Nguyễn Thành Nhân – Chuyên luyện thi Đại học
Facebook: Nguyễn Thành Nhân
Liên hệ: 0961.9779.73 – Email: ntnhan_21to@student.agu.edu.vn

Mục lục tự động

Mục lục tự động 1
Chủ đề 1: Xét tính đơn điệu dựa vào công thức 7
Câu 1. [Nhận biết] – [#1]. 7
Lời giải 7
Những lỗi sai thường gặp phải – Loophole 1 7
Kỹ thuật Casio – Calculator Technique 1 8
Kỹ thuật Casio – Calculator Technique 2 9
Câu 2. [Thông hiểu] – [#2]. 10
Lời giải 11
Câu 3. [Vận dụng] – [#3]. 12
Lời giải 12
Câu 4. [Vận dụng cao] – [#4]. 12
Lời giải 13
Bài tập tự luyện 14
Câu 1. [Nhận biết] – [#5]. 14
Bài tập bổ sung 14
Câu 1*. [Nhận biết] – [#6] 14
Câu 1**. [Nhận biết] – [#7]. 14
Câu 1***. [Nhận biết] – [#8]. 14
Câu 1****. [Nhận biết] – [#9]. 14
Câu 2. [Nhận biết] – [#10]. 14
Bài tập bổ sung 15
Câu 2*. [Nhận biết] – [#11] 15
Câu 2**. [Nhận biết] – [#12]. 16
Câu 3. [Nhận biết] – [#13]. 16
Bài tập bổ sung 16
Câu 3*. [Nhận biết] – [#14] 16
Câu 3**. [Nhận biết] – [#15]. 17
Câu 3***. [Nhận biết] – [#16]. 17
Câu 4. [Nhận biết] – [#17]. 17
Bài tập bổ sung: 17

Câu 4*. [Nhận biết] – [#18]. 17
Câu 4**. [Nhận biết] – [#19]. 17
Câu 4***. [Nhận biết] – [#20]. 17
Câu 4****. [Nhận biết] – [#21]. 17
Câu 5. [Nhận biết] – [#22]. 18
Bài tập bổ sung: 18
Câu 5*. [Nhận biết] – [#23]. 18
Câu 5**. [Nhận biết] – [#24]. 18
Câu 5***. [Nhận biết] – [#25]. 19
Câu 5****. [Nhận biết] – [#26]. 19
Câu 6. [Thông hiểu] – [#27]. 19
Bài tập tự luyện 19
Câu 6*. [Thông hiểu] – [#28]. 19
Câu 6**. [Thông hiểu] – [#29]. 19
Câu 6***. [Thông hiểu] – [#30]. 20
Câu 6****. [Thông hiểu] – [#31]. 20
Câu 7. [Vận dụng] – [#32]. 20
Bài tập tự luyện 20
Câu 7*. [Vận dụng] – [#33]. 20
Câu 7*. [Vận dụng] – [#34]. 20
Câu 7**. [Vận dụng] – [#35]. 21
Câu 7***. [Vận dụng] – [#36]. 21
Câu 7****. [Vận dụng] – [#37]. 21
Câu 8. [Vận dụng] – [#38]. 21
Bài tập bổ sung: 21
Câu 8*. [Vận dụng] – [#39]. 22
Câu 8**. [Vận dụng] – [#40]. 22
Câu 8***. [Vận dụng] – [#41]. 22
Câu 8****. [Vận dụng] – [#42]. 22
Câu 9. [Vận dụng cao] – [#43]. 23
Bài tập bổ sung: 23
Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#44]. 23
Câu 9**. [Vận dụng cao] – [#45]. 24

Câu 9***. [Vận dụng cao] – [#46]. 24
Câu 9****. [Vận dụng cao] – [#47]. 24
Câu 10. [Vận dụng cao] – [#48]. 25
Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#49]. 25
Câu 10**. [Vận dụng cao] – [#50]. 25
Câu 10***. [Vận dụng cao] – [#51]. 25
Câu 10****. [Vận dụng cao] – [#52]. 26
Câu 10*****. [Vận dụng cao] – [#53]. 26
Câu 10******. [Vận dụng cao] – [#54]. 26
Lời giải chi tiết bài tập tự luận 27
Câu 1. [Nhận biết] – [#5]. 27
Lời giải 27
Câu 1*. [Nhận biết] – [#6]. 29
Lời giải 29
Câu 1**. [Nhận biết] – [#7]. 30
Lời giải 30
Câu 1**. [Nhận biết] – [#7*]. 33
Lời giải 33
Câu 1***. [Nhận biết] – [#8]. 33
Lời giải 33
Câu 1****. [Nhận biết] – [#9]. 35
Lời giải 35
Câu 2. [Nhận biết] – [#10]. 36
Lời giải 37
Bài tập bổ sung 37
Câu 2*. [Nhận biết] – [#11]. 37
Lời giải 38
Câu 2**. [Nhận biết] – [#12]. 38
Lời giải 38
Câu 3. [Nhận biết] – [#13]. 39
Lời giải 39
Bài tập bổ sung 40
Câu 3*. [Nhận biết] – [#14]. 40

Lời giải 40
Câu 3**. [Nhận biết] – [#15]. 41
Lời giải 41
Câu 3***. [Nhận biết] – [#16]. 43
Lời giải 43
Câu 4. [Nhận biết] – [#17]. 43
Lời giải 43
Study Tip 1 44
Bài tập bổ sung: 45
Câu 4*. [Nhận biết] – [#18]. 45
Lời giải 45
Câu 4**. [Nhận biết] – [#19]. 45
Lời giải 45
Câu 4***. [Nhận biết] – [#20]. 46
Lời giải 46
Quick Note 1 46
Câu 4****. [Nhận biết] – [#21]. 46
Lời giải 47
Câu 5. [Nhận biết] – [#22]. 47
Lời giải 48
Bài tập bổ sung: 48
Câu 5*. [Nhận biết] – [#23]. 48
Lời giải 48
Câu 5**. [Nhận biết] – [#24]. 49
Lời giải 49
Câu 5***. [Nhận biết] – [#25]. 49
Lời giải 50
Câu 5****. [Nhận biết] – [#26]. 50
Lời giải 50
Câu 6. [Thông hiểu] – [#27]. 50
Lời giải 50
Câu 6*. [Thông hiểu] – [#28]. 51
Lời giải 51

Quick Note 2 52
Câu 6**. [Thông hiểu] – [#29]. 52
Lời giải 52
Study Tip 2 53
Câu 6***. [Thông hiểu] – [#30]. 53
Lời giải 53
Quick Note 3 53
Câu 6****. [Thông hiểu] – [#31]. 53
Lời giải 54
Câu 7. [Vận dụng] – [#32]. 54
Lời giải 54
Câu 7*. [Vận dụng] – [#33]. 55
Lời giải 55
Câu 7*. [Vận dụng] – [#34]. 56
Lời giải 56
Study Tip 3 57
Quick Note 4 57
Câu 7**. [Vận dụng] – [#35]. 57
Lời giải 57
Study Tip 4 58
Câu 7***. [Vận dụng] – [#36]. 58
Lời giải 58
Quick Note 5 58
Câu 7****. [Vận dụng] – [#37]. 58
Lời giải 59
Quick Note 6 59
Câu 8. [Vận dụng] – [#38]. 59
Lời giải 60
Bài tập bổ sung: 60
Câu 8*. [Vận dụng] – [#39]. 60
Lời giải 60
Câu 8**. [Vận dụng] – [#40]. 61
Lời giải 61

Câu 8***. [Vận dụng] – [#41]. 62
Lời giải 62
Câu 8****. [Vận dụng] – [#42]. 63
Lời giải 63
Câu 9. [Vận dụng cao] – [#43]. 64
Lời giải 64
Bài tập bổ sung: 65
Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#44]. 65
Lời giải 65
Câu 9**. [Vận dụng cao] – [#45]. 66
Lời giải 66
Câu 9***. [Vận dụng cao] – [#46]. 66
Lời giải 67
Câu 9****. [Vận dụng cao] – [#47]. 67
Lời giải 68
Câu 10. [Vận dụng cao] – [#48]. 68
Lời giải 68
Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#49]. 69
Lời giải 70
Câu 10**. [Vận dụng cao] – [#50]. 70
Lời giải 70
Câu 10***. [Vận dụng cao] – [#51]. 71
Lời giải 71
Câu 10****. [Vận dụng cao] – [#52]. 71
Lời giải 72
Câu 10*****. [Vận dụng cao] – [#53]. 72
Lời giải 73
Quick Note 7 73
Câu 10******. [Vận dụng cao] – [#54]. 74
Lời giải 74
Chủ đề tiếp theo 75

Nguyễn Thành Nhân – Chuyên luyện thi Đại học
Facebook: Nguyễn Thành Nhân
Liên hệ: 0961.9779.73 – Email: ntnhan_21to@student.agu.edu.vn

Chủ đề 1: Xét tính đơn điệu dựa vào công thức

Câu 1. [Nhận biết] – [#1].

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+5x+2}{x+3}$, mệnh đề nào dưới đây là sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số: $y=\dfrac{x^2+5x+2}{x+3}$;

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+6x+13}{(x+3)^2}=\dfrac{(x^2+6x+9)+4}{(x+3)^2}=\dfrac{(x+3)^2+4}{(x+3)^2}>0,\ \forall x\in D$.

Do đó, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Vậy: Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Đáp án D.

Cách 2: Trắc nghiệm

Dễ thấy cả bốn đáp án đều chỉ ra hàm số đã cho "đồng biến", thế nên, ta chỉ quan tâm những lỗi sai thường gặp trong kết luận đơn điệu.

Những lỗi sai thường gặp phải – Loophole 1

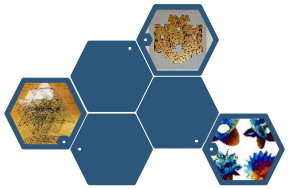
Thứ 1: Không để ý TXĐ (Sai lầm của kết luận câu A).

Thứ 2: Kết luận đơn điệu trên phép toán của tập hợp (Sai lầm của kết luận câu B, C).

Thứ 3: Không biết hoặc đạo hàm sai (Sai lầm rất cơ bản, thường gặp ở các bạn mới học nhưng chưa nắm vững kiến thức).

Ở đây, tôi trình bày cho các bạn một mẹo sử dụng CASIO 580 VN – X để đạo hàm hàm số bậc hai trên bậc hai.

Kỹ thuật Casio – Calculator Technique 1



Kỹ thuật đạo hàm hàm phân thức tổng quát có dạng $y=\dfrac{p(x)}{q^n(x)}$, $p(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$ *bằng phương pháp phân tích bách phân.*

Ý tưởng:

Đạo hàm hàm số $y=\dfrac{p(x)}{q^n(x)}$, ta được:

$$y'=\frac{p'(x).q^n(x)-n.p(x).q^{n-1}(x).q'(x)}{q^{2n}(x)}=\frac{p'(x).q(x)-n.p(x).q'(x)}{q^{n+1}(x)}$$

Vì biểu thức $y'.q^{n+1}(x)\in\mathbb{R}[x]$ nên ta hoàn toàn phân tích thành một đa thức nào đó.

Sử dụng CASIO:

* **Bước 1:** Nhập vào máy tính $\left[q(x)\right]^{n+1}\times\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{p(x)}{q^n(x)}\right)\Big|_{x=X}$ và CALC 100 để tìm quy luật.

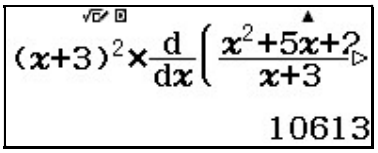
* **Bước 2:** Sử dụng phương pháp "Phân tích bách phân" để phân tích kết quả trên theo biến $x=100$. Ta tạm gọi $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ là đa thức tìm được. Suy ra: $y'=\dfrac{f(x)}{q^{n+1}(x)}$ là đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{p(x)}{q^n(x)}$.

Ứng dụng:

Nhập vào màn hình:

$$(x+3)^2\times\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+5x+2}{x+3}\right)\Big|_{x=X}$$

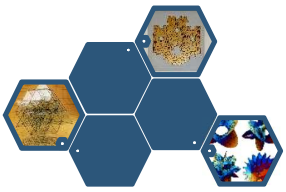
Sau đó CALC với $X=100$ ta sẽ được kết quả 10613 như sau:



Dễ phân tích được: $10613 = \underbrace{10000}_{100^2} + \underbrace{600}_{6.100} + 13 = x^2 + 6x + 13, \left(x = 100\right)$

Vậy dễ dàng ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 6x + 13}{\left(x+3\right)^2}$.

Kỹ thuật Casio – Calculator Technique 2



Kỹ thuật đạo hàm hàm phân thức bậc hai trên bậc hai có dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ *bằng công cụ VECTOR* MENU 5.

Ý tưởng:

Đạo hàm hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$:

Ta có: $y' = \dfrac{\left(2ax + b\right).\left(a'x^2 + b'x + c'\right) - \left(ax^2 + bx + c\right).\left(2a'x + b'\right)}{\left(a'x^2 + b'x + c'\right)^2}$

$$y' = \frac{\left(ab' - a'b\right)x^2 - 2\left(a'c - ac'\right)x + \left(bc' - b'c\right)}{\left(a'x^2 + b'x + c'\right)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2 - 2\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\left(a'x^2 + b'x + c'\right)^2} = \frac{mx^2 - 2nx + p}{\left(a'x^2 + b'x + c'\right)^2}$$

Nhưng ta lại biết rằng, nếu ta xét hai vector $\vec{u} = \left(a;b;c\right)$, $\vec{v} = \left(a';b';c'\right)$ thì tích có hướng của chúng sẽ được tính bởi: $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) = \left(bc' - b'c; a'c - ac'; ab' - a'b\right)$.

Như vậy, $\left(p;n;m\right)$ chính là tọa độ của tích có hướng $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$.

Sử dụng CASIO:

* **Bước 1:** Dùng lệnh MENU 5 (VECTOR) và lần lượt khai báo các Vector trong không gian ba chiều. Cụ thể:

Vector A: $\text{VctA} = \left[a;b;c\right]$ (với a,b,c lần lượt là các hệ số của tam thức bậc hai ở tử).

Vector B: $\text{VctB}=\left[a';b';c'\right]$ (với a,b,c lần lượt là các hệ số của tam thức bậc hai ở mẫu).

* **Bước 2:** Ấn [AC] hoặc dùng tổ hợp các phím [OPTN] [3] để chuyển màn hình về chế độ tính toán vector. Sau đó tính tích có hướng của hai vector A và B như sau:

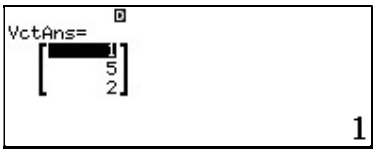
[OPTN] [3] (VctA) [×] [OPTN] [4] (VctB) [=]

* **Bước 3:** Thu nhận kết quả từ màn hình và xác định các hệ số m,n,p (nhìn từ dưới lên trên).

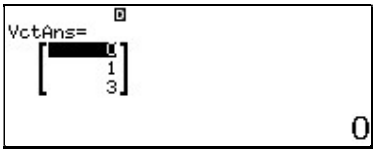
Ứng dụng:

Chuyển sang chế độ VECTOR: [OPTN] [5] và nhập $\text{VctA}=\left[1;5;2\right]$, $\text{VctB}=\left[0;1;3\right]$ theo các bước sau:

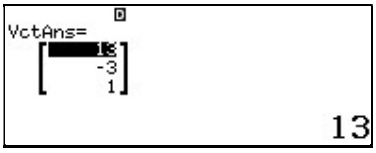
[OPTN] [5] [1] [3] [1] [=] [5] [=] [2] [=]



[OPTN] [1] [2] [3] [0] [=] [1] [=] [3] [=]



[OPTN] [3] [OPTN] [3] [×] [OPTN] [4] [=]



* **Bước 3:** Suy ra: $\begin{cases}p=13\\n=-3\\m=1\end{cases}$.

Vậy dễ dàng ta có: $y'=\dfrac{x^2+6x+13}{\left(x+3\right)^2}$.

Câu 2. [Thông hiểu] – [#2].

Cho hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

1. Hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$ đồng biến trên toàn tập xác định của nó.

2. Hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$ đồng biến trên $(-\infty;-13)$ và $(13;+\infty)$.

3. Hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 15.

4. Hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$ nghịch biến trên khoảng $(-13;13)$.

5. Hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 26.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Kiểm tra tính đúng đắn của từng mệnh đề sẽ gây mất thời gian nếu dùng nhiều phương pháp như (chạy TABLE, kiểm tra điều kiện xác định,…). Do vậy, cách tự luận sẽ mang lại nhiều lợi thế hơn khi giải các bài tập như thế này!

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{x^3-507x+506}$.

ĐKXĐ: $x^3-507x+506\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-23\le x\le 1\\ x\ge 22\end{array}\right.$.

TXĐ: $D=[-23;1]\cup[22;+\infty)$.

Dựa vào tập xác định, ta dễ dàng loại được mệnh đề 2.

Ta có: $y'=\dfrac{3x^2-507}{2\sqrt{x^3-507x+506}}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-13\\ x=13\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-23	-13	1	13	22	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$ ‖	0	‖	$+$
$f(x)$	‖	↗	↘	‖		‖	↗

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-23;-13)$ và $(22;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-13;1)$.

Do đó, lần lượt các kết luận 1, 4 đều sai.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $l=1-(-13)=14$.

Vậy, không có mệnh đề nào đúng.

Đáp án A.

Câu 3. [Vận dụng] – [#3].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu hàm số đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3		5		7	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi rằng hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\sqrt{7}\right)$. **B.** $\left(\sqrt{7};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\sqrt{7};0\right)$.

Lời giải

Ta có: $y'=-2x.f'\left(4-x^2\right)$.

Để hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ đồng biến thì $-2x.f'\left(4-x^2\right)>0\Leftrightarrow x.f'\left(4-x^2\right)<0$.

Hay: $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\f'\left(4-x^2\right)<0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\f'\left(4-x^2\right)>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}4-x^2<-3\\-3<4-x^2<5\\4-x^2>7\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\5<4-x^2<7\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{7}\\x<-\sqrt{7}\\-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}\\x\in\varnothing\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\x\in\varnothing\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{7}\\0<x<\sqrt{7}\end{array}\right.$.

Tuy nhiên, thay vì ta kết luận rằng hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ đồng biến trên hai khoảng rời nhau là $\left(0;\sqrt{7}\right)$ và $\left(\sqrt{7};+\infty\right)$ thì ta hoàn toàn có thể kết luận rằng hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ đồng biến trên một khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Sở dĩ kết luận trên chặt vì trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, hàm số $y=f\left(4-x^2\right)$ luôn có $y'\geq 0$ và dấu "$=$" chỉ xảy ra tại một điểm duy nhất (tại điểm $x=\sqrt{7}$) nên ta thu được kết luận trên.

Đáp án C.

Câu 4. [Vận dụng cao] – [#4].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên dưới đây.

x	$-\infty$		-3		5		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(x-2\right)-x^3+6x^2+63x-2022$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-3\right)$. **B.** $\left(-3;9\right)$. **C.** $\left(3;9\right)$. **D.** $\left(-\infty;7\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $y=3f\left(x-2\right)-x^3+6x^2+63x-2022$.

Ta có: $y'=3f'\left(x-2\right)-3x^2+12x+63$.

Để hàm số $y=3f\left(x-2\right)-x^3+6x^2+63x-2022$ nghịch biến thì:

$$y'=3f'\left(x-2\right)-3x^2+12x+63<0$$

Hay: $f'\left(x-2\right)-x^2+4x+21<0\Leftrightarrow f'\left(x-2\right)-\left(x-2\right)^2+25<0\ \ (*)$

Đặt $t=x-2$, khi đó $(*)\Leftrightarrow f'\left(t\right)-t^2+25<0$.

Do vậy, ta có ý tưởng, sẽ chọn ra những giá trị thoả mãn: $\begin{cases}f'\left(t\right)<0\\-t^2+25<0\end{cases}$.

Hay $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<-3\\-3<t<5\\t>7\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}t>5\\t<-5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-5\\t>7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2<-5\\x-2>7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>9\end{array}\right.$.

Đáp án A.

Nguyễn Thành Nhân – Chuyên luyện thi Đại học
Facebook: Nguyễn Thành Nhân
Liên hệ: 0961.9779.73 – Email: ntnhan_21to@student.agu.edu.vn

Bài tập tự luyện

Câu 1. [Nhận biết] – [#5].

Hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-21x+\frac{2021}{2022}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-7;3)$. **C.** $(-3;7)$. **D.** $(-\infty;-7)$ và $(3;+\infty)$.

Bài tập bổ sung

Câu 1*. [Nhận biết] – [#6].

Hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+2022$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 1. [Nhận biết] – [#7].**

Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=2x^3-6x-2022$.

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 1*. [Nhận biết] – [#8].**

Khoảng đồng biến của hàm số $y=-x^3+4x^2-5x-5$ là khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{5}{3}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 1**. [Nhận biết] – [#9].**

Hàm số $y=2x+\ln x-x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$. **C.** $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$. **D.** $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Câu 2. [Nhận biết] – [#10].

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=x^3-5x^2+3x+1$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bước 2: Đạo hàm: $y'=3x^2-10x+3$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=3\end{array}\right.$.

Bước 3: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bước 4: Kết luận:

Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup \left(3;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Bài tập bổ sung

Câu 2*. [Nhận biết] – [#11].

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = 3\sin\left(5 - 2x\right)$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $D = \left[-3;3\right]$.

Bước 2: Đạo hàm: $y' = -6\cos\left(5 - 2x\right)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{10 - \pi - k2\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Bước 3: Bảng biến thiên:

x	...	$\frac{10-3\pi}{4}$		$\frac{10-\pi}{4}$		$\frac{10+\pi}{4}$		...
$f'(x)$	... $-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	...

Bước 4: Kết luận:

Hàm số $y=3\sin\left(5-2x\right)$ đồng biến trên họ các khoảng $\left(\frac{10-3\pi}{4}+k\pi;\frac{10-\pi}{4}+k\pi\right)$ và nghịch biến trên họ các khoảng $\left(\frac{10-3}{4}+k\pi;\frac{10+\pi}{4}+k\pi\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 2. [Nhận biết] – [#12].**

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Bước 2: Đạo hàm: $y'=\frac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Bước 3: Nhận xét:

Do hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ có đạo hàm âm trên tập xác định, nên hàm số nghịch biến trên tập xác định đó.

Bước 4: Kết luận:

Hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ nghịch biến trên các khoảng rời nhau $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 3. [Nhận biết] – [#13].

Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f\left(x\right)=-x^4+2x^2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $\left[0;1\right]$. **B.** $\left(-\infty;-1\right]$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Bài tập bổ sung

Câu 3*. [Nhận biết] – [#14].

Hàm số $y=-x^3+3x-4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 3. [Nhận biết] – [#15].**

Hàm số $y=x^{2022}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 3*. [Nhận biết] – [#16].**

Hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** Không có khoảng nào trong các khoảng trên.

Câu 4. [Nhận biết] – [#17].

Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=-x^4+3x^2-2x+1$. **B.** $y=\frac{x+1}{2x-2}$.

C. $y=-x^3+x^2-2x+1$. **D.** $y=x^3+3$.

Bài tập bổ sung:

Câu 4*. [Nhận biết] – [#18].

Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\log\left(x^3\right)$. **B.** $y=\log_3 x^2$. **C.** $y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$.

Câu 4. [Nhận biết] – [#19].**

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $y=\frac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\frac{2x+1}{x-3}$. **C.** $y=\frac{x-2}{2x-1}$. **D.** $y=\frac{x-3}{x-2}$.

Câu 4*. [Nhận biết] – [#20].**

Cho các hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$; $h(x)=x^4+3x^2+1$; $k(x)=x^3+3x+1$, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4**. [Nhận biết] – [#21].**

Cho các hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$; $g(x)=2^{x^2+1}$; $h(x)=\log_2 x^3$; $k(x)=x^{\frac{3}{2}}$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5. [Nhận biết] – [#22].

Cho hàm số $y=\log_2\left(2x^2-x-1\right)$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Bài tập bổ sung:

Câu 5*. [Nhận biết] – [#23].

Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 5. [Nhận biết] – [#24].**

Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 5*. [Nhận biết] – [#25].**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^2-5x+4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Câu 5**. [Nhận biết] – [#26].**

Cho hàm số $y=3x^5-5x^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 6. [Thông hiểu] – [#27].

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^4-4x^3+mx^2-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m\le\frac{9}{4}$. **B.** $m\le-\frac{9}{2}$. **C.** $m\ge-\frac{9}{2}$. **D.** $m\le-\frac{9}{4}$.

Bài tập tự luyện

Câu 6*. [Thông hiểu] – [#28].

Để hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-1)x^3+(m+1)x^2+3x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì tất cả giá trị thực của tham số m là:

A. $-1<m\le 2$. **B.** $-1\le m\le 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m<-1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$.

Câu 6. [Thông hiểu] – [#29].**

Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-m}$, m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số nghịch biến trên

khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$?

A. $\frac{1}{2}<m\le 1$. **B.** $m>\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge\frac{1}{2}$.

Câu 6*. [Thông hiểu] – [#30].**

Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m\ge-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$.

C. $-\frac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$. **D.** $m>-\frac{1}{2}$.

Câu 6**. [Thông hiểu] – [#31].**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1;1)$ hàm số $y=\frac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến.

A. $-4<m<3$. **B.** $\left[\begin{array}{l}-4\le m<-3\\1<m\le 3\end{array}\right.$. **C.** $1\le m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-4<m\le -3\\1\le m<3\end{array}\right.$.

Câu 7. [Vận dụng] – [#32].

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^2+mx+\frac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le 5$. **B.** $m\le -5$. **C.** $m\ge 5$. **D.** $m\ge -5$.

Bài tập tự luyện

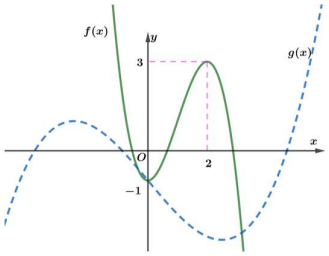
Câu 7*. [Vận dụng] – [#33].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2(2x+m+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7*. [Vận dụng] – [#34].

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=-f(mx+n),(m,n\in\mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5. **B.** $-\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{16}{5}$. **D.** 4.

Câu 7. [Vận dụng] – [#35].**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

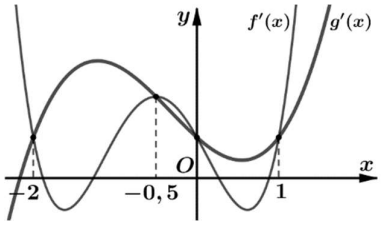
Câu 7*. [Vận dụng] – [#36].**

Cho hàm số $y=\left(\frac{2018}{2019}\right)^{-e^{5x}+(m+3)e^x+2}$. Biết rằng với mọi $m\le a.e^b+c, \left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;5)$. Giá trị của $S=a+b+c$ là?

A. $S=7$. **B.** $S=9$. **C.** $S=8$. **D.** $S=10$.

Câu 7**. [Vận dụng] – [#37].**

Cho hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm (đồ thị $y=g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ bên dưới đây.



Hàm số $h(x)=f(x-1)-g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 8. [Vận dụng] – [#38].

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+2018$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $[1;+\infty)$.

Bài tập bổ sung:

Câu 8*. [Vận dụng] – [#39].

Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu khác với tính đơn điệu của các hàm số còn lại?

A. $h\left(x\right)=x^3+x-\sin x$.

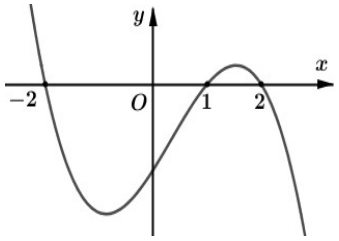
B. $k\left(x\right)=2x+1$.

C. $g\left(x\right)=x^3-6x^2+15x+3$.

D. $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2-2x+5}{x+1}$.

Câu 8. [Vận dụng] – [#40].**

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới và $f\left(-2\right)=f\left(2\right)=0$.



Hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(3-x\right)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-2;-1\right)$.

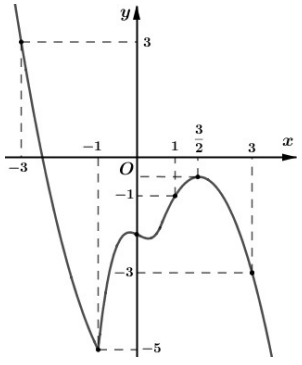
B. $\left(1;2\right)$.

C. $\left(2;5\right)$.

D. $\left(5;+\infty\right)$.

Câu 8*. [Vận dụng] – [#41].**

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $\left(-3;1\right)$.

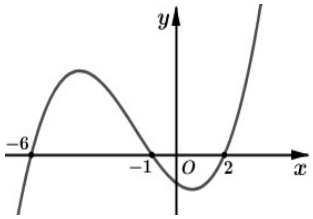
B. $\left(-2;0\right)$.

C. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

D. $\left(1;3\right)$.

Câu 8**. [Vận dụng] – [#42].**

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

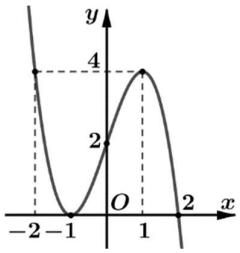


Hỏi hàm số $g(x)=f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 9. [Vận dụng cao] – [#43].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-1)+\dfrac{480}{m(x^2+x+2)}$ nghịch biến trên $(0;1)$?

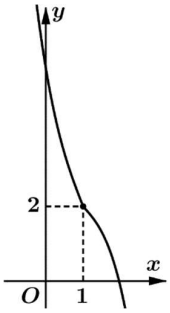


A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Bài tập bổ sung:

Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#44].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên. Xét hàm số $h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)]^2-2xf(x)+2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

B. Hàm số $y=h(x)$ không có cực trị.

C. Đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

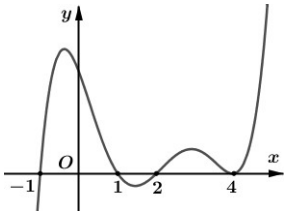
Câu 9. [Vận dụng cao] – [#45].**

Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=3x.f(x)+(m-1)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\geq\frac{10}{3}$. **C.** $m\leq 1$. **D.** $m>1$.

Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#46].**

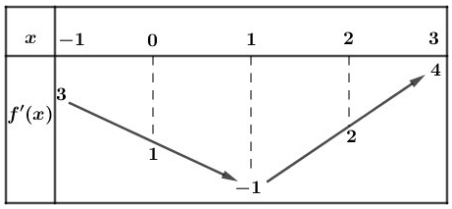
Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(0;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 9**. [Vận dụng cao] – [#47].**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ như hình



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 10. [Vận dụng cao] – [#48].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

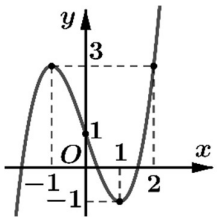
Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#49].

Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2(x^2-1)>1-m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

A. $m>1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m>\frac{5}{4}$. **D.** $m\ge\frac{5}{4}$.

Câu 10. [Vận dụng cao] – [#50].**

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(2x^3+x-1)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x)=-10$.

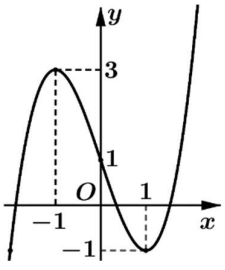


A. $m=-13$. **B.** $m=-12$.

C. $m=-1$. **D.** $m=3$.

Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#51].**

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $f(-1)=1,\ f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>2$. **B.** $m\ge 2$.

C. $m>3$. **D.** $m\ge 3$.

Câu 10**. [Vận dụng cao] – [#52].**

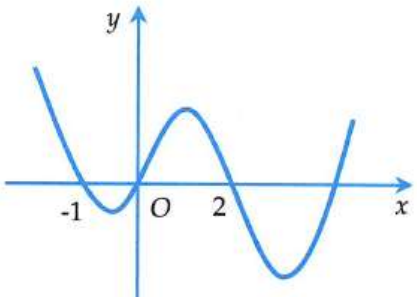
Cho bất phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;6]$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

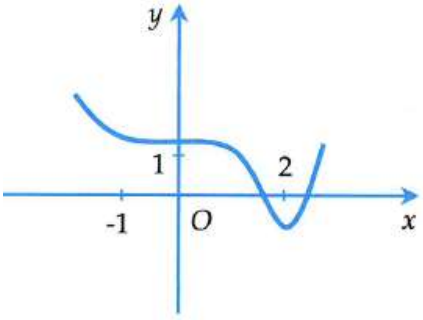
Câu 10***. [Vận dụng cao] – [#53].**

Một trong các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0)=0$ và $f''(x)<0,\forall x\in(-1;2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?

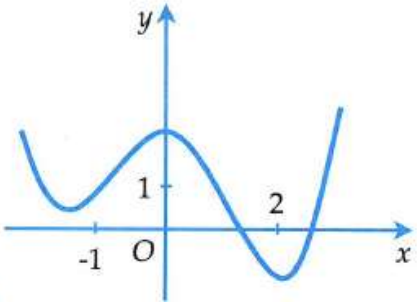
A.



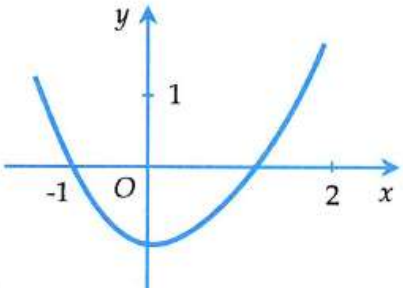
B.



C.



D.



Câu 10****. [Vận dụng cao] – [#54].**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 3.

Nguyễn Thành Nhân – Chuyên luyện thi Đại học
Facebook: Nguyễn Thành Nhân
Liên hệ: 0961.9779.73 – Email: ntnhan_21to@student.agu.edu.vn

Lời giải chi tiết bài tập tự luận

Câu 1. [Nhận biết] – [#5].

Hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-21x+\frac{2021}{2022}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-7;3)$. **C.** $(-3;7)$. **D.** $(-\infty;-7)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-21x+\frac{2021}{2022}$, ta có: $y'=x^2+4x-21$.

Để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+2x^2-21x+\frac{2021}{2022}$ nghịch biến thì $y'<0$.

Hay $x^2+4x-21<0\Leftrightarrow -7<x<3$.

Đáp án B.

Cách 2: Sử dụng TABLE (MENU 8) để khảo sát

Nhận thấy, nếu ta cho Begin là -10 và End 10 thì ta có thể xét tính đúng sai của cả bốn phương án.

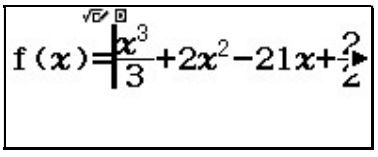
Khi đó: STEP của chúng ta được tính bởi công thức $\frac{\text{End}-\text{Begin}+1}{45}=\frac{10-(-10)+1}{45}$.

Ta thực hiện nhập hàm số và khai báo các thông tin cần thiết, cụ thể theo các bước:

Bước 1: Khai báo hàm.

MENU 8 x x^3 3 ▶ ▶ 3 ▶ + 2 x x^2

− 2 1 x + x 2 0 2 1 ▶ 2 0 2 2

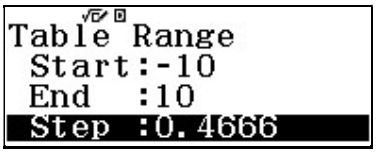


Bước 2: Khai báo Begin, End, Step.

= − 1 0

= 1 0 =

(1 0 − (− 1 0) + 1) ÷ 4 5 =



Bước 3:

Thấy trên khoảng $(-10;-7)$, các giá trị tương ứng của x đều tăng dần.

Ta loại được phương án **A** và **D**.

Mặt khác, ta cũng thấy trên khoảng $(-3;10)$, các giá trị tương ứng của x đều tăng dần.

Nên phương án **C** cũng được loại.

Cách 3: Sử dụng đạo hàm tại một điểm

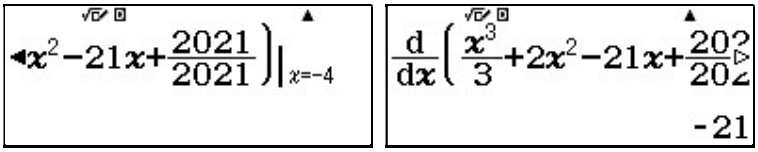
Ta sẽ xét ba phương án **B**, **C**, **D** trước, nếu cả ba đều đúng thì ta sẽ chọn phương án **A**, hoặc cũng từ đó mà suy ra được **A** là phương án bị loại nếu một trong ba phương án trên sai.

Ta sẽ đạo hàm tại các điểm $x=-4$ và $x=6$ là đã có thể loại được hết các phương án sai.

Đạo hàm tại điểm $x=-4$:

SHIFT ∫ ▭ x $x^{\square}$ 3 ▶ ▶ 3 ▶ + 2 x x^2 − 2

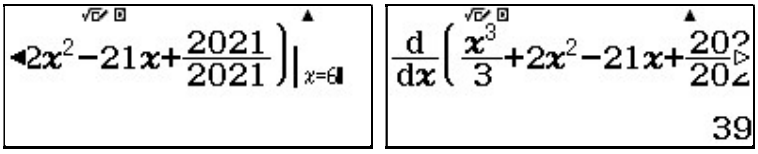
1 x + ▭ 2 0 2 1 ▶ 2 0 2 2 ▶ ▶ − 4



Đạo hàm tại điểm $x=6$:

SHIFT ∫ ▭ x $x^{\square}$ 3 ▶ ▶ 3 ▶ + 2 x x^2 − 2

1 x + ▭ 2 0 2 1 ▶ 2 0 2 2 ▶ ▶ − 6



Dễ thấy, tại điểm $x=6$ thì $y'>0$ nên hàm số không thể nghịch biến hoàn toàn ở khoảng chứa điểm $x=6$.

Loại các phương án **A**, **C**, **D**.

Bài tập bổ sung

Câu 1*. [Nhận biết] – [#6].

Hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+2022$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây? Chọn đáp án đúng nhất.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+2022$, ta có: $y'=-3x^2-6x+9$.

Để hàm số $y=-x^3-3x^2+9x+2022$ nghịch biến thì $y'<0$.

Hay $-3x^2-6x+9<0\Leftrightarrow -3<x<1$.

Đáp án C.

Cách 2: Sử dụng TABLE (MENU 8) để khảo sát

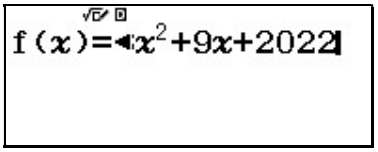
Nhận thấy, nếu ta cho Begin là -10 và End 10 thì ta có thể xét tính đúng sai của cả bốn phương án.

Khi đó: STEP của chúng ta được tính bởi công thức $\frac{\text{End}-\text{Begin}+1}{45}=\frac{10-(-10)+1}{45}$.

Ta thực hiện nhập hàm số và khai báo các thông tin cần thiết, cụ thể theo các bước:

Bước 1: Khai báo hàm.

MENU 8 (−) x x^n 3 ▶ (−) 3 x x^2 + 9 x + 2 0 2 2

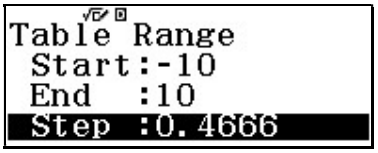


Bước 2: Khai báo Begin, End, Step.

=(−)1 0

=1 0=

(1 0 − (− 1 0) + 1) ÷ 4 5 =



Bước 3:

Thấy trên khoảng $(-10;-3)$, các giá trị tương ứng của x đều giảm dần.

Ta loại được phương án **A** và **D**.

Mặt khác, ta cũng thấy trên khoảng $(1;2)$, các giá trị tương ứng của x đều giảm dần.

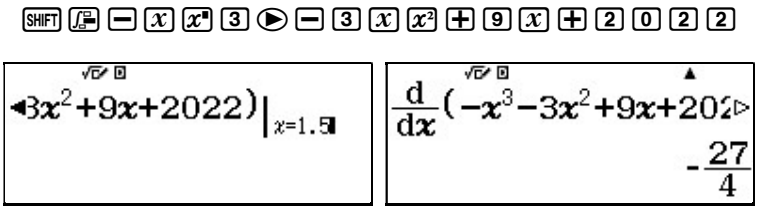
Nên phương án **B** cũng được loại.

Đáp án C.

Cách 3: Sử dụng đạo hàm tại một điểm

Ta sẽ đạo hàm tại điểm $x=1,5$ là đã có thể loại được hết các phương án sai.

Đạo hàm tại điểm $x=1,5$:



Dễ thấy, tại điểm $x=1,5$ thì $y'<0$ nên hàm số không thể đồng biến hoàn toàn ở khoảng chứa điểm $x=1,5$.

Loại phương án **A**, **B**, **D**.

Chọn C.

Câu 1. [Nhận biết] – [#7].**

Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=2x^3-6x-2022$.

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $y=2x^3-6x-2022$, ta có: $y'=6x^2-6$.

Để hàm số $y=2x^3-6x-2022$ nghịch biến thì $y'<0$.

Hay $6x^2-6<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Đáp án B.

Cách 2: Sử dụng TABLE (MENU 8) để khảo sát

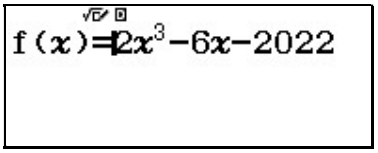
Nhận thấy, nếu ta cho Begin là -3 và End 2 thì ta có thể xét tính đúng sai của cả bốn phương án.

Khi đó: STEP của chúng ta được tính bởi công thức $\frac{\text{End}-\text{Begin}+1}{45}=\frac{2-(-3)+1}{45}$.

Ta thực hiện nhập hàm số và khai báo các thông tin cần thiết, cụ thể theo các bước:

Bước 1: Khai báo hàm.

MENU 8 2 x x^n 3 ▶ − 6 x − 2 0 2 2



Bước 2: Khai báo Begin, End, Step.

= − 3 =

= 2 =

(2 − (− 3) + 1) ÷ 4 5 =



Bước 3:

Thấy trên khoảng $(-3;-1)$, các giá trị tương ứng của x đều tăng dần.

Ta loại được phương án **D**.

Mặt khác, ta cũng thấy trên khoảng $(1;2)$, các giá trị tương ứng của x đều tăng dần.

Nên phương án **A** cũng được loại.

Còn hai đáp án **B** và **C**. Để ý $(0;1)\subset(-1;1)$ nên nếu đáp án **B** đúng thì hiển nhiên **C** đúng, và đáp án cần chọn là **B**.

Thật vậy! Để ý, trên khoảng $(-1;1)$, các giá trị tương ứng của x đều giảm dần.

Đáp án B.

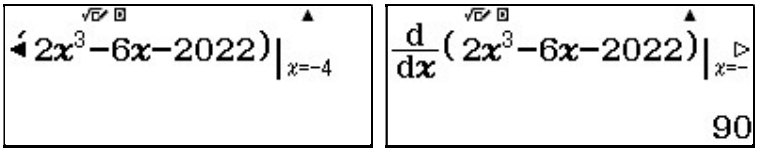
Cách 3: Sử dụng đạo hàm tại một điểm

Ta sẽ đạo hàm tại các điểm $x=-4;\ x=-0,5;\ x=0,5$ và $x=1,5$ là đã có thể loại được hết các phương án sai.

Đạo hàm tại điểm $x=-4$:

SHIFT ∫ 2 x $x^{\square}$ 3 ▶ − 6

x − 2 0 2 2 ▶ ▶ − 4

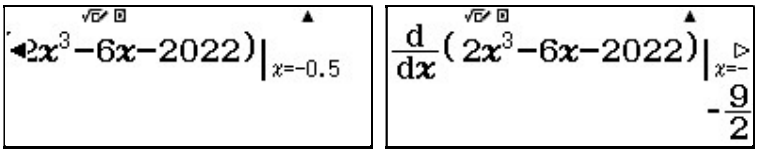


Ta dễ dàng có thể loại được phương án **D**.

Đạo hàm tại điểm $x=-0,5$:

SHIFT ∫ MENU 8 2 x $x^{\square}$ 3 ▶ − 6

x − 2 0 2 2 ▶ ▶ − 0 · 5

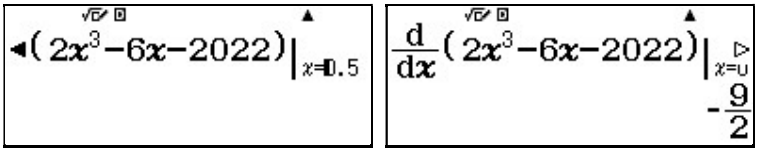


Ta hoàn toàn đủ căn cứ để "nghi ngờ" rằng đáp án đúng là đáp án **B**.

Đạo hàm tại điểm $x=0,5$:

SHIFT ∫ MENU 8 2 x $x^{\square}$ 3 ▶ −

6 x − 2 0 2 2 ▶ ▶ 0 · 5

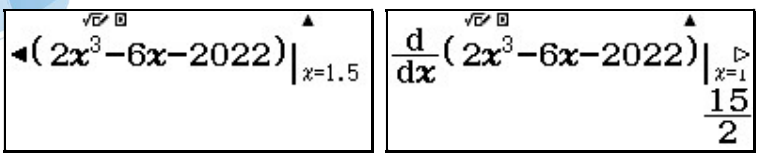


Đáp án này chứng tỏ rằng đáp án **B** có thêm khả năng chính xác rất cao, mặc dù đáp án **C** vẫn đúng. Ta có thể chọn ngay **B** nếu đáp án **A** là đáp án sai. Hoặc sẽ thử thêm một điểm thuộc khoảng $(-1;0)$ để xem xét.

Đạo hàm tại điểm $x=1,5$:

SHIFT ∫ MENU 8 2 x $x^{\square}$ 3 ▶ −

6 x − 2 0 2 2 ▶ ▶ 1 · 5



Dễ thấy, tại điểm $x=1,5$ thì $y'>0$ nên hàm số không thể nghịch biến hoàn toàn ở khoảng chứa điểm $x=1,5$.

Loại phương án **A**.

Chọn B.

Lưu ý: Đối với những bài khoảng lồng khoảng thế này, ta có thể "bẫy" học sinh chẳng hạn như:

Câu 1. [Nhận biết] – [#7*].**

Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y=2x^3-6x-2022$.

A. $(0;2)$. **B.** $\left(-\frac{21}{20};1\right)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Dễ thấy trong một khoảng nhỏ $\left(-\frac{21}{20};-1\right)$ của phương án **B**, hàm số lại đồng biến nên phương án **B** là một **phương án sai** do vậy đáp án cần tìm chính là **C**.

Câu 1*. [Nhận biết] – [#8].**

Khoảng đồng biến của hàm số $y=-x^3+4x^2-5x-5$ là khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{5}{3}\right)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $y=-x^3+4x^2-5x-5$, ta có: $y'=-3x^2+8x-5$.

Để hàm số $y=-x^3+4x^2-5x-5$ đồng biến thì $y'>0$.

Hay $-3x^2+8x-5>0\Leftrightarrow 1<x<\frac{5}{3}$.

Đáp án A.

Cách 2: Sử dụng TABLE (MENU 8) để khảo sát

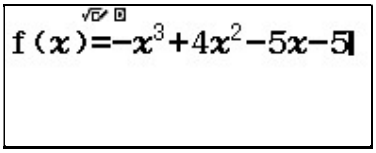
Nhận thấy, nếu ta cho Begin là -10 và End 10 thì ta có thể xét tính đúng sai của cả bốn phương án.

Khi đó: STEP của chúng ta được tính bởi công thức $\frac{\text{End}-\text{Begin}+1}{45}=\frac{10-(-10)+1}{45}$.

Ta thực hiện nhập hàm số và khai báo các thông tin cần thiết, cụ thể theo các bước:

Bước 1: Khai báo hàm.

MENU 8 (−) x $x^{\square}$ 3 ▶ + 4 x x^2 − 5 x − 5

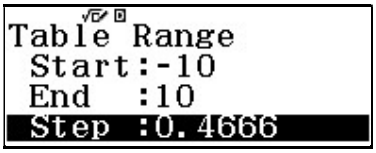


Bước 2: Khai báo Begin, End, Step.

= (−) 1 0

= 1 0 =

(1 0 − (− 1 0) + 1) ÷ 4 5 =



Bước 3:

Thấy trên khoảng $(-10;1)$, các giá trị tương ứng của x đều giảm dần.

Ta loại được phương án **B** và **D**.

Mặt khác, ta cũng thấy trên khoảng $\left(\frac{5}{3};10\right)$, các giá trị tương ứng của x đều giảm dần.

Nên phương án **C** cũng được loại.

Đáp án A.

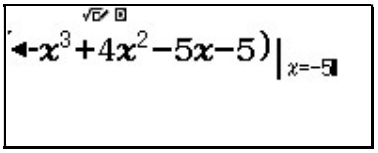
Cách 3: Sử dụng đạo hàm tại một điểm

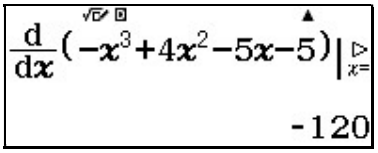
Ta sẽ đạo hàm tại các điểm $x=-5;\ x=0$ và $x=5$ là đã có thể loại được hết các phương án sai.

Đạo hàm tại điểm $x=-5$:

SHIFT ∫ (−) x x³ 3 ▶ (+) 4 x

x² (−) 5 x (−) 5 ▶ ▶ (−) 5



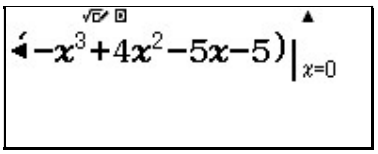


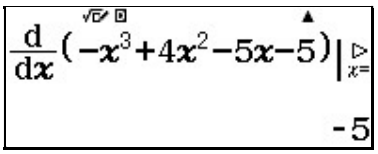
Ta dễ dàng có thể loại được phương án **D**.

Đạo hàm tại điểm $x=0$:

SHIFT ∫ (−) x x³ 3 ▶ (+) 4

x x² (−) 5 x (−) 5 ▶ ▶ 0



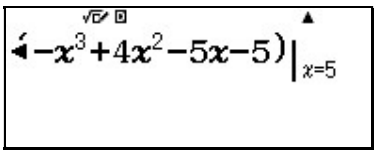


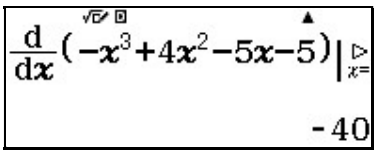
Ta dễ dàng có thể loại được phương án **B**.

Đạo hàm tại điểm $x=5$:

SHIFT ∫ MENU 8 2 x x³ 3 ▶

(−) 6 x (−) 2 0 2 2 ▶ ▶ 5





Ta dễ dàng có thể loại được phương án **C**.

Chọn A.

Câu 1**. [Nhận biết] – [#9].**

Hàm số $y=2x+\ln x-x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$. **C.** $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$. **D.** $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $y=2x+\ln x-x^2$, có TXĐ: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = 2 + \frac{1}{x} - 2x = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{x}$.

Để hàm số $y = 2x + \ln x - x^2$ đồng biến thì $y' > 0$.

Hay $\frac{-2x^2 + 2x + 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện, ta suy ra $0 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án A.

Cách 2: Phương án loại trừ:

Dễ dàng loại được các phương án **B**, **D** do giả thiết (đồng biến trên **khoảng**).

Dựa vào điều kiện $x > 0$ (hoặc tập xác định), ta dễ dàng loại được thêm phương án **C**.

Đáp án A.

Nhận xét: Đối với những bài toán có thể sử dụng logic để loại suy, thì ta không nên quá khuôn sáo đi theo các phương pháp truyền thống.

Câu 2. [Nhận biết] – [#10].

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bước 2: Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 10x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \end{cases}$.

Bước 3: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bước 4: Kết luận:

Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(3; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Lời giải

Nhận thấy, từ **Bước 1** bạn học sinh ấy đã làm sai.

Chúng ta cần phân biệt được đâu là điều kiện xác định và đâu là tập xác định vì điều kiện rất khác với tập hợp[1]. Ta sẽ chỉnh lại thế này: "Điều kiện xác định của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ là: $D = \mathbb{R}$" sẽ hợp lý hơn.

Nên đáp án cần chọn là đáp án **A**.

Tuy nhiên, nếu để ý kĩ, ta có thể phát hiện thêm một lỗi sai như đã trình bài ở **[#1]** cụ thể là lỗi kết luận nghịch biến trên một phép toán của tập hợp.

Do đó **Bước 4** cũng là một bước sai. Tuy nhiên, để thỏa mãn yêu cầu đề bài đặt ra (từ bước nào), đáp án của ta chính là đáp án **A**.

Đáp án A.

Bài tập bổ sung

Câu 2*. [Nhận biết] – [#11].

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = 3\sin\left(5 - 2x\right)$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $D = \left[-3;3\right]$.

Bước 2: Đạo hàm: $y' = -6\cos\left(5 - 2x\right)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{10 - \pi - k2\pi}{4}, \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Bước 3: Bảng biến thiên:

x	…	$\frac{10-3\pi}{4}$		$\frac{10-\pi}{4}$		$\frac{10+\pi}{4}$		…
$f'(x)$	…	−	0	+	0	−	0	+ …

Bước 4: Kết luận:

[1] Tham khảo thêm về tập hợp: https://vi.wikipedia.org/wiki/T%E1%BA%ADp_h%E1%BB%A3p_(to%C3%A1n_h%E1%BB%8Dc)

Hàm số $y=3\sin\left(5-2x\right)$ đồng biến trên họ các khoảng $\left(\frac{10-3\pi}{4}+k\pi;\frac{10-\pi}{4}+k\pi\right)$ và nghịch biến trên họ các khoảng $\left(\frac{10-3}{4}+k\pi;\frac{10+\pi}{4}+k\pi\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Lời giải

Lời giải sai ở **Bước 1** vì đó là tập giá trị $T=\left[-3;3\right]$ chứ không là tập xác định. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Đáp án A.

Câu 2. [Nhận biết] – [#12].**

Một học sinh khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ như sau:

Bước 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Bước 2: Đạo hàm: $y'=\frac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Bước 3: Nhận xét:

Do hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ có đạo hàm âm trên tập xác định, nên hàm số nghịch biến trên tập xác định đó.

Bước 4: Kết luận:

Hàm số $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ nghịch biến trên các khoảng rời nhau $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

Học sinh trên đã giải sai từ bước nào trong các bước trên?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Lời giải

Lời giải trên sai từ **Bước 3** vì ta biết rằng, tập xác định của hàm số hoặc là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ hoặc là $D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Nên nếu kết luận ở **Bước 3** là chính xác thì ta thừa nhận lỗi sai ở câu **[#1]** là đúng. Điều đó dẫn đến mâu thuẫn.

Lưu ý: Hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định hoặc một số tập (không chứa phép toán trên tập hợp).

Câu 3. [Nhận biết] – [#13].

Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f\left(x\right)=-x^4+2x^2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $\left[0;1\right]$. **B.** $\left(-\infty;-1\right]$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Cách 1: Khảo sát hàm số

Ta khảo sát và vẽ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)=-x^4+2x^2$ để có căn cứ kết luận.

Ta có: $f'\left(x\right)=-4x^3+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Dựa vào kênh chữ của đề bài, ta cần chọn một **khoảng**, do đó đáp án **A** – đoạn và đáp án **B** – nữa khoảng (nữa đoạn) được loại bỏ đầu tiên.

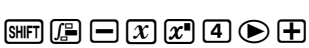
Dựa vào bảng biến thiên của đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm tại một điểm

Nhận xét: Đề bài yêu cầu ta chọn ra một **"khoảng"** đồng biến. Do đó, trên phương diện loại trừ từ các phương án, ta dễ dàng loại đi nữa khoảng và đoạn ở câu **A** và **B**.

Vì tập hợp ở câu **D** là con của tập hợp ở câu **C**. Thế nên ta chỉ cần tìm đạo hàm tại một điểm bất kỳ thuộc tập hợp ở câu **C** nhưng nằm ngoài tập hợp ở câu **D** để có thể loại được phương án sai. Như tại điểm $x=-0.5$ chẳng hạn.

Đạo hàm tại điểm $x=-0.5$:



2 x x² ▶ − 0 · 5 =

$\frac{d}{dx}(-x^4+2x^2)\big|_{x=-0.5}$

$-\frac{3}{2}$

Do vậy ta hoàn toàn loại được phương án **C** vì khoảng này chứa điểm mà đạo hàm tại đó âm (mâu thuẫn với giả thiết đồng biến).

Đáp án D.

Bài tập bổ sung

Câu 3*. [Nhận biết] – [#14].

Hàm số $y=-x^3+3x-4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1: Khảo sát hàm số

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+3, y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x=-1 \end{bmatrix}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên $(-1;1)$.

Cách 2: Dùng đạo hàm tại một điểm

Dựa vào tương quan của các phương án, ta có thể xét đạo hàm của hàm số tại ba điểm $x=-2$, $x=0$, $x=2$ để có thể đưa ra phương án loại trừ hợp lý.

Đạo hàm tại điểm $x=-2$:

SHIFT ∫ − x x³ 3 ▶ +

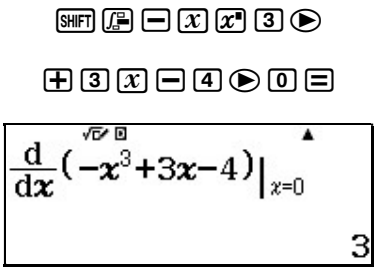
3 x − 4 ▶ − 2 =

$\frac{d}{dx}(-x^3+3x-4)\big|_{x=-2}$

-9

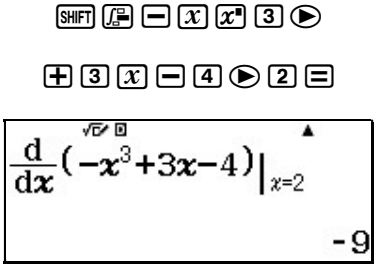
Do vậy ta hoàn toàn loại được phương án **A**, **D** vì khoảng này chứa điểm mà đạo hàm tại đó âm (mâu thuẫn với giả thiết đồng biến).

Đạo hàm tại điểm $x=0$:



Do vậy ta có thể dự đoán rằng đáp án **C** có thể đúng.

Đạo hàm tại điểm $x=2$:



Do vậy ta hoàn toàn loại được phương án **B**, **D** vì khoảng này chứa điểm mà đạo hàm tại đó âm (mâu thuẫn với giả thiết đồng biến).

Đáp án C.

Câu 3. [Nhận biết] – [#15].**

Hàm số $y=x^{2022}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Cách 1: Khảo sát hàm số

Ta có: $y'=2022x^{2021}$.

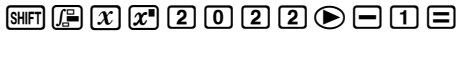
Với $x<0$ thì $y'<0$; với $x>0$ thì $y'>0$.

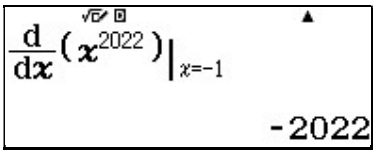
Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Cách 2: Dùng đạo hàm tại một điểm

Dựa vào tương quan của các phương án, ta có thể xét đạo hàm của hàm số tại ba điểm $x=0.4,\ x=-1,\ x=2$ để có thể đưa ra phương án loại trừ hợp lý.

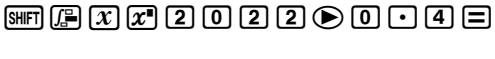
Đạo hàm tại điểm $x=-1$:

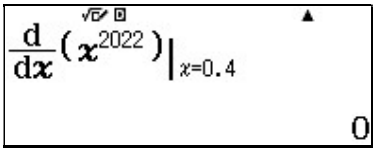




Khi đó phương án **B** được giữ lại và xem xét tiếp tục.

Đạo hàm tại điểm $x=0.4$:

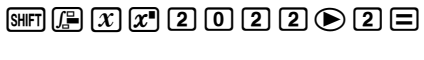


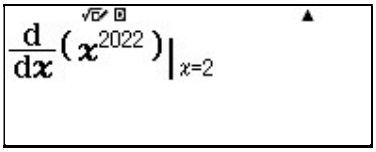


Ở đây ta hoàn toàn không phụ thuộc vào CASIO được vì giá trị đạo hàm tại $x=0.4$ quá nhỏ để hiện đúng giá trị. Và đây sẽ có thể là một trong những cách chống lại CASIO trong những năm sắp tới. Giải thích thêm: Do ta có: $y=x^{2022}\Rightarrow y'=2022x^{2021}\Rightarrow y'(0.4)=y'\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2^{2021}\sqrt{2022}}{5}\right)^{2021}<<0$ là một lượng rất gần 0.

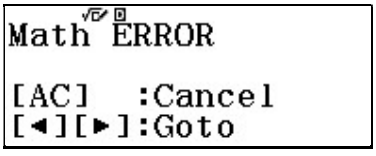
Do vậy ta hoàn toàn loại được phương án **A**, **D** vì khoảng này chứa điểm mà đạo hàm tại đó dương (mâu thuẫn với giả thiết nghịch biến).

Đạo hàm tại điểm $x=0.4$:





Máy tính hiện **Math Error** vì giá trị quá lớn để máy tính có thể thể hiện đúng giá trị trong khuôn khổ của nó. Lúc đó máy tính có dạng sau:



Và đây sẽ có thể là một trong những cách chống lại CASIO trong những năm sắp tới. Giải thích thêm: Do ta có: $y=x^{2022}\Rightarrow y'=2022x^{2021}\Rightarrow y'(2)=2022.2^{2021}>>CASIO\ CAPACITY$. Nhưng bằng cách tự luận, ta có thể suy ra giá trị đạo hàm tại điểm $x=2$ là dương.

Do vậy ta hoàn toàn loại được phương án **C** vì khoảng này chứa điểm mà đạo hàm tại đó dương (mâu thuẫn với giả thiết nghịch biến).

Đáp án B.

Câu 3*. [Nhận biết] – [#16].**

Hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** Không có khoảng nào trong các khoảng trên.

Lời giải

Cách 1: Khảo sát hàm số

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\neq 1$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Cách 2: Suy luận & Loại trừ phương án

Dễ thấy ĐKXĐ của bài toán là mấu chốt để loại trừ cách phương án. Cụ thể là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Do đó phương án **A**, **B**, **C** đều bị loại vì các khoảng đó hàm số không liên tục.

Đáp án D.

Câu 4. [Nhận biết] – [#17].

Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=-x^4+3x^2-2x+1$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$.

C. $y=-x^3+x^2-2x+1$. **D.** $y=x^3+3$.

Lời giải

Loại **A** và **B** vì hàm bậc bốn và hàm bậc nhất trên bậc nhất không bao giờ đơn điệu trên $(-\infty;+\infty)$.

Xét hàm $y=-x^3+x^2-2x+1$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+2x-2=-3\left[\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}\right]<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Xét hàm: $y=x^3+3$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2\geq 0$; suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Đáp án C.

> **Study Tip 1**
>
> Hàm số bậc bốn không bao giờ đơn điệu nghiêm ngặt (luôn tăng hoặc luôn giảm) trên toàn tập số thực $\mathbb{R}$.

Chứng minh:

Giả sử ta xét một hàm số bậc bốn tổng quát có dạng: $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\left(a\neq 0\right)$.

Khi đó: $y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Trường hợp 1: $a>0$.

Khi đó: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}y'<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}y'>0\end{cases}\Rightarrow\exists x_0\in\left(-\infty;+\infty\right)\Big|y'\left(x_0\right)=0$ và $x=x_0$ là một nghiệm[2] bội lẻ (do nếu tồn tại một nghiệm bội 2 $x=x_0'$ nào đó thì ta luôn tìm được một nghiệm đơn $x=x_0$ thỏa mãn $x_0\neq x_0'$[3]).

Khi đó $x=x_0$ là một trong số cách cực trị **phải có** của đồ thị hàm số bậc bốn. Như vậy, qua $x=x_0$ đồ thị hàm số sẽ thay đổi tính đơn điệu (tăng → giảm hoặc giảm → tăng).

Trường hợp 2: $a<0$.

Khi đó: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}y'>0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}y'<0\end{cases}\Rightarrow\exists x_0\in\left(-\infty;+\infty\right)\Big|y'\left(x_0\right)=0$ và $x=x_0$ là một nghiệm bội lẻ (do nếu tồn tại một nghiệm bội 2 $x=x_0'$ nào đó thì ta luôn tìm được một nghiệm đơn $x=x_0$ thỏa mãn $x_0\neq x_0'$).

Khi đó $x=x_0$ là một trong số cách cực trị **phải có** của đồ thị hàm số bậc bốn. Như vậy, qua $x=x_0$ đồ thị hàm số sẽ thay đổi tính đơn điệu (tăng → giảm hoặc giảm → tăng).

[2] Xem thêm **Định lý Bolzano – Cauchy**:
https://vi.wikipedia.org/wiki/%C4%90%E1%BB%8Bnh_l%C3%BD_Bolzano
[3] Dùng tính chất của đồ thị hoặc dùng **Lược đồ Horner** để giải quyết:
https://vi.wikipedia.org/wiki/L%C6%B0%E1%BB%A3c_%C4%91%E1%BB%93_Horner

Bài tập bổ sung:

Câu 4*. [Nhận biết] – [#18].

Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\log\left(x^3\right)$. **B.** $y=\log_3 x^2$. **C.** $y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$.

Lời giải

Hàm số $y=\log\left(x^3\right)$ có tập xác định là $D=\left(0;+\infty\right)$.

Hàm số $y=\log_3\left(x^2\right)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Do đó hai hàm số đó không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$ được.

Loại **A**, **B**.

Mặt khác hàm số $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ là hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ nhưng có cơ số $\frac{5}{2}>1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Loại **D**.

Hàm số $y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$ là hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và có cơ số $\frac{e}{4}<1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án C.

Câu 4. [Nhận biết] – [#19].**

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $y=\frac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\frac{2x+1}{x-3}$. **C.** $y=\frac{x-2}{2x-1}$. **D.** $y=\frac{x-3}{x-2}$.

Lời giải

+ Xét hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có: $y'=\frac{2}{\left(x+1\right)^2}>0,\ \forall x\neq -1$.

Do đó hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

+ Xét hàm số $y=\frac{2x+1}{x-3}$ có $y'=\frac{-7}{\left(x-3\right)^2}<0\ \ \forall x\neq 3$.

Do đó hàm số $y=\frac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Ta chọn đáp án B.

+ Xét hàm số $y=\frac{x-2}{2x-1}$ có: $y'=\frac{3}{\left(2x-1\right)^2}>0,\ \forall x\neq \frac{1}{2}$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

+ Xét hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}$ có: $y'=\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}>0,\ \forall x\neq 2$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Đáp án B.

Câu 4*. [Nhận biết] – [#20].**

Cho các hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1};\ g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+2};\ h\left(x\right)=x^4+3x^2+1;\ k\left(x\right)=x^3+3x+1$, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

+ Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

+ Hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định nhưng không đồng biến trên tập xác định.

+ Hàm số $h\left(x\right)=x^4+3x^2+1$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $k\left(x\right)=x^3+3x+1$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Vậy có duy nhất hàm số $k\left(x\right)=x^3+3x+1$ trong 4 hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án B.

> **Quick Note 1**
>
> Tập xác định và khoảng (từng khoảng) xác định là hai khái niệm hoàn toàn khác nhau. Để làm tốt dạng bài tập này ta cần phân biệt được sự khác nhau bản chất nhất giữa chúng. Một ví dụ dễ hình dung nhất là khi ta xét hàm số bậc nhất trên bậc nhất (hàm nhất biến), ta luôn kết luận rằng: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ (dây là tập xác định) nhưng lại phải kết luận là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên hai khoảng rời nhau là $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$ (hay kết luận ngắn gọn hơn là: hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định). Và đó là điểm mấu chốt của vấn đề.

Câu 4**. [Nhận biết] – [#21].**

Cho các hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x+3};\ g\left(x\right)=2^{x^2+1};\ h\left(x\right)=\log_2 x^3;\ k\left(x\right)=x^{\frac{3}{2}}$.

Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số: $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x+3}$, ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{5}{\left(x+3\right)^2}>0,\forall x\neq -3$.

Nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lưu ý rằng: Hàm số trên chỉ đồng biến trên từng khoảng xác định chứ không đồng biến trên tập xác định. Nên hàm số thứ nhất không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Xét hàm số: $f\left(x\right)=2^{x^2+1}$, ta có: $f'\left(x\right)=2x.2^{x^2+1}.\ln 2$.

Dễ thấy $\forall x<0,\ 2x.2^{x^2+1}.\ln 2<0$, nên hàm số $f\left(x\right)=2^{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. Nên hàm số thứ hai cũng không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Xét hàm số: $f\left(x\right)=\log_2 x^3=3\log_2 x$, có TXĐ: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{3}{x.\ln 2}>0,\ \forall x\in D$.

Do đó hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^{\frac{3}{2}}$, có: TXĐ: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}>0,\ \forall x\in D$.

Do đó hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Kết luận: Có hai trong bốn hàm số trên đồng biến trên tập xác định của nó.

Đáp án C.

Câu 5. [Nhận biết] – [#22].

Cho hàm số $y=\log_2\left(2x^2-x-1\right)$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Ta có: $y'=\frac{4x-1}{\left(2x^2-x-1\right)\ln 2};y'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Khi đó với $x\in\left(1;+\infty\right)\Rightarrow y'>0$ và $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y'<0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$.

Đáp án A.

Bài tập bổ sung:

Câu 5*. [Nhận biết] – [#23].

Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-4x+1$.

Suy ra: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Đáp án B.

Câu 5. [Nhận biết] – [#24].**

Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải

Ta có: $y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-1\\x=0\\x=1\end{bmatrix}$.

Vì là hàm số bậc bốn trùng phương và: $\begin{cases}a=1>0\\ab=-2<0\end{cases}$ nên hàm số có dạng hình chữ W.

Vậy hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và khoảng $(0;1)$.

Và hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-1;0)$ và khoảng $(1;+\infty)$.

Vì: $(2;+\infty)\subset(1;+\infty)$, nên hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Đáp án A.

Câu 5*. [Nhận biết] – [#25].**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=x^2-5x+4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Đáp án A.

Câu 5**. [Nhận biết] – [#26].**

Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$.

Cho $y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right.$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên hai khoảng rời nhau là $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Hiển nhiên, hàm số sẽ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Đáp án D.

Câu 6. [Thông hiểu] – [#27].

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 - 4x^3 + mx^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m \le \frac{9}{4}$. **B.** $m \le -\frac{9}{2}$. **C.** $m \ge -\frac{9}{2}$. **D.** $m \le -\frac{9}{4}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty;0)$.

Ta có: $y' = -4x^3 - 12x^2 + 2mx$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)$ khi $y' \ge 0, \forall x \in (-\infty;0)$.

$\Leftrightarrow -4x^3-12x^2+2mx\ge 0 \Leftrightarrow -2x^2-6x+m\le 0, \forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

$\Leftrightarrow m\le 2x^2+6x, \forall x\in\left(-\infty;0\right)$.

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{\left(-\infty;0\right)} f\left(x\right)$ với $f\left(x\right)=2x^2+6x$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x^2+6x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=4x+6=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{2}$	↗	0	↗	

Dựa vào bảng biến thiên $\min\limits_{\left(-\infty;0\right)} f\left(x\right)=-\dfrac{9}{2}$. Vậy $m\le -\dfrac{9}{2}$.

Đáp án B.

Câu 6*. [Thông hiểu] – [#28].

Để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\left(m^2-1\right)x^3+\left(m+1\right)x^2+3x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì tất cả giá trị thực của tham số m là:

A. $-1<m\le 2$. **B.** $-1\le m\le 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -1 \end{array}\right.$.

Lời giải

+ Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có: $y'=\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m+1\right)x+3$.

+ Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m+1\right)x+3\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

+ Với $m=1 \Rightarrow y'=4x+3; y'=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4} \Rightarrow$ Hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m=-1 \Rightarrow y'=3 \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow m=-1$ thảo mãn điều kiện.

Trường hợp 2: $m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1>0 \\ (m+1)^2-3(m^2-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ -2m^2+2m+4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m<-1 \end{array}\right.$$

Kết hợp hai trường hợp vậy $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Đáp án D.

> **Quick Note 2**
>
> Những bài toán biện luận tham số m và trong đó m là một tham số tham gia cấu thành nên hệ số a của hàm thì một điều bắt buộc và hầu như là một điểm **chí mạng** của thí sinh khi thi thử, làm bài kiểm tra. Một đạo luật bất thành văn được viết ra để đảm bảo khi giải những bài toán có hệ số a chứa tham số m ta cần xét cả trường hợp $a=0$ và $a \neq 0$.

Câu 6. [Thông hiểu] – [#29].**

Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-m}$, m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$?

A. $\frac{1}{2}<m \leq 1$. **B.** $m>\frac{1}{2}$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $y'=\frac{1-2m}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$ thì:

$$\begin{cases} y'<0, \ \forall x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \\ m \notin \left(\frac{1}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Đáp án C.

Study Tip 2

Đối với những bài toán biện luận m để hàm số nhất biến có mẫu thức chứa tham số m, ta cần để ý đến điều kiện khoảng đồng biến hoặc nghịch biến đó phải nằm về hai phía của điểm gián đoạn hay dễ hiểu hơn khi ta nói điểm gián đoạn không nằm trong khoảng đồng biến hay nghịch biến đã cho.

Câu 6*. [Thông hiểu] – [#30].**

Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $m\ge -\dfrac{1}{2}$.

B. $-\dfrac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$.

C. $-\dfrac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.

D. $m>-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x \xrightarrow{x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} 0<t<1$ (dựa vào đường tròn lượng giác).

Bài toán trở thành hàm $y=\dfrac{-2t-1}{t-m}$ đồng biến trên $t\in(0;1)$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0,\ \forall x\in D\\ m\notin(0;1)\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$$

Đáp án C.

Quick Note 3

Đối với bài toán định giá trị của tham số để hàm số $f\left(g\left(x\right)\right)$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng K nào đó, ta cần phải xét tính đồng biến hay nghịch biến của hàm $t=g\left(x\right)$ trên khoảng K và giữ điều kiện đơn điệu nếu $g\left(x\right)$ đồng biến trên K và ngược lại ta làm trái điều kiện (đồng biến → nghịch biến hoặc nghịch biến → đồng biến trên khoảng K).

Câu 6**. [Thông hiểu] – [#31].**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trên $(-1;1)$ hàm số $y=\dfrac{mx+6}{2x+m+1}$ nghịch biến.

A. $-4<m<3$. **B.** $\left[\begin{array}{l}-4\le m<-3\\1<m\le 3\end{array}\right.$. **C.** $1\le m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-4<m\le -3\\1\le m<3\end{array}\right.$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-m-1}{2}\right\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+m-12}{\left(2x+m+1\right)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ thì: $\left\{\begin{array}{l}y'<0,\forall x\in\left(-1;1\right)\\\dfrac{-m-1}{2}\notin\left(-1;1\right)\end{array}\right.$.

Hay: $\left\{\begin{array}{l}m^2+m-12<0\\\left[\begin{array}{l}-m-1\le -2\\-m-1\ge 2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4<m<3\\\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m\le -3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4<m\le -3\\1\le m<3\end{array}\right.$.

Đáp án D.

Câu 7. [Vận dụng] – [#32].

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^2+mx+\dfrac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

A. $m\le 5$. **B.** $m\le -5$. **C.** $m\ge 5$. **D.** $m\ge -5$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(1;+\infty\right)$.

Ta có: $y'=2x+m+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow 2x+m+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\ge 0,\forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow -m\le 2x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2},\forall x\in\left(1;+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow -m\le\min\limits_{\left(1;+\infty\right)}f\left(x\right)$ với $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$.

Xét hàm số: $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

$f'(x)=2-\dfrac{2}{(x-1)^3}=\dfrac{2\left[(x-1)^3-1\right]}{(x-1)^3}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^3=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ |	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=5$.

Vậy $-m\le 5\Leftrightarrow m\ge -5$.

Đáp án D.

Câu 7*. [Vận dụng] – [#33].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2(2x+m+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $f'(x^2)=x^2(x^2-2)^2(2x^2+m+1)$.

Mặt khác: $g'(x)=2xf'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow 2xf'(x^2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 2x.x^2(x^2-2)^2(2x^2+m+1)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 2x^2+m+1\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\ge -2x^2-1,\forall x\in(1;+\infty)$.

Xét hàm số $h(x)=-2x^2-1$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có: $h'(x)=-4x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

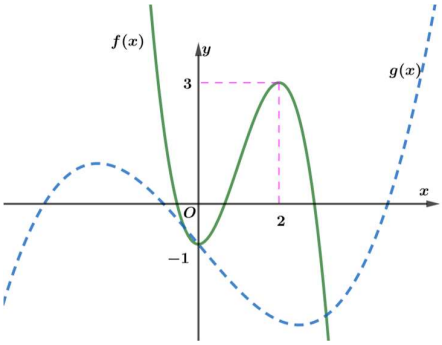
x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-3 ↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty) \Leftrightarrow m \geq -3$.

Mà $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m = \{-3;-2;-1\}$.

Câu 7*. [Vận dụng] – [#34].

Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = -f(mx+n), (m,n \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5. Giá trị biểu thức $3m+2n$ là

A. -5. **B.** $-\frac{13}{5}$. **C.** $\frac{16}{5}$. **D.** 4.

Lời giải

* Giả sử hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(2;3)$, $(0;-1)$ và nhận hai điểm này làm hai điểm cực trị nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ f(0) = -1 \\ f'(2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d = 3 \\ d = -1 \\ 12a+4b+c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1.$$

Suy ra: $g(0) = -f(n) = n^3 - 3n^2 + 1$.

Mà từ đồ thị ta có $g(0) = -1$.

$$\Rightarrow n^3 - 3n^2 + 1 = -1 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2 - 2n - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = 1 \\ n = 1 \pm \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Do $n \in \mathbb{Q}$ nên $n = 1$.

* Hàm số $g(x)=-f(mx+n)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 5.

$\Leftrightarrow$ Hàm số $h(x)=-g(x)=f(mx+n)$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 5.

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên hàm số $h(x)=g(mx+n)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-n}{m};\frac{2-n}{m}\right)$ với $m>0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left|\frac{2-n}{m}-\frac{-n}{m}\right|=5 \Leftrightarrow \frac{2}{|m|}=5 \Leftrightarrow m=\frac{2}{5}$ do $m>0$.

Vậy $3m+2n=3.\frac{2}{5}+2.1=\frac{16}{5}$.

Đáp án C.

Study Tip 3

Để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng k khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và $|x_2-x_1|=k$.

Quick Note 4

* Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến (hay nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(mx+n),(m>0)$ đồng biến (hay nghịch biến) trên khoảng $\left(\frac{a-n}{m};\frac{b-n}{m}\right)$.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến (hay nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(mx+n),(m<0)$ nghịch biến (đồng biến) trên khoảng $\left(\frac{b-n}{m};\frac{a-n}{m}\right)$.

Câu 7. [Vận dụng] – [#35].**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $y=g(x)=f(1-x)+2018x+2019 \Rightarrow g'(x)=-f'(1-x)+2018$.

$\Rightarrow g'(x)=-[1-(1-x)].[(1-x)+2].g(1-x)-2018+2018$.

$\Rightarrow g'(x)=x(x-3)g(1-x)$.

Ta có: $g'(x)<0 \Leftrightarrow x(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\x<0\end{array}\right.$ do $g(1-x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

Đáp án D.

Study Tip 4

Nếu $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ thì $y'=u'\left(x\right).f'\left(u\left(x\right)\right)$.

Câu 7*. [Vận dụng] – [#36].**

Cho hàm số $y=\left(\frac{2018}{2019}\right)^{-e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}+2}$. Biết rằng với mọi $m\le a.e^{b}+c,\ \left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(2;5\right)$. Giá trị của $S=a+b+c$ là?

A. $S=7$. **B.** $S=9$. **C.** $S=8$. **D.** $S=10$.

Lời giải

Ta có: $y'=\left[-e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}+2\right]'.\left(\frac{2018}{2019}\right)^{-e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}+2}.\ln\left(\frac{2018}{2019}\right)$.

$\Rightarrow y'=\left[-5e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}\right].\left(\frac{2018}{2019}\right)^{-e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}+2}.\ln\left(\frac{2018}{2019}\right)$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(2;5\right)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\left(2;5\right)$.

$\Leftrightarrow -5e^{5x}+\left(m+3\right).e^{x}\le 0,\forall x\in\left(2;5\right)\Leftrightarrow m\le 5e^{4x}-3,\forall x\in\left(2;5\right)\ \ \left(1\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=5e^{4x}-3$ trên khoảng $\left(2;5\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=20e^{4x}>0,\forall x\in\left(2;5\right)$ nên hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(2;5\right)$ và $f\left(2\right)<f\left(x\right)<f\left(5\right)$.

Suy ra $\left(1\right)\Leftrightarrow m\le f\left(2\right)=5e^{8}-3$.

Vậy $\begin{cases}a=5\\b=8\\c=-3\end{cases}\Rightarrow S=a+b+c=10$.

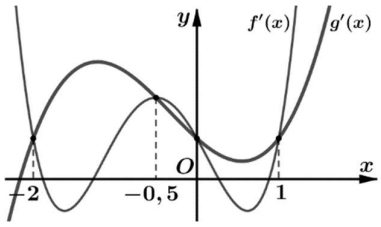
Đáp án D.

Quick Note 5

$m\ge f\left(x\right),\forall x\in D\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{D}f\left(x\right)$.

Câu 7**. [Vận dụng] – [#37].**

Cho hàm số $y=f\left(x\right),\ y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm (đồ thị $y=g'\left(x\right)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ bên dưới đây.

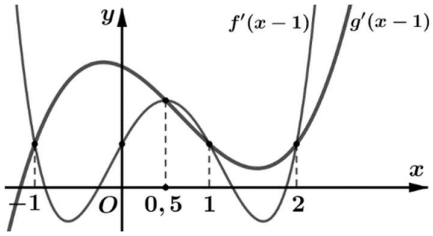


Hàm số $h(x)=f(x-1)-g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Hai đồ thị $f'(x-1)$, $g'(x-1)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến hai đồ thị $f'(x)$, $g'(x)$ sang phải 1 đơn vị như hình vẽ bên dưới.



Ta có: $h'(x)=f'(x-1)-g'(x-1)$.

Hàm số $h(x)$ nghịch biến khi $h'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x-1)<g'(x-1) \xrightarrow{\text{đồ thị mới}} x\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(1;2)$.

Đáp án B.

Quick Note 6

* Để biểu diễn hàm số $y=f(x)+a$ từ hàm số $y=f(x)$, ta chỉ cần tịnh tiến lên a đơn vị nếu $a>0$ hoặc tịnh tiến xuống $|a|$ đơn vị nếu $a<0$.

* Để biểu diễn hàm số $y=f(x+a)$ từ hàm số $y=f(x)$, ta chỉ cần tịnh tiến sang trái a đơn vị nếu $a>0$ hoặc tịnh tiến sang phải $|a|$ đơn vị nếu $a<0$.

Câu 8. [Vận dụng] – [#38].

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+2018$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ là?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Để hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (lưu ý dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm).

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}-m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le \dfrac{2x}{x^2+1},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\le \min\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

Ta xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ trên toàn tập $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ và $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=0\\f\left(-1\right)=-1=\min\limits_{\mathbb{R}}f\left(x\right)\\f\left(1\right)=1=\max\limits_{\mathbb{R}}f\left(x\right)\\\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.

Do đó: $m\le -1$ là các giá trị cần tìm.

Đáp án C.

Bài tập bổ sung:

Câu 8*. [Vận dụng] – [#39].

Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu khác với tính đơn điệu của các hàm số còn lại?

A. $h\left(x\right)=x^3+x-\sin x$.

B. $k\left(x\right)=2x+1$.

C. $g\left(x\right)=x^3-6x^2+15x+3$.

D. $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2-2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Cách 1: Tự luận

Phương án A: $h'\left(x\right)=3x^2+1-\cos x=3x^2+2\sin^2\dfrac{x}{2}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương án B: $k'\left(x\right)=2>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $k\left(x\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương án C: $g'\left(x\right)=3x^2-12x+15=3\left(x^2-4x+5\right)=3\left(x-2\right)^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $g\left(x\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương án D: $f\left(x\right)=-x-1+\dfrac{6}{x+1}\Rightarrow f'\left(x\right)=-1-\dfrac{6}{\left(x+1\right)^2}<0,\forall x\ne -1$ nên hàm số $f\left(x\right)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Như vậy các hàm số $h(x)$, $g(x)$, $k(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, còn hàm số $f(x)$ thì nghịch biến trên từng khoảng xác định.

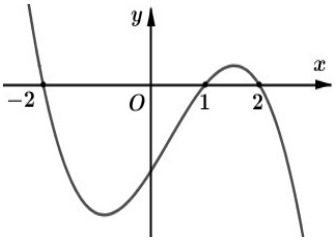
Cách 2: Suy luận logic

Dễ thấy hàm số ở phương án **D** có điểm gián đoạn (hàm số không liên tục) còn ba phương án còn lại đều liên tục trên toàn tập $\mathbb{R}$ nên chắc chắn phương án **D** là phương án cần tìm.

Đáp án D.

Câu 8. [Vận dụng] – [#40].**

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$.



Hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị $f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-2f'(3-x).f(3-x)$.

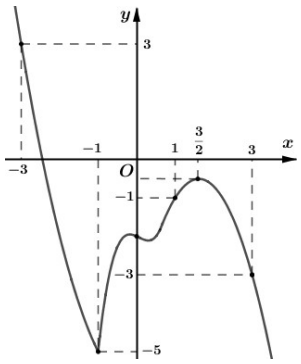
Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x)>0\Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x)<0 \\ f(3-x)<0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2<3-x<1 \\ 3-x>2 \end{array}\right. \\ 3-x\neq \pm 2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<5 \\ x<1 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$.

Đáp án C.

Câu 8*. [Vận dụng] – [#41].**

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;3)$.

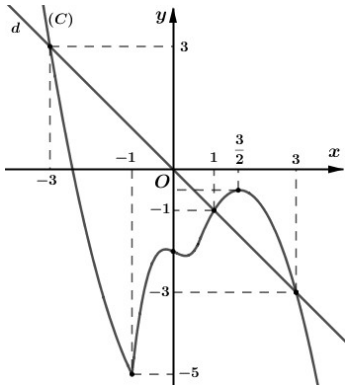
Lời giải

Ta có: $g'(x)=-f'(1-x)+x-1$.

Để $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-x)>x-1$.

Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t$.

Kẻ đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=-1;\ x=3$ (như hình vẽ)



Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình

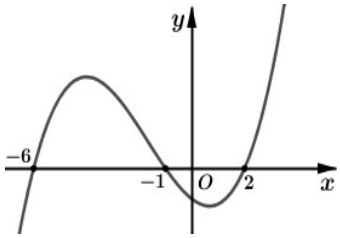
$$f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{bmatrix}.$$

Đối chiếu đáp án ta chọn B.

Đáp án B.

Câu 8**. [Vận dụng] – [#42].**

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Cách 1: Giải bất phương trình

Ta có: $g'(x) = -2x.f'(3 - x^2)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến khi và chỉ khi: $\begin{bmatrix} \begin{cases} x > 0 \\ f'(3 - x^2) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ f'(3 - x^2) > 0 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x > 0 \\ \begin{bmatrix} 3 - x^2 < -6 \\ -1 < 3 - x^2 < 2 \end{bmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \begin{bmatrix} -6 < 3 - x^2 < -1 \\ 3 - x^2 > 2 \end{bmatrix} \end{cases} \end{bmatrix}$.

Hay $\begin{bmatrix} \begin{cases} x > 0 \\ \begin{bmatrix} x^2 > 9 \\ 1 < x^2 < 4 \end{bmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \begin{bmatrix} 4 < x^2 < 9 \\ x^2 < 1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x > 0 \\ \begin{bmatrix} x > 3 \\ x < -3 \\ 1 < x < 2 \\ -2 < x < -1 \end{bmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \begin{bmatrix} 2 < x < 3 \\ -3 < x < -2 \\ -1 < x < 1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 3 \\ 1 < x < 2 \\ -3 < x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{bmatrix}$.

Chọn D.

Cách 2: Sử dụng bảng biến thiên

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(3-x^2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=-2x.f'\left(3-x^2\right)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=9\\x^2=4\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

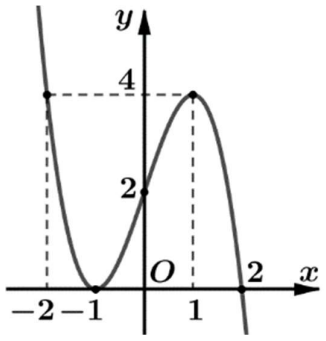
x	$-\infty$	-3		-2		-1		0		1		2		3	$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn D.

Đáp án D.

Câu 9. [Vận dụng cao] – [#43].

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+x-1\right)+\dfrac{480}{m\left(x^2+x+2\right)}$ nghịch biến trên $\left(0;1\right)$?



A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$ khi $g'\left(x\right)<0,\ \forall x\in\left(0;1\right)$.

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left[f'\left(x^2+x-1\right)-\frac{480}{m\left(x^2+x+2\right)^2}\right]<0,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow \frac{480}{m}>\left(x^2+x+2\right)^2.f'\left(x^2+x-1\right),\ \forall x\in(0;1)$$

$$\xrightarrow{t=x^2+x-1}\frac{480}{m}>(t+3)^2.f'(t),\ \forall t\in(-1;1).$$

Dựa vào đồ thị, ta có: $\begin{cases}0<f'(t)<4\\ 2<(t+3)^2<16\end{cases},\ \forall t\in(-1;1)\longrightarrow (t+3)^2.f'(t)<64,\ \forall t\in(-1;1).$

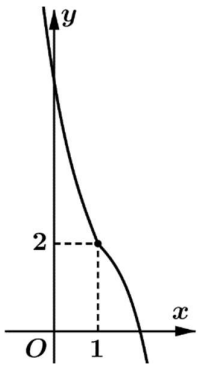
Theo YCBT $\longrightarrow \frac{480}{m}\geq 64\Leftrightarrow m\leq\frac{15}{2}$.

Đáp án C.

Bài tập bổ sung:

Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#44].

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên. Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)\right]^2-2xf(x)+2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

B. Hàm số $y=h(x)$ không có cực trị.

C. Đồ thị của hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $N(1;2)$.

D. Đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực đại là $M(1;0)$.

Lời giải

Ta có: $h'(x)=f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)+4x$.

Suy ra: $h'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left[f'(x)-2\right]-2x\left[f'(x)-2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2x \\ f'(x)=2 \end{array}\right.$.

• Từ giả thiết hàm số không có cực trị, kết hợp với đồ thị suy ra hàm số luôn nghịch biến nên $f'(x)<0$ với mọi x. Suy ra $f'(x)-2<0$ với mọi x.

• Phương trình $f(x)=2x$ có nghiệm suy nhất $x=1$ (VT nghịch biến – VP đồng biến).

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

Do đó đồ thị hàm số $y=h(x)$ có điểm cực tiểu $M(1;0)$.

Đáp án A.

Câu 9. [Vận dụng cao] – [#45].**

Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=3x.f(x)+(m-1)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\geq\dfrac{10}{3}$. **C.** $m\leq 1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bởi $x-1$ ta được $2f(1-x)+f(x)=(x-1)^2$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=x^2-2x+1 \end{cases} \longrightarrow 3f(x)=x^2+2x-1$.

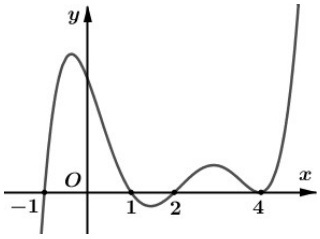
Suy ra: $y=x^3+2x^2+(m-2)x+1 \longrightarrow y'=3x^2+4x+m-2$.

YCBT $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\leq 0 \\ a=3>0 \end{cases} \Leftrightarrow 4-3(m-2)\leq 0 \longrightarrow m\geq\dfrac{10}{3}$.

Đáp án B.

Câu 9*. [Vận dụng cao] – [#46].**

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



A. $(-1;0)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(0;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$.

Ta có: $g'(x)=-2f'(1-2x)$.

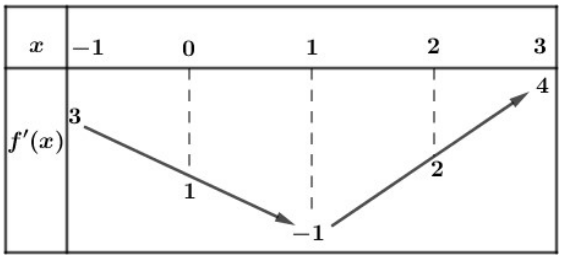
Xét $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x<-1 \\ 1<1-2x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ -\dfrac{1}{2}<x<0 \end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$.

Đáp án D.

Câu 9**. [Vận dụng cao] – [#47].**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ như hình



Hàm số $g(x)=f\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2$.

● TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1-\frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.

● TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1-\frac{x}{2} < a \ < 0 \Leftrightarrow 2 < 2-2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Đáp án A.

Câu 10. [Vận dụng cao] – [#48].

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình $e^x = m(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Cách 1:

Vì $e^x > 0$ nên $m \neq 0$.

Khi đó: $e^x = m(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{x+1}{e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = (x+1)e^{-x} = f(x)$.

Xét hàm $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

Ta có: $f'(x) = -xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

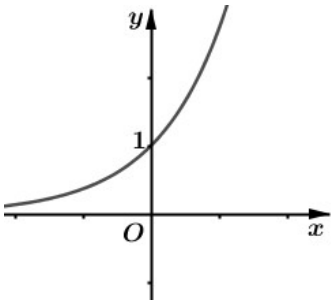
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\begin{cases}\dfrac{1}{m}=1\\ \dfrac{1}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\ m=1\end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;1\}$.

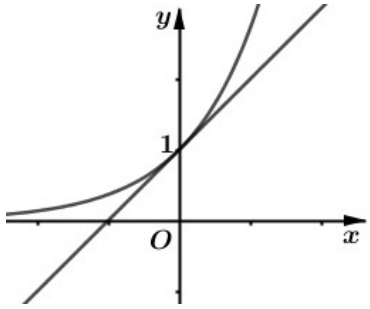
Đáp án B.

Cách 2:

Ta có $y=e^x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $y=e^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ có đồ thị (C) (xem hình 1).



Hình 1



Hình 2

Do đó:

- Nếu $m<0$ thì $y=m(x+1)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là một đường thẳng luôn qua điểm $(-1;0)$ nên luôn cắt đồ thị $(C):y=e^x$ tại duy nhất một điểm.
- Nếu $m=0$: phương trình vô nghiệm (do $y=e^x>0$).
- Nếu $m>0$: để phương trình có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $\Delta:y=m(x+1)$ là tiếp tuyến của (C) (như hình 2) $\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=m(x+1)\\ e^x=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ m=1\end{cases}\Rightarrow m=1$.

Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#49].

Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

A. $m>1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m>\frac{5}{4}$. **D.** $m\ge\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{x^4+x^2+m}\\ b=\sqrt[3]{2x^2+1}\end{cases}\longrightarrow a^3-b^3=x^4-x^2+m-1$.

Khi đó bất phương trình trở thành: $a-b+a^3-b^3>0\Leftrightarrow a^3+a>b^3+b\longrightarrow a>b$.

$$\Leftrightarrow a^3>b^3\Leftrightarrow x^4-x^2-1>-m.$$

Xét hàm số $f(x)=x^4-x^2-1$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)>0,\ \forall x>1$.

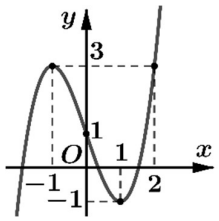
Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và liên tục trên $[1;+\infty)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m\le\min\limits_{[1;+\infty)}f(x)=f(1)=-1$ hay $m\ge 1$.

Đáp án B.

Câu 10. [Vận dụng cao] – [#50].**

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=f(2x^3+x-1)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]}g(x)=-10$.



A. $m=-13$. **B.** $m=-12$.

C. $m=-1$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Đặt $t(x)=2x^3+x-1$ với $x\in[0;1]$.

Ta có: $t'(x)=6x^2+1>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x\in[0;1]\longrightarrow t\in[-1;2]$.

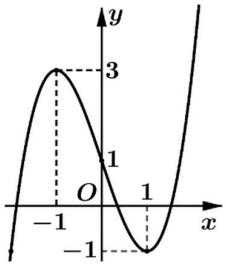
Từ đồ thị hàm số ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(t)=3 \longrightarrow \max\limits_{[-1;2]}\left[f(t)+m\right]=3+m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3+m=-10 \Leftrightarrow m=-13$.

Đáp án A.

Câu 10*. [Vận dụng cao] – [#51].**

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $f(-1)=1,\ f\left(-\frac{1}{e}\right)=2$. Bất phương trình $f(x)<\ln(-x)+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>2$.

B. $m\geq 2$.

C. $m>3$.

D. $m\geq 3$.

Lời giải

Bất phương trình $m>f(x)-\ln(-x)$ đúng với mọi $x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

$$\Leftrightarrow m\geq \max_{\left[-1;-\frac{1}{e}\right]} g(x) \text{ với } g(x)=f(x)-\ln(-x).$$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$.

Do $\begin{cases} f'(x)>0, \forall x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right) \\ -\frac{1}{x}>0, \forall x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right) \end{cases} \longrightarrow g'(x)>0,\ \forall x\in\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;-\frac{1}{e}\right)$ và liên tục trên $\left[-1;-\frac{1}{e}\right]$ nên $\max\limits_{\left[-1;-\frac{1}{e}\right]} g(x)=g\left(-\frac{1}{e}\right)=3$.

Đáp án D.

Câu 10**. [Vận dụng cao] – [#52].**

Cho bất phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-5;5]$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[-3;6]$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$.

Suy ra: $t^2=9+2\sqrt{18+3x-x^2}$.

Ta có: $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}$; $t'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}\in[-3;6]$.

Bảng biến thiên

x	-3		$3/2$		6
t'		$+$	0	$-$	
t	3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

Từ bảng biến thiên ta suy ra $t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Khi đó bất phương trình trở thành: $t-\dfrac{t^2-9}{2}\le m^2-m+1\Leftrightarrow\dfrac{-t^2+2t+9}{2}\le m^2-m+1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+2t+9}{2}$ với $t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Ta có: $f'(t)=-t+1\le 0\ \forall t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[3;3\sqrt{2}]$ nên $\max\limits_{[3;3\sqrt{2}]}f(t)=f(3)=3$.

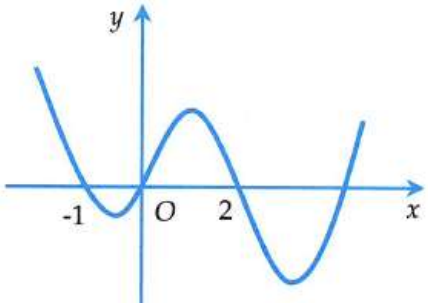
YCBT $\Leftrightarrow m^2-m+1\ge\max\limits_{[3;3\sqrt{2}]}f(t)\Leftrightarrow m^2-m+1\ge 3\Leftrightarrow m^2-m-2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$.

Đáp án C.

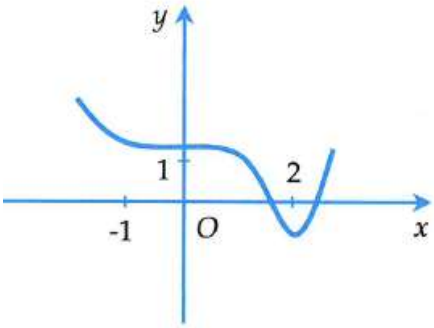
Câu 10***. [Vận dụng cao] – [#53].**

Một trong các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0)=0$ và $f''(x)<0,\forall x\in(-1;2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?

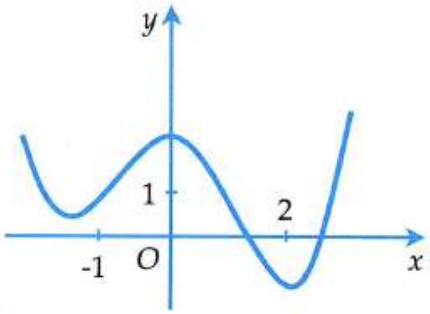
A.



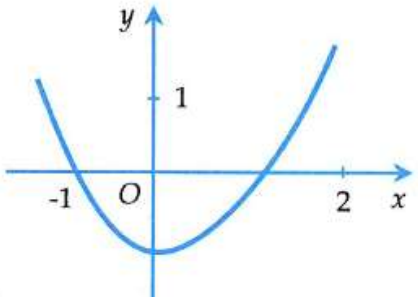
B.



C.



D.



Lời giải

Ta có: $f''\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-1;2\right)$.

Hàm số $y=f'\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f'\left(x\right)$

x	-1		2
$f''\left(x\right)$		-	
$f'\left(x\right)$	$f'\left(-1\right)$	↘	$f'\left(2\right)$

Suy ra $\begin{cases}f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0,\forall x\in\left(-1;0\right)\\f'\left(x\right)<f'\left(0\right)=0,\forall x\in\left(0;2\right)\end{cases}$ và hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$ và hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$. Như vậy chỉ có đồ thị ở phương án C thỏa mãn.

Đáp án C.

Quick Note 7

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $K=\left(x_o-h;x_o+h\right)$ và có đạo hàm liên tục trên K hoặc trên $K\setminus\left\{x_0\right\}$, với $h>0$.

+ Nếu $f'(x)>0,\forall x\in(x_o-h;x_o)$ và $f'(x)<0,\forall x\in(x_o;x_o+h)$ thì x_o là một điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

+ Nếu $f'(x)<0,\forall x\in(x_o-h;x_o)$ và $f'(x)>0,\forall x\in(x_o;x_o+h)$ thì x_o là một điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

Câu 10****. [Vận dụng cao] – [#54].**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x+2)$

$$=2(x-1)\left[(x^2-2x+2-1)^2\left((x^2-2x+2)^2-2(x^2-2x+2)\right)\right]$$
$$=2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right].$$

Xét $2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$.

Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$.

Đáp án B.

Chủ đề tiếp theo

Trước khi tôi công bố chủ đề 2: "Xét tính đơn điệu dựa vào dữ liệu bảng". Tôi sẽ công bố một đề kiểm tra nhỏ dưới chủ đề 1 theo format tương tự với phần mục lục tự động, phần bài kiểm tra số 1, phần lời giải bài kiểm tra số 1 dưới nhiều phương pháp khác (tùy vào mức tối ưu của từng dạng bài).

Một lưu ý nhỏ: Những bài toán được nêu trên, không hoàn toàn đơn giản chỉ dùng khái niệm và những tính chất của hàm số, có thể sử dụng những kiến thức xa hơn, lớn hơn ở những chương sau, cũng có thể đó là những bài toán không hỏi về chủ đề đó (nhiều người sẽ nghĩ là do ban biên tập soạn lạc đề).

Tuy vậy, chúng tôi muốn tạo ra sự liên kết với những phần sau và ngay trong phần lời giải, đôi chút có sử dụng những kiến thức liên quan đến chủ đề mà chúng tôi vừa trình bày.

Hy vọng đây sẽ là một tài liệu khá hay và bổ ích nằm trong khuôn khổ dự án "Một gánh cho đi, một gánh hồng".

Tuy những câu hỏi trên đây có những câu rất mới, có những câu đã không còn xa lạ với các bạn học sinh nữa. Tuy nhiên, tôi hy vọng dưới cách trình bày mới hơn, giải phóng khoáng hơn, các bạn sẽ tiếp cận được một vẻ khác, một góc khác của bài toán.

Trân trọng!

Người đồng hành cùng bạn,

Nguyễn Thành Nhân.