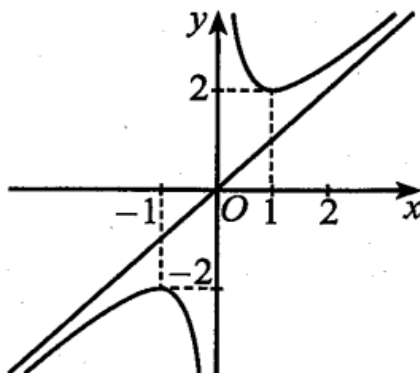


Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn, gồm 12 câu, tổng 3,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án. (Mỗi câu đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1.



Hình 1

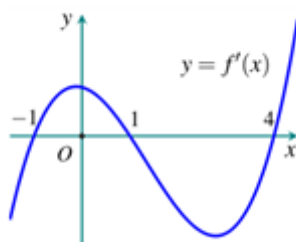
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(0;1)$. B. $(1;2)$. C. $(-1;0)$. D. $(-1;1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ và điểm $A(0; -2; 0)$ thuộc (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình là

- A. $2x + 3y + 6 = 0$. B. $y + 2 = 0$.
C. $2x - 3y - 6 = 0$. D. $2x - 3y - 4z - 6 = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = e^{2f(x)+1} - 4 \cdot 2^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$ trên đoạn $[-4;1]$.

- A. $\sqrt{7}$. B. 0. C. $\sqrt{6}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 5. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 3^{x^2-x}$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3^{x_1} + 3^{x_2}$.

- A. $M = 6$. B. $M = 4$. C. $M = 5$. D. $M = 12$.

Câu 6. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$. Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên có bao nhiêu thời điểm t để tàu có thể hạ thủy.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7. Một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi trắng cùng kích thước. Rút ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi không trả lại cho đến khi được viên bi đỏ thì dừng. Hãy tìm xác suất để không có viên bi xanh nào được rút ra

A. $\frac{8}{11}$.

B. $\frac{2}{11}$.

C. $\frac{4}{11}$.

D. $\frac{6}{11}$.

Câu 8. Số cách chia 12 phần quà cho 3 học sinh sao cho ai cũng có ít nhất hai phần quà là

A. 36.

B. 28.

C. 66.

D. 220

Câu 9. Cho hai điểm $A(0;6); B(8;0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 25$.

B. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

C. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 100$.

D. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hình chiếu vuông góc của B' lên đáy $(ABCD)$ trùng với điểm H nằm trên BD sao cho $DH = 2BH$. Biết $B'H = 2a\sqrt{3}$, $BD = 3a$,

$HC = 2a$, $BC = a\sqrt{5}$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng $(B'HC)$ và $(B'BCC')$ bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 45°

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 12. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. 800cm^2 .

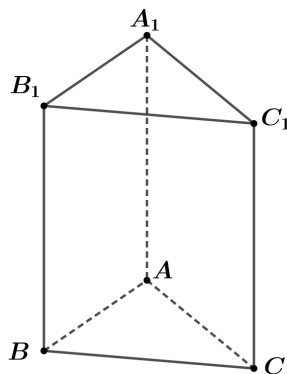
B. $\frac{800}{3}\text{cm}^2$.

C. $\frac{400}{3}\text{cm}^2$.

D. 250cm^2 .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai, gồm 4 câu, tổng 4,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$ và cạnh bên $AA_1 = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ)



a) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

b) Góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .

c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng A_1C_1 và BC_1 sao cho $MN = \frac{a}{2}$. Thể

tích của khối chóp $A.A_1BNM$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

d) Trên khoảng $(-3; -1)$, hàm số $y = 2025 + 2024f(f(x) - 2)$ nghịch biến.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B . Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ ($b > a$) sao cho $AB = 2024$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d .

a) Phương trình đường thẳng d là: $y = (a + b)x - ab$.

b) $S = \frac{1}{3}(b - a)^3$.

c) Giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S là $S_{\max} = \frac{2024^3}{5}$.

d) Giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S xảy ra khi $a = -1012$ và $b = 1012$.

Câu 4. Một công ty xây dựng đầu thầu 3 dự án X, Y và Z . Xác suất để ba dự án X, Y và Z trúng thầu tương ứng là x, y và $0,8$ ($x > y$). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba dự án trúng thầu là $0,964$ và xác suất để cả ba dự án đều trúng thầu là $0,224$. Giả sử việc trúng thầu của ba dự án X, Y và Z là độc lập với nhau. Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một trong ba dự án trúng thầu” và B là biến cố: “Cả ba dự án trúng thầu”.

a) Biến cố đối của biến cố A là $\bar{A}$: “Cả ba dự án đều không trúng thầu”.

b) Xác suất để xảy ra biến cố B là $P(B) = 0,8xy$.

c) Xác suất để dự án X trúng thầu là $0,6$.

d) Xác suất để có đúng hai dự án trúng thầu là $0,488$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn, gồm 6 câu, tổng 3,0 điểm (mỗi câu 0,5 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một lớp học có tổng số 36 học sinh, trong đó số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ. Lớp học được phân thành hai nhóm, nhóm 1 gồm các học sinh nam và nhóm 2 gồm các học sinh nữ để khảo sát về kỹ năng bơi của học sinh. Biết mỗi học sinh chỉ tích chọn một trong hai hình thức: biết bơi hoặc chưa biết bơi và nhóm nào cũng có cả hai hình thức. Lấy ngẫu nhiên mỗi nhóm một học sinh, xác suất lấy được hai học sinh biết bơi là $\frac{140}{299}$. Biết số học sinh nữ biết bơi là số lẻ, Số học sinh nam biết bơi là.....

Câu 2. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22 h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18 h00 và ca II từ 14 h00 đến 22 h00. Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho ca II sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

Câu 4. Anh Nam có một cái ao với diện tích $50m^2$ để nuôi cá điêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 20con / m^2 và thu được 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con / m^2 thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm 0,5kg. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Câu 5. Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ để kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về báo cáo kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 8.000, trong số đó có 1.200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 6.800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Nhưng khi kiểm tra lại bằng dụng cụ của công ty, trong 1.200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Trong 6.800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Xác suất mà một bệnh nhân với kết quả kiểm tra dương tính là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;2), B(2;2;4), C(2;0;1), D(3;1;0)$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau, cùng đi qua hai điểm A, B và cắt đường thẳng CD tại hai điểm M, N . Độ dài MN ngắn nhất bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.C	3.A	4.A	5.C	6.C	7.D	8.B	9.D	10.B	11.D	12.C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.	Câu 2.	Câu 3.	Câu 4.
a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) S	b) S	b) Đ
c) S	c) S	c) S	c) S
d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ

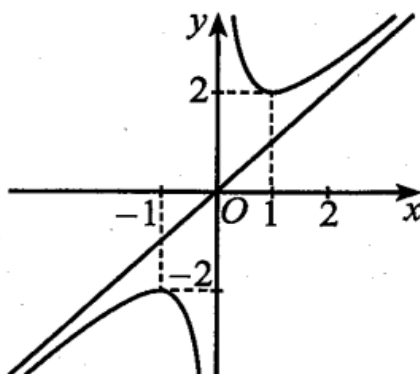
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5	6
Chọn	20	16	3	512	0,71	2,83

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn, gồm 12 câu, tổng 3,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án. (Mỗi câu đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1.



Hình 1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(0;1)$.

B. $(1;2)$.

C. $(-1;0)$.

D. $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ và điểm $A(0; -2; 0)$ thuộc (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình là
- A. $2x + 3y + 6 = 0$. B. $y + 2 = 0$.
 C. $2x - 3y - 6 = 0$. D. $2x - 3y - 4z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn C.

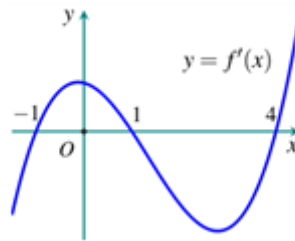
Mặt cầu (S) có tâm là $I(-2; 1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

Do (P) tiếp xúc với (S) tại điểm A nên $\overrightarrow{IA} = (2; -3; 0)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

$\Rightarrow$ PT mặt phẳng (P) là: $2(x - 0) - 3(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 6 = 0$.

- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = e^{2f(x)+1} - 4.2^{f(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

Lời giải

Ta có: $y = e^{2f(x)+1} - 4.2^{f(x)}$

$\Rightarrow y' = 2f'(x)e^{2f(x)+1} - 4.f'(x)2^{f(x)}.\ln 2$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)e^{2f(x)+1} - 4.f'(x)2^{f(x)}.\ln 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2e^{2f(x)+1} - 4.2^{f(x)}.\ln 2 = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ và } f'(x) \text{ đổi dấu qua các nghiệm. Hàm số có 3 điểm cực trị.}$$

$$+ 2e^{2f(x)+1} - 4.2^{f(x)}.\ln 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2f(x)+1} = 2.2^{f(x)}.\ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + 1 = \ln(2.2^{f(x)}.\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) + 1 = \ln(2.\ln 2) + f(x)\ln 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(2.\ln 2) - 1}{2 - \ln 2} \approx -0,515 \text{ (vô lý).}$$

Vậy hàm số $y = e^{2f(x)+1} - 4.2^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị.

- Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$ trên đoạn $[-4; 1]$.

- A. $\sqrt{7}$. B. 0. C. $\sqrt{6}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+10}} < 0$ với mọi $x \in [-4; 1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $[-4; 1]$.

- Câu 5.** Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2^{x-1} = 3^{x^2-x}$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3^{x_1} + 3^{x_2}$.
- A. $M = 6$. B. $M = 4$. C. $M = 5$. D. $M = 12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x-1} = 3^{x^2-x} \Leftrightarrow \log_3(2^{x-1}) = \log_3(3^{x^2-x}) \Leftrightarrow (x-1)\log_3 2 = x^2 - x$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x - \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \log_3 2 \end{cases}. \text{ Do đó } M = 3^1 + 3^{\log_3 2} = 3 + 2 = 5.$$

Câu 6. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$. Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên có bao nhiêu thời điểm t để tàu có thể hạ thủy.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Các thời điểm để mực nước sâu là 3,6 m tương ứng với phương trình $0,8\cos 0,5t + 4 = 3,6$

+) Với $t = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq 1,24$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1\}$.

+) Với $t = -\frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq -\frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq 1,24.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1$.

Vậy tại các thời điểm $t = \frac{4\pi}{3}, t = \frac{10\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ giờ thì tàu có thể hạ thủy.

Câu 7. Một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi trắng cùng kích thước. Rút ngẫu nhiên lần lượt từng viên bi không trả lại cho đến khi được viên bi đỏ thì dừng. Hãy tìm xác suất để không có viên bi xanh nào được rút ra

A. $\frac{8}{11}$. B. $\frac{2}{11}$. C. $\frac{4}{11}$. D. $\frac{6}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Th1: Lấy lần 1 bi được bi màu đỏ

$$\Rightarrow p_1 = \frac{6}{15}.$$

Th2: Lấy lần 1 bi được bi, lần 2 được bi màu đỏ

$$\Rightarrow p_2 = \frac{4.6}{15.14}.$$

Th3: Lấy lần 1,2 được bi trắng, lần 3 được đỏ

$$\Rightarrow p_3 = \frac{4.3.6}{15.14.13}.$$

Th4: Lần 1,2,3 được bi trắng, lần 4 được bi đỏ

$$\Rightarrow p_4 = \frac{4.3.2.6}{15.14.13.12}.$$

Th5: Lần 1,2,3,4 được bi trắng, lần 5 được bi đỏ

$$\Rightarrow p_5 = \frac{4.3.2.1.6}{15.14.13.12.11}.$$

$$\Rightarrow p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{6}{11}.$$

Câu 8. Số cách chia 12 phần quà cho 3 học sinh sao cho ai cũng có ít nhất hai phần quà là

A. 36.

B. 28.

C. 66.

D. 220

Lời giải

Chọn B

+ Chia trước cho mỗi học sinh một phần quà thì số phần quà còn lại là 9 phần quà.

+ Chia 9 phần quà cho 3 học sinh sao cho học sinh nào cũng có ít nhất một phần quà:

Đặt 9 phần quà theo một hàng ngang, giữa các phần quà sẽ có 8 khoảng trống, chọn 2 khoảng trống trong 8 khoảng trống đó để chia 9 phần quà còn lại thành 3 phần quà mà mỗi phần có ít nhất một phần quà, có C_8^2 . Vậy tất cả có $C_8^2 = 28$ cách chia.**Câu 9.** Cho hai điểm $A(0;6); B(8;0)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 25$.

B. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

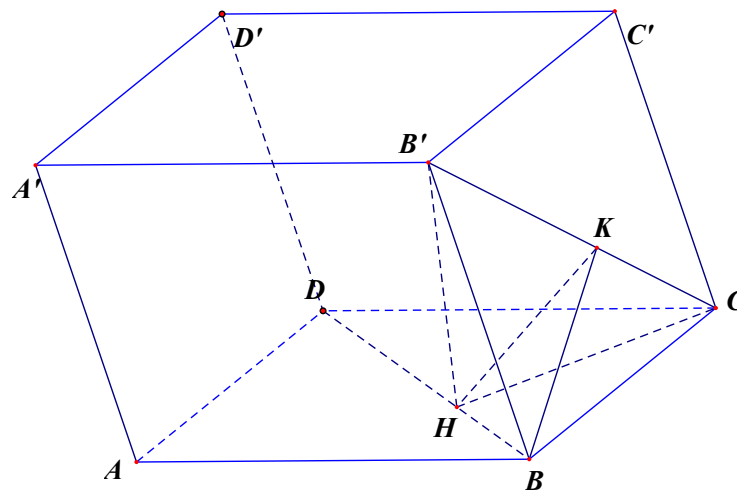
C. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 100$.

D. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn DTa có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm củacạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$.Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.**Câu 10.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hình chiếu vuông góc của B' lên đáy $(ABCD)$ trùng với điểm H nằm trên BD sao cho $DH = 2BH$. Biết $B'H = 2a\sqrt{3}$, $BD = 3a$, $HC = 2a$, $BC = a\sqrt{5}$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng $(B'HC)$ và $(B'BCC')$ bằngA. 60° .B. 30° .C. 90° .D. 45°

Lời giải

Chọn B❖ Xác định góc tạo bởi hai mặt phẳng $(B'HC)$ và $(B'BCC')$.

$$\begin{cases} DH = 2BH \text{ (gt)} \Rightarrow BH = \frac{1}{3}BD = a \\ HC = 2a, BC = a\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp HC \text{ (1)}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} B'H \perp (ABCD) \\ BH \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BH \perp B'H \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (B'HC) \Rightarrow BH \perp B'C$.Trong $(B'HC)$ dựng HK vuông góc $B'C$ tại K .

$$\begin{cases} B'C \perp HK \\ B'C \perp BH \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow B'C \perp (BHK) \quad (3).$$

Ta có:

$$\begin{cases} (B'HC) \cap (B'BCC') = B'C \\ (BHK) \perp B'C \text{ (do (3))} \\ (BHK) \cap (B'HC) = HK \\ (BHK) \cap (B'BC) = BK \end{cases} \Rightarrow ((B'HC), (B'BCC')) = (BK, HK).$$

❖ Tính góc $(\widehat{BK, HK})$.

$$\Delta B'HC \text{ vuông tại } H \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HB'^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{3}.$$

$$\tan \widehat{BKH} = \frac{HB}{HK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BKH} = 30^\circ \Rightarrow (\widehat{BK, HK}) = 30^\circ.$$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6.$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1; 2; 1)$.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (6+2)^2 + (-3-5)^2}}{2} = 6.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$$

Câu 12. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. 800 cm^2 .

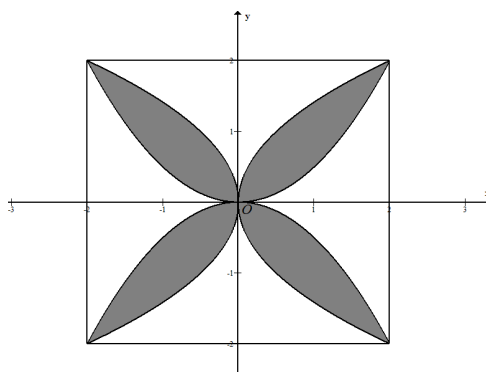
B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

D. 250 cm^2 .

Lời giải

Chọn C



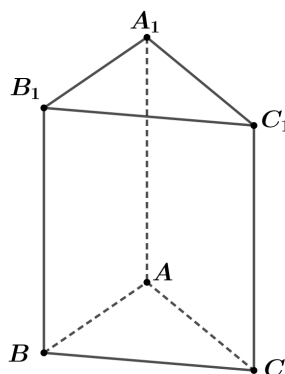
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $S = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai, gồm 4 câu, tổng 4,0 điểm. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$ và cạnh bên $AA_1 = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ)



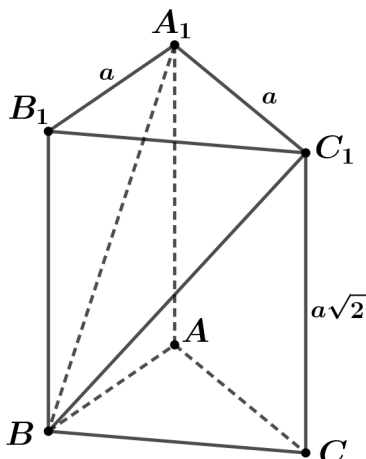
- a) Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
- b) Góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .
- c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- d) Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các đoạn thẳng A_1C_1 và BC_1 sao cho $MN = \frac{a}{2}$. Thể tích của khối chóp $A.A_1BNM$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{7\sqrt{2}}{48}a^3$.

Lời giải

(a) Đúng.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

(b) Đúng.



Vì $AC \parallel A_1C_1$ nên $(BC_1, AC) = (BC_1, A_1C_1) = \widehat{BC_1A_1}$.

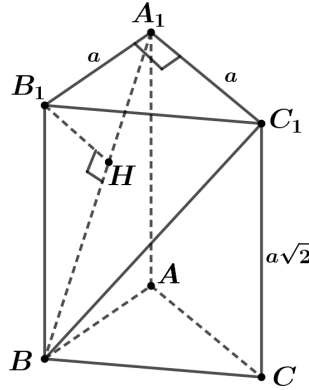
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$;

$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$. Ta thấy $BC_1^2 = A_1C_1^2 + A_1B^2 \Rightarrow \Delta A_1C_1B$ vuông tại A_1 .

Ta có $\sin \widehat{BC_1A_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BC_1A_1} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng BC_1 và AC bằng 60° .

(c) Sai.



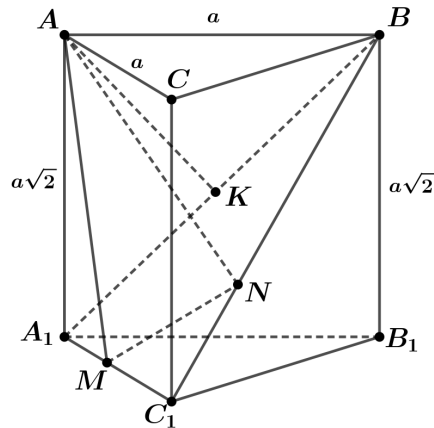
Kẻ $B_1H \perp A_1B$.

Ta có $d(A, (A_1BC_1)) = d(B_1, (A_1BC_1)) = B_1H$.

Xét tam giác vuông A_1B_1B , ta có $B_1H = \frac{B_1A_1 \cdot B_1B}{A_1B} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BC_1) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(d) Đúng.



Kẻ $AK \perp A_1B \Rightarrow AK \perp (BA_1MN)$. Ta có $AK = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ là $V = \frac{1}{3}AK \cdot S_{BA_1MN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot S_{BA_1MN}$.

Thể tích khối chóp $A.A_1BNM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{BA_1MN}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta C_1MN}$ lớn nhất.

Ta có $S_{\Delta C_1MN} = \frac{1}{2}C_1M \cdot C_1N \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}C_1M \cdot C_1N \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{C_1M^2 + C_1N^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}(C_1M^2 + C_1N^2)$.

Theo định lý cô sin ta có

$MN^2 = C_1M^2 + C_1N^2 - 2C_1M \cdot C_1N \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow C_1M^2 + C_1N^2 = \frac{a^2}{4} + C_1M \cdot C_1N$.

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1 MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1 M \cdot C_1 N \leq \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{a^2}{4} + C_1 M \cdot C_1 N \right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} C_1 M \cdot C_1 N \leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{32}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C_1 MN} = \frac{\sqrt{3}}{4} C_1 M \cdot C_1 N \leq \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}. \text{ Do đó diện tích } S_{\Delta C_1 MN} \text{ lớn nhất bằng } \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A_1 MN} \text{ nhỏ nhất bằng } S_{\Delta B A_1 C_1} - S_{\Delta C_1 MN} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{7a^2 \sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Khi đó thể tích khối chóp } A.A_1 BNM \text{ nhỏ nhất bằng } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{7a^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{48} a^3.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

d) Trên khoảng $(-3; -1)$, hàm số $y = 2025 + 2024f(f(x) - 2)$ nghịch biến.

Lời giải

a) Đ	b) S	c) S	d) S
-------------	-------------	-------------	-------------

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) Ta có $\sqrt{f(x) - 2} \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{f(x) - 2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3 \notin [1; 2]$

Do đó hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 là khẳng định sai.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 3)$.

d) Ta có $y' = 2024 \cdot f'(f(x) - 2) \cdot f'(x)$

Ta có $\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow f(x) < 2 \Rightarrow f'(2 - f(x)) < 0$.

$\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Do đó $\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow y' > 0$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B . Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ ($b > a$) sao cho $AB = 2024$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d .

a) Phương trình đường thẳng d là: $y = (a + b)x - ab$.

b) $S = \frac{1}{3}(b - a)^3$.

c) Giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S là $S_{\max} = \frac{2024^3}{5}$

d) Giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S xảy ra khi $a = -1012$ và $b = 1012$.

Lời giải

a) Đ	b) S	c) S	d) Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a + b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$\text{Vì } AB = 2024 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2024^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2024^2.$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2024^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2024 \Rightarrow S \leq \frac{2024^3}{6}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{2024^3}{6} \text{ khi } a = -1012 \text{ và } b = 1012.$$

Câu 4. Một công ty xây dựng đấu thầu 3 dự án X, Y và Z . Xác suất để ba dự án X, Y và Z trúng thầu tương ứng là x, y và $0,8$ ($x > y$). Biết rằng xác suất để ít nhất một trong ba dự án trúng thầu là $0,964$ và xác suất để cả ba dự án đều trúng thầu là $0,224$. Giả sử việc trúng thầu của ba dự án X, Y và Z là độc lập với nhau. Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một trong ba dự án trúng thầu” và B là biến cố: “Cả ba dự án trúng thầu”.

- a) Biến cố đối của biến cố A là $\bar{A}$: “Cả ba dự án đều không trúng thầu”.
- b) Xác suất để xảy ra biến cố B là $P(B) = 0,8xy$.
- c) Xác suất để dự án X trúng thầu là $0,6$.
- d) Xác suất để có đúng hai dự án trúng thầu là $0,488$.

Lời giải

Chọn A

(a) Đúng.

Biến cố đối của biến cố A là $\bar{A}$: “Cả ba dự án đều không trúng thầu”.

(b) Đúng.

B là biến cố: “Cả ba dự án đều trúng thầu” $\Rightarrow B = X \cap Y \cap Z$

Xác suất để xảy ra biến cố B là $P(B) = P(X \cap Y \cap Z) = 0,8xy$.

(c) Sai.

Xác suất để ít nhất một trong ba dự án đều trúng thầu là $0,964 \Rightarrow P(X \cup Y \cup Z) = 0,964$.

$$\Rightarrow P(X) + P(Y) + P(Z) - P(X \cap Y) - P(X \cap Z) - P(Y \cap Z) + P(X \cap Y \cap Z) = 0,964$$

$$\Rightarrow x + y + 0,8 - xy - 0,8x - 0,8y + 0,224 = 0,964 \Rightarrow 0,2x + 0,2y - xy = -0,06.$$

Xác suất để cả ba dự án đều trúng thầu là $0,224$

$$\Rightarrow P(X \cap Y \cap Z) = 0,224 \Rightarrow 0,8xy = 0,224 \Rightarrow xy = 0,28.$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,2y - xy = -0,06 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1,1 \\ xy = 0,28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0,4 \\ y = 0,7 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x > y \Rightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,4 \end{cases}.$$

Xác suất để dự án X trúng thầu là $0,7$.

(d) Đúng.

Xác suất để có đúng hai dự án trúng thầu là:

$$P(X \cap Y \cap \bar{Z}) + P(X \cap \bar{Y} \cap Z) + P(\bar{X} \cap Y \cap Z) = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,488.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn, gồm 6 câu, tổng 3,0 điểm (mỗi câu 0,5 điểm). Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một lớp học có tổng số 36 học sinh, trong đó số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ. Lớp học được phân thành hai nhóm, nhóm 1 gồm các học sinh nam và nhóm 2 gồm các học sinh nữ để khảo sát về kỹ năng bơi của học sinh. Biết mỗi học sinh chỉ tích chọn một trong hai hình thức: biết bơi hoặc chưa biết bơi và nhóm nào cũng có cả hai hình thức. Lấy ngẫu nhiên mỗi nhóm một học sinh, xác suất lấy được hai học sinh biết bơi là $\frac{140}{299}$. Biết số học sinh nữ biết bơi là số lẻ, Số học sinh nam biết bơi là.....

Lời giải

- ♦ Gọi số học sinh nam của lớp là a với $a \in \mathbb{N}$, $19 \leq a < 36$, suy ra số học sinh nữ là $36 - a$.
- ♦ Gọi số học sinh nam biết bơi là x , $x \in \mathbb{N}$, $x < 36$, số học sinh nữ biết bơi là y , y lẻ và $y < 17$.
- ♦ Xác suất để lấy được hai bạn biết bơi bằng $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{36-a}$.
- ♦ Theo bài ra ta có:

$$* \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{36-a} = \frac{140}{299} \Leftrightarrow 299xy = 140a(36-a) \Rightarrow 299xy:140 \Rightarrow xy:140 \text{ (Vì } (299;140)=1).$$

$$* x < a, y < 36-a \Rightarrow xy < a(36-a) = 324 - (a-18)^2 < 324.$$
- ♦ Mặt khác, y là số lẻ nhỏ hơn 17, $x < 36$ suy ra $xy \neq 280$ hay $xy = 140$.

$$\Rightarrow a(36-a) = 299 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ a = 13 \end{cases}.$$

- ♦ Đối chiếu điều kiện suy ra $a = 23 \Rightarrow$ số học sinh nữ là $b = 36 - a = 13$.

Ta có:
$$\begin{cases} xy = 140 \\ x < 23 \\ y < 13 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ và } y \text{ lẻ} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Vậy có 20 bạn học sinh nam biết bơi.

Câu 2. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/giờ
10h00 – 18h00	20000 đồng
14h00 – 22h00	22000 đồng

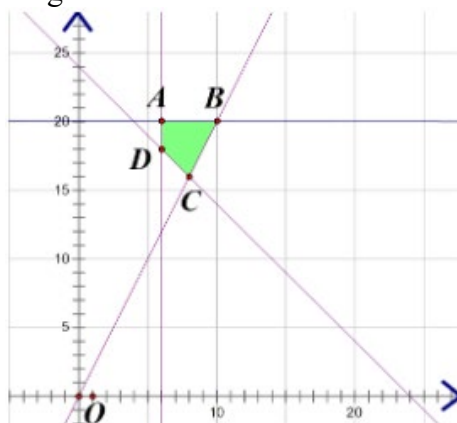
Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 - 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 - 18h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 - 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 - 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho ca II sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số nhân viên ca I và ca II ($x > 0, y > 0$)

Theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x + y \geq 24 \\ (x + y) - x \leq 20 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

Biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình



Tập nghiệm của bất phương trình giới hạn bởi tứ giác $ABCD$ với:

$A(6;20), B(10;20), C(8;16), D(6;18)$

Tiền lương mỗi ngày của các nhân viên: $T = 20x + 22y$ (nghìn đồng)

$$T(6;20) = 20.6 + 20.22 = 560 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(10;20) = 20.10 + 22 \cdot 20 = 640 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(8;16) = 20.8 + 22.16 = 512 \text{ (nghìn đồng)}$$

$$T(6;18) = 20.6 + 22.18 = 516 \text{ (nghìn đồng)}$$

Vậy để tiền lương mỗi ngày ít nhất thì ca I có 8 nhân viên, ca II có 16 nhân viên.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$\text{phương trình tham số của } d_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 + 3t_1; t_1 \in \mathbb{R}, A \in d_1 \Rightarrow A(1+t_1; 2+3t_1; t_1); \\ z = t_1 \end{cases}$$

$$\text{phương trình tham số của } d_2: \begin{cases} x = -1 - t_2 \\ y = 1 + 2t_2; t_2 \in \mathbb{R}, B \in d_2 \Rightarrow B(-1-t_2; 1+2t_2; 2+4t_2); \\ z = 2 + 4t_2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA} = (t_1 - 2; 3t_1 - 1; t_1 + 2); \overrightarrow{MB} = (-4 - 4t_2; -2 + 2t_2; 4 + 4t_2).$$

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2 = -4k - kt_2 \\ 3t_1 - 1 = -2k + 2kt_2 \\ t_1 + 2 = 4k + 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 4k + kt_2 = 2 \\ 3t_1 + 2k - 2kt_2 = 1 \\ t_1 - 4k - 4kt_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ kt_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy, $A(1;2;0)$ và $B(-1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB = |\overrightarrow{AB}| = 3$.

Câu 4. Anh Nam có một cái ao với diện tích $50m^2$ để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ $20\text{con} / m^2$ và thu được 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi $8\text{ con} / m^2$ thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5kg$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Hướng dẫn giải

Trả lời: 512

Số cá anh Nam thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\frac{1500}{1000} = 1,5kg / \text{con}$

Gọi $x > 0$ là số cá anh cần thả ít đi cho vụ tới nên sẽ tăng $0,0625x$ kg/con

Ta có phương trình tổng khối lượng cá thu được $T = f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Rightarrow x = 488 \\ f''(x) = -0,125 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = 16384 \Leftrightarrow x = 488$$

Vậy ở vụ sau anh chỉ cần thả $1000 - 488 = 512$ con cá giống.

Câu 5. Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ để kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về báo cáo kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 8.000, trong số đó có 1.200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 6.800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Nhưng khi kiểm tra lại bằng dụng cụ của công ty, trong 1.200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Trong 6.800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả

âm tính. Xác suất mà một bệnh nhân với kết quả kiểm tra dương tính là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,71

+ Khi kiểm tra lại, trong 1200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người cho kết quả dương tính nên ta có: $70\% \cdot 1200 = 840$ (người).

Khi đó số bị người nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính trong số 1200 người đó là: $1200 - 840 = 360$ (người).

+ Khi kiểm tra lại, trong 6800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính nên ta có là: $5\% \cdot 6800 = 340$ (người).

Khi đó, số người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính trong 6800 người đó là: $6800 - 340 = 6460$ (người).

Từ đó ta có bảng sau: (đơn vị: người)

	Số người nhiễm bệnh	Số người không nhiễm bệnh	Tổng số
	1200	6800	8000
Dương tính	840	340	1180
Âm tính	360	6460	6820

+ Xét các biến cố sau:

A : “Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết”;

B : “Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết”;

C : “Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả dương tính (khi kiểm tra lại)”;

D : “Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả âm tính (khi kiểm tra lại)”.

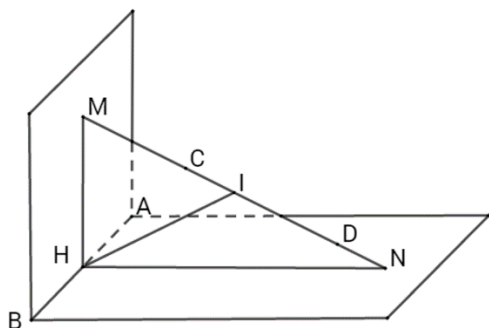
$$\text{Khi đó, ta có } P(C) = \frac{1180}{8000} = \frac{59}{400}; \quad P(A \cap C) = \frac{840}{8000} = \frac{21}{200}.$$

$$\text{Vậy } P(A|C) = \frac{21}{200} : \frac{59}{400} = \frac{42}{59} \approx 0,71.$$

Đáp số: 0,71.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;2), B(2;2;4), C(2;0;1), D(3;1;0)$. Hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau, cùng đi qua hai điểm A, B và cắt đường thẳng CD tại hai điểm M, N . Độ dài MN ngắn nhất bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải:



$$\overrightarrow{AB} = (1;1;2); \overrightarrow{CD} = (1;1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB \perp MN$$

Kẻ $MH \perp AB$ tại $H \Rightarrow MH \perp HN$. Gọi I là trung điểm của MN suy ra $MN = 2HI \geq 2d(AB, CD) =$

$$2 \cdot \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

----- HẾT -----

Xem thêm: ĐỀ THI HSG TOÁN 12
<https://toanmath.com/de-thi-hsg-toan-12>