

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ GÓC 1

Phần I (6 điểm). Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ được chọn một phương án.

Câu 1. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của bạn Nam được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

- A. 23,75.
B. 27,5.
C. 31,85.
D. 8,125.

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng

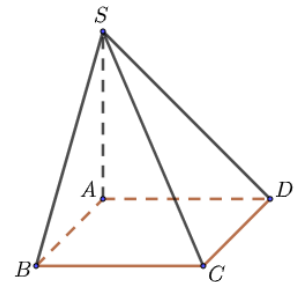
- A. $\frac{11}{25}$.
B. $\frac{14}{25}$.
C. $\frac{13}{25}$.
D. $\frac{12}{25}$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

- A. 18.
B. 19.
C. 20.
D. 21.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Giá trị tang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$.
B. 2.
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
D. $\sqrt{3}$.



Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) . Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y = ax + b$.

Giá trị $T = 4a - b$ bằng

- A. 9.
- B. 10.
- C. 8.
- D. 11.

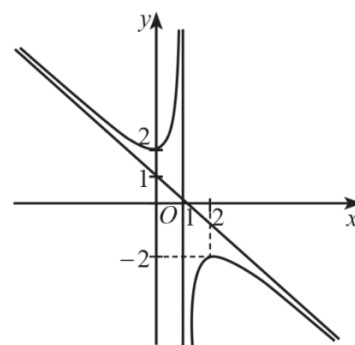
Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 9$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm t_0 (giây) bằng bao nhiêu thì vận tốc nhỏ nhất?

- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 1.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + b}$, (với $a \neq 0$) có đồ thị như

hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + b + c$ bằng

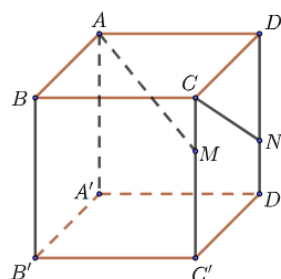
- A. -1.
- B. 3.
- C. -2.
- D. 5.



Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$.

Điểm M thuộc cạnh CC' sao cho $MC' = 2MC$, N thuộc cạnh DD' sao cho $ND = 2ND'$. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$ bằng

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
- B. $\frac{-1}{\sqrt{30}}$.
- C. $\frac{1}{\sqrt{30}}$.
- D. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$.



Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 8. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$

thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'M$ bằng

- A. $4\sqrt{2}$.
- B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
- C. $3\sqrt{2}$.
- D. $2\sqrt{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $T = x + y + z$ bằng

- A. 1.
- B. $\frac{2}{3}$.
- C. 3.
- D. $\frac{1}{3}$.

Câu 11. Ông An dự định sử dụng hết 8 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 2,75.
- B. 3,25.
- C. 2,05.
- D. 2,15.

Câu 12. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.
- B. $\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.
- C. $\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$.
- D. $\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Phần II (6 điểm). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 3. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng).

a) $p(1000) = 14$ và $p(100) = 13,5$.

b) $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$.

c) Cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 1200 cái điện thoại A.

d) Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A là 8,5 triệu đồng.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) bằng $\sqrt{5}$.

c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

d) Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $A(0;0;0), B(4;0;0), D(0;3;0), S(0;0;6)$. Gọi E là trung điểm của CD .

a) $C(4;3;0)$.

b) Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0}$ có tọa độ là $(-2;3;9)$.

c) Góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC có số đo nhỏ hơn 60° .

d) Điểm I thuộc mặt phẳng (Oyz) thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}|$ bằng 4.

Phần III (8 điểm). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 8.

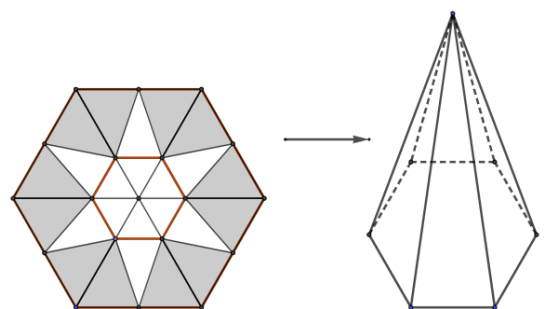
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{12}{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3;7)$. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tích tất cả các phân tử của S bằng bao nhiêu?

Câu 3. Xếp ngẫu nhiên một nhóm học sinh gồm 3 nữ và 17 nam thành một hàng ngang. Xác suất để không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

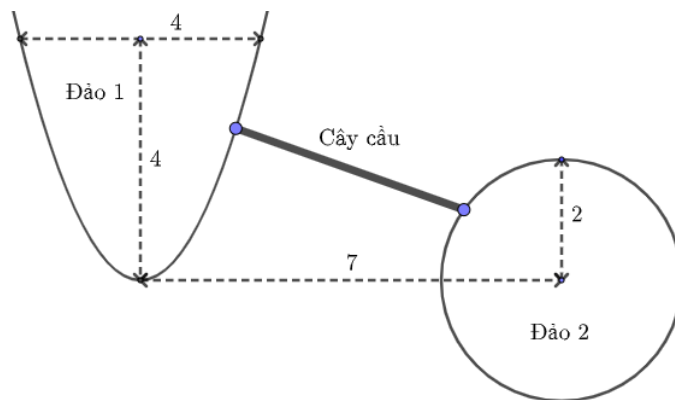
Câu 4. Một hộ sản xuất kinh doanh hạt điều sấy mỗi ngày sản xuất được x kg ($5 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 + 19x + 300$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử hộ sản xuất này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 316 nghìn đồng/kg. Hỏi hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu kilôgam hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất?

Câu 5. Từ một tấm bìa lục giác đều cạnh 20, bạn Hoa muốn làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ phần tô đậm và dán các mép lại với nhau (các mũi ghép nối có kích thước không đáng kể, tham khảo hình bên). Để thể tích hình lục giác đều tạo thành lớn nhất thì phần diện tích bạn Hoa cắt đi là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;2)$, $B(2;-6;0)$ và $C(-4;4;4)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho MB vuông góc với BC . Độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả được làm tròn một chữ số thập phân).

Câu 7. Trên một hồ nước có hai đảo. Đảo thứ nhất có hình dạng là một parabol và đảo thứ hai có hình dạng là một hình tròn với kích thước được mô hình hóa trong hình bên. Người ta muốn xây dựng một cái cầu nối hai đảo với nhau. Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + \ln x) \cdot e^{y + \ln x} \leq (x^3 + x) e^y$?

----- Hết -----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ GÓC 2

Phần I (6 điểm). Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ được chọn một phương án.

Câu 1. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của bạn Nam được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	2	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

- A. 11,321.
B. 9,4035.
C. 34,6875.
D. 10,3125.

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng

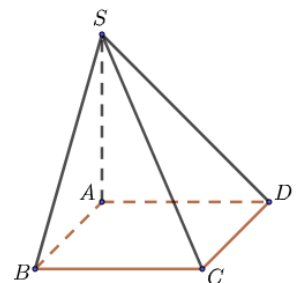
- A. $\frac{11}{27}$.
B. $\frac{14}{351}$.
C. $\frac{14}{27}$.
D. $\frac{12}{27}$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

- A. 38.
B. 39.
C. 40.
D. 41.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Giá trị cotang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$.
B. $\frac{1}{2}$.
C. $\sqrt{3}$.
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y = ax + b$.

Giá trị $T = 4a + b$ bằng

- A. 0.
- B. 10.
- C. 8.
- D. 9.

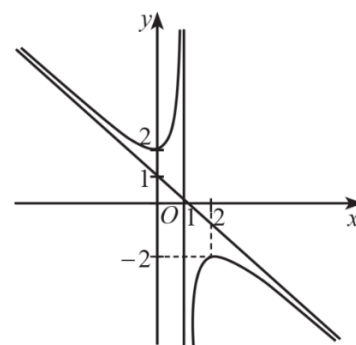
Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 9$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm t_0 (giây) bằng bao nhiêu thì vận tốc nhỏ nhất.

- A. 4.
- B. 5.
- C. 3.
- D. 2.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - 2x + c}{x + b}$, (với $a \neq 0$) có đồ thị như

hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = a^2 - b + c$ bằng

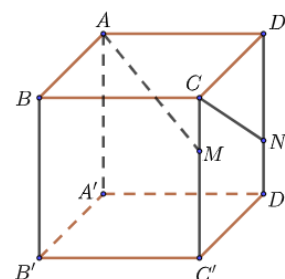
- A. -1.
- B. 3.
- C. 0.
- D. 1.



Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 4$, $AA' = 6$.

Điểm M thuộc cạnh CC' sao cho $MC' = 2MC$, N thuộc cạnh DD' sao cho $ND = 2ND'$. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$ bằng

- A. $\frac{-2}{\sqrt{15}}$.
- B. $\frac{3}{\sqrt{15}}$.
- C. $\frac{1}{\sqrt{15}}$.
- D. $\frac{-1}{\sqrt{15}}$.



Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 10. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$

thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DD' và $A'M$ bằng

- A. $5\sqrt{2}$.
- B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
- C. $5\sqrt{3}$.
- D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $T = x + y - z$ bằng

A. 1.

B. $\frac{-2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. -1.

Câu 11. Ông An dự định sử dụng hết $18m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình chữ nhật với chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 6,39.

B. 6,25.

C. 6,93.

D. 6,83.

Câu 12. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{1-xy}{2x+y} = 2xy + 2x + y - 3$. Giá trị nhỏ nhất của

$P = x + y$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}-3}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{6}-2}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}+3}{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}+3}{2}$.

Phần II (6 điểm). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 3. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 2000 điện thoại A với giá 16 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 200 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng).

a) $p(2000) = 16$ và $p(200) = 15,5$.

b) $p(x) = -\frac{1}{400}x + 21$.

c) Cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 2400 cái điện thoại A.

d) Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A là 9,5 triệu đồng.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) bằng $2\sqrt{5}$.

c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

d) Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;3;0), S(0;0;4)$. Gọi E là trung điểm của CD .

a) $C(2;3;0)$.

b) Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0}$ có tọa độ là $(-1;3;6)$.

c) Góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC có số đo nhỏ hơn 60° .

d) Điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}|$ bằng 12.

Phần III (8 điểm). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 8.

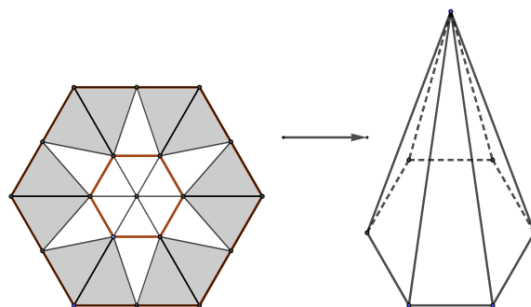
Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = 6$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{24}{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3;7)$. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tổng tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Câu 3. Xếp ngẫu nhiên một nhóm học sinh gồm 3 nữ và 18 nam thành một hàng ngang. Xác suất để không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

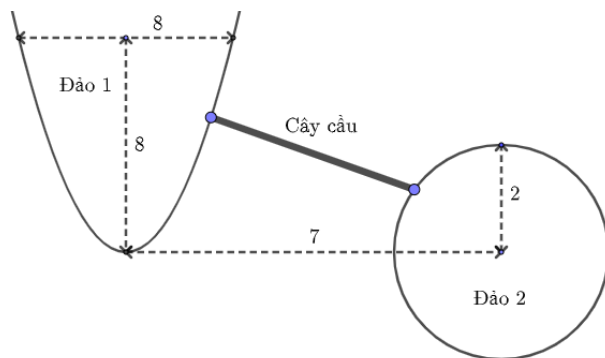
Câu 4. Một hộ sản xuất kinh doanh hạt điều sấy mỗi ngày sản xuất được x kg ($5 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 40x + 300$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử hộ sản xuất này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 320 nghìn đồng/kg. Hỏi hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu kilôgam hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất?

Câu 5. Từ một tấm bìa lục giác đều cạnh 40, bạn Hoa muốn làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ phần tô đậm và dán các mép lại với nhau (các mũi ghép nối có kích thước không đáng kể, tham khảo hình bên). Để thể tích hình lục giác đều tạo thành lớn nhất thì phần diện tích bạn Hoa cắt đi là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;2)$, $B(2;0;-6)$ và $C(-4;4;4)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho $MB \perp MC$. Độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả được làm tròn một chữ số thập phân).

Câu 7. Trên một hồ nước có hai đảo. Đảo thứ nhất có hình dạng là một parabol và đảo thứ hai có hình dạng là một hình tròn với kích thước được mô hình hóa trong hình bên. Người ta muốn xây dựng một cái cầu nối hai đảo với nhau. Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + 2 \ln x) \cdot e^{y+2 \ln x} \leq (x^4 + x^2) \cdot e^y$?

----- Hết -----

ĐỀ GỐC 1

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Phần I (6 điểm). Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ được chọn một phương án.

Câu 1. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của bạn Nam được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

A. 23,75.

B. 27,5.

C. 31,85.

D. 8,125.

Hướng dẫn giải

Cỡ mẫu $n = 18$

$$Q_1 = 20 + \frac{18}{4}(25 - 20) = 23,75;$$

$$Q_3 = 30 + \frac{3 \cdot 18}{4} - (6 + 6) = 31,875$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8,125$.

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng

A. $\frac{11}{25}$.

B. $\frac{14}{25}$.

C. $\frac{13}{25}$.

D. $\frac{12}{25}$.

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{25}^2 = 300$.

Gọi biến cố A : “Hai số được chọn có tổng là số lẻ”, từ đây ta có hai số khác tính chẵn lẻ, do đó $n(A) = 12 \cdot 13 = 156$.

Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{25}$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

A. 18.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Hướng dẫn giải

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{12} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [0; 10\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leq 10\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{115}{6}$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 19\}$. Có 20 nghiệm.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Giá trị tang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H lần lượt là hình chiếu của A lên BD , ta có: $\begin{cases} AH \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases}$

suy ra $BD \perp SH$.

Do vậy $[S, BD, A] = \widehat{SHA}$.

Xét tam giác SAH vuông tại A ta có $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH}$.

AH là đường cao trong tam giác ABD vuông tại A , ta có

$$AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) . Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y = ax + b$.

Giá trị $T = 4a - b$ bằng

A. 9.

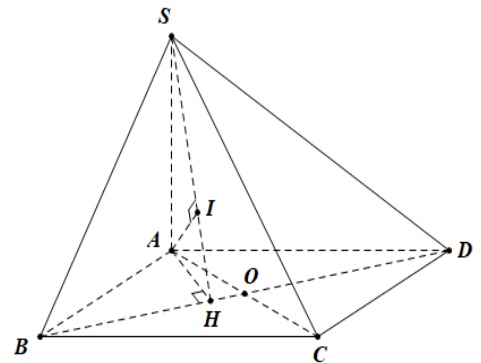
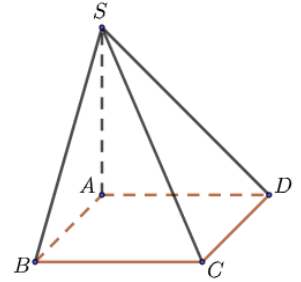
B. 10.

C. 8.

D. 11.

Hướng dẫn giải.

Tiệm cận xiên $y = x - 4$ nên $a = 1, b = -4$. Do vậy $T = 4a - b = 8$.



Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 9$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm t_0 (giây) bằng bao nhiêu thì vận tốc nhỏ nhất?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Vận tốc $v(t) = S' = 3t^2 - 12t + 15$; $v'(t) = 6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

Vận tốc nhỏ nhất khi $t = 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x + b}$, (với $a \neq 0$) có đồ thị như

hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + b + c$ bằng

A. -1.

B. 3.

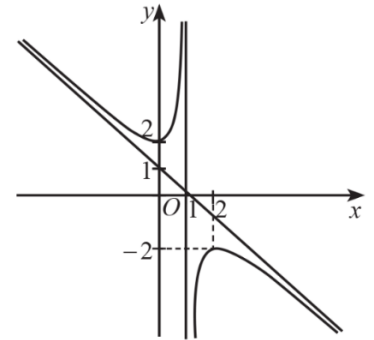
C. -2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = \frac{ax^2 + 2x + c}{x - 1}$.

Đồ thị đi qua 2 điểm $(0; 2), (2; -2) \Rightarrow c = -2, a = -1 \Rightarrow P = a^2 + b + c = -2$.



Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1, AD = 2, AA' = 3$.

Điểm M thuộc cạnh CC' sao cho $MC' = 2MC$, N thuộc cạnh DD' sao cho

$ND = 2ND'$. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{-1}{\sqrt{30}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{30}}$.

D. $\frac{-2}{\sqrt{5}}$.

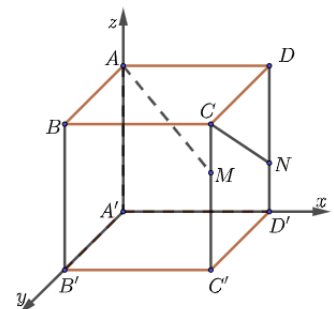
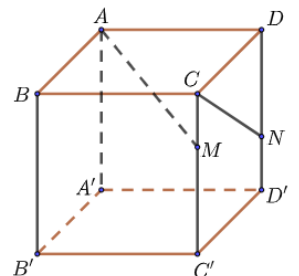
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Suy ra $A(0; 0; 3), M(2; 1; 2), C(2; 1; 3), N(2; 0; 1)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (2; 1; -1), \overrightarrow{CN} = (0; -1; -2)$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{CN}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.



Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 8. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'M$ bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên M thuộc mặt phẳng $(ACC'A')$, lại có $BB' \parallel (ACC'A')$ nên

$$d(BB', A'M) = d(BB'; (ACC'A')) = d(B'; (ACC'A')).$$

Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$, vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $B'D' \perp (ACC'A')$.

$$d(B'; (ACC'A')) = B'O' = \frac{1}{2}B'D' = 4\sqrt{2}.$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $T = x + y + z$ bằng

A. 1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{AH} = (x; y-1; z-2); \overrightarrow{BH} = (x-2; y-1; z-4)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2;0;2); \overrightarrow{AC} = (-1;1;0); \overrightarrow{BC} = (-3;1;-2). \text{ Theo đề bài ta có}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y - 2z = -3 \\ -x + y = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow T = \frac{1}{3}.$$

Câu 11. Ông An dự định sử dụng hết $8 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 2,75.

B. 3,25.

C. 2,05.

D. 2,15.

Hướng dẫn giải

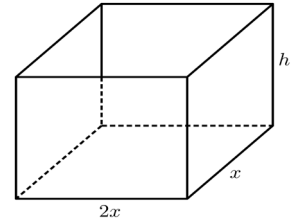
Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể lần lượt là $x, 2x, y (x, y > 0)$.

Diện tích phần lấp kính là

$$2x \cdot x + 2xy + 2 \cdot 2x \cdot y = 2x^2 + 6xy = 8 \Leftrightarrow xy = \frac{8 - 2x^2}{6} > 0 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Thể tích bể cá là $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x \cdot \frac{8 - 2x^2}{6} = \frac{-4x^3 + 16x}{6}$ với $0 < x < 2$

Ta có: $V' = \frac{-12x^2 + 16}{6}, V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{2}{\sqrt{3}} (L) \end{cases}$



x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
V'		+	0
V			-

$$\Rightarrow V_{\max} = V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 2,05.$$

Câu 12. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

B. $\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

C. $\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$.

D. $\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Hướng dẫn giải

Với x, y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$ ta được $1-xy > 0$

Biến đổi $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$

$$\Leftrightarrow \log_3 (1-xy) - \log_3 (x+2y) = -3(1-xy) + (x+2y) - \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow [\log_3 (1-xy) + \log_3 3] + 3(1-xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [3(1-xy)] + 3(1-xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y)(1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \in D \text{ nên hàm số } f(t) = \log_3 t + t \text{ đồng biến trên } D = (0; +\infty)$$

$$\text{Từ đó suy ra } (1) \Leftrightarrow 3(1-xy) = x+2y \Leftrightarrow 3-2y = x(1+3y) \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y} \text{ (do } y > 0)$$

Theo giả thiết ta có $x > 0, y > 0$ nên từ $x = \frac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0 < y < \frac{3}{2}$.

$$P = x + y = \frac{3-2y}{1+3y} + y = \frac{3y^2 - y + 3}{3y+1}$$

Xét hàm số $g(y) = \frac{3y^2 - y + 3}{3y+1}$ với $0 < y < \frac{3}{2}$

$$g'(y) = \frac{9y^2 + 6y - 10}{(3y+1)^2} = 0 \text{ ta được } y = \frac{-1+\sqrt{11}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min P = g\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}.$$

Phần II (6 điểm). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 3. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 1000 điện thoại A với giá 14 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng).

a) $p(1000) = 14$ và $p(100) = 13,5$.

b) $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$.

c) Cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 1200 cái điện thoại A.

d) Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A là 8,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

a) Theo đề, ta chọn **sai**.

b) Theo giả thiết $p(x) = ax + b$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b$ đi qua hai điểm (1000;14) và (1100;13,5).

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 14 = 1000a + b \\ 13,5 = 1100a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{200} \\ b = 19 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$ chọn **đúng**.

c) Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{200}x + 19\right) = \frac{-x^2}{200} + 19x$ (triệu đồng)

Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là

$$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-x^2}{200} + 19x - 12000 + 3x = \frac{-x^2}{200} + 22x - 12000 \text{ (triệu đồng)}.$$

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất.

Ta có: $P'(x) = \frac{-x}{100} + 22, P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$. Lập BBT, ta kết luận bán 2200 cái iphone13 thì lợi nhuận là cao nhất. Chọn **sai**.

d) Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là $p(2200) = 8$ (triệu đồng) chọn **sai**.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng (0;1) và (1;2).

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) bằng $\sqrt{5}$.

c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$.

d) Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Lập BBT suy ra chọn **đúng**.

b) Dựa vào bảng biến thiên. Suy ra hai điểm cực trị $O(0;0), A(2;4) \Rightarrow OA = 2\sqrt{5}$ chọn **sai**.

c) Ta có $y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Suy ra tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của TCX với hai trục Ox, Oy .

Suy ra $B(0;1), A(-1;0)$. Do vậy $S_{OAB} = \frac{1}{2}$ chọn **sai**.

d) Tiệm cận đứng (d): $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

Tiệm cận xiên (Δ): $y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Gọi $M(x; x + 1 + \frac{1}{x-1}) \in (C) \Rightarrow d(M, (d)) = |x - 1|; d(M, (\Delta)) = \frac{|x - (x + 1 + \frac{1}{x-1}) + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |x - 1|}$.

Do vậy: $d(M, (d)) + d(M, (\Delta)) = |x - 1| + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |x - 1|} \geq \sqrt{2}$ chọn **sai**.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và $A(0;0;0), B(4;0;0), D(0;3;0), S(0;0;6)$. Gọi E là trung điểm của CD.

a) $C(4;3;0)$.

b) Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0}$ có tọa độ là $(-2;3;9)$.

c) Góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC có số đo nhỏ hơn 60° .

d) Điểm I thuộc mặt phẳng (Oyz) thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}|$ bằng 4.

Hướng dẫn giải

a) Chọn **đúng**

b) $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0} \Rightarrow M(-2;-3;9)$ chọn **sai**

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7} \Rightarrow (\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{BC}) = 64^\circ 37' \Rightarrow (SE, BC) = 64^\circ 37' > 60^\circ$ chọn **sai**.

d) $P = |\vec{IB} - 2\vec{IC} + 3\vec{IS}| = 2IM$

P nhỏ nhất khi I là hình chiếu của M trên $(Oyz) \Rightarrow I(0; -3; 9) \Rightarrow \min P = 4$. chọn **đúng**.

Phần III (8 điểm). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 8.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{12}{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

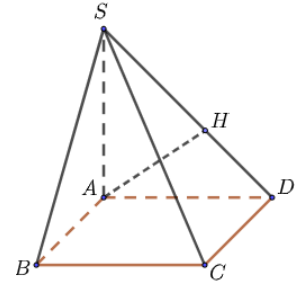
Hướng dẫn giải.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH = \frac{12}{5}$.

Suy ra $AD = 4cm$.

Vậy $S_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3.4^2 = 16$.



Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; 7)$. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tích tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq 1$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x + 2m - 1}{(x - 1)^2}$.

Điều có 2 điểm cực trị $m < 1$.

Phương trình đi 2 điểm cực trị $y = 2x - m$. Gọi $A(a; 2a - m)$ và $B(b; 2b - m)$.

$\vec{MA}(a - 3; 2a - m - 7)$

$\vec{MB}(b - 3; 2b - m - 7)$

Tam giác MAB vuông tại $M \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(b - 3) + (2a - m - 7)(2b - m - 7) = 0$.

Suy ra $m = -1$ (loại) và $m = -19$ (nhận).

Câu 3. Xếp ngẫu nhiên một nhóm học sinh gồm 3 nữ và 17 nam thành một hàng ngang. Xác suất để không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu: $n(\Omega) = 20!$

Gọi A là biến cố “Giữa 2 nữ không có đúng 1 nam”

TH1: 3 nữ đứng gần nhau có: $3!.18!$

TH2: 2 nữ gần nhau, 1 nữ cách ra có: $C_{17}^2.3!.17!$

TH3: 3 nữ cách nhau có: $C_{16}^3.3!.17!$

Suy ra: $P(A) = \frac{119}{190} \approx 0,63$

Câu 4. Một hộ sản xuất kinh doanh hạt điều sấy mỗi ngày sản xuất được x kg ($5 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 + 19x + 300$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử hộ sản xuất này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 316 nghìn đồng/kg. Hỏi hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu kilôgam hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất?

Hướng dẫn giải

Số tiền bán được là $A(x) = 316x$ (nghìn).

Lợi nhuận thu được là

$$T(x) = 316x - (x^3 - 3x^2 + 19x + 300) = -x^3 + 3x^2 + 297x - 300$$

Ta có $T'(x) = -3x^2 + 6x + 297$

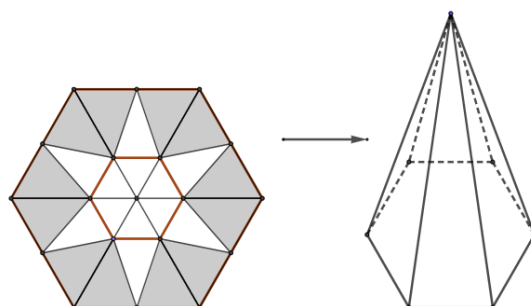
$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -9 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	5	11	20
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Vậy hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 11 kg hạt điều sấy để thu được lợi nhuận tối đa.

Câu 5. Từ một tấm bìa lục giác đều cạnh 20, bạn Hoa muốn làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ phần tô đậm và dán các mép lại với nhau (các mũi ghép nối có kích thước không đáng kể, tham khảo hình bên). Để thể tích hình lục giác đều tạo thành lớn nhất thì phần diện tích bạn Hoa cắt đi là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Hướng dẫn giải

Gọi cạnh đáy của hình chóp lục giác đều bằng x

với $x > 0$. Suy ra $OA = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow SA = SO - OA = 10\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

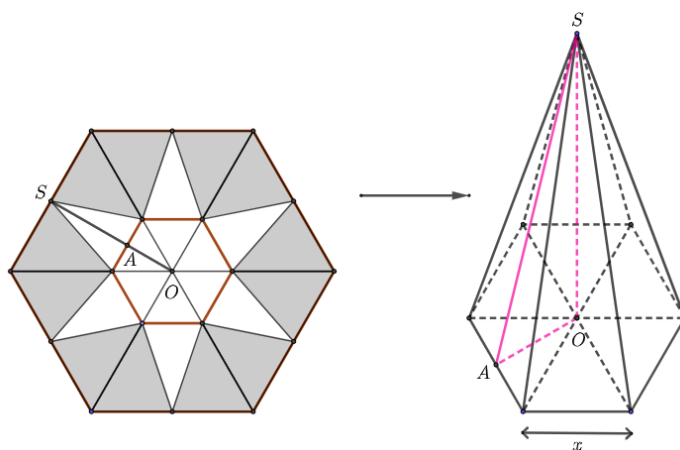
Gọi h là chiều cao của hình lục giác đều.

$$\text{Suy ra } h = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{300 - 30x}$$

với $x < 10$.

Do vậy

$$V = \frac{1}{3} h S_{\text{lụcgiacdeu}} = \frac{1}{3} \sqrt{300 - 30x} \cdot 6x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{300x^4 - 30x^5}$$



Đặt $f(x) = 300x^4 - 30x^5$ với $0 < x < 10$ có $f'(x) = 1200x^3 - 150x^4 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Lập BBT ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất tại $x = 8\text{cm}$.

Suy ra $OA = 4\sqrt{3}\text{cm}, SA = 6\sqrt{3}\text{cm}$.

Diện tích phần cắt bỏ đi bằng $6 \cdot \left(20^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10\sqrt{3} \right) \approx 624$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;2)$, $B(2;-6;0)$ và $C(-4;4;4)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho MB vuông góc với BC . Độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả được làm tròn một chữ số thập phân).

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y; 0) \in (Oxy)$ ta có $\overrightarrow{BM} = (x-2; y+6; 0)$ và $\overrightarrow{CM} = (x+4; y-4; 4)$.

Từ $MB \perp MC$ ta có được $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ suy ra $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 34$.

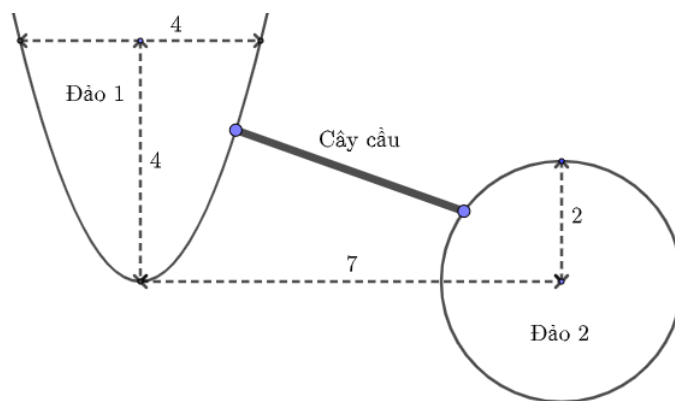
Độ dài đoạn $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + 4}$ suy ra $AM^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 + 4$
 $= (x+1)^2 + (y+1)^2 - 4x - 10y + 19 = 53 - (4x + 10y)$ hay $67 - AM^2 = [4(x+1) + 10(y+1)]$.

Ta có $[4(x+1) + 10(y+1)]^2 \leq 3944$ do vậy $(67 - AM^2)^2 \leq 3944$

$$\Leftrightarrow \frac{134 - \sqrt{15776}}{2} \leq AM^2 \leq \frac{134 + \sqrt{15776}}{2}$$

$$\text{Vậy } AM_{\max} = \sqrt{\frac{134 + \sqrt{15776}}{2}} \approx 11,4.$$

Câu 7. Trên một hồ nước có hai đảo. Đảo thứ nhất có hình dạng là một parabol và đảo thứ hai có hình dạng là một hình tròn với kích thước được mô hình hóa trong hình bên. Người ta muốn xây dựng một cái cầu nối hai đảo với nhau. Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải

Xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình bên.

Phương trình parabol $y = x^2$.

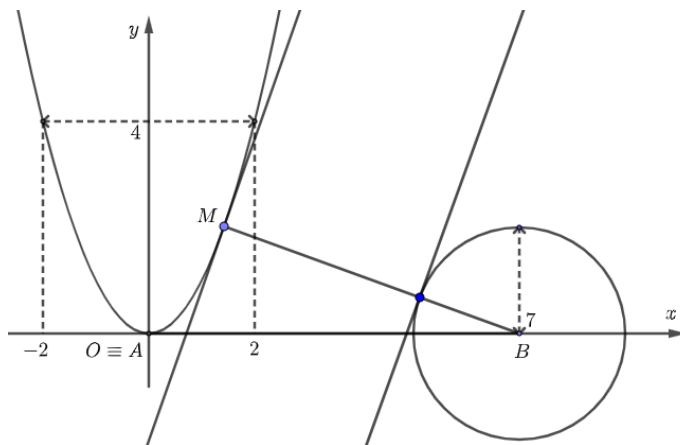
Gọi $M(m; m^2) \in (P) \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến tại M là $k = f'(m) = 2m$.

Hệ số góc của đường thẳng MB là $k' = \frac{m^2}{m-7}$ với $m \neq 7$.

Để chiều dài chiếc cầu ngắn nhất có thể thì tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng MB .

Suy ra $k.k' = -1 \Rightarrow 2m \cdot \frac{m^2}{m-7} = -1 \Rightarrow m \approx 1,4$. Suy ra $M(1,4; 1,98)$.

Độ dài nhỏ nhất của chiếc cầu bằng $MB - 2 \approx 3,93$.



Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + \ln x) \cdot e^{y + \ln x} \leq (x^3 + x)e^y$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $e^{x^2} + (y + \ln x) \cdot e^{y + \ln x} \leq (x^3 + x) \cdot e^y$. Chia 2 vế cho $e^y \cdot x$ ta được

$$\frac{e^{x^2-y}}{x} + y + \ln x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \leq 1.$$

Mà $e^{x^2-y-\ln x} - (x^2 - y - \ln x) \geq 1$ vì $e^t \geq t + 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Từ đó suy ra $x^2 - y - \ln x = 0 \Rightarrow y = x^2 - \ln x = f(x)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}; f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y \geq \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,85$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của y thỏa bất phương trình đã cho.

----- Hết -----

ĐỀ GỐC 2

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Phần I (6 điểm). Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ được chọn một phương án.

Câu 1. Thời gian tập thể dục mỗi ngày của bạn Nam được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	2	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là

A. 11,321.

B. 9,4035.

C. 34,6875.

D. 10,3125.

Hướng dẫn giải

Cỡ mẫu $n = 21$

$$Q_1 = 20 + \frac{4}{6}(25 - 20) = 24,375;$$

$$Q_3 = 30 + \frac{3 \cdot 21 - 12}{4}(35 - 30) = 34,6875$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 10,3125$.

Câu 2. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng

A. $\frac{11}{27}$.

B. $\frac{13}{27}$.

C. $\frac{14}{27}$.

D. $\frac{12}{27}$.

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{27}^2 = 351$.

Gọi biến cố A : “Hai số được chọn có tổng là số lẻ”, từ đây ta có hai số khác tính chẵn lẻ, do đó $n(A) = 13 \cdot 14 = 182$.

Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số lẻ bằng $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14}{27}$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$ là

A. 18.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Hướng dẫn giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in [0; 10\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{59}{3}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots; 19\}$. Có 20 nghiệm.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Giá trị cotang của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H lần lượt là hình chiếu của A lên BD , ta có: $\begin{cases} AH \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases}$

suy ra $BD \perp SH$.

Do vậy $[S, BD, A] = \widehat{SHA}$.

Xét tam giác SAH vuông tại A ta có $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH}$.

AH là đường cao trong tam giác ABD vuông tại A , ta có

$$AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2. \text{ Suy ra } \cot \widehat{SHA} = \frac{1}{2}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Phương trình đường tiệm cận xiên của (C) là $y = ax + b$.

Giá trị $T = 4a + b$ bằng

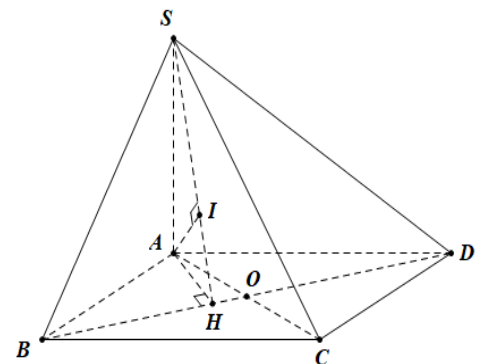
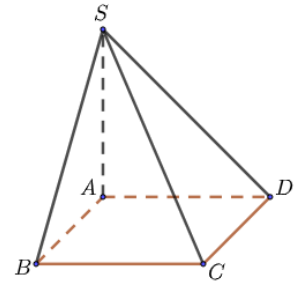
A. 0.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Hướng dẫn giải.



Tiệm cận xiên $y = x + 4$ nên $a = 1, b = 4$. Do vậy $T = 4a + b = 8$.

Câu 6. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 9$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm t_0 (giây) bằng bao nhiêu thì vận tốc nhỏ nhất.

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Vận tốc $v(t) = S' = 3t^2 - 18t + 15$; $v'(t) = 6t - 18 > 0 \Leftrightarrow t > 3$.

Vận tốc bắt đầu tăng khi $t = 3$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - 2x + c}{x + b}$, (với $a \neq 0$) có đồ thị như

hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $P = a^2 - b + c$ bằng

A. -1.

B. 3.

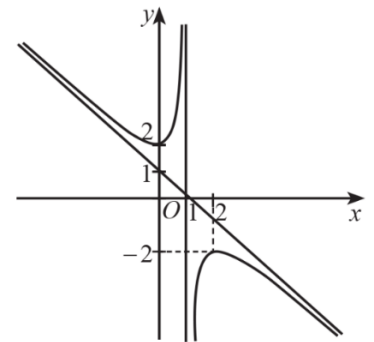
C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = \frac{ax^2 - 2x + c}{x - 1}$.

Đồ thị đi qua 2 điểm $(0; 2), (2; -2) \Rightarrow c = -2, a = 1 \Rightarrow P = a^2 - b + c = 0$.



Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 4, AA' = 6$.

Điểm M thuộc cạnh CC' sao cho $MC' = 2MC$, N thuộc cạnh DD' sao cho

$ND = 2ND'$. Giá trị $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN})$ bằng

A. $\frac{-1}{\sqrt{30}}$.

B. $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{30}}$.

D. $\frac{-1}{\sqrt{15}}$.

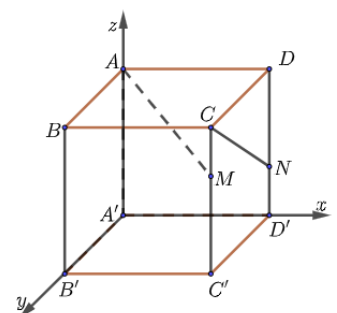
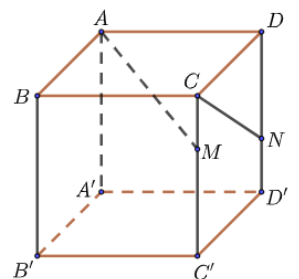
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Suy ra $A(0; 0; 6), M(4; 2; 4), C(4; 2; 6), N(4; 0; 2)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = (4; 2; -2), \overrightarrow{CN} = (0; -2; -6)$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{CN}|} = \frac{1}{\sqrt{15}}$.



Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 10. Điểm M nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DD' và $A'M$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

C. $5\sqrt{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên M thuộc mặt phẳng $(ACC'A')$, lại có $DD' \parallel (ACC'A')$ nên

$$d(DD', A'M) = d(DD', (ACC'A')) = d(D', (ACC'A')).$$

Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$, vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $B'D' \perp (ACC'A')$.

$$d(D', (ACC'A')) = D'O' = \frac{1}{2}B'D' = 5\sqrt{2}.$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2)$, $B(2;1;4)$, $C(-1;2;2)$. Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $T = x + y - z$ bằng

A. 1.

B. $\frac{-2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. -1.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{AH} = (x; y-1; z-2); \overrightarrow{BH} = (x-2; y-1; z-4)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2; 0; 2); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0); \overrightarrow{BC} = (-3; 1; -2). \text{ Theo đề bài ta có}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y - 2z = -3 \\ -x + y = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow T = -1$$

Câu 11. Ông An dự định sử dụng hết $18m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, đáy là hình chữ nhật với chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 6,39.

B. 6,25.

C. 6,93.

D. 6,83.

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể lần lượt là $x, 2x, y (x, y > 0)$.

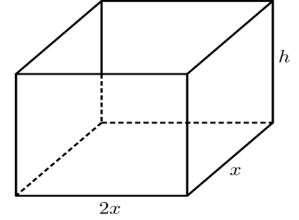
Diện tích phần lấp kính là

$$2x \cdot x + 2xy + 2 \cdot 2x \cdot y = 2x^2 + 6xy = 18 \Leftrightarrow xy = \frac{18 - 2x^2}{6} > 0 \Rightarrow x < 3$$

Thể tích bể cá là $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x \cdot \frac{18 - 2x^2}{6} = \frac{-4x^3 + 36x}{6}$ với $0 < x < 3$

Ta có: $V' = \frac{-12x^2 + 36}{6}, V' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(\sqrt{3}) \approx 6,93.$$



Câu 12. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{1-xy}{2x+y} = 2xy + 2x + y - 3$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = x + y \text{ bằng}$$

A. $\frac{2\sqrt{6}-3}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{6}-2}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}+3}{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{6}+3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Với x, y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_2 \frac{1-xy}{2x+y} = 2xy + 2x + y - 3$ ta được $1 - xy > 0$

Biến đổi $\log_2 \frac{1-xy}{2x+y} = 2xy + 2x + y - 3$

$$\Leftrightarrow \log_2 [2(1-xy)] + 2(1-xy) = \log_2 (2x+y) + (2x+y)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0 \text{ với mọi } x \in D \text{ nên hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ đồng biến trên } D = (0; +\infty)$$

Từ đó suy ra $2(1-xy) = 2x+y \Rightarrow x = \frac{2-y}{2+2y}$ (do $y > 0$)

Theo giả thiết ta có $x > 0, y > 0$ nên $0 < y < 2$.

$$P = x + y = y + \frac{2-y}{2+2y} = \frac{2y^2 + y + 2}{2+2y}.$$

Xét hàm số $g(y) = \frac{2y^2 + y + 2}{2+2y}$ với $0 < y < 2$.

$$g'(y) = \frac{4y^2 + 8y - 2}{(2+2y)^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}.$$

Từ đó suy ra $\min P = g\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{-3+2\sqrt{6}}{2}$.

Phần II (6 điểm). Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 3. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Mỗi tuần, một cửa hàng bán điện thoại di động trung bình bán được 2000 điện thoại A với giá 16 triệu đồng một cái. Biết rằng, nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng/1 cái, số lượng điện thoại A bán ra sẽ tăng thêm khoảng 200 cái mỗi tuần. Biết rằng nếu bán x cái điện thoại A thì giá mỗi cái là $p(x)$ (triệu đồng) và hàm chi phí hàng tuần $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng).

a) $p(2000) = 16$ và $p(200) = 15,5$.

b) $p(x) = -\frac{1}{400}x + 21$.

c) Cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất khi bán ra 2400 cái điện thoại A.

d) Để lợi nhuận là lớn nhất, cửa hàng nên bán mỗi cái điện thoại A là 9,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải

a) Theo đề, ta chọn **sai**.

b) Theo giả thiết $p(x) = ax + b$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b$ đi qua hai điểm $(2000; 16)$ và $(2200; 15,5)$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 16 = 2000a + b \\ 15,5 = 2200a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{400} \\ b = 21 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $p(x) = -\frac{1}{400}x + 21$ chọn **đúng**.

c) Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là $R(x) = x \cdot p(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{400}x + 21\right) = \frac{-x^2}{400} + 21x$ (triệu đồng)

Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là

$$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-x^2}{400} + 21x - 12000 + 3x = \frac{-x^2}{400} + 24x - 12000 \text{ (triệu đồng).}$$

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất.

Ta có: $P'(x) = \frac{-x}{200} + 24, P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4800$. Lập BBT, ta kết luận bán 4800 cái iphone14 thì lợi nhuận là cao nhất. Chọn **sai**.

d) Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là $p(4800) = 9$ (triệu đồng) chọn **sai**.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) bằng $2\sqrt{5}$.

c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

d) Tổng khoảng cách từ một điểm trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Lập BBT suy ra chọn **sai**.

b) Dựa vào bảng biến thiên. Suy ra hai điểm cực trị $O(0;0), A(-2;-4) \Rightarrow OA = 2\sqrt{5}$ chọn **đúng**.

c) Ta có $y = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$. Suy ra tiệm cận xiên là $y = x-1$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của TCX với hai trục Ox, Oy .

Suy ra $B(0;-1), A(1;0)$. Do vậy $S_{OAB} = \frac{1}{2}$ (đvdt) chọn **đúng**.

d) Tiệm cận đứng (d): $x = 1 \Leftrightarrow x+1 = 0$.

Tiệm cận xiên (Δ): $y = x-1 \Leftrightarrow x-y-1 = 0$.

$$\text{Gọi } M(x; x-1 + \frac{1}{x+1}) \in (C) \Rightarrow d(M, (d)) = |x+1|; d(M, (\Delta)) = \frac{|x - (x-1 + \frac{1}{x+1}) - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |x+1|}.$$

Do vậy: $d(M, (d)) + d(M, (\Delta)) = |x+1| + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |x+1|} \geq \sqrt{2}$ chọn **sai**.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật và

$A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;3;0), S(0;0;4)$. Gọi E là trung điểm của CD.

a) $C(2;3;0)$.

b) Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0}$ có tọa độ là $(-1;3;6)$.

c) Góc tạo bởi hai đường thẳng SE và BC có số đo nhỏ hơn 60° .

d) Điểm I thuộc mặt phẳng (Oxy) thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}|$ bằng 12.

Hướng dẫn giải

a) Chọn **đúng**

b) $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MS} = \vec{0} \Rightarrow M(-1;-3;6)$ chọn **sai**

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow (\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{BC}) = 78^\circ 41' \Rightarrow (SE, BC) < 60^\circ$ chọn **đúng**.

d) Ta có $|\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IS}| = 2IM$

P nhỏ nhất khi I là hình chiếu của M trên (Oxy) $\Rightarrow I(-1;-3;0) \Rightarrow \min P = 12$ chọn **đúng**.

Phần III (8 điểm). Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời câu 1 đến câu 8.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = 6$. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{24}{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng bao nhiêu?

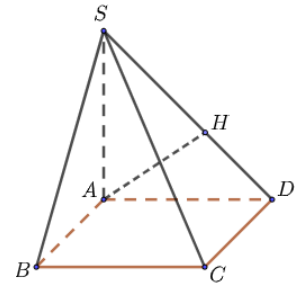
Hướng dẫn giải.

Kẻ $AH \perp SD$ tại H .

$$\text{Vì } AB \parallel (SCD) \text{ nên } d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH = \frac{24}{5}.$$

Suy ra $AD = 8\text{cm}$.

$$\text{Vậy } S_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8^2 = 128\text{cm}^3.$$



Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; 7)$. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tổng tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$\text{Điều kiện } x \neq 1. \text{ Ta có } y' = \frac{x^2 - 2x + 2m - 1}{(x - 1)^2}.$$

Điều có 2 điểm cực trị $m < 1$.

Phương trình đi 2 điểm cực trị $y = 2x - m$. Gọi $A(a; 2a - m)$ và $B(b; 2b - m)$.

$$\overrightarrow{MA}(a - 3; 2a - m - 7)$$

$$\overrightarrow{MB}(b - 3; 2b - m - 7)$$

$$\text{Tam giác } MAB \text{ vuông tại } M \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(b - 3) + (2a - m - 7)(2b - m - 7) = 0.$$

Suy ra $m = -1$ (loại) và $m = -19$ (nhận).

Câu 3. Xếp ngẫu nhiên một nhóm học sinh gồm 3 nữ và 18 nam thành một hàng ngang. Xác suất để không có học sinh nam nào mà hai bạn bên cạnh đều là nữ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu: $n(\Omega) = 21!$

Gọi A là biến cố “Giữa 2 nữ không có đúng 1 nam”

TH1: 3 nữ đứng gần nhau có : $3!.19!$

TH2: 2 nữ gần nhau, 1 nữ cách ra có: $C_{18}^2 \cdot 3!.18!$

TH3: 3 nữ cách nhau có: $C_{17}^3 \cdot 3!.18!$

$$\text{Suy ra: } P(A) = \frac{426}{665} \approx 0,64$$

Câu 4. Một hộ sản xuất kinh doanh hạt điều sấy mỗi ngày sản xuất được x kg ($5 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 40x + 300$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử hộ sản xuất này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 320 nghìn đồng/kg. Hỏi hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu kilôgam hạt điều để thu được lợi nhuận lớn nhất?

Hướng dẫn giải

Số tiền bán được là $A(x) = 320x$ (nghìn).

Lợi nhuận thu được là

$$T(x) = 320x - (x^3 - 3x^2 - 40x + 300) = -x^3 + 3x^2 + 360x - 300$$

Ta có $T'(x) = -3x^2 + 6x + 360$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -10 \end{cases}$$

Dựa vào BBT suy ra hộ sản xuất này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 12kg hạt điều sấy để thu được lợi cao nhất.

Câu 5. Từ một tấm bìa lục giác đều cạnh 40, bạn Hoa muốn làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ phần tô đậm và dán các mép lại với nhau (các mối ghép nối có kích thước không đáng kể, tham khảo hình bên). Để thể tích hình lục giác đều tạo thành lớn nhất thì phần diện tích bạn Hoa cắt đi là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Hướng dẫn giải

Gọi cạnh đáy của hình chóp lục giác đều bằng x

với $x > 0$. Suy ra $OA = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow SA = SO - OA = 20\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Gọi h là chiều cao của hình lục giác đều.

Suy ra $h = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1200 - 60x}$

với $x < 20$.

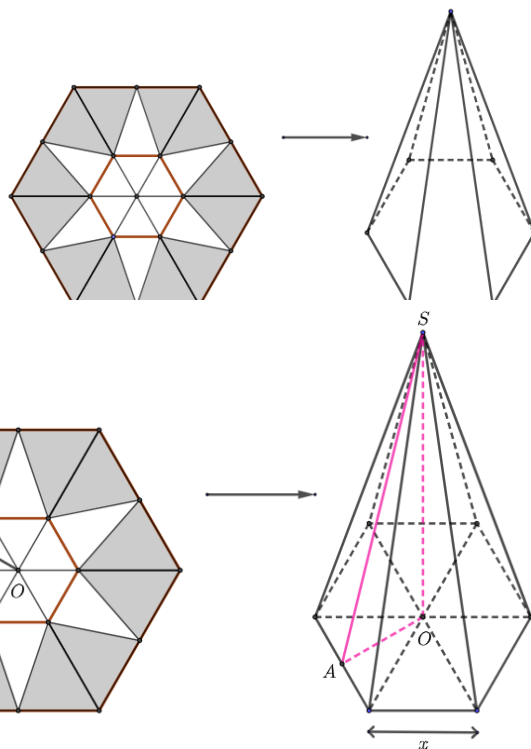
Do vậy

$$V = \frac{1}{3}h.S_{lucgiacdeu} = \frac{1}{3}\sqrt{1200 - 60x}.6.x^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1200x^4 - 60x^5}.$$

Đặt $f(x) = 1200x^4 - 60x^5$ với $0 < x < 20$ có $f'(x) = 4800x^3 - 300x^4 = 0 \Rightarrow x = 16$.

Lập BBT ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất tại $x = 16cm$.

Diện tích phần cắt bỏ đi bằng $6 \cdot \left(40^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 20\sqrt{3} \right) \approx 2494cm^2$.



Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;2)$, $B(2;0;-6)$ và $C(-4;4;4)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho MB vuông góc với MC . Độ dài đoạn thẳng AM lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả được làm tròn một chữ số thập phân).

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;0;z) \in (Oxz)$ ta có $\overrightarrow{BM} = (x-2;0;z+6)$ và $\overrightarrow{CM} = (x+4;-4;z-4)$.

Từ $MB \perp MC$ ta có được $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ suy ra $(x+1)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Độ dài đoạn $AM = \sqrt{(x-1)^2 + (z-2)^2 + 16}$ suy ra $AM^2 = (x-1)^2 + (z-2)^2 + 16$

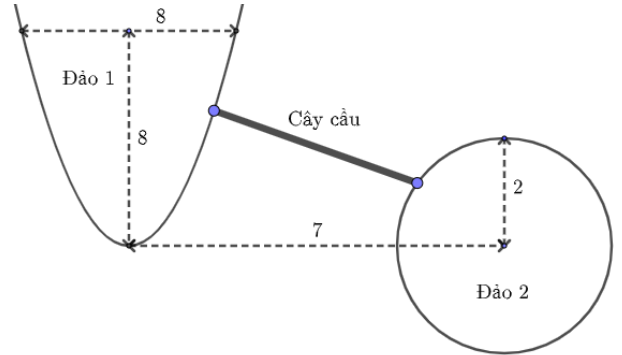
$= (x+1)^2 + (z+1)^2 - 4x - 6z + 19 = 53 - (4x + 6z)$ hay $63 - AM^2 = [4(x+1) + 6(z+1)]$.

Ta có $[4(x+1)+6(z+1)]^2 \leq 1768$ do vậy $(63-AM^2)^2 \leq 1768$

$$AM \leq 10,2$$

Vậy $AM_{\max} \approx 10,2$.

Câu 7. Trên một hồ nước có hai đảo. Đảo thứ nhất có hình dạng là một parabol và đảo thứ hai có hình dạng là một hình tròn với kích thước được mô hình hóa trong hình bên. Người ta muốn xây dựng một cái cầu nối hai đảo với nhau. Hỏi chiều dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải

Xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình bên.

Phương trình parabol $y = \frac{1}{2}x^2$.

Gọi $M\left(m; \frac{1}{2}m^2\right) \in (P) \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến tại

M là $k = f'(m) = m$.

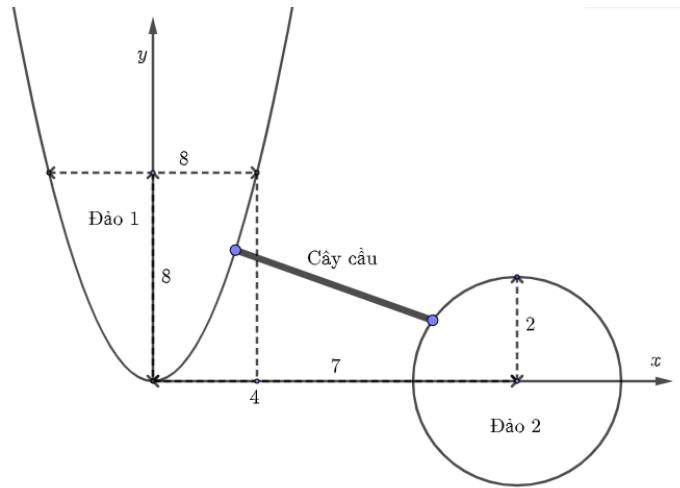
Hệ số góc của đường thẳng MB là $k' = \frac{\frac{1}{2}m^2}{m-7}$ với

$m \neq 7$.

Để chiều dài chiếc cầu ngắn nhất có thể thì tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng MB .

Suy ra $k.k' = -1 \Rightarrow m \cdot \frac{\frac{1}{2}m^2}{m-7} = -1 \Rightarrow m \approx 1,4$. Suy ra $M(2,134; 2,7888)$.

Độ dài nhỏ nhất của chiếc cầu bằng $MB - 2 \approx 3,37$.



Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên $y \leq 2024$ để ứng với mỗi y tồn tại hai số thực x thỏa mãn bất phương trình $e^{x^2} + (y + 2 \ln x) \cdot e^{y+2 \ln x} \leq (x^4 + x^2) \cdot e^y$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $e^{x^2} + (y + 2 \ln x) \cdot e^{y+2 \ln x} \leq (x^4 + x^2) \cdot e^y$. Chia 2 vế cho $e^y \cdot x^2$ ta được

$$\frac{e^{x^2-y}}{x^2} + y + 2 \ln x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2-y-2 \ln x} - (x^2 - y - 2 \ln x) \leq 1.$$

Mà $e^{x^2-y-2 \ln x} - (x^2 - y - 2 \ln x) \geq 1$ vì $e^t \geq t + 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Từ đó suy ra $x^2 - y - 2 \ln x = 0 \Rightarrow y = x^2 - 2 \ln x = f(x)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x}; f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (vì } x > 0 \text{)}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(1) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y \geq 1$.

Vậy có 2023 giá trị nguyên của y thỏa bất phương trình đã cho.

----- Hết -----