

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 16/9/2025

Câu 1 (7,0 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(yf(x-y)) = f(xf(y)) - 2025y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1) Chứng minh rằng $f(x)$ là đơn ánh và $f(x)$ là hàm số lẻ.

2) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 2 (7,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn tâm O . Tam giác ABC có các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Đường tròn tâm J ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K ; đường thẳng AK cắt đường thẳng BC tại L ; đường thẳng AM cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai là Q .

1) Chứng minh ba điểm L, H, Q thẳng hàng; các đường thẳng KF, EQ và BC đồng quy hoặc đôi một song song.

2) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và AD ; đoạn thẳng PM cắt đường tròn (J) tại điểm N . Chứng minh rằng đường thẳng LN là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC .

Câu 3 (6,0 điểm) Cho số nguyên tố $p \geq 5$. Đặt $n = 4^p - 1$.

1) Chứng minh rằng n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt và $2^n \equiv 8 \pmod{n}$.

2) Với a là một số tự nhiên, chứng minh rằng $2 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$ không là số chính phương.

..... HẾT

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LÀO CAI**

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2025 - 2026**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **17/9/2025**

Câu 4 (6,0 điểm) Cho $P(x), Q(x), R(x)$ là các đa thức khác hằng, có hệ số thực và thỏa mãn

$$P(x^2 + x) + (x + 1)Q(x^2 + x) = (x^2 + 2x - 3)R(x + 1) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

1) Chứng minh rằng phương trình $Q(x + 1) = R(x - 2)$ có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt.

2) Giả sử rằng tổng bậc của $P(x), Q(x), R(x)$ là 5 và hệ số cao nhất của $R(x)$ là 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = P^2(0) + 8Q^2(3)$.

Câu 5 (7,0 điểm)

1) Cho hai tập A và B , mỗi tập chứa n số tự nhiên liên tiếp. Hỏi ta có thể sắp xếp một hoán vị của A và B như $A_1 = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $B_1 = (b_1; b_2; \dots; b_n)$ sao cho $C_1 = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n)$ là n số tự nhiên liên tiếp được không trong mỗi trường hợp $n = 2025$; $n = 2026$?

2) Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất ($k > 2$) sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Câu 6 (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC không cân ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi I là trực tâm tam giác ABC . Một đường thẳng d đi qua O , lần lượt cắt các đoạn thẳng IB và IC tại E, F sao cho F nằm giữa O và E . Đường tròn ngoại tiếp tam giác COF cắt lại đường thẳng CA tại M , đường tròn ngoại tiếp tam giác BOE cắt lại đường thẳng BA tại N , đường tròn ngoại tiếp tam giác AON cắt lại đường thẳng AC tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác AOM cắt lại đường thẳng AB tại K .

1) Chứng minh đường thẳng HK đi qua O .

2) Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BH, CK, HK . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ đi qua O .

..... HẾT