

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ QUÝ ĐÔN

Môn: TOÁN – Lớp 11

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 27/01/2026 (Vòng 1)

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1. (5,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = \frac{2026u_n^2}{2026u_n - 2025} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Tìm tất cả các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho dãy số (v_n) , với $v_n = u_n \cdot n^\alpha$, là hội tụ và có giới hạn khác 0.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) + f(-x + f(f(y))) = 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh f là một song ánh.

b) Tính $f(0)$ và tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (không phải là đường kính). Điểm A di động trên cung lớn BC (A khác B, C). Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là chân đường cao từ D xuống EF . Các tia BP, CP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại Y, Z .

a) Chứng minh YZ là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

b) Tia IP cắt đường tròn (O) tại điểm R . Chứng minh rằng khi A di chuyển trên cung lớn BC thì đường thẳng RD luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (5,0 điểm) Với mỗi số tự nhiên m , ta kí hiệu $v_2(m)$ là số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn $2^k \mid m$. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn các điều kiện:

(i) n không là một lũy thừa của 3;

(ii) Dãy số $v_2(3^0 - n), v_2(3^1 - n), v_2(3^2 - n), \dots$ là một dãy số không bị chặn.

————— **Hết** —————

Lời giải tham khảo

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = \frac{2026u_n^2}{2026u_n - 2025} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Tìm tất cả các giá trị $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho dãy số (v_n) , với $v_n = u_n \cdot n^\alpha$, là hội tụ và có giới hạn khác 0.

LỜI GIẢI.

a) Ta có $u_1 = 3 > 1$. Giả sử $u_n > 1$ thì $2026u_n^2 > 2026u_n - 2025 > 0$ nên $u_{n+1} > 1$. Do đó bằng quy nạp ta suy ra $u_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2026u_n^2}{2026u_n - 2025} - u_n = \frac{2026u_n^2 - u_n(2026u_n - 2025)}{2026u_n - 2025} = \frac{2025u_n}{2026u_n - 2025} > 0$$

Do đó $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên thì theo định lý Weierstrass, tồn tại $L \geq 3$ để $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Khi đó trong công thức truy hồi, cho $n \rightarrow +\infty$ thì

$$L = \frac{2026L^2}{2026L - 2025} \Rightarrow L = 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy dãy u_n không bị chặn trên hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Do (u_n) và (n) đều là hai dãy không bị chặn trên nên theo định lý Stolz, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2025u_n}{2026u_n - 2025} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2025}{2026 - \frac{2025}{u_n}} = \frac{2025}{2026}.$$

Ta có: $v_n = u_n \cdot n^\alpha = \frac{u_n}{n} \cdot n^{\alpha+1}$

Xét các trường hợp của α :

Nếu $\alpha + 1 > 0$ (tức $\alpha > -1$): $\lim v_n = \lim \left(\frac{u_n}{n} \right) \cdot \lim(n^{\alpha+1}) = +\infty$. (Loại)

Nếu $\alpha + 1 < 0$ (tức $\alpha < -1$): $\lim v_n = \lim \left(\frac{u_n}{n} \right) \cdot \lim(n^{\alpha+1}) = \frac{2025}{2026} \cdot 0 = 0$. (Loại vì yêu cầu giới hạn khác 0).

Nếu $\alpha + 1 = 0$ (tức $\alpha = -1$): $\lim v_n = \lim \left(\frac{u_n}{n} \cdot n^0 \right) = \lim \left(\frac{u_n}{n} \right) = \frac{2025}{2026} \neq 0$. (Thỏa mãn)

Vậy $\alpha = -1$ là giá trị duy nhất thỏa đề.

Bài 2.

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) + f(-x + f(f(y))) = 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh f là một song ánh.

b) Tính $f(0)$ và tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

LỜI GIẢI.

$$f(f(x) + y) + f(-x + f(f(y))) = 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

a) Trong (1) thay $x = f(f(y))$ thì ta có được

$$f(f(f(f(y))) + y) = 2y - f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do $2y - f(0)$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên ta có ngay f toàn ánh. Khi đó tồn tại c sao cho $f(c) = 0$. Với x_1, x_2 là hai số thực thỏa mãn $f(x_1) = f(x_2)$. Thay $x = c$ và thay lần lượt $y = x_1, y = x_2$ vào (1), ta được

$$2x_1 = f(x_1) + f(-c + f(f(x_1))) = f(x_2) + f(-c + f(f(x_2))) = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Vậy f là đơn ánh, suy ra f là một song ánh.

b) Do f song ánh nên tồn tại duy nhất số thực t để $f(t) = 0$. Trong (1) ta thay $x = y = 0$ thì ta được

$$f(f(0)) + f(f(f(0))) = 0 \Rightarrow f(f(f(0))) = -f(f(0)).$$

Ngoài ra, nếu ta thay $y = 0$ và $x = f(f(0))$ trong (1) thì ta cũng có

$$f(f(f(f(0)))) + f(0) = 0.$$

Và nếu thay $x = t$ và $y = 0$ thì ta cũng sẽ có

$$f(0) + f(-t + f(f(0))) = 0 \Rightarrow f(-t + f(f(0))) = f(f(f(f(0)))) \Rightarrow -t + f(f(0)) = f(f(f(0))).$$

Mà $f(f(f(0))) = -f(f(0))$ nên $t = 2f(f(0))$. Như vậy, ta có thể thay $x = -f(f(0))$ và $y = 0$ trong (1) thì ta được

$$f(f(-f(f(0)))) = 0 \Rightarrow f(-f(f(0))) = t.$$

Mà $-f(f(0)) = f(f(f(0)))$ nên $f(f(f(f(0)))) = 0$ như vậy ta thu được $f(0) + t = 0$. Bây giờ, ta thay $x = y = t$ vào (1) thì được $f(-t + f(0)) = 2t$ hay $f(-2t) = 2t$, từ đó lại cho $x = -2t, y = t$ vào (1) thì

$$f(2t + t) + f(2t + f(0)) = 2t \Rightarrow f(3t) = 2t = f(-2t) \Rightarrow 3t = -2t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Tiếp theo, để tìm tất cả hàm số f thỏa mãn thì ta thay $x = 0$ vào (1) thì ta có

$$\boxed{f(y) + f(f(f(y))) = 2y, \quad \forall y \in \mathbb{R}} \quad (2)$$

Rồi thay $y = 0$ vào (1) thì được

$$\boxed{f(f(x)) = -f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}} \quad (3).$$

Từ **(3)** ta có $f(f(-f(x))) = -f(-(-f(x))) = -f(f(x)) = f(-x)$ nên khi thay y bởi $-f(x)$ vào **(1)** thì ta có

$$f(-x + f(-x)) = -2f(x) \Rightarrow f(x + f(x)) = 2 \cdot (-f(-x)) = 2f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, ta cũng có thể thay $x = -f(f(y))$ trong **(1)** thì thu được

$$\begin{aligned} f(f(f(f(y)))) + y = 2y &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(3y - f(y)) = 2y \Rightarrow f(3f(f(y)) - f(f(f(y)))) = 2f(f(y)) \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(3f(f(y)) + f(y) - 2y) = 2f(f(y)), \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Từ đây ta có được

$$\begin{aligned} f(3f(f(y)) + f(y) - 2y) &= f(y + f(y)) \Rightarrow 3f(f(y)) = 3y \Rightarrow f(f(y)) = y \\ &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(-y) = -y \Rightarrow f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy thỏa, vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. □

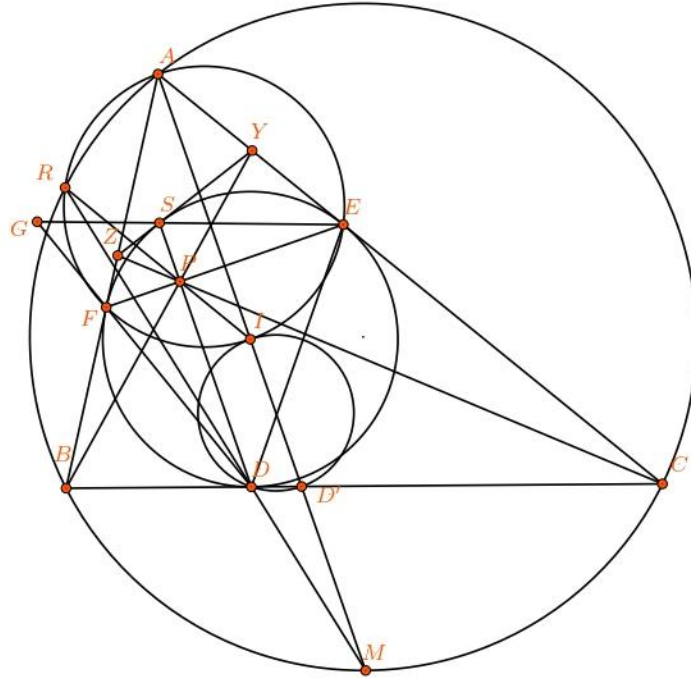
Bài 3.

Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (không phải là đường kính). Điểm A di động trên cung lớn BC (A khác B, C). Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là chân đường cao từ D xuống EF . Các tia BP, CP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại Y, Z .

a) Chứng minh YZ là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

b) Tia IP cắt đường tròn (O) tại điểm R . Chứng minh rằng khi A di chuyển trên cung lớn BC thì đường thẳng RD luôn đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI.



a) DP cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là S , Y' là giao điểm tiếp tuyến tại S của (I) với AC , G là giao điểm ES và DF . Khi đó ES và DF lần lượt là đường đối cực của điểm Y' và B đối với đường tròn (I) , suy ra G là cực của BY' . Mà chú ý rằng P là giao EF và DS nên P và G liên hợp đối với (I) . Vậy B, P, Y' thẳng hàng hay $Y' \equiv Y$. Chứng minh tương tự, ta suy ra SY, SZ là tiếp tuyến của (I) , hay YZ tiếp xúc (I) .

b) Xét $f = \mathcal{I}_I^{ID^2}$ là phép nghịch đảo tâm I phương tích ID^2 (nghịch đảo qua (I)) và gọi $R' = f(P)$. Khi này ta có A, B, C qua f trở thành trung điểm EF, FD, ED nên (ABC) qua f trở thành đường tròn euler của tam giác DEF , mà P thuộc đường tròn đó nên $R' = f(P) \in (ABC)$, do đó $R \equiv R'$.

Hơn nữa, ta cũng có $f(E) = E$ và $f(F) = F$ nên f biến EF thành (IEF) do đó $R \in (IEF)$. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) thì ta có ngay $MB = MC = MI$. Xét phép nghịch đảo $g = \mathcal{I}_M^{MB^2}$ biến B, C thành B, C do đó biến (O) thành BC nên biến A thành giao điểm D' của AM với BC . Khi ấy, g sẽ biến đường tròn đường kính IA thành đường tròn đường kính ID' , từ đó ta được

$$g(\{R, A\}) = g((IA) \cap (O)) = (ID') \cap BC = \{D, D'\} \Rightarrow g(R) = D.$$

Từ đây ta có được RD luôn đi qua M là điểm cố định. □

Bài 4.

Với mỗi số tự nhiên m , ta kí hiệu $v_2(m)$ là số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn $2^k \mid m$. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn các điều kiện:

- (i) n không là một lũy thừa của 3;
- (ii) Dãy số $v_2(3^0 - n), v_2(3^1 - n), v_2(3^2 - n), \dots$ là một dãy số không bị chặn.

LỜI GIẢI. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn với mọi số nguyên dương t thì tồn tại k thỏa mãn

$$2^t \mid 3^k - n.$$

Trước hết, để ý rằng tất cả các số dư của 3^k modulo 8 đều thuộc tập $\{1, 3\}$ do đó nếu n không đồng dư 1 hoặc 3 modulo 8 thì ta có $8 \nmid 3^k - n$ với mọi số tự nhiên k do đó $v_2(3^k - n) \leq 2$ với mọi k hay dãy số trên bị chặn.

Ta sẽ chứng minh với n là số nguyên dương thỏa $n \equiv 1, 3 \pmod{8}$ và n không là lũy thừa của 3 thì dãy trên sẽ không bị chặn. Với $t = 1, 2, 3$ thì từ điều kiện của n thì dễ dàng thấy rằng tồn tại k để $2^t \mid 3^k - n$. Giả sử với $t \geq 3$ nào đó thì ta đã có số nguyên dương k để $2^t \mid 3^k - n$, ta sẽ chỉ ra số nguyên dương h mà $2^{t+1} \mid 3^h - n$. Đặt $3^k - n = 2^t x$, nếu x chẵn thì ta chọn $h = k$ thì thấy thỏa mãn.

Khi mà x lẻ ta xét $h = k + 2^{t-2}$ thì khi này ta có

$$3^h - n = 3^{2^{t-2}+k} - 3^k + 2^t x = 3^k(3^{2^{t-2}} - 1) + 2^t \cdot x.$$

Mặt khác, theo LTE ta cũng có

$$v_2(3^{2^{t-2}} - 1) = v_2(3^2 - 1) + v_2(2^{t-3}) = 3 + t - 3 = t$$

do đó ta viết được $3^k(3^{2^{t-2}} - 1)$ dưới dạng $2^t y$ với y là số lẻ, từ đó có

$$3^h - n = 2^t(x + y)$$

chia hết cho 2^{t+1} , như vậy cũng tồn tại h để $2^{t+1} \mid 3^h - n$, theo quy nạp ta thấy rằng với mọi t thì luôn tồn tại k để $2^t \mid 3^k - n$ hay nói cách khác dãy $v_2(3^k - n)$ không bị chặn. $\square$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ QUÝ ĐÔN

Môn: TOÁN – Lớp 11

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 27/01/2026 (Vòng 2)

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 5. (6,0 điểm) Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(x) + x + 1) = P(x)P(x + 1) + P(x) + P(x + 1)$$

với mọi số thực x .

- a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thuộc $\mathcal{F}$.
- b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, thuộc $\mathcal{F}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
 - i. $P(x)$ có nghiệm thực;
 - ii. Tồn tại đa thức $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho đa thức $P(x)Q(x)$ có tất cả các hệ số thuộc tập hợp $\{-2; -1; 1; 2\}$.

Câu 6. (7,0 điểm) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Gọi N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) . Lấy điểm A di động trên cung lớn BC của (O) sao cho $AB < AC$ và ABC là tam giác nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và D là tiếp điểm của (I) với BC . Gọi (O_a) là đường tròn tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại T .

- a) Gọi giao điểm của đường thẳng AT và đường tròn (I) là R và S sao cho $AS < AR$. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{RA}{RT}$ luôn có giá trị không đổi.
- b) Đường thẳng TD cắt lại (O) tại X . Đường thẳng XI cắt AT tại L và cắt lại (O) tại U . Đường thẳng qua I và song song với BC cắt đường thẳng UT tại W . Đường thẳng NL cắt lại (O) tại Y . Chứng minh rằng đường thẳng WY luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 7. (7,0 điểm) Tỳ có 200 viên bi xanh và 200 viên bi đỏ. Tỳ bốc ra a viên bi xanh đưa cho Bính và bốc ra b viên bi đỏ đưa cho Ngọ, trong đó a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 \leq b < a \leq 200$. Hai bạn Bính và Ngọ sẽ sử dụng những viên bi đó để cùng chơi một trò chơi như sau: Trên bảng ô vuông 100×100 , Bính chơi trước và đặt a viên bi xanh vào a ô vuông bất kì của bảng sao cho ở mỗi ô chỉ được đặt đúng một viên bi, sau đó Ngọ đặt b viên bi đỏ vào b ô vuông bất kì trong các ô còn lại của bảng sao cho ở mỗi ô chỉ được đặt đúng một viên bi. Bính thắng nếu có một đường đi bắt đầu từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải mà không đi qua những ô đã có viên bi đỏ (một đường đi là dãy các ô vuông liên tiếp nhau sao cho hai ô liên tiếp có chung một cạnh). Trong trường hợp ngược lại, Ngọ thắng.

- a) Với $a = 199$ và $b = 100$, chứng minh rằng Bính là người có chiến thuật thắng.
- b) Với $a = 197$ và $b = 99$, chứng minh rằng Ngọ là người có chiến thuật thắng.
- c) Tìm số lượng tất cả các cặp (a, b) , với $1 \leq b < a \leq 200$, để Bính là người có chiến thuật thắng.

———— Hết ————

Lời giải tham khảo

Bài 5.

Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P(P(x) + x + 1) = P(x)P(x + 1) + P(x) + P(x + 1)$$

với mọi số thực x .

- a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thuộc $\mathcal{F}$.
- b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, thuộc $\mathcal{F}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
 - i. $P(x)$ có nghiệm thực;
 - ii. Tồn tại đa thức $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho đa thức $P(x)Q(x)$ có tất cả các hệ số thuộc tập hợp $\{-2; -1; 1; 2\}$.

Lời Giải.

a) Từ giả thiết ta suy ra

$$P(P(x) + 1 + x) + 1 = (P(x) + 1)(P(x + 1) + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $Q(x) = P(x) + 1$, khi đó ta có

$$Q(Q(x) + x) = Q(x) \cdot Q(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$$

Nếu $Q(x) = c$ là hàm hằng, suy ra $c = c^2 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x) \equiv -1 \\ P(x) = 0 \end{cases}$. Cả hai đa thức này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $\deg Q = 1$ thì $Q(Q(x) + x)$ là hàm hằng hoặc là hàm bậc nhất, nhưng $\deg(Q \cdot Q(x + 1)) = 2$, mâu thuẫn.

Nếu $n = \deg Q \geq 2$, so sánh bậc 2 về ta được $n^2 = 2n \Rightarrow n = 2$. Đặt $Q(x) = ax^2 + bx + k$, so sánh hệ số bậc cao nhất 2 về, ta suy ra $a^3 = a^2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $Q(x) = x^2 + bx + k$, với $b, k \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy đa thức này thỏa mãn (*), suy ra $P(x) = x^2 + bx + c$, với $b, c \in \mathbb{R}$ thỏa đề.

Kết luận: $\mathcal{F} = \{0; -1\} \cup \{P(x) = x^2 + bx + c \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

b) Trước hết $P(x) \equiv -1$ không thỏa mãn điều kiện (i), trong khi với $P(x) \equiv 0$ thì $\forall Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ thì $P(x) \cdot Q(x) \equiv 0$, không thỏa mãn (ii). Do đó ta xét $P(x) = x^2 + bx + c$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta đi chứng minh **bổ đề** sau: Cho đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ có nghiệm thực x_0 . Khi đó

$$|x_0| < 1 + \max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|.$$

Chứng minh. Ta có $P(x) = a_n x^n \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n x^{n-i}} \right)$. Với x là nghiệm khác 0 của $P(x)$ thì

$$-1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-i}} \Rightarrow 1 \leq A \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|x^i|} \right) = \frac{A}{|x|} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{1 - \frac{1}{x}} < \frac{A}{|x| - 1} \text{ với } A = \max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$$

Từ đó suy ra $|x| < 1 + A$.

Trở lại bài toán, do $x^2 + bx + c$ là một đa thức thỏa đề nên gọi $c_0 \in \mathbb{Z}$ là hệ số tự do của đa thức $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa $(x^2 + bx + c) \cdot Q(x)$ có tất cả hệ số thuộc tập $\{\pm 1; \pm 2\}$. Khi đó $cc_0 \in \{\pm 1; \pm 2\}$ nên ta suy ra $c \in \{\pm 1; \pm 2\}$. Mặt khác, để $P(x)$ có nghiệm thực thì $b^2 \geq 4c$, và khi đó nghiệm thực của $P(x)$ là $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$. Vì nghiệm của $P(x)$ cũng là nghiệm của $P(x) \cdot Q(x)$ nên áp dụng bổ đề trên cho ta

$$\left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right| < 3 \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $c = 1 \Rightarrow b^2 \geq 4 \Rightarrow |b| \geq 2$. Nếu $b \geq 4$ thì $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2} < -3$, mâu thuẫn với (*). tương tự nếu $b \leq -4$. Vậy $b \in \{\pm 2; \pm 3\}$.

$b = \pm 2$, tồn tại $Q(x) = 1$ thỏa mãn.

$b = \pm 3$, tồn tại $Q(x) = x \mp 1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $c = 2 \Rightarrow b^2 \geq 8 \Rightarrow |b| \geq 3$. Nếu $|b| \geq 4$ thì tương tự trường hợp 1, ta cũng có điều mâu thuẫn, vậy $b = \pm 3$. Với $b = \pm 3$, tồn tại $Q(x) = x \mp 1$ thỏa mãn.

Trường hợp 3. $c = -1$ thì $P(x)$ có nghiệm thực. Nếu $b \geq 3$ thì $\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4}}{2} < -3$, mâu thuẫn với (*), tương tự với $b \leq -3$. Vậy $b \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

$b = 0$, tồn tại $Q(x) = x + 1$ thỏa mãn.

$b = \pm 1; \pm 2$, tồn tại $Q(x) = 1$ thỏa mãn.

Trường hợp 4. $c = -2$ thì $P(x)$ có nghiệm thực. Tương tự như trường hợp 3, ta cũng suy ra $b \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

$b = 0$, tồn tại $Q(x) = x + 1$ thỏa mãn.

$b = \pm 1; \pm 2$, tồn tại $Q(x) = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: tập tất cả đa thức thỏa đề là

$$\{x^2 + 3x + 2; x^2 + 2x + 1; x^2 - 2x + 1; x^2 + 3x + 1; x^2 - 3x + 1; x^2 - 1; x^2 + x - 1; x^2 - x - 1; x^2 - 3x + 2; x^2 + 2x - 1; x^2 - 2x - 1; x^2 - 2; x^2 + x - 2; x^2 - x - 2; x^2 + 2x - 2; x^2 - 2x - 2\}.$$

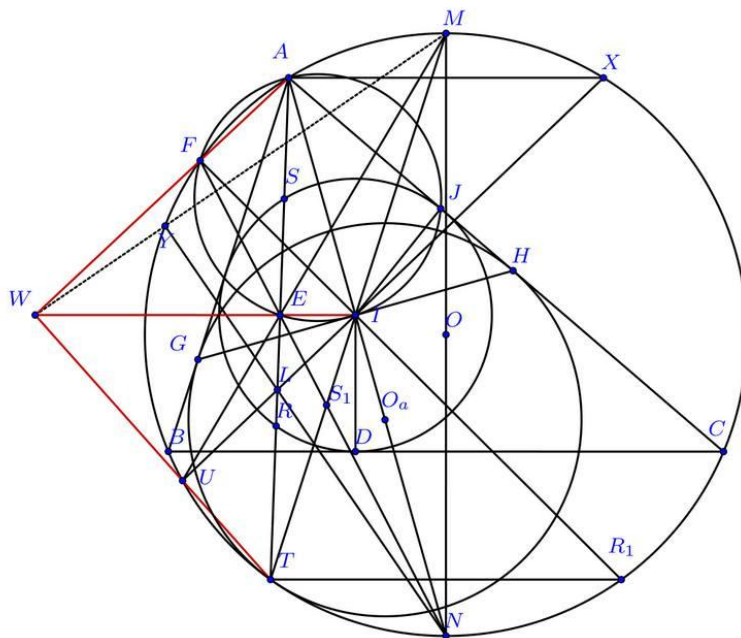
□

Bài 6.

Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Gọi N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) . Lấy điểm A di động trên cung lớn BC của (O) sao cho $AB < AC$ và ABC là tam giác nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và D là tiếp điểm của (I) với BC . Gọi (O_a) là đường tròn tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với (O) tại T .

- Gọi giao điểm của đường thẳng AT và đường tròn (I) là R và S sao cho $AS < AR$. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{RA}{RT}$ luôn có giá trị không đổi.
- Đường thẳng TD cắt lại (O) tại X . Đường thẳng XI cắt AT tại L và cắt lại (O) tại U . Đường thẳng qua I và song song với BC cắt đường thẳng UT tại W . Đường thẳng NL cắt lại (O) tại Y . Chứng minh rằng đường thẳng WY luôn đi qua một điểm cố định.

Lời Giải.



- a) Ta thấy rằng $\frac{RT}{RA} = \frac{AT}{AR} - 1$ do đó chỉ cần chứng minh $\frac{AT}{AR}$ cố định là đủ. Mà cũng thấy rằng AB, AC là tiếp tuyến của (I) và (O_a) do đó A là tâm vị tự của hai đường tròn đó, hơn nữa với vị trí của R thì ta cũng có

$$\frac{AT}{AR} = \frac{R_{(O_a)}}{R_{(I)}}.$$

Mặt khác, nếu gọi G, H là tiếp điểm của (O_a) với AB, AC thì theo Sawayamar - Thebault ta có I là trung điểm GH và nếu gọi J là tiếp điểm của (I) với AC thì từ đó theo các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có được

$$\frac{R_{(O_a)}}{R_{(I)}} = \frac{IH}{IJ} = \frac{AH}{AI} = \frac{1}{\cos \frac{\angle A}{2}}$$

là một giá trị cố định khi A di chuyển trên cung lớn BC của (O) . □

- b) Gọi M là điểm chính giữa cung BAC của (O) . Ta chứng minh WY đi qua M cố định.

Theo tính chất đường tròn Mixtilinear thì ta có $AX \parallel BC$. E là giao điểm WI và AT , F là giao

điểm khác N của NE với (O) . Trước hết ta có

$$(EI, EF) \equiv (BC, NF) \equiv (BC, BN) + (BN, NF) \equiv (AN, AB) + (AB, AF) \equiv (AI, AF) \pmod{\pi}$$

Do đó A, F, I, E đồng viên. Gọi U' là giao điểm khác M của ME với (O) , tương tự như trên thì I, E, U', T đồng viên. Chú ý rằng TM là phân giác $\angle ATX$ nên ta có

$$(U'E, U'I) \equiv (TE, TI) \equiv (U'M, U'X) \pmod{\pi}$$

Khi đó U', I, E thẳng hàng hay $U' \equiv U$. Tương tự, lấy $R_1 \in (O)$ sao cho $TR_1 \parallel BC$ thì R_1, I, F thẳng hàng. Xét trục đẳng phương đôi một ba đường tròn $(O), (AFEI), (EIUT)$ thì AF, EI, UT đồng quy tại W . Lại gọi W' là giao điểm MY với UT , S_1 là giao NF, MT thì theo định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & A & N \\ F & Y & T \end{pmatrix}$ thì W', L, S_1 thẳng hàng. Xét tứ giác toàn phần $UTIE.MW$ thì

$$W(IT, LM) = -1 = F(RT, NM) = (IT, SM) = W(IT, S_1M)$$

Khi đó W, L, S_1 thẳng hàng nên $W \equiv W'$. Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Bài 7.

Ty có 200 viên bi xanh và 200 viên bi đỏ. Ty bốc ra a viên bi xanh đưa cho Bính và bốc ra b viên bi đỏ đưa cho Ngọ, trong đó a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 \leq b < a \leq 200$. Hai bạn Bính và Ngọ sẽ sử dụng những viên bi đó để cùng chơi một trò chơi như sau: Trên bảng ô vuông 100×100 , Bính chơi trước và đặt a viên bi xanh vào a ô vuông bất kì của bảng sao cho ở mỗi ô chỉ được đặt đúng một viên bi, sau đó Ngọ đặt b viên bi đỏ vào b ô vuông bất kì trong các ô còn lại của bảng sao cho ở mỗi ô chỉ được đặt đúng một viên bi. Bính thắng nếu có một đường đi bắt đầu từ ô dưới cùng bên trái và kết thúc ở ô trên cùng bên phải mà không đi qua những ô đã có viên bi đỏ (một đường đi là dãy các ô vuông liên tiếp nhau sao cho hai ô liên tiếp có chung một cạnh). Trong trường hợp ngược lại, Ngọ thắng.

- Với $a = 199$ và $b = 100$, chứng minh rằng Bính là người có chiến thuật thắng.
- Với $a = 197$ và $b = 99$, chứng minh rằng Ngọ là người có chiến thuật thắng.
- Tìm số lượng tất cả các cặp (a, b) , với $1 \leq b < a \leq 200$, để Bính là người có chiến thuật thắng.

Lời Giải. Ta đánh số cho các hàng, cột của bảng từ dưới lên trên, từ trái qua phải bởi các số tự nhiên từ 1 đến 100 và ô nằm ở hàng thứ i , cột thứ j được kí hiệu là ô (i, j) . Một đường chéo được nhắc đến trong lời giải dưới đây là tập hợp các ô có dạng (x, y) của bảng mà $x + y = k$ với $k \geq 2$ cố định.

a) Khi mà $a = 199$, Bính có thể đặt 199 viên bi đỏ này trên một đường đi từ ô dưới cùng bên trái (cụ thể, Bính có thể đặt vào các ô $(1, t)$ và $(t, 100)$ với $t = \overline{1, 100}$). Khi này, dù Ngọ có đặt thế nào thì luôn đảm bảo có một đường đi không có bi đỏ, như vậy Bính thắng.

b) Xét một ô (x, y) bất kì thì ta thấy rằng $2 \leq x + y \leq 200$ do đó có tổng cộng 198 đường chéo không kể đường chéo $x + y = 101$, song Bính chỉ có 197 viên bi, do đó phải có một đường chéo X mà không có viên bi xanh nào sau lượt của Bính.

Đề ý rằng phương trình $x + y = k$ với $k = \overline{2, 200}$ với $k \neq 101$ và $1 \leq x, y \leq 100$ có tối đa 99 nghiệm, nên Ngọ hoàn toàn có đủ bi để đặt lên hết đường chéo X đó. Nếu đường chéo X là đường chéo $x + y = 2$ hay $x + y = 200$ thì hiển nhiên không có đường đi, còn lại đường chéo X chia bảng làm hai phần và từ một ô của phần này không thể có đường đi đến ô của phần còn lại nếu không đi qua một ô của đường chéo, do đó, không còn đường đi nào từ $(1, 1)$ đến $(100, 100)$ mà không có bi đỏ, hay Ngọ thắng.

c) Từ ý tưởng của câu b và câu a, ta thấy rằng nếu $a = 200$ hay $a = 199$ thì Bính có thể đặt ngay một đường đi từ $(1, 1)$ đến $(100, 100)$ do đó Bính thắng với mọi giá trị khác của b . Ta xét $a \leq 198$, nếu $a < 2b$, khi này ta xét $2b$ các đường chéo $x + y = k$ với $k = \overline{1, b}$ và $k = \overline{200 - b + 1, 200}$ thì ta có thể thấy rằng các đường chéo này có tối đa b ô của bảng, mà do $a < 2b$ nên sẽ có một trong các đường chéo đó không có viên bi xanh nào và Ngọ chỉ cần đặt bi đỏ lên tất cả các ô của đường chéo đó thì Ngọ sẽ thắng.

Do đó, để Bính thắng thì ta phải có $a \geq 2b$, ta sẽ chứng minh nếu $a \geq 2b$ (khi này phải có $b \leq 99$ vì $a \leq 198$) thì Bính sẽ có chiến thuật chiến thắng. Thật vậy, rõ ràng ta chỉ cần làm với $a = 2b$ là đủ vì khi đó $a > 2b$ thì chiến thuật đặt cũng sẽ tương tự. Với $a = 2b$ thì chiến thuật của Bính sẽ là đặt $2b$ viên bi lên các ô $(1, t)$ và $(100, 100 - t + 1)$ với $t = \overline{1, b}$. Khi này, ta định nghĩa một đường đi vuông từ (a, b) đến (c, d) với $a < c$ và $b < d$ là một đường đi từ (a, b) qua các ô

$(a+1, b), (a+2, b), \dots, (c, b), (c, b+1), \dots, (c, d)$. Ta xét $b+1$ đường đi gồm b đường đi vuông từ $(1, t) \rightarrow (100-t+1)$ (với $t = \overline{1, b}$) và đường đi từ $(1, 1)$ đến $(100, 100)$ sát dọc theo hai cạnh dưới và bên phải của bảng thì ta thấy rằng $b+1$ đường đi này có các ô chưa được đặt bi là rời nhau, do đó để Ngộ không thể chặn cả $b+1$ đường đi này được, và do đó, ta thấy rằng luôn có đường đi cho Bính.

Vậy, tất cả cặp (a, b) để Bính có chiến thuật thắng là $1 \leq b < 2b \leq a \leq 198$ và $a = 200, 199$ và $b = \overline{1, a-1}$. Với $a = 200$ thì có 199 giá trị b thỏa còn với $a = 199$ thì có 198 giá trị b thỏa. Với $a \leq 198$ thì cố định $b \leq 99$ cho trước thì có $198 - 2b + 1$ giá trị a thỏa mãn $2b \leq a \leq 198$. Vậy, tổng số cặp (a, b) thỏa mãn là

$$199 + 198 + \sum_{b=1}^{99} (199 - 2b) = 199 \cdot 101 - 99 \cdot 100 - 1 = 10198.$$

□