

BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA x ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT ĐÚNG VỚI y THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1 : Biến đổi bất phương trình về dạng

$$f(a) < f(b) \text{ (} f(a) > f(b) \text{); } f(a) \leq f(b) \text{; } f(a) \geq f(b)$$

Bước 2 : Xét hàm số $y = f(x)$, chứng minh hàm số luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến

Bước 3 : Do tính chất đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số

$$+ f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b \text{ nếu hàm số đồng biến .}$$

$$+ f(a) < f(b) \Leftrightarrow a > b \text{ nếu hàm số nghịch biến .}$$

Câu 1. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) ?$$

A. 2017.

B. 4034.

C. 2.

D. 2017×2020 .

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{BPT đã cho có dạng } (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0 \quad (*)$$

Do $y > 0$, y nguyên dương nên:

$$+ \text{Xét } y=1 \text{ thì thành } -(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0, \text{ rõ ràng BPT này nghiệm}$$

$$\text{đúng với mọi } x > 3 \text{ vì } -(x-3) < 0, \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3 \frac{2}{3} < 0.$$

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x \leq 2020$ và

$$3(9^y + 2y) \leq x + \log_3 (x+1)^3 - 2 ?$$

A. 4.

B. 2.

C. 3772.

D. 3774.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 3(9^y + 2y) \leq x + \log_3 (x+1)^3 - 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^y + 6y \leq x + 3 \log_3 (x+1) - 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) \leq (x+1) + 3 \log_3 (x+1). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$ có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t) = 3^t + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(2y+1) \leq f(\log_3(x+1)) \Leftrightarrow 2y+1 \leq \log_3(x+1) \Leftrightarrow 3^{2y+1} - 1 \leq x$.

Vì $x \leq 2020$ nên $3^{2y+1} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq \frac{\log_3 2021 - 1}{2} \approx 2,9$.

Với giả thiết y nguyên dương suy ra $y \in \{1; 2\}$.

Với $y = 1$ có $26 \leq x \leq 2020$ suy ra có 1995 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = 2$ có $242 \leq x \leq 2020$ suy ra có 1779 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 3774 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 3. Cho các số nguyên dương x, y không lớn hơn 4022. Biết mỗi giá trị của y luôn có ít nhất 2021 giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $(3^{2x+y} - 3^y) \cdot \log_x y > 3^{x+2y} - 3^x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của y ?

A. 2000.

B. 2001.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải

Chọn A

Do x, y nguyên dương nên ĐKXD là $x \geq 2$.

Ta có: $(3^{2x+y} - 3^y) \cdot \log_x y > 3^{x+2y} - 3^x \Leftrightarrow (3^x - 3^{-x}) \cdot \log_x y > 3^y - 3^{-y}$ (1)

+ Nếu $y = 1$: Không thỏa mãn.

+ Nếu $y \geq 2$: (1) $\Leftrightarrow \frac{3^x - 3^{-x}}{\ln x} > \frac{3^y - 3^{-y}}{\ln y}$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \frac{3^t - 3^{-t}}{\ln t}$ trên $[2; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{t(3^t + 3^{-t}) \ln 3 \cdot \ln t - (3^t - 3^{-t})}{t(\ln t)^2} > \frac{2 \cdot 3^t \cdot \ln 2 - 3^t}{t(\ln t)^2} = \frac{3^t \cdot \ln 4 - 3^t}{t(\ln t)^2} > 0 \forall t \in [2; +\infty)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y \Rightarrow 2 \leq y \leq x-1 \leq 4021$

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ 4021 - y + 1 \geq 2021 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq y \leq 2001$.

Vậy có 2000 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên x để không có quá 25 giá trị nguyên của y thỏa mãn bất phương trình $\log_2^3 x + \log_2 x > \sqrt{y^6 + y^4} + 2\sqrt{y^2 + 1}$?

A. 4215.

B. 4214.

C. 8413.

D. 8412.

Lời giải

Chọn C

ĐKXD: $x \geq 1$.

+ Nếu $x = 1$: không có giá trị y thỏa mãn BPT đã cho nên $y = 1$ thỏa mãn.

+ Nếu $x \geq 2$:

Ta có: $\log_2^3 x + \log_2 x > \sqrt{y^6 + y^4} + 2\sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow \log_2^3 x + \log_2 x > (\sqrt{y^2 + 1})^3 + \sqrt{y^2 + 1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $[1; +\infty)$.

$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in [1; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow f(\log_2 x) > f(\sqrt{y^2 + 1}) \Leftrightarrow \log_2 x > \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow -\sqrt{\log_2^2 x - 1} < y < \sqrt{\log_2^2 x - 1}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 1} \leq 13 \Rightarrow \log_2^2 x \leq 170 \Rightarrow \log_2 x \leq \sqrt{170} \Rightarrow x \leq 2^{\sqrt{170}} \Rightarrow x \leq 8413 \Rightarrow 1 \leq x \leq 8413.$$

Vậy có 8413 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để bất phương trình

$$\log_3 [2x^2 + 2xy + y^2 - 2(x + y)] \leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4) \text{ thỏa mãn với mọi } y \in \mathbb{R} ?$$

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐK: } 2x^2 + 2xy + y^2 - 2(x + y) > 0; \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 + 2(x - 1)y + 2x^2 - 2x > 0; \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (x - 1)^2 - (2x^2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

ĐK cần: Với $y = 0$: Bất phương trình có dạng: $\log_3 (2x^2 - 2x) \leq 1 + \log_3 4$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 - 2x) \leq \log_3 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x \leq 12 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow x \in \{-2; 2; 3\}.$$

ĐK đủ:

+ Với $x = -2$: Bất phương trình có dạng:

$$\log_3 (y^2 - 6y + 12) \leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4).$$

$$\text{Do } \log_3 (y^2 - 6y + 12) \leq \log_3 (3y^2 - 6y + 12) = 1 + \log_3 (y^2 - 2y + 4) \leq$$

$$\leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4) \forall y \in \mathbb{R}$$

nên bất phương trình thỏa mãn với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow x = -2$ thỏa mãn.

+ Với $x = 2$: Bất phương trình có dạng:

$$\log_3 (y^2 + 2y + 4) \leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4).$$

$$\text{Do } \log_3 (y^2 + 2y + 4) \leq \log_3 (3y^2 - 6y + 12) = 1 + \log_3 (y^2 - 2y + 4) \leq$$

$$\leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4) \forall y \in \mathbb{R}$$

nên bất phương trình thỏa mãn với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow x = 2$ thỏa mãn.

+ Với $x = 3$: Bất phương trình có dạng:

$$\log_3 (y^2 + 4y + 12) \leq 1 + \log_2 (y^2 + 2) \cdot \log_3 (y^2 - 2y + 4).$$

Do $y = 1$ không thỏa mãn bất phương trình nên $x = 3$ không thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho a, b là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $2a + b = 2$. Có bao nhiêu số nguyên x

$$\text{sao cho tồn tại } y \in \left(1; \frac{10}{3}\right) \text{ để } 3^{ax+by} = a \cdot 3^x + \frac{b \cdot 9^y}{2} ?$$

A. 4.

B. 2.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2a$.

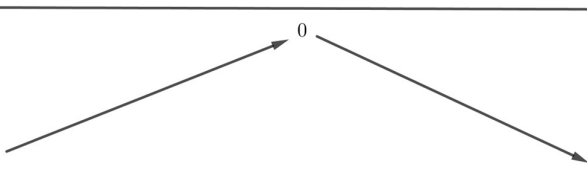
$$3^{ax+by} = a \cdot 3^x + \frac{b \cdot 9^y}{2} \Leftrightarrow 3^{ax+(2-2a)y} = a \cdot 3^x + (1-a) \cdot 9^y \Leftrightarrow 3^{a(x-2y)} - a \cdot 3^{x-2y} + a - 1 = 0$$

Đặt $t = x - 2y \Rightarrow f(t) = 3^{at} - a \cdot 3^t + a - 1 = 0, t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = a \cdot 3^{at} \ln 3 - a \cdot 3^t \ln 3 = a \cdot \ln 3 \cdot (3^{at} - 3^t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		0	



Suy ra $f(t) = 0 \Leftrightarrow x = 2y \in \left(2; \frac{20}{3}\right)$.

Vậy có 4 số nguyên x là $x \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của y sao cho tồn tại số thực $x \in (7; +\infty)$ thỏa mãn:

$$\log_{11} y = \log_{y^{\log_{11} x} + 7} (x - 7)?$$

A. 10.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{11} y = \log_{y^{\log_{11} x} + 7} (x - 7) \Leftrightarrow (y^{\log_{11} x} + 7)^{\log_{11} y} = x - 7$

Đặt $y^{\log_{11} x} + 7 = t \ (t > 7)$

Phương trình trở thành: $t^{\log_{11} y} = x - 7 \Leftrightarrow x = t^{\log_{11} y} + 7$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} t = y^{\log_{11} x} + 7 \\ x = t^{\log_{11} y} + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = y^{\log_{11} x} + 7 \\ x = y^{\log_{11} t} + 7 \end{cases}$.

TH1: Xét thấy $y = 1$ thì $x = 8$ {thỏa mãn}.

TH2: Xét $y > 1$.

Suy ra: $t - x = y^{\log_{11} x} - y^{\log_{11} t} \Leftrightarrow t + y^{\log_{11} t} = x + y^{\log_{11} x}$

Xét hàm đặc trưng $f(u) = y^{\log_{11} u} + u$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(u) = y^{\log_{11} u} \cdot \frac{\ln y}{u \ln 11} + 1$$

Xét: $y > 1$. Hàm số $f(u)$ đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Do đó, $f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$.

Vì thế, ta đưa về xét phương trình: $x = y^{\log_{11} x} + 7 \Leftrightarrow x = x^{\log_{11} y} + 7 \Leftrightarrow x - 7 = x^{\log_{11} y}$

$$\Leftrightarrow \log_{11} (x - 7) = \log_{11} (x^{\log_{11} y}) \Leftrightarrow \log_{11} (x - 7) = \log_{11} x \cdot \log_{11} y \Leftrightarrow \log_{11} y = \frac{\log_{11} (x - 7)}{\log_{11} x} \quad (*)$$

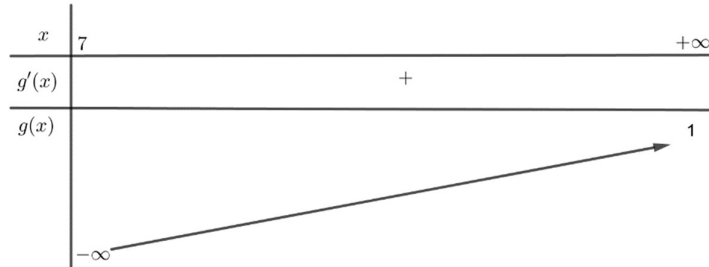
Nhận xét: $\log_{11} (x - 7) < \log_{11} x \Leftrightarrow \frac{\log_{11} (x - 7)}{\log_{11} x} < 1$; ($x > 7 \Rightarrow \log_{11} x > 0$) suy ra:

$$\log_{11} y < 1 \Leftrightarrow y < 11.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{\log_{11}(x-7)}{\log_{11} x} \text{ có } g'(x) = \frac{\frac{1}{(x-7)\ln 11} \log_{11} x - \frac{1}{x \ln 11} \log_{11}(x-7)}{\log_{11}^2 x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-7)\ln 11} \log_{11} x - \frac{1}{x \ln 11} \log_{11}(x-7) = 0 \Leftrightarrow x \log_{11} x = (x-7) \log_{11}(x-7) \text{ vô}$$

nghiệm nên $g'(x) > 0, \forall x > 7$.



Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy với $1 < y < 11$ phương trình (*) luôn có nghiệm nên ta được $y \in \{2, 3, 4, \dots, 10\}$.

Kết luận: $y \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$. Vậy có 10 giá trị y thỏa mãn.

Câu 8. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại $y \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$ thỏa mãn $8^{y^2+xy} = (1+2xy) \cdot 8^y$?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với $2^{3y^2+3xy-3y} = 1+2xy$.

$$\text{Suy ra } 1+2xy > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2y}, \text{ mà } y > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x > -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

+ Nếu $x=0$ thay vào phương trình ban đầu ta được $8^{y^2} = 8^y \Rightarrow y=1$ (vì $y \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$) (thỏa mãn).

+ Nếu $x=1$ thay vào phương trình ban đầu ta được $8^{y^2+y} = (1+2y)8^y \Leftrightarrow 8^{y^2} = 1+2y$.

Khảo sát hàm số $f(y) = 8^{y^2} - 1 - 2y$ ta có

$$f'(y) = 8^{y^2} \cdot \ln 8 \cdot 2y - 2 > 8^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 > 0, \forall y > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2\right)$. Khi đó $f(y) > f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ (pt vô nghiệm).

+ Nếu $x \geq 2$, xét phương trình tương đương là $2^{3y^2+3xy-3y} = 1+2xy$.

$$\text{Khi đó } 3y^2 + 3xy - 3y = 3y^2 + 3y(x-1) > 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 > 1.$$

Xét hàm $g(t) = 2^t - t - 1$. Khảo sát hàm số ta thấy $g(t) > 0 \forall t > 1$.

Vì vậy $2^t > t+1 \forall t > 1$. Áp dụng bất đẳng thức này với $t = 3y^2 + 3xy - 3y > 1$.

ta có $2^{3y^2+3xy-3y} > 3y^2 + 3xy - 3y + 1$.

$$\text{Mà } (3y^2 + 3xy - 3y + 1) - (2xy + 1) = 3y^2 + xy - 3y = 3y^2 + y(x - 3) \geq 3y^2 - y > 0 \forall y > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $2^{3y^2 + 3xy - 3y} > 2xy + 1$ nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Vậy chỉ có $x = 0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi giá trị của y , bất phương trình $(\log_3 x + x - 11)(y - \log_3 x) > 0$ có nghiệm nguyên x và có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Ta có } (\log_3 x + x - 11)(y - \log_3 x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + x - 11 < 0 \\ \log_3 x > y \end{cases} (I) \quad \begin{cases} \log_3 x + x - 11 > 0 \\ \log_3 x < y \end{cases} (II)$$

$$\text{Đặt } f(x) = \log_3 x + x - 11 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall x > 0$$

Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác $f(9) = 0$. Khi đó ta có:

$$+ \text{ Hệ (I): } \begin{cases} \log_3 x + x - 11 < 0 \\ \log_3 x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 9 \\ x > 3^y \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm nguyên và đồng thời có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn thì $3^y < 9 \Leftrightarrow y < 2$. Mà y nguyên dương nên $y = 1$.

$$+ \text{ Hệ (II): } \begin{cases} \log_3 x + x - 11 > 0 \\ \log_3 x < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < 3^y \end{cases}$$

Hệ (II) có nghiệm nguyên và đồng thời có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn thì

$9 < 3^y \leq 20 \Leftrightarrow 2 < y \leq \log_3 20 \approx 2,7$. Mà y nguyên dương nên không có giá trị y thỏa mãn. Vậy có đúng một nguyên dương y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Có bao nhiêu số nguyên dương y để bất phương trình $(2^x - x + 2021)(2^x - y) < 0$ có đúng 5 nghiệm nguyên dương của x ?

A. 35.

B. 32.

C. 40.

D. 45.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = 2^x - x + 2021$ với $x \geq 1$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0 (\forall x \geq 1). \text{ Hàm số đồng biến trên } [1; +\infty).$$

$$\text{Do đó } \forall x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1) = 2022 > 0$$

$$\text{Khi đó bất phương trình: } (2^x - x + 2021)(2^x - y) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x - y < 0 \Leftrightarrow 2^x < y \Leftrightarrow x < \log_2 y \text{ (do } y \text{ nguyên dương).}$$

Để bất phương trình có đúng 5 nghiệm nguyên dương của x ($x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$) thì ta cần

$$5 < \log_2 y \leq 6 \Leftrightarrow 2^5 < y \leq 2^6 \Leftrightarrow 32 < y \leq 64 (y \in \mathbb{Z}^*)$$

$$\Rightarrow y \in \{33; 34; \dots; 64\}$$

Vậy có 32 giá trị y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 11.** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 y} + 4x > \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2\log_2 y$ có nghiệm đúng với mọi $x \geq 3$.
- A. 64. B. 65. C. 63. D. 66.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $y > 0$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 y} + 4x > \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2\log_2 y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 y} - 2\log_2 y > \left(\frac{1}{9}\right)^x - 4x.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 y} - 2\log_2 y > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 2.2x.$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t - 2t \Rightarrow f'(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t \ln \frac{1}{3} - 2 < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 y} - 2\log_2 y > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 3.2x \Leftrightarrow \log_2 y < 2x \Leftrightarrow y < 2^{2x} \Leftrightarrow y < 4^x.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $x \geq 3 \Leftrightarrow y < 4^3 \Leftrightarrow y < 64$.

$\Rightarrow y \in \{1; 2; \dots; 63\}$.

Vậy có 63 số nguyên y thỏa mãn bài toán.

- Câu 12.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?
- A. 59. B. 58. C. 116. D. 115.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình đã cho tương đương $\log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y) \leq 0$ (1)

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x + y) - \log_4(x^2 + y)$.

Tập xác định $D = (-x; +\infty)$.

$$\text{Với mọi } x \in \mathbb{Z} \text{ ta có } x^2 \geq x \text{ nên } f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0, \quad \forall x \in D$$

$\Rightarrow f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x; +\infty)$.

Do y là số nguyên thuộc $(-x; +\infty)$ nên $y = -x + k, k \in \mathbb{Z}^+$.

Giả sử $y = -x + k$ là nghiệm của bất phương trình (1) thì $f(y) = f(-x + k) \leq 0$.

Mà $-x + 1 < -x + 2 < \dots < -x + k$ và $f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x; +\infty)$, suy ra

$f(-x + 1) < f(-x + 2) < \dots < f(-x + k) \leq 0$, nên các số nguyên $-x + 1, -x + 2, \dots, -x + k$ đều là nghiệm của (1), hay nói cách khác bất phương trình (1) sẽ có k số nguyên y thỏa mãn yêu cầu ứng với mỗi x .

Để có không quá 728 số nguyên y thì $f(-x + 729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4(x^2 - x + 729) > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{13469}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13469}}{2}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, \dots, 58\}$.

Vậy có 116 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 13.** Tích các giá trị của a để bất phương trình $(2x)^{a^2+1-\frac{3a-\log_2 x}{2}} \leq 2^{\frac{3(1+\log_2 x)^2}{2}}$ có nghiệm đúng với mọi x thực dương là
- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Logarit cơ số 2 hai vế của bất phương trình đã cho, ta được bất phương trình tương đương:

$$\left(a^2+1-\frac{3a-\log_2 x}{2}\right)(1+\log_2 x) \leq \frac{3(1+\log_2 x)^2}{2} \quad (1).$$

Đặt: $t = \log_2 x$; $t \in \mathbb{R}$ thì (1) trở thành:

$$\left(a^2+1-\frac{3a-t}{2}\right)(1+t) \leq \frac{3(1+t)^2}{2} \Leftrightarrow 3(1+t)^2 - (2a^2-3a+2+t)(1+t) \geq 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt: } f(t) = 3(1+t)^2 - (2a^2-3a+2+t)(1+t), \text{ ta có: } \begin{cases} f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \\ f(-1) = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $t = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(t)$. Do đó: $f'(-1) = 0$.

$$f'(x) = 6(1+t) - (1+t) - (2a^2-3a+2+t); f'(-1) = -(2a^2-3a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thử lại: với } \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ thì (2) trở thành } 2(t+1)^2 \geq 0 \text{ đúng với } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $a_1 = 1$ và $a_2 = \frac{1}{2}$ là các giá trị thỏa mãn ycbt. Do đó: $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2}$.

- Câu 14.** Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn
- $$(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right) \leq (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)?$$
- A. 2017. B. 4034. C. 2. D. 2017×2020 .

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{BPT cho có dạng } (x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) + (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right) \leq 0.$$

$$+ \text{Xét } y=1 \text{ thì thành } -(x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) + 3(x+4)\log_3\frac{2}{3} \leq 0, \text{ rõ ràng BPT này nghiệm}$$

$$\text{đúng với mọi } x > 3 \text{ vì } -(x-3) < 0, \log_2\left(\frac{x+4}{x-3}+1\right) > \log_2(0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3\frac{2}{3} < 0.$$

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì thành $4(x+4)\log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của y để bất phương trình

$xy^2 + \log_3(xy^2) > 3^{\log_3^2 y} + \log_3^2 y$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để tập hợp S có đúng 9 phần tử?

A. 6.

B. 3.

C. Không tồn tại giá trị x .

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Bất phương trình tương đương với:

$$xy^2 + \log_3(xy^2) > 3^{\log_3^2 y} + \log_3^2 y \Leftrightarrow f(xy^2) > f(3^{\log_3^2 y}) \quad (1)$$

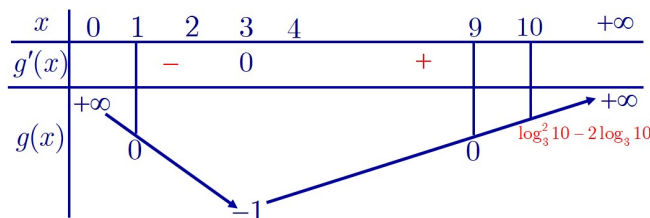
Xét hàm đặc trưng $f(t) = t + \log_3 t, t > 0$. Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0$ với $t > 0$ nên hàm số

$f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi đó ta được:

$$(1) \Leftrightarrow xy^2 > 3^{\log_3^2 y} \Leftrightarrow \log_3 x + 2\log_3 y > \log_3^2 y \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3^2 y - 2\log_3 y = g(y)$$

$$\text{Ta có: } g'(y) = \frac{2}{y \ln 3} \log_3 y - \frac{2}{y \ln 3} = \frac{2}{y \ln 3} (\log_3 y - 1).$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow \log_3 y = 1 \Leftrightarrow y = 3 \text{ (nhận).}$$



Để S có đúng 9 nghiệm nguyên (gồm các nghiệm là: 1; 2; 3; ...; 9) thì

$$0 < \log_3 x \leq \log_3^2 10 - 2\log_3 10 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3^{\log_3^2 10 - 2\log_3 10} \approx 1,247.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên không tồn tại giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x sao cho $x < 2022$ và ứng với mỗi giá trị của x có đúng 6 giá trị nguyên của y để $(2^{y^2-2y} - 8)(3^{y^2} - x) \leq 0$.

A. 2021.

B. 4040.

C. Không tồn tại giá trị x .

D. 2022.

Lời giải

Chọn C

+ Trường hợp 1: $x \leq 0$

Ta có: $3^{y^2} - x > 0$ nên bất phương trình tương đương với

$$2^{y^2-2y} \leq 8 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $y \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, có 5 giá trị nguyên của y (không thỏa đề bài).

+ Trường hợp 2: $x = 1$ (do $x \in \mathbb{Z}$)

$$2^{y^2-2y} - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$3^{y^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Ta có bảng xét dấu sau:

y	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$		
$2^{y^2-2y}-8$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$3^{y^2}-1$	$+$		$+$	0	$+$	$+$	
$\left(2^{y^2-2y}-8\right)\left(3^{y^2}-1\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy các giá trị nguyên của y thỏa mãn bất phương trình là $y \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, có 5 giá trị nguyên của y (không thỏa đề bài).

+ Trường hợp 3: $x \geq 2$ (do $x \in \mathbb{Z}$)

$$3^{y^2} - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \log_3 x \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\log_3 x} \\ y = \sqrt{\log_3 x} \end{cases}$$

Do số giá trị nguyên của y thỏa mãn bất phương trình là 6 nên ta có bảng xét dấu như sau:

y	$-\infty$	-5	$-\sqrt{\log_3 x}$	-4	-1	3	4	$\sqrt{\log_3 x}$	5	$+\infty$
$2^{y^2-2y} - 8$	+	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$3^{y^2} - x$	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+
$(2^{y^2-2y} - 8)(3^{y^2} - x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, để bất phương trình có 6 giá trị nguyên của y thỏa mãn bất phương trình thì $4 \leq \sqrt{\log_3 x} < 5 \Leftrightarrow 16 \leq \log_3 x < 25 \Leftrightarrow 3^{16} \leq x < 3^{25}$

Do $x \in \mathbb{Z}$ và $x < 2022$ nên không tồn tại giá trị của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\frac{\ln y}{y+1} + \frac{1}{y} > \frac{\ln y}{y-1} + \frac{x}{y}$, $\forall y > 0, y \neq 1$?

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{-2y \ln y}{y^2 - 1} > x - 1, \forall y > 0, y \neq 1. (1)$

Xét hàm số $f(y) = \frac{-2y \ln y}{y^2 - 1}, \forall y > 0, y \neq 1.$

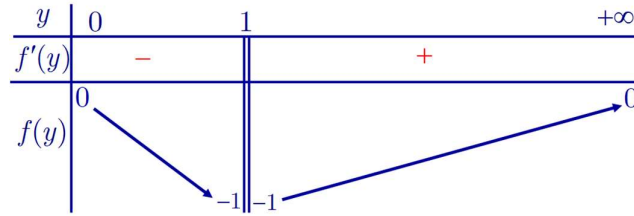
$$\text{Ta có: } f'(y) = \frac{2[(y^2 + 1) \ln y - y^2 + 1]}{(y^2 - 1)^2} = \frac{2\left(\ln y - \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}\right)}{(y^2 + 1)(y^2 - 1)^2}.$$

Xét hàm số $g(y) = \ln y - \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}, y > 0.$

Ta có: $g'(y) = \frac{(y^2 - 1)^2}{y(y^2 + 1)^2} > 0, \forall y > 0, y \neq 1. g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$

Suy ra $g(y) < g(1) = 0$ khi $y < 1$ và $g(y) > g(1) = 0$ khi $y > 1.$

Do đó ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $(1) \Leftrightarrow x - 1 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Vậy có vô số giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Cho các số x, y, a thỏa mãn $1 \leq x \leq 2048, y \geq 1, a \in \mathbb{N}$ và

$x^2 + xy + \log_2(x + y - 1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1$. Có bao nhiêu giá trị của $a \leq 100$ để luôn có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$?

A. 89.

B. 90.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } x^2 + xy + \log_2(x + y - 1)^{x+1} = x(2^a + a) - y + 2^a + a + 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+y-1) + (x+1)\log_2(x+y-1) = (x+1)(2^a + a)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_2(x+y-1)} + \log_2(x+y-1) = 2^a + a \quad (\text{do } x+1 \geq 2, \forall x \geq 1). \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \quad (t \geq 0)$.

Vì $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow \log_2(x+y-1) = a \Leftrightarrow x+y-1 = 2^a \Leftrightarrow x = 2^a - y + 1.$$

Mà $1 \leq x \leq 2048$ nên suy ra: $1 \leq 2^a - y + 1 \leq 2048 \Leftrightarrow 2^a - 2047 \leq y \leq 2^a$.

Do $y \geq 1$, mỗi giá trị của y có một giá trị của x và trong đoạn $[2^a - 2047; 2^a]$ có 2048 số nguyên nên để có 2048 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn (1) thì $2^a - 2047 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 11$.

Mà $a \leq 100, a \in \mathbb{N}$ nên $a \in \{11; 12; \dots; 100\}$.

Vậy có 90 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 10^6$ và

$$\log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1?$$

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $10x^2 - 20x + 20 > 0$, luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \log(10x^2 - 20x + 20) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \log[10(x^2 - 2x + 2)] = 10^{y^2} + y^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 2) + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x^2 - 2x + 2)} + \log(x^2 - 2x + 2) = 10^{y^2} + y^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 10^t + t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 10^t \ln 10 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f[\log(x^2 - 2x + 2)] = f(y^2) \Leftrightarrow \log(x^2 - 2x + 2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^{y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2}.$$

$$\text{Vì } 1 \leq x \leq 10^6 \text{ nên } 1 \leq (x-1)^2 + 1 = 10^{y^2} \leq (10^6 - 1)^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log \left[(10^6 - 1)^2 + 1 \right].$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Z}^+ \text{ nên } y \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\text{Với } y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ Ta được } (x; y) = (4; 1) \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Với } y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9998 = 0 \text{ (không có } x \text{ nguyên nào thỏa mãn).}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 10^9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 999999998 = 0 \text{ (không có } x \text{ nguyên nào thỏa mãn).}$$

Vậy có một cặp nguyên dương $(x; y) = (4; 1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x, y \leq 2020$ và

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 4034.

B. 2017.

C. 2020.

D. 4040.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết kết hợp điều kiện xác định, ta có: $1 \leq y \leq 2020$ và $4 \leq x \leq 2020$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } (xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) + (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \quad (*)$$

$$\text{Xét } f(x) = \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = \log_2 \left(2 + \frac{7}{x-3} \right) > 0, \forall x \in [4; 2020]$$

• Với $y = 1$:

$$\text{Thay vào } (*), \text{ ta được } 3(x+4) \log_3 \left(\frac{2}{3} \right) - (x-3) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) \leq 0 \text{ luôn đúng } \forall x \in [4; 2020]$$

$\Rightarrow$ có 2017 bộ số nguyên $(x; y)$.

• Với $y = 2$:

Thay vào $(*)$, ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4; 2020] \Rightarrow$ có 2017 bộ số nguyên $(x; y)$.

• Với $3 \leq y \leq 2020$:

Ta có $y-2 > 0$.

$$\text{Xét } g(y) = \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) = \log_3 \left(\frac{y+y}{y+2} \right) > \log_3 \left(\frac{y+2}{y+2} \right) = 0, \forall y \geq 3 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy có 4034 bộ số nguyên $(x; y)$.

Câu 21. Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)}$ và $4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 5^{-(y+3)} = 3^{|x^2-2x-3|} \quad (*)$$

$$\text{Vì } 3^{|x^2-2x-3|} \geq 3^0 \Rightarrow 5^{-(y+3)} \geq 1 \Rightarrow y+3 \leq 0 \Rightarrow y \leq -3.$$

$$\text{Lại có } 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -4y + (y-1) + (y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0$$

Vậy $y = -3$.

$$\text{Thế } y = -3 \text{ vào (*) ta được: } 3^{|x^2-2x-3|} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy các cặp số thực thỏa mãn là $(-1; -3)$ và $(3; -3)$.

Câu 22. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 55.

B. 28.

C. 29.

D. 56.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + y > 0 \\ x^2 + y > 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_3 4} \\ \Leftrightarrow x^2 - y \geq (x + y)^{\log_3 4} - (x + y). \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x + y \Rightarrow t \geq 1 \text{ thì (1) được viết lại là } x^2 - y \geq t^{\log_3 4} - t \quad (2)$$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t .

Nhận thấy $f(t) = t^{\log_3 4} - t$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên nếu $x^2 - y \geq 243^{\log_3 4} - 243 = 781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t \geq 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \leq 781 \Leftrightarrow -27 \leq x \leq 28$.

Mà x nguyên nên x nhận các giá trị $-27, -26, \dots, 27, 28$.

Vậy có tất cả 56 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23. Có bao nhiêu bộ (x, y) với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

A. 2017.

B. 4034.

C. 2.

D. 2017×2020 .

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{Điều kiện } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$$

$$\text{BPT cho có dạng } (x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0.$$

+ Xét $y=1$ thì thành $-(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0$, rõ ràng BPT này nghiệm

đúng với mọi $x > 3$ vì $-(x-3) < 0$, $\log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2(0+1) = 0$, $3(x+4) > 0$, $\log_3 \frac{2}{3} < 0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

+ Xét $y = 2$ thì thành $4(x+4)\log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x; y)$ nữa.

+ Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

_____ TOANMATH.com _____