

CHỦ ĐỀ 06 : TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') .

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') : $f(x) = g(x)$ (*)
- Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C') .

❖ Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**

- Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)
- Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$.
- Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m .

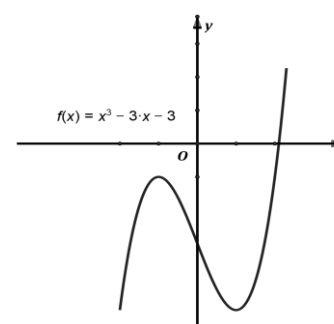
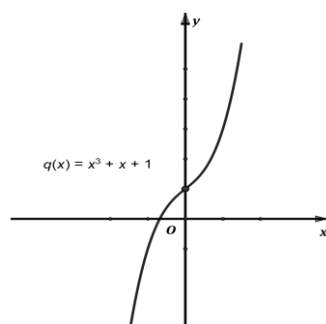
➤ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x .

❖ Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

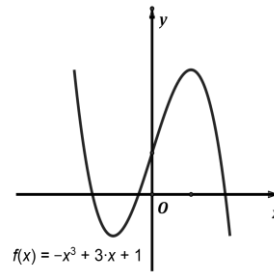
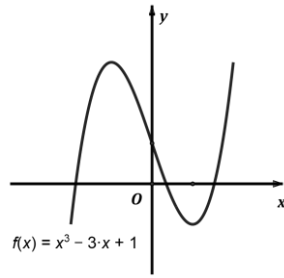
- Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$
- Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- Phân tích: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (là $g(x) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
- Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

❖ Phương pháp 3: Cực trị

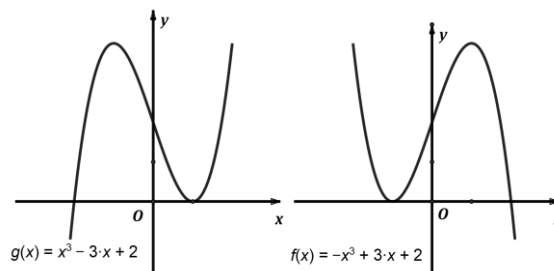
- **Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- **Quy tắc:**
 - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$ (1). Xét hàm số $y = F(x, m)$
 - Đê (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
 - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$
 - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} > 0$ (tham khảo hình vẽ)



- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$ (tham khảo hình vẽ).



- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} = 0$ (tham khảo hình vẽ)



❖ Tương giao của hàm số phân thức

- Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
 - ✓ Đoạn thẳng $AB = kS$
 - ✓ Tam giác ABC vuông.
 - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**

- Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
- Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:

- $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

❖ **Tương giao của hàm số bậc 4**

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$

- **Nhắm nghiệm:**

- Nhắm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$

- **Ẩn phụ - tam thức bậc 2:**

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.
- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

- Bài toán: tìm m để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (1)$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.
- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 \quad (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Lời giải

VÍ DỤ 1: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $m \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. C. $m \in \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Chọn D

Ta có $y = m + 1$ (d) và $y = x^4 - 3x^2 - 2$ (C).

Xét phương trình tương giao: $x^4 - 3x^2 - 2 = m + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - (m + 3) = 0$. (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t - (m + 3) = 0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a.c = -m - 3 < 0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = \sqrt{t_2}$ đồng thời (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M(-\sqrt{t_2}; m + 1), N(\sqrt{t_2}; m + 1)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow t_2 = (m + 1)^2$.

Thay $t_2 = (m + 1)^2$ vào phương trình (2) ta được:

$$(m + 1)^4 - 3(m + 1)^2 - (m + 3) = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^4 - 3(m + 1)^2 - (m + 1) - 2 = 0.$$

Đặt $a = m + 1 > 1$ ta được phương trình

$$a^4 - 3a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^3 + 2a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 1 \text{ nên } a^3 + 2a^2 + a + 1 > 0).$$

Từ đó ta được $m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn $m > 0$). Vậy $m = 1$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $(-4; 2)$. B. $(-\infty; 2]$. C. $[-4; 2)$. D. $(-3; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x) + 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta được $-4 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vậy $m \in (-3; 3)$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ và $y = 1$ là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 6x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 6x + m = 0 (*) \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{4} \end{cases}. \text{ Theo hệ thức Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}.$$

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau thì

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1 + m) \cdot (3x_2^2 + 6x_2 + m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} + \frac{9 - \sqrt{65}}{8} = \frac{9}{4}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1; 1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk: $x \neq 1$)

$$\Rightarrow x = (1-x)(mx - m - 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 (*)$$

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức viết: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = \frac{m+1}{m}$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$$

$$\text{và } y_1 \cdot y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2 x_1 x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$$

$$= m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m+1$$

$$\text{Ta có: } AM^2 + AN^2 = (x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2$$

$$= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1)$$

$$= (2+2)^2 - 2\left(\frac{m+1}{m} + 2 + 1\right) + (-2-2)^2 - 2(m+1 - (-2) + 1)$$

$$= 18 - 2\left(\frac{m+1}{m}\right) - 2m = 18 - 2 - 2 \cdot \frac{1}{m} - 2m = 16 + 2 \cdot \left[\frac{1}{-m} + (-m)\right] \geq 16 + 2 \cdot 2 = 20 \quad (\text{BĐT Cauchy})$$

$$\text{Suy ra: } AM^2 + AN^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 20 \text{ khi } \frac{1}{-m} = -m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ (vì $m < 0$)

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4 - 2x^2 = ax + b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1 , hai nghiệm còn lại là x_2, x_3 .

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1 .

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1 , d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ

$x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$. Ta có: $d: y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2 \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình

$$f(x) = 0 \text{ phải có 2 nghiệm phân biệt } x_2, x_3 \text{ khác } x_1 \text{ và thỏa mãn định lý Vi - ét: } \begin{cases} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2 \cdot x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ x_1^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2)(-2x_1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-11 + \sqrt{165}}{22}. \text{ Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

VÍ DỤ 6: Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y = (m-6)x - 4$ cắt đồ thị hàm số

$$y = x^3 + x^2 - 3x - 1 \text{ tại ba điểm phân biệt có tung độ } y_1, y_2, y_3 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} + \frac{1}{y_3 + 4} = \frac{2}{3}.$$

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0 \quad (1).$$

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

$$\text{Theo hệ thức viét đối với phương trình bậc ba ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình $y = (m-6)x - 4$ nên ta có được

$$y_1 + 4 = (m-6)x_1, \quad y_2 + 4 = (m-6)x_2 \quad \text{và} \quad y_3 + 4 = (m-6)x_3.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} + \frac{1}{y_3 + 4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{(m-6)x_1} + \frac{1}{(m-6)x_2} + \frac{1}{(m-6)x_3} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \cdot \frac{3-m}{-3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Thử lại với $m = 9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra). Vậy có một số thực m thỏa mãn.

VÍ DỤ 7: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m$ và n . Tính $S = m^2 + n^2$.

A. $S = 0$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ là 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y = ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax$ với đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ là :

$$x^4 - 2x^2 = ax \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - a) = 0.$$

Do phương trình có bốn nghiệm là $0, 1, m, n$ nên ta có :

$$x(x^3 - 2x - a) = x(x - 1)(x - m)(x - n) \Rightarrow x^3 - 2x - a = (x^2 - mx - x + m)(x - n)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 - nx^2 - mx^2 + mnx - x^2 + nx + mx - mn$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 + (-n - m - 1)x^2 + (m + n + mn)x - mn$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m - n - 1 = 0 \\ m + n + mn = -2 \\ -mn = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ mn = -1 \end{cases} \Rightarrow S = m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 3.$$

VÍ DỤ 7: Cho phương trình $(x^2 - 3x + m)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19.

B. 18.

C. 17.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (x^2 - 3x + m)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0 \Leftrightarrow [(x^2 - 3x + m)^2 - x^2] + (2x^2 - 8x + 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + m)(x^2 - 2x + m) + 2(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + m)(x^2 - 2x + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ 1-m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau

$$\Rightarrow \text{Hệ sau có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + m - (x_0^2 - 2x_0 + m + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Với $x_0 = -1$ thay vào (1) ta được $m = -5$.

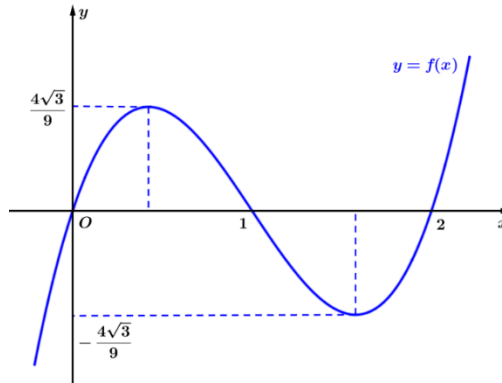
$\Rightarrow$ Với $m \neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 20] \Rightarrow m \in [-20; -1] \setminus \{-5\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 1**Bài toán tương giao đồ thị hàm số 01**

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) = \frac{1}{2021}$ là



A. 24.

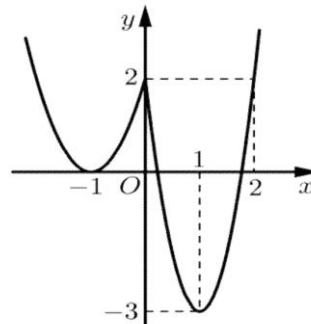
B. 14.

C. 12.

D. 10.

Câu 2: Cho hai hàm số $u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.

Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



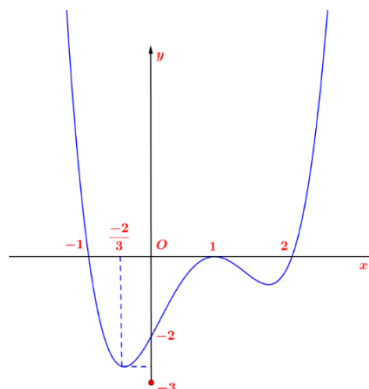
A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

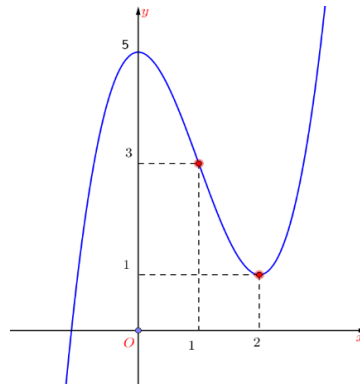
A. 8

B. 6

C. 10

D. 9

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2 + 4}\right) \text{ có nghiệm?}$$

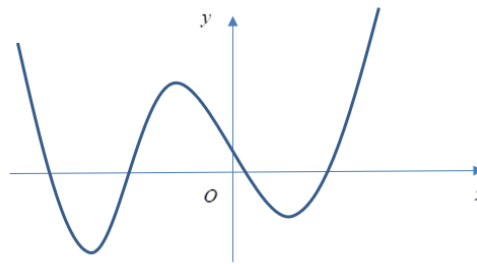
A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y = f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2$ và $y = 2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là



A. 1

B. 0

C. 2

D. 4

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

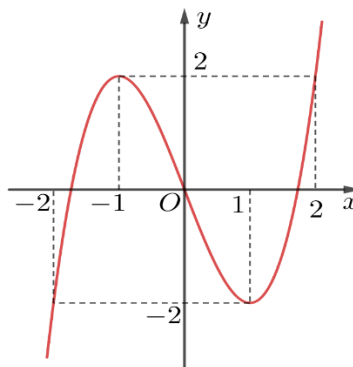
A. 4037.

B. 2019.

C. 4001.

D. 2021.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

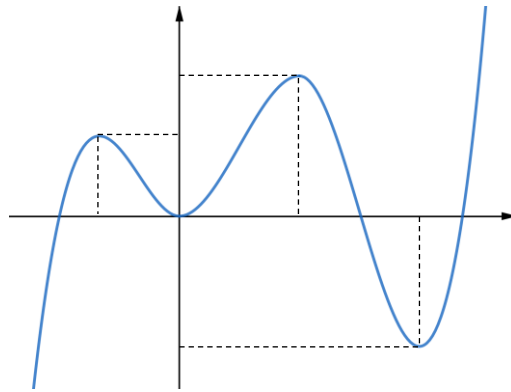
A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \frac{1}{2}m - 5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x) - 2| = 2$ là

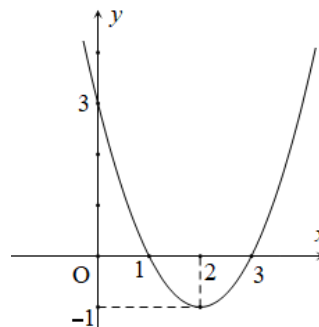
A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C)



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

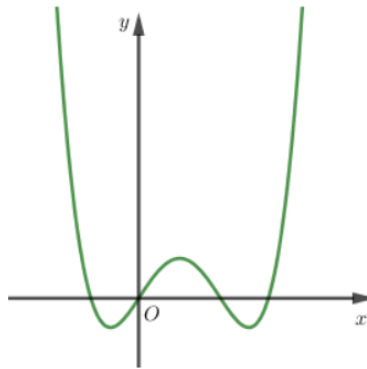
A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 11: Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục hoành:



- A. 4. B. 0. C. 6. D. 2.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x) - \frac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f(-1-\sqrt{4x+m-1})} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020; 2021]$?

- A. 2023. B. 2022. C. 2021. D. 2020.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(7; \frac{23}{2}\right)$. B. $(-2; 5)$. C. $\left(\frac{43}{3}; \frac{39}{2}\right)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{65}{4}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f\left(\sqrt{3x^2 - 18x + 28}\right) - m\sqrt{3x^2 - 18x + 28} \geq m + 4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2; 4]$.

- A. 673. B. 808. C. 135. D. 898.

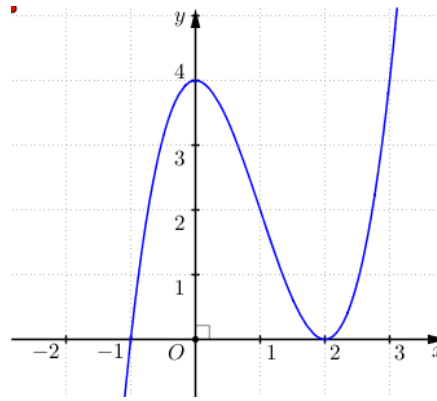
Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$-\infty$	1	-1	3	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4 - 4x^2 + 2}\right) + 1 = 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 5.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên dưới



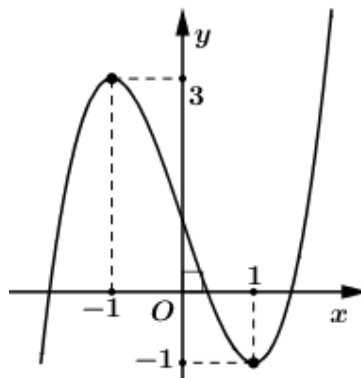
Số nghiệm phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ là

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8, x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. 3. B. 34. C. 6. D. 34.

Câu 19: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = |f(x^2)|$. Số nghiệm của phương trình $g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0$ là

- A. 11. B. 10. C. 13. D. 12.

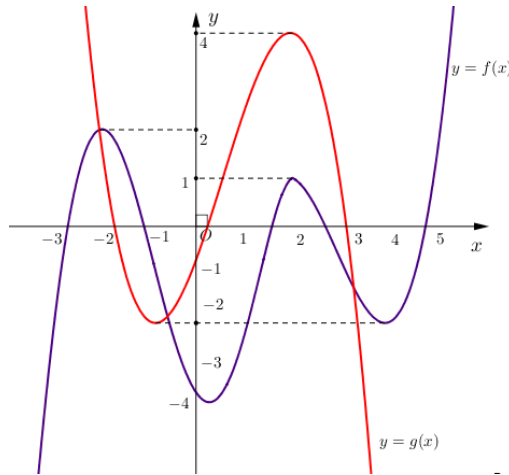
Câu 20: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Phương trình $|f(2x^2 + 3) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

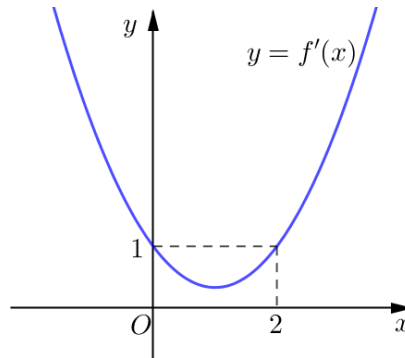
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 21: Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là



- A. 25. B. 22. C. 21. D. 26.

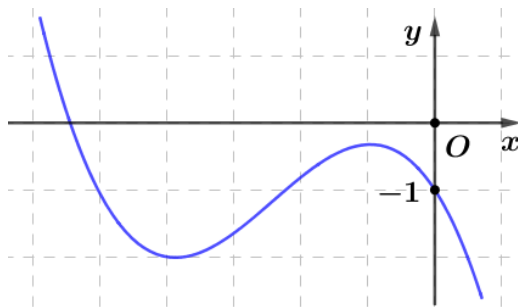
Câu 22: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x + 1) - x - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > f(2)$. B. $m > f(2) - 1$. C. $m < f(1) - \ln 2$. D. $m > f(1) + \ln 2$.

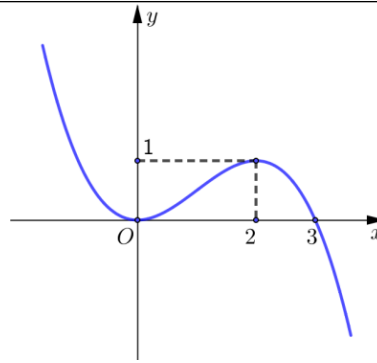
Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 6. B. 8. C. 5. D. 4.

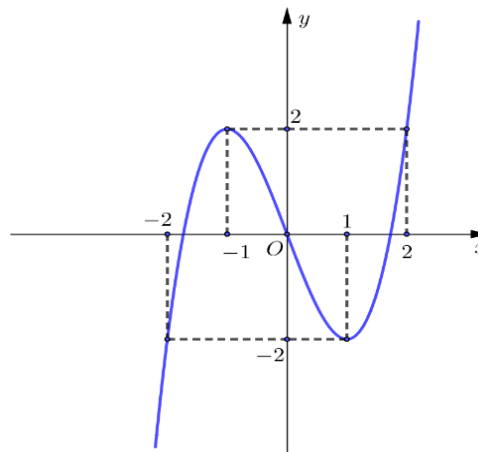
Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. 0. B. 2. C. 5. D. 7.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

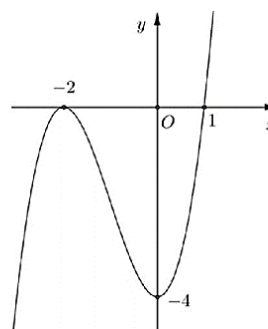


- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

- A. 3. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây

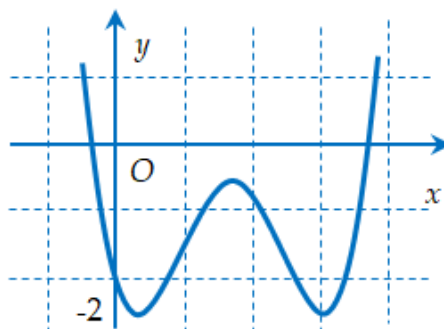


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình

$$f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0 (*)$$

- có 6 nghiệm phân biệt
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

A. 8.

B. 12.

C. 6.

D. 9.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.C	4.B	5.B	6.A	7.A	8.B	9.D	10.B
11.B	12.D	13.B	14.D	15.A	16.C	17.B	18.D	19.D	20.A
21.C	22.A	23.A	24.B	25.A	26.B	27.C	28.D		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

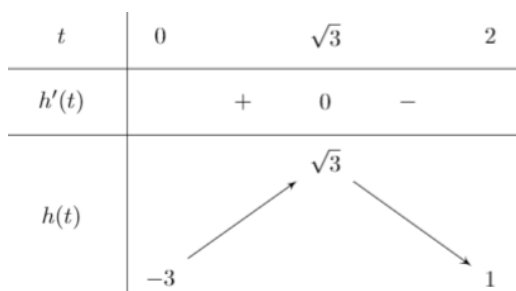
Câu 1: Chọn D

$$y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) \text{ với } g(x) = \frac{1}{2021}$$

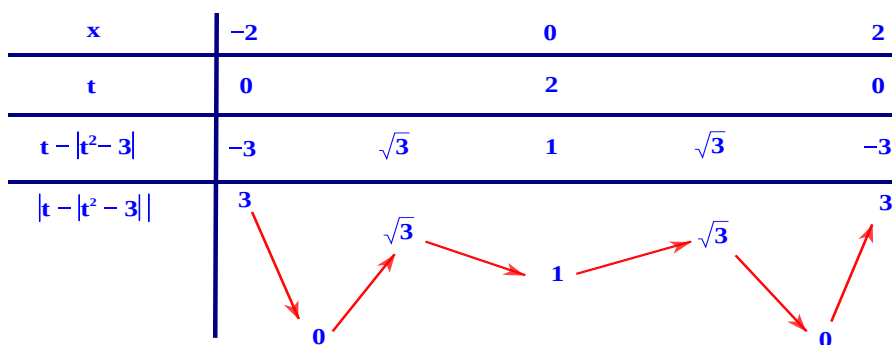
Ta đặt: $t = \sqrt{4-x^2}$, $\forall x \in [-2; 2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(|t - |t^2-3||\right)$, $\forall t \in [0; 2]$

$$\text{Suy ra: } h(t) = t - |t^2-3| = \begin{cases} t^2+t-3, t \in [0; \sqrt{3}] \\ -t^2+t+3, t \in [\sqrt{3}; 2] \end{cases}$$

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:



Đặt $u = |t - |t^2-3||$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$$

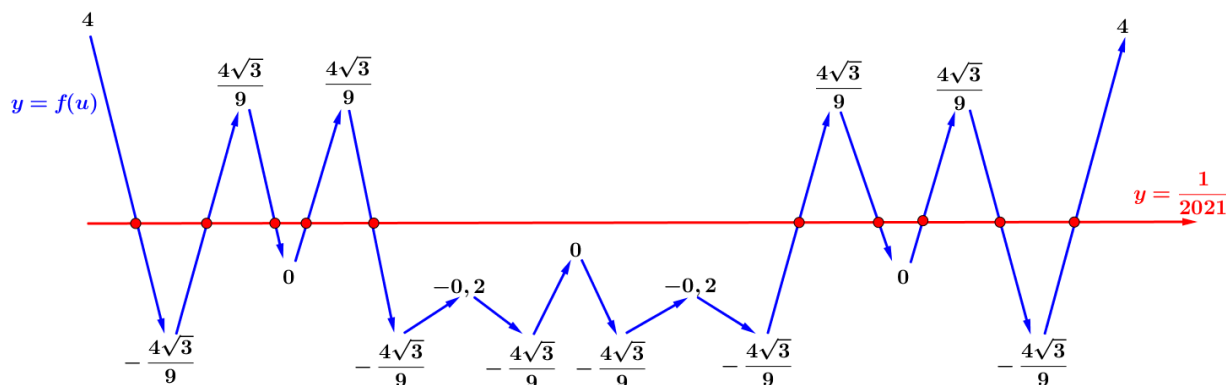
Như vậy ta suy ra $f(x) = \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên

$$\text{suy ra } f(x_0) = \frac{-4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Như vậy: } f(3) = 4, f(\sqrt{3}) = -0,2, f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Từ đó, ta phân tích được đồ thị $y = f(u)$ với $u = |t - |t^2 - 3||$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \frac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Chọn C

$$\text{Đặt } t = u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}; u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{3-3x}{\sqrt{x^2+3}(x^2+3)}; u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	0	$-$
$u(x)$	-1	2	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $u(x) \in (-1; 2]$.

Phương trình $f(u(x)) = m$ trở thành $f(t) = m, t \in (-1; 2]$.

Dựa vào đề thi đã cho ta có:

Khi $m = 2$: phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

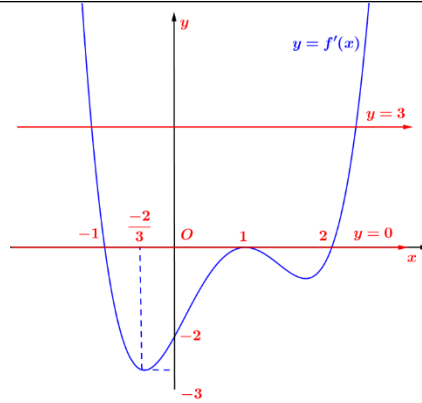
Khi $m=1$: phương trình $f(t)=1$ có 3 nghiệm $t_1 \in (-1;0), t_2 \in (0;1), t_3 \in (1;2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Khi $m \in \{0; -1; -2\}$: phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm $t_1 \in (0; 1), t_2 \in (1; 2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi $m = -3$: phương trình $f(t) = m$ có 1 nghiệm $t = 1 \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 1 nghiệm.

$$\forall y \quad m \in \{0; -1; -2\}.$$

Câu 3: Chọn C



Ta có: $g(x) = f(f'(x) - 1) \Rightarrow g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x) - 1)$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f'(x) - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(x) - 1 = -1 \\ f'(x) - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f'(x) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có đồ thị } y = f'(x) \text{ có cực trị tại } \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2}{3} \\ x = x_0 \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 0 \\ f''\left(\frac{-2}{3}\right) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-2}{3} \\ x = x_0 \end{cases} \text{ cùng với } x = 1 \text{ là nghiệm bội chẵn}$$

Tại phương trình $f'(x) = 0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x = -1, x = 2$ và nghiệm bội chẵn $x = 1$
 Tại phương trình $f'(x) = 3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ đó là hai điểm $x = x_1 \in (-\infty; -1)$ và $x = x_2 \in (2; +\infty)$

Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ tổng cộng có tất cả 10 nghiệm.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$ nên suy ra $2 \cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4} \Rightarrow t(2 \cos x - \sin x + 4) = 3 \sin x - \cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1) \cos x - (t + 3) \sin x = -(4t + 1).$$

$$\text{Phương trình trên có nghiệm khi } (2t + 1)^2 + (t + 3)^2 \geq (4t + 1)^2 \Leftrightarrow \frac{-9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 2 \leq |t| + 2 \leq 3.$$

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2; 3]$ nên phương trình

$$f\left(\left|\frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m + 2)^2 + 4}\right) \text{ hay phương trình } f(|t| + 2) = f\left(\sqrt{(m + 2)^2 + 4}\right)$$

có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|t| + 2 = \sqrt{(m + 2)^2 + 4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện

$$2 \leq |t| + 2 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{(m + 2)^2 + 4} \leq 3 \Rightarrow m^2 + 4m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} \leq m \leq 2 + \sqrt{5}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Câu 5: Chọn B

Số giao điểm (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$$f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 = 2021^x (*)$$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2; x_3; x_4$

nên phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$

$$\Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$\text{Nếu } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases} \text{ thay vào } (*) \text{ ta thấy vế trái âm, vế phải dương nên phương trình } (*)$$

vô nghiệm

Nếu $f(x) \neq 0$ nên ta có phương trình ta có phương trình $(*)$ tương đương với

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{2021^x}{[f(x)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{2021^x}{[f(x)]^2}$$

Ta có:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$\Rightarrow f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right] \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4}$$

$$\text{Khi đó: } \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right)' \\ = - \left(\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \frac{1}{(x - x_3)^2} + \frac{1}{(x - x_4)^2} \right) < 0$$

Mà $\frac{2021^x}{[f(x)]^2} > 0$ nên phương trình $\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{2021^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm, do đó phương trình vô nghiệm.

Câu 6: Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + cx$$

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1 = 1$ và $x_2 = 2021$.

$$\text{Nên: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 2022 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3033a \\ c = 6063a \end{cases}$$

Xét phương trình: $f(x) = f(m)$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = am^3 + bm^2 + cm + d \Leftrightarrow a(x^3 - m^3) + b(x^2 - m^2) + c(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - m^3) - 3033a(x^2 - m^2) + 6063a(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

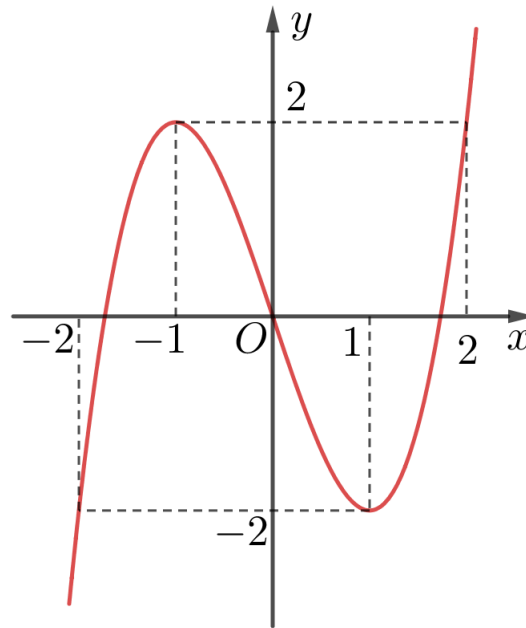
Để phương trình $f(x) = f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt có 2 nghiệm phân biệt khác m .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3033)^2 - 4(m^2 - 3033m + 6063) > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6063m + 3033^2 - 4m^2 + 4 \cdot 3033m - 4 \cdot 6063 > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1009 < m < 3031 \\ m \neq 2021; m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy: $m \in (-1009; 3031) \setminus \{1; 2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Câu 7: Chọn A



Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t) \in (-2; 0) \Rightarrow 4 + 2f(t) \in (0; 4) \Rightarrow u = \sqrt{4 + 2f(t)} \in (0; 2)$.

Ta có $f(u) = m$ với $u \in (0; 2)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(u) = m$ có nghiệm

$$u \in (0; 2) \Leftrightarrow -2 \leq m < 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn B

Đặt: $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$; $g'(x) = (6x^2 - 6) \cdot f'(2x^3 - 6x + 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 & (1) \\ f'(2x^3 - 6x + 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải: $6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Giải: $f'(2x^3 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6x + 2 = -2 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 0 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 3 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1; 2] \\ x = 1 \text{ (nghiên kĐp)} \\ x \approx -1,87 \notin [-1; 2] \\ x \approx 0,34 \\ x \approx 1,53 \\ x \approx -1,64 \notin [-1; 2] \\ x \approx -0,16 \\ x \approx 1,81 \\ x = -1 \text{ (nghiên kĐp)} \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

x	-1		-0.16		0.34		1		1,53		1,81		2	
$g'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	
$g(x)$	$y = \frac{1}{2}m - 5$ $-\frac{13}{4}$$\frac{7}{2}$$2$$0$$0$$\frac{7}{2}$$-\frac{13}{4}$													

Số nghiệm của phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \frac{1}{2}m - 5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số

$g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}m - 5$.

Kẻ đường thẳng $y = \frac{1}{2}m - 5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$. Điều kiện để đường thẳng

$y = \frac{1}{2}m - 5$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$ tại 6 điểm phân biệt là:

$0 < \frac{1}{2}m - 5 < 2 \Leftrightarrow 10 < m < 14$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{11; 12; 13\}$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Câu 9: Chọn D

Ta có: $|f(f(x)) - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 2 \\ f(f(x)) = -2 \end{cases}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \quad a \in (-\infty; -4) \\ f(x) = b \quad b \in (3; +\infty) \end{cases}$.

$f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -4 \\ f(x) = d \quad d \in (1; 3) \\ f(x) = e \quad e \in (3; +\infty) \end{cases}$.

$f(x) = a, a \in (-\infty; -4)$ vô nghiệm; $f(x) = b, b \in (3; +\infty)$ có 2 nghiệm.

$f(x) = -4$ có 1 nghiệm; $f(x) = d, d \in (1; 3)$ có 2 nghiệm.

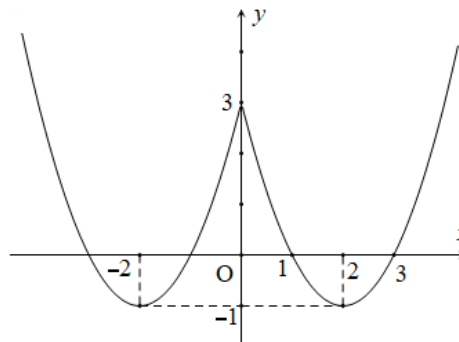
$f(x) = e, e \in (3; +\infty)$ có 2 nghiệm $\Rightarrow |f'(x)| = 2$ có 7 nghiệm.

Câu 10: Chọn B

Xét phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$.

$$\text{Nhận thấy } 1 - (m-2) + (m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$ như sau:



Với $f(|x|) = -1$, ta được 2 nghiệm x .

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f(|x|) = 3-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

$$\text{Hay } -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3\}.$$

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11: Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và Ox là:

$$[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 0$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 .

Giả sử $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), a \neq 0, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) \\ &+ a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_4}$$

$$\text{Ta có: } \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{1}{(x-x_3)^2} - \frac{1}{(x-x_4)^2} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành bằng 0.

Câu 12: Chọn D

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Ta có: $f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta lại có: $f(-x) = -x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{f(x)}$.

Nên phương trình tiếp theo tương đương với: $xf(x) - \frac{1 + \sqrt{4x+m-1}}{f(-1 - \sqrt{4x+m-1})} = 0$.

$$\Leftrightarrow xf(x) - (1 + \sqrt{4x+m-1})f(1 + \sqrt{4x+m-1}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = (1 + \sqrt{4x+m-1})f(1 + \sqrt{4x+m-1}).$$

Đến đây ta xét hàm đặc trưng $y = g(t) = tf(t) = t(t + \sqrt{t^2+1}) = t^2 + t\sqrt{t^2+1}$.

Có $g'(t) = 2t + \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g(x) = g(1 + \sqrt{4x+m-1}) \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4x+m-1} \Leftrightarrow \sqrt{4x+m-1} = x-1.$$

Do $\sqrt{4x+m-1} \geq 0$ nên suy ra $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4x+m-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ m = x^2 - 6x + 2 \end{cases}$.

Xét hàm $y = p(x) = x^2 - 6x + 2, \forall x \geq 1 \Rightarrow p'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $p(x)$ như sau:

x	1	3	$+\infty$		
$p'(x)$		-	0	+	
$p(x)$	-3		-7		$+\infty$

Dựa vào BBT trên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (p(3); p(1)] \Leftrightarrow m \in (-7; -3]$.

Như vậy, ta kết luận có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13: Chọn B

$$f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0 \quad \forall x \in [2020; 2021]$$

$$\Leftrightarrow (x+m)^3 + 2(x+m) \geq (mx)^3 + 2mx \quad \forall x \in [2020; 2021] \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \quad \forall t$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) suy ra

$$x+m \geq mx \quad \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \frac{2021}{2020}.$$

Vậy trên đoạn $[-2020; 2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Ta có: $\frac{2\sin x + 1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) \in [0; 1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $4a^2 + 8b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 13$.

Câu 15: Chọn A

Đặt $u = \sqrt{3x^2 - 18x + 28} = \sqrt{3(x-3)^2 + 1} = \sqrt{3(x-2)(x-4) + 4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2; 4]$ thì $u \in [1; 2]$.

Biến đổi BPT ta được $2021f(u) - m \cdot u \geq m + 4042 \Leftrightarrow 2021[f(u) - 2] \geq m(u + 1)$.

Ta có $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$ nên $f(u) - 2 = \frac{u^2 + 5u + 2}{2u + 1} - 2 = \frac{u^2 + u}{2u + 1}$ do vậy bất phương trình được

biến đổi tiếp $\frac{2021(u^2 + u)}{2u + 1} \geq m(u + 1) \Leftrightarrow m \leq \frac{2021u}{2u + 1}$.

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m \leq \frac{2021u}{2u + 1}, \forall u \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq \min_{u \in [1; 2]} g(u)$.

Xét hàm số $g(u) = \frac{2021u}{2u + 1}, u \in [1; 2]$ ta có $g'(u) = \frac{2021}{(2u + 1)^2} > 0, \forall u \in [1; 2]$ do vậy hàm số

$g(u)$ tăng trên đoạn $[1; 2]$. Vì vậy $\min_{u \in [1; 2]} g(u) = \frac{2021u}{2u + 1} = g(1) = \frac{2021}{3}$.

Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m \in \{1; 2; 3; \dots; 673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Chọn C

Câu 17: Chọn B

Đặt $t = x + 1 - \sqrt{6x + 3}, x \geq -\frac{1}{2}$.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Ta có $t' = 1 - \frac{3}{\sqrt{6x+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
t'	-	0	+
t	$\frac{1}{2}$	-1	$+\infty$

Phương trình đã cho trở thành $f(t) = \frac{1}{2}$. Dựa và đồ thị ta thấy phương trình có 3 nghiệm là

$$\begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (1; 2) \\ t = c \in (2; 3) \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = x + 1 - \sqrt{6x+3}$ ta có

Phương trình $t = a \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = a$ có 2 nghiệm và phương trình $t = b \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = b$ có 1 nghiệm và Phương trình $t = c \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = c$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $2f(x + 1 - \sqrt{6x+3}) = 1$ có 4 nghiệm.

Câu 18: Chọn D

Ta có: hệ số $a = 1 > 0$ và $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm thuộc trục hoành.

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{m}{2}. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m}{6}} \quad (m > 0).$$

$$\text{Trường hợp 1: } \left(\sqrt{\frac{m}{6}}\right)^3 - \frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{6}} + m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 24.$$

$$m = 24: f(x) = x^3 - 12x + 16.$$

$$f(x) = k \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow k \in (0; 32).$$

Có 31 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 1: } -\left(\sqrt{\frac{m}{6}}\right)^3 + \frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{6}} + m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

$$m = 6: f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

$$f(x) = k \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow k \in (-4; 0).$$

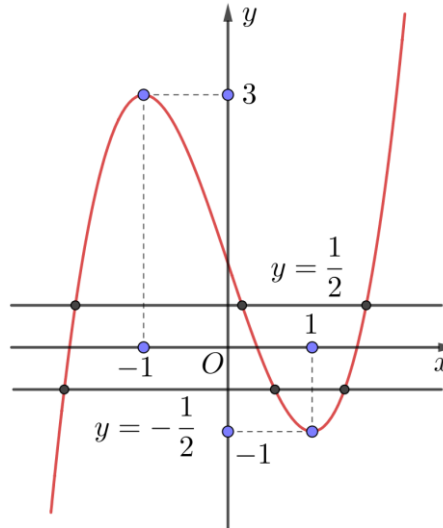
Có 3 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Vậy có 34 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Câu 19: Chọn D

$$\text{Ta có } g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ g(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x^2)| = 0 \\ |f(x^2)| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2) = 0 & (1) \\ f(x^2) = \frac{1}{2} & (2) \\ f(x^2) = -\frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra



$$+) (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a < -1 \\ x^2 = b \in (0; 1) \\ x^2 = c > 1 \end{cases} \text{ Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = d < -1, (d \neq a) \\ x^2 = e \in (0; 1), (e \neq b) \\ x^2 = f > 1, (f \neq c) \end{cases} \text{ Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm}$$

phân biệt của phương trình.

$$+) (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = m < -1, (m \neq d, a) \\ x^2 = n \in (0; 1), (n \neq e, b) \\ x^2 = p > 1, (p \neq f, c) \end{cases} \text{ Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm}$$

phân biệt của phương trình và 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

Vậy phương trình $g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0$ có tất cả 12 nghiệm

Câu 20: Chọn A

Gọi $g(x) = f(2x^2 + 3) - 2$. Ta có: $g'(x) = 4x \cdot f'(2x^2 + 3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 3 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2x^2 + 3 = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

Mà $|g(x)| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 5 \\ g(x) = -5 \end{cases}$. Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 21: Chọn C

$$\text{Ta có } g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 & (1) \\ f(x) = \alpha, (\alpha \in (0;1)) & (2) \\ f(x) = 3 & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm; phương trình (2) có 5 nghiệm và phương trình (3) có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm.

$$\text{Ta có } f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -3 & (4) \\ g(x) = -1 & (5) \\ g(x) = 1 & (6) \\ g(x) = a, (a \in (1;2)) & (7) \\ g(x) = b, (b \in (4;5)) & (8) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (4) có 1 nghiệm; phương trình (5); (6); (7) mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình (8) có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f(g(x)) = 0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 21.

Câu 22: Chọn A

$$\text{Ta có: } f(e^x + 1) - x - m = 0 \Leftrightarrow f(e^x + 1) - x = m \quad (1).$$

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow t' = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên:

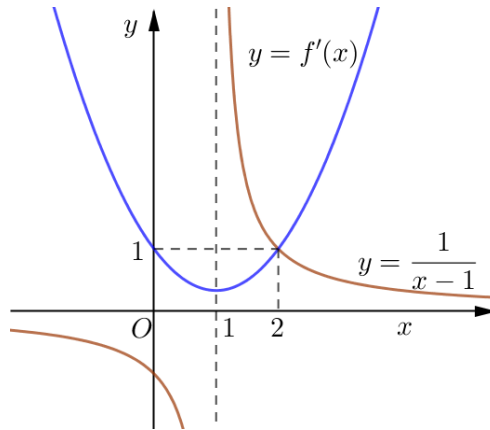
x	$-\infty$	$+\infty$
t		$+\infty$
	1	

$$\text{Với } t = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(t-1). \text{ Ta có: } (1) \Leftrightarrow f(t) - \ln(t-1) = m \quad (2).$$

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

Xét hàm số $g(t) = f(t) - \ln(t-1), \forall t > 1$ ta có:

$$g'(t) = f'(t) - \frac{1}{t-1}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t-1}.$$



Dựa vào đồ thị các hàm số $y = f'(x)$ và $y = \frac{1}{x-1}$ ta có: $f'(t) = \frac{1}{t-1} \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$:

t	1	2	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$			

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(t)$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow m > g(2) \Leftrightarrow m > f(2) - \ln 1 \Leftrightarrow m > f(2).$$

Câu 23: Phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 f(x) = a & (-3 < a < -1) & (1) \\ x^3 f(x) = b & (-5 < b < -3) & (2) \\ x^3 f(x) = 0 & & (3) \end{cases}$

Xét phương trình $x^3 f(x) = k \Leftrightarrow f(x) = \frac{k}{x^3}$.

Đặt $g(x) = \frac{k}{x^3}$, $g'(x) = \frac{-3k}{x^4} > 0, \forall x \neq 0$ và $k < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$	$0 \nwarrow$
		$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có đúng một nghiệm.

Vì $a, b < 0$ nên phương trình (1) và (2) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác nhau.

Xét phương trình (3): $x^3 f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = c < 0 \end{cases}$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 24: Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc 3 qua 0 không đổi dấu và đi qua 3 đổi dấu từ + sang -. Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$ nên $k < 0$.

Do đó, hàm số $y = f'(x)$ có dạng $f'(x) = k \cdot x^2 \cdot (x - 3)$.

Vì $f'(2) = 1$ nên $k = -\frac{1}{4}$. Suy ra $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + e$

Xét phương trình

$$f(-x^2 + 2x + m) = e \Leftrightarrow -\frac{1}{16}(-x^2 + 2x + m)^4 + \frac{1}{4}(-x^2 + 2x + m)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 2x + m)^3(-x^2 + 2x + m - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 & (1) \\ -x^2 + 2x + m - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1),

$$(2) \text{ đều có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ 1 + m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Mặt khác, m là số nguyên trên $[-5; 5]$ nên $m \in \{4; 5\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: Chọn A

Đặt $t = \cos x$. Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0; 1] \Rightarrow f(t) \in [-2; 0]$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 2f(\cos x)} = \sqrt{4 + 2f(t)} \in [0; 2] \Rightarrow f(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}) \in [-2; 2]$$

Vậy phương trình $f(\sqrt{4 + 2f(\cos x)}) = m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -2 \leq m < 2$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Vậy có bốn giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 26: Chọn B

Đặt: $y = f(x)$ ta có hệ: $\begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Rightarrow f(y) + y = f(x) + x \quad (*)$

Xét hàm số: $g(t) = f(t) + t = t^3 + 2t - 2^m \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ phương trình $(*)$ ta có $g(y) = g(x) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2^m = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m$

Để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ thì $\underset{x \in [1; 2]}{\text{Min}} x^3 \leq 2^m \leq \underset{x \in [1; 2]}{\text{Max}} x^3$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2^m \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3, m$ là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$

Vậy **Chọn B**

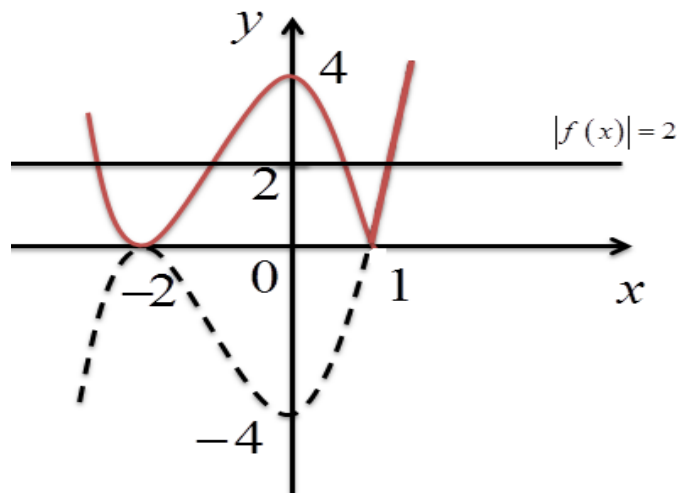
Câu 27: Chọn C

Ta có

$$f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 2 \quad (1) \\ |f(x)| = 2 + m \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt



Vậy để phương trình $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình (1).

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương (1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+2=0 \\ m+2>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m>2 \end{cases}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z}; m \in (-5; 5) \text{ nên } m = \{-2; 3; 4\}$$

Vậy m có 3 giá trị.

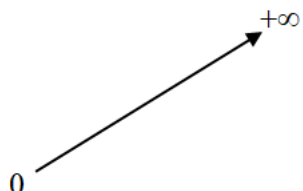
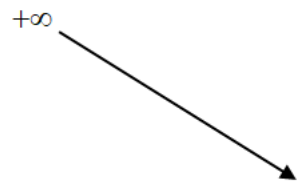
Câu 28: Ta có: $f(x^2 f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x^2 f(x)) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = \alpha \in (0;1) \\ x^2 f(x) = \beta \in (2;3) \\ x^2 f(x) = \gamma \in (3;4) \end{cases}$.

$x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$. Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Xét phương trình $x^2 f(x) = m$ với $m > 0$. Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Do đó ta có: $x^2 f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{m}{x^2}$ có $g'(x) = \frac{-2m}{x^3}$. Từ đó ta có BBT của $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$			

Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Vậy mỗi phương trình $x^2 f(x) = \alpha \in (0;1)$, $x^2 f(x) = \beta \in (2;3)$, $x^2 f(x) = \gamma \in (3;4)$ có hai nghiệm phân biệt. Các nghiệm của các phương trình này không trùng nhau, khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

DẠNG 2**Bài toán tương giao đồ thị hàm số 02**

- Câu 1:** Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $[-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.
- Câu 2:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 3:** Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 4:** Cho 2 hàm số $y = x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1$ và $y = |x-2| - x - 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là
- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 2)$. D. $m \in [2; +\infty)$.
- Câu 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}(2\sqrt{3+x}-m) + \sqrt{1-x}(5\sqrt{1-x}+2m) = 4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?
- A. 2019. B. 4032. C. 4039. D. 4033.
- Câu 6:** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left|2 + \frac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?
- A. 35. B. 37. C. 36. D. 34.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?
- A. 2020. B. 4040. C. 4041. D. 2020.
- Câu 8:** Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là
- A. 506. B. 1011. C. 2020. D. 1010.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

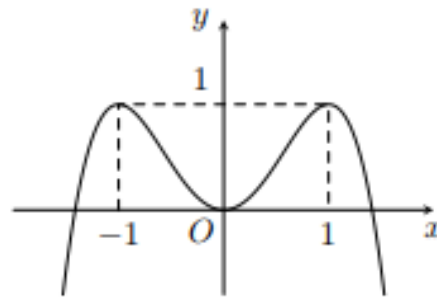
Câu 9: Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

- A. 4040. B. 2020. C. 2021. D. 4041.

Câu 10: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 2006. B. 2005. C. 2007. D. 2008.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



- A. 3. B. 4. C. 2. D. 0.

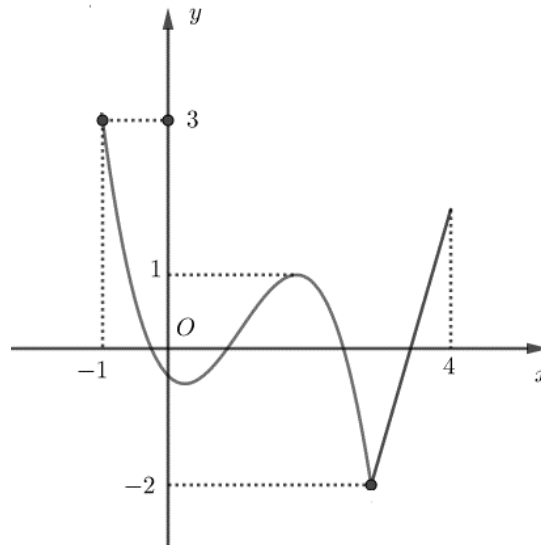
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$							$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 25. B. 30. C. 29. D. 24.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

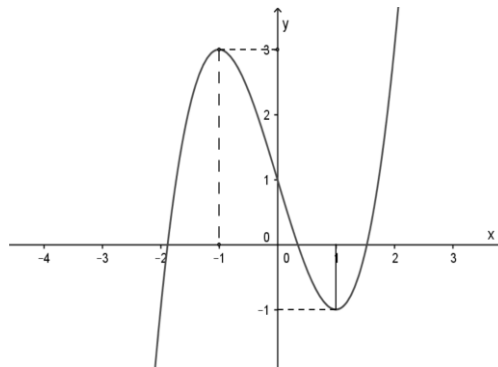
A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4.

B. -1.

C. 3.

D. 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

A. 1750.

B. 1748.

C. 1747.

D. 1746.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4	3	$\sqrt{11}$	2

- A. 6.** **B. 5.** **C. 4.** **D. 3.**

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2	0	1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	-3	2	1,5	1	6	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \\ 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$$

có ba nghiệm phân biệt?

- A. 9.** **B. 11.** **C. 10.** **D. 8.**

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.A	5.B	6.C	7.B	8.A	9.C	10.A
11.B	12.B	13.C	14.D	15.A	16.C	17.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m \quad (1)$$

Xét $f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup D = D_1 \\ \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup D = D_2 \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in D_1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in D_2 \end{cases}$

Dễ thấy $f'(x) > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 2: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2 + 1)\sqrt{x-1} = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 = m$

Xét hàm số $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11$ trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}; 2\right), (2; +\infty)$

Ta có, $f'(x) = \left((2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 \right)'$

$$= 4x\sqrt{x-1} + (2x^2 + 1)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{10x^2 - 8x + 1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} > 0$$

với $\forall x \in [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m \in (-\infty; 1]$.

Câu 3: Chọn C

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$

Lí luận tương tự có $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + 2) = 0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$

Từ và ta có hệ $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ có $f(x) = (x-1)(x+2)(-x^2 - x + 2) = -(x-1)^2(x+2)^2 \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1 = |x - 2| - x - 2m \Leftrightarrow x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x = -5m + 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x$.

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} x^7 + x^5 + x^3 + 2 & \text{khi } x \in [2; +\infty) \\ x^7 + x^5 + x^3 + 2x - 2 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 > 0 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5: Chọn B

Đk: $x \in [-3; 1]$.

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} + m(2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x}) = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x} = g(x), \text{ với } x \in [-3; 1] \Rightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} = t^2 + 4.$$

$$\text{Có } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{3+x}} < 0, \forall x \in (-3; 1). \text{ Suy ra } g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-3; 1).$$

$$\Rightarrow \min_{[-3; 1]} g(x) = g(1) = -2; \quad \max_{[-3; 1]} g(x) = g(-3) = 4 \Rightarrow t \in [-2; 4].$$

$$\text{Từ } \Rightarrow t^2 + mt + 4 = 0.$$

$$\text{Nếu } t = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 0.$$

$$\text{Nếu } t \in [-2; 4] \setminus \{0\}, \text{ ta có } m = \frac{-t^2 - 4}{t} = -t - \frac{4}{t} = f(t).$$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{4-t^2}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Bảng biến thiên

t	-2	0	2	4	
$f'(t)$	0	+	+	0	-
$f(t)$	4	$+\infty$	$-\infty$	-4	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} m \in [-2019; 2019] \\ m \geq 4 \\ m \leq -4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -4; 4; \dots; 2018; 2019\}.$$

Vậy có $(2019 - 4 + 1) \cdot 2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m .

Câu 6: Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \frac{m}{4} \end{cases}$$

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left| 2 + \frac{2}{x-10} \right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2 \text{ với } x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 4 \left(1 + \frac{2x-18}{(x-10)^3} \right); \quad g''(x) = \frac{-4x+34}{(x-10)^4}.$$

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{17}{2}$	10	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	-
$g'(x)$	4,072	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			$-\infty$	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2}; 10 \right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9, 22; 10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$:

x	0	9	α	10	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-	+
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		36	$g(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

$$\text{Trên khoảng } (9, 22; 10) \text{ thì } \begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2 \end{cases} \text{ nên } g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36; 37).$$

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; ...; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 7: Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ vô nghiệm.

$$\text{Do đó: } f'(x) = m \cdot f(x) \Leftrightarrow m = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2020}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \dots + \frac{-1}{(x-2020)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	...	2020	$+\infty$
$g'(x)$	-		-		-		-
$g(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$	

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \leq n \leq 2020, n \neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi có duy nhất một nghiệm.

$$+ \text{ Xét hàm số } y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} g'_1(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ g'_2(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0 < x < 2, \text{ do vậy } y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ g'_3(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	0	$\nearrow \ln 3$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 4$	$\nearrow +\infty$

+ Qua bảng biến thiên này ta có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m - 2020 = 4 \\ 4m - 2020 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 506 \in \mathbb{Z} \\ m = \frac{2020 + \ln 3}{4} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m = 506$.

Câu 9: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình.

Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

$$\text{Suy ra: } f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases} \text{ và } f'(x) \text{ không}$$

xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$ (*).

Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \frac{1}{x^3} = \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{m-15x})^3 + 3\sqrt{m-15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{m-15x}$ (2).

Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.

Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên (2) $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0$. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + 15$.

Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
g'			$-$	0	$+$
g		$+\infty$		$\frac{55}{4}$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$.

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phân tử.

Câu 11: Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

$$\text{Từ đồ thị} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x \text{ và } f(\sqrt{f(x)}) = f^2(x) + 2f(x).$$

$$\text{Nhu vậy phương trình } f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0 \text{ với } f(x) \geq 0.$$

Đặt $t = f(x) (t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1$.

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1; 4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0; 1)$. Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0; 1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

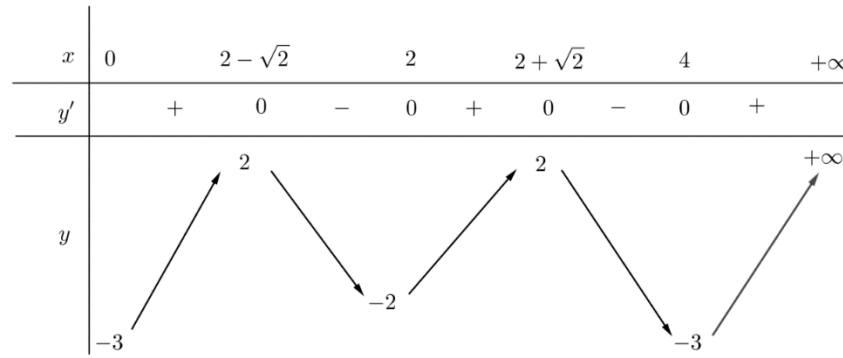
Câu 12: Chọn B

Ta đặt: $g(x) = f(x^2 - 4x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x - 4)f'(x^2 - 4x) = 2(x - 2)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x) \\ &= 2(x - 2)^3(x^2 - 4x + 2)x(x - 4). \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } g(0) = f(0) = -3; g(2 - \sqrt{2}) = g(2 + \sqrt{2}) = f(-2) = 2; g(2) = f(-4) = -2;$$

$$g(4) = f(0) = -3. \text{ Ta có bảng biến thiên:}$$



Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3 < \frac{m}{6} \leq 2$

$\Leftrightarrow -18 < m \leq 12$. Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

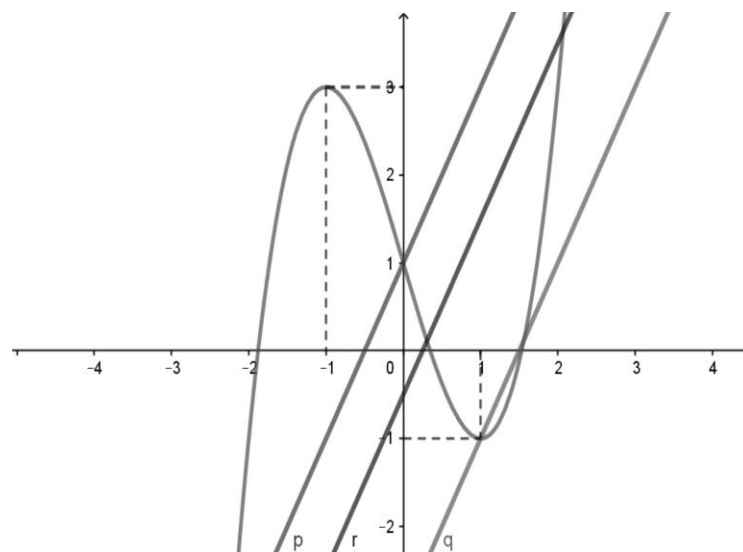
$$\text{với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min_{[-1; 4]} f(x) = -2$; $\max_{[-1; 4]} f(x) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy trên đoạn $[-10; 10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 14: Chọn D



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi (p): $y = 2x + 1$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi q : $y = 2x - 3$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình phải có nghiệm $t \in (0;1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p

$$\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1; 2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1; 2]$ nên $\min_{[-1; 2]} h(x) = h(-1) = m - 1, \max_{[-1; 2]} h(x) = h(2) = m + 1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1; 2]} h(x) \cdot \max_{[-1; 2]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(1748 + m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[2; 4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2; 4]$

Suy ra $\min_{[2; 4]} g(x) = g(2) = 2$ và $\max_{[2; 4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = m$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2; 4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\underset{[2;4]}{\text{Min}} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{\text{Min}} g(x)}{\underset{[2;4]}{\text{Max}} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{\text{Max}} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{\text{Max}} g(x)}{\underset{[2;4]}{\text{Min}} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 17: Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-4x^2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

$$\text{Xét phương trình } 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \Leftrightarrow m = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x, \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -12f'(-2x+1) - 24x^2 + 6 = -6[2f'(-2x+1) + 4x^2 - 1]$$

$$\text{Từ giả thiết ta suy ra } f'(-2x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 2 \\ -2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$

$$f'(-2x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < -2x+1 < 0 \\ 2 < -2x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x \text{ trên } \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

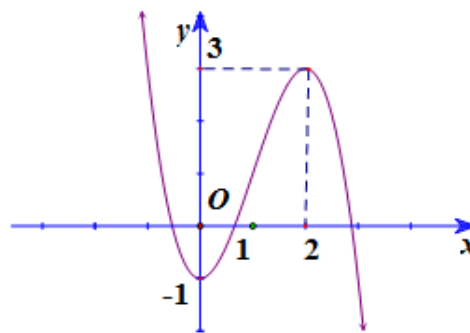
x	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$f'(-2x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	54 4 14 -36 9					

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ có đúng ba nghiệm $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 14 \\ m \neq 9 \end{cases}$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13$. Vậy có 8 số nguyên m .

DẠNG 3**Tìm m liên quan đến tương giao hàm bậc 3**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không có m.
- Câu 2:** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 0. B. 3. C. 2. D. -1.
- Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt
- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau.



- Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?
- A. 2020. B. 2022. C. 2021. D. 2019.
- Câu 5:** Biết đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0;1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $(-1;0)$.
- Câu 6:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (3m+1)x - m + 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 7:** Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$
- A. $m \neq 0$. B. $m \in (0;2)$. C. $m = 1$. D. $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S .

- A. -4 . B. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. C. -2 . D. 0 .

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

- A. 10 . B. 8 . C. 11 . D. 9 .

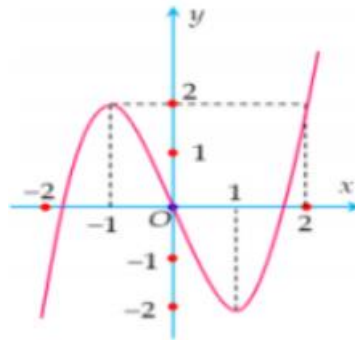
Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A. 2021 . B. 2023 . C. 2024 . D. 2022 .

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 0 .

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. -2 .

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0 . B. -2 . C. 3 . D. -1 .

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8$, $x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0 . Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. 3 . B. 6 . C. 34 . D. 31 .

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường

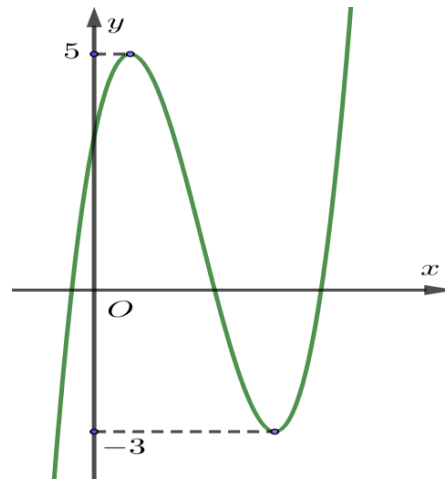
thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

- A. -12 . B. -6 . C. -4 . D. -10 .

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m > 0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(5;8)$. B. $(-5;0)$. C. $(0;2)$. D. $(1;5)$.

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0$$
 có đúng 8 nghiệm phân biệt?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1 . Biết rằng $S = \left(\frac{-a}{b}; +\infty\right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản.

Giá trị biểu thức $T = a + b$ tương ứng bằng

- A. 4. B. 8. C. 5. D. 7.

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

- A. $-3 \leq m \leq 1$. B. $-3 < m < 1$. C. $-1 < m < 3$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC . Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. $m \in (-4; 0)$. B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; -4)$. D. $m \in (-4; -2)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0; -1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

A. -12 . B. -6 . C. -4 . D. -10 .

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021 \cdot f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078. B. 0. C. 4041. D. 8076.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7; \frac{23}{2}\right)$. B. $(-2; 5)$. C. $\left(\frac{43}{3}; \frac{39}{2}\right)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{65}{4}\right)$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m ($m \in (-2021; 2021)$) để (C_m) cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$

A. 1.

B. vô số.

C. 2.

D. 0.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không có m .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0(1) \end{cases}$$

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Ta có:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 0 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), ta có $B(x_1; mx_1 - 1); C(x_2; mx_2 - 1)$. Trọng tâm G của tam giác KBC, ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{4 + x_1 + x_2}{3} = 2 \\ y_G = \frac{11 + mx_1 + mx_2 - 2}{3} = \frac{2m + 9}{3} \end{cases}$$

Theo giả thiết G thuộc đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ nên ta có: $\frac{2m + 9}{3} = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow m = 3(tm)$

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 3. C. 2. D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2.$$

Giả sử đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm x_0 thì $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Đk đủ: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ thì PTTT là $y = 3x - 2 \Rightarrow m = -1$.

$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$ thì PTTT là $y = 3x + 3 \Rightarrow m = 3$.

Tổng các phần tử của S bằng 2.

Cách 2: Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 - 3x = m \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1; m = 3.$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox:

$$2x^3 - (2+m)x + m = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x - mx + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)[2x^2 + 2x - m] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + 2x - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

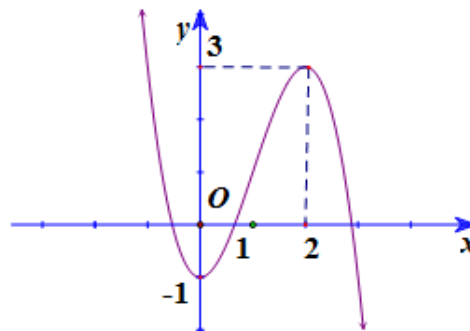
Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + 2m > 0 \\ g(1) = 2 + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để phương trình

$2f(|x|) - m = 0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

- A. 2020. B. 2022. C. 2021. D. 2019.

Lời giải

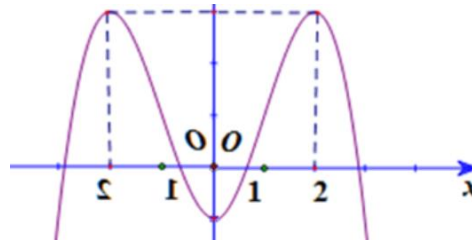
Chọn D

$$2f(|x|) - m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{m}{2} \quad (1)$$

Dựa vào đồ thị hàm $y = f(|x|)$ ta có: để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = 3 \\ \frac{m}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m < -2 \end{cases}$$

Vì $m \in [-2020; 2020] \Leftrightarrow m \in \{-2020; -2019; \dots; -3; 6\}$. Vậy có 2019 số.



Câu 5: Biết đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0; 1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm là $(3m-1)x + 6m + 3 = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 = 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 \quad (C_m)$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 3m + 1 \Rightarrow g''(x) = 6x - 6; \quad g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đồ thị (C_m) có điểm uốn là $I(1; -9m-3)$.

Để đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - 3 \cdot (-3m+1) > 0 \\ I \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{2}{3} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \in (-1; 0).$$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2m + 1 \quad x^2 + 3m + 1 \quad x - m + 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

♦ Xét phương trình

$$x^3 - 2m + 1 \quad x^2 + 3m + 1 \quad x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 \left[x^2 - 2mx + m + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \end{cases} *$$

♦ Theo yêu cầu bài toán phương trình $*$ xảy ra 2 trường hợp

TH1: phương trình có nghiệm kép khác 1, tức là $\begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 = 0 \\ 1 - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$ loại, do nghiệm không

nguyên.

TH2: phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 là một nghiệm, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ 1 - 2m + m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Nhận xét: cụm từ “cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt” được người ra đề hiểu là “có đúng 2 điểm chung với trục hoành”. Theo ý kiến chủ quan của người giải, ta nên phát biểu rõ ràng hơn.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

- A. $m \neq 0$. B. $m \in (0; 2)$. C. $m = 1$. D. $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

♦ Để hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm phải có 3 nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - m) = 0$$

♦ Ta đặt $x_1 = 1$. Khi đó, để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình sau phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$x^2 - x - m = 0$$

♦ Do có nghiệm khác 1 nên $1-1-m \neq 0$ hay $m \neq 0$.

$$\text{Ta có } \Delta = 1 + 4m$$

♦ Để có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $m > -\frac{1}{4}$.

♦ Theo điều kiện của đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 3$$

với x_2, x_3 là nghiệm của phương trình bậc 2 trên.

♦ Áp dụng Viet ta có

$$1^2 - 2(-m) = 3 \Leftrightarrow m = 1$$

♦ Kết hợp các điều kiện ta có $\Leftrightarrow m = 1$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S .

- A. -4 . B. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. C. -2 . D. 0 .

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có BBT của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

♦ Suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C
 $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

♦ Khi đó $x_A + x_B + x_C = 3, x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A = 0, x_A x_B x_C = m$.

♦ Để B nằm giữa A, C và $AB = 2BC$ thì

$$\begin{cases} x_A < x_B < x_C \\ x_B - x_A = 2(x_C - x_B) \end{cases} \quad \begin{cases} x_C < x_B < x_A \\ x_A - x_B = 2(x_B - x_C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x_B = x_A + 2x_C \Leftrightarrow 4x_B - 3 = x_C \Rightarrow x_A = 6 - 5x_B.$$

♦ Suy ra $\begin{cases} (6 - 5x_B) \cdot x_B + x_B \cdot (4x_B - 3) + (4x_B - 3) \cdot (6 - 5x_B) = 0 & (*) \\ (4x_B - 3) \cdot x_B \cdot (6 - 5x_B) = m & (**) \end{cases}$.

♦ Từ (*) được $x_B = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. Thay vào (**) được $m = -\frac{98 + 20\sqrt{7}}{49}$ và $m = -\frac{98 - 20\sqrt{7}}{49}$.

♦ Vậy $S = \left\{ -\frac{98 + 20\sqrt{7}}{49}; -\frac{98 - 20\sqrt{7}}{49} \right\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10.

B. 8.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

♦ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$$x^3 + (a+10)x^2 - x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 10x^2 - x + 1 = -ax^2.$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên

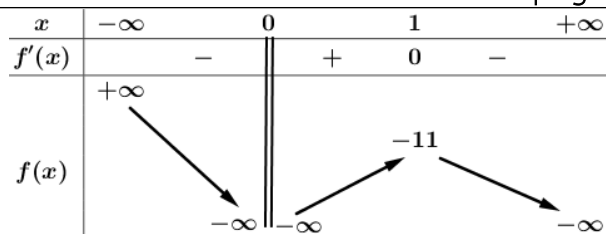
$$(1) \Leftrightarrow -\frac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2} = a.$$

♦ Xét hàm số $f(x) = -\frac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2}$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{x^3 + x - 2}{x^3} = -\frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



♦ Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm khi (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow a > -11$.

Do a nguyên âm nên $a \in \{-10, -9, -8, \dots, -1\}$. Vậy có 10 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán

- Câu 10:** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.
- A. 2021. B. 2023. C. 2024. D. 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + x = mx - m - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (1-m)x + m + 1 = 0$.

$$(x-1)(x^2 - 2x - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A ,

B, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + m > 0 \\ -2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$ với mọi tham số m .

Trường hợp 1: $x_B = 1$.

$$\text{Khi đó yêu cầu bài toán trở thành } \begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ m(x_1 + x_2) - 2m + 2 = 2 \end{cases}$$

Điều này thỏa mãn với mọi $m > -2$.

Trường hợp 2: $x_B \neq 1$ và giả sử $x_1 < x_2$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ y_1 + 1 = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ mx_1 - m + 2 = 2(mx_2 - m + 1) \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > -2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2020; 2021] \Rightarrow m \in [-1; 2021] \Rightarrow$ có 2023 giá trị của m .

- Câu 11:** Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

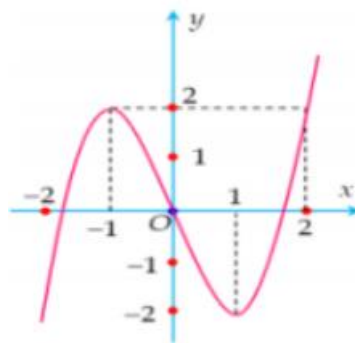
Chọn B

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

- ♦ Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + mx^2 - 2m = 0$ (*).
- ♦ Giả sử phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, theo tính chất của cấp số cộng ta có: $x_1 + x_3 = 2x_2$.
- ♦ Áp dụng định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = m \Rightarrow 3x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{3}$.
- ♦ Vì $x_2 = \frac{m}{3}$ là một nghiệm của phương trình (*) nên ta có:

$$-\left(\frac{m}{3}\right)^3 + m\left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m^3 - 54m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3\sqrt{3} \\ m = -3\sqrt{3} \end{cases}.$$
- ♦ Thử lại:
 - + Với $m = 0$, phương trình trở thành: $-x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (**loại**).
 - + Với $m = 3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.
 - + Với $m = -3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 6\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.
- ♦ Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 3\sqrt{3}$ và $m = -3\sqrt{3}$.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên suy ra $t \in (-1; 0]$.

Trên khoảng $(-1; 0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1; 0]$ thì $f(0) \leq f(t) < f(-1)$ hay $0 \leq f(t) < 2$.

Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u = \sqrt{2f(t)}, u \in [0; 2)$. Khi đó bài toán trở thành:

Tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0; 2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0; 2)$ thì $f(u) \in [-2; 2) \Rightarrow -2 \leq m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \sum m = -2$.

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0.

B. -2.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$.

Khi đó ta có $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2m+1 \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 2(3m+2) \end{cases}$$

Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân nên ta có $x_1 x_2 x_3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Thay $x_2 = 2$ vào phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ ta có

$$8 - (2m+1) \cdot 4 + 4(3m-2) - 8 = 0 \Leftrightarrow 4m = 12 \Leftrightarrow m = 3.$$

Thử lại với $m = 3$ ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = 3$. Đó đó tổng tất cả các giá trị của m bằng 3

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8, x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3.

B. 6.

C. 34.

D. 31.

Lời giải

Chọn D

$$\text{pt } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \left(x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2} \right) = 0 \text{ có đúng 2 nghiệm phân biệt}$$

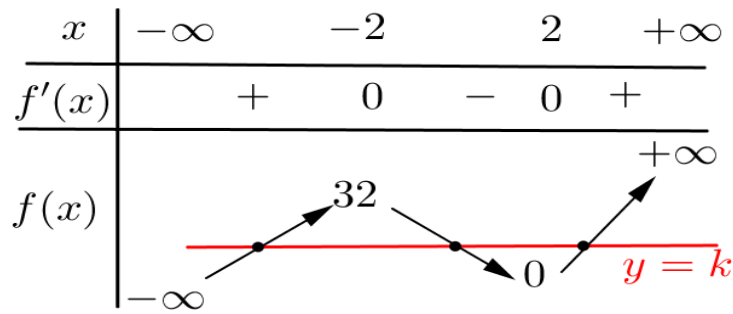
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2} = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ có đúng 2 nghiệm phân biệt}$$

$$+ \underbrace{g(2) = 0}_{g(x)} \Rightarrow m = 24 \text{ (nhận)}$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 16 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

BBT



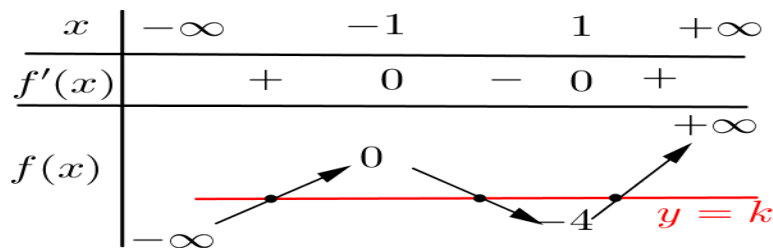
Phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $0 < k < 32$ và $k \in \mathbb{N}^* \rightarrow k = \{1; 2; 3; \dots; 31\}$

+ Pt (1) có nghiệm kép và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 6 \text{ (nhận)}$

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

BBT



Phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-4 < k < 0$ và $k \in \mathbb{N}^* \rightarrow k \in \emptyset$

Vậy có 31 giá trị k thỏa điều kiện bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

A. -12 .

B. -6 .

C. -4 .

D. -10 .

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là:

$$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = m+5 \end{cases}$$

+ Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C thì $\begin{cases} m \neq -7 \\ m \neq -6 \end{cases}$

+ Giả sử $B(-1; 8), C(m+5; m^2 + 6m + 8)$. Để tam giác IBC cân tại I

$$\text{thì } IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 20 = (m+4)^2 + (m^2 + 6m + 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -6(l) \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6 .

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m > 0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(5;8)$. B. $(-5;0)$. C. $(0;2)$. D. $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A(2;0) \\ x^2 - 4x + m+1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Giả sử } B(x_1, mx_1 - 2m), C(x_2, mx_2 - 2m) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}$$

Ta có $B'(0, mx_1 - 2m), C'(0, mx_2 - 2m)$.

$$S_{BB'C'C} = \frac{1}{2} B'C' (BB' + CC') = 8 \Leftrightarrow B'C' (BB' + CC') = 16.$$

$$\text{Mà } B'C' = |m(x_1 - x_2)|, BB' = |x_1|, CC' = |x_2|.$$

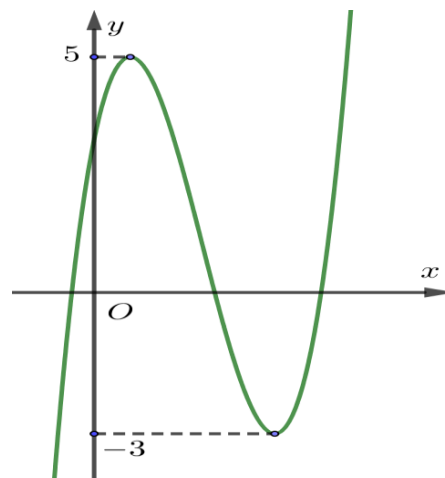
Do m dương nên $x_1 x_2 = m+1 > 0$ mà $x_1 + x_2 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$.

$$\Rightarrow B'C' = m|x_1 - x_2|, BB' = x_1, CC' = x_2 \Rightarrow m|x_1 - x_2|(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow m|x_1 - x_2| = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 16 \Leftrightarrow m^2(16 - 4m - 4) = 16$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1(l) \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0 \text{ có đúng 8 nghiệm phân biệt?}$$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0$$

Đặt $t = f(x)$, phương trình trở thành:

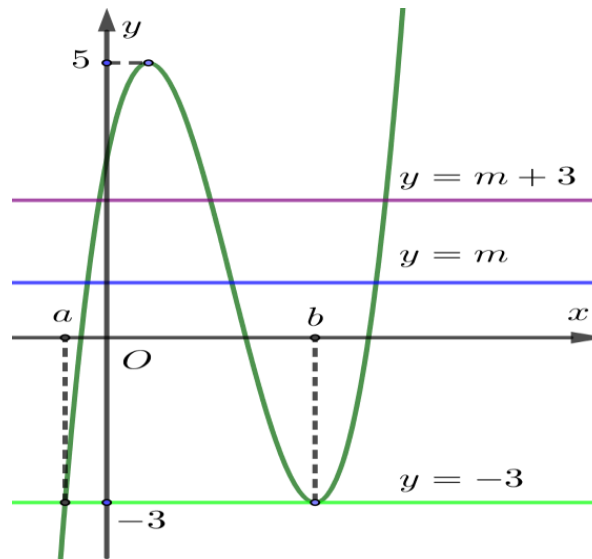
$$t^3 - 2mt^2 + (m^2 - 3m - 9)t + 3m^2 + 9m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)[t^2 - (2m+3)t + m^2 + 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)(t-m)(t-m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = m \\ t = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -3 & (1) \\ f(x) = m & (2) \\ f(x) = m+3 & (3) \end{cases}$$

Nhận xét các phương trình (2) và (3) không có nghiệm chung.



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow$ Các phương trình (2) và (3) đều có 3 nghiệm phân biệt khác a, b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 < 5 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1 .

Biết rằng $S = \left(\frac{-a}{b}; +\infty \right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị

biểu thức $T = a + b$ tương ứng bằng

A. 4.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - (6m+5)x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - (6m+5)x - 2 = 0(*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ lớn hơn -1 và khác 1. Ta có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \\ 1^2 - (6m+5) - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 + 60m + 33 > 0 \\ 6m+5 > -2 \\ 6m+4 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$$

Do đó $a = 2; b = 3 \Rightarrow T = a + b = 5$

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3 \leq m \leq 1$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $-1 < m < 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $(x-1)^3 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = m$ (*).

Đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt. Vậy $-3 < m < 1$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4; 0)$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4)$.

D. $m \in (-4; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là $x^3 + 3x^2 + m = 0(1)$.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ ($x_1 < x_2 < x_3$) thì $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là hoành độ của A, B, C và $x^3 + 3x^2 + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + m = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

Nên ta có $x_1 + x_2 + x_3 = -3$.

Để B là trung điểm AC thì $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên $3x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = -1$.

Tức là (1) có 1 nghiệm là $x = -1$. Suy ra $-1 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

$$\text{Thử lại với } m = -2 \text{ thì (1) trở thành } x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện bài toán}).$$

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 + 6x$ và $y'' = 6x + 6$ nên (C) có điểm uốn $I(-1; m+2)$.

Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC thì $I \in Ox$

$$\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4; 11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0; -1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0(1) \end{cases}$$

Suy ra $A(0; -1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\text{Khi và chỉ khi: } \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Giả sử: $B(x_1; mx_1 - 1)$, $C(x_2; mx_2 - 1)$. Theo Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC :

$$\begin{cases} x_G = \frac{4 + x_1 + x_2}{3} \\ y_G = \frac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \frac{2m + 9}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(2; \frac{2m + 9}{3}\right)$$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ suy ra $\frac{2m + 9}{3} = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn (*)

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} (*)$$

(C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m > 0 \\ 1^2 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó $x_1 = 1$, x_2 và x_3 là hai nghiệm của $(*)$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 < 3 \Leftrightarrow 1 + 2m < 3 \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Vậy các giá trị cần tìm của } m \text{ là } \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} \quad (2). \text{ Điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình}$$

$$(2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \Delta = 1 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \Leftrightarrow 1^2 + 2m < 3 \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

- Câu 24:** Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .
- A. -12 . B. -6 . C. -4 . D. -10 .

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ là

$$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - (3m+13)x - 2m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)[x^2 - (m+4)x - (m+5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ g(x) = 0 \end{cases} \text{ (với } g(x) = x^2 - (m+4)x - (m+5) \text{)}$$

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ phân biệt khác } -2, \text{ nghĩa là } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}.$$

Ta có $\Delta_g = (m+4)^2 + 4(m+5) = m^2 + 12m + 36 > 0, \forall m \neq -6$. và $g(-2) = m + 7$ do vậy

$$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+7 \neq 0 \\ m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -6 \\ m \neq -7 \end{cases} (*).$$

Với điều kiện $(*)$ ta có đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $A(-2; 8-m)$ và hai điểm $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$ và $x_1 + x_2 = m + 4$.

Gọi K là trung điểm của BC ta có $K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{m(x_1 + x_2) + 2m + 16}{2}\right)$ hay

$$K\left(\frac{m+4}{2}; \frac{m^2 + 6m + 16}{2}\right).$$

Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$ hay $\overrightarrow{IK}$ cùng phương với pháp tuyến của đường thẳng d .

Ta có $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{m+2}{2}; \frac{m^2 + 6m + 8}{2}\right)$ và $\vec{n} = (m; -1)$ là một pháp tuyến của đường thẳng d , do đó

$$\text{ta cần có } \frac{m+2}{m} = \frac{m^2 + 6m + 8}{-1} \Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Kiểm tra lại thấy $m = -2$ không thỏa do khi đó $I \in d$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m để thỏa mãn bài toán và tổng tất cả các giá trị đó bằng -4 .

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021.f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078.

B. 0.

C. 4041.

D. 8076.

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $2021.f(f(x)) = m \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{m}{2021}$.

Khảo sát hàm số $y = f(f(x))$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) = (3x^2 - 6x)(3(f(x))^2 - 6f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = x_1 \\ x = 2 = x_2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Chú ý rằng: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \approx 2,879 \\ x = x_4 \approx 0,653 \\ x = x_5 \approx -0,532 \end{cases} \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = x_6 \approx 3,104.$$

Do 6 nghiệm trên đều là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(f(x))$ có 6 cực trị là $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_5	x_1	x_4	x_2	x_3	x_6	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$										

Phương trình $2021.f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{m}{2021} < 1 \Leftrightarrow -2021 < m < 2021$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2020, -2019, \dots, 2019, 2020\}$, do đó có 4041 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (mx)^3 + mx$ (*).

Xét $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1=mx \Leftrightarrow (m-1)x=1$.

Để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$ thì $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{m-1} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{6}{5} \leq m \leq 6 \end{cases}$.

Vì m là số tự nhiên nên $m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Vậy có 5 giá trị m thỏa đề.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(7; \frac{23}{2}\right)$. B. $(-2; 5)$. C. $\left(\frac{43}{3}; \frac{39}{2}\right)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{65}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$				1		$+\infty$
						0	

Ta có: $\frac{2\sin x + 1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên

$$f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) \in [0; 1].$$

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } 4a^2 + 8b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 13.$$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2 = 2^{1-2m} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		1		$+\infty$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 1 < 2^{1-2m} < 2 \Leftrightarrow 0 < 1-2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m ($m \in (-2021; 2021)$) để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4038.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2 = 0 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2mx + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 2mx + m+1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

C_m cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 > 0 \\ 4 - 4m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $A(2;0), B(x_1;0), C(x_2;0)$;

Hai điểm B, C thỏa mãn điều kiện đầu bài $\Leftrightarrow (OB-1)(OC-1) < 0$

$$\Leftrightarrow (|x_1|-1)(|x_2|-1) < 0 \Leftrightarrow |x_1x_2| + 1 < |x_1| + |x_2|$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2 + 1 < (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$$

Kết hợp với đk ta có $m \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$ thỏa mãn ycbt.

Vậy số các phân tử của S là 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$

A. 1.

B. vô số.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$ (*).

Ta có $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = (x-1)[x^2 + (1-m)x - 1] = (x-1).g(x)$.

Với $g(x) = x^2 + (1-m)x - 1$ và $g(1) = 1-m$ và $g(m-1) = -1$.

Lại có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + m - 2$ với $\begin{cases} f'(1) = 1-m \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

Với $f(1)$ nếu $f'(1) > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ suy ra $\begin{cases} e^{f(x)} \geq f(x) + 1 \\ \pi^{f'(x)} \geq f'(x) + 1 \end{cases}$.

Khi đó (*) $\Rightarrow f(x) + f'(x) \geq f'(x)[f(x) + 1] + f(x)[f'(x) + 1] \Leftrightarrow 2f(x).f'(x) \leq 0$ (**).

Trường hợp 1. Nếu $f(x) = 0$ thì $f'(x) = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $f(x) > 0$ thì (**) $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \leq 0$.

Mặt khác $\Delta'_{f'(x)} = m^2 - 3m + 6 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall m \Rightarrow f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

Giả sử rằng $f(x) = 0$ có các nghiệm $x = (x_1; x_2; \dots)$, ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \leq 0$ (1).

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm nên (1) có 2 nghiệm (**vô lý**).

Như vậy $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + (1-m)x - 1 = 0; \Delta_{g(x)} = (1-m)^2 + 4 > 0 \\ h(x) = 3x^2 - 2mx + m - 2 = 0; \Delta_{h(x)} = m^2 - 3m + 6 > 0 \end{cases}$

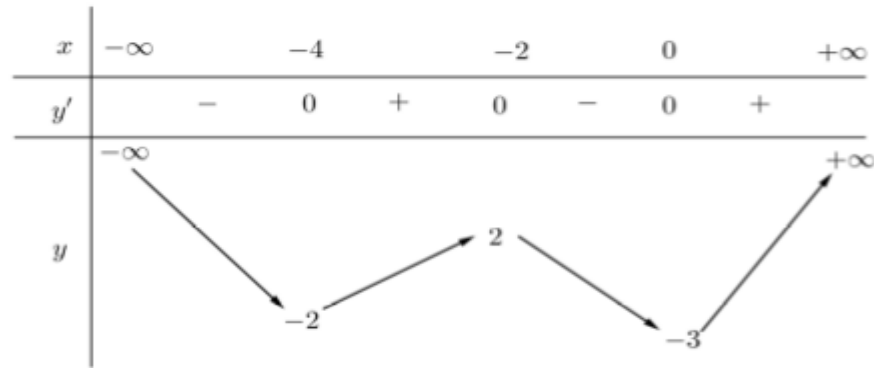
Với $g(1) = 0 \Leftrightarrow 1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ và $h(1) = 0 \Leftrightarrow -m+1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Do đó với $m \neq 1$, phương trình $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$ luôn có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy có vô số giá trị của m thỏa đề.

DẠNG 4**Tìm m liên quan đến tương giao hàm trùng phương**

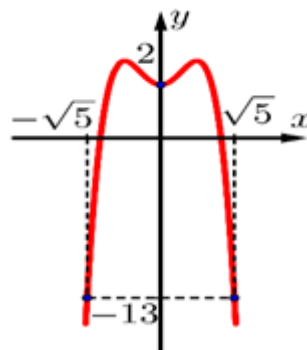
- Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.
- Câu 2:** Biết đồ thị hàm số $y = (x-1)(x+1)(x^2-7) - m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4 . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4} > 1$.
A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 3:** Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $m^2 \in (5; 7)$. **B.** $m^2 \in (3; 5)$. **C.** $m^2 \in (0; 1)$. **D.** $m^2 \in (1; 3)$.
- Câu 4:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - 2m = 0$ có nghiệm thuộc $(-2; 2)$?
A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.
- Câu 5:** Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $m^2 \in (5; 7)$. **B.** $m^2 \in (3; 5)$. **C.** $m^2 \in (0; 1)$. **D.** $m^2 \in (1; 3)$.
- Câu 6:** Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m \in (6; 9)$. **B.** $m \in (-6; -3)$. **C.** $m \in (-3; 2)$. **D.** $m \in (2; 6)$.
- Câu 7:** Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) . Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt
A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$ **C.** $m > -\frac{1}{3}$ **D.** $m < -\frac{1}{3}$.
- Câu 8:** Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là
A. $(1; +\infty) \cup \{0\}$. **B.** $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \cup \{0\}$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 25. B. 30. C. 29. D. 24.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là:

- A. $m \geq \frac{2}{3}f(0)$. B. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5})$. C. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) . Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

- A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$. C. $m > -\frac{1}{3}$. D. $m < -\frac{1}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Ta được phương trình $t^2 - 3t + m = 0$, (1).

Phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = (x-1)(x+1)(x^2-7) - m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4 . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1-x_4} > 1.$$

A. 9.

B. 8.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = (x-1)(x+1)(x^2-7) - m = x^4 - 8x^2 + 7 - m$.

Mặt khác ta có $y' = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$-9-m$	$7-m$	$-9-m$	$+\infty$				

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-9 < m < 7$. Vì hàm số chẵn nên có 2 cặp nghiệm đối xứng. Giả sử $x_1 + x_2 = 0$ và $x_3 + x_4 = 0$.

$$\text{Theo đề bài ta có: } \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1-x_3} + \frac{1}{1+x_3} = \frac{2}{1-x_1^2} + \frac{2}{1-x_3^2} = \frac{4-2(x_3^2+x_1^2)}{1-(x_3^2+x_1^2)+x_3^2x_1^2} > 1$$

$$\frac{4-2.8}{1-8+(7-m)} > 1 \Leftrightarrow 0 < m < 12. \text{ Kết hợp điều kiện suy ra } 0 < m < 7 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Câu 3: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2 \in (5; 7)$.B. $m^2 \in (3; 5)$.C. $m^2 \in (0; 1)$.D. $m^2 \in (1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Xét: $y = x^4 - x^2 - 10$

$$y' = 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y								

$\swarrow$ $-\frac{41}{4}$ $\nearrow$ -10 $\swarrow$ $-\frac{41}{4}$ $\nearrow$

Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên từ bảng biến thiên thấy đường thẳng $y = m^2$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại những cặp điểm đối xứng nhau qua Oy . Giả sử

$A(x_1; m^2); B(-x_1; m^2)$. Tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow -x_1^2 + m^4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = m^4 \Rightarrow x_1 = m^2$$

$$\Rightarrow A(m^2; m^2) \text{ vì } A(m^2; m^2) \text{ thuộc đồ thị hàm số nên } m^8 - m^4 - 10 = m^2 \Rightarrow m^2 = 2.$$

Câu 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - 2m = 0$ có nghiệm thuộc $(-2; 2)$?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$x^4 - 2x^2 + 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = 2m$$

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in (-2; 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-2	-1	0	1	+2			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	11			3			2	11

$\searrow$ 2 $\nearrow$ 3 $\searrow$ 2 $\nearrow$

Theo yêu cầu bài toán, có: $2 \leq 2m < 11 \Leftrightarrow 1 \leq m < 5,5$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Câu 5: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2 \in (5; 7)$.

B. $m^2 \in (3; 5)$.

C. $m^2 \in (0; 1)$.

D. $m^2 \in (1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét: $y = x^4 - x^2 - 10$

$$y' = 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$-\frac{41}{4}$		-10		$-\frac{41}{4}$		

Vì $m^2 \geq 0$ với mọi m nên từ bảng biến thiên thấy đường thẳng $y = m^2$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại những cặp điểm đối xứng nhau qua Oy . Giả sử

$A(x_1; m^2); B(-x_1; m^2)$. Tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow -x_1^2 + m^4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = m^4 \Rightarrow x_1 = m^2$$

$$\Rightarrow A(m^2; m^2) \text{ vì } A(m^2; m^2) \text{ thuộc đồ thị hàm số nên } m^8 - m^4 - 10 = m^2 \Rightarrow m^2 = 2.$$

Câu 6: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (6; 9)$.

B. $m \in (-6; -3)$.

C. $m \in (-3; 2)$.

D. $m \in (2; 6)$.

Lời giải**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$. (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt, nghĩa là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ m+1 > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Cách 1. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) là nghiệm của phương trình (1) và t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) là nghiệm của phương trình (2).

Theo giả thiết, ta có

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = x_3 - x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 > 0$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{m}{5} + \frac{1}{5} \\ t_2 = \frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m}{5} + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \right) = 2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta' > 0$, phương trình (1) có nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai

trường hợp $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 = 9t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}.$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) . Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$ **C.** $m > -\frac{1}{3}$ **D.** $m < -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 3m(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3m(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 3m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = -1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{cases}$$

Đồ thị (C_m) cắt $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

Khi đó, ta có $\begin{cases} 3m+1 > 0 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}.$

Câu 8: Tập các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $(1; +\infty) \cup \{0\}$. **B.** $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \cup \{0\}$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có: $x^4 - 2x^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m = x^4 - 2x^2 + 1$.

♦ Xét hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

♦ Tập xác định $D = \mathbb{R}$, $y' = 4x^3 - 4x$.

♦ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

♦ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1				$+\infty$
			0			0		

♦ Yêu cầu bài toán tương đương đường thẳng $(d): y = 3m$ cắt đường cong $(C): y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

♦ Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} 3m = 0 \\ 3m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				2			$+\infty$
			-2				-3	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 25.

B. 30.

C. 29.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x^2 - 4x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 4) \cdot f'(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x = -4 \\ x^2 - 4x = -2 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$2 - \sqrt{2}$	2	$2 + \sqrt{2}$	4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$		2		2		$+\infty$
	-3		-2		-3	

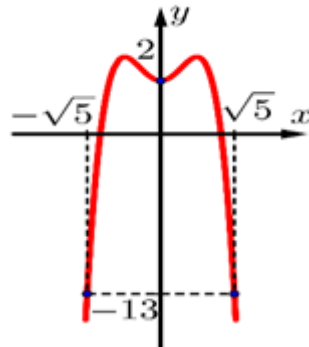
Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow g(x) = \frac{m}{6}$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -3 < \frac{m}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -18 < m \leq 12 \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-17; -16; \dots; 11; 12\}.$$

Vậy có 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



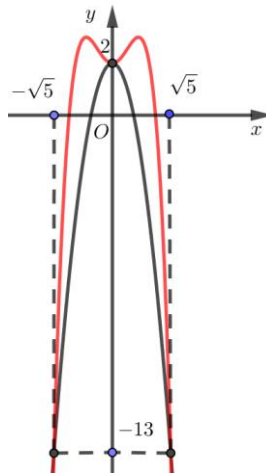
Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ là:

A. $m \geq \frac{2}{3} f(0).$ **B.** $m \geq \frac{2}{3} f(-\sqrt{5}).$ **C.** $m \leq \frac{2}{3} f(\sqrt{5}).$ **D.** $m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5}).$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4, g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2(1).$



Vẽ parabol $y = -3x^2 + 2$ ta thấy phương trình (1) có 3 nghiệm $x = -\sqrt{5}, x = 0, x = \sqrt{5}.$

BBT

x	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$
$g'(x)$	0	+	0	+	0
$g(x)$	$2f(-\sqrt{5}) - 3m - 12\sqrt{5}$ $2f(\sqrt{5}) - 3m$				

$$g(x) \leq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3} f(\sqrt{5}).$$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị (C_m) . Xác định tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$ C. $m > -\frac{1}{3}$ D. $m < -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 3m(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3m(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 3m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, x = -1 \\ x^2 = 3m + 1 \end{cases}$$

Đồ thị (C_m) cắt $y = -1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -1.

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} 3m + 1 > 0 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

