊN QUAN HÌNH HỌC PHẲNG VÀ KHÔNG GIAN

Bài 1. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông và thể tích của hộp đứng là $8\ dm^3$.

a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng nào thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp giảm?

b) Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể.

Lời giải



Gọi $x\ (dm)$ là cạnh đáy của hình vuông, với $x>0$

Ta có:

+ Diện tích đáy của hình vuông là: $x^2\ (dm^2)$

+ Chiều cao của hình hộp đứng là: $\frac{8}{x^2}(dm)$

+ Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp là:

$$S=4.x.\frac{8}{x^2}+x^2=\frac{32}{x}+x^2\ (dm^2)$$

Xét hàm số: $S(x)=\frac{32}{x}+x^2$ với $x>0$

$$S'(x)=-\frac{32}{x^2}+2x$$

$$S'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{32}{x^2}+2x=0$$

$$\Leftrightarrow x^3=64$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

Bảng biến thiên:

x	0		4		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	24	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

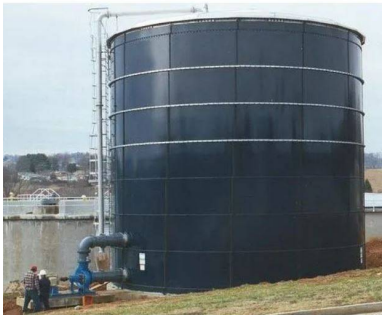
a) Cạnh đáy của hình vuông thuộc khoảng $(0;4)$ thì tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp sẽ giảm.

b) Giá trị nhỏ nhất của $S(x)$ bằng 24 khi $x=4$

Lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất khi tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình hộp đứng không nắp nhỏ nhất.

Do đó, chiều cao của hình hộp đứng là: $\frac{8}{4^2}=\frac{1}{2}(dm)$

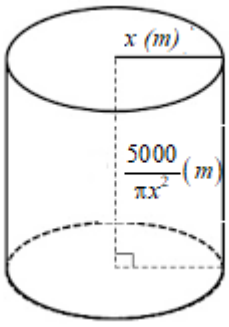
Bài 2. Một công ty xăng dầu cần làm một thùng chứa dạng hình trụ kín, có thể tích $5000m^3$. Vật liệu để làm hai đáy có giá 250000 đồng trên m^2, vật liệu làm phần còn lại có giá 400000 đồng trên m^2.



a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng nào thì tổng chi phí làm thùng chứa sẽ giảm?

b) Tìm chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi $x\,(m)$ là bán kính đáy của hình trụ , với $x>0$

+ Diện tích hai đáy của hình trụ là: $\pi x^2+\pi x^2=2\pi x^2\ (m^2)$

+ Chiều cao của hình trụ là: $\frac{5000}{\pi x^2}(m)$

Suy ra diện tích xung quanh hình trụ là: $2\pi.x.\frac{5000}{\pi x^2}=\frac{10000}{x}\left(m^2\right)$

+ Tổng chi phí vật liệu để làm thùng chứa dạng hình trụ là

$S=400000.\frac{10000}{x}+250000.2\pi x^2=100000\left(\frac{40000}{x}+5\pi x^2\right)$ đồng

Xét hàm số: $S(x)=100000\left(\frac{40000}{x}+5\pi x^2\right)$ với $x>0$

$S'(x)=100000\left(-\frac{40000}{x}+10\pi x\right)$

$S'(x)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{40000}{x}+10\pi x=0$

$\Leftrightarrow x^3=\frac{4000}{\pi}$

$\Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

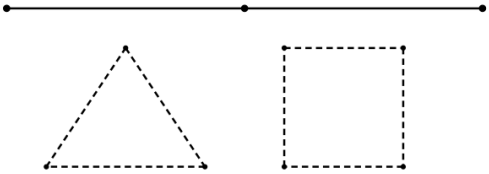
x	0		$10.\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	$S\left(10.\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

a) Bán kính đáy của hình trụ thuộc khoảng $\left(0;10.\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right)$ thì tổng chi phí sẽ giảm.

b) Chiều cao của hình trụ để tổng chi phí nhỏ nhất là: $\frac{5000}{\pi x^2}=\frac{5000}{\pi\left(10.\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right)^2}=\frac{25}{\sqrt[3]{2\pi}}(m)$

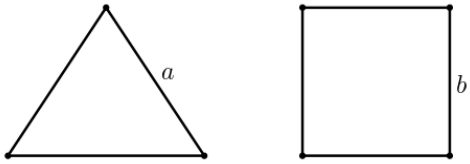
Bài 3. Cắt một đoạn dây dài $60m$ thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1, đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)



Khi đó $x = 3a \Leftrightarrow a = \dfrac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Mặt khác: $60 - x = 4b \Rightarrow b = \dfrac{60-x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1 + S_2 = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\dfrac{60-x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 1080x + 32400}{144}$

Dễ dàng tính được $\left(S_1 + S_2\right)_{\min} = \min f(x) = f\left(\dfrac{540}{9+4\sqrt{3}}\right) \approx 97{,}87\left(\text{m}^2\right)$.

Bài 4. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất? Khi đó, chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $x(m), (0 < x < 50)$ là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $\dfrac{100-2x}{2} = 50 - x(m)$

Nên diện tích của hình chữ nhật là: $x(50-x) = -x^2 + 50x$

Xét hàm số: $f(x) = -x^2 + 50x$ với $0 < x < 50$

$\Rightarrow f'(x) = -2x + 50$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+50=0 \Rightarrow x=25$

Bảng biến thiên:

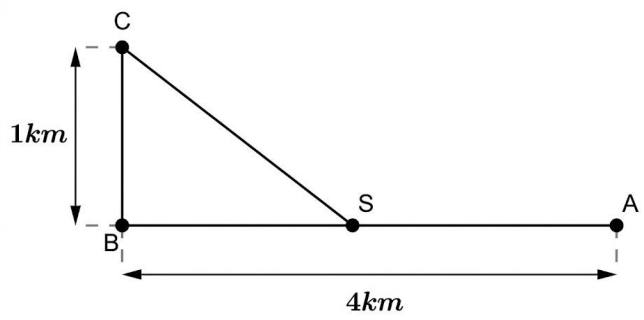
x	0		25		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	625	↘	$f(50)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;50)} f(x)=f(25)=625$

Vậy để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 25

Nhận xét: *Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hình chữ nhật đó là hình vuông.*

Bài 5. Một công ty điện lực cần nối một đường dây điện từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ.



Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km và khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD.

a) Hỏi diểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.

b) Hỏi chi phí mà công ty điện lực cần bỏ ra ít tốn kém nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BS=x$ thì ta được: $SA=4-x,\ CS=\sqrt{x^2+1}$.

Theo đề bài, mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$f(x)=3000.(4-x)+5000.\sqrt{x^2+1}$ với $x\in[0;4]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xácđịnh được vị trí điểm S.

$f'(x) = -3000 + 5000.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -3000 + 5000.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

$\Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2+1} + 5000x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} = 5x$

$\Rightarrow 16x^2 = 9$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{4}(L) \\ x = \dfrac{3}{4}(N) \end{array}\right.$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	17000	↘	16000	↗	$20615,5$

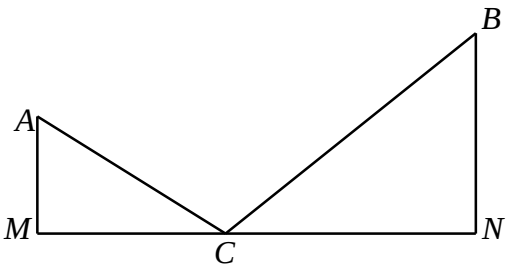
Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 tại $x = \dfrac{3}{4}$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm S nằm cách A một đoạn $SA = 4 - x = 4 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4} km.$

Vậy:

a) điểm S nằm cách A một đoạn $\dfrac{13}{4} km$

b) Chi phí ít nhất mà công ty cần bỏ ra là 16000 USD

Bài 6. Người ta định xây dựng một trạm biến áp 110 Kv tại ô đất C cạnh đường quốc lộ MN để cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B như hình vẽ.



Hai khu công nghiệp A và B cách quốc lộ lần lượt là $AM = 3km$, $BN = 6km$. Biết rằng quốc lộ MN có độ dài $12km$. Hỏi phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A bao nhiêu km để tổng chiều dài đường dây cấp điện cho hai khu công nghiệp A và B là ngắn nhất.

Lời giải

Đặt $MC = x(m) \Rightarrow NC = 12 - x(km)$ với $0 \le x \le 12$

$AC = \sqrt{x^2 + 9}(km)$

$CN = \sqrt{(12-x)^2 + 36}(km)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường *AC* và *CB:*

$f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(12-x)^2 + 36}$ với $x \in [0;12]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm *M*.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{12-x}{\sqrt{(12-x)^2+36}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(12-x)^2+36} = (12-x)\sqrt{x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(12-x)^2+36\right] = (12-x)^2(x^2+9) \\ 0 \le x \le 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6x)^2 = \left[3(12-x)\right]^2 \\ 0 \le x \le 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 3(12-x) \ \ hay \ \ 6x = -3(12-x) \\ 0 \le x \le 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \ \ hay \ \ x = -12 \\ 0 \le x \le 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

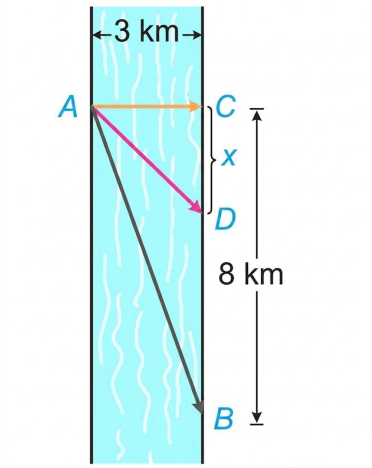
Bảng biến thiên:

x	0		4		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)=15$	$\nearrow$	$f(12)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f(4)=15$ tại $x=4$

Khi đó, phải đặt trạm biến áp cách khu công nghiệp A là: $AC=\sqrt{x^2+9}=\sqrt{4^2+9}=5(km)$

Bài 7. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình vẽ). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Lời giải

Gọi độ dài đoạn CD là x (km, $0\le x\le 8$).

Khi đó độ dài quãng đường AD là $\sqrt{x^2+9}$ (km).

Thời gian đi hết quãng đường AD là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}(h)$.

Độ dài quãng đường BD là $8-x(km)$

Thời gian đi hết quãng đường BD là: $\dfrac{8-x}{8}(h)$

Thời gian người đó đi đến B bằng cách chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B là $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}(h)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}\quad (0\le x\le 8)$

$y'=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$

$y'=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 8\\ x^2=\dfrac{81}{7}\end{cases}$

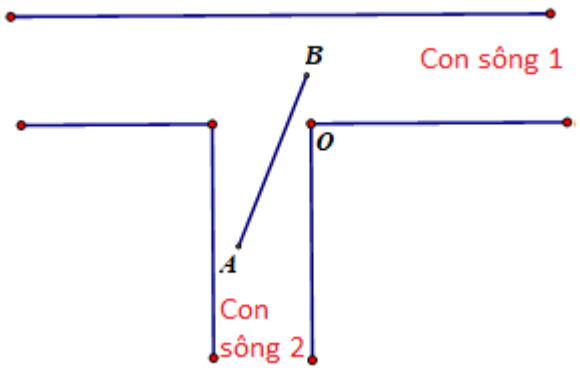
$\Leftrightarrow x=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$

Bảng biến thiên:

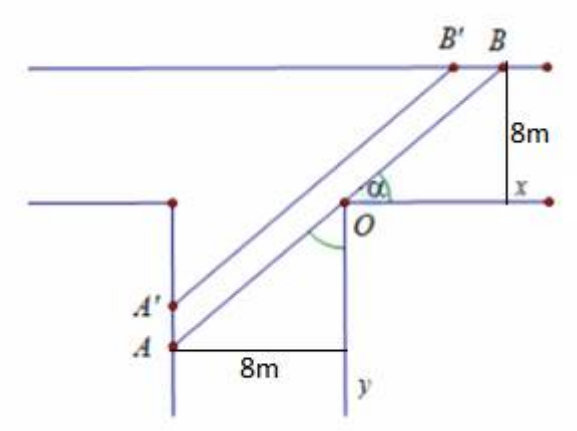
x	0		$\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$		8
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)=\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$y\left(\dfrac{9\sqrt{7}}{7}\right)=1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$y(8)=\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách C một đoạn $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$km thì sẽ đến B sớm nhất.

Bài 8. Một con sông 1 thông với con sông 2, bờ của con sông 1 vuông góc với bờ của con sông 2 (như hình vẽ). Chiều rộng của hai con sông bằng nhau và bằng $8m$. Một thanh gỗ AB, thiết diện nhỏ không đáng kể trôi từ mương 1 sang mương 2. Độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB (Làm tròn kết quả đến phần chục) sao cho AB khi trôi không bị vướng là bao nhiêu?



Lời giải



Để thanh gỗ AB có độ dài lớn nhất thì AB đi qua O như hình vẽ trên.

Đặt $\widehat{BOx}=\alpha \Rightarrow \widehat{BOy}=90^0-\alpha$ với $0^0\le\alpha\le 90^0$

Ta có: $OB=\dfrac{8}{\sin\alpha};OA=\dfrac{8}{\sin\left(90^0-\alpha\right)}=\dfrac{8}{\cos\alpha}$

Mà $AB=OA+OB=\dfrac{8}{\cos\alpha}+\dfrac{8}{\sin\alpha}=8\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$

Xét hàm số: $f\left(\alpha\right)=8\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$ với $0^0\le\alpha\le 90^0$

$$f'\left(\alpha\right)=8\left(\frac{-\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)=8\left(\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha.\sin^2\alpha}\right)$$

$f'\left(\alpha\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos^3\alpha-\sin^3\alpha=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right)$

$\Rightarrow \alpha=45^0$

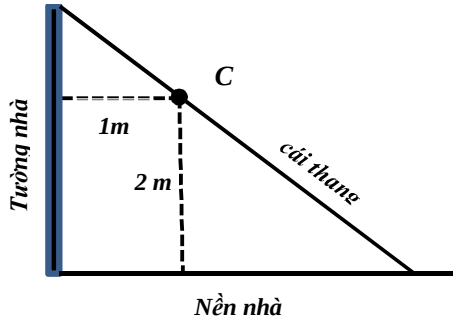
Bảng biến thiên:

α	0		45^0		90^0
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	$f\left(0^0\right)$	↗	$16\sqrt{2}$	↘	$f\left(90^0\right)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị lớn nhất của $f\left(\alpha\right)$ bằng $16\sqrt{2}$ tại $\alpha=45^0$.

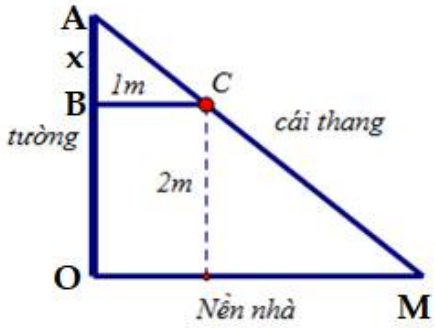
Vậy độ dài lớn nhất của thanh gỗ AB gần bằng $16\sqrt{2}\approx 22,6m$

Bài 9. Thầy Thanh cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Thầy Thanh muốn cái thang phải luôn được đặt qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên).



Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 300.000 đồng/1 mét dài. Hỏi thầy Thanh cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải



Đặt $AB = x$, với $x > 0$

Ta có:

+ $AC = \sqrt{x^2+1}$

+ Theo Thalès thì : $\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AM} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{AM} \Rightarrow AM = \frac{(x+2)\sqrt{x^2+1}}{x}$

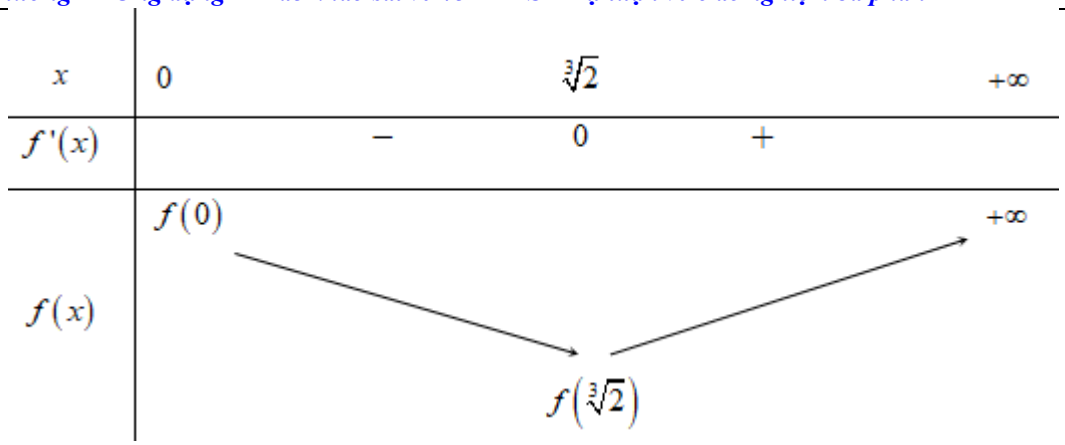
Ta xét hàm $f(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x^2+1}}{x}$ với $x > 0$

$f'(x) = \frac{x^3-2}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^3-2}{x^2\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Bảng biến thiên:



Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có: Chiều dài thang ngắn nhất bằng $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ khi $x=\sqrt[3]{2}$

Do đó $AM_{\min}=f\left(\sqrt[3]{2}\right)\approx 4{,}1619m$, suy ra kinh phí để sản xuất thang ít nhất là: $4{,}1619.300000\approx 1248570$ đồng

Vì kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng nên chi phí là 1249000 đồng

PHẦN B
TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP GỒM BA PHẦN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình: $s(t)=-t^3+6t^2+t+5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

A. $1s$. **B.** $2s$. **C.** $3s$ **D.** $3s$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t+1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong $5s$ đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t=2s$.

Câu 2. Trong 7 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=-t^3+6t^2+15t+1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=4$ giây bằng bao nhiêu m/s?

A. $16(m/s)$. **B.** $20(m/s)$. **C.** $12(m/s)$ **D.** $15(m/s)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t+15$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=4$ giây bằng: $v(4)=15(m/s)$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải.



Giả sử từ vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t được cho bởi công thức $s(t)=t^3-9t^2+15t,(t\ge 0)$, trong đó t tính bằng giây và $S(t)$ tính bằng mét. Biết $(a;b)$ là khoảng thời gian có độ dài lớn nhất mà chất điểm chuyển động sang trái. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=6$. **B.** $P=26$. **C.** $P=10$ **D.** $P=15$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có vận tốc của vật là $v(t)=s'(t)=3t^2-18t+15$.

Vật chuyển động sang trái khi và chỉ khi $v(t)<0\Leftrightarrow 3t^2-18t+15<0\Leftrightarrow t\in(1;5)$.

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$. Suy ra $P=a^2+b^2=1^2+5^2=26$.

Câu 4. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t)=-t^3+6t^2+17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $29m/s$. **B.** $20m/s$. **C.** $32m/s$ **D.** $36m/s$.

Lời giải

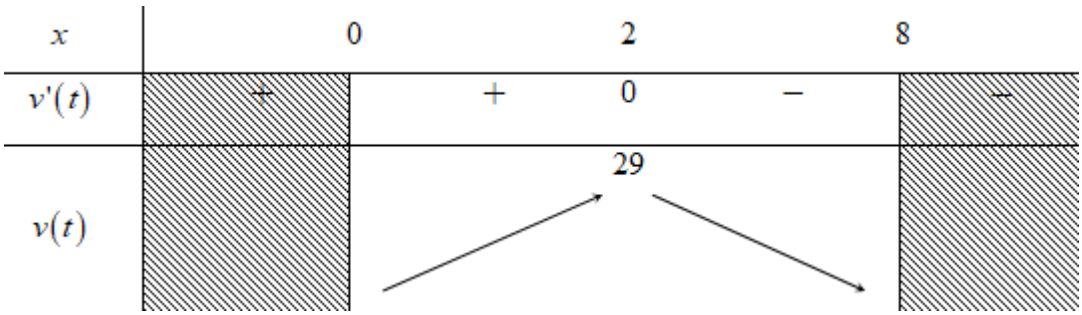
Chọn A.

Có: $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t+17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v(t)=-3t^2+12t+17$ trên Khoảng $(0;8)$

$v'(t)=-6t^2+12$, $v'(t)=0 \Rightarrow t=2$

Bảng biến thiên:



Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: $29m/s$.

Câu 5. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $9m/s$. **B.** $8m/s$. **C.** $89m/s$ **D.** $100m/s$.

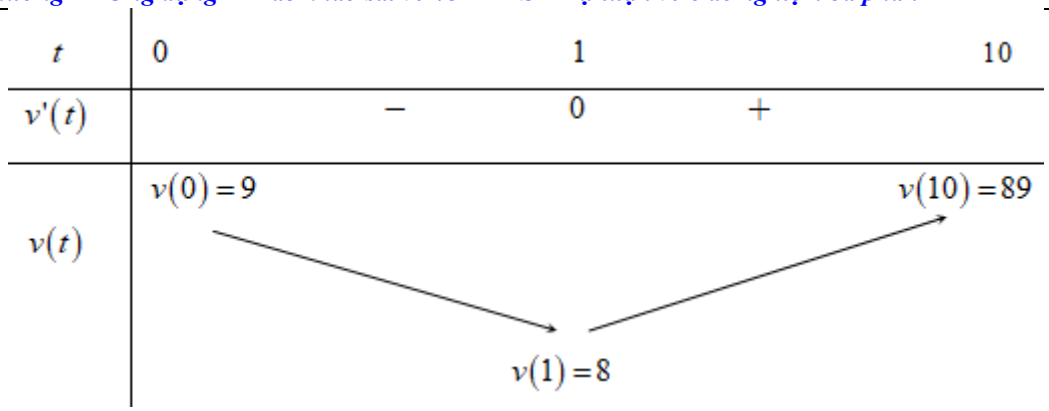
Lời giải

Chọn C.

Ta có $v(t)=s'(t)=t^2-2t+9$, với $0\le t\le 10$

$v'(t)=2t-2 \Rightarrow v'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: vận tốc lớn nhất là $89(m/s)$.

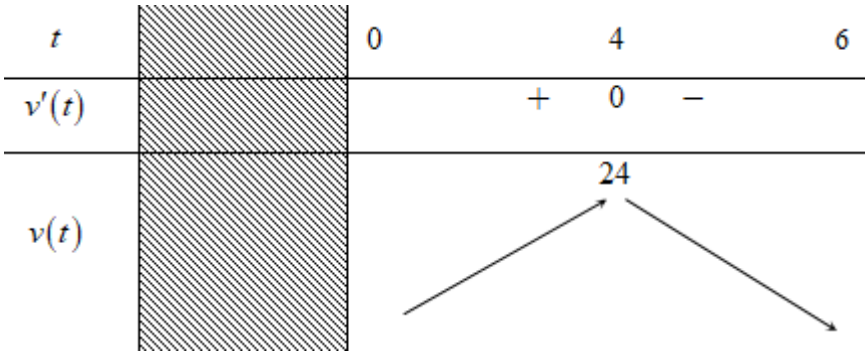
Câu 6. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t)=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $t=6s$. **B.** $t=5s$. **C.** $t=4s$. **D.** $t=3s$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $v(t)=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t$; $v'(t)=-3t+12=0\Leftrightarrow t=4$ và có bảng biến thiên



Vậy $\max v(t)=24(m/s)$ khi $t=4$.

Câu 7. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quảng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $s(t)=6t^2-t^3,(t>0)$. Thời điểm t (giây) nào mà tại đó gia tốc của tàu bằng 0 ?

A. $t=1s$. **B.** $t=2s$. **C.** $t=3s$. **D.** $t=4s$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vận tốc của đoàn tàu là: $v(t)=s'=12t-3t^2,(t>0)$

Gia tốc tốc của đoàn tàu là: $a(t)=v'(t)=12-6t$

$a(t)=0\Leftrightarrow 12-6t=0\Leftrightarrow t=2$

Câu 8. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu giây?

A. $t=2$. **B.** $t=1$. **C.** $t=3$. **D.** $t=4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

Ta có $S'(t)=\left(1+3t^2-t^3\right)'=6t-3t^2=-3\left(t^2-2t\right)=3-3(t-1)^2\le 3,\forall t\in\mathbb{R}$

$\max\limits_{\mathbb{R}} S'(t)=3$ khi $t-1=0\Leftrightarrow t=1$.

Câu 9. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là $32,5$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t)=32,5t-4,9t^2$. Tính vận tốc của vật tại thời điểm 3 giây.

A. $53,4\,m/s$. **B.** $6,2\,m/s$. **C.** $3,1m/s$ **D.** $23,5\,m/s$.

Lời giải

Chọn C.

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật sau t giây là $v(t)=h'(t)=32,5-9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3)=32,5-9,8.3=3,1$ (m/s).

Câu 10. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t)=e^{t^2+3}+2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T=m+n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

A. $T=10$. **B.** $T=14$. **C.** $T=4$ **D.** $T=20$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $v(t)=s'(t)=2te^{t^2+3}+2e^{3t+1}+6te^{3t+1}\Rightarrow v(1)=2e^4+2e^4+6e^4=10e^4$ (km/s)

Vậy $\begin{cases}m=10\\n=4\end{cases}\Rightarrow T=m+n=10+4=14$

Câu 11. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t)=2t^2+t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t=4$ s.

A. $18(A)$. **B.** $12(A)$. **C.** $20(A)$ **D.** $17(A)$.

Lời giải

Chọn D.

Cường độ dòng điện tại thời điểm $t=4\text{s}$ là $Q'(t)=I(t)=4t+1\Rightarrow t(4)=17(A)$

Câu 12. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó: $n=\dfrac{t^3}{3}-6t^2+32t\ (0\le t\le 12)$. Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa?

A. $t=4$ (năm). **B.** $t=6$ (năm). **C.** $t=8$ (năm). **D.** $t=12$ (năm).

Lời giải

Chọn D.

Đạo hàm $n'(t)=0$, ta có $n'(t)=t^2-12t+32=0\Leftrightarrow(t-4)(t-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=8.\end{array}\right.$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t=0,t=4,t=8$ hoặc $t=12$:

$n(0)=\dfrac{0^3}{3}-6\left(0^2\right)+32(0)=0$

$n(4)=\dfrac{4^3}{3}-6\left(4^2\right)+32(4)=\dfrac{160}{3}$

$n(8)=\dfrac{8^3}{3}-6\left(8^2\right)+32(8)=\dfrac{128}{3}$

$n(12)=\dfrac{12^3}{3}-6\left(12^2\right)+32(12)=\dfrac{288}{3}=96$

Do đó n đạt cực đại khi $t=12$ (năm).

Câu 13. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất.

A. $\sqrt{5}(km/h)$. **B.** $\sqrt{7}(km/h)$. **C.** $2(km/h)$ **D.** $3(km/h)$.

Lời giải

Chọn A.

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v>0$ và $\dfrac{5}{v}>0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $v+\dfrac{5}{v}\ge 2\sqrt{5}\Rightarrow v+\dfrac{5}{v}+2\ge 2\sqrt{5}+2$

$\Rightarrow\dfrac{386}{v+\dfrac{5}{v}+2}\le\dfrac{386}{2\sqrt{5}+2}\Rightarrow f(v)=\dfrac{386v}{v^2+2v+5}\le\dfrac{386}{2\sqrt{5}+2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v=\dfrac{5}{v}\Leftrightarrow v^2=5\Leftrightarrow v=\sqrt{5}$ (vì $v>0$)

Vậy vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là $\sqrt{5}$ km/h thì lưu lượng xe là lớn nhất.

Câu 14. Người ta ước tính được chi phí tiền xăng C (nghìn đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình $v\,(km/h)$ theo công thức: $C(v)=\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\,(0<v\le 120)$. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình thấp nhất là bao nhiêu km/h để số tiền xăng không vượt quá 500 nghìn đồng?

A. $120\,km/h$. **B.** $80\,km/h$. **C.** $40\,km/h$ **D.** $30\,km/h$.

Lời giải

Chọn C.

Vì số tiền xăng không vượt quá 500 nghìn đồng nên: $\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\le 500$

Nhân cả hai vế của bất phương trình với $2v$, ta được bất phương trình sau:

$32000+5v^2\le 1000v$ (vì $v>0\Rightarrow 2v>0$)

$\Rightarrow v^2-200v+6400\le 0\Rightarrow 40\le v\le 160$

Mà $0<v\le 120\Rightarrow 40\le v\le 120$

Vậy tốc độ trung bình thấp nhất để số tiền xăng không vượt quá 500 nghìn đồng là $40\,km/h$

Câu 15. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v(km/h) theo công thức: $C(v)=\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\ (0<v\le 120)$. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

A. $120\,km/h$. **B.** $80\,km/h$. **C.** $60\,km/h$ **D.** $100\,km/h$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=(0;120]$.

Đạo hàm $C'(v)=-\dfrac{16000}{v^2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}=0\Leftrightarrow v=-80$ (loại) hoặc $v=80$.

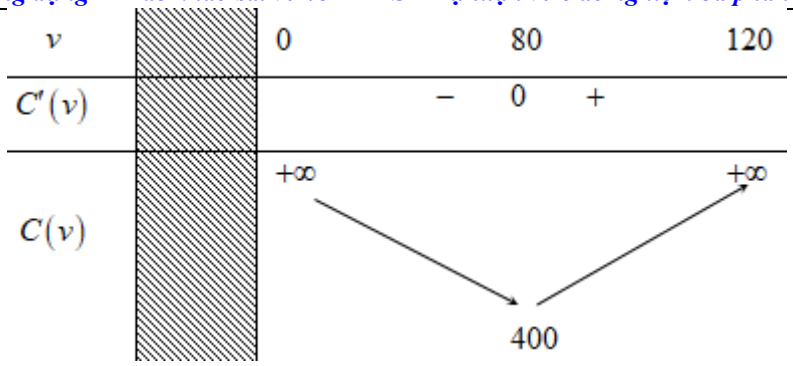
Trên khoảng $(0;80), C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80;120), C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80, C_{CT}=C(80)=400$.

Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim\limits_{v\to 0^+}C(v)=\lim\limits_{v\to 0^+}\left(\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\right)=+\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 16. Lợi nhuận thu được P của 1 công ty khi dùng số tiền x chi cho quảng cáo được cho bởi công thức: $P(x)=\dfrac{-x^3}{10}+6x^2+200$, $x\ge 0$, ở đây các số tiền được tính bằng đơn vị nghìn USD. Hỏi công ty thu được lợi nhuận tối đa là bao nhiêu nghìn USD khi quảng cáo?

A. 200 nghìn USD. **B.** 40 nghìn USD. **C.** 3400 nghìn USD. **D.** 2500 nghìn USD.

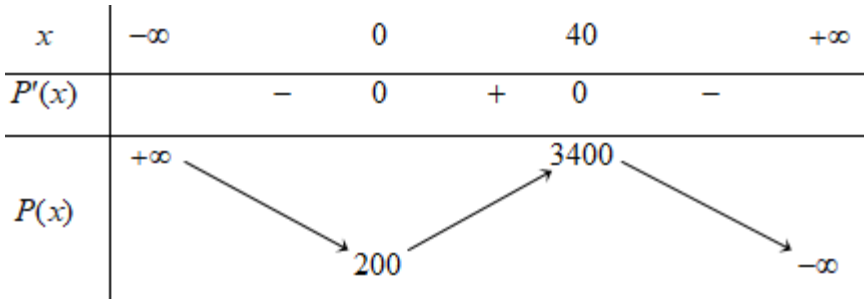
Lời giải

Chọn C.

Ta có $P'(x)=-\dfrac{3x^2}{10}+12x$.

$$P'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{3x^2}{10}+12x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=40\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Vậy $\max\limits_{[0;+\infty)} P(x)=P(40)=3400$.

Vậy công ty thu lợi nhận tối đa là 3400 nghìn USD.

Câu 17. Tại một nhà máy, khi sản xuất x tạ sản phẩm $(x>0)$ mỗi ngày thì chi phí trung bình trên mỗi tạ sản phẩm được tính bởi công thức: $\overline{C}(x)=\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{8}{x}$ (triệu đồng/tạ). Tính chi phí trung bình thấp nhất (tính theo triệu đồng/tạ) mà nhà máy có thể đạt được trong ngày.

A. 6,5 triệu đồng/tạ. **B.** 7,5 triệu đồng/tạ. **C.** 6 triệu đồng/tạ. **D.** 7 triệu đồng/tạ.

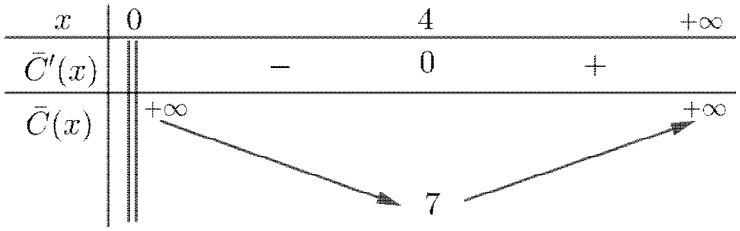
Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overline{C}'(x)=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}\ (x>0)$

$\overline{C}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=4\,(\text{do } x>0)$.

Bảng biến thiên



Vậy chi phí trung bình thấp nhất là 7 triệu đồng/tạ.

Câu 18. Một nhà máy dự định sản xuất không quá 900 sản phẩm. Nếu nhà máy sản xuất x sản phẩm $(1\le x\le 900)$ thì lợi nhuận nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $f(x)=-x^3+900x^2+56700x+450000$ (đồng). Nhà máy cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất ?

A. 900 sản phẩm. **B.** 630 sản phẩm. **C.** 800 sản phẩm. **D.** 600 sản phẩm.

Lời giải

Chọn B.

Hàm lợi nhuận khi bán hết x sản phẩm là

$f(x)=-x^3+900x^2+56700x+450000$, $(1\le x\le 900)$

$f'(x)=-3x^2+1800x+56700$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=630\in[0;900]\\x=-30\notin[0;900]\end{array}\right.$

$f(0)=450000$

$f(630)=142929000$

$f(900)=5107500$

Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất khi nhà máy sản xuất 630 sản phẩm.

Câu 19. Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x)=-x^2+30x+6$ $(0\le x\le 30)$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ty có thể bán sau đợt quảng cáo?

A. 30 lô hàng. **B.** 15 lô hàng. **C.** 180 lô hàng. **D.** 231 lô hàng.

Lời giải

Chọn D.

Với $0\le x\le 30$

Ta có: $N(x)=-x^2+30x+6\Rightarrow N'(x)=-2x+30$

$\Rightarrow N'(x)=0 \Leftrightarrow x=15$ (nhận)

Đồng thời, ta cũng có

$$\begin{cases} N(0)=6 \\ N(15)=231 \\ N(30)=6 \end{cases} \Rightarrow \max_{x\in[0;30]} N(x)=231 \Leftrightarrow x=15$$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 20. Giả sử số lượng của một quần thể nấm X tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t)=120\mathrm{e}^{0,15t}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X là bao nhiêu tế bào/giờ ?

A. 18 tế bào/giờ. **B.** 20 tế bào/giờ. **C.** 14 tế bào/giờ. **D.** 17 tế bào/giờ.

Lời giải

Chọn A.

Tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm t là: $P'(t)=120.0,15.\mathrm{e}^{0,15t}=18\mathrm{e}^{0,15t}$.

Do đó, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm $t=0$ là $P'(0)=18$ tế bào/giờ.

Câu 21. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. 0,5 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 1,5 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Chọn B.

Xét $P'(t)=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+t+4\right)^2}=\dfrac{(t-1)(-t-3)}{\left(t^2+t+4\right)^2}$.

$P'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t=1$ và $P'(t)<0, \forall t\in(1;+\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 22. Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t)=100.e^{0,012t}, 0<t\le 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/ năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

A. năm 2055. **B.** năm 2056. **C.** năm 2065. **D.** năm 2066.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định: $D=(0;50]$.

Đạo hàm $N'(t)=1,2e^{0,012t}=2\Rightarrow t=\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{1,2}\right)}{0,012}\approx 42,57$

Vào năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

Câu 23. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $17,5$ miligam. **B.** 15 miligam. **C.** 10 miligam. **D.** 9 miligam.

Lời giải

Chọn C.

Đk: $x\in[0;15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x)=0,035\left[2x(15-x)-x^2\right]=0,105x(10-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=10\end{array}\right.$.

$G(0)=0$; $G(10)=\dfrac{35}{2}$; $G(15)=0$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	$\dfrac{35}{2}$	↘	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam.

Câu 24. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn . Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm?

A. năm 2027. **B.** năm 2037. **C.** năm 2040. **D.** năm 2041.

Lời giải

Chọn B.

Biểu thức tốc độ tăng dân số của thị trấn là: $f'(t)=\dfrac{120}{(t+5)^2}$

Tốc độ tăng dân số là $0,075\Rightarrow\dfrac{120}{(t+5)^2}=0,075\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=35\\t=-45(L)\end{array}\right.$

Vậy vào năm 2037 thì tốc độ tăng dân số là 0,075 nghìn người/năm.

Câu 25. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm Đèo Cả (Khánh Hoà – Phú Yên) được cho bởi công thức $f(v)=\dfrac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$ (xe/giây), trong đó $v(km/h)$ là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính lưu lượng xe là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8 xe/giây. **B.** 9 xe/giây. **C.** 10 xe/giây. **D.** 11 xe/giây.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f'(v)=\dfrac{290,4\left(-0,36v^2+264\right)}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2}$ với $v>0$.

$f'(v)=0\Leftrightarrow v=\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}$

Khi đó $\underset{v\in(0;+\infty)}{Max}\, f(v)=f\left(\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}\right)\approx 9$ (xe/giây)

Câu 26. Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t)=\dfrac{1}{50}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+36t-270$ (hồ sơ) với $1\le t\le 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C.

$S'(t)=\dfrac{3}{50}t^2-3t+36$; $S'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=20\\t=30\end{array}\right.$.

x	1		20		30
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$S(20)$	↘	

Vậy ngày thứ 20 có số lượng hồ sơ nhiều nhất.

Câu 27. Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t)=\dfrac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}$, $(0\le t\le 6)$ trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?

A. 1 giờ. **B.** 1,5 giờ. **C.** 2 giờ. **D.** 2,21 giờ.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{6-3t}{2e^{\frac{t}{2}}}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 6-3t=0\Leftrightarrow t=2$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;6]$:

t	0		2		6
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	$f(2)$	↘	

Vậy sau 2 giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất.

Câu 28. Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức $C(t)=\dfrac{3t}{27+t^3}$ với $t\geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

A. 1,42 giờ. **B.** 1,85 giờ. **C.** 2,05 giờ. **D.** 2,38 giờ.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $C'(t)=\dfrac{3\left(27+t^3\right)-3t.3t^2}{\left(27+t^3\right)^2}=\dfrac{81-6t^3}{\left(27+t^3\right)^2}$.

$\begin{cases}C'(t)=0\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$C'(t)$		+	0	−	
$C(t)$	0	↗	$\frac{2}{9\sqrt[3]{2}}$	↘	0

Do đó ở thời điểm $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2,38$ giờ thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất.

Câu 29. Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 \left(m^3\right).$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ C)

A. $4°C$. **B.** $5°C$. **C.** $6°C$. **D.** $7°C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có đạo hàm của thể tích:

$$V'(t) = -0,06424 + 2.0,0085043t - 3 \cdot 0,0000679t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 79,53138 \notin \left(0^\circ;30^\circ\right) \\ t \approx 3,9665. \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

t	0		$3,9665$		30
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng $4°C$.

Câu 30. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$, $(0 \le t \le 10)$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là:

A. giảm $\frac{250}{169}$. **B.** tăng $\frac{250}{169}$. **C.** giảm $\frac{170}{169}$. **D.** tăng $\frac{170}{169}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}$, $(0 \le t \le 10)$

Suy ra tốc độ thay đổi của huyết áp sau t giây là: $P'(t) = -\frac{200t}{\left(t^2 + 1\right)^2}$, $(0 \le t \le 10)$

Tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây là : $P'(5) = -\dfrac{250}{169}$

Vậy tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim là giảm $\dfrac{250}{169}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Bộ phận sản xuất của một công ty xác định chi phí để sản xuất x sản phẩm được cho bởi biểu thức $T(x)=x^2+20x+4000$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi sản phẩm là 150 nghìn đồng.

a) Doanh thu khi bán được x sản phẩm là $\dfrac{150}{x}$ (nghìn đồng).

b) Lợi nhuận khi bán x sản phẩm là $x^2-130x+4000$ (nghìn đồng)

c) Để công ty có lãi thì $x\in(50;80)$.

d) Nếu x sản phẩm đều được bán hết thì lợi nhuận lớn nhất mà công ty thu được là 215 nghìn đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Doanh thu khi bán được x sản phẩm là $150x$ (nghìn đồng).

b) Lợi nhuận khi bán x sản phẩm là:

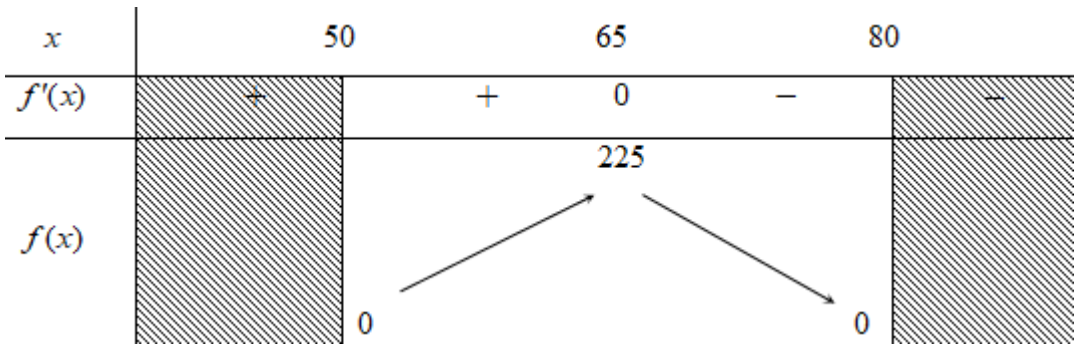
$f(x)=150x-\left(x^2+2x+4000\right)=-x^2+130x-4000$ (nghìn đồng)

c) Để công ty có lãi thì $-x^2+130x-4000>0 \Leftrightarrow 50<x<80$

d) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^2+130x-4000$ với $x\in(50;80)$

Ta có: $f'(x)=-2x+130$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=65$

Bảng biến thiên:



Do đó $\max f(x)=\max\limits_{x\in(50;80)} f(x)=f(65)=225$

Vậy lợi nhuận lớn nhất công ty thu được là 225 nghìn đồng.

Câu 32. Một công ty sản xuất giày dép ước tính rằng tổng chi phí để sản xuất và bán hết q đôi giày mỗi ngày là $C(q)=0,01q^3-0,6q^2+50q+2000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi đôi giày được xác định bởi hàm $h(q)=600-q$ (nghìn đồng). Biết rằng số giày của công ty sản xuất mỗi ngày đều được bán hết.

a) Chi phí sản xuất 50 đôi giày là: 42500 (nghìn đồng)

b) Lợi nhuận thu được khi sản xuất và bán hết 50 đôi giày là 23250 (nghìn đồng).

c) Lợi nhuận công ty đó thu được khi sản xuất và bán hết q đôi giày mỗi ngày là $-0.01q^3-0,4q^2+550q-2000$ (nghìn đồng).

c) Công ty sản xuất và bán hết 122 đôi giày mỗi ngày thì thu lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) b) Chi phí sản xuất 50 đôi giày là: $C(50)=4250$ (nghìn đồng)

Tổng doanh thu khi bán 50 đôi giày là: $50.h(50)=50(600-50)=27500$ (nghìn đồng)

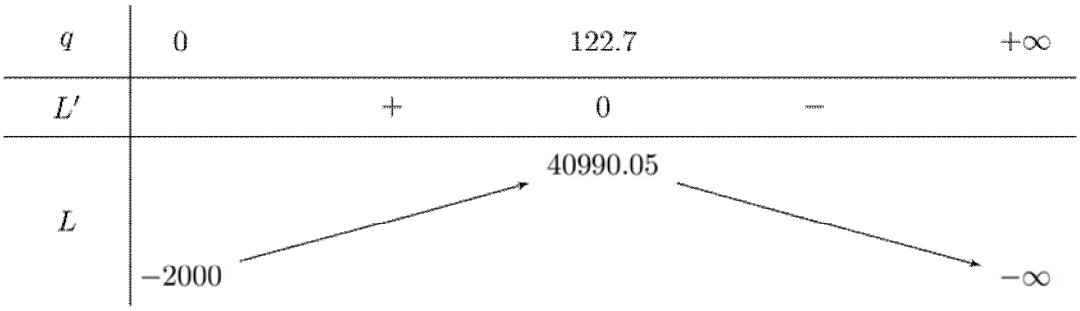
Lợi nhuận thu được là: $27500-4250=23250$ (nghìn đồng).

c) d) Lợi nhuận công ty đó thu được khi sản xuất và bán hết q đôi giày mỗi ngày là

$L=q(600-q)-(0,01q^3-0,6q^2+50q+2000)=-0.01q^3-0,4q^2+550q-2000$ (với $q>0$)

Xét $L'=-0,03q^2-0,8q+550=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}q=122.7(TM)\\q=-149,3(L).\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Vậy để thu được lợi nhuận là lớn nhất thì cần sản xuất 123 đôi giày.

Câu 33. Quảng cáo là hình thức tuyên truyền được trả phí hoặc không để thực hiện việc giới thiệu thông tin về sản phẩm, dịch vụ, công ty hay ý tưởng, quảng cáo là hoạt động truyền thông phi trực tiếp giữa người với người mà trong đó người muốn truyền thông phải trả tiền cho các phương tiện truyền thông đại chúng để đưa thông tin đến thuyết phục hay tác động đến người nhận thông tin. Khảo sát tại một công ty A cho thấy nếu chi x triệu đồng để quảng cáo một loại sản phẩm thì số sản phẩm công ty A bán được là $S(x)=-2x^3+27x^2+216x+150$ với $x\in[0;15]$.

a) $S'(x)=-6x^2+54x+216.$

b) Nếu công ty A chi 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm công ty A bán được đạt tối đa bằng 3131 triệu đồng.

c) Nếu không chi cho quảng cáo thì số lượng sản phẩm công ty A bán được là 391 sản phẩm.

d) Nếu công ty A chi từ 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm bán được sẽ tăng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Xét $S(x)=-2x^3+27x^2+216x+150$, ta có $S'(x)=-6x^2+54x+216.$

b) Xét hàm số $S(x)=-2x^3+27x^2+216x+150$ với $x\in[11;12]$

$S'(x)=-6x^2+54x+216$

$S'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12\ \ (tm)\\ x=-3\ (loai)\end{array}\right.$

x	11		12
y'		+	0
y	3131	↗	3174

Ta có: $S(11)=3131;\ S(12)=3174$

Do đó nếu công ty A chi 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm công ty A bán được đạt tối đa bằng 3174 sản phẩm.

c) Nếu không chi tiền cho quảng cáo thì số sản phẩm công ty A bán được là $S(0)=150.$

d) Nếu công ty A chi từ 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản tăng.

Câu 34. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t)=40\log_3(2t+1)+12$ (đơn vị: centimet, $0\le t\le 18$). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t)=3^{\frac{2t-17}{t-8}}-3$ (đơn vị: centimet, $9\le t\le 18$).



a) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 80 cm.

c) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Ta có: $h(t)=40\log_3(2t+1)+12 \Rightarrow h'(t)=40.\dfrac{(2t+1)'}{(2t+1)\ln 3}=\dfrac{80}{(2t+1)\ln 3}$.

Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 là

$h'(7)=\dfrac{80}{(2.7+1)\ln 3}\approx 4{,}85$ (cm/tuần).

b) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là

$h(4)=40\log_3(2.4+1)+12=92$ cm.

c) Ta có $h'(t)=\dfrac{80}{(2t+1)\ln 3}>0$, $0\le t\le 18$.

Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái tức tuần thứ $t=13$, đường kính trái cà chua là

$d(13)=3^{\frac{2.13-17}{13-8}}-3\approx 4{,}22<12$ cm.

Vậy sau 4 tuần,kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

Câu 35. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B**.** Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là x (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0{,}001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được x (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng, gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho nhà máy B là $H(x)=-0{,}001x^3+15x-100$.

b) Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

c) Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.

d) Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng $70{,}7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Đúng.

Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm $(0\le x\le 100)$ cho nhà máy B là:

$H(x)=x.P(x)-C(x)=x.(45-0{,}001x^2)-(100+30x)=-0{,}001x^3+15x-100$.

b) Đúng.

Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là:

$C(10)=100+30.10=400$ (triệu đồng).

c) Sai.

Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là:

$10P(10)=10.\left(45-0,001.10^2\right)=449$ (triệu đồng)

d) Đúng.

Xét hàm số $H(x)=-0,001x^3+15x-100$ trên $[0;100]$.

+ $H'(x)=-0,003x^2+15$

+ $H'(x)=0 \Leftrightarrow -0,003x^2+15=0 \Leftrightarrow x^2=5000 \Rightarrow x=50\sqrt{2}\approx 70,7\in[0;100]$

+ $\begin{cases} H(0)=-100 \\ H\left(50\sqrt{2}\right)\approx 607,11 \\ H(100)=400 \end{cases}$

Vậy nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $607,11$ (triệu đồng).

Câu 36. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x)=0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg).



a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Ta có: $G(x)=0,024x^2(30-x)=0,72x^2-0,024x^3, x>0$

$G'(x)=1,44x-0,072x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,44x-0,072x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=20(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	96	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ giảm.

a) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân lớn hơn 20 mg thì huyết áp bệnh nhân sẽ tăng.

c) Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

d) Độ giảm huyết áp giảm nhiều nhất sau khi bệnh nhân tiêm thuốc là 96.

Câu 37. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y=t^3-12t+3,\ (t\ge 0)$

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12,\ (t\ge 0)$ và hàm gia tốc là $a(t)=6t,\ (t\ge 0)$.

b) Hạt chuyển động lên trên khi $t>2$ và hạt chuyển động xuống dưới khi $t<2$.

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\le t\le 3$ là 9 m.

d) Hạt tăng tốc khi $t>2$ và hạt giảm tốc khi $0<t<2$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

a) Hàm vận tốc là: $v(t)=y'=3t^2-12,\ (t\ge 0)$

Hàm gia tốc là $a(t)=v'(t)=6t,\ (t\ge 0)$

b) Hạt chuyển động lên trên khi $v(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-12>0\Leftrightarrow t>2,\ (do\ t\ge 0)$

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t)<0\Leftrightarrow 3t^2-12<0\Leftrightarrow 0<t<2$

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0\le t\le 3$.

Ta có $y(3)-y(0)=-9$

Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0<t<3$ là 9m

d) Hạt tăng tốc khi $v'(t)>0 \Leftrightarrow 6t>0 \Leftrightarrow t>0$

Hạt giảm tốc khi $v'(t)<0 \Leftrightarrow 6t<0 \Leftrightarrow t<0$ loại vì $t \geq 0$

Vậy hạt tăng tốc khi $t>0$ và hạt không giảm tốc

Câu 38. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t)=100.e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$).

a) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2030 là 108,763 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Ước tính dân số của quốc gia này vào năm 2035 là 145,488 triệu người. (kết quả làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0;50]$. Hàm số $N(t)$ luôn nghịch biến trên đoạn $[0;50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

a) Dân số của quốc gia này vào các năm 2030 (t = 7) là:

$N(7)=100.e^{0,012.7}=$ 108,763 triệu người.

Dân số của quốc gia này vào các năm 2035 (t = 12) là:

$N(12)=100.e^{0,012.12}=$ 115,488 triệu người.

b) Ta có

$N(t)=100.e^{0,012t}$

$\Rightarrow N'(t)=1,2.e^{0,012t}>0$ với mọi $t \in [0;50]$.

Do đó hàm số $N(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;50]$.

c) Theo đề có: $N'(t)=1,2.e^{0,012t}$

$$1,2.e^{0,012t}=1,6 \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{4}{3}}{0,012} \approx 23,97 \text{ năm.}$$

Vậy vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Câu 39. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $400km$. Vận tốc dòng nước là $10km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h), v>10$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$, trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun.



a) Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-10(km/h)$.

b) Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $\frac{400}{v-10}(h)$.

c) Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $400cv^3(v-10)(jun)$.

d) Khi nước đứng yên, cá phải bơi với vận tốc $18(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v-10(km/h)$ với $v>10$

Thời gian để cá vượt khoảng cách 400 km là $t=\frac{400}{v-10}(h)$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 400km là: $E(v)=cv^3.\frac{400}{v-10}=400c.\frac{v^3}{v-10}(jun)$

Xét hàm số: $E(v)=400c.\frac{v^3}{v-10}$ với $v>10$

$$E'(v)=400c.\frac{v^2(2v-30)}{(v-10)^2}$$

$$E'(v)=0\Leftrightarrow v^2(2v-30)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0(L)\\v=15(N)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

v	10		15		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$	$+\infty$	$\searrow$	$E(15)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: Cá phải bơi với vận tốc $15(km/h)$ thì ít tiêu hao năng lượng ít nhất.

Câu 40. Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ USD .



a) Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là : $\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ (USD), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$.

b) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

c) Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

d) Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 40 (USD).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Số tiền thu được trong một chuyến xe buýt là :

$f(x)=x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2=\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ (USD) với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$

Xét hàm số: $f(x)=\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x$ với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$

$f'(x)=\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40(N) \\ x=120(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	160	↘	$f(60)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

+ Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất bằng 160 (USD).

Câu 41. Một công ty vận tải ở Nha Trang đang dự định mở tuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng. Mỗi chuyến xe có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $30\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng), với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$. Chi phí vận hành mỗi chuyến xe đi từ Nha Trang ra Đà Nẵng là 3000000 (đồng).



a) Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

b) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là $30\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)-3000000$ (nghìn đồng).

c) Để công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất thì mỗi chuyến chở 40 hành khách.

d) Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 4800000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**SAI**

Ta có $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$

Số tiền thu được từ x hành khách trong một chuyến xe là : $30x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng)

Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là :

$30x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2-3000=30\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)-3000$ (nghìn đồng)

Xét hàm số: $f(x)=30\left(\frac{x^3}{1600}-\frac{3}{20}x^2+9x\right)-3000$ với $0\le x\le 60, x\in\mathbb{N}$

$f'(x)=30\left(\frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9\right)$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{1600}-\frac{3}{10}x+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40(N) \\ x=120(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	1800	↘	$f(60)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(0;40)$ thì thu được số tiền sẽ tăng dần.

+ Nếu một chuyến xe buýt chở lượng khách trong khoảng $(40;60)$ thì thu được số tiền sẽ giảm dần.

+ Số tiền mà công ty thu được lợi nhuận nhiều nhất trong một chuyến xe là 1800000 đồng khi có 40 hành khách.

Câu 42. Công ty in Khatoco Khánh Hòa muốn xuất bản $x\left(x\in\mathbb{N}^*\right)$ cuốn tạp chí giới thiệu về các địa điểm Du Lịch của tỉnh Khánh Hòa. Công ty đã khảo sát, tính được chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x)=x^2-2000x+100000000$ (đồng) và chi phí phát hành (bao gồm: chi phí quảng cáo và vận chuyển đến các nhà sách) cho mỗi cuốn tạp chí là 4000 đồng.



a) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $\frac{x^2-2000x+10000000}{x}$ (đồng)

b) Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

c) Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**SAI**	**ĐÚNG**

Ta có:

+ Chi phí phát hành cho x cuốn tạp chí là $4000x$ (đồng)

+ Tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$C(x)+4000x=x^2-2000x+100000000+4000x=x^2+2000x+10000000$ (đồng)

+ Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí là: $T(x)=\dfrac{x^2+2000x+10000000}{x}$ (đồng)

Xét hàm số: $T(x)=\dfrac{x^2+2000x+10000000}{x}$ với $x\in\mathbb{N}^*$

$T'(x)=\dfrac{x^2-100000000}{x^2}$

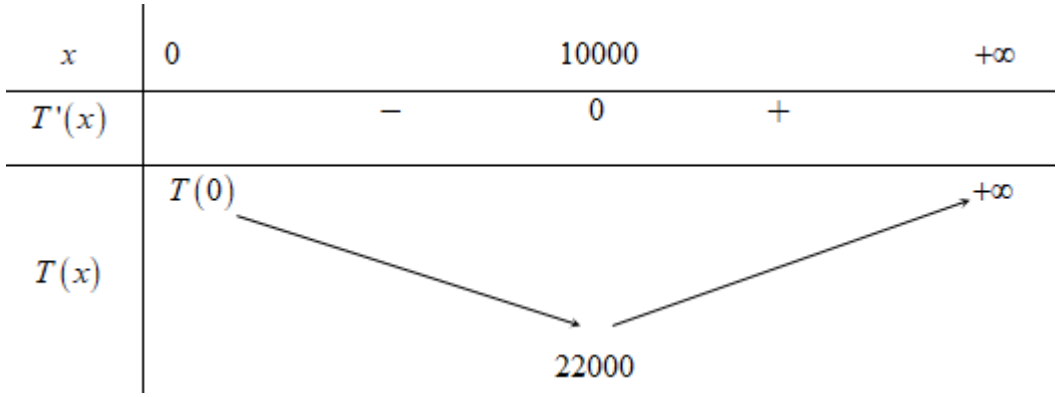
$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow x^2-100000000=0$

$\Leftrightarrow x^2=100000000$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10000(L) \\ x=10000(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Nếu công ty xuất bản số tạp chí trong khoảng $(0;10000)$ cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ giảm.

+ Nếu công ty xuất bản số tạp chí lớn hơn 10000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí sẽ tăng.

+ Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn tạp chí thấp nhất là 22000 đồng khi sản xuất 10000 cuốn tạp chí

Câu 43. Cửa hàng Điện Máy Chợ Lớn Nha Trang bán lẻ được 2500 cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng về bán, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 2000000 (đồng) cộng thêm 900000 (đồng) mỗi cái. Mỗi lần cửa

hàng đặt hàng về, một nửa số lượng đó được gởi vào kho chứa hàng, biết chi phí gởi trong kho chứa hàng là 1000000 (đồng) một cái mỗi năm. Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$.



a) Chi phí mỗi năm gởi ti vi trong kho chứa hàng cho mỗi lần đặt hàng về bán là $500000x$ (đồng)

b) Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\dfrac{2500}{x}$ (lần).

c) Chi phí mỗi lần đặt hàng về bán là $2900000.\dfrac{2500}{x}$ (đồng).

d) Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 500 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**ĐÚNG**	**SAI**	**SAI**

Ta có x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần, với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$

Số lượng ti vi gởi trong kho chứa hàng là $\dfrac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là :

$\dfrac{x}{2}.1000000 = 500000x$ (đồng)

Số lần đặt hàng về bán mỗi năm là $\dfrac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là : $\dfrac{2500}{x}\left(2000000 + 900000x\right)$ (đồng).

Khi đó tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là:

$$\frac{2500}{x}\left(2000000 + 900000x\right) + 500000x = 5.10^5.\left(x + \frac{10000}{x} + 4500\right) \text{ (đồng)}$$

Xét hàm số: $f\left(x\right) = 5.10^5.\left(x + \dfrac{10000}{x} + 4500\right)$ với $1 \le x \le 2500, x \in \mathbb{Z}$

$$f'\left(x\right) = 5.10^5.\left(1 - \frac{10000}{x^2}\right)$$

$f'\left(x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{10000}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 10000$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100\left(N\right) \\ x = -100\left(L\right) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	1		100		2500
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	2350000000	$\nearrow$	$f(2500)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Cửa hàng nên đặt hàng về bán mỗi lần 100 cái ti vi để tổng chi phí mà cửa hàng phải trả cho mỗi lần đặt là nhỏ nhất.

Câu 44. Ban quản lí chung cư Mường Thanh Nha Trang có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống.



a) Gọi x là số lần tăng giá căn hộ thì số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$ (đồng), với $0<x<30$.

b) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

c) Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

d) Để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2250000 (đồng).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Gọi x là số lần tăng giá căn hộ, với $0<x<30$

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $150-5x$ (căn).

Số tiền thuê một căn hộ sau mỗi lần tăng là: $2000000+100000x$

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$T(x)=(150-5x)(2000000+100000x)=500000\left(-x^2+10x+600\right)$

Ta xét hàm $T(x)$

$T(x)=500000\left(-x^2+10x+600\right)$ với $0<x<30$

$T'(x)=500000(10-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 500000(10-2x)=0$

$\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên:

x	0		5		30
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$	$T(0)$	↗	$T(5)$	↘	$T(30)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(0;5)$ thì tổng doanh thu sẽ tăng so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

+ Khi số lần tăng giá căn hộ nằm trong khoảng $(5;30)$ thì tổng doanh thu sẽ giảm so với ban đầu khi chưa tăng giá căn hộ.

+ doanh thu lớn nhất khi ban quản lí chung cư đặt giá thuê căn hộ là:

$2000000+100000x=2000000+100000.5=2500000$ (đồng).

Vậy để doanh thu lớn nhất thì công ty đặt giá thuê mỗi căn hộ là 2500000 (đồng).

Câu 45. Một quán cà phê Highlands Nha Trang sắp khai trương, đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18000 đồng. Gọi x là số lần tăng giá cốc cà phê, với $0<x<20$.



a) Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000-x$ (cốc).

b) Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000-x)18000$ đồng

c) Lợi nhuận thu được mỗi tháng là: $100000\left(-x^2+18x+240\right)$ đồng

d) Quán cà phê Highland Nha Trang phải bán mỗi cốc cà phê với giá 29000 đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

Gọi x là số lần tăng giá cốc phê, với $0 < x < 20$

Sau x là số lần tăng giá thì số cốc cà phê bán được là $2000-100x$ (cốc).

Số tiền cốc phê sau mỗi lần tăng là: $20000+1000x$ đồng

Chi phí nguyên vật liệu để pha cà phê mỗi tháng là $(2000-100x)18000$ đồng

Số tiền thu được mỗi tháng là $(20000+1000x)(2000-100x)$ đồng

Khi đó, lợi nhuận thu được mỗi tháng là:

$T(x)=(20000+1000x)(2000-100x)-(2000-100x)18000=100000\left(-x^2+18x+240\right)$ đồng

Bài toán trở thành tìm x để $T(x)$ lớn nhất

$T(x)=100000\left(-x^2+18x+240\right)$ với $0 < x < 20$

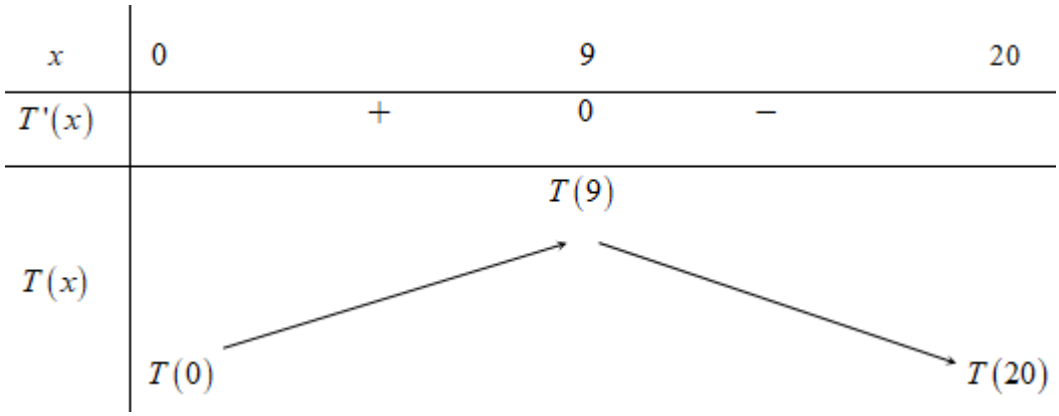
$T'(x)=100000(18-2x)$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow 100000(18-2x)=0$

$\Leftrightarrow x=9$

Bảng biến thiên:



Căn cứ vào bảng biến thiên trên, ta có

Lợi nhuận thu được lớn nhất mỗi tháng là: $T(9)=100000\left(-9^2+18.9+240\right)=32100000$ đồng khi $x=9$

Vậy phải bán mỗi cốc cà phê với giá $20000+1000x=20000+1000.9=29000$ đồng thì đạt lợi nhuận lớn nhất.

Chú ý: Để tìm $T(x)$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$T(x)=100000\left(-x^2+18x+240\right)$$
$$=100000\left[\left(-x^2+18x-81\right)+321\right]$$
$$=100000\left[-\left(x-9\right)^2+321\right]\le 100000.321=32100000$$

Vậy $\max T(x)=32100000$ khi $x=9$

Câu 46. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi với $x>0, x\in\mathbb{N}$.

a) Hàm cầu là $P=-\dfrac{1}{200}x+19$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2+3800p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là C(x) = 12000 – 3x (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi.

Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p=p(x)$

Theo giả thiết tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm số bậc nhất. Do đó $p(x)=ax+b(a\ne 0)$

Theo đề có: $x_1=1000$ thì $p_1=14$; $x_2=1100$ thì $p_1=13,5$.

Khi đó phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b(a\ne 0)$ đi qua hai điểm (1000; 14) và (1100; 13,5) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1000a+b=14\\1100a+b=1,35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{200}\\b=19\end{cases}$$

Vậy $p=-\dfrac{1}{200}x+19$

b) Vì nên $x=-200p+3800$.

Khi đó tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là

$$R(p)=x.p=\left(-200p+3800\right)p=-200p^2+3800p$$

Bài toán trở thành tìm p để $f(p))$ đạt giá trị lớn nhất.

$R(p) = -200p^2 + 3800p$

$\Rightarrow R'(p) = -400p + 3800$

$\Rightarrow R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 9,5$

Bảng biến thiên

x	0		$9,5$		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	
$R(x)$	0	↗	$R(9,5) = 18050$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy công ty giảm giá 14 – 9,5 = 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

c) Doanh thu từ bán x ti vi là

$$R(x) = x.p(x) = x\left(-\frac{1}{200}x + 19\right) = -\frac{1}{200}x^2 + 19x$$

Khi đó tổng lợi nhuận từ bán x ti vi là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{200}x^2 + 19x - (12000 - 3x) = -\frac{1}{200}x^2 + 22x - 12000$$

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ lớn nhất.

$$P(x) = -\frac{1}{200}x^2 + 22x - 12000$$

$\Rightarrow P'(x) = -\frac{1}{100}x + 22$

$\Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$

Bảng biến thiên

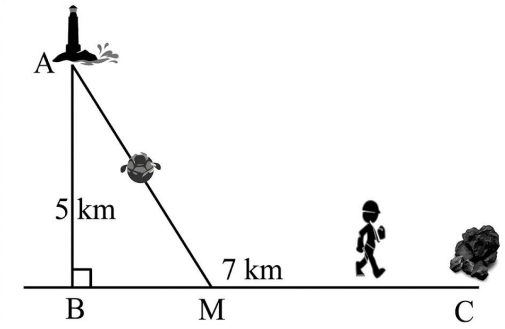
x	0		2200		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	0	↗	$P(2200) = 12200$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2200 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Tức là mỗi tuần bán thêm 1200 chiếc thì số tiền phải giảm giá 1200.500:100 = 6 000 nghìn đồng.

Vậy phải để giá bán là 14 – 6 = 8 triệu đồng.

Câu 47. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB=5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $7(km)$ (như hình vẽ).



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Gọi $x(km)$ là khoảng cách từ B đến M, với $0\le x\le 7$.

a) Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{6}(h)$.

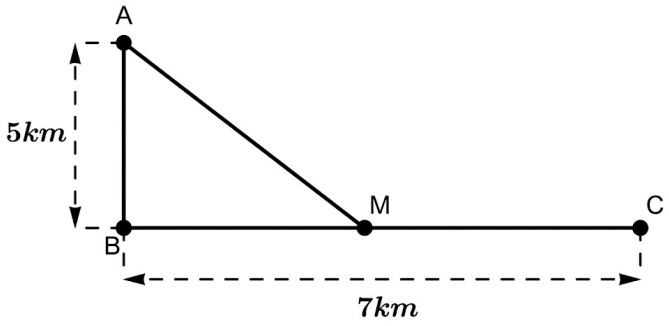
b) Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $\dfrac{7-x}{4}(h)$.

c) Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$.

d) Vị trí của điểm M cách B một khoảng $2\sqrt{5}km$ thì người canh hải đăng đi đến kho nhanh nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	**SAI**	**ĐÚNG**	**ĐÚNG**



Ta có $BM=x(km)\Rightarrow MC=7-x(km)$ với $0\le x\le 7$

Thời gian người canh hải đăng chèo đò từ A đến M là: $t_{AM}=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}(h)$

Thời gian người canh hải đăng đi bộ đi bộ từ M đến C là: $t_{MC}=\dfrac{7-x}{6}(h)$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến kho C: $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}(h)$ với $0\le x\le 7$

Khi đó: $t'(x)=\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+25}}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{3x-2\sqrt{x^2+25}}{12\sqrt{x^2+25}}$

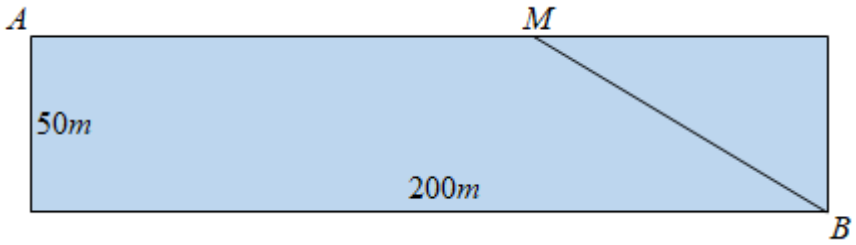
$$t'(x)=0\Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x^2+25}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+25}=3x\Rightarrow x^2=20\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{5}\,(L)\\x=2\sqrt{5}\,(N)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$2\sqrt{5}$		7
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\dfrac{29}{12}$	$\searrow$	$\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{74}}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}$ tại $x=2\sqrt{5}$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách B một đoạn $BM=x=2\sqrt{5}km$

Câu 48. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng $50m$, dài $200m$. Một vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A, chạy đến điểm M và bơi từ điểm M đến điểm B (như hình vẽ). Biết vận tốc chạy $4,8m/s$, vận tốc bơi $2,4m/s$. Gọi $x(m)$ là khoảng cách từ A đến M, với $0\le x\le 200$.



a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}(s)$

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\dfrac{x}{2,4}(s)$

c) Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B: $\dfrac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{4,8}+\dfrac{x}{2,4}(s)$

d) Vận động viên chọn điểm M cách A gần bằng 29 mét thì đến B nhanh nhất (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)

SAI	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Ta có: $AM = x(m) \Rightarrow MB = \sqrt{(200-x)^2 + 50^2}\,(m)$ với $0 \le x \le 200$

Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{x}{4,8}(s)$

Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $t_{MC} = \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}(s)$

Thời gian vận động viên chạy phối hợp với bơi từ A đến B:

$t(x) = \dfrac{x}{4,8} + \dfrac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}(s)$ với $0 \le x \le 200$

Khi đó: $t'(x) = \dfrac{1}{4,8} - \dfrac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4,8} - \dfrac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{(200-x)^2 + 50^2} = 2(200-x)$

$\Rightarrow (200-x)^2 + 50^2 = 4(200-x)^2$

$\Rightarrow (200-x)^2 = \dfrac{50^2}{3}$

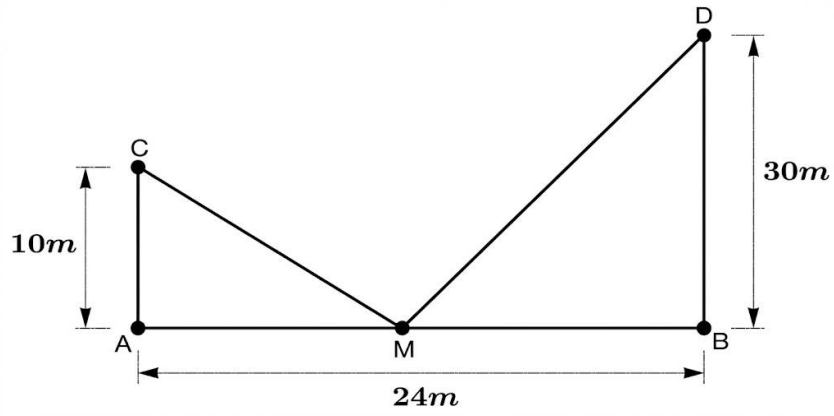
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}(N) \\ x = 200 + \dfrac{50\sqrt{3}}{3}(L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$200 - \frac{50\sqrt{3}}{3}$		200
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$t(0)$	↘	$t\left(200 - \frac{50\sqrt{3}}{3}\right)$	↗	$t(200)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $t\left(200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\right)$ tại $x = 200 - \dfrac{50\sqrt{3}}{3} \approx 171(m)$. Khi đó thời gian là ít nhất và điểm M nằm cách A một đoạn $AM = x \approx 171(m)$

Câu 49. Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố Nha Trang muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón ngày Quốc Khánh $2-9$ nên đã nhờ bạn Nam đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Nam biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí A và B có độ cao lần lượt là $10m$ và $30m$, khoảng cách giữa hai trụ đèn $24m$ và cũng yêu cầu bạn Nam chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Đặt $MB = x(m)$ với $0 \le x \le 24$.



a) Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

b) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ tăng.

c) Khi vị trí chốt M đến trụ đèn cao áp B nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D sẽ giảm.

d) Bạn Nam phải đặt chốt M ở vị trí cách trụ đèn B trên mặt đất là $6m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**

Đặt $MB = x(m) \Rightarrow AM = 24 - x(m)$ với $0 \le x \le 24$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến M là: $CM = \sqrt{(24-x)^2+10^2}\,(m)$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ D đến M là: $CM = \sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

Chiều dài đèn dây Led giăng từ C đến chốt M rồi đến D là: $\sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}\,(m)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường *CM* và *MD*:

$f(x) = \sqrt{(24-x)^2+10^2}+\sqrt{x^2+30^2}$ với $x \in [0;24]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm *M*.

$$f'(x)=-\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+30^2}}=\frac{24-x}{\sqrt{(24-x)^2+10^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(24-x)^2+10^2}=(24-x)\sqrt{x^2+30^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left[(24-x)^2+10^2\right]=(24-x)^2\left(x^2+30^2\right)\\0\le x\le 24\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(10x)^2=\left[30(24-x)\right]^2\\0\le x\le 24\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=18\ \ hay\ \ x=36\\0\le x\le 24\end{cases}\Leftrightarrow x=18$$

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(18)=8\sqrt{34}$	↗	$f(24)$

Từ bảng biến thiên, ta có:

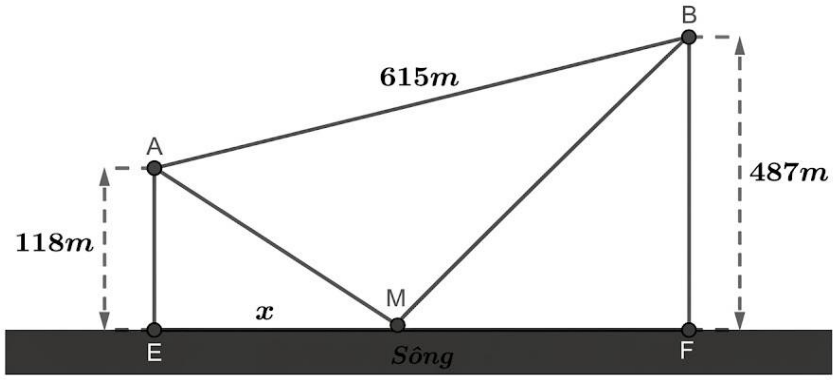
+ Khi vị trí chốt *M* đến trụ đèn cao áp *B* nằm trong khoảng $(0;18)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ *C* đến chốt *M* rồi đến *D* sẽ giảm.

+ Khi vị trí chốt *M* đến trụ đèn cao áp *B* nằm trong khoảng $(18;24)$ thì tổng chiều dài đèn dây Led giăng từ *C* đến chốt *M* rồi đến *D* sẽ tăng.

+ giá trị nhỏ nhất là $f(18)=8\sqrt{34}$ tại $x=18$

Khi đó Bạn Nam phải đặt chốt *M* ở vị trí cách trụ đèn *B* trên mặt đất là $18m$ thì tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất.

Câu 50. Cho hai vị trí *A*, *B* cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B. Đặt $EM = x$, với $0 \le x \le 492$.

a) Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}\,(m)$

b) Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}\,(m)$

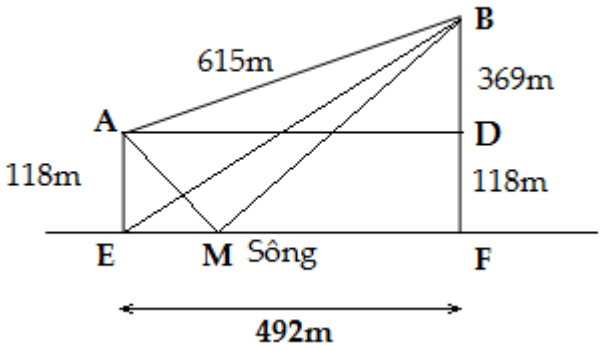
c) Quãng đường bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là:

$\sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}\,(m)$

d) Đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi A từ đến bờ sông lấy nước và mang về B là $741m$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	**SAI**	**SAI**	**SAI**



Ta có $EM = x$, với $0 \le x \le 492$

Ta dễ dàng tính được:

$BD = BF - DF = BF - AE = 487 - 118 = 369\,(m)$

$EF = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{615^2 - 369^2} = 492\,(m)$

Khi đó ta được: $MF = 492 - x\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ M đến B là: $BM=\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

Quãng đường bạn An đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là: $AM+MB=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}\,(m)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$f(x)=\sqrt{x^2+118^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}$ với $x\in[0;492]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+118^2}}=\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492-x)^2+487^2}=(492-x)\sqrt{x^2+118^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left[(492-x)^2+487^2\right]=(492-x)^2\left(x^2+118^2\right)\\0\le x\le 492\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(487x)^2=(58056-118x)^2\\0\le x\le 492\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{58056}{605}\ \ hay\ \ x=-\frac{58056}{369}\\0\le x\le 492\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{58056}{605}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{58056}{605}$		429
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f\left(\frac{58056}{605}\right)$	↗	$f(429)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right)\approx 780m$ tại $x=\frac{58056}{605}$

Khi đó đoạn đường ngắn nhất mà bạn An phải đi là: $780m$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây(s) và S tính bằng mét (m). Vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu mét/giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 56

Có $v(t)=S'=-6t^2+36t+2=-6\left(t^2-2.3t+9-9\right)+2=-6(t-3)^2+56\le 56$

giá trị lớn nhất của $v(t)$ bằng $56(m/s)$ tại $t=3(s)$.

Câu 52. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm ở thời gian bao nhiêu giây?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Ta có $v=S'=-t^2+8t+9,\ t\in(0;10)$

$v'=-2t+8$.

Xét $v'=0\Rightarrow t=4\in(0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0		4		10
v'		+	0	−	
v	$v(0)$	↗	25	↘	$v(10)$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là $25(\mathrm{m/s})$ tại $t=4(s)$

Câu 53. Một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $s(t)=6t^2-t^3,\ (t\ge 0)$. Biết trong khoảng thời gian $(a;b)$, với $a,b\in\mathbb{R}$ thì hạt chuyển động lên trên. Tính giá trị $a-b$.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: −6

Vận tốc của chuyển động là $v=s'$ tức là $v(t)=12t-3t^2, t>0$

$v'(t)=12-6t,\ v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên:

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		↗	12	↘	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên thì hạt chuyển động lên trên

Vậy $a-b=-6$

Câu 54. Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t)=\frac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời gian bao nhiêu giây thì gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Vận tốc của chuyển động là $v(t)=s'(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+12t+10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=v'(t)=t^2-6t+12=(t-3)^2+3\geq 3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t=3$.

Câu 55. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}$(con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: ……..

Lời giải

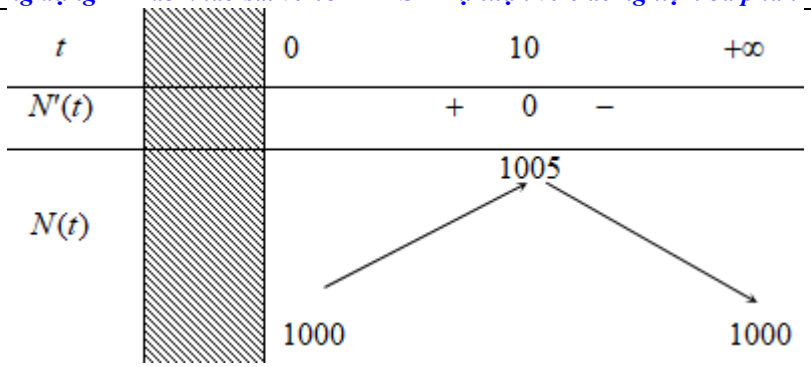
Đáp án: 1005

Xét hàm số $N(t)=1000+\frac{100t}{100+t^2}(t>0)$.

Ta có: $N'(t)=\frac{100\cdot(100+t^2)-100t\cdot 2t}{(100+t^2)^2}=\frac{100\cdot(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$.

Khi đó, với $t>0, N'(t)=0\Leftrightarrow 100-t^2=0\Leftrightarrow t^2=100\Leftrightarrow t=10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:



Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t=10$

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 56. Giả sử tăng cân nặng (tính bằng kg) của một giống vật nuôi (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số: $f(t)=\dfrac{150}{1+3e^{-t}}$, $t\ge 0$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi vật nuôi đó bắt đầu sinh ra. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng cân nặng của loài cây đó. Hỏi sau khi vật nuôi sinh ra thì sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng cân nặng của vật nuôi là nhanh nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời: ……..

Lời giải

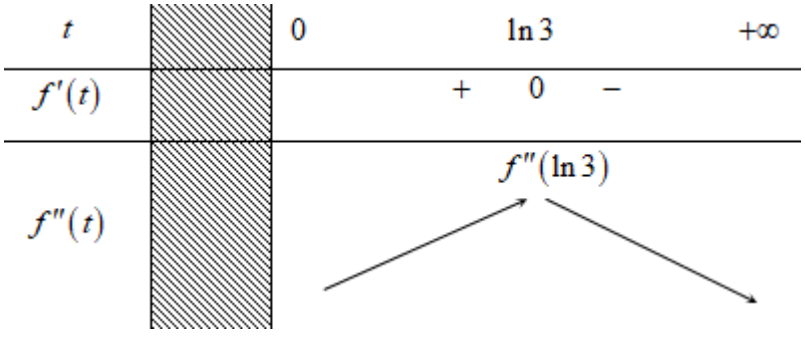
Đáp án: 1,09

Ta có: $f(t)=\dfrac{200}{1+3e^{-t}}\Rightarrow f'(t)=150.\dfrac{-3.e^{-t}.(-1)}{\left(1+3e^{-t}\right)^2}=150.\dfrac{3.e^{-t}}{\left(1+3e^{-t}\right)^2}$

$$f''(t)=150.\frac{-3e^{-t}\left(1+3e^{-t}\right)^2-2\left(1+3e^{-t}\right).\left(-3e^{-t}\right).3e^{-t}}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}=150.\frac{-3e^{-t}.\left(1+3e^{-t}\right)\left(1+3e^{-t}-6e^{-t}\right)}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}$$

$$=150.\frac{-3e^{-t}.\left(1+3e^{-t}\right)\left(1-3e^{-t}\right)}{\left(1+3e^{-t}\right)^4}$$

$$\Rightarrow f''(t)=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln 33\approx 1,09$$



Vậy sau khi sinh khoảng $\ln 3\approx 1,09$ tháng thì vật nuôi có tốc độ tăng cân nhanh nhất.

Câu 57. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Biết liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(a;b)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm. Tính giá trị $a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20.

Ta có: $G(x)=0,025x^2(30-x)=0,75x^2-0,025x^3, x>0$

$G'(x)=1,5x-0,075x^2$

$G'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1,5x-0,075x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=20(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		20		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		↗	100	↘	

Từ bảng biến thiên, ta thấy: Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng $(0;20)$ miligam thì huyết áp bệnh nhân giảm

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=20 \end{array}\right. \Rightarrow a+b=20$

Câu 58. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $C(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

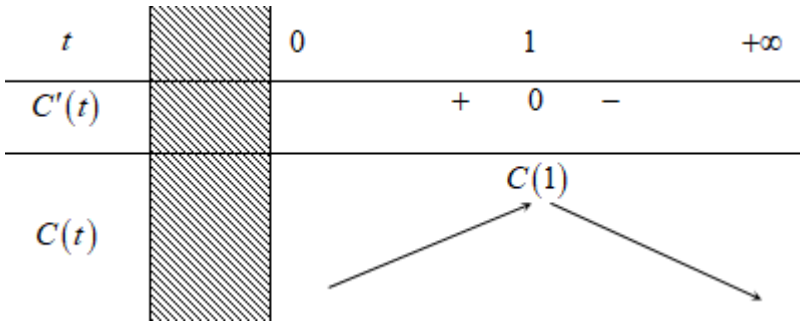
Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1.

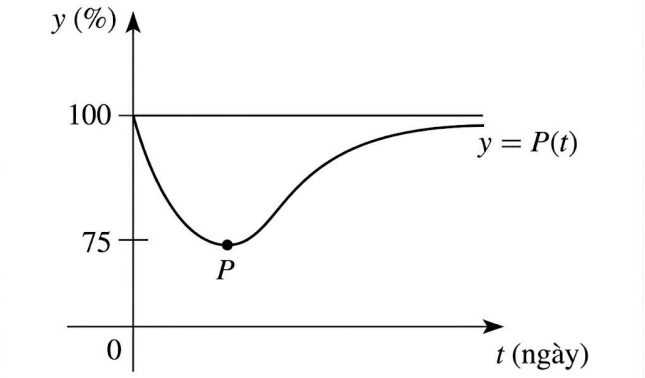
Ta có $C'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2}, \forall t\in(0;+\infty)$. Cho $c'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 59. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao. Giả sử hàm số cho hàm lượng ôxy là $P(t)=100\dfrac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}$ (% mức bình thường), $t\ge 0$.



Khi đó tọa độ của điểm $P(a;b)$ trên đồ thị là điểm cực trị của đồ thị hàm số $P(t)$. Tính $a+b$?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 85

Ta có: $P'(t)=\dfrac{(2t+10)\left(t^2+20t+100\right)-(2t+20)\left(t^2+10t+100\right)}{\left(t^2+20t+100\right)^2}$

Khi đó $P'(t)=0\Leftrightarrow(2t+10)\left(t^2+20t+100\right)-(2t+20)\left(t^2+10t+100\right)=0$

$\Rightarrow 10t^2-1000=0\Rightarrow t^2=100\Rightarrow t=10\quad(t\ge 0)$

Lập bảng biến thiên ta có $t=10$ là điểm cực tiểu của hàm số

Thay $t=10$ vào $P(t)$: $P(10)=100\dfrac{10^2+10\cdot 10+100}{10^2+20\cdot 10+100}=100\dfrac{100+100+100}{100+200+100}=100\dfrac{300}{400}=75.$

Vậy điểm P có tọa độ $(10;75)$

$\Rightarrow a+b=85$

Câu 60. Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P=\dfrac{80-Q}{4}$, với $0\le Q\le 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Để doanh thu tối đa thì số sản phẩm bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

Gọi R là tổng doanh thu. Ta có công thức Doanh thu = (giá bán) x (số lượng)

Từ đây ta có

$R=PQ=\dfrac{80-Q}{4}\cdot Q=\dfrac{80Q-Q^2}{4}=R(Q)$, trong đó $0\le Q\le 80$.

Đạo hàm $R'(Q)=0\Leftrightarrow\dfrac{80-2Q}{4}=0\Leftrightarrow Q=40$.

Bảng biến thiên:

Q	0		40		80
$R'(Q)$		+	0	−	
$R(Q)$	0	↗	400	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy doanh thu tối đa bằng 400 khi $Q=40$

Câu 61. Một xí nghiệp A chuyên cung cấp sản phẩm S cho nhà phân phối B. Hai bên thỏa thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng x tạ sản phẩm S thì giá bán mỗi tạ sản phẩm S là $P(x)=6-0,0005x^2$ (triệu đồng) $(x\le 40)$. Chi phí A phải bỏ ra cho x tạ sản phẩm S trong một tháng là $C(x)=10+3,5x$ (triệu đồng) và mỗi sản phẩm bán ra phải chịu thêm mức thuế là 1 triệu đồng. Hỏi trong một tháng, bên B cần đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm S thì A có được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 31,6

Lợi nhuận mà A thu được khi B đặt x sản phẩm là

$L(x)=x.P(x)-C(x)-1.x=-0,0005x^3+1,5x-10$ với $0\le x\le 40$

$\Rightarrow L'(x)=-0,0015x^2+1,5$, $L'(x)=0\Rightarrow x=10\sqrt{10}\approx 31,6$.

$L(0)=-10$

$L\left(10\sqrt{10}\right)\approx 21,6$.

$L(40)=18$

Vậy để A có lợi nhuận lớn nhất thì B cần đặt khoảng $31,6$ tạ sản phẩm S.

Câu 62. Cho $C(x)=16000+500x-1,6x^2+0,004x^3$ là hàm chi phí khi sản xuất x sản phẩm và $p(x)=1700-7x$ là giá bán mỗi sản phẩm. Để tối đa hoá lợi nhuận thì cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 100

Ta có hàm lợi nhuận:

$P(x)=x.p(x)-C(x)$

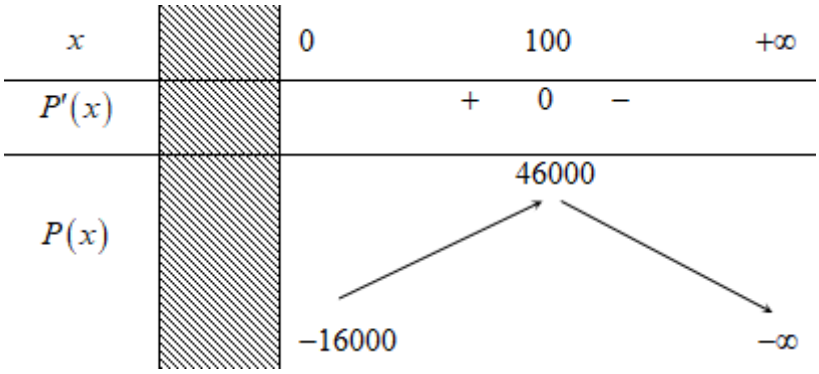
$=1700x-7x^2-16000-500x+1,6x^2-0,004x^3$

$=-16000+1200x-5,4x^2-0,004x^3$

Suy ra, $P'(x)=1200-10,8x-0,012x^2$;

$P'(x)=0\Leftrightarrow x=100$ (do $x\ge 0$).

Bảng biến thiên:



Vậy để tối đa hoá lợi nhuận thì cần sản xuất 100 sản phẩm .

Câu 63. Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là x^2+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y-27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày.

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4

Theo đề bài, ta có $x+y=10$. Suy ra $y=10-x$.

Vì máy B làm việc không quá 6 ngày nên $10-x\le 6\Leftrightarrow x\ge 4$.

Số tiền lãi mà doanh nghiệp thu được là

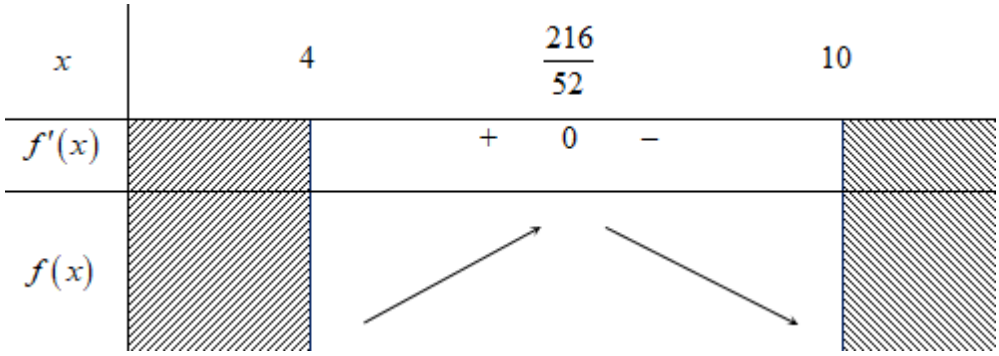
$x^2+2x+326y-27y^2=x^2+2x+326(10-x)-27(10-x)^2$

$=-26x^2+216x+560$.

Đặt $f(x)=-26x^2+216x+560, x\in[4;10]$

Ta có $f'(x)=-52x+216=0\Leftrightarrow x=\dfrac{216}{52}$

Bảng biến thiên



Do số ngày là số nguyên, nên ta xét giá trị của hàm số tại hai điểm nguyên trước và sau giá trị $\dfrac{216}{52}$ là $x=4; x=5$.

Ta có $f(4)=1008, f(5)=990\Rightarrow f(4)>f(5)$

Vậy doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong 4 ngày thì số tiền lãi là nhiều nhất.

Câu 64. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A $(0\le x\le 250)$ trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x)=0,00024x^3-0,03x^2+5x+30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x)=-0,01x^2+16x-25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1237

Lợi nhuận trong một tháng của doanh nghiệp khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A là

$R(x)=D(x)-C(x)$

$=(-0,01x^2+16x-25)-(0,00024x^3-0,03x^2+5x+30)$

$=-0,00024x^3+0,02x^2+11x-55$

Xét hàm số $R(x)=-0,00024x^3+0,02x^2+11x-55$ với $x\in[0;250]$, ta có

$R'(x)=-0,00072x^2+0,04x+11$;

$$R'(x)=0 \Leftrightarrow -0,00072x^2+0,04x+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9} \\ x=\dfrac{-100\sqrt{130}+250}{9} \end{array}\right.$$

Với $x\in[0;250]$ ta được $x=\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}=154,463...$

Hàm $R(x)$ liên tục trên $[0;250]$ và ta có

$R(0)=-55$; $R\left(\dfrac{100\sqrt{130}+250}{9}\right)=1236,796...\approx 1237\approx R(154)\approx R(155)$; $R(250)=195$.

Suy ra lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy thu được vào khoảng 1237 (triệu đồng) khi $x=154$ hoặc $x=155$.

Câu 65. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B**.** Hai nhà máy thỏa thuận rằng: hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B sản phẩm đó theo đơn đặt hàng của nhà máy B với số lượng tối đa là 100 tấn sản phẩm. Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=45-0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+30x$ (triệu đồng), gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân)

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $70,7$

Nếu mỗi tháng nhà máy A bán cho nhà máy B x tấn sản phẩm thì lợi nhuận của nhà máy A thu được là $x\left(45-0,001x^2\right)-(100+30x)=-0,001x^3+15x-100$

Xét hàm số $f(x)=-0,001x^3+15x-100$ với $x\in[0;100]$.

Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$.

Ta có $f'(x)=-0,003x^2+15$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=50\sqrt{2}$ (do $x\in[0;100]$).

Vì $f(0)=-100$, $f\left(50\sqrt{2}\right)\approx 607$, $f(100)=400$

Vậy $f(x)$ lớn nhất khi $x=50\sqrt{2}\approx 70,7$ (tấn)

Câu 66. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B**.** Hai nhà máy thỏa thuận, mỗi tháng A cung cấp cho B tối đa 45 tấn sản phẩm và nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x)=60-0,01x^2$ (triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=150+33x$ (triệu đồng) (gồm 150 triệu đồng chi phí cố định và 33 triệu đồng cho

mỗi tấn sản phẩm). Để mỗi tháng thu được lợi nhuận lớn nhất thì A cần bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 17,3

Doanh thu là $D(x)=x\left(60-0,01x^2\right)=60x-0,01x^3\ \ (x>0)$

Lợi nhuận thu được là $L(x)=D(x)-C(x)=60x-0,01x^3-(150+33x)=-0,01x^3+27x-150$.

Ta có $L'(x)=-0,03x^2+27=0\Leftrightarrow x^2=900\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\sqrt{3}\\x=-10\sqrt{3}\,(loai)\end{array}\right.$

Khi đó $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=10\sqrt{3}\approx 17,3$ tấn.

Câu 67. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0<x<2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x)=2000x-x^2$ (chục nghìn đồng) và tổng chi phí doanh nghiệp bỏ ra là $G(x)=x^2+1440x+50$ (chục nghìn đồng). Công ty cũng phải chịu mức thuế phụ thu cho 1 đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) $(0<x<300)$. Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) là bao nhiêu sao cho nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận nhiều nhất theo đúng mức thuế phụ thu đó. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)*

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 280

Lợi nhuận = Doanh thu - chi phí - thuế

Gọi $f(x)$ là hàm biểu thị tổng lợi nhuận của doanh nghiệp khi bán hết x sản phẩm

$g(t)$ là hàm biểu thị tổng mức thuế nhà nước phụ thu ứng với x sản phẩm mà doanh nghiệp bán hết

Khi đó $f(x)=F(x)-G(x)-x.t$ với $x\in(0;2000)$

$=2000x-x^2-x^2-1440x-50-xt$

$=-2x^2+(560-t)x-50$

$f'(x)=-4x+560-t\Rightarrow x=\dfrac{560-t}{4}\in(0;2000)$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{560-t}{4}$		2000
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	Max	↘	

$\Rightarrow \underset{(0;2000)}{\text{Max}}\ f(x)=f\left(\dfrac{560-t}{4}\right)\Rightarrow g(t)=x.t=\dfrac{560-t}{4}.t$ với $t\in(0;300)$

$\Rightarrow g(t)=-\dfrac{1}{4}t^2+140t$

Bảng biến thiên

t	0		280		300
$g(t)$		↗	Max	↘	

Vậy $g(t)$ max khi $t=280$ (nghìn đồng).

Câu 68. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu triệu đồng/tháng để doanh thu là lớn nhất?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

Gọi x là số lần tăng giá ($0<x<100$).

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là $100-x$ (căn).

Số tiền thuê căn hộ sau mỗi lần tăng là: $8000000+100000x$ (đồng)

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$f(x)=(8000000+100000x)(100-x)$

$=100000(80+x)(100-x)$

$=100000(800+20x-x^2)$

Bài toán trở thành tìm x để $f(x)$ lớn nhất

Xét hàm $f(x)=100000(800+20x-x^2)$ với $0<x<100$.

Ta có $f'(x)=100000(20-2x)$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$

Bảng biến thiên:

x	0		10		100
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(10)$	↘	$f(100)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh thu lớn nhất khi người quản lí đặt giá thuê căn hộ là:

$8000000+100000.10=9000000$ (đồng) hay 9 (triệu đồng)

Câu 69. Một đội bóng đá thi đấu trong một sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả. Với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu nghìn đồng để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 95

Gọi x $(x>0)$) là số lần giảm giá vé.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100-10x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm 3000x khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là 27000 + 3000x.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả nên

$27000+3000x \le 55000$

$\Leftrightarrow x \le \dfrac{28}{3}$

Doanh thu từ tiền bán vé là:

$y=(27000+3000x)(100-10x)=-30000x^2+30000x+2700000$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$y=-30000x^2+30000x+2700000 \quad (x>0)$

Tập xác định D = (0; +∞).

$y'=-60000x+30000$

$y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{28}{3}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$y(0)=270000$	↗	$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2707500$	↘	$y\left(\dfrac{28}{3}\right)=2700000$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là 95 nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 70. Doanh nghiệp A kinh doanh xe máy điện các loại và trong các năm qua đang tập trung bán loại xe X ra thị trường. Chi phí của doanh nghiệp cho mỗi chiếc xe là 30 triệu đồng (gồm chi phí mua vào, lưu kho, quảng cáo,.) và bán ra thị trường với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Để đẩy mạnh lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu cứ giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Từ kết quả nghiên cứu đó, công ty nên bán mỗi chiếc xe với giá bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 34,5

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [30;35]$.

Giảm 1 triệu thì lượng xe bán được tăng 100 chiếc.

Giảm $(35-x)$ triệu thì lượng xe bán được tăng $(35-x)100$ chiếc.

Lập được hàm lợi nhuận là

$f(x)=\left[400+(35-x)100\right].(x-30)=-100x^2+6900x-117000$.

Lý luận để suy ra giá bán mới là $34,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất.

Câu 71. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 16

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x\left(x\in \mathrm{N},\ x>0\right)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\dfrac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x)=200x+\dfrac{8000}{30x}.192=200x+\dfrac{51200}{x}$

Ta có: $P'(x)=200-\dfrac{51200}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=16\\x=-16(L)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		16		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		↘	6400	↗	

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Câu 72. Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40 đô la/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm $0,25$ đô la cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu đô la?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 32,5

Gọi x là số lần giảm $0,25$ đô la.

Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40-0,25x$ với $0\le x\le 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000+1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi R = (số thuê bao) x (cước mỗi thuê bao trả)

$R(x)=(100000+1000x)(40-0,25x)=1000(100+x)(40-0,25x)=1000(4000+15x-0,25x^2)$

Ta có $R'(x)=1000(15-0,5x)$

$R'(x)=0\Rightarrow 1000(15-0,5x)=0\Leftrightarrow x=30$

Vì tập xác định của R là khoảng đóng [0; 160] nên R đạt cực đại tại $x=30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn [0; 160].

Ta có: $R(0)=4000000;\ R(30)=4225000;\ R(160)=0$

Vậy doanh thu tối đa khi $x=30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm $0,25$ đô la, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40-7,5=32,5$ đô la.

Câu 73. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 16 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 400 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc ti vi mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hàng tuần là $C(x)=12000-3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần. Nhà sản xuất nên đặt giá bán 1 chiếc tivi bao nhiêu triệu đồng để lợi nhuận là lớn nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 8,5

Gọi $p\ (p>0)$ (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, $x\ (x\in\mathbb{N},\ x\geq 1000)$ là số ti vi. Khi đó ta cần xác định hàm cầu $p=p(x)$

Theo giả thiết tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm số bậc nhất. Do đó $p=p(x)=ax+b, a\neq 0$.

Theo đề có: $x_1=1000$ thì $p_1=16$; $x_2=1100$ thì $p_2=15,6$.

Khi đó phương trình đường thẳng $p(x)=ax+b, a\neq 0$ đi qua hai điểm $(1000;16)$ và $(1100;15,6)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1000a+b=16\\1100a+b=15,6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{250}\\b=20\end{cases}$$

Vậy $p=p(x)=-\dfrac{1}{250}x+20$.

Khi đó tổng doanh thu mỗi tuần từ tiền bán x ti vi là

$R(x)=xp=x\left(\dfrac{-1}{250}x+20\right)=-\dfrac{1}{250}x^2+20x$.

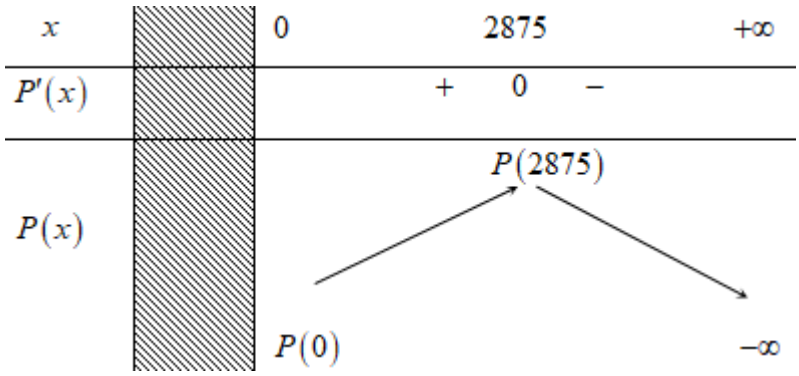
Khi đó tổng lợi nhuận từ bán x ti vi là:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$
$$=\left(-\frac{1}{250}x^2+20x\right)-(12000-3x)$$
$$=-\frac{1}{250}x^2+23x-12000$$

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ lớn nhất.

Ta có: $P'(x)=-\frac{1}{125}x+23;\ P'(x)=0\Leftrightarrow x=2875(t/m)$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số ti vi bán ra trong 1 tuần là 2875 chiếc thì lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất.

Với $x=2875$ thì $p=8,5$.

Vậy phải để giá bán là $8,5$ triệu đồng.

Câu 74. Nhà xe Quang Hạnh Nha Trang khoán cho hai tài xế Việt và Nam mỗi người lần lượt nhận 32 lít xăng và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20

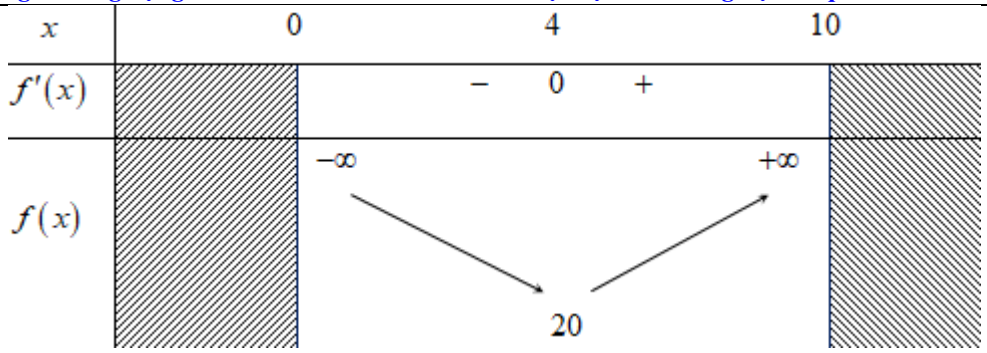
Gọi x $(0<x<10)$ là số xăng Việt sử dụng trong 1 ngày

$10-x$ là số xăng Nam sử dụng trong 1 ngày

Tổng số ngày Việt và Bình sử dụng hết số xăng khoán là: $f(x)=\frac{32}{x}+\frac{72}{10-x}(0<x<10)$

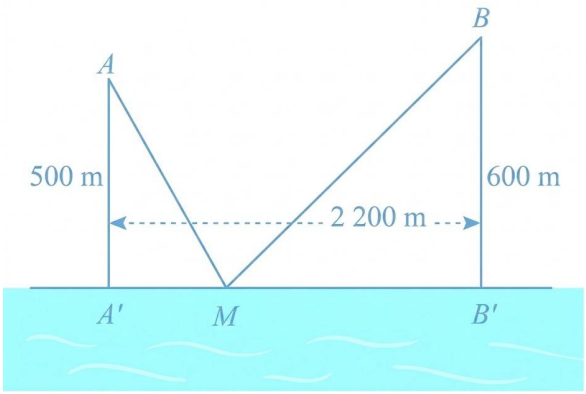
$$f'(x)=-\frac{32}{x^2}+\frac{72}{(10-x)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-20(l)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có ít nhất 20 ngày thì Việt và Nam sử dụng hết lượng xăng được khoán

Câu 75. Có hai xã cùng ở một bên bờ sông. Người ta đo được khoảng cách từ trung tâm A, B của hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500m,\ A'B' = 2200m$ (hình vẽ). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là nhỏ nhất. Khoảng cách AM bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 1000

Đặt $AM = x$ (m).

Suy ra $BM = AB' - AM = 2200 - x$ (m) với $0 < x < 2200$

Áp dụng định lí Pythagore ta tính được:

$$AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{500^2 + x^2}$$

$$BM = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$$

Tổng khoảng cách từ hai vị trí A, B đến vị trí M là

$$D = AM + BM = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$$

Xét hàm số $D(x) = \sqrt{500^2 + x^2} + \sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}$ với $0 < x < 2200$

$$\Rightarrow D'(x) = \frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} + \frac{x - 2200}{\sqrt{600^2 + (2200 - x)^2}}$$

$\Rightarrow D'(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{500^2+x^2}}+\dfrac{x-2200}{\sqrt{600^2+(2200-x)^2}}=0$

$\Rightarrow x=1000$

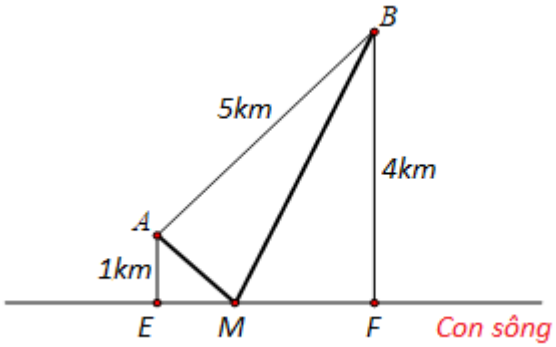
Bảng biến thiên của hàm số $D(x)$) như sau:

x	0	1 000	2 200
D'(x)	–	0	+
D(x)	$500+200\sqrt{130}$	$1100\sqrt{5}$	$600+100\sqrt{509}$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $D(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1100\sqrt{5}$ tại $x=1000$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách cần tìm là $1100\sqrt{5}$ m

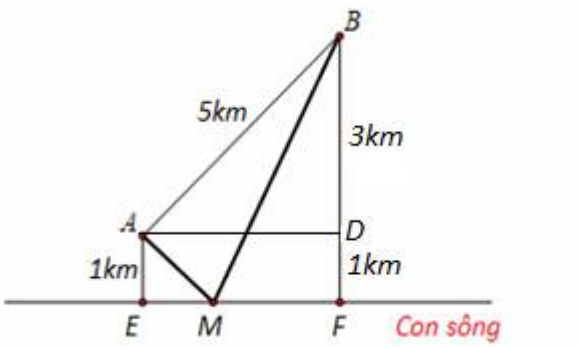
Câu 76. Anh Bảo Toàn đang ở tháp canh kiểm soát cháy rừng được đặt ở vị trí A, nhìn thấy đám cháy ở vị trí B, cách vị trí A khoảng $5km$. Cách vị trí A và B lần lượt $1km$, $4km$ có một con sông, anh Bảo Toàn cần đi đến vị trí điểm M ở bờ sông để lấy nguồn nước rồi đến vị trí B để dập tắt đám cháy (như hình vẽ). Tính khoảng cách ngắn nhất mà anh Bảo Toàn cần đi để dập tắt đám cháy (kết quả làm tròn đến hàng chục của kilômét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,4



Ta giả sử anh Bảo Toàn đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B.

Đặt $EM = x(km)$

Ta dễ dàng tính được:

$BD = BF - DF = BF - AE = 4 - 1 = 3(km)$

$EF = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(km)$

Khi đó ta được: $MF = 4 - x(km)$ với $0 \le x \le 4$

Quãng đường anh Bảo Toàn đi từ A đến M là: $AM = \sqrt{x^2 + 1}(km)$

Quãng đường anh Bảo Toàn đi từ M đến B là: $BM = \sqrt{(4-x)^2 + 4^2}\,(km)$

Quãng đường anh Bảo Toàn đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và mang về B là:

$AM + MB = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16}\,(km)$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16}$ với $x \in [0;4]$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+16}}$$

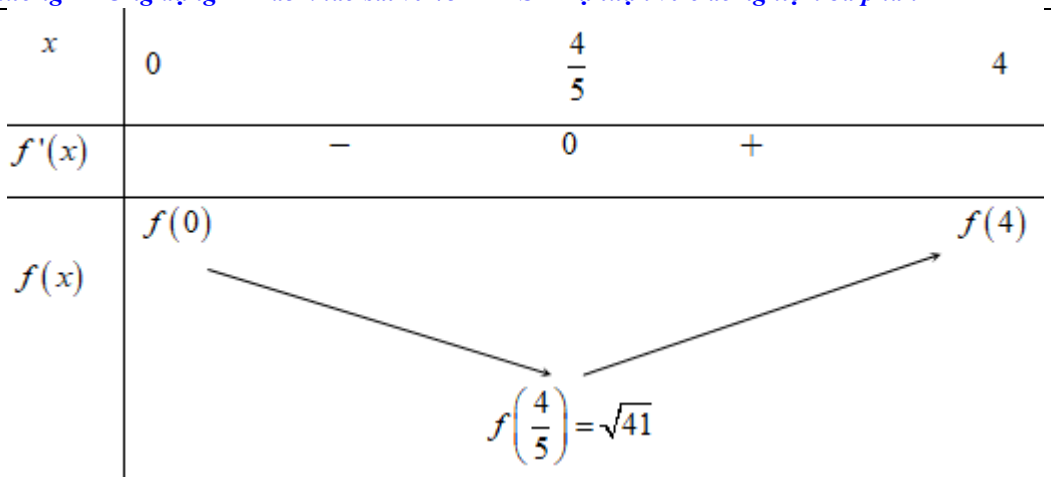
$$\Leftrightarrow x\sqrt{(4-x)^2+16} = (4-x)\sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left[(4-x)^2+16\right] = (4-x)^2(x^2+1) \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x)^2 = (4-x)^2 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \ \ hay \ \ x = -\frac{4}{3} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

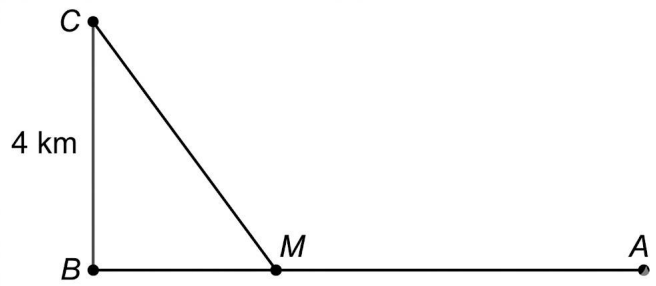
Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{41}\approx 6,4\left(km\right)$ tại $x=\frac{4}{5}$

Khi đó đoạn đường ngắn nhất mà anh Bảo Toàn phải đi là: $6,4\left(km\right)$

Câu 77. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) cách điểm B một đoạn bằng bao nhiêu km để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 3

Gọi khoảng cách BM là x (km), $(0\le x\le 10)$.

Khi đó khoảng cách AM là $10-x\left(km\right)$ (km).

Khoảng cách CM là $\sqrt{16+x^2}\left(km\right)$.

Khi đó chi phí lắp đặt dây điện là: $f\left(x\right)=30\left(10-x\right)+50\sqrt{16+x^2}$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành tìm x để $f\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$f\left(x\right)=30\left(10-x\right)+50\sqrt{16+x^2}$ với $0\le x\le 10$

Ta có: $f'\left(x\right)=-30+\frac{50x}{\sqrt{16+x^2}}$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{16+x^2}=5x$

$\Rightarrow 9\left(16+x^2\right)=25x^2$

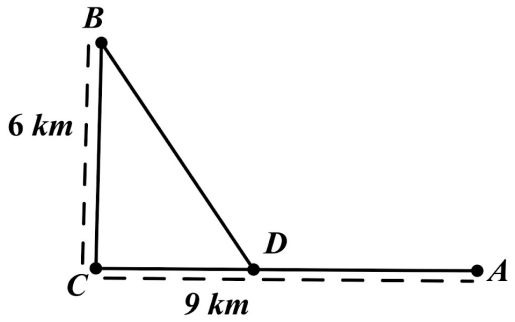
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(loai) \\ x=3(nhan) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	500	$\searrow$	460	$\nearrow$	$100\sqrt{29}$

Từ bảng biến thiên, ta có: chi phí nhỏ nhất để lắp dây điện là 460 triệu đồng khi M cách B một đoạn 3 km trên đoạn AB.

Câu 78. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD (đơn vị kilômét) để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là $100.000.000$ đồng và dưới nước là $260.000.000$ đồng.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6,5

Đặt $AD=x$ km, $x>0$. $CD=9-x$; $BD=\sqrt{36+(9-x)^2}$

Giá thành lắp đặt là: $100.10^6 x+\sqrt{36+(9-x)^2}.260.10^6=10^7\left[10x+26\sqrt{36+(9-x)^2}\right]$

Xét hàm số $f(x)=10x+\sqrt{36+(9-x)^2}.26\ (0<x<9)$

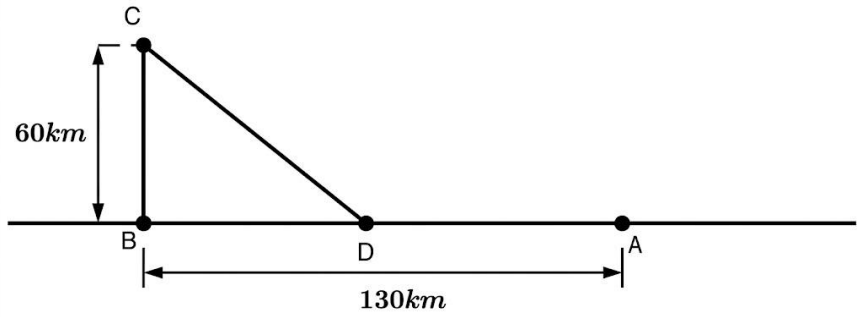
$$f'(x)=10-26.\frac{9-x}{\sqrt{36+(9-x)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{36+(9-x)^2}-26(9-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 9 \\ -576x^2+10368x-43056=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{13}{2}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;9)$ ta thấy hàm số đạy giá trị nhỏ nhất khi $x=\frac{13}{2}$.

Vậy $AD=6,5$ km.

Câu 79. Một kho hàng được đặt tại ví trí A trên bến cảng cần được chuyển tới kho C trên một đảo, biết rằng khoảng cách ngắn nhất từ kho C đến bờ biển AB bằng độ dài $CB=60\,km$ và khoảng cách giữa 2 điểm A, B là $AB=130\,km$ (như hình vẽ).



Chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km. Hỏi phải chọn điểm trung chuyển hàng D (giữa đường bộ và đường thủy) cách kho A một khoảng bằng bao nhiêu kilômét thì tổng chi phí vận chuyển hàng từ kho A đến kho C là ít nhất?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 85

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BD=x(km)$ thì ta được: $DA=130-x(km)$, $CD=\sqrt{x^2+3600}(km)$ với $0\le x\le 130$

Theo đề bài, chi phí để vận chuyển toàn bộ kho hàng bằng đường bộ là 300.000 đồng/km, trong khi đó chi phí vận chuyển hàng bằng đường thủy là 500.000 đồng/km, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$$f(x)=300000.(130-x)+500000.\sqrt{x^2+3600} \quad \text{với } x\in[0;130]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xác định được vị trí điểm D.

$$f'(x)=-300000+500000.\frac{x}{\sqrt{x^2+3600}}$$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow -300000+500000.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3600}}=0$

$\Leftrightarrow -300000\sqrt{x^2+3600}+500000x=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3600}=5x$

$\Rightarrow x^2=2025$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-45(L) \\ x=45(N) \end{array}\right.$

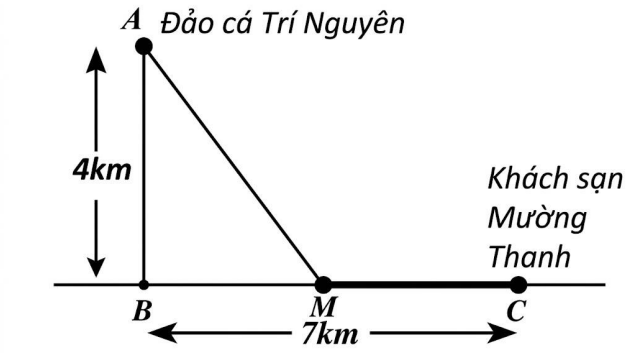
$\Rightarrow x=45$

Bảng biến thiên:

x	0		45		130
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(45)$	$\nearrow$	$f(130)$

Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(45)$ tại $x=45$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm D nằm cách A một đoạn $DA=130-45=85km$.

Câu 80. Đảo cá Trí Nguyên Nha Trang ở vị trí A cách đường Trần Phú một khoảng $AB=4(km)$. Trên đường Trần Phú có khách sạn Mường Thanh ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7(km)$ (như hình vẽ).

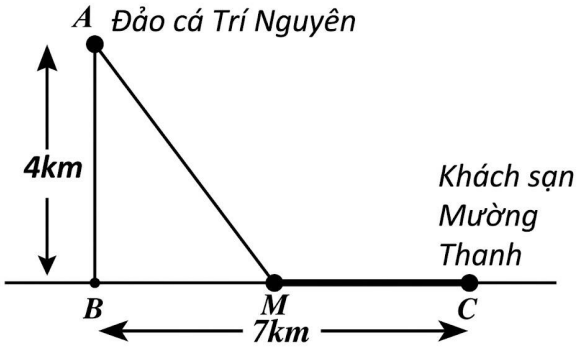


Bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí Đảo cá Trí Nguyên đến vị trí M trên đường Trần Phú với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe taxi từ M đến khách sạn Mường Thanh với vận tốc $10(km/h)$. Xác định khoảng cách từ M đến khách sạn Mường Thanh để bạn Minh Hiền đi từ Đảo cá Trí Nguyên đến khách sạn Mường Thanh là nhanh nhất (đơn vị kilômét).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4



Đặt $BM = x(km) \Rightarrow MC = 7 - x(km)$ với $0 \le x \le 7$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi ca nô từ vị trí từ A đến M là: $t_{AM} = \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{6}(h)$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi xe taxi từ M đến C là: $t_{MC} = \dfrac{7-x}{10}(h)$

Thời gian bạn Minh Hiền phải đi từ A đến C: $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{6} + \dfrac{7-x}{10}(h)$ với $0 \le x \le 7$

Khi đó: $t'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+16}} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{5x - 3\sqrt{x^2+16}}{30\sqrt{x^2+16}}$ với $0 \le x \le 7$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3\sqrt{x^2+16} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+16} = 5x \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3(L) \\ x = 3(N) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		3		7
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{41}{30}$	$\searrow$	$\frac{37}{30}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{65}}{6}$

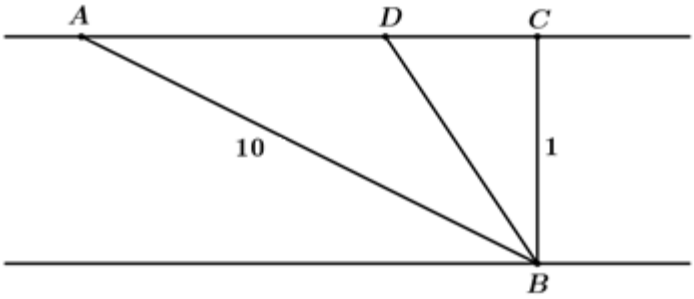
Từ bảng biến thiên, ta có: giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\dfrac{37}{30}$ tại $x = 3$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách khách sạn Mường Thanh một đoạn $MC = 7 - 3 = 4km$

Câu 81. Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sỹ 1km theo đường chim bay và chiến sỹ cách bờ bên kia 100m. Chiến sỹ phải bơi $a\sqrt{2}$ mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 75



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC=1; AB=10;\ AC=\sqrt{100-1}=3\sqrt{11}.$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là 1 đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD=x\Rightarrow CD=\sqrt{x^2-1}.$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD=AC-CD=3\sqrt{11}-\sqrt{x^2-1}.$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t=\dfrac{3\sqrt{11}-\sqrt{x^2-1}}{3}+\dfrac{x}{1}=\sqrt{11}-\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-1}+x.$

Xét hàm $f(x)=\sqrt{11}-\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-1}+x$ có $f'(x)=1-\dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(tm)\\ x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}(loai)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	1		$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min}\Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.100=75\sqrt{2}(m)\Rightarrow a=75.$

Câu 82. Chi phí về nhiên liệu của một tàu hỏa được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của km/h).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 15

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi $1km$ là $\frac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480.\frac{1}{x}=\frac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử, phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y=kx^3\Rightarrow k=\frac{y}{x^3}$.

Với $x=10\Rightarrow y=\frac{1}{10}.30=3$ (ngàn) $\Rightarrow k=\frac{3}{1000}=0,003\Rightarrow y=0,003x^3$.

Do đó, tổng chi phí là: $T=\frac{480}{x}+0,003x^3$.

Khảo sát hàm: $T(x)=\frac{480}{x}+0,003x^3$ với $x>0$

$T'(x)=-\frac{480}{x^2}+0,009x^2$

$T'(x)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{480}{x^2}+0,009x^2=0$

$\Leftrightarrow x^4=\frac{480}{0,009}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-\sqrt{\frac{480}{0,009}}(L) \\ x^2=\sqrt{\frac{480}{0,009}}(N) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}(L) \\ x=\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}$		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(50)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $T(x)$ đạt GTNN khi $x=\sqrt[4]{\frac{480}{0,009}}\approx 15(km/h)$.

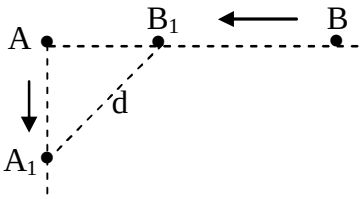
Câu 83. Hai con tàu đang ở hai vị trí A, B cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, tàu thứ nhất ở vị trí A chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu thứ hai ở vị trí B kia chạy về hướng vị trí tàu A (vị trí A lúc đầu của tàu thứ nhất khi chưa khởi hành) với vận tốc 7 hải lý/ giờ (như hình vẽ). Hãy xác định thời điểm (giờ) mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất (kết quả lấy tròn đến phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 0,41



Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d (tàu A ở vị trí A_1 và tàu B ở vị trí B_1)

Ta có $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5-7t)^2 + (6t)^2 = 85t^2 - 70t + 25$

Suy ra $d = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$.

Xét hàm số $f(t) = 85t^2 - 70t + 25$ với $t > 0$

$f'(t) = 170t - 70$

$f'(t) = 0$

$\Leftrightarrow 170t - 70 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{7}{17}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{7}{17}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$f(0)$	↘	$f\left(\frac{7}{17}\right)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: d nhỏ nhất khi $t=\dfrac{7}{17}\approx 0,41$ (giờ), khi đó ta có $d=\sqrt{f\left(\dfrac{7}{17}\right)}\approx 3,25$ hải lý.

Chú ý: Để tìm $f(t)$ nhỏ nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn: $f(t)=85t^2-70t+25$

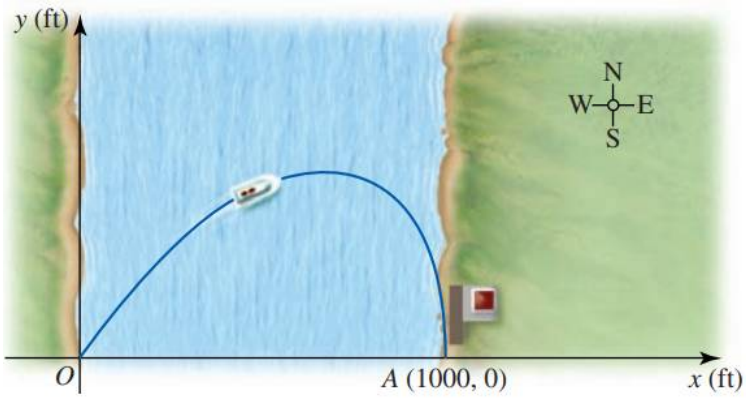
$$\begin{aligned} f(t)&=85t^2-70t+25\\ &=85\left(t^2-\frac{14}{17}t\right)+25\\ &=85\left[t^2-2.\frac{7}{17}t+\left(\frac{7}{17}\right)^2-\left(\frac{7}{17}\right)^2\right]+25\\ &=85\left(t-\frac{7}{17}\right)^2+\frac{180}{17}\ge\frac{180}{17}\end{aligned}$$

Vậy $\min f(t)=\dfrac{180}{17}$ khi $t=\dfrac{7}{17}$ hay $\min d=\sqrt{\dfrac{180}{17}}$ khi $t=\dfrac{7}{17}$

Câu 84. Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ.

Người ta cho rằng đường đi của thuyền là $y=500\left[\left(\dfrac{1000-x}{1000}\right)^{3/4}-\left(\dfrac{1000-x}{1000}\right)^{5/4}\right]$, $0\le x\le 1000$

Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 400

Đặt $u=\dfrac{1000-x}{1000}$, thì $0\le u\le 1$, $x=1000(1-u)$.

Khi đó $y(u)=500\left(u^{3/4}-u^{5/4}\right)$.

Tính đạo hàm theo u: $500\left(\dfrac{3}{4}u^{-1/4}-\dfrac{5}{4}u^{1/4}\right)=500\cdot\dfrac{1}{4}u^{-1/4}(3-5u)$

Vì $u^{-1/4}>0$ trên $(0,1]$, ta chỉ cần giải $3-5u=0\Rightarrow u=\dfrac{3}{5}=0,6$

Lập bảng xét dấu ta có

u	0		$0,6$		1
$y'(u)$		$+$	0	$-$	

Suy ra $y(u)$ đạt điểm cực đại tại $u=0,6$

Chuyển lại thành x và tính $y_{CĐ}$

- Tương ứng $x=1000(1-u)=1000\cdot 0,4=400$.

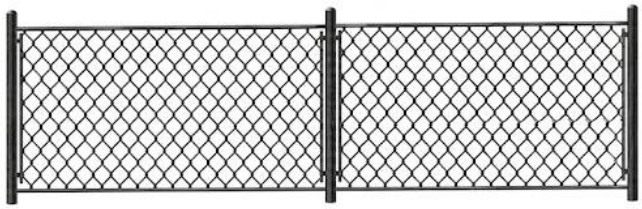
- Độ lệch bắc cực đại là $y_{CĐ}=500\left((0,6)^{3/4}-(0,6)^{5/4}\right)\approx 500(0,6817-0,5286)\approx 76,6$

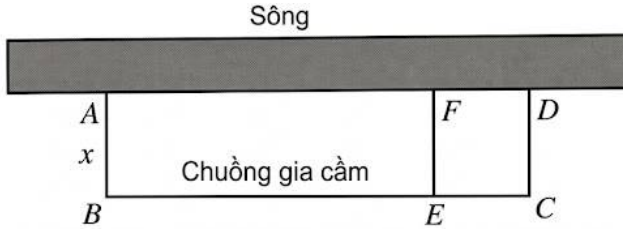
Do đó giá trị $y_{CĐ}\approx 76,6$ tại $x=400$

Vậy

Trong suốt hành trình, con thuyền bị dòng nước đẩy lệch về phía bắc cực đại khoảng 76,6 (đơn vị chiều dài) khi nó đã đi được $x=400$ (đơn vị tương ứng) về phía đông.

Câu 85. Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn $240\,m$ hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu mét vuông?





Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 4800

Xét hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh phải rào AB, BC, CD, EF như hình vẽ. Đặt $AB=x(x>0)$.

Khi đó ta có $BC=240-3x>0\Rightarrow x<80$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S=x(240-3x)=240x-3x^2$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0<x<80$

Xét $f(x)=240x-3x^2\Rightarrow f'(x)=240-6x,\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=40.$

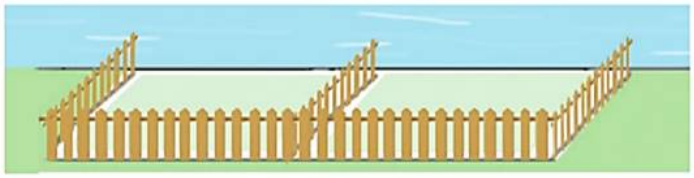
Ta có $f''(x)=-6<0,\forall x\in(0;80).$

Do đó $\max S=\max_{x\in(0;80)} f(x)=f(40)=4800\Leftrightarrow x=40$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể bao quanh là $4800\,m^2$.

Câu 86. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (*Hình vẽ*). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào

song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất (m^2) của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 6250

Giả sử chiều dài từng mặt của ba mặt hàng rào song song nhau là x (m) $(x>0)$.

Chi phí để làm ba mặt hàng rào song song là: $3.x.50000=150000x$ (đồng).

Chi phí để làm mặt hàng rào song song với bờ sông là: $15000000-150000x$ (đồng).

Chiều dài của mặt hàng rào song song với bờ sông là

$$\frac{15000000-15000x}{60000}=\frac{1500-15x}{6}(m)$$

Rõ ràng, x phải thỏa mãn điều kiện $0<x<100$.

Giả sử diện tích hàng rào không đáng kể, khi đó diện tích hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là

$$S(x)=\frac{(1500-15x)x}{6}=-\frac{15}{6}x^2+\frac{1500}{6}x(m^2)$$

Xét hàm số $S(x)=-\frac{15}{6}x^2+\frac{1500}{6}x$ với $0<x<100$

$$\Rightarrow S'(x)=-\frac{15}{3}x+\frac{1500}{6}$$

$$\Rightarrow S'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{15}{3}x+\frac{1500}{6}=0$$

$$\Leftrightarrow x=50(nhan)$$

Bảng biến thiên của hàm số S(x) như sau:

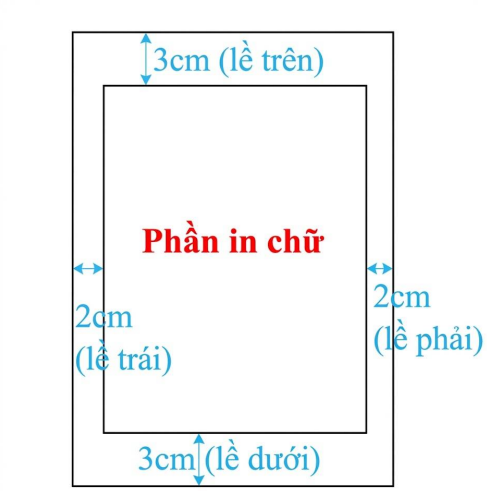
x	0		50		100
S′(x)		+	0	–	
S(x)	0	↗	6 250	↘	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng (0; 100), hàm số S(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 6250 tại $x=50$.

Vậy diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào là 6 250 m^2.

Câu 87. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ (như hình vẽ). Kích

thước tối ưu của trang sách là $a\times b$ (cm) thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất. Tính giá trị $a+b$.



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 40

Gọi x (cm) là chiều rộng của trang sách.

Khi đó, chiều dài của trang sách là $\frac{384}{x}$ (cm).

Sau khi để lề thì phần in chữ có dạng hình chữ nhật có chiều rộng là $x-4$ (cm) và chiều dài là $\frac{384}{x}-6$ (cm).

Rõ ràng, x phải thỏa mãn điều kiện $x\in(4;64)$.

Diện tích phần in chữ trên trang sách là

$$S(x)=(x-4)\left(\frac{384}{x}-6\right)=\frac{-6x^2+408x-1536}{x}\left(cm^2\right)$$

Xét hàm số $S(x)=\frac{-6x^2+408x-1536}{x}$ với $x\in(4;64)$.

$$S'(x)=\frac{-6x^2+1536}{x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^2+1536}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -6x^2+1536=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-16(loai) \\ x=16(nhan) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số S(x) như sau:

x	4		16		64
S'(x)		+	0	–	
S(x)	0	↗	216	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(4;64)$, hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 216 tại $x=16$. Khi đó, $\frac{384}{x}=\frac{384}{16}=24$

Vậy kích thước tối ưu của trang sách là 16 × 24 (cm) thì in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất.

$\Rightarrow a+b=40$

Câu 88. Bác Nam chia đất cho con trai để người con xây dựng nhà xưởng kinh doanh, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800m$ và xây dựng nhà xưởng kinh doanh sao cho diện tích mặt bằng lớn nhất, khi đó chiều dài hình chữ nhật đó bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 200

Gọi $x(m)$ là chiều dài của miếng đất, với $0<x<400$

Suy ra chiều rộng của miếng đất là $\frac{800-2x}{2}=400-x(m)$

Diện tích miếng đất là : $S=x(400-x)=400x-x^2\left(m^2\right)$

Xét hàm số: $S(x)=-x^2+400x$ với $0<x<400$

$S(x)=-2x+400$.

$S'(x)=0$

$\Leftrightarrow x=200$

Bảng biến thiên:

x	0		200		400
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$S(0)$	↗	40000	↘	$S(400)$

Từ bảng biến thiên ta được: $\max S(x) = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$

Vậy chiều của miếng đất hình chữ nhật là $200m$

Chú ý: Để tìm $S(x) = -x^2 + 400x$ lớn nhất ta dùng kiến thức lớp 8 như sau nhanh hơn:

$$\begin{aligned} S(x) &= -x^2 + 400x \\ &= -\left(x^2 - 2.200x + 40000 - 40000\right) \\ &= -(x-200)^2 + 40000 \le 40000 \end{aligned}$$

Vậy $\max S(x) = 40000$ khi $x = 200$

Câu 89. Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích $200m^2$ để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (*xem hình vẽ minh hoạ bên dưới*). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu mét, để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 20

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \le 15$.

Diện tích khu đất này là $200\left(m^2\right)$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}(m)$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}(m)$.

Xét hàm số: $L(x)=2x+\dfrac{200}{x}$, với $x\in(0;15]$.

Ta có: $L'(x)=2-\dfrac{200}{x^2}=\dfrac{2x^2-200}{x^2}$; $L'(x)=0\Leftrightarrow x=10$ (do $x>0$).

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}L(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x+\dfrac{200}{x}\right)=+\infty$;

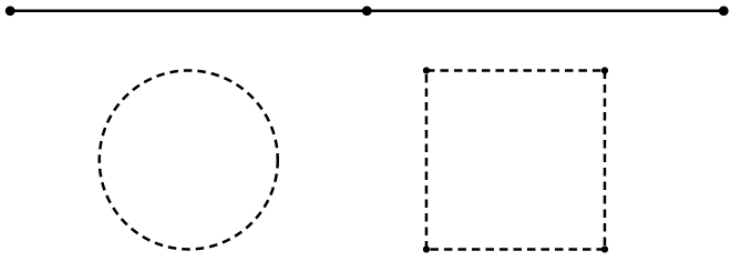
$L(10)=40$; $L(15)=\dfrac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$L'(x)$		$-$	0	$+$	
$L(x)$	$+\infty$	↘	40	↗	$\dfrac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là $40\,m$ khi chiều rộng khu đất này là $x=10(m)$ (và chiều dài là $\dfrac{200}{10}=20(m)$).

Câu 90. Cắt một đoạn dây dài $30m$ thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 (m^2), đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (m^2) (như hình vẽ dưới)



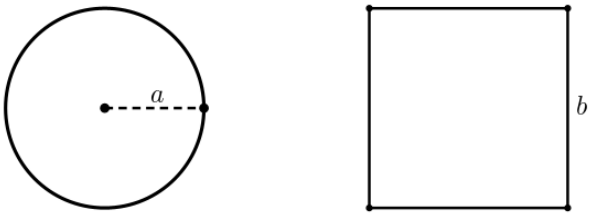
Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T=S_1+S_2$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 31,5

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30-x$ (mét)



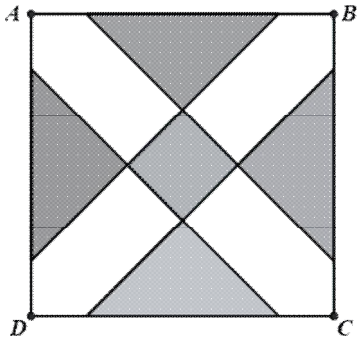
Khi đó $x=2\pi a\Leftrightarrow a=\dfrac{x}{2\pi}\Rightarrow S_1=\pi a^2=\dfrac{x^2}{4\pi}$

Mặt khác: $30-x=4b\Rightarrow b=\dfrac{30-x}{4}\Rightarrow S^2=b^2=\left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1+S_2=\dfrac{x^2}{4\pi}+\left(\dfrac{30-x}{4}\right)^2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-60\pi x+900\pi}{16\pi}$

Dễ dàng tính được $(S_1+S_2)_{\min}=\min f(x)=f\left(\dfrac{30\pi}{\pi+4}\right)\approx 31,5(m^2)$.

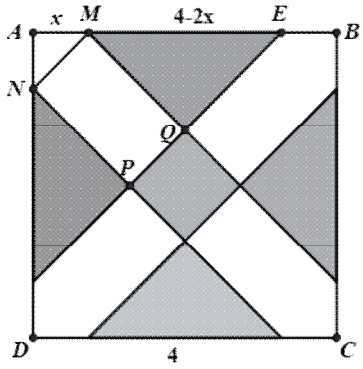
Câu 91. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 5,33



Đặt $AM=x\ (0<x<4)\Rightarrow ME=4-2x$.

$2MQ^2=(4-2x)^2\Leftrightarrow MQ^2=2(2-x)^2\Leftrightarrow MQ=\sqrt{2(2-x)}$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$S=4.\dfrac{MQ^2}{2}+PQ^2=2MQ^2+MN^2=(4-2x)^2+\left(x\sqrt{2}\right)^2=6x^2-16x+16$

$S'=12x^2-16$

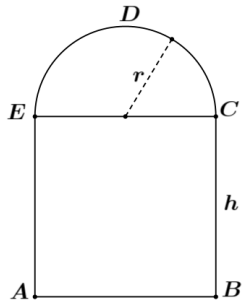
$S'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$4/3$		4
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	$\frac{16}{3}$	↗	

Vậy $S_{\min}=\frac{16}{3}\approx 5,33$

Câu 92. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $0,56$

Ta có $2(h+r)+\pi r=4 \Rightarrow h=\frac{4-2r-\pi r}{2}$.

Diện tích của khung cửa là $S=\frac{1}{2}\pi r^2+2rh=\frac{1}{2}\pi r^2+2r\left(\frac{4-2r-\pi r}{2}\right)=-\frac{\pi+4}{2}.r^2+4r$.

Ta có $h=\frac{4-2r-\pi r}{2}>0\Leftrightarrow 0<r<\frac{4}{\pi+2}$.

Xét hàm số $S(r)=-\frac{\pi+4}{2}.r^2+4r$ trên $\left(0;\frac{4}{\pi+2}\right)$

$S'(r)=-(\pi+4)r+4=0 \Leftrightarrow r=\frac{4}{\pi+4}$

Bảng biến thiên

x	0		$4/(\pi+4)$		$4/(\pi+2)$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{8}{\pi+4}$	↘	

Vậy $S(r)$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow r=\frac{4}{\pi+4}\approx 0,56m$.

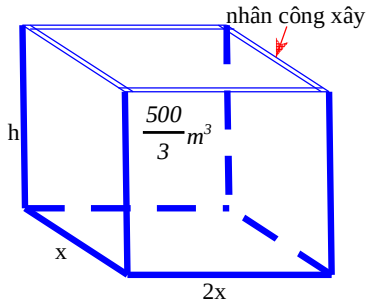
Câu 93. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $\frac{500}{3}m^3$

Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^3. Nếu biết xác định kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất, chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu triệu đồng?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 75



.

Gọi các yếu tố như hình vẽ, diện tích phần phải xây của bể là phần xung quanh và đáy.

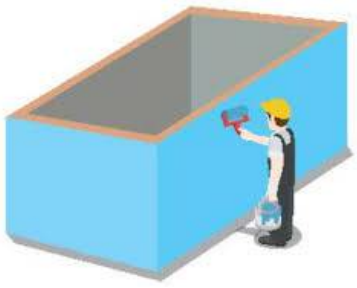
$V = 2x^2.h = \frac{500}{3}; S = 2x^2 + 6xh$

$\Rightarrow S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \overset{co-si}{\geq} 150$

Số chi phí thấp nhất là $150 \times 500000 = 75$ triệu.

Chú ý: Để tìm $S = 2x^2 + \frac{500}{x}$ nhỏ nhất ta dùng đạo hàm dễ hiểu hơn nhưng lại dài dòng hơn.

Câu 94. Thầy Tiến muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết giá thuê nhân công xây bể là 500000 đồng/m^2, hỏi thầy Tiến cần tốn chi phí thuê công nhân thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 84,7

Gọi $x(m)$ chiều rộng của đáy bể , với $x > 0$

Ta có:

Chiều dài của đáy bể là $2x(m)$

Diện tích của đáy bể là $2x.x = 2x^2\left(m^2\right)$

Chiều cao của bể là: $\frac{200}{2x^2} = \frac{100}{x^2}(m)$,

Diện tích các mặt bên và mặt đáy của bể là: $S = 2x.\frac{100}{x^2} + 2.2x.\frac{100}{x^2} + 2x^2 = \frac{600}{x} + 2x^2\left(m^2\right)$

Chi phí thuê công nhân xây bể là: $T = 500000\left(\frac{600}{x} + 2x^2\right)$ đồng

Xét hàm số $T(x) = 500000\left(\frac{600}{x} + 2x^2\right)$ với $x > 0$

$T'(x) = 500000\left(-\frac{600}{x^2} + 4x\right)$

$T'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{600}{x^2} + 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x^3 = 600$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{150}$		$+\infty$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$T(0)$	↘	$T\left(\sqrt[3]{150}\right)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTNN của $T(x)$ là $T\left(\sqrt[3]{150}\right) \approx 84693243$ khi $x = \sqrt[3]{150}$

Vậy chi phí thấp nhất gần bằng là $84,7$ triệu đồng

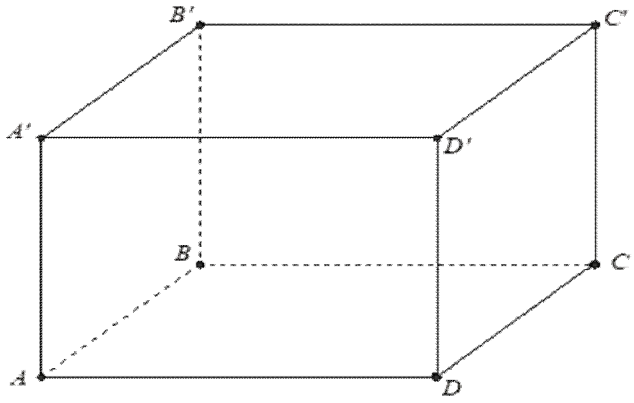
Câu 95. Ông Việt dự định sử dụng hết $6,7\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: $1,57$



Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h=\dfrac{6,7-2x^2}{6x}$,

Ta có : $h>0$ nên $x<\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

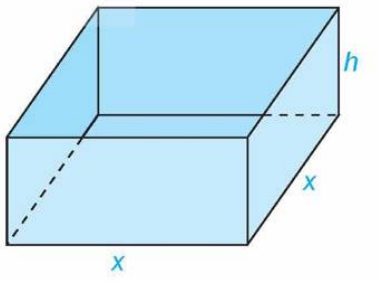
Thể tích bể cá là $V(x)=\dfrac{6,7x-2x^3}{3}$ và $V'(x)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$1,57m^3$	↘	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 96. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như hình vẽ.



Biết khi $x = x_0; h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng bao nhiêu?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 9

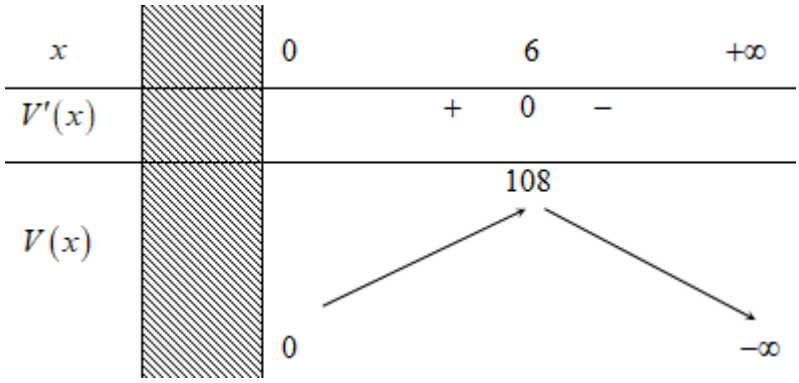
Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(cm, x > 0)$ và chiều cao là $h(cm, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108cm^2$ nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \dfrac{108 - x^2}{4x}(cm)$

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2.h = x^2 \cdot \dfrac{108 - x^2}{4x} = \dfrac{108x - x^3}{4}\left(cm^3\right)$

Ta có: $V' = \dfrac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$)

Bảng biến thiên:

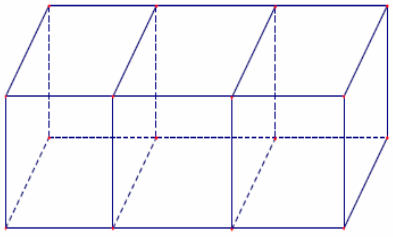


Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6cm$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\dfrac{108 - 6^2}{4.6} = 3(cm)$.

$\Rightarrow x_0 + h_0 = 9$

Câu 97. Một người xây nhà xưởng hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là $1152m^2$ và chiều cao cố định. Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà xưởng thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước $a \times b$ (đơn vị là mét và $a < b$) thì tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường), khi đó giá trị $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

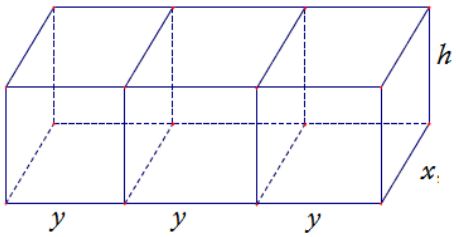


Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 64

Đặt x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao mỗi phòng.



Theo giả thiết, ta có $x.3y=1152 \Leftrightarrow y=\dfrac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp}=4xh+6yh+3xy=4xh+6.\dfrac{384}{x}h+1152=4h\left(x+\dfrac{576}{x}\right)+1152$.

Vì h không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(x)=x+\dfrac{576}{x}$ (với $x>0$) nhỏ nhất.

Xét hàm số: $f(x)=x+\dfrac{576}{x}$ với $x>0$

$f'(x)=1-\dfrac{576}{x^2}$

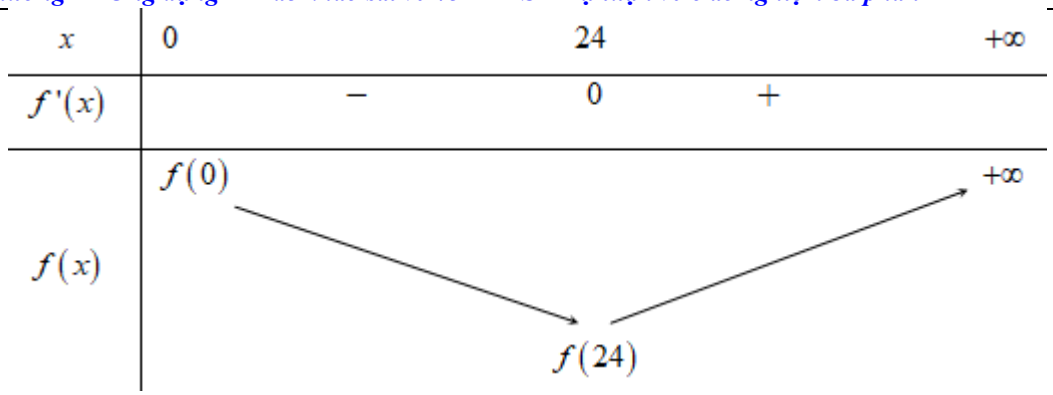
$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{576}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-576=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-24(L) \\ x=24(N) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: GTNN của $f(x)$ là $f(24)=48$ khi $x=24$

Vậy chiều dài, chiều rộng lần lượt là: $16\text{m}\times 24\text{m}$

$\Rightarrow a+2b=64$

Chú ý: Để tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)=x+\dfrac{576}{x}$ (với $x>0$) ta có thể dùng Cauchy như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy $x+\dfrac{576}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{576}{x}}=48$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{576}{x}\Leftrightarrow x=24\Rightarrow y=16$.

Câu 98. Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi $x\,(\text{cm})$ là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}\,(\text{cm}^2)$ là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười của mét)?

Trả lời: ……..

Lời giải

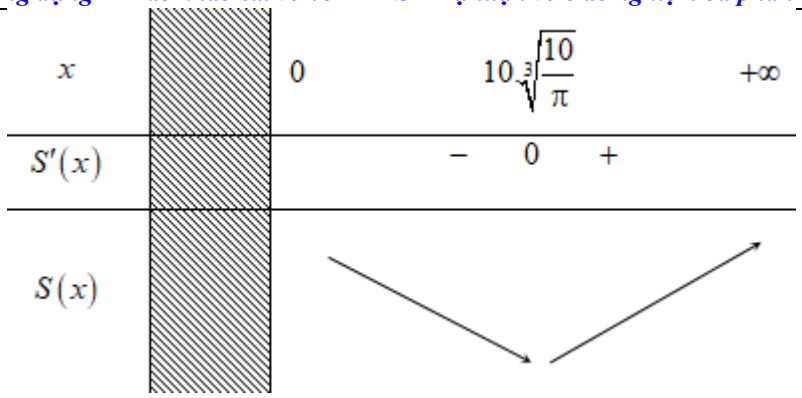
Đáp án: 14,7

Ta có: $S(x)=\pi x^2+\dfrac{20000}{x}$

Đạo hàm $S'(x)=2\pi x-\dfrac{20000}{x^2}=\dfrac{2\pi x^3-20000}{x^2}$.

Giải phương trình $S'(x)=0\Leftrightarrow 2\pi x^3-20000=0\Leftrightarrow x^3=\dfrac{10000}{\pi}\Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

Bảng biến thiên:



Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x=10\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\approx 14,7(\text{cm})$.

Câu 99. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi chứa dầu với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi chiều cao của thùng bằng bao nhiêu mét để tiết kiệm vật liệu nhất?



Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 2

Đổi $2000\pi(lit)=2\pi(m^3)$.

Gọi bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $x(m)$ và $h(m)$.

Ta có thể tích thùng phi $V=\pi x^2.h=2\pi \Rightarrow h=\frac{2}{x^2}$

Vật liệu tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần nên ta chỉ cần tìm x để diện tích toàn phần bé nhất.

$$S_{tp}=2\pi x^2+2\pi x.h=2\pi x\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=2\pi\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$$

Xét hàm số: $f(x)=2\pi\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$ với $x>0$

$$f'(x)=2\pi\left(2x-\frac{2}{x^2}\right)$$

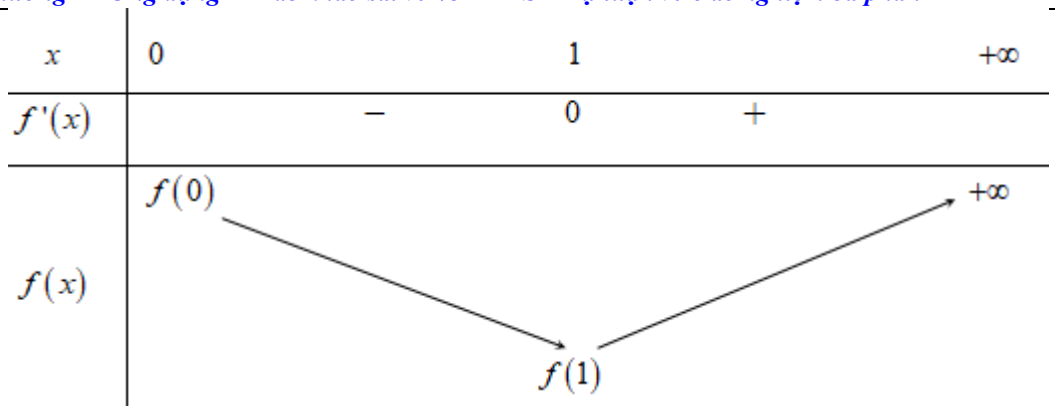
$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{2}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow x^3=1$

$\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy: $f(x)$ GTNN tại $x=1$, khi đó $h=2$

Câu 100. Một công ty muốn thiết kế thùng đựng hàng dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp có thể tích là $100dm^3$. Để tiết kiệm vật liệu người ta cần thiết kế thùng sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng nhỏ nhất. Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng nhỏ nhất bằng bao nhiêu decimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……..

Lời giải

Đáp án: 103

Gọi x (dm) là độ dài cạnh đáy của lăng trụ.$(0<x<10)$

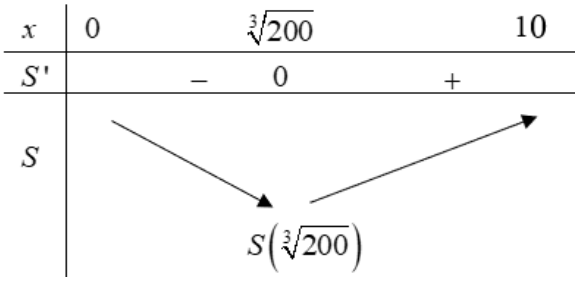
Ta có chiều cao của lăng trụ là $\frac{100}{x^2}$ dm.

Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là:

$$S=x^2+4.x.\frac{100}{x^2}=x^2+\frac{400}{x}$$

$$S'=2x-\frac{400}{x^2},\ S'=0\Leftrightarrow 2x-\frac{400}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{200}$$

BBT:



Diện tích nhỏ nhất là $S\left(\sqrt[3]{200}\right)\approx 103(dm^2)$