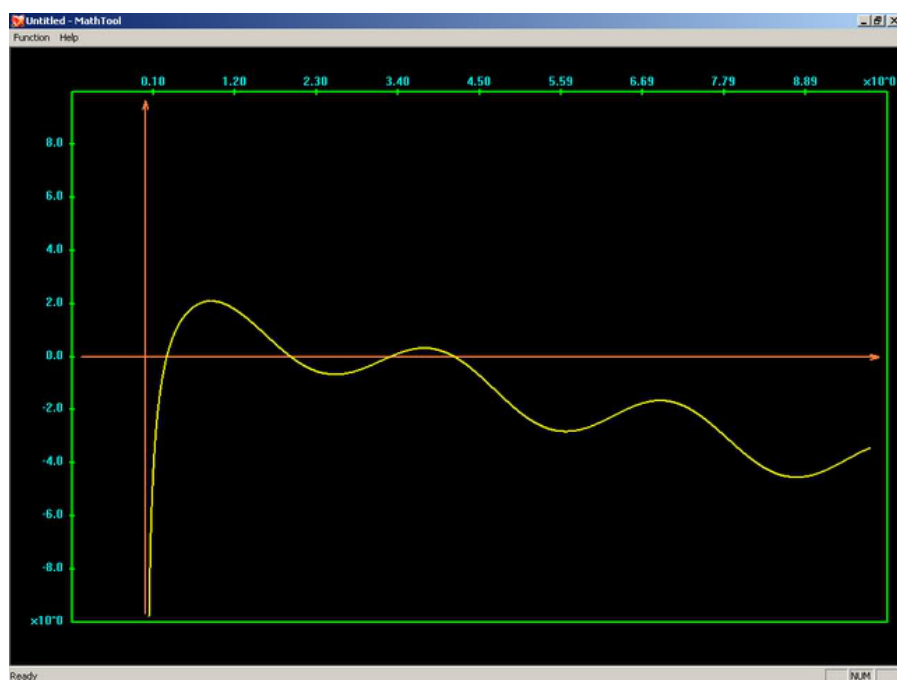


HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Khái niệm lũy thừa từ lâu đã quen thuộc với học sinh trung học cơ sở và trung học phổ thông. Lũy thừa được biết đến như một phép toán thứ năm cùng với cộng trừ nhân chia thể hiện một vai trò quan trọng không thể thiếu trong Toán học. Trước kia, lũy thừa được hiểu là phép “nhân chồng chất”, nghĩa là nó là cách biểu diễn ngắn gọn của một dãy các phép nhân cho cùng một số, tương tự như nhân là một cách biểu diễn của phép cộng. Rồi cùng với sự phát triển của xã hội, nhiều vấn đề phát sinh đòi hỏi Toán học phải vận động không ngừng để đáp ứng được những yêu cầu đặt ra. Đó chính là nguyên nhân xuất hiện khái niệm giới hạn mà từ đó, định nghĩa lũy thừa với số mũ thực đã ra đời và dần được ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết cũng như nhiều lĩnh vực của đời sống.

*Trong chương này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu sự mở rộng của khái niệm lũy thừa và phép toán ngược của nó là logarit. Trên cơ sở các định nghĩa, chúng ta sẽ phân tích và khảo sát ba dạng hàm số có quan hệ mật thiết với nhau là hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit. Các nội dung này đã một lần được giới thiệu trong **chương V, Tài liệu giáo khoa Chuyên Toán 11** nhưng ở mức độ khá sơ lược. Do đó, tìm hiểu chương này chính là dịp để chúng ta thấy rõ hơn, sâu hơn về lũy thừa, logarit từ cơ bản cho đến nâng cao cũng như biết được các ứng dụng của chúng trong thực tế.*



§ 1. MỞ RỘNG KHÁI NIỆM HÀM SỐ LŨY THỪA.

Lũy thừa được giới thiệu lần đầu tiên vào chương trình lớp 7 và trong suốt thời gian sau đó, chúng ta đã dần được biết đến các phép tính lũy thừa và căn thức thông qua những bài tính toán với số cụ thể, những bài rút gọn biểu thức đại số hay quen thuộc hơn cả là với các phương trình bậc hai, bậc ba, phương trình căn thức, ... Tuy nhiên, các hiểu biết của chúng ta chỉ dừng lại khi xem xét số mũ là hữu tỉ và chúng ta không hiểu được số có lũy thừa vô tỉ, chẳng hạn như $2^{\sqrt{2}}$ mang ý nghĩa gì. Trong phần này, chúng ta sẽ cùng nhìn lại một cách tổng quát về lũy thừa hữu tỉ và từ đó tìm hiểu ý nghĩa của lũy thừa vô tỉ.

1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Giống như phép nhân là cách viết ngắn gọn của dãy các phép cộng, lũy thừa cũng chính là cách viết ngắn gọn của dãy các phép nhân như định nghĩa bên dưới.

Định nghĩa 1.

Với mỗi số nguyên dương n , lũy thừa bậc n (còn gọi là lũy thừa của a với số mũ n) là số a^n xác định bởi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}} \text{ với } n > 1 \text{ và } a^1 = a$$

trong đó a được gọi là cơ số và n là số mũ của lũy thừa a^n .

b) Lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm

Định nghĩa 2.

Với $a \neq 0$, lũy thừa bậc 0 của a là $a^0 = 1$. Chú ý là kí hiệu 0^n ($n \leq 0$) không có nghĩa.

Với $a \neq 0$ và n là số nguyên âm, lũy thừa bậc n của a là $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

c) Các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên

Định lí 1.

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và với các số nguyên $m, n \neq 0$, ta có các đẳng thức sau

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4) (ab)^n = a^n b^n$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Định lí 2.

Cho m, n là các số nguyên, khi đó ta có các đánh giá sau

$$1) \text{ Với } a > 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m > n.$$

$$2) \text{ Với } 0 < a < 1 \text{ thì } a^m > a^n \Leftrightarrow m < n.$$

Từ đó, ta có thể suy ra ba hệ quả sau (những điều thường sử dụng trong việc giải phương trình hoặc chứng minh bất đẳng thức).

Hệ quả.

$$1) \text{ Với } 0 < a < b \text{ và } m \text{ là số nguyên thì } a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0 \text{ và } a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0.$$

$$2) \text{ Với mọi số thực } a < b \text{ và } n \text{ là số tự nhiên lẻ thì } a^n < b^n.$$

$$3) \text{ Với } a, b \text{ là các số thực dương và } n \text{ là số nguyên khác } 0 \text{ thì } a^n = b^n \Leftrightarrow a = b.$$

Ví dụ 1. Không dùng máy tính, hãy so sánh hai số $99^{100} + 100^{100}$ và 101^{100} .

Lời giải. Ta có $99^{100} + 100^{100} < 2 \cdot 100^{100}$, ta sẽ chứng minh rằng $2 \cdot 100^{100} < 101^{100}$. Thật vậy

$$\text{Theo bất đẳng thức Bernoulli thì } \left(\frac{101}{100}\right)^{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} > 1 + 100 \cdot \frac{1}{100} = 2 \text{ hay}$$

$$2 \cdot 100^{100} < 101^{100}. \text{ Do đó } 99^{100} + 100^{100} < 101^{100}.$$

Các bất đẳng thức dạng này khá yếu và thường ta sẽ dùng các đánh giá trung gian đưa về cùng số mũ hoặc cùng cơ số để tiện việc so sánh.

Ví dụ 2.

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Lời giải. Một kết quả quen thuộc là nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{abc(a^4 + b^4 + c^4)}{2}$.

Thay $c = -(a + b)$ vào biểu thức này, ta được đẳng thức tương đương sau

$$\frac{(a+b)^7 - a^7 - b^7}{7} = \frac{ab(a+b)(a^4 + b^4 + (a+b)^4)}{2} \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 \\ &= 7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5) = 7ab(a+b)(a^2 + b^2 + ab)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = 2(a^2 + ab + b^2)^2$$

Từ đó dễ thấy đẳng thức (*) đúng. Ta có đpcm.

H1. Với những giá trị nguyên dương nào của n thì $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 9^n < 10^n$?

d) Căn bậc n và số mũ hữu tỉ

Định nghĩa 3.

Với n là số nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$, khi đó ta kí hiệu $b = \sqrt[n]{a}$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau đây.

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n .
- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n .

Nhận xét

- 1) Căn bậc 1 của a là a .
- 2) Căn bậc n của 0 là 0 với mọi n nguyên dương.
- 3) Số âm không có căn bậc chẵn.

4) Với n là số nguyên dương lẻ, ta có $\sqrt[n]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$ và $\sqrt[n]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

$$5) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } a > 0 \\ |a| & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

Các tính chất của căn bậc n

Với hai số không âm a, b , hai số nguyên dương m, n và hai số nguyên p, q tùy ý, ta có

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad 2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3) \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \quad 4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$5) \text{ Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0) \text{ và } \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $4 \leq x \leq 8$ thì $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ không đổi.

Lời giải. Do $4 \leq x \leq 8$ nên ta có

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = \sqrt{(x-4)+4\sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = |\sqrt{x-4}+2| = \sqrt{x-4}+2.$$

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = |\sqrt{x-4}-2| = 2-\sqrt{x-4}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = (\sqrt{x-4}+2) + (2-\sqrt{x-4}) = 4 \text{ không đổi.}$$

$$\text{H2. Rút gọn biểu thức sau } M = \sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} + \sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}.$$

Định nghĩa 4.

Cho a là một số thực dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \frac{m}{n}$ với m là một số nguyên còn n là một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) Lũy thừa với số mũ thực

Từ các nội dung trên, ta thấy rằng chỉ còn xét lũy thừa với số mũ vô tỉ là có thể có một cái nhìn đầy đủ về lũy thừa với số mũ thực. Ta sẽ cùng xem xét cách xây dựng sau đây.

Ta biết rằng số $\sqrt{2} = 1,41213562\dots$ nên nếu ta xét dãy số hữu tỉ tạo ra bằng cách thêm lần lượt các chữ số thập phân vào sau dấu phẩy thì sẽ được một dãy tiến về giá trị thực của nó. Dãy đó chính là

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \quad \dots$$

Khi đó, ta thấy rằng dãy lũy thừa $2^{\sqrt{2}}$ tạo ra theo cách trên chính là

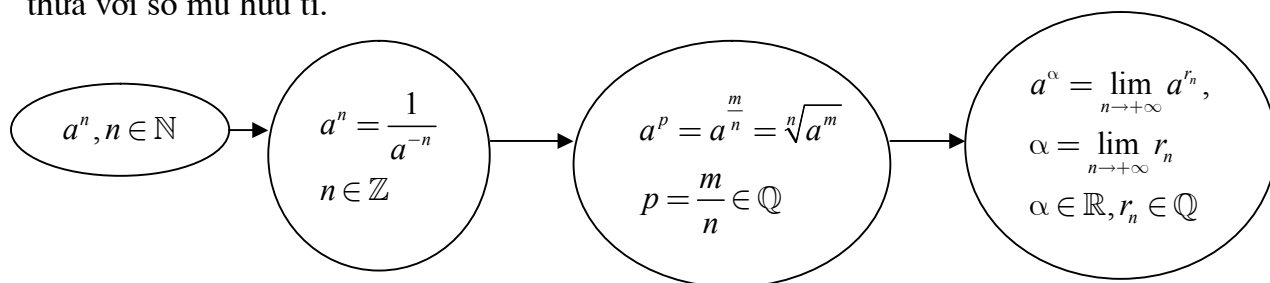
$$2.000, \quad 2.639, \quad 2.657, \quad 2.665, \dots$$

Ta thừa nhận không chứng minh nhận xét rằng luôn tồn tại một dãy số hữu tỉ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$ với α là số vô tỉ cho trước. Người ta cũng chứng minh được rằng dãy các số thực $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots, a^{r_n}$ có giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chọn dãy số (r_n) . Ta gọi giới hạn đó là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu là a^α , tức là

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

Chú ý rằng nếu xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số phải khác 0, trong trường hợp số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

Người ta cũng chứng minh được rằng lũy thừa với số mũ thực có đầy đủ tính chất như lũy thừa với số mũ hữu tỉ.



Như vậy, việc định nghĩa cho lũy thừa số mũ thực đã được hoàn tất.

Một câu hỏi thú vị đặt ra là: *Liệu có tồn tại hay không lũy thừa của một số vô tỉ dương với số mũ cũng là số vô tỉ dương nhưng giá trị của nó lại là số hữu tỉ?*

Câu trả lời cho vấn đề trên là khẳng định và theo một cách nào đó, ta có thể kiểm tra bằng máy tính. Tuy nhiên, việc chứng minh tính vô tỉ, hữu tỉ của một số bằng lập luận quả là điều không đơn giản. Ta có một cách chứng minh quen thuộc như sau

Xét số $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, nếu như a hữu tỉ thì kết luận trên đúng do $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Nếu ngược lại, a là số vô tỉ thì ta cũng có $a^{\sqrt{2}} = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

là số hữu tỉ. Đến đây thì việc chứng minh đã hoàn tất.

Trong lịch sử phát triển của Toán học, người ta còn nêu ra một loại số nữa có tên là “số siêu việt”. Đó là những số không thể nghiệm đúng bất cứ một phương trình đại số nào (phương trình đại số ở đây có thể hiểu là $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, vì mọi phương trình dù là hữu tỉ hay vô tỉ thì sau các phép biến đổi thích hợp sẽ đưa được về dạng trên). Qua nhiều năm nghiên cứu, người ta đã có rất nhiều kết quả về số siêu việt.

-Nhà toán học Liu-u-vin chứng minh được sự tồn tại và cách xây dựng các số siêu việt vào năm 1844.

-Năm 1873, Ec-mit đã chứng minh được số e (cơ số của logarit tự nhiên, sẽ được giới thiệu trong các bài tiếp theo) là số siêu việt.

-Gần 10 năm sau đó, Liu-do-man đã phát triển phương pháp của Ec-mit và chứng minh được π là số siêu việt.

-Đầu thế kỉ XX, nhà toán học nổi tiếng Hin-be người Đức đã nêu bài toán sau tại Đại hội Toán học thế giới: “*Những số có dạng a^b , trong đó a là số đại số dương khác 1, b là số vô tỉ đại số - chẳng hạn số $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ có phải là số siêu việt không?*”.

-Đến năm 1929, nhà toán học trẻ tuổi Ghen-phông người Nga đã chứng minh được bài toán trong trường hợp đặc biệt và nhờ đó mà 1 năm sau, Cu-do-min đã chứng được những số có dạng $a^{\sqrt{p}}$ với a là số đại số, p là số dương không chính phương, là số siêu việt.

-Năm 1934, cùng với nhà toán học Di-ghen, Ghen-phông đã hoàn tất chứng minh cho bài toán thứ 7 nói trên của Hin-be.

Trên thực tế, các giá trị logarit mà chúng ta sẽ đề cập trong chương này đa số đều là các số siêu việt và chứng minh được điều này đòi hỏi phải dùng đến các công cụ cao cấp.

BÀI TẬP

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức sau

$$A = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{6 + \sqrt{8}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{2k + \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} + \dots + \frac{200 + \sqrt{9999}}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

b) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

c) Rút gọn biểu thức sau $B = \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$

Bài 2.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Tính $M = xy + yz + zx$.

b) Tính giá trị của biểu thức $N = \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{x^8 - 1}{2x^4} \right)^2} \right)}$ tại $x = \frac{1}{\sqrt{2}} (2^{\sqrt{2}} - 2^{-\sqrt{2}})$.

Bài 3.

a) So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^2}}$.

b) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 6$ thì $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_{n \text{ số } 2} > \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ số } 2}^{\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ số } 2}}$.

Bài 4.

a) Chứng minh rằng $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

b) Cho $x = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} - 1 \right)$. Hãy tính $A = x^3 + x^2 + 1$.

Bài 5.

a) Dùng các tính chất của lũy thừa để chứng minh rằng nếu số thực x thỏa mãn đẳng thức

$$(x-3)^{2010} + (x-4)^{2012} = 1 \text{ thì } x = 3 \text{ hoặc } x = 4.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = (\sqrt{\pi})^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.

Chứng minh $a^2 + a^{\frac{2}{3}}, b^2 + b^{\frac{2}{3}}, c^2 + c^{\frac{2}{3}}$ độ dài các cạnh của một tam giác nếu biết a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn.

Hỏi kết luận của bài toán còn đúng không nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì?

Bài 7.

Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số sau

a) $f(x) = (9 - 10x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$

b) $g(x) = \frac{7}{(x^2 - \pi x + 2)^{-9}}$

c) $h(x) = (\sin x + \cos x)^{\sqrt{10}}$

KIẾN THỨC BỔ SUNG

Một số bài toán liên quan đến giải toán trên máy tính cầm tay

Dạng 1. Tính tổng hoặc tích của các biểu thức lũy thừa phức tạp.

Dạng toán này đòi hỏi phải có kỹ năng thao tác trên máy tính và tính toán cẩn thận các phép toán trung gian hoặc các biến đổi (nếu có).

Ví dụ 1. Tìm số n nguyên dương nghiệm gần đúng nhất phương trình dưới đây

$$(1+1)(2+\sqrt{2})(3+\sqrt[3]{3})\dots(n+\sqrt[n]{n})=1,1162\times 10^{10}.$$

Lời giải.

Ta có thuật toán tính tích này như sau (dùng quy trình bấm phím liên tục do không thể rút gọn tích này được).

- Gán $A := 1$ (coi như biến số có thể thay đổi giá trị). $\boxed{1}\boxed{[SHIFT]}\boxed{[STO]}\boxed{A}$

- Gán $B := 2$ (coi như tích nhận được khi tính đến $n = A$, đây là giá trị đầu lúc $A = 1$).

$\boxed{2}\boxed{[SHIFT]}\boxed{[STO]}\boxed{B}$.

- Khi $A := A + 1$ thì tính $B = B * (A + \sqrt[A]{A})$.

$$\boxed{[ALPHA]}\boxed{A}\boxed{[ALPHA]}\boxed{=}\boxed{[ALPHA]}\boxed{A}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{[ALPHA]}\boxed{:}\boxed{[ALPHA]}\boxed{B}\boxed{[ALPHA]}\boxed{=}$$
$$\boxed{[ALPHA]}\boxed{B}\boxed{\times}\boxed{(\boxed{[ALPHA]}\boxed{A}\boxed{+}\boxed{[ALPHA]}\boxed{A}\boxed{[x\sqrt{y}]}\boxed{[ALPHA]}\boxed{A}\boxed{)}}$$

Đến đây, ta bấm phím $\boxed{=}\boxed{=}$... liên tục đến khi nhận được giá trị hiện trên màn hình của B gần bằng $1,1162\times 10^{10}$ thì lấy giá trị của A tương ứng. Ta thu được kết quả là $n = 12$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{2^{\sqrt{x}}}{6\log_3 x + \sqrt{5}}$. Tính gần đúng giá trị biểu thức sau

$$S = f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{100}).$$

Lời giải. Ta thấy các giá trị trong tổng cần tính cũng như biểu thức của hàm số đã cho không có gì đặc biệt, vì thế ta cần phải tính trực tiếp nó thông qua thuật toán như sau

(1) Gán cho các biến $A := 1$ và $C := 1$. $\boxed{0}\boxed{[SHIFT]}\boxed{[STO]}\boxed{A}$ và $\boxed{0}\boxed{[SHIFT]}\boxed{[STO]}\boxed{C}$.

(A dùng làm biến số có giá trị thay đổi, C dùng làm tổng).

(2) Tăng A thêm một đơn vị: $A := A + 1$.

(3) Tính giá trị của $\sqrt{A}$ bằng biến B với $B = \sqrt{A}$.

(4) Cộng vào C giá trị của $f(B) = \frac{2^{\sqrt{B}}}{6\log_3 B + \sqrt{5}}$.

(5) Quay lại bước (2) và tiếp tục quá trình này đến khi nào A nhận giá trị 100 thì dừng lại và đọc kết quả nhận được trên màn hình. Việc này thực hiện bằng quy trình bấm phím liên tục như sau

$$\begin{aligned} & \boxed{ALPHA} \boxed{A} \boxed{ALPHA} \boxed{=} \boxed{ALPHA} \boxed{A} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{ALPHA} \boxed{:} \boxed{ALPHA} \boxed{B} \boxed{=} \boxed{(\sqrt{\boxed{ALPHA} \boxed{A}})} \\ & \boxed{ALPHA} \boxed{:} \boxed{ALPHA} \boxed{C} \boxed{ALPHA} \boxed{=} \boxed{ALPHA} \boxed{C} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{x^y} \boxed{(\sqrt{\boxed{ALPHA} \boxed{B}})} \boxed{:} \\ & \boxed{(} \boxed{6} \boxed{\times} \boxed{\log} \boxed{ALPHA} \boxed{B} \boxed{\div} \boxed{\log} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{\sqrt{}} \boxed{5} \boxed{)} \end{aligned}$$

(6) Bấm phím $\boxed{=}$ liên tục đến khi nào A nhận giá trị 100 thì bấm thêm $\boxed{=}\boxed{=}$ rồi dừng lại

(tức là ta đã tính $\frac{2^{\sqrt{100}}}{6 \log_3 100 + \sqrt{5}}$ rồi cộng thêm vào biến C), máy hiện 49,94219105.

Vậy $S \approx 49,94219105$ (lấy kết quả với các chữ số trên màn hình).

Dạng 2. Tìm các chữ số tận cùng của một số.

Công cụ thường dùng để giải quyết các bài toán này chính là dùng modun để giảm dần các bậc của lũy thừa, kết hợp với sự trợ giúp của máy tính với số tương đối nhỏ.

Ví dụ 1. Tìm năm chữ số tận cùng của một số 3^{2010} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải.

Ta sẽ giải bài này bằng cách dùng đồng dư theo modun 10000 và dùng máy tính để tính các số có giá trị tương đối lớn. Ta có

$$3^{25} = 3^{10} \cdot 3^{15} = 59049.14348907 \equiv 59049.48907 \equiv 9443 \pmod{100000}.$$

Từ đó, ta tính được

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3^{50} &= (3^{25})^2 \equiv 9443^2 \equiv 70249 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{100} &= (3^{50})^2 \equiv 70249^2 \equiv 22001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{200} &= (3^{100})^2 \equiv 22001^2 \equiv 44001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{400} &= (3^{200})^2 \equiv 44001^2 \equiv 88001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{800} &= (3^{400})^2 \equiv 88001^2 \equiv 76001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{1600} &= (3^{800})^2 \equiv 76001^2 \equiv 52001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{2000} &= 3^{1600} \cdot 3^{400} \equiv 52001.88001 \equiv 40001 \pmod{100000} \\ \Rightarrow 3^{2010} &= 3^{2000} \cdot 3^{10} \equiv 40001.59049 \equiv 19049 \pmod{100000} \end{aligned}$$

Vậy năm chữ số tận cùng cần tìm là 19049.

Ví dụ 4. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $A = 2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011}$.

Lời giải. Ta sẽ dùng đồng dư modun 100 để giải quyết bài toán này. Ta có

$$2^{10} + 1 = 1025 : 25 \Rightarrow 2^{20} + 2^{10} \equiv 0 \pmod{100} \Rightarrow 2^{20+n} + 2^{10+n} \equiv 0 \pmod{100}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2^{2000} + 2^{10} = \sum_{i=0}^{198} (-1)^i \cdot [2^{20+10i} + 2^{10+10i}] \equiv 0 \pmod{100}$$

Suy ra $2^{2000} \equiv -2^{10} \equiv -24 \equiv 76 \pmod{100}$. Do đó

$$A = 2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011} \equiv 2^{2000} (2^9 + 2^{10} + 2^{11}) \equiv 76(512 + 1024 + 2048)$$

$$\equiv 76(12 + 24 + 48) \equiv 84 \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của A là 84.

Dạng 3. Tính toán với độ chính xác cao của các số.

Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu cách tính chính xác một giá trị cực lớn hoặc cực nhỏ của các số viết trong hệ thập phân.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các chữ số của số 3^{40} .

Lời giải.

Bấm trực tiếp trên máy tính, ta thấy kết quả thu được là $1,215766546.10^{19}$ và đây chỉ là một giá trị gần đúng. Tuy nhiên, ta có thể kiểm tra được là $3^{20} = 3486784401$.

Như thế, ta sẽ đặt $3^{20} = a + b \Rightarrow 3^{40} = (3^{20})^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ta muốn chọn các số a, b sao cho có thể tìm được tất cả các chữ số của $a^2, 2ab, b^2$.

Chọn $a = 34867.10^5, b = 84401$. Ta có

$$a^2 = (34867.10^5)^2 = 1215707689.10^{10}, b^2 = 7123528801; 2ab = 5885619334.10^5. \text{ Do đó}$$

$$3^{40} = a^2 + 2ab + b^2 = 1215707689.10^{10} + 5885619334.10^5 + 7123528801$$

$$= 12157.10^{15} + 7689.10^{10} + 58856.10^{10} + 1933400000 + 7123528801$$

$$= 12157.10^{15} + (7689 + 58856).10^{10} + (1933400000 + 7123528801)$$

$$= 12157.10^{15} + 66545.10^{10} + 9056928801$$

$$= 12157.10^{15} + 0,66545.10^{15} + 0,000009056928801.10^{15}$$

$$= 12157,665459056928801.10^{15}$$

$$= 12157665459056928801$$

Vậy ta đã tìm được tất cả các chữ số của 3^{40} chỉ bằng máy tính cầm tay.

Ví dụ 6. Tìm chữ số thập phân thứ 15 của $\sqrt{12}$.

Lời giải.

Ta thấy rằng không thể tính trực tiếp chữ số này vì khi bấm máy, ta chỉ thu được kết quả chính xác không quá 10 chữ số thập phân và công việc này có vẻ rất khó khăn. Ta sẽ tính gián tiếp bằng cách giải phương trình bậc hai như dưới đây.

Tính $\sqrt{12}$ bằng máy tính $\sqrt{\square} \square 12 \square =$, ta có 3,464101615.

Bấm tiếp $\square Ans \square - \square 3.46 \square$, máy hiện $4,10161514 \cdot 10^{-3}$, điều này có nghĩa là chữ số thứ 9 trong kết quả trên là đúng mà không có phép làm tròn nào đã được thực hiện.

Đặt $\sqrt{12} = 3.464101615 + x$ (*), ta tính x bằng cách biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 12 = (x + 3,464101615)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot 3,464101615 \cdot x + 3,464101615^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6,92820323x + (3,464101615^2 - 12) = 0 \end{aligned}$$

Ta sẽ tính $3,464101615^2 - 12$ trên máy và ghi ra giấy. Ta có

$$3464101615 = 34641 \cdot 10^5 + 1615$$

$$\Rightarrow 3464101615^2 = (34641 \cdot 10^5 + 1615)^2 = 34641^2 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 34641 \cdot 1615 \cdot 10^5 + 1615^2$$

$$= 1199998881 \cdot 10^{10} + 111890430 \cdot 10^5 + 2608225$$

$$= 11999 \cdot 10^{15} + 98881 \cdot 10^{10} + 1118 \cdot 10^{10} + 9043000000 + 2608225$$

$$= 11999 \cdot 10^{15} + 99999 \cdot 10^{10} + 9045608225$$

$$= 11999999999045608225 \Rightarrow 3,464101615^2 = 11,999999999045608225$$

Suy ra $3,464101615^2 - 12 =$

$$11,999999999045608225 - 12 = -0,000000000954391773 = -9,54391773 \cdot 10^{-11}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x^2 + 6,92820323x - 9,54391773 \cdot 10^{-11} = 0$.

Ta sẽ tiếp tục giải phương trình này bằng chức năng SOLVE của máy.

$$\square ALPHA \square X \square x^2 \square + \square 6,92820323 \square ALPHA \square X \square - \square 9,54391773 \square \times \square 10 \square x^y \square -11 \square SHIFT \square SOLVE$$

Máy hỏi $X = ?$, nhập vào $X = 10^{-11}$ và giải $\square 10 \square x^y \square -11 \square = \square SHIFT \square SOLVE$

Máy hiện kết quả là $1,377545868 \cdot 10^{-11}$. Bấm tiếp $\square Ans \square - \square 1.377 \square \times \square 10 \square x^y \square -11$

Máy hiện 5,4586769 để tìm thêm giá trị chính xác hơn. Từ đó suy ra

$$\sqrt{12} \approx 3,46410161513775458676$$

Vậy chữ số cần tìm là 4.

Bài tập rèn luyện.

Bài 1. Cho $B_n = \underbrace{8^{8 \dots 8}}_{n \text{ chữ số } 8}, n = 1, 2, 3, \dots$. Hỏi hai chữ số tận cùng của số B_{2011} là bao nhiêu?

Bài 2. Cho hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt[3]{x} + 2}$. Tính giá trị của

$$S = g(\tan^2 1) + g(\tan^2 2) + g(\tan^2 3) + \dots + g(\tan^2 100)$$

Bài 3. Tìm chữ số thập phân thứ 16 của $\sqrt[3]{2}$.

Bài 4. Một trong các loại số nguyên tố nổi tiếng được biết đến là số nguyên tố Fermat do chính nhà Toán học này đề xuất. Dựa trên quan sát các số hạng đầu, ông dự đoán rằng với mọi số nguyên dương n thì $A_n = 2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố. Tuy nhiên, Euler đã bác bỏ khẳng định này bằng cách chứng minh A_5 là hợp số vì nó chia hết cho 641.

Các bạn hãy thử xác định thử xem số $A_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ có bốn chữ số tận cùng là gì?

§ 2. LOGARIT.

Với bài toán: Tìm x sao cho số tự nhiên có dạng 2^x là lớn nhất không vượt quá 100.

Chúng ta cũng đã quen với cách giải là: Do lũy thừa lớn nhất của 2 không vượt quá 100 là 64 nên ta cần tìm số x sao cho $2^x = 64$. Thử trực tiếp, ta thấy x bằng 6.

Dù bước cuối cùng hơi thiếu tự nhiên và rõ ràng đối với nhiều học sinh thích tìm tòi thì cách giải đó khó chấp nhận được, tuy nhiên mọi cố gắng cải thiện đều gặp phải bế tắc. Chúng ta rõ ràng đang thiếu một công cụ nào đó hỗ trợ để tìm ra trực tiếp số x đã nêu.

Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu một khái niệm mới, có thể hiểu là một phép toán mới bên cạnh phép lũy thừa đã được giới thiệu và cũng nhờ nó mà ta giải quyết được một số lượng rất lớn các vấn đề cả lý thuyết và cả thực tế. Phép toán đó chính là logarit.

1. Định nghĩa.

Định nghĩa 1.

Cho a là số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α thỏa mãn $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, tức là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

Chú ý

- 1) Không có logarit của số 0 và số âm vì a^α luôn dương với mọi α và $a > 0$.
- 2) Cơ số của logarit phải dương và khác 1.
- 3) Một số tính chất cần chú ý

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0$$

Rõ ràng phép nâng lên lũy thừa và lũy lấy logarit là hai phép toán ngược nhau.

2. Tính chất và các biến đổi

a) So sánh hai logarit cùng cơ số

Định lí 1

Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c . Khi đó

1) Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

2) Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$.

Hệ quả

Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c . Khi đó

1) Khi $a > 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$.

2) Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$.

3) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

b) Các quy tắc tính logarit

Định lí 2

Cho số dương $a \neq 1$ và các số dương b, c . Khi đó

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

Các tính chất 1) và 2) của logarit được ứng dụng rất nhiều trong việc đưa các bài toán có số mũ về bài toán dạng tuyến tính thông thường. Ta sẽ xét ứng dụng này trong các nội dung kế tiếp. Tính chất 3) có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$\log_a (b_1 b_2 b_3 \dots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_n$$

Hệ quả

Cho số dương $a \neq 1$, số dương b và số nguyên dương n , khi đó

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \text{ và } \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

c) Đổi cơ số của logarit

Định lí 3

Với a, b là hai số dương khác 1 và c là số dương, ta có

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \quad \text{và} \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Hệ quả 1

Với a, b là hai số dương khác 1, ta có

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{và} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Hệ quả 2

Với a là số dương khác 1, c là số dương và $\alpha \neq 0$, ta có

$$\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c$$

Ví dụ 1.

a) Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{32} 3}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{\log_a n}{\log_{ab} n} = 1 + \log_a b$ với a, b, n là các số dương và $a, ab \neq 1$.

c) Chứng minh rằng $\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}$ trong

đó a, b, c, n là các số dương và $a, b, c, abc \neq 1$.

Lời giải.

a) Ta có $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{32} 3} = (2^{-4})^{\log_{2^5} 3} = 2^{-\frac{4}{5} \log_2 3} = 2^{\log_2 3 \cdot \frac{-4}{5}} = 3^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{81}}$.

b) Ta có $\frac{\log_a n}{\log_{ab} n} = \frac{\log n}{\log a} \cdot \frac{\log ab}{\log n} = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b$.

c) Biến đổi tương tự trên

$$\begin{aligned}\log_a n \log_b n + \log_b n \log_c n + \log_c n \log_a n &= \frac{\log n \log n}{\log a \log b} + \frac{\log n \log n}{\log b \log c} + \frac{\log n \log n}{\log c \log a} = \\ &= (\log n)^2 \frac{\log a + \log b + \log c}{\log a \log b \log c} = \frac{\log abc}{\log a \log b \log c} \cdot \frac{(\log n)^3}{\log n} = \frac{\log_a n \log_b n \log_c n}{\log_{abc} n}\end{aligned}$$

Ta có đpcm.

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tính giá trị của biểu thức sau

$$A = \left(\log_z \frac{x}{y} + \log_x \frac{y}{z} + \log_y \frac{z}{x} \right) \left(\log_{\frac{x}{y}} z + \log_{\frac{y}{z}} x + \log_{\frac{z}{x}} y \right)$$

Lời giải.

Với a là một số thực dương khác 1 nào đó, ta có

$$\log_a (xyz) = 0 \Rightarrow \log_a x + \log_a y + \log_a z = 0.$$

$$\text{Đặt } m = \log_a x, n = \log_a y, p = \log_a z \Rightarrow m + n + p = 0.$$

Dựa theo tính chất của logarit, ta có thể viết biểu thức A lại là

$$A = \left(\frac{m-n}{p} + \frac{n-p}{m} + \frac{p-m}{n} \right) \left(\frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m} \right).$$

Ta có

$$\frac{m-n}{p} + \frac{n-p}{m} + \frac{p-m}{n} = \frac{mn(m-n) + np(n-p) + pm(p-m)}{mnp} = -\frac{(m-n)(n-p)(p-m)}{mnp}$$

$$\frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m} = \frac{p(n-p)(p-m) + m(m-n)(p-m) + n(m-n)(n-p)}{(m-n)(n-p)(p-m)} =$$

$$= \frac{mn(m+n) + np(n+p) + pm(p+m) - (m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp)}{(m-n)(n-p)(p-m)}$$

$$= \frac{mn(-p) + np(-m) + pm(-n)}{(m-n)(n-p)(p-m)} = \frac{-3mnp}{(m-n)(n-p)(p-m)}$$

$$\text{Do đó } A = \left(\frac{m-n}{p} + \frac{n-p}{m} + \frac{p-m}{n} \right) \left(\frac{p}{m-n} + \frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m} \right) = 9$$

H1. Cho a, b, c là các số thực dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$1 < \log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b < 2$$

3. Một số logarit quan trọng

a) Logarit thập phân

Trong tính toán thông thường, ta thường dùng hệ đếm cơ số 10 và chính vì thế mà phép toán logarit cơ số, hay còn gọi là logarit thập phân chiếm một vị trí rất quan trọng.

Định nghĩa 2

Logarit cơ số 10 của một số thực dương x được gọi là logarit thập phân của x và kí hiệu là $\log x$ hoặc $\lg x$.

Ví dụ 3. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được tính theo công thức $[\log N] + 1$. Hãy so sánh hai số sau 20^{99} và 1001^{50} .

Lời giải. Theo công thức trên thì số chữ số của 20^{99} là

$$[\log 20^{99}] + 1 < [\log 20^{100}] + 1 = [100 \cdot (\log 2 + 1)] + 1 < [100 \cdot (\log \sqrt{10} + 1)] + 1 = 151.$$

$$\text{Số chữ số của } 1001^{50} \text{ là } [\log 1001^{50}] + 1 > [50 \cdot \log 1000] + 1 = 151.$$

Từ đó suy ra 20^{99} có ít chữ số hơn 1001^{50} nên $20^{99} < 1001^{50}$.

H2. Hãy dự đoán và chứng minh công thức tính số chữ số của một số N viết trong hệ nhị phân, bát phân.

b) Logarit tự nhiên

Chúng ta đã được giới thiệu trong chương trình lớp 11 giá trị của số e là giới hạn của biểu

thức $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ khi x dần tới vô cực và nó xấp xỉ bằng 2,718281828... Các logarit có cơ số

là e lại xuất hiện rất thường xuyên và tự nhiên trong nhiều lĩnh vực của đời sống.

Định nghĩa 3

Logarit cơ số e của một số dương α được gọi là logarit tự nhiên (hay logarit Nê-pe) của số α và kí hiệu là $\ln \alpha$.

H3. Một người gửi tiền có giá trị K (VNĐ đồng) vào ngân hàng và lãi suất hàng tháng là $m\%$ được tính dựa trên tổng tiền vốn và lãi của tháng trước. Hỏi sau bao lâu thì người này nhận được tổng tiền vốn và lãi gấp ba lần tiền vốn ban đầu?

c)Logarit nhị phân

Một logarit khác cũng được dùng trong một số lĩnh vực của đời sống là logarit nhị phân với cơ số 2. Trong Tin học, hệ nhị phân được dùng xuyên suốt trong tất cả các nội dung lí thuyết và ứng dụng. Những bài toán có độ phức tạp đánh giá theo một đại lượng gọi là big – O thường có giá trị là $\log_2 n$. Một số bài toán vật lí về chu kì bán rã cũng có xuất hiện logarit dạng này. Trong một số tài liệu nước ngoài, đôi khi người ta kí hiệu $\log n$ để chỉ logarit nhị phân tương tự như logarit thập phân trong các tài liệu thông dụng ở Việt Nam. Do đó, để tránh nhầm lẫn, ta vẫn dùng $\log_2 n$ để chỉ logarit cơ số 2 của số dương n .

Ví dụ 4. Trong Tin học, độ hiệu quả của một thuật toán tỉ lệ với thời gian thực thi chương trình tương ứng và được tính theo công thức $E(n) = \frac{n}{P(n)}$ với n là số lượng dữ liệu đưa vào và $P(n)$ là độ phức tạp của thuật toán ứng với giá trị n . Biết rằng một thuật toán có độ phức tạp là $P(n) = \log_2 n$ và khi $n = 300$ thì để chạy nó, máy tính mất 0,02 giây. Hỏi khi $n = 90000$ thì phải mất bao lâu để thực thi chương trình tương ứng?

Lời giải.

-Với $n = 300$ thì độ hiệu quả của thuật toán là $E(300) = \frac{300}{\log_2 300}$.

-Với $n = 90000$ thì độ hiệu quả của thuật toán là

$$E(90000) = \frac{90000}{\log_2 90000} = \frac{300^2}{\log_2 300^2} = \frac{300}{2} \cdot \frac{300}{\log_2 300} = 150.E(300)$$

Do tốc độ chạy chương trình tỉ lệ với độ hiệu quả của thuật toán nên khi $n = 90000$ thì chương trình cần $150.0,02 = 3$ giây.

BÀI TẬP

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $\log_8 9 + \log_9 10 + \log_{10} 11 < 2 \log_2 3$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức sau $u_n = \frac{1}{\log_n 2010}, n = 2, 3, 4, \dots$

Đặt $a = u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}, b = u_{63} + u_{64} + u_{65} + u_{66} + u_{67}$. Tính $M = b - a$.

Bài 2.

a) Cho x, y, z, a là các số thực dương đôi một khác nhau và khác 1 thỏa mãn

$$\log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z, \log_a y = 1 + \log_a y \cdot \log_a x$$

Tính giá trị biểu thức sau $A = \log_{\frac{a}{x}} a \cdot \log_{\frac{a}{y}} a \cdot \log_{\frac{a}{z}} z \cdot \log_x a \cdot \log_y a \cdot \log_z a$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn dãy đẳng thức sau

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$$

Chứng minh rằng $x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y = z^x \cdot x^z$.

Bài 3.

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < c$. Chứng minh rằng

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính

$$a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$$

Bài 4.

Với mọi số tự nhiên n , hãy chứng minh rằng $n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

Hãy xây dựng và chứng minh các đẳng thức tương tự.

Bài 5.

Chứng minh hệ phương trình sau có ít nhất 6 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z = 10 \\ 2^x 3^y 5^z = 30 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Bài 6.

a) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x

$$\log_2(1 + 2^x) > \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x)$$

b) Cho $a > b$. Chứng minh rằng $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b < \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Bài 7.

Người ta định nghĩa rằng: “Số siêu việt là số thực không phải là nghiệm của bất kì phương trình đại số nào”. Người ta cũng đã chứng minh được các số $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}, \dots$ là các số siêu việt. Các giá trị của logarit hầu hết là các số siêu việt nhưng để chứng minh được điều này thực sự rất khó và nó nằm ngoài chương trình THPT. Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh một số vấn đề đơn giản hơn.

Biết rằng “logarit thập phân của một số nguyên dương hoặc là số hữu tỉ hoặc là số siêu việt”, hãy chứng minh rằng $\log_2 5$ là số siêu việt.

KIẾN THỨC BỔ SUNG

Số một kiến thức về cơ sở của logarit tự nhiên - số e

Như trong phân lý thuyết ở trên, ta có nêu ra định nghĩa rằng $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Tuy nhiên trên thực tế, còn một dạng biểu diễn nữa của giá trị này cũng có tầm quan trọng không kém là $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$. Ta sẽ hiểu rõ hơn về dạng này của số e qua bài toán dưới đây.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, n \geq 1$.

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn của (u_n) và giới hạn đó là số vô tỉ.

Chứng minh. Ta thấy rằng với mọi $k \geq 3$ thì $k! = 1.2.3 \dots k \geq 2.2 \dots 2 = 2^{k-1}$ nên

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Rõ ràng dãy số này tăng thực sự và lại bị chặn trên nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n = a$. Ta sẽ chứng minh rằng a là số vô tỉ.

Giả sử ngược lại a là số hữu tỉ và tồn tại hai số nguyên dương thỏa $a = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}^+$ và

$(p, q) = 1$. Khi đó

$$(q+1)!a = (q+1)! \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) = (q+1)! \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+2}^n \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+1)!}{k!} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!}$$

Vì $(q+1)!a, \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+1)!}{k!}$ là các số nguyên dương nên ta cũng có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} \in \mathbb{Z}^+$.

Tuy nhiên, ta cũng có

$$\begin{aligned} \sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} &= \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \dots + \frac{1}{(q+2)(q+3) \dots (n-1)n} \\ &< \sum_{i=1}^{n-q-1} \frac{1}{(q+2)^i} = \frac{1}{q+2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(q+2)^{n-q-1}}}{1 - \frac{1}{q+2}} < \frac{1}{q+1} < 1 \end{aligned}$$

Điều mâu thuẫn này cho thấy điều giả sử ban đầu là sai. Vậy a là số vô tỉ.

Một bài toán tương tự là

Chứng minh rằng $\frac{[n!e]-1}{n}$ là số tự nhiên với mọi số tự nhiên $n > 0$.

Lời giải.

Ta có $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ nên $n!e = n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) + 1 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!}$

Đặt $n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!} = nA, A \in \mathbb{Z}$ và

Ta sẽ chứng minh rằng $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < 1$.

Thật vậy $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > \frac{1}{(n+1)^3}, \dots$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, ta có

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n!}{i!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Do đó $[n!e] = nA + 1$ nên $\frac{[n!e]-1}{n} = A \in \mathbb{Z}$. Ta có đpcm.

Ta đã chứng minh được bài toán nêu ra ở trên bằng lập luận tương đối đơn giản nhưng muốn chứng minh giới hạn đó cũng chính là e nêu ở trên thì thực sự không dễ.

Công thức này thực ra xuất phát từ một định lý nổi tiếng khác gọi là khai triển Taylor mà ở dạng tổng quát của nó chính là $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Tuy cũng cùng xét giới hạn trên tập hợp số tự nhiên nhưng công thức này tính chính xác số e hơn và chỉ cần $n = 6$ là ta có giá trị chính xác đến 3 chữ số thập phân của số e , điều mà biểu thức $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ phải cần $n \approx 5000$ mới đạt được.

Trong lĩnh vực Tổ hợp, bài toán về số hoán vị không có điểm bất động cũng khá nổi tiếng

và nó có liên quan đến số e này.

Nếu gọi n là số phần tử của một tập hợp và $S(n)$ là số cách đổi chỗ các phần tử này sao cho không có phần tử nào nằm ở vị trí cũ thì ta chứng minh được

$$S(n) = n(S(n-1) + S(n-2)), n = 1, 2, 3, \dots$$

Khi đó, ta cũng có
$$S(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

Người ta cũng chứng minh được rằng giới hạn của tổng nói trên khi n tiến tới vô cực

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \text{ đúng bằng } e^{-1}.$$

Dưới đây là một bài toán nêu lên sự so sánh về tính toán giá trị của số e với hai biểu thức giới hạn vừa nêu.

Với việc tính toán trên máy tính thì thời gian thực hiện các phép nhân và chia lớn gấp đôi thời gian thực hiện các phép tính cộng và trừ. Vì thế, một tiêu chí để đánh giá tính hiệu quả của một công thức (hay thuật toán) là ở chỗ cho phép sử dụng ít nhất có thể các phép tính nhân và chia. Với số e , người ta có thể tính xấp xỉ nó theo các công thức sau đây

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \text{ và } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Theo bạn, để tính được giá trị của biểu thức $A = \left(1 + \frac{1}{1005} \right)^{1005}$ thì cần tới bao nhiêu

phép nhân và chia và khi ấy kết quả thu được số e chính xác tới bao nhiêu chữ số thập phân sau dấu phẩy?

Câu hỏi tương tự với biểu thức $B = \sum_{n=0}^6 \frac{1}{n!}$.

(Đề thi Giải toán trên máy tính cầm tay cấp khu vực năm 2009)

§ 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LOGARIT.

Trong phần này, chúng ta sẽ phân tích và xem xét các phép tính lũy thừa, logarit ở dạng tổng quát. Thông qua đó, chúng ta sẽ tìm mối quan hệ sâu sắc giữa ba dạng hàm số là hàm mũ, hàm lũy thừa và hàm logarit. Việc khảo sát tính biến thiên của các hàm này là cơ sở quan trọng để giải nhiều dạng Toán quan trọng.

1. Hàm số lũy thừa

a) Tính chất

Hàm số lũy thừa là các hàm số có dạng $y = x^\alpha$ trong đó α là một hằng số tùy ý.

Ta có một số tính chất sau của hàm số lũy thừa

-Hàm số $y = x^n$ với n nguyên dương xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

-Hàm số $y = x^n$ với n nguyên âm hoặc $n = 0$, xác định với mọi $x \neq 0$.

-Hàm số $y = x^\alpha$ với α không nguyên có tập xác định là tập tất cả các số thực dương.

Người ta đã chứng minh được rằng hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của chúng.

Chú ý rằng đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra khi $x > 0$. Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Việc xem xét hai hàm số này như nhau là một sai lầm thường gặp của các bạn học sinh khi giải các bài toán liên quan đến hàm số lũy thừa.

b) Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Định lí 1.

1) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

2) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương với mọi x và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = (u(x))^\alpha$ cũng có đạo hàm trên J và

$$\left(u^\alpha(x)\right)' = \alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)$$

Chú ý

1) Dùng định lí trên, ta có thể chứng minh được công thức đạo hàm của hàm số căn bậc n

là $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ với mọi $x > 0$ nếu n chẵn và mọi $x \neq 0$ nếu n lẻ.

2) Nếu $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và nhận giá trị dương với mọi $x \in J$ thì khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ khi n lẻ thì

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{x}}$.

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-x \cdot \cos x - (1 - \sin x)}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - \sin x}{x}}} = \frac{\sin x - 1 - x \cdot \cos x}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{1 - \sin x}}$.

Do đó, đạo hàm cần tìm chính là $y' = \frac{\sin x - 1 - x \cdot \cos x}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{1 - \sin x}}$.

H1. Tìm tập xác định và tính đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

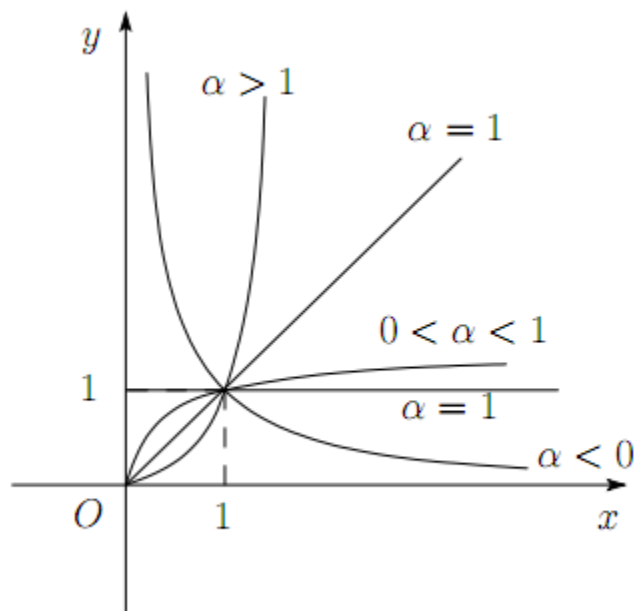
Chú ý rằng trong nhiều trường hợp, ta cần xét tính biến thiên của hàm số có dạng

$y = \sqrt[n]{u(x)}, n \in \mathbb{N}$ và cần tính đạo hàm để xét chiều biến thiên. Trong trường hợp n chẵn thì điều kiện cần có là $u(x) > 0$ đã rõ ràng nhưng trong trường hợp n lẻ thì điều kiện $u(x) \neq 0$ có khi chưa được đáp ứng (chẳng hạn hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ xác định với mọi số thực x nhưng khi đạo hàm thì trở thành $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ cần điều kiện $x \neq 0$). Vì thế, khi xét các hàm số như thế, ta cần xét trường hợp $u(x) = 0$ trước rồi mới khảo sát hàm số $y = \sqrt[n]{u(x)}, n \in \mathbb{N}$ khi $u(x) \neq 0$.

c) Sự biến thiên của đồ thị hàm số lũy thừa

Trong phần này, ta chỉ xét các hàm số lũy thừa có dạng $y = x^\alpha$ với $\alpha \neq 0$ và với tập xác định là $(0; +\infty)$. Từ công thức đạo hàm, ta thấy rằng hàm này đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$.

Ta xét một số đồ thị minh họa



Để dễ dàng đối chiếu các tính chất của hai hàm số mũ và logarit, ta sẽ xét chúng trong cùng một phần. Ta luôn giả thiết rằng a là số dương khác 1 đã cho trước và J là hợp của hai hay nhiều khoảng nào đó.

2) Hàm số mũ và hàm số logarit

Định nghĩa

Giả sử a là một số dương khác 1. Khi đó

- Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .
- Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a .

Ta cũng dùng kí hiệu $\log x, \ln x$ để lần lượt chỉ hàm số logarit thập phân và hàm số logarit tự nhiên, còn hàm số logarit thông thường với cơ số a bất kì thì được gọi chung là hàm số logarit. Một số tài liệu còn dùng kí hiệu $y = \exp(x)$ để chỉ hàm số logarit tự nhiên.

Ví dụ 2. Xét hàm số sau $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức sau

$$S = \sqrt{2} (f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3))$$

Lời giải. Ta thấy rằng nếu $f(1-x) = \frac{1}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{2^x}{2 + \sqrt{2} \cdot 2^x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$. Do đó

$$f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{1}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Từ đó suy ra $S = 3$.

b) Một số giới hạn liên quan

Ta thừa nhận rằng các hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.

Ta cũng biết rằng $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ và tương tự $\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ nên bằng đổi biến $\frac{1}{t} = x$,

ta được $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Do đó, ta có hai định lí sau

Định lí 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Các phép chứng minh cho định lí này đã được trình bày đầy đủ trong SGK Toán 12. Ta sẽ xét một số ví dụ ứng dụng của các kết quả này.

Ví dụ 3. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} [\cot x (e^{\sin 3x} - 1)]$.

Lời giải. Ta có $\cot x (e^{\sin 3x} - 1) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\sin 3x} \cdot \sin 3x = \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\sin 3x} \cdot \cos x (3 - 4 \sin^2 x)$.

Theo định lí trên thì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} [\cot x (e^{\sin 3x} - 1)] = 3$.

H2. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(8x^3 + 1)}{\tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x}$.

H3. Từ tính chất của hàm số mũ và logarit, một bạn giải bài toán dưới đây như sau. Bạn hãy nhận xét tính đúng sai của lời giải dưới đây!

Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $(x^2 - 7x + 11)^{x^2 - 11x + 30} = 1$. Ta xét các trường hợp sau

-Nếu $x^2 - 7x + 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$ thì dễ thấy biểu thức đã cho đúng. Do đó ta có hai giá trị thỏa mãn là $x = 2$ và $x = 5$.

-Nếu $x^2 - 7x + 11 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$ thì dễ thấy biểu thức đã cho cũng đúng vì ứng với hai giá trị $x = 3$ và $x = 4$ thì $x^2 - 11x + 30$ là số chẵn. Do đó ta có hai giá trị thỏa mãn là $x = 3$ và $x = 4$.

-Nếu $x^2 - 7x + 11 \neq \pm 1$ thì ta phải có $x^2 - 7x + 11 \neq 0, x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 6$, cũng thỏa mãn.

Vậy có tất cả 5 giá trị thỏa mãn biểu thức đã cho là $x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$.

c)Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit.

Định lí 3. (đạo hàm của hàm số mũ)

-Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

-Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = a^{u(x)}$ cũng có đạo hàm trên J và

$$y' = u'(x)a^{u(x)} \ln a.$$

Định lí 4. (đạo hàm của hàm số logarit)

-Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

-Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = \log_a u(x)$

cũng có đạo hàm trên J và $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

Chú ý rằng từ các định lí trên thì hàm số mũ và hàm số logarit cơ số là e có đạo hàm khá đặc biệt là $(e^x)' = e^x, (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Do tính chất này mà các hàm số này có khá nhiều ứng dụng trong việc giải toán liên quan đến hàm số.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng hàm số $y = \ln(x^3 + 2x^2 + 5x - 8)$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải. Ta có $x^3 + 2x^2 + 5x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 8) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Do đó, điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x > 1$.

Ta có $y' = \frac{(x^3 + 2x^2 + 5x - 8)'}{x^3 + 2x^2 + 5x - 8} = \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)(x^2 + 3x + 8)} > 0, \forall x > 1$ nên hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

Ví dụ 5. Biết rằng đa thức $P(x)$ bậc n có đúng n nghiệm thực phân biệt (n là số nguyên dương). Với k là số thực khác 0 tùy ý, hỏi đa thức $kP(x) + P'(x)$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải. Ta xét hàm số tương ứng sau $f(x) = e^{kx}P(x)$.

Dễ thấy hàm số này cũng có đúng n nghiệm thực phân biệt. Ta có

$$f'(x) = ke^{kx}P(x) + e^{kx}P'(x) = e^{kx}[kP(x) + P'(x)], f'(x) = 0 \Leftrightarrow kP(x) + P'(x) = 0.$$

Do hàm số đang xét có n nghiệm phân biệt nên đạo hàm của nó phải có $n-1$ nghiệm thực phân biệt (giữa các khoảng nghiệm của hàm số ban đầu). Đa thức $kP(x) + P'(x)$ có bậc n nên nếu nó có $n-1$ nghiệm thì nó cũng phải có một nghiệm thực nữa (theo định lí Viète).

Vậy đa thức $kP(x) + P'(x)$ cũng có đúng n nghiệm thực phân biệt.

H4. Tìm các điểm cực trị của hàm số sau $y = x^4 + 2x^2 - 2x + \ln(2x+1)$.

H5. Biết rằng đa thức $P(x)$ bậc n có đúng n nghiệm thực phân biệt (n là số nguyên dương). Với k là số thực tùy ý, hỏi phương trình $kP(x) = P'(x)$ có bao nhiêu nghiệm?

Một dạng hàm số thường gặp nữa là hàm có dạng vừa là hàm mũ, vừa là hàm lũy thừa mà ví dụ đơn giản nhất chính là $y = x^x, x > 0$. Ta sẽ tìm cách tính đạo hàm và khảo sát tính biến thiên của hàm số này trên khoảng $(0; +\infty)$. Có hai cách thường gặp là

Cách 1. Viết lại hàm số dưới dạng $y = e^{x \ln x}$, đây là hàm số mũ thông thường nên ta có

thể tính đạo hàm dễ dàng là $y' = (x \ln x)' \cdot (e^{x \ln x})' = (\ln x + 1) \cdot e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Từ đó suy ra hàm này tăng trên $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$ và giảm trên $\left(0; \frac{1}{e}\right)$.

Cách 2. Lấy logarit hai vế của biểu thức $y = x^x$, ta được $\ln y = x \ln x$. Đến đây, ta tính đạo hàm hai vế $(\ln y)' = (x \ln x)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Leftrightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$. Việc khảo sát tính biến thiên được tiến hành tương tự.

H6. Tính đạo hàm của các hàm số sau theo hai cách

$$y = x^{\sqrt{x}}, x > 0; g = (\sin x)^{\cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

H7. Hãy dùng phương pháp khảo sát hàm số, chứng minh lại bất đẳng thức sau

$$\log_2(1 + 2^x) > \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x), \forall x \in \mathbb{R}$$

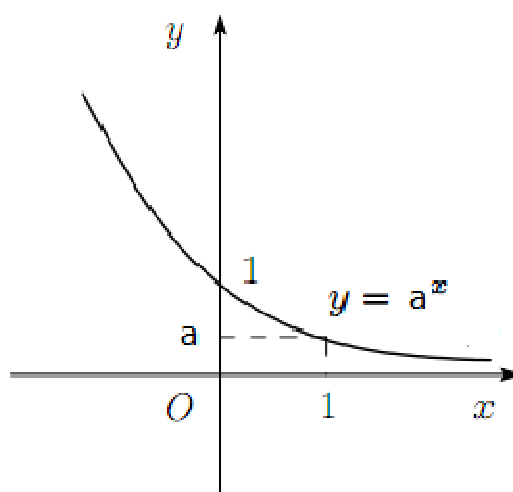
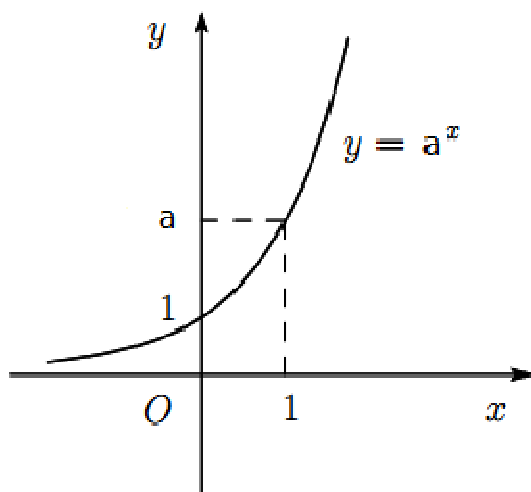
d) Sự biến thiên của hàm số mũ và hàm số logarit.

***Về hàm số mũ $y = a^x$.**

Hàm số này liên tục trên tập xác định là $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0, +\infty)$.

Hàm số này đồng biến với $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(0; 1)$, nằm phía trên trục hoành và nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang.

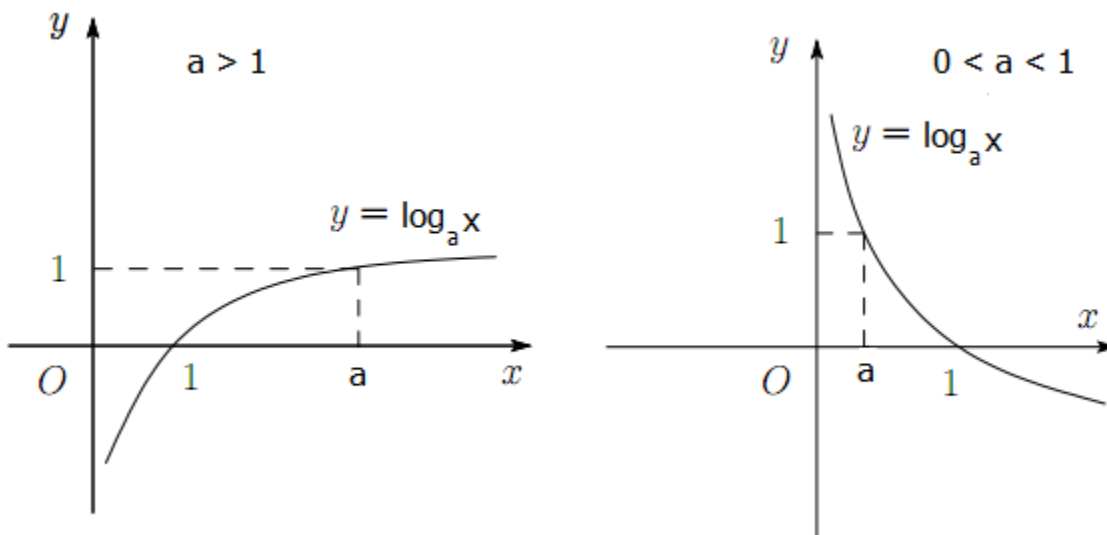


***Về hàm số $y = \log_a x$.**

Hàm số này liên tục trên tập xác định là $(0, +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Hàm số này đồng biến với $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm $(1; 0)$, nằm bên phải trục tung và nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng.



Qua các đồ thị này, ta càng thấy rõ hơn tính chất của hai hàm ngược nhau là $y = a^x$ và $y = \log_a x$. Với cùng một cơ số a cho trước thì đồ thị của hai hàm này đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ví dụ 6. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}}$.

Lời giải. Ta biến đổi biểu thức đã cho như sau

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\cos 3x} \right)^{\frac{\cos 3x}{\cos 5x - \cos 3x}} \right]^{\frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \cdot \sin x \cdot \cos 3x}}.$$

$$\text{Theo giới hạn cơ bản thì } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\cos 3x} \right)^{\frac{\cos 3x}{\cos 5x - \cos 3x}} \right] = e.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \cdot \sin x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x \cdot \sin x}{x \cdot \sin x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-8}{\cos 3x} \right] = -8$.

Do đó, giới hạn cần tìm là $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = e^{-8}$.

Chú ý. Giới hạn có dạng như sau $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ trong trường hợp thông thường có kết quả là $[f(a)]^{g(a)}$. Tuy nhiên, một số bài toán khi thay a vào các hàm này thì ta lại thu được 1^∞ , rõ ràng biểu thức này không thể xác định được giá trị và đây cũng lại là một dạng vô định mới ngoài các dạng đã xét ở chương trình Toán 11.

Muốn khử được dạng vô định này, hầu như ta luôn cần phải dùng đến giới hạn cơ bản là

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ bằng cách viết biểu thức trên về dạng $\lim_{x \rightarrow a} \left([1 + f(x) - 1]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right)^{g(x)[f(x)-1]}$,

trong đó, khi $x \rightarrow a$ thì $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow +\infty$. Như thế, ta đã chuyển được giới hạn phức tạp ở trên về

$\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)[f(x)-1]} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x)-1]}$. Giới hạn mới thu được cũng có dạng vô định nhưng nói chung đã dễ hơn dạng trước rất nhiều.

H8. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{3x-4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

BÀI TẬP

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $x > \ln(x+1), \forall x > 0$.

Từ đó chứng minh rằng dãy số $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ không bị chặn trên.

b) Cho các số dương a, b . Chứng minh rằng $a^b b^a \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

Bài 2.

a) Chứng minh hàm số $f(x) = \frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{c^x + a^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x}$ với a, b, c là các số thực dương cho trước đồng biến với mọi x dương.

b) Chứng minh rằng $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với $x, y > 0$.

Bài 3.

Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}, x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

b) Tính tổng $\sum_{k=1}^{99} f\left(\sin^2 \frac{k\pi}{100}\right)$.

Bài 4.

a) Với n là số nguyên dương lớn hơn 1, hãy tính giá trị của $A = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} \right]$

trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

b) Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ thỏa mãn hệ thức sau

$$2y = xy' + \ln y'$$

Bài 5.

Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(n \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n} \right) \right) \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{1}{3x + \sin x}}$

Bài 6.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ tại điểm $x = \frac{3}{4}$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $4(a + b + c) - 9 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^a (b + \sqrt{b^2 + 1})^b (c + \sqrt{c^2 + 1})^c$$

Bài 7.

Từ việc khảo sát đẳng thức $a^b = b^a$ với a, b dương, hãy giải các bài toán sau

i. Cho a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn đẳng thức $a^b = b^a$. Chứng minh rằng

bất đẳng thức $a^2 \ln^2 b - (a + b) \ln b + b < 0$.

ii. Chứng minh phương trình $(x + 1)^x = x^{x+1}$ có đúng một nghiệm dương.

iii. Gọi T là tập hợp các cặp số thực dương a, b phân biệt thỏa mãn đẳng thức $a^b = b^a$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực x_0 không phụ thuộc a, b sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f_{(a,b)}(x) = |x - a| + |x - b| + |x - 2| + |x - 3|$ đạt tại $f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi cặp giá trị $(a, b) \in T$.

§ 4. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Không chỉ dừng lại ở ứng dụng lý thuyết, các hàm số đề cập đến trong phần này thể hiện một vai trò quan trọng trong thực tế. Các bài toán về tiền gửi ngân hàng, về phát triển dân số, về các quá trình vận động phát triển của tự nhiên,...

1) Sơ lược về ứng dụng trong lý thuyết của hàm số mũ và logarit

a) Các bài toán về hàm số

Trong chương trình Vật lí 12, ta đã quen với công thức quan hệ giữa tọa độ của chất điểm và gia tốc tức thời của nó là $x(t) + \omega^2 x''(t) = 0$. Một nghiệm quen thuộc mà các bạn đã được giới thiệu là $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ với t là thời điểm được xét. Các phương trình hàm có chứa đạo hàm như thế này được gọi là phương trình vi phân. Phương trình vi phân là một trong các kiến thức cơ sở của chương trình Toán Cao cấp trên Đại học nhưng những ứng dụng của nó vẫn xuất hiện ở một số nội dung của Toán Sơ cấp. Đây là một phần cực kì quan trọng của Toán ứng dụng và nhiều nhà Toán học trên thế giới vẫn đang theo đuổi, tìm các công thức nghiệm cho một số dạng đặc biệt của phương trình vi phân. Phương trình vi phân không có công thức giải tổng quát mà chỉ giải được trong một số trường hợp cụ thể nhất định.

Chẳng hạn phương trình $y'(x) + 2x.y(x) = 4x$, trong đó ẩn số là hàm $y(x)$ là một phương trình vi phân. Nghiệm của các phương trình dạng này có liên quan chặt chẽ đến số e và như đối với phương trình trên, tất cả các hàm thỏa mãn là $y = 2 + C.e^{-x^2}$.

Phương trình $x(t) + \omega^2 x''(t) = 0$ có chứa đạo hàm cấp 2 và các biểu thức quan hệ tuyến tính với nhau nên được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 trong trường hợp phương trình đặc trưng vô nghiệm nên nghiệm hàm của nó đưa ra dưới dạng lượng giác. Chẳng hạn một phương trình cùng dạng là $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$ có nghiệm là $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Cách giải của những phương trình này sau này sẽ được giới thiệu trong chương trình Toán Cao cấp của Đại học.

Một ứng dụng nữa của hàm mũ có liên quan đến số phức (sẽ được giới thiệu ở chương cuối) là việc biểu diễn dạng lượng giác của số phức.

Số có dạng $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ gọi là số phức. Dạng lượng giác của nó chính là $z = r(\sin \varphi + i \cos \varphi)$. Một công thức nổi tiếng có liên quan chính là $e^{ix} = \sin x + i \cos x$.

Nếu thay $x = \pi$ thì ta có $e^{i\pi} = -1$. Công thức tuyệt vời này được mang tên nhà Toán học đầu tiên tìm ra nó là Leonhard Euler (1707 - 1783).

Các hàm số mũ cũng gắn liền với các hàm số hyperbolic ở chương trình Toán cao cấp là $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Các hàm này có tính chất tương tự như các hàm lượng giác. Các quan hệ về hàm ngược và đạo hàm của chúng cũng rất thú vị và có nhiều ứng dụng quan trọng.

Thêm nữa, do tính chất chuyển từ hàm siêu việt sang hàm hữu tỉ qua một phép lấy đạo hàm, hàm số logarit (đặc biệt là logarit nepe) thường được dùng trong việc giải các bài toán biện luận số nghiệm, tính giới hạn của hàm số.

b) Giải phương trình hàm

Trong giải tích hàm, phương hàm Cauchy nổi tiếng có dạng như sau

Tất cả các hàm số liên tục thỏa mãn $f(x) + f(y) = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ là hàm tuyến tính, tức là $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Nhiều bài toán phương trình hàm khác có thể đưa về bài này, ngay cả các hàm nhân tính được chuyển về cộng tính thông qua một phép lấy logarit.

Ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \geq \ln x$ với mọi $x > 0$ và

$f(xy) \leq f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$. Chứng minh $f(x) = \ln x$, $\forall x > 0$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x) \leq \ln x$, $\forall x > 0$, cho $x = 1$, ta được $f(1) \leq 0$.

Ta có $f(xy) \leq f(x) + f(y)$, $\forall x, y > 0$, thay $y = 1$, ta được

$f(x) \leq f(x) + f(1)$, $\forall x > 0 \Leftrightarrow f(1) \geq 0$. Do đó $f(1) = 0$.

Thay $y = \frac{1}{x}$, ta được $f(1) \leq f(x) + f(\frac{1}{x}) \leq \ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$, nhưng $f(1) = 0$ nên với mọi số

dương x thì $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$.

Trong giả thiết, ta lại thay $x = y = \frac{1}{t}$ thì $f(\frac{1}{t^2}) \leq 2f(\frac{1}{t}) \leq \frac{2}{\ln t} = -2 \ln t$.

Trong (*), thay $x = \frac{1}{t}$, ta được $f\left(\frac{1}{t^2}\right) = -f(t^2) \geq -\ln(t^2) = -2\ln t$.

Do đó $-2\ln t \geq 2f\left(\frac{1}{t}\right) \geq -2\ln t \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \ln \frac{1}{t}, \forall t$ hay $f(x) = \ln x, \forall x > 0$. Ta có đpcm.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các hàm số liên tục thỏa mãn

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(Đề thi HSGQG 2006, bảng B)

Lời giải.

Cho $x = \frac{t}{2}, y = -\frac{t}{2}, z = 0$, ta có $f(t) \cdot f^2\left(-\frac{t}{2}\right) + 8 = 0$. Do đó, $f(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Điều kiện đã cho có thể viết lại là

$$\begin{aligned} 8 &= (-f(x-y))(-f(y-z))(-f(z-x)) \\ \Leftrightarrow 3 &= \log_2(-f(x-y)) + \log_2(-f(y-z)) + \log_2(-f(z-x)) \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = -\left(2^{g(x)+1}\right)$ thì điều kiện này trở thành $g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0$.

Nếu đặt $x-y=u, y-z=v$ thì $z-x=-(u+v)$. Ta có $g(u) + g(v) = -g(-u-v)$.

Dễ thấy $g(0) = 0$ nên nếu trong (*), thay $u=x, v=0$ thì $g(x) = -g(-x)$.

Do đó $g(u) + g(v) = g(u+v)$. Theo phương trình hàm cơ bản thì $g(x) = ax$ với a là hằng số nào đó. Suy ra $f(x) = -\left(2^{ax+1}\right)$,

c) Các bài toán bất đẳng thức

Tương tự như trên, do tính chất chuyển được một biểu thức dạng tích về dạng tổng và ngược lại nên các hàm số mũ, logarit cũng ứng để giải nhiều bài toán bất đẳng thức có dạng phù hợp.

Ví dụ 3. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $A = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 + \left(\log_{\frac{1}{2}} y - 1\right)^3$.

Lời giải. Thay $x = \frac{4}{y}$ vào biểu thức đã cho và biến đổi, ta được

$$A = -(\log_2 x)^3 + \left(-\log_2 \frac{4}{x} - 1\right)^3 = -(\log_2 x)^3 + (\log_2 x - 3)^3 = -9(\log_2 x)^2 + 27\log_2 x - 27$$

Do $y \geq 1$ nên $x \leq 4$, suy ra $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ nên nếu đặt $t = \log_2 x$ thì $-1 \leq t \leq 2$.

Ta có $A = -9t^2 + 27t - 9$ có đồ thị là một parabol có bề lõm hướng xuống và hoành độ của đỉnh là $\frac{3}{2}$ nên ta được:

Giá trị nhỏ nhất của A trên $[-1, 2]$ là $A = -9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 27 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 27 = \frac{-63}{4}$, đạt được khi $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

Giá trị lớn nhất của A trên $[-1, 2]$ là $A = -9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 27 = -\frac{27}{4}$, đạt được khi $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x, y) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

H1. Dùng hàm số để chứng minh bất đẳng thức sau $e^x > x - 1, \forall x > 0$.

H2. Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$ thì $\frac{\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln y}}{2} \leq \sqrt{\ln \left(\frac{x+y}{2}\right)}$

Ví dụ 4. Cho số thực x lớn hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < 1$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < 1 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} < \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} < e^{\ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)} < e^x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \\ &\Leftrightarrow xe^{\frac{x}{2}} + 1 < e^x < xe^x + 1 \end{aligned}$$

-Xét hàm số $f(x) = xe^{\frac{x}{2}} + 1 - e^x, x \geq 0$. Ta có $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right) \leq 0$ nên đây là hàm nghịch biến. Suy ra $f(x) \leq f(0) = 0$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$.

Do đó với $x > 0$ thì $f(x) < 0, \forall x > 0$ hay $xe^{\frac{x}{2}} + 1 < e^x, x > 0$.

-Xét hàm số $g(x) = xe^x + 1 - e^x, x \geq 0$. Ta có $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x, x \geq 0$ nên đây là hàm đồng biến. Suy ra $g(x) \geq g(0) = 0$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$.

Do đó với $x > 0$ thì $g(x) > 0, \forall x > 0$.

Từ hai điều này, ta suy ra $xe^{\frac{x}{2}} + 1 < e^x < xe^x + 1$ hay $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < 1$.

H3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a+1)^{a-b}(b+1)^{b-c}(c+1)^{c-a} \geq (a+1)^{c-a}(b+1)^{a-b}(c+1)^{b-c}$$

2) Các ứng dụng trong thực tế

a) Trong kinh tế

Ngoài ứng dụng về bài toán lãi kép trong gửi tiền vào ngân hàng quen thuộc, hàm số mũ và hàm số logarit cũng được dùng trong các bài toán về tìm cực trị trong những vấn đề kinh tế khác. Trong thực tế, khái niệm hàm lợi ích (utility function) $f(x, y) = x^a y^{1-a}$ rất quan trọng, nó thể hiện mối quan hệ giữa số lượng hàng hóa và các yếu tố của thị trường và hàm này thường là một hàm lũy thừa, hàm số mũ hoặc hàm số logarit. Vấn đề đặt ra khi đã xác định được hàm lợi ích rồi thì số sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để doanh thu đạt cao nhất. Chúng ta xem xét ví dụ sau.

Ví dụ 5. Một công ty kinh doanh nghiên cứu thị trường trước khi tung ra sản phẩm mới và nhận thấy với hai hàng hóa A và B có giá lần lượt là 2 và 5 (đơn vị tiền) thì hàm lợi ích

của chúng là $u(x_1, x_2) = (x_1)^{\frac{1}{3}}(x_2)^{\frac{1}{2}}$ với x_1, x_2 lần lượt là số lượng hàng hóa loại A và B sản xuất ra (đây là hàm có hai biến để chỉ sự phụ thuộc của đại lượng lợi ích kinh doanh theo số lượng hàng hóa). Nếu với chi phí định trước là 40 thì cần sản xuất mỗi loại bao nhiêu để doanh thu đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải. Dễ dàng thấy rằng với các dữ kiện giả thiết cho thì quan hệ giữa x_1, x_2 là

$$2x_1 + 5x_2 = 40, x_1, x_2 \in [0, 40].$$

Từ quan hệ này, ta thấy $x_2 = \frac{40-2x_1}{5}$, thay vào hàm tiện tích đã cho, ta được hàm mới là

$$f(u_2) = (x_1)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{40-2x_1}{5} \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Ta cần tìm giá trị lớn nhất của đại lượng này.}$$

Lấy lũy thừa mũ 6 hai vế, ta có $g(u_2) = f^6(u_2) = (x_1)^2 \left(\frac{40-2x_1}{5} \right)^3$. Ta có

$$g'(u_1) = 2x_1 \left(\frac{40-2x_1}{5} \right)^3 - \frac{3 \cdot 2}{5} (x_1)^2 \left(\frac{40-2x_1}{5} \right)^2 = \frac{-8}{25} x_1 (x_1 - 8)(x_1 - 20)^2. \text{ Do đó}$$

$g'(u_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_1 = 8 \vee x_1 = 20$ và chỉ có $x_1 = 8$ là điểm cực trị của hàm này trên miền $[0, 40]$.

Khảo sát hàm này trên $[0, 40]$, ta thấy $g(u_1)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x_1 = 8$.

Tương ứng với $x_1 = 8$, ta có $x_2 = \frac{24}{5}$.

Nhưng ta cần tìm các số nguyên nên ta chọn giá trị gần với cặp này nhất trong trường hợp thực tế để sản xuất cho phù hợp.

Ngoài ra, trong kinh tế, các hàm biểu diễn cho mức lợi nhuận cao trần hoặc độ hiệu quả của quảng cáo thường là hàm mũ hoặc logarit. Các tính toán tìm giá trị cực đại hoặc cực tiểu cho những hàm số này thường đòi hỏi sự hỗ trợ của máy móc để thu được kết quả nhanh chóng và chính xác.

b) Trong khoa học kĩ thuật

* Độ tăng của hàm và độ phức tạp của thuật toán.

Trong nhiều lĩnh vực khoa học kĩ thuật, đặc biệt là Tin học, khái niệm big-O được sử dụng khá nhiều và logarit cũng xuất hiện thường xuyên với nó. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu thế nào là big-O và phân tích ứng dụng của nó.

Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ta nói $f(x)$ là $O(g(x))$ (đọc là big-O của $g(x)$) nếu tồn tại hai hằng số C và k sao cho

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x \geq k$$

Từ định nghĩa này, ta thấy rằng muốn chứng minh $f(x)$ là $O(g(x))$, ta chỉ cần chứng tỏ sự tồn tại của C và k (rõ ràng có nhiều giá trị như vậy).

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 3$ là $O(x^2)$.

Lời giải. Ta thấy rằng với mọi $x > 2$ thì $x^2 > 2x, x^2 > 3$ nên $f(x) = x^2 + 2x + 3 < 3x^2$.

Do đó $|f(x)| < 3x^2, \forall x > 2$ nên $f(x) = x^2 + 2x + 3$ là $O(x^2)$ ứng với $C = 3, k = 2$.

Dễ dàng thấy rằng ta cũng có $f(x) = x^2 + 2x + 3$ là $O(x^3)$ ứng với $C = 3, k = \frac{3}{2}$ nên một hàm số có thể có nhiều big-O và ta thường quan tâm đến big-O tốt nhất (tức là chọn hàm $g(x)$ sao cho $g(x)$ cũng là $O(f(x))$, người ta còn gọi cặp hàm này là big-Theta của nhau). Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $f(x) = x^3 - x + 4$ và $g(x) = x^3$ là big-O của nhau.

Lời giải.

Ta thấy với $x > 2$ thì $x^3 > -x, x^3 > 4$ nên $f(x) = x^3 - x + 4 < 3x^3$. Do đó $f(x)$ là big-O của $g(x)$ ứng với $C = 3, k = 2$.

Ta cũng có với $x > 1$ thì $x^3 - 2x + 8 > 0 \Rightarrow x^3 < x^3 + (x^3 - 2x + 8) = 2(x^3 - x + 4)$ nên $f(x)$ cũng là big-O của $f(x)$ ứng với $C = 2, k = 1$.

Ta có đpcm.

Người ta đã chứng minh được các định lí sau.

(1) Nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ là đa thức bậc n thì nó là $O(x^n)$.

(2) Cho hai hàm số $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì hàm tổng của chúng $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(\max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\})$.

(3) Cho hai hàm số $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì hàm tích của chúng $(f_1 f_2)(x)$ là $O(\max\{g_1(x)g_2(x)\})$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $\log n!$ là $O(n \log n)$ với n là số tự nhiên và từ đó xét big-O của hàm số $f(n) = 4n \log(n!) + (n^2 + 1) \log n$.

Lời giải.

Ta thấy rằng $n! = 1.2.3...n \leq n.n.n...n = n^n \Rightarrow \log(n!) < n \log n$. Do đó $\log n!$ là $O(n \log n)$ ứng với $C = 1, n = 1$.

Từ đó suy ra $4n \log(n!)$ có big-O là $n.n.\log n = n^2 \log n$ ứng với $C = 4, n = 1$ (do big-O của $4n$ là n và theo nội dung định lí 3). Tương tự, ta thấy $(n^2 + 1) \log n$ là big-O của $n^2 \log n$ ứng với $C = 2, n = 1$.

Do đó $f(n) = 4n \log(n!) + (n^2 + 1) \log n$ là big-O của $n^2 \log n$ ứng với $C = 6, n = 1$.

H4. Hãy đánh giá big-O của $f(x) = (2x + 3) \log(x^2 + 4) + x^2$ bằng cách chứng minh rằng $\log n$ là big-O của n .

H5. Chứng minh rằng $n \log n$ là $O(\log n!)$.

Người ta cũng đưa ra nhiều đánh giá cho giá trị $n!$, chẳng hạn như

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ hoặc } \log(n!) \approx n \log n - n + \frac{\log(n(1 + 4n(1 + 2n)))}{6} + \log\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Trong Tin học, mỗi vấn đề thường giải quyết bằng nhiều thuật toán mà chúng được đánh giá bởi một khái niệm gọi là độ phức tạp. Đó chính là số phép toán cần phải thực hiện trong trường hợp xấu nhất. Trong phần này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các thuật toán tìm kiếm và thuật toán sắp xếp, hai vấn đề quen thuộc trong đời sống (các vấn đề này có giới thiệu trong chương trình Tin học 11).

Về thuật toán tìm kiếm, ta thường gặp hai thuật toán tìm kiếm tuần tự và tìm kiếm nhị phân. Có thể hiểu một cách đơn giản là thuật toán thứ nhất duyệt một phần tử từ đầu đến cuối danh sách trong khi thuật toán thứ hai lại chia đôi số lượng phần tử để xem xét.

Người ta chứng minh được rằng thuật toán thứ nhất có big-O là n (còn gọi là độ phức tạp tuyến tính) và của thuật toán thứ hai thì big-O là $\log_2 n$.

Về thuật toán sắp xếp thì có rất nhiều và hai thuật toán cơ bản là sắp xếp tuyến tính, sắp xếp nổi bọt. Các thuật toán này thường có độ phức tạp là n^2 và ít khi áp dụng trong các bài toán sắp xếp với số lượng dữ liệu lớn. Người ta đã nghiên cứu ra nhiều thuật toán nâng

cao với độ phức tạp giảm xuống chỉ còn $O(n \log_2 n)$ như thuật toán sắp xếp nhanh (quick sort), sắp xếp chọn (selection sort), sắp xếp đống (heap sort),... Chúng ta có thấy một ứng dụng quen thuộc là trong các từ điển điện tử. Khi người dùng nhập từ vào ô tìm kiếm, kết quả trả về rất nhanh chóng và đó chính là việc dùng một thuật toán sắp xếp cao cấp có độ phức tạp là $O(1)$.

H6. Hãy chứng tỏ rằng thuật toán có độ phức tạp $O(n \log_2 n)$ thì tốt hơn thuật toán có độ phức tạp là $O(n^2)$.

c) Trong các lĩnh vực khác

Bài toán về gia tăng dân số

Theo các nhà nghiên cứu thì dân số của thế giới tăng hàng năm theo một hàm mũ theo thời gian có dạng như sau $P(t) = P(0).e^{kt}$ trong đó $P(0)$ là dân số tại thời điểm chọn làm mốc, $P(t)$ là dân số thế giới sau mốc thời gian t năm và hệ số k được xác định tùy theo khoảng thời gian. Hiện nay Trung Quốc đang là nước đông dân nhất với hơn 1,3 tỉ người và đứng thứ hai là Ấn Độ nhưng theo nhận định về tỉ lệ gia tăng hiện nay khác nhau giữa các vùng, miền nên khoảng vài chục năm nữa Ấn Độ sẽ có dân số cao nhất thế giới. Nước ta hiện nay có khoảng 89 triệu người và dân số đứng hàng 13 trên thế giới. Các nước đang ráo riết thực hiện các chính sách dân số vì nếu không trên đà tăng trưởng quá mức cho phép này thì rất nhiều vấn đề về đời sống, kinh tế xã hội nảy sinh không thể kiểm soát được. Quay trở lại hàm tăng trưởng dân số, ta xét ví dụ sau để hiểu rõ thêm vấn đề này.

Ví dụ 9. Dân số thế giới năm 1950 là 2,56 tỉ người và năm 1960 là 3,04 tỉ người. Biết rằng dân số thế giới tăng theo hàm mũ có dạng như trên. Hãy ước lượng dân số vào năm 1993 và dự đoán thế giới sẽ có số dân là bao nhiêu vào năm 2020?

Lời giải. Ta xét hàm tăng dân số $P(t) = P(0).e^{kt}$.

Chọn $t = 0$ vào năm 1950, tức là $P(0) = 2,56$ (đơn vị là tỉ người).

Suy ra $P(10) = 3,04$ và ta cũng có $3,04 = 2,56.e^{10k} \Rightarrow k = \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{3,04}{2,56} \approx 0,017185$.

Như thế, hàm tăng trưởng dân số thế giới trong giai đoạn này là $P(t) = 2,56.e^{0,017185t}$.

Từ đó ta tính được

- Vào năm 2000, dân số thế giới vào khoảng $P(50) = 2,56.e^{0,017185 \cdot 50} \approx 6.05$ tỉ người.

-Dự đoán vào năm 2020 sẽ là $P(70) = 2,56.e^{0,017185.70} \approx 8.52$ tỉ người.

Hàm số này càng về sau có độ chính xác không nhiều nên để dự đoán các năm tiếp theo, ta cập nhật lại mốc thời gian và tính toán. Tất nhiên, để có được một dự đoán sát thực tế, các nhà nghiên cứu còn dựa trên hàng loạt yếu tố khác chứ không chỉ đơn giản chỉ là theo các công thức như trên. Dưới đây là bảng số liệu về dân số thế giới hiện tại và dự đoán trong vòng 50 trở lại đây.

UN 2008 estimates and medium variant projections (in millions).

Year	World	Asia	Africa	Europe	Latin America	Northern America	Oceania
2000	6,115	3,698 (60.5%)	819 (13.4%)	727 (11.9%)	521 (8.5%)	319 (5.2%)	31 (0.5%)
2005	6,512	3,937 (60.5%)	921 (14.1%)	729 (11.2%)	557 (8.6%)	335 (5.1%)	34 (0.5%)
2010	6,909	4,167 (60.3%)	1,033 (15.0%)	733 (10.6%)	589 (8.5%)	352 (5.1%)	36 (0.5%)
2015	7,302	4,391 (60.1%)	1,153 (15.8%)	734 (10.1%)	618 (8.5%)	368 (5.0%)	38 (0.5%)
2020	7,675	4,596 (59.9%)	1,276 (16.6%)	733 (9.6%)	646 (8.4%)	383 (5.0%)	40 (0.5%)
2025	8,012	4,773 (59.6%)	1,400 (17.5%)	729 (9.1%)	670 (8.4%)	398 (5.0%)	43 (0.5%)
2030	8,309	4,917 (59.2%)	1,524 (18.3%)	723 (8.7%)	690 (8.3%)	410 (4.9%)	45 (0.5%)
2035	8,571	5,032 (58.7%)	1,647 (19.2%)	716 (8.4%)	706 (8.2%)	421 (4.9%)	46 (0.5%)
2040	8,801	5,125 (58.2%)	1,770 (20.1%)	708 (8.0%)	718 (8.2%)	431 (4.9%)	48 (0.5%)
2045	8,996	5,193 (57.7%)	1,887 (21.0%)	700 (7.8%)	726 (8.1%)	440 (4.9%)	50 (0.6%)
2050	9,150	5,231 (57.2%)	1,998 (21.8%)	691 (7.6%)	729 (8.0%)	448 (4.9%)	51 (0.6%)

Vấn đề tính khối lượng chất phóng xạ

Trong vật lí, khái niệm phóng xạ đã trở nên quá quen thuộc và ngành khoa học nghiên cứu về phóng xạ đã thể hiện vai trò quan trọng trong sự phát triển của thế giới vài năm trở lại đây. Nói về phóng xạ, trong chương trình Vật lí lớp 12, chúng ta cũng đã làm quen với những bài toán về tính toán khối lượng chất còn lại sau một quá trình phân hủy tự nhiên.

Giả sử tại thời điểm ban đầu, một loại chất phóng xạ có khối lượng m_0 thì công thức để tính khối lượng phóng xạ còn lại sau thời gian t là $m(t) = m_0.e^{kt}$ với k gọi là hệ số suy giảm phụ thuộc vào từng loại chất. Một khái niệm liên quan đến vấn đề này là chu kì bán hủy, đó chính là khoảng thời gian mà chất phóng xạ chỉ còn lại một nửa mà nó không phụ thuộc vào khối lượng chất ban đầu. Khi đó, bằng biến đổi công thức, ta dễ dàng có được

$$\text{chu kì bán rã } s = \frac{-\ln 2}{k}.$$

Ví dụ 10. Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5750 năm.

a) Cho trước một mẫu Cacbon có khối lượng 100g. Hãy viết biểu thức biểu diễn khối

lượng chất này còn lại sau thời gian t .

b) Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ có tuổi là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Theo công thức $m(t) = m_0 \cdot e^{kt}$ đã cho thì ta có thể thấy $m(5730) = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, suy ra

$$50 = 100 \cdot e^{k \cdot 5730} \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx 1,21 \cdot 10^{-4}. \text{ Do đó, công thức cần tìm là}$$

$$m(t) = 100 \cdot e^{1,21 \cdot 10^{-4} t}$$

b) Giả sử tại thời điểm ban đầu, mẫu đồ cổ có chứa khối lượng Cacbon là m_0 và tại thời điểm t (tính từ thời điểm ban đầu) thì khối lượng đó là $m(t)$ thì ta có

$$m(t) = m_0 e^{\frac{-\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow 75\% m_0 = m_0 e^{\frac{-\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = e^{\frac{-\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \cdot 5730}{-\ln 2} \approx 2378 \text{ năm.}$$

Vậy tuổi của mẫu đồ cổ đó là 2378 năm.

H7. Một mẫu chất phóng xạ sau 99 năm thì khối lượng ban đầu giảm đi 8 lần. Hỏi chu kỳ bán rã của chất này là bao nhiêu năm và sau bao lâu thì khối lượng của mẫu chất phóng xạ này chỉ còn 5% khối lượng ban đầu?

Trên thực tế, ứng dụng của hàm số mũ và logarit còn xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác như về nghiên cứu động đất, âm thanh, kinh doanh, di truyền và biến dị trong sinh học,...

Các hàm số mũ và logarit thể hiện một cách rất rõ ràng mức độ biến thiên của các đại lượng đặc trưng tương ứng trong từng dạng.

BÀI TẬP

Bài 1.

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a^a b^b c^c)^2 (a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)})^3 \geq 27$$

c) Cho x, y, z, a, b là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z, a \geq b$. Chứng minh rằng

$$x^a (y^b - z^b) + y^a (z^b - x^b) + z^a (x^b - y^b) \geq 0$$

Bài 2.

a) Tìm tất cả các hàm số $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức sau

$$f(\sqrt{2}x) + f((4 + 3\sqrt{2})x) = 2f((2 + \sqrt{2})x)$$

b) Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Hãy xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x(3^{b^y+f(y)-1} - b^y)$$

(Đề thi HSGQG năm 2007)

Bài 3.

a) Cho $0 < a, b \neq 1$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$.

b) Hãy xác định tất cả các cặp số dương a, b sao cho với mọi số nguyên dương n và với mọi nghiệm thực x_n của phương trình $4n^2 x = \log_2(2n^2 x + 1)$, ta luôn có

$$a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n$$

Bài 4. Một số ứng dụng của hàm số mũ và hàm số logarit.

1. Chi phí tổng cộng của một công ty được tính như sau $C(t) = 90 - 50e^{-t}$ (đơn vị tiền) với t là thời gian tính bằng năm từ khi công ty thành lập đến thời điểm hiện tại. Tính chi phí công ty đã chi ra sau 10 năm.

2. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%?

3. Một công ty vừa tung ra thị trường một số sản phẩm mới và họ có tổ chức phát quảng cáo ở truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0,15x}}, x \geq 0$.

Hãy so sánh tỉ lệ này khi có 100, 200 và 500 quảng cáo được phát đi.

4. Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường khác không khí, chẳng hạn như nước, sương mù, ... sẽ giảm dần tùy theo độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ tùy thuộc môi trường theo công thức như sau $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, tính bằng mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính xem cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

Bài 5.

Để đo độ phóng xạ của một chất phóng xạ β^- , người ta dùng một máy đếm xung. Khi chất này phóng xạ ra các hạt β^- , các hạt này đập vào máy và khi đó, trong máy xuất hiện một xung điện và bộ đếm tăng thêm 1 đơn vị. Ban đầu, máy đếm được 960 xung trong vòng một phút nhưng sau đó 3 giờ chỉ còn 120 xung trong một phút (với cùng điều kiện). Hỏi chu kỳ bán rã của chất này là bao nhiêu giờ?

Bài 6.

Giả sử một hàm chỉ mức sản xuất của một hãng DVD trong 1 ngày là $q(m, n) = m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m là số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng.

Biết rằng tiền lương cho nhân viên là 16 USD và của một lao động chính là 27 USD.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

Bài 7.

Trong Tin học, thuật toán tìm kiếm trên một cây cân bằng (một dạng graph đặc biệt) đòi hỏi số bước di chuyển là $P(n)$ ứng với cây có bậc n và được xác định theo công thức sau

$$P_n(i) = \frac{(i-1)(P_{i-1} + 1) + (n-i)(P_{n-i} + 1)}{n} \text{ và } P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_n(i).$$

Hãy đánh giá độ phức tạp của thuật toán này.

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.

Phương trình, bất phương trình mũ và logarit đã được xem xét khá kĩ ở trình độ THPT và nếu xét về một mức độ nào đó, các bài toán với nghiệm phù hợp (tức là có thể xác định chính xác được) là đều có phương pháp giải được. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một cách có hệ thống các phương pháp này cùng với các ý tưởng dùng để phân tích và giải quyết các bài toán lạ, không mẫu mực.

Trước hết, ta nhắc lại một số tính chất cơ bản cần biết về các phương trình mũ và logarit (các tính chất này chứng minh dễ dàng bằng tính biến thiên của hàm số mũ và logarit).

*Phương trình $a^x = m, 0 < a \neq 1$

-Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

-Nếu $m > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \log_a m$.

*Phương trình $\log_a x = m, 0 < a \neq 1$ luôn có nghiệm duy nhất là $x = a^m$.

1. Các phương pháp giải tổng quát đối với những dạng quen thuộc.

Dưới đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số phương pháp chính để giải một phương trình, bất phương trình mũ và logarit. Nhiều bài toán phải phối hợp nhiều phương pháp mới có thể giải quyết được, việc phân tích và tìm ra một hướng tiếp cận chính xác dựa vào dạng cụ thể của từng bài toán.

a) Phương trình có dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ trong đó a, b là các tham số dương cho trước.

*Cách giải chung.

- Nếu $a = b$ thì theo tính chất của hàm số mũ, ta có $f(x) = g(x)$, đưa bài toán về dạng đơn giản hơn. Đây còn gọi là phương pháp đưa về cùng cơ số.

-Nếu $a \neq b$ thì lấy logarit cơ số a (hoặc b) hai vế đưa về $f(x) = \log_a b \cdot g(x)$. Do $\log_a b$ cũng là một hằng số nên tính chất của phương trình này cũng tương tự trường hợp $a = b$.

Dưới đây chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ để nắm rõ cách giải dạng này.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

$$a) \quad (5^{x+2})^{x+1} + (5^x)^{x+3} = (2^{x+1})^{x+5} - 6 \cdot (2^{x+6})^x$$

$$b) \quad (10 + 6\sqrt{3})^{2\sin x} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^{\sin 4x}}$$

$$c) \quad \left(\frac{8}{3}\right)^{x^2-x+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2-3x+2} \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2-4x+3} \left(\frac{7}{2}\right)^{4x^2-5x+4} = 210^{(x-1)^2}$$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5^{(x+2)(x+1)} + 5^{x(x+3)} &= 2^{(x+1)(x+5)} - 6 \cdot 2^{(x+6)x} \Leftrightarrow 5^{x^2+3x+2} + 5^{x^2+3x} = 2^{x^2+6x+5} - 6 \cdot 2^{x^2+6x} \\ \Leftrightarrow 26 \cdot 5^{x^2+3x} &= 26 \cdot 2^{x^2+6x} \Leftrightarrow 5^{x^2+3x} = 2^{x^2+6x} \Leftrightarrow (x^2 + 3x) \cdot \log_2 5 = x^2 + 6x \\ \Leftrightarrow x[(x+3)\log_2 5 - (x+6)] &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{6-3\log_2 5}{\log_2 5 - 1} = \log_{\frac{5}{2}} \frac{64}{125} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = 0, x = \log_{\frac{5}{2}} \frac{64}{125}$.

b) Ta có $10 + 6\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^3$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt{3} + 1)^{6\sin x} = (\sqrt{3} + 1)^{\frac{1}{2}\sin 4x} \Leftrightarrow 6\sin x = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \Leftrightarrow \sin x(\cos x \cdot \cos 2x - 3) = 0$$

Do $\cos x \cdot \cos 2x - 3 < 0$ nên phương trình này chỉ có nghiệm $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{3}\right)^{x^2-x+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2-3x+2} \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2-4x+3} \left(\frac{7}{2}\right)^{4x^2-5x+4} &= 210^{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2^{3x^2-3x+3}}{3^{x^2-x+1}} \frac{3^{2x^2-3x+2}}{5^{2x^2-3x+2}} \frac{5^{3x^2-4x+3}}{7^{3x^2-4x+3}} \frac{7^{4x^2-5x+4}}{2^{4x^2-5x+4}} &= 210^{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{(3 \cdot 5 \cdot 7)^{x^2-x+1}}{2^{x^2-2x+1}} = 2^{(x-1)^2} \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)^{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow 105^x &= 2^{2(x-1)^2} \end{aligned}$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được

$$\begin{aligned} 2(x-1)^2 &= (\log_2 105)x \Leftrightarrow 2x^2 - (4 + \log_2 105)x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{(2 + \log_2 105) \pm \sqrt{\log_2^2 105 + 8\log_2 105}}{4} \end{aligned}$$

Đây chính là hai nghiệm của phương trình đã cho.

H1. a) Giải các phương trình sau $2^x \cdot 3^x \cdot 4^{x^2} = 4 \cdot 36^{\frac{x}{x+1}}$.

b) Với a là số thực dương lớn hơn 1, hãy giải phương trình $\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^x \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^{2x} = 6$.

b) Dạng phương trình $\log_a f(x) = \log_b g(x)$ với a, b là các số thực dương khác 1.

Cũng với cách tương tự khi giải phương trình mũ, ta muốn khử logarit của phương trình để đưa về dạng đơn giản hơn. Tuy nhiên, các phương trình logarit này đòi hỏi dùng một số kĩ thuật khó hơn để giải quyết.

-Nếu $a = b$ thì theo tính chất hàm logarit, ta cũng có $f(x) = g(x)$.

-Nếu $a \neq b$ và $(a-1)(b-1) < 0$ thì hai vế của phương trình có tính đơn điệu khác nhau, ta dùng hàm số để giải.

-Nếu $a \neq b$ và $(a-1)(b-1) > 0$ thì ta đặt ẩn phụ để mũ hóa hai vế.

Ta sẽ tiếp tục xét các ví dụ minh họa dưới đây.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\frac{3}{2} \log_4 (x+2)^2 + 3 = \log_4 (4-x)^3 + \log_4 (x+6)^3$

b) $\log_3 (\log_5 (\sqrt{x^2+1} - x)) = \log_{\frac{1}{5}} (\log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x^2+1} + x))$

b) $2 \log_3 \cot x = \log_2 \cos x$

Lời giải.

a) Điều kiện $-6 < x < 4, x \neq -2$. Phương trình đã cho biến đổi thành

$$\frac{1}{2} \log_4 (x+2)^2 + 1 = \frac{1}{3} \log_4 (4-x)^3 + \frac{1}{3} \log_4 (x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (4|x+2|) = \log_4 [(4-x)(x+6)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6) \quad (*)$$

-Nếu $x > -2$ thì phương trình (*) tương đương với

$$4(x+2) = (4-x)(x+6) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

-Nếu $x < -2$ thì phương trình (*) tương đương với

$$-4(x+2) = (4-x)(x+6) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 32 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 33 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{33}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 \vee x = 1 - \sqrt{33}$.

$$\text{b) } \log_3(\log_5(\sqrt{x^2+1}-x)) = \log_{\frac{1}{5}}(\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1}+x))$$

Ta thấy $\sqrt{x^2+1}+x > 0, \sqrt{x^2+1}-x > 0$ nên phương trình xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) = 1$ nên phương trình đã cho có thể viết lại là

$$\log_3(\log_5(\sqrt{x^2+1}-x)) = \log_{\frac{1}{5}}(\log_5(\sqrt{x^2+1}-x)).$$

Đặt $a = \log_5(\sqrt{x^2+1}-x)$. Ta có $\log_3 a = \log_{\frac{1}{5}} a$. Rõ ràng tính đơn điệu của hai vế khác

nhau nên phương trình có không quá một nghiệm, ta thấy $a = 1$ thỏa nên

$$\log_5(\sqrt{x^2+1}-x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = x+5 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{5}.$$

Thử lại ta thấy thỏa. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{12}{5}$.

$$\text{c) Điều kiện } \cos x > 0, \cot x > 0 \Leftrightarrow x \in (k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x = t$. Ta có $\cot x = 3^{\frac{t}{2}}, \cos x = 2^t \Rightarrow \cot^2 x = 3^t, \cos^2 x = 4^t$.

Mặt khác $\cot^2 a = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\cos^2 a}{1 - \cos^2 a}, \forall a \neq k\pi$ nên

$$3^t = \frac{4^t}{1 - 4^t} \Leftrightarrow 3^t = 12^t + 4^t \Leftrightarrow 4^t + \left(\frac{4}{3}\right)^t = 1 \quad (*)$$

Vế trái là hàm tăng theo biến t nên phương trình này có không quá một nghiệm. Ta lại thấy $t = -1$ thỏa mãn phương trình nên (*) có nghiệm duy nhất là $t = -1$.

Từ $t = -1$, suy ra $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

H2. Giải phương trình sau

a) $\sqrt{2011} \cdot x^{\log_{2011} x^2} = x^2$.

b) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3(1 + 2\sqrt{x})$

c) Dạng phương trình đưa được về hai dạng cơ bản trên.

Trong phần này, chúng ta sẽ cùng xem xét các bài toán mà thông qua một số phép biến đổi như dùng tính chất của hàm số mũ, hàm số logarit, đặt ẩn phụ hoặc phân tích thành nhân tử là có thể đưa về hai dạng cơ bản đã nêu trên. Các bài này nói chung cũng tương tự các bài ở trên nhưng đòi hỏi nhiều thao tác biến đổi hơn.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $\log_{6-x}(\log_2 x) = \log_{7-x}(\log_2 2x)$

b) $4x^2 + x \cdot 2^{x^2+x} + 3 \cdot 2^{x^2} = x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$

c) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$

Lời giải.

a) Điều kiện $0 < x < 6, x \neq 5$. Trước hết, ta thấy đây là dạng phương trình có dạng hai biểu thức logarit bằng nhau nhưng khác cơ số. Do đó, ta sẽ đặt ẩn phụ trước để đơn giản hóa biểu thức.

Đặt $\log_{6-x}(\log_2 x) = \log_{7-x}(\log_2 2x) = t$. Suy ra

$$\begin{cases} \log_2 x = t^{6-x} \\ \log_2 2x = t^{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = (6-x)^t \\ 1 + \log_2 x = (7-x)^t \end{cases} \Leftrightarrow (6-x)^t + 1 = (7-x)^t$$

Tiếp tục đặt $6 - x = a > 0$. Ta có phương trình $a^t + t = (a + 1)^t \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t = 1$.

Do $0 < \frac{a}{a+1}, \frac{1}{a+1} < 1$ nên ta có thể xét các trường hợp sau

- Nếu $t > 1$ thì $\left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t > \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, loại.

- Nếu $t < 1$ thì $\left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t < \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, loại.

- Nếu $t = 1$ thì $\left(\frac{a}{a+1}\right)^t + \left(\frac{1}{a+1}\right)^t = \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, thỏa mãn.

Do đó, $t = 1 \Leftrightarrow x = 4$. Thử lại thấy thỏa. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2(2^{x^2} - 4) + 2x(4 - 2^{x^2}) + 3(4 - 2^{x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^{x^2} - 4)(x^2 - 2x - 3) &= 0 \Leftrightarrow 2^{x^2} - 4 = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, x = -1, x = 3 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm\sqrt{2}, x = -1, x = 3$.

c) Điều kiện $3x + 7 > 0, 2x + 3 > 0, x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}[(2x+3)(3x+7)] = 4 \Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) = 3$$

Đặt $t = \log_{3x+7}(2x+3)$, ta được $2t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$.

- Với $t = 1$ thì $\log_{3x+7}(2x+3) = 1 \Leftrightarrow 3x+7 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -4$, loại.

- Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 2x+3 \Leftrightarrow (x+2)(4x+1) = 0$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt là $x = -2 \vee x = -\frac{1}{4}$, ta thấy chỉ có $x = -\frac{1}{4}$ thỏa nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{1}{4}$.

H3. Giải các phương trình sau

a) $(4^x - 2^{x+1} - 3)\log_2 x - 3 = 4^{\frac{x+1}{2}} - 4^x$

b) $\log_{x(24x+1)^2} x + \log_{x^2(24x+1)} x^2 = \log_{(24x+1)} x$

d) Các phương trình giải bằng các đặc trưng của hàm số

Trong phần trên, ta đã thấy một bài dùng đặc trưng hàm số khi dùng tính đơn điệu để giải quyết. Trên thực tế, các dạng phương trình này khá phổ biến, thú vị và có một số bài quen thuộc mà chúng ta sẽ xét trong các ví dụ dưới đây. Các bài toán trong phần này có một đặc điểm chung là chúng có số nghiệm xác định trước được và giá trị chính xác của từng nghiệm được nhằm ra dựa trên phương trình chứ không phải thông qua một phép biến đổi cụ thể nào.

Ta phát biểu lại hai định lý quan trọng dùng trong các bài toán liên quan.

-Định lý Lagrange. Cho hàm số $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) .

Khi đó, tồn tại một số thực $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

-Định lý Rolle. Cho hàm số $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) , đồng thời $f(a) = f(b)$. Khi đó, tồn tại một số thực $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Một số hệ quả thường dùng của các định lý này là

(1) Nếu hàm số $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) và phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm thuộc (a,b) thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $k-1$ nghiệm thuộc (a,b) .

(2) Nếu $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) , đồng thời đạo hàm cấp k của hàm $f(x)$ không đổi dấu trên $f(x) = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá k nghiệm phân biệt thuộc (a,b) .

Ta cũng nhắc lại các dạng của bất đẳng thức Bernoulli, một bất đẳng thức gắn liền với hàm số mũ là

$$(1) \text{ Với } 0 < a \neq 1 \text{ thì ta có } \begin{cases} a^x \geq (a-1)x + 1 & \text{với } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ a^x < (a-1)x + 1 & \text{với } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(2) Với $x > 0$ thì $x^a \geq a(x-1) + 1$ với mọi $a > 1$ và đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Chứng minh.

(1) Xét hàm số $f(x) = a^x - (a-1)x - 1$.

Ta có $f'(x) = a^x \ln a - (a-1)$, $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt. Ta lại thấy $f(0) = f(1) = 0$ nên $x = 0, x = 1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Vẽ bảng biến thiên, ta dễ dàng thấy được rằng

$f(x) \geq 0, x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ và $f(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$. Từ đó dễ dàng suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

(2) Ta xét hàm số $f(x) = x^a - a(x-1) - 1, x > 0$.

Ta có $f'(x) = ax^{a-1} - a = a(x^{a-1} - 1)$, $f''(x) = a(a-1)x^{a-2} > 0$ nên hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hay $f(x) \geq f(1) = 0$.

Do đó, ta được $x^a \geq a(x-1) + 1, \forall x > 0, a > 1$.

***Dạng 1. Dùng hàm số đánh giá trực tiếp.**

Trong phần này, ta xét các bài toán có dạng $f(x) = 0$ và trong đó, hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp 1, 2 hoặc 3 đồng biến. Khi đó, số nghiệm của phương trình đã cho được biết chính xác và để hoàn tất lời giải, ta chỉ cần nhẩm ra các nghiệm đó.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $(2-x)(2+4^x) = 6$.

b) $x^3 + 2x + 3 + \ln(x^2 + x + 1) = 0$

Lời giải. Do $2 + 4^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$2 - x = \frac{6}{2 + 4^x} \Leftrightarrow x + \frac{6}{2 + 4^x} - 2 = 0.$$

Đặt $f(t) = t + \frac{6}{2+4^t} - 2, t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{4^{2t} + 4^t(4 - 6 \cdot \ln 4) + 4}{(2+4^t)^2}$ và

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^{2t} + 4^t(4 - 6 \cdot \ln 4) + 4 = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo biến 4^t nên nó có không quá hai nghiệm. Do đó, phương trình $f'(t) = 0$ có không quá hai nghiệm (mỗi giá trị dương của 4^t cho ta đúng một giá trị của t).

Ta đó ta thấy phương trình $f(t) = 0$ có không quá ba nghiệm.

Mặt khác ta cũng có $f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2}) = 0$ nên các giá trị này cũng nghiệm đúng

phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$.

b) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x + 3 + \ln(x^2 + x + 1), x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2 + \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 2) + (2x+1)}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{(3x^4 + 3x^3 + 3x^2) + (2x^2 + 4x + 3)}{x^2+x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Suy ra hàm số này đồng biến và phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Hơn nữa $f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) + 3 + \ln((-1)^2 + (-1) + 1) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$.

H4. Giải phương trình sau

a) $(1 + \cos x)^{\log_{\cos x} \sin x} = (1 + \sin x)^{\log_{\sin x} \cos x}$

b) $x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1+\frac{1}{x}} + x = x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1+\frac{1}{x^2}} + 1$

Ví dụ 5. (Phương trình có dạng $a^x = (a-1)x + 1$) Giải các phương trình sau

a) $2^{\cos 2x} \cos x + 2 \cos^2 x = 2^{\cos 2x-1} + 4 \cos^3 x$

b) $3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$

c) $2^x + 5^x = \frac{25x+4}{2} + \log_2 \left(\frac{27x+4}{2} - 5^x \right)$

Lời giải.

a) Ta có

$$2^{\cos 2x} \cos x + 2 \cos^2 x = 2^{\cos 2x-1} + 4 \cos^3 x \Leftrightarrow 2^{\cos 2x-1} (2 \cos x - 1) = 2 \cos^2 x (2 \cos x - 1) \\ \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(2^{\cos 2x} - 2 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee 2^{\cos 2x} = \cos 2x + 1$$

-Với $\cos x = \frac{1}{2}$, ta có $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

-Với $2^{\cos 2x} = \cos 2x + 1$, ta thấy đây chính là phương trình có dạng Bernoulli nên nó có nghiệm là $\cos 2x = 0 \vee \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$ Điều kiện xác định $x > -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3^x + x = 3^{\log_3(2x+1)} + \log_3(2x+1)$.

Dễ thấy hàm số $f(t) = 3^t + t, t \in \mathbb{R}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình trên chính là $f(x) = f(\log_3(2x+1))$ nên ta được $x = \log_3(2x+1) \Leftrightarrow 3^x = 2x+1$.

Phương trình này có dạng bất đẳng thức Bernoulli nên nó có nghiệm là $x = 0, x = 1$ và đây cũng chính là hai nghiệm của phương trình đã cho.

c) $4^x + 3^x = 4x + 2 + \log_4(5x + 2 - 3^x)$

Điều kiện xác định $5x + 2 > 3^x$.

Đặt $t = \log_4(5x + 2 - 3^x) \Leftrightarrow 4^t + 3^x = 5x + 2$, mà thay t vào phương trình đã cho thì ta có

$$4^x + 3^x = 4x + 2 + t. \text{ So sánh hai đẳng thức này, ta được } 4^t - 4^x = x - t \Leftrightarrow 4^x + x = 4^t + t.$$

Cũng từ tính đồng biến của hàm số $f(y) = 4^y + y$, ta có ngay $x = t$ hay $4^x + 3^x = 5x + 2$.

Phương trình này tương đương với $(4^x - 3x - 1) + (3^x - 2x - 1) = 0$.

Theo bất đẳng thức Bernoulli thì hai biểu thức trong ngoặc của vế trái luôn cùng dấu với nhau nên đẳng thức xảy ra khi $x = 0, x = 1$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0, x = 1$.

Nhận xét. Ta thấy rằng hai bài b, c ở trên có cùng dạng là hai hàm số ngược nhau ở hai vế khác nhau. Cũng tương tự như ở phương trình đại số thông thường, dạng này có hai cách giải quen thuộc là đưa về hệ đối xứng hoặc biến đổi để đưa phương trình về dạng $f(x) = f(y)$ và trong phần lời giải nêu trên, chúng ta đã được thấy hai cách đó. Từ các phương trình Bernoulli bình thường (và có thể là các dạng khác), bằng cách dùng hàm số, ta đã thu được các bài toán thú vị hơn.

Ví dụ 6. Giải phương trình sau

a) $5^x + 4^x = 3^x + 2^x + 10x^2 - 6x$

b) $12^x + 13^x + 14^x = 2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x$

Lời giải.

a) Xét hàm số $f(x) = 5^x + 4^x - (3^x + 2^x + 10x^2 - 6x)$, $x \in \mathbb{R}$

Ta thấy $f'''(x) = 5^x \cdot (\ln 5)^3 + 4^x \cdot (\ln 4)^3 - 3^x \cdot (\ln 3)^3 - 2^x \cdot (\ln 2)^3$

Ta thấy $x < 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho vì nếu ngược lại thì

$5^x + 4^x < 3^x + 2^x$, $10x^2 - 6x > 0 \Rightarrow 5^x + 4^x < 3^x + 2^x + 10x^2 - 6x$, mâu thuẫn.

Do đó $x \geq 0 \Rightarrow f'''(x) > 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Hơn nữa: $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ nên phương trình đã cho có đúng ba nghiệm là $x = 0, x = 1, x = 2$.

b) Xét hàm số $f(x) = 12^x + 13^x + 14^x - (2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x)$.

Ta có $f^{(4)}(x) = 12^x \cdot (\ln 12)^4 + 13^x \cdot (\ln 13)^4 + 14^x \cdot (\ln 14)^4 - 2^x \cdot (\ln 2)^4 - 3^x \cdot (\ln 3)^4 - 4^x \cdot (\ln 4)^4$.

Ta thấy rằng trong phương trình đã cho, x phải là số không âm vì nếu ngược lại thì theo BĐT Bernoulli thì $12^x > 11x + 1, 13^x > 12x + 1, 14^x > 13x + 1$.

Suy ra $12^x + 13^x + 14^x > 36x + 3$.

Tuy nhiên, ta cũng có

$2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x < 3 + 36x + x(870x^2 - 2400x + 1524) < 3 + 36x$

Do đó $12^x + 13^x + 14^x > 36x + 3 > 2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x$, không thỏa.

Từ đó ta được $x \geq 0$ và trong hàm số đang xét ở trên thì $f^{(4)}(x) > 0$.

Đạo hàm cấp 4 không đổi dấu nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá 4 nghiệm.

Mặt khác $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng 4 nghiệm là $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$.

Nhận xét. Ta thấy hai phương trình trong ví dụ này khá đẹp mắt do sự kết hợp khéo léo giữa các hàm số mũ và hàm số đa thức. Chúng ta sẽ phân tích cách để tạo ra các phương trình có dạng như thế.

Trước hết, ta bắt đầu với dạng phương trình có dạng $a^x + b^x = P(x)$, trong đó a, b là các số dương chọn trước và đa thức $P(x)$ có bậc là n . Rõ ràng $P^{(n+1)}(x) = 0$ trong khi đạo hàm mọi cấp của các hàm mũ bên vế phải luôn dương. Khi đó, nếu xét hàm số $f(x) = a^x + b^x - P(x)$ thì phương trình $f(x) = 0$ sẽ có không quá $n + 1$ nghiệm. Ta sẽ chọn trước các nghiệm này và thay vào biểu thức $a^x + b^x = P(x)$ để xác định tất cả các hệ số của đa thức (hệ $n + 1$ phương trình với $n + 1$ biến này nói chung luôn giải được). Cách làm này khá dễ dàng nhưng ta lại thu được nhiều bài toán khá thú vị. Công việc thực hiện tương tự khi vế trái xuất hiện nhiều hàm mũ hơn.

Ta lại cải tiến dạng của phương trình này bằng cách kết hợp hai phương trình như thế lại, cụ thể là $a^x + b^x - P(x) = c^x + d^x - Q(x)$ trong đó $a > c, b > d$ và mỗi đa thức $P(x), Q(x)$ đều có bậc là n và được chọn dựa trên bộ nghiệm $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$. Ta xét hàm số sau $g(x) = (a^x + b^x - c^x - d^x) + (Q(x) - P(x))$. Trong trường hợp này, nếu như phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm âm thì $g^{(n+1)}(x) \geq 0$ nên các nghiệm của phương trình ban đầu cũng chính là $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$.

H5. Giải các phương trình sau

a) $8^x(3x+1) = 4$

b) $4^x = x + 1$

c) $9^x + 3^x = (2x+1) \cdot 2^{x+1}$

d) $e^{\frac{2x}{1-x^2}} + \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2} = \ln \left[\frac{1 + (e-1)2x - x^2}{1 - x^2} \right]^e$

*Dạng 2. Dùng hàm số để đánh giá gián tiếp.

Các bài xét trong các ví dụ dưới đây tương đối khó hơn và tính đơn điệu của các hàm chưa được nhìn nhận ngay từ đầu, thậm chí, ta chưa tìm được biểu thức tường minh của hàm cần xét mà phải thông qua một số bước biến đổi.

Ví dụ 7. Giải phương trình sau

a) $7^{x-1} = 1 + 2\log_7(6x-5)^3$

b) $2^{2^x} + 3^{2^x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1.$

c) $2.x^{\log_2 x} + \log_2^2\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2^{2^x} - 2^{x+1}\right) + \left(3^{2^x} - 3^{x+1}\right) = x + 1 - 2^x$$

Ta xét các trường hợp sau

-Nếu $2^x > x + 1$ thì $2^{2^x} - 2^{x+1} > 0, 3^{2^x} - 3^{x+1} > 0, x + 1 - 2^x < 0$ nên phương trình đã cho không thỏa mãn.

-Nếu $2^x < x + 1$ thì $2^{2^x} - 2^{x+1} < 0, 3^{2^x} - 3^{x+1} < 0, x + 1 - 2^x > 0$ nên phương trình đã cho cũng không thỏa mãn.

-Nếu $2^x = x + 1$ thì phương trình đã cho thỏa mãn và khi đó, nghiệm của nó cũng là nghiệm của $2^x = x + 1$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t - (t + 1)$. Ta thấy $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1, f''(t) = 2^t \cdot (\ln 2)^2 > 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt.

Ta lại thấy $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng hai nghiệm là 0 và 1.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

b) Điều kiện xác định $x \neq \frac{5}{6}$.

Đặt $x-1=a \Rightarrow a \neq -\frac{1}{6}$. Ta có phương trình $7^a = 1 + 6\log_7(6a+1)$.

Ta tiếp tục đặt $\log_7(6a+1)=t \Rightarrow 6a+1=7^t$ và $7^a = 1 + 6t$.

Ta được hệ sau

$$\begin{cases} 7^t = 6a+1 \\ 7^a = 6t+1 \end{cases} \Rightarrow 7^t - 7^a = 6a - 6t \Leftrightarrow 7^t + 6t = 7^a + 6a$$

Xét hàm số $f(y) = 7^y + 6y, y \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(y) = 7^y \cdot \ln 7 + 6 > 0$ nên đây là hàm đồng biến. Đẳng thức cuối ở trên chính là $f(t) = f(a)$ nên ta có được $a = t$ hay $7^a = 6a+1$.

Đây là phương trình Bernoulli xét ở trên nên nó có nghiệm là $a = 0 \vee a = 1$, tương ứng, ta tìm được hai nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 1 \vee x = 2$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1, x = 2$.

c) Điều kiện $0 < x \neq 1$. Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$. Thay vào phương trình đã cho, ta có

$$2 \cdot (2^t)^t + (t-1)^2 = 2^{2t} \Leftrightarrow 2^{t^2+1} + t^2 + 1 = 2^{2t} + 2t.$$

Xét hàm số $f(y) = 2^y + y, y \in \mathbb{R}$.

Ta thấy $f'(y) = 2^y \cdot \ln 2 + 1 > 0$ nên hàm này đồng biến. Đẳng thức cuối ở trên chính là $f(t^2+1) = f(2t)$ nên $t^2+1 = 2t \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Từ đó suy ra $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

H6. Giải phương trình sau

a) $2011^x (\sqrt{x^2+1} - x) = 1$

b) $3x \log_3 x = \frac{13}{3}(x-1) + \log_{27} x$

***Dạng 3. Dùng định lí Lagrange với các phương trình có dạng $f(a) = f(b)$.**

Trong dạng này, ta cũng sẽ xét một hàm số để giải quyết nhưng không phải là biến x thông thường mà biến được chọn dựa vào các hệ số hoặc cơ số cho trước, biến x được xét dưới dạng tham số. Đây là một dạng phương trình thú vị và cách dùng định lí Lagrange để giải quyết là hiệu quả nhất.

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $3^x + 7^x = 2.5^x$

b) $9^x(3^x + 2^x) = 2^x(8^x + 7^x) + 5^x(5^x - 2^x).$

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với $3^x - 5^x = 5^x - 7^x.$

Xét hàm số $f(t) = t^{x_0} - (t+2)^{x_0}$, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình trên, suy ra $f(3) = f(5).$

Ta thấy hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó cũng liên tục trên $[3,5]$, theo định lí Lagrange,

ta có $\exists c \in (3,5): f'(c) = \frac{f(3) - f(5)}{3 - 5} = 0$ hay $x_0(c^{x_0-1} - (c+1)^{x_0-1}) = 0$

Từ đẳng thức này, ta thấy $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$, tức là nếu x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $x_0 = 0 \vee x_0 = 1$. Thử lại, ta thấy cả hai nghiệm này đều thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9^x(3^x + 2^x) &= 2^x(8^x + 7^x) + 5^x(5^x - 2^x) \Leftrightarrow 10^x - 16^x - 25^x = 14^x - 18^x - 27^x \\ &\Leftrightarrow 10^x + 12^x - 16^x - 25^x = 12^x + 14^x - 18^x - 27^x \quad (*) \end{aligned}$$

Giả sử x_0 là nghiệm (nếu có) của phương trình (*).

Ta xét hàm số sau $f(t) = t^{x_0} + (t+2)^{x_0} - (t+6)^{x_0} - (t+15)^{x_0}, t > 0.$

Dễ thấy $(*) \Leftrightarrow f(10) = f(12).$

Hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[10,12]$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại số thực

$c \in (10,12)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(10) - f(12)}{10 - 12} = 0$. Do đó, nếu x_0 là nghiệm của phương

trình (*) thì nó phải thỏa mãn

$$\begin{aligned} x_0 \left[c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} - (c+6)^{x_0-1} - (c+15)^{x_0-1} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} &= (c+6)^{x_0-1} + (c+15)^{x_0-1} \end{aligned}$$

Đẳng thức thứ hai cho ta $x_0 = 1$ vì nếu

$x_0 < 1 \Rightarrow x_0 - 1 < 0 \Rightarrow c^{x_0-1} + (c+2)^{x_0-1} > (c+6)^{x_0-1} + (c+15)^{x_0-1}$, tương tự với $x_0 > 1$ cũng mâu thuẫn.

Thử lại trực tiếp, ta thấy hai giá trị $x = 0, x = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

H7. Giải phương trình sau

a) $10^x + 40^x = 20^x + 30^x$.

b) $2^x + 8^x - 10^x = 3^x + 4^x - 7^x$

c) $3^x(4^x + 6^x + 9^x) = 25^x + 2.16^x$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

a) $x^{\log_6 2} - 10^{\log_6 x} = 2x$

b) $9^{\cos x} - 4^{\cos x} = 2 \cos x$

Lời giải. Điều kiện xác định $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{\log_6 x} - 10^{\log_6 x} = 2.6^{\log_6 x} \Leftrightarrow 6^{\log_6 x} - 2^{\log_6 x} = 10^{\log_6 x} - 6^{\log_6 x}.$$

Giả sử phương trình có nghiệm là $x = x_0$.

Ta xét hàm số sau $f(t) = (t + 4)^{\log_6 x_0} - t^{\log_6 x_0}, t > 0$.

Phương trình đã cho chính là $f(2) = f(6)$. Hàm số này liên tục trên $[2, 4]$, khả vi trên $(2, 4)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại số thực $c \in [2, 4]$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = 0 \Leftrightarrow \log_6 x_0 \left[(c + 4)^{\log_6 x_0 - 1} - c^{\log_6 x_0 - 1} \right] = 0$$

Dễ thấy đẳng thức trên cho ta $x_0 = 1 \vee x_0 = 6$, đây chính là điều kiện cần để $x = x_0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Thử hai giá trị này trực tiếp vào phương trình đã cho, ta thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1, x = 6$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$3^{2 \cos x} - 2^{2 \cos x} = 3.2 \cos x - 2.2 \cos x \Leftrightarrow 3^{2 \cos x} - 3.2 \cos x = 2^{2 \cos x} - 2.2 \cos x.$$

Đặt $t = 2 \cos x$ thì $3^t - 3t = 2^t - 2t$ (*)

Giả sử phương trình có nghiệm là $t = t_0$. Ta xét hàm số $f(a) = a^{2t_0} - at_0$, phương trình trên chính là $f(2) = f(3)$.

Hàm số này liên tục trên $[2, 3]$ và khả vi trên $(2, 3)$ nên theo định lí Lagrange thì tồn tại

$$c \in (2, 3) \text{ thỏa mãn } f'(c) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 0 \Leftrightarrow t_0 c^{t_0 - 1} - t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 (c^{t_0 - 1} - 1) = 0.$$

Dễ thấy rằng đẳng thức này tương đương với $t_0 = 0 \vee t_0 = 1$, đây chính là điều kiện cần để $t = t_0$ là nghiệm của phương trình (*). Thử trực tiếp hai giá trị này vào, ta thấy (*) thỏa.

Do đó, (*) có hai nghiệm là $t = 0, t = 1$ và tương ứng, ta có $\cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$.

Giải các phương trình lượng giác này, ta thu được các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét. Ta thấy rằng phương pháp dùng định lí Lagrange như thế rất hiệu quả đối với các bài toán dạng này. Tuy nhiên, ở bước tìm điều kiện cần của nghiệm phương trình đã cho, nếu phương trình có đạo hàm bằng 0 với ẩn c nêu trên không có nghiệm không phụ thuộc c thì cách giải này không thể sử dụng được và bài toán cần phải áp dụng phương pháp khác để giải quyết.

H8. Giải các phương trình sau

$$a) (a+b)^{2\sin^2 x} + (a+b)^{2\cos^2 x} = a^{2\sin^2 x} + a^{2\cos^2 x} + b^{2\sin^2 x} + b^{2\cos^2 x}$$

$$b) \sqrt{2^{1-3\sin x}} + 1 + 3^{\sin x} = \log_2(1-9\sin x) \qquad c) 10^{\log_4 x} - 4^{\log(x+6)} = 6$$

2. Một số dạng toán khác

Ví dụ 10. Giải phương trình sau

$$a) 6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$$

$$b) x.3^{x^2-1} + (x^2-1).3^x + 1 - x - x^2 = 0$$

$$c) 3^{\sin^2 x+1} + 3^{\cos^2 x+1} = 2^{x+1} + 2^{-2x} + 9$$

Lời giải.

$$a) \text{ Phương trình đã cho có thể viết lại là } (3^{x-1})^3 + (-2^x)^3 + 1^3 = 3.3^{x-1}.(-2^x).1.$$

$$\text{Một kết quả quen thuộc là } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a + b + c = 0.$$

$$\text{Do đó, từ phương trình trên, ta được } 3^{x-1} - 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 3 = 3.2^x.$$

Ta sẽ chứng minh phương trình này chỉ có không quá hai nghiệm. Thật vậy

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3 - 3.2^t, t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = \ln 3 \cdot 3^t - 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 \cdot 3^t - 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^t = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{3 \ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{3}$$

Đạo hàm của hàm số này có nghiệm duy nhất nên hàm số $f(t)$ đổi dấu không quá hai lần, tức là phương trình $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Ta lại thấy rằng $f(1) = f(2) = 0$ nên $t = 1, t = 2$ nghiệm đúng phương trình $f(t) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm là $x = 1, x = 2$.

b) Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$x \cdot 3^{x^2-1} + (x^2 - 1) \cdot 3^x + 1 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(3^x - 1) + x(3^{x^2-1} - 1) = 0.$$

Xét các trường hợp sau

-Nếu $x = 0, x = \pm 1$, ta thấy các giá trị này đều thỏa mãn nên phương trình trên có các nghiệm là $x = 0, x = \pm 1$.

-Nếu $x \neq 0, x \neq \pm 1$, ta biến đổi tiếp phương trình thành $\frac{3^x - 1}{x} + \frac{3^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} = 0$.

Với $t \neq 0$, ta xét hàm số sau $f(t) = \frac{3^t - 1}{t}$.

Dễ thấy nếu $t > 0$ thì $3^t - 1 > 0 \Rightarrow f(t) = \frac{3^t - 1}{t} > 0$; nếu ngược lại $t < 0$ thì ta cũng có

$3^t - 1 < 0 \Rightarrow f(t) = \frac{3^t - 1}{t} > 0$, tức là $f(t) > 0, \forall x \neq 0$.

Phương trình cuối ở trên chính là $f(x) + f(x^2 - 1) = 0$ nên dễ thấy rằng nó vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm là $x = 0, x = \pm 1$.

c) Ta xét biến đổi sau

$$\begin{aligned} 3^{\sin^2 x + 1} + 3^{\cos^2 x + 1} - 9 &= 2^{x+1} + 2^{-2x} - 3 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{\sin^2 x} + 3 \cdot 3^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x + \cos^2 x} - 9 &= 2 \cdot 2^x + 2^{-2x} - 3 \end{aligned}$$

Ta có $3 \cdot 3^{\sin^2 x} + 3 \cdot 3^{\cos^2 x} - 3^{\sin^2 x + \cos^2 x} - 9 = (3^{\sin^2 x} - 3)(3 - 3^{\cos^2 x})$

Do $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1$ nên $3^{\sin^2 x} - 3 \leq 0, 3 - 3^{\cos^2 x} \geq 0$, suy ra $(3^{\sin^2 x} - 3)(3 - 3^{\cos^2 x}) \leq 0$.

Trong khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$2.2^x + 2^{-2x} = 2^x + 2^x + 2^{-2x} \geq 3.\sqrt[3]{2^x.2^x.2^{-2x}} = 3 \text{ nên } 2^{x+1} + 2^{-2x} - 3 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra trong hai bất đẳng thức trên khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

H9. Giải các phương trình sau

a) $3^{x^7} + 3^{32x^2} + 3^{128} = 3^{16x^3+1}$.

b) $(x-1)(x+2) = (x^2-2)e^x + xe^{x^2-2}$

Ví dụ 11.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau $10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^{y!}$.

b) Cho số thực $a \geq 1$. Hãy tìm tất cả các bộ ba số thực (x, y, z) với $|y| \geq 1$ thỏa mãn

$$\text{phương trình } \log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} = 0.$$

Lời giải.

a) Do vế trái nguyên nên vế phải cũng phải nguyên, suy ra $y! > 1 \Leftrightarrow y \geq 2$.

Mặt khác, ta thấy $(\sqrt{3})^{y!} = 11 + 10^x + 6^x > 10 \Rightarrow y! > 2 \Rightarrow y \geq 3 \Rightarrow y! \geq 6 \Rightarrow (\sqrt{3})^{y!} \geq 27$.

-Nếu $y = 3$ thì $11 + 10^x + 6^x = 27 \Leftrightarrow 10^x + 6^x = 16$. Vế trái tăng theo biến x nên phương trình này có nghiệm là $x = 1$.

-Nếu $y > 3$ thì dễ thấy $x \geq 2$. Ta có

$$11 + 10^x + 6^x = 11 + (9+1)^x + 6^x = 11 + \sum_{i=0}^x C_x^i 9^{x-i} + 6^x = 12 + \sum_{i=0}^{x-1} C_x^i 9^{x-i} + 6^x$$

Dễ thấy rằng $\sum_{i=0}^{x-1} C_x^i 9^{x-i} + 6^x$ chia hết cho 9 và vế phải cũng chia hết cho 9 nhưng 12 không

chia hết cho 9 nên trong trường hợp này phương trình này không có nghiệm nguyên nào thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm là $x = 1, y = 3$.

b) Điều kiện xác định $xy > 0, 4z - y^2 \geq 0, x^3 y^3 + xyz \neq 0 \Leftrightarrow xy > 0, x^2 y^2 + z \neq 0, 4z \geq y^2$,
nhưng do $|y| \geq 1$ nên $z \geq \frac{1}{4}$ và điều kiện trên có thể viết lại là $|y| \geq 1, z \geq \frac{1}{4}, xy > 0$.

$$\begin{aligned} \log_a^2(xy) + \log_a(x^3 y^3 + xyz)^2 + \frac{8 + \sqrt{4z - y^2}}{2} &\geq \log_a^2(xy) + 2\log_a(x^3 y^3 + \frac{xy}{4}) + 4 = \\ &= \log_a^2(xy) + 2\log_a(xy) + 2\log_a(x^2 y^2 + \frac{1}{4}) + 4 \geq \log_a^2(xy) + 2\log_a(xy) + 2\log_a(xy) + 4 = \\ &= (\log_a(xy) + 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(do $a > 1$ nên $\log_a(x^2 y^2 + \frac{1}{4}) \geq \log_a(2\sqrt{x^2 y^2 \cdot \frac{1}{4}}) = \log_a(xy)$ như biến đổi ở trên).

Đẳng thức phải xảy ra nên ta có hệ sau

$$\begin{cases} 4z - y^2 = 0 \\ xy = \frac{1}{2} \\ \log_a(xy) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = y^2 = 1 \\ xy = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4} \\ y^2 = 1 \\ xy = \frac{1}{2} = \frac{1}{a^2} \end{cases}$$

Vậy với $a = \sqrt{2}$ thì có hai bộ thỏa mãn là $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{4}\right)$, với $a \neq \sqrt{2}$ thì không có bộ nào thỏa mãn đề bài.

H10. a) Chứng minh rằng nếu A, B, C là các góc của một tam giác thì phương trình sau luôn có 4 nghiệm phân biệt

$$3^{|x^2 - 2x|} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

b) Bằng phương pháp đánh giá, hãy giải phương trình sau với $a, b > 1$

$$(2^x + x)(a^x + b^x) = 2(a + b)^x + x(a + b)$$

c) Hỏi có bao nhiêu số thực x thỏa mãn phương trình sau $\frac{1}{5}\log_2 x = \sin(5\pi x)$?

Ta thấy rằng các phương trình mũ và logarit giải bằng phương pháp hàm số này thì các nghiệm sẽ được nhắm và ta cần chứng minh ngoài các nghiệm đó ra, không còn nghiệm nào khác nữa. Chẳng hạn ta xét phương trình đơn giản sau $2^x + 3^x = 13$. Rõ ràng vế trái của phương trình là một hàm đồng biến và chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng $x = 2$ nghiệm đúng phương trình nên nó chỉ có nghiệm là $x = 2$. Nghiệm này không được tìm thông qua một phép biến đổi cụ thể nào mà phải thông qua một cách có vẻ hơi mơ hồ.

Tuy nhiên, với đặc trưng của loại phương trình này, chúng ta phải chấp nhận điều đó và công nhận rằng không có một phương pháp chung nào để giải các phương trình mũ và logarit. Thế còn phương trình $2^x + 3^x = 14$ thì sao? Ta cũng biết rằng phương trình này có đúng một nghiệm nhưng không nhắm được nghiệm đó là gì. Đây lại là một sự thật khác nữa, đó là phương trình mũ, logarit trong trường hợp giải bằng dùng đạo hàm đánh giá, chỉ thành công khi chúng ta nhắm được nghiệm của nó. Với quan niệm là giải phương trình thì phải tìm tất cả các nghiệm của nó. Chẳng hạn như với phương trình $2^x = x^2$, chúng ta có thể chứng minh được dễ dàng rằng nó có hai nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$ và một nghiệm nữa dương nữa thuộc $(0;1)$ nhưng không thể chỉ ra chính xác giá trị của nó.

Do đó, trong chương trình THPT, các bài toán về giải phương trình dạng này thường đòi hỏi phải có nghiệm với yêu cầu là có thể nhắm ra được! Trong trường hợp còn lại, ta chỉ có thể tìm các tính chất hoặc số nghiệm của phương trình mà thôi.

3) Một số phương pháp giải bất phương trình mũ và logarit.

a) Phương pháp đưa về phương trình

Để giải các bất phương trình, đôi khi việc đánh giá trực tiếp là không khả thi và do không phải là một đẳng thức nên việc biến đổi cũng không thể linh hoạt được. Trong phần này, chúng ta nhắc lại một phương pháp đã có giới thiệu trong cuốn Tài liệu giáo khoa chuyên Toán 11 dùng để giải một số bất phương trình rất hiệu quả. Ta xét định lý sau

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên miền D . Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có đúng n nghiệm phân biệt là $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in D$. Khi đó, giữa các khoảng $(x_i, x_{i+1}), i = \overline{1, n-1}$ thì dấu của hàm số $f(x)$ không đổi và trùng với dấu của một điểm bất kì thuộc khoảng đó.

Ta thấy rằng kết quả này cũng tương tự như việc lập bảng xét dấu cho một hàm số. Khi đó, khi xét một bất phương trình có dạng $f(x) < 0$ hoặc $f(x) > 0$, ta chỉ cần xét phương trình tương ứng là $f(x) = 0$ rồi giải nó ra để tìm các nghiệm, xét dấu của hàm số giữa các khoảng đó rồi so sánh với yêu cầu đề bài là hoàn tất. Cách này giúp ta tận dụng được các biến đổi dưới dạng đẳng thức của một phương trình và hạn chế được việc lạm dụng các tính chất của hàm số và tính toán phức tạp.

Ví dụ 12. Giải bất phương trình sau $3^{2(x^2-1)} - 36.3^{x-3} + 3 \geq 0$.

Lời giải. Xét phương trình tương ứng là $3^{2(x^2-1)} - 36.3^{x-3} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x^2-2} + 3 = 4.3^{x-1}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương, ta có

$$3^{2x^2-2} + 3 = 3^{2x^2-2} + 1 + 1 + 1 \geq 4.3^{\frac{x^2-1}{2}}, \text{ mà } 3^{2x^2-2} + 3 = 4.3^{x-1} \text{ nên}$$

$$4.3^{x-1} \geq 4.3^{\frac{x^2-1}{2}} \Leftrightarrow x-1 \geq \frac{x^2-1}{2} \Leftrightarrow 0 \geq (x-1)^2.$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $x = 1$. Thử lại, ta thấy thỏa. Do đó, phương trình đang xét có nghiệm là $x = 1$.

Dễ thấy với $x = 0 \in (-\infty; 1)$ thì $3^{2(x^2-1)} - 36.3^{x-3} + 3 = 2 > 0$ nên nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in (-\infty; 1]$.

H11. Giải các bất phương trình sau

$$\text{a) } \frac{1}{x^{3x+7}} > x^7 \text{ với } x \text{ là số dương.} \quad \text{b) } \left(4\cos^2 \frac{\pi}{7} - 3\right)^x + 1 \leq \left(2\cos \frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos \frac{\pi}{7}}\right)^x$$

b) Phương pháp dùng hàm số

Ví dụ 13. Tìm tất cả các giá trị a để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x .

$$a.9^x + (a-1)3^{x+2} + a-1 > 0$$

Lời giải. Đặt $t = 3^x > 0$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$at^2 + 9(a-1)t + a - 1 > 0 \Leftrightarrow a(t^2 + 9t + 1) > 9t + 1 \Leftrightarrow a > \frac{9t+1}{t^2+9t+1}.$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi $a > \max_{t>0} \left\{ \frac{9t+1}{t^2+9t+1} \right\}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{9t+1}{t^2+9t+1}, t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \frac{-9t^2 - 2}{(t^2 + 9t + 1)^2} < 0, \forall t > 0 \text{ nên đây là hàm nghịch biến. Suy ra } f(t) < f(0) = 1.$$

Do đó $\frac{9t+1}{t^2+9t+1} < 1, \forall t > 0$ nên các giá trị a cần tìm là $a \geq 1$.

Ví dụ 14. Giải bất phương trình $\frac{12^x + 16^x - 18^x - 32^x}{27^x + 36^x + 48^x + 64^x} \geq \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$.

Lời giải. Điều kiện xác định là $x > 0$. Bất phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{12^x + 16^x - 18^x - 32^x}{27^x + 36^x + 48^x + 64^x} &\geq \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 4^x + 4^{2x} - 2^x \cdot 3^{2x} - 2^{5x}}{3^{3x} + 4^x \cdot 3^{2x} + 3^x \cdot 4^{2x} + 4^{3x}} \geq \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2^{2x}(3^x + 4^x) - 2^x(3^{2x} + 4^{2x})}{(3^x + 4^x)(3^{2x} + 4^{2x})} \geq \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^{2x} + 4^{2x}} - \frac{2^x}{3^x + 4^x} \geq \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x + 4^x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{2^{2x}}{3^{2x} + 4^{2x}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \end{aligned}$$

Xét hàm số sau $f(t) = \frac{2^t}{3^t + 4^t} + \frac{1}{\sqrt{t}}, t > 0$. Ta có

$$f(t) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^t + 2^t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^t \ln \frac{3}{2} + 2^t \ln 2}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t + 2^t\right]^2} < 0 \text{ nên hàm này nghịch}$$

biến trên $(0; +\infty)$. Phương trình ở trên chính là $f(x) = f(2x)$ nhưng do $x < 2x$ nên theo tính chất của hàm số này thì $f(x) > f(2x)$, tức là phương trình vô nghiệm.

Trên miền $(0; +\infty)$, phương trình $\frac{12^x + 16^x - 18^x - 32^x}{27^x + 36^x + 48^x + 64^x} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$ vô nghiệm và với $x = 1$ thì ta thấy $\frac{12^x + 16^x - 18^x - 32^x}{27^x + 36^x + 48^x + 64^x} = -\frac{22}{175} > \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$ nên bất phương trình đã cho có nghiệm là $(0; +\infty)$.

Phương pháp dùng hàm số đã quá quen thuộc trong việc giải các phương trình mũ, logarit đã xét ở trên. Việc dùng nó để giải các bài toán về bất phương trình nói chung cũng có đặc điểm tương tự.

c) Phương pháp dùng các đánh giá cơ bản

Ta có các đánh giá sau

- Với $0 < a \neq 1$ và $x, y \in \mathbb{R}$ thì $a^x - a^y$ cùng dấu với $(a - 1)(x - y)$.
- Với $0 < a, b \neq 1$ và $x \in \mathbb{R}$ thì $a^x - b^x$ cùng dấu với $x(a - b)$.
- Với $0 < a \neq 1$ và $x > 0$ thì $\log_a x$ cùng dấu với $(a - 1)(x - 1)$.
- Với $0 < a \neq 1$ và $x, y > 0$ thì $\log_a x - \log_a y$ cùng dấu với $(a - 1)(x - y)$.
- Với $0 < a, b \neq 1$ và $x > 0$ thì $\log_a x - \log_b y$ cùng dấu với $x(a - b)$.

Các kết quả này có thể chứng minh dễ dàng bằng tính chất của hàm mũ và logarit. Bạn đọc chứng minh xem như bài tập. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu các ứng dụng của chúng trong việc giải các bài bất phương trình cũng như một số dạng đánh giá đơn giản khác.

Ví dụ 15. Với $0 < a \neq 1$, hãy giải và biện luận bất phương trình $x^{\log_a x} - a^2 \geq 0$.

Lời giải. Điều kiện $x > 0$. Ta có $x^{\log_a x} - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^{\log_a x \log_a x} - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^{\log_a^2 x} - a^2 \geq 0$.

Theo như nhận xét ở trên thì $a^x - a^y$ cùng dấu với $(a - 1)(x - y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, do đó

$$a^{\log_a^2 x} - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(\log_a^2 x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(\log_a x - \sqrt{2})(\log_a x + \sqrt{2}) \geq 0.$$

Ta lại có $\log_a x - \log_a y$ cùng dấu với $(a - 1)(x - y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, do đó

$$\begin{aligned} (a - 1)(\log_a x - \sqrt{2})(\log_a x + \sqrt{2}) \geq 0 &\Leftrightarrow (a - 1)(\log_a x - \log_a a^{\sqrt{2}})(\log_a x + \log_a a^{\sqrt{2}}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 1)^3 (x - a^{\sqrt{2}}) \left(x - \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Ta cũng thấy rằng $a^{\sqrt{2}} - \frac{1}{a^{\sqrt{2}}} \geq 0 \Leftrightarrow a - 1 \geq 0$. Ta có các trường hợp sau

-Nếu $a = 1$ thì bất phương trình luôn đúng và nghiệm của nó là $(0; +\infty)$.

-Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $[a^{\sqrt{2}}; a^{-\sqrt{2}}]$.

-Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $(0; a^{-\sqrt{2}}] \cup \{1\} \cup [a^{\sqrt{2}}; +\infty)$.

H12. Tìm tất cả các giá trị x sao cho hàm số sau có giá trị không âm

$$f(x) = (2x - \sqrt{x+3}).(\sqrt[3]{x+2} + x). \log_{x+3}(2 - \sqrt{x+1}). \left[(2-x)^{x+1} - x^{2(x-1)} \right]$$

Ví dụ 16. Giải các bất phương trình sau

a) $5^x + 4^x < \frac{3}{2}(3^x + 2^x + 1)$

b) $\log_2 x + \log_3(x+1) \geq \log_4(x+2) + \log_5(x+3)$.

Lời giải.

a) Ta thấy rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình $5^x + 4^x = \frac{3}{2}(3^x + 2^x + 1)$. Phương trình

này có thể viết lại là $\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x + 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x} < \frac{3}{2}$. Ta xét các trường hợp sau

-Nếu $x < 1$ thì $\left(\frac{5}{4}\right)^x + 1 < \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$ và $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$. Suy ra

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x + 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x} < \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ thỏa mãn đề bài.}$$

-Nếu $x > 1$ thì dễ dàng thấy rằng bất đẳng thức trên đổi chiều và không đúng với đề bài.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in (-\infty; 1)$.

b) Điều kiện $x > 0$. Dễ thấy nếu $x = 2$ thì hai vế của bất phương trình bằng nhau. Ta sẽ xét thêm các trường hợp sau

-Nếu $x > 2$ thì $\frac{x}{2} > \frac{x+2}{4} > 1, \frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{5} > 1$, ta có dãy bất đẳng thức sau

$$\log_2 \frac{x}{2} > \log_2 \frac{x+2}{4} > \log_4 \frac{x+2}{4} \Rightarrow \log_2 x > \log_4 (x+2).$$

$$\log_3 \frac{x+1}{3} > \log_3 \frac{x+3}{5} > \log_5 \frac{x+3}{4} \Rightarrow \log_3 (x+1) > \log_5 (x+3)$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại, ta được $\log_2 x + \log_3 (x+1) > \log_4 (x+2) + \log_5 (x+3)$, thỏa mãn đề bài.

-Nếu $x < 2$ thì bất đẳng thức đổi chiều nên không thỏa.

Vậy bất đẳng thức đã cho có nghiệm là $x \in [2; +\infty)$

H13. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{\ln(5+x) - \ln(5-x)}{3^x - 2x - 1} > 0$

b) $\log_x (x+1) < \log 2$

c) $3^{x^2-4} + (x^2-4).3^{x-2} \geq 1$

Nhận xét. Qua những nội dung trên, ta thấy rằng có rất nhiều dạng bài tập được nêu ra, rất phong phú, đa dạng và đối với một số dạng cụ thể, ta cần có những phương pháp đặc trưng mới có thể giải quyết được. Chúng ta cần tự mình rút kinh nghiệm qua các cách được áp dụng và hãy tự sáng tạo thêm nhiều dạng bài tập tương tự cùng dạng để củng cố thêm các kỹ năng và kinh nghiệm cần thiết cho bản thân khi giải các bài toán về phương trình, bất phương trình mũ, logarit.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$

b) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_4(\log_3(\log_2 x))$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $(\sqrt{3} - 1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} = x^2 + 1$ b) $\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x + 1} + 4x \cdot 5^x + 4x + 1 = 5^{2x}$

c) $4(x - 2)[\log_2(x - 3) + \log_3(x - 2)] = 15(x + 1)$

d) $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} - 4x^3 + 2x^2 - x + 16$

b) $(x + 1)\log 4^x = x\log(x + 2^{x+1})$

c) $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

d) $3^{\log_2(3^x - 1)} = 2^{\log_3(2^x + 1)} + 1$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau

a) $2^{x+2} + 3^{x+2} \leq 3^{2x+1} + 2^{2x+1}$

b) $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \geq 0.$

c) $\begin{cases} x^{4024} + x^{2012} > 2012^{2x} + 2012^x \\ x^{4022} + x^{2011} < 2011^{2x} + 2011^{2x} \end{cases}$

Bài 5.

a) Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$\cos x = x \quad (1)$$

$$\sin(\cos x) = x \quad (2)$$

$$\cos(\sin x) = x \quad (3)$$

b) Gọi α, β, γ lần lượt là nghiệm của các phương trình (1), (2), (3). Chứng minh rằng

$$\gamma\alpha.\ln\beta < \beta\gamma.\ln\alpha < \alpha\beta.\ln\gamma$$

Bài 6.

a) Cho x là nghiệm của phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$

Chứng minh rằng x cũng là nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$

b) Biết rằng số thực a thỏa mãn phương trình $4^x - \frac{1}{4^x} = 2\cos ax$ có đúng 2010 nghiệm thực. Hỏi phương trình $4^x + \frac{1}{4^x} = 2\cos ax$ có bao nhiêu nghiệm thực?

Bài 7. Giải các phương trình sau

a) $\log_{1-x}(2x) + \log_{2x}(2-2x) = 0$

b) $(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} + (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$

c) Xác định các số thực $a > 0$ sao cho $a^{\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$.

§ 6. ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Hệ phương trình mũ và logarit là một dạng Toán khá quen thuộc trong các kì thi HSG và thi Tốt nghiệp, CĐ - ĐH. Bên cạnh các phương trình đã đề cập đến ở phần trước, trong phần này, chúng ta không chỉ xem xét các bài toán chỉ đưa được về phương trình thông qua một phép thế mà còn các bài thể hiện nét đặc trưng của một hệ phương trình thực sự.

Không như ở các bài toán về phương trình, bất phương trình, các bài về hệ phương trình logarit nhiều khi đòi hỏi cả sự phân tích rõ quan hệ giữa các biến cũng như tính chất của chúng để đưa ra một lời giải hợp lí. Các bài toán dưới đây được chia một cách tương đối vào các dạng với các công cụ giải khác nhau, bởi thế nên có nhiều bài cần phải kết hợp nhiều cách mới có thể giải quyết được.

1) Hệ phương trình mũ và logarit giải bằng cách biến đổi biểu thức

Các bài toán nêu trong phần này chỉ đòi hỏi các biến đổi quen thuộc và mang dáng vẻ của những bài hệ phương trình đại số thông thường nhiều hơn, chỉ cần nắm các tính chất của lũy thừa, biến đổi biểu thức logarit là có thể giải được. Chúng ta thường gặp dạng này ở các kì thi ĐH-CĐ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) = 4 \\ \log_{1+x}(1+2y) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{-1}{2}, -\frac{1}{2} < y < 1; x \neq 0, 1; y \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)^2 + \log_{1-y}(1+x)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y) + \log_{1-y}(1+x) &= 2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{1+x}(1-y) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_{1-y}(1+x)$. Ta có $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $\log_{1+x}(1-y) = 1 \Leftrightarrow 1+x = 1-y \Leftrightarrow x = -y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\log_{1+x}(1-2x) + \log_{1+x}(1+2x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-4x^2) = 2 \Leftrightarrow 1-4x^2 = (1+x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{5}$$

Ta thấy chỉ có nghiệm $x = -\frac{2}{5}$ thỏa mãn điều kiện, từ đó suy ra $y = \frac{2}{5}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = \left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \quad (\text{Đề thi HSGQG năm 1976})$$

Lời giải. Điều kiện $0 < x, y \neq 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\log_y \sqrt{xy} = \log_x y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log_y x) = \log_x y \Leftrightarrow 1 + \log_y x = 2 \log_x y.$$

$$\text{Đặt } t = \log_x y. \text{ Ta được } 1 + \frac{1}{t} = 2t \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{-Nếu } t = 1 \text{ thì } x = y, \text{ thay vào phương trình thứ hai, ta có } 2.2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{3}{2}.$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho có nghiệm là } (x, y) = \left(\log_2 \frac{3}{2}, \log_2 \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{-Nếu } t = -\frac{1}{2} \text{ thì } y = \frac{1}{x^2}, \text{ thay vào phương trình thứ hai, ta có } 2^x + 2^{\frac{1}{x^2}} = 3.$$

$$\text{Ta thấy } 2^x = 3 - 2^{\frac{1}{x^2}} < 3 - 1 = 2 \Rightarrow x < 1, \text{ nhưng khi đó } \frac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x^2}} > 2 \text{ và } 2^x > 1 \text{ nên dễ}$$

thấy rằng phương trình $2^x + 2^{\frac{1}{x^2}} = 3$ vô nghiệm.

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là } (x, y) = \left(\log_2 \frac{3}{2}, \log_2 \frac{3}{2}\right).$$

b) Điều kiện xác định $x, y > 0$. Lấy logarit nepe hai vế của mỗi phương trình, ta có

$$\begin{cases} (x+y)\ln x = 12\ln y \\ (x+y)\ln y = 3\ln x \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln y} = 4 \frac{\ln y}{\ln x} \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 4(\ln y)^2 \Leftrightarrow \ln x = \pm 2\ln y.$$

Từ đây suy ra $x = y^2 \vee x = \frac{1}{y^2}$. Ta xét từng trường hợp

-Nếu $x = y^2$ thì thay vào hệ đã cho, ta có

$$(y^2 + y)\ln y^2 = 12\ln y \Leftrightarrow \ln y(y^2 + y - 6) = 0 \Leftrightarrow \ln y = 0 \vee y^2 + y - 6 = 0.$$

Giải hai phương trình này, ta thu được hai nghiệm dương là $y = 1 \vee y = 2$, tương ứng, ta có $x = 1 \vee x = 4$, thỏa mãn điều kiện đã cho.

-Nếu $x = \frac{1}{y^2}$ thì thay vào hệ đã cho, ta có

$$\left(\frac{1}{y^2} + y\right)\ln \frac{1}{y^2} = 12\ln y \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{y^2} + y\right)\ln y = 6\ln y \Leftrightarrow \ln y\left(\frac{1}{y^2} + y + 6\right) = 0.$$

Dễ thấy ngoài nghiệm $y = 1$ đã xét ở trên, phương trình không còn nghiệm nào nữa do biểu thức $\frac{1}{y^2} + y + 6 > 0, \forall y > 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (1; 1), (2; 4)$.

H1. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 8^x = 5y^2 - 6y \\ \frac{3 \cdot 2^x + 4}{2^x + 3} = y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ \log_{\sqrt[3]{3}}(9x^2) + \log_3 \frac{1}{y^3} = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

2) Một số hệ phương trình mũ và logarit giải bằng cách đánh giá

Các tính chất đặc trưng của hàm số hoặc các bất đẳng thức quen thuộc cũng thường được dùng để giải các hệ phương trình mũ và logarit. Chúng ta sẽ cùng phân tích một số bài toán để thấy rõ vai trò của việc đánh giá trong việc giải bài toán liên quan.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các nghiệm không âm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 3^x + 3^y + 3^z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $3^t \geq 2t^2 + 1, \forall t \in [0; 1]$.

Xét hàm số sau $f(t) = 3^t - 2t^2 - 1, t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 - 4t, f''(t) = 3^t \cdot (\ln 3)^2 - 4, f'''(t) = 3^t \cdot (\ln 3)^3 > 0.$$

Đạo hàm cấp 3 của hàm số dương nên phương trình $f(t) = 0$ có không quá ba nghiệm.

Ta lại thấy $f(0) = f(1) = f(2)$ nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt là $t = 0, t = 1, t = 2$. Do hàm số này liên tục nên giữa các khoảng chia ra bởi các nghiệm nêu trên thì dấu của nó không đổi, tức là dấu của $f(t)$ trên $(-\infty; 0), (0; 1), (1; 2), (2; +\infty)$ không đổi và trùng với dấu của một điểm bất kì thuộc khoảng đó.

Ta thấy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$ nên dấu của $f(t)$ trên $(0; 1)$ là $+$. Do đó $f(t) \geq 0, \forall t \in [0; 1]$

và bất đẳng thức nêu ở trên được chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 0 \vee t = 1$.

Suy ra $3^x \geq 2x^2 + 1, 3^y \geq 2y^2 + 1, 3^z \geq 2z^2 + 1$.

Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được $3^x + 3^y + 3^z \geq 3 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 5$.

Đẳng thức phải xảy ra do phương trình thứ hai của hệ nên ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x, y, z \in \{0, 1\} \end{cases}$.

Từ đây suy ra nghiệm của hệ đã cho chính là $(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} e^x + (x^2 - y) \cdot \ln(x + y + 2011) = e^{\sqrt{y}} \\ 2^x \cdot (2^x - 1) + 3^x \cdot (3^x - 1) = 34y - 26x \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định $y \geq 0, x + y + 2011 > 0$.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ thì $x \geq 0$. Thật vậy

Giả sử ngược lại là $x < 0$ thì $2^x < 1; 3^x < 1 \Rightarrow 2^x(2^x - 1) + 3^x(3^x - 1) < 0$.

Mặt khác $34y - 26x > 0$ (do $y \geq 0$ và $x < 0$) nên mâu thuẫn. Ta xét điều kiện $x, y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x^2 - y) \cdot \ln(x + y + 2011) = e^{\sqrt{y}} - e^x$$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x > \sqrt{y} \geq 0$ thì $e^x > e^{\sqrt{y}} \Rightarrow e^{\sqrt{y}} - e^x < 0$ và $x^2 > y \Rightarrow x^2 - y > 0$, tức là hai biểu thức $e^{\sqrt{y}} - e^x$ và $(x^2 - y)$ trái dấu; trong khi đó $\ln(x + y + 2011) > 0$ nên trường hợp này không thỏa mãn đề bài.

- Nếu $\sqrt{y} > x \geq 0$ thì $e^x < e^{\sqrt{y}} \Rightarrow e^{\sqrt{y}} - e^x > 0$ và $x^2 < y \Rightarrow x^2 - y < 0$, tức là hai biểu thức $e^{\sqrt{y}} - e^x$ và $(x^2 - y)$ cũng trái dấu; trong khi đó $\ln(x + y + 2011) > 0$ nên trường hợp này cũng không thỏa mãn đề bài.

Do đó $y = x^2$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$2^x(2^x - 1) + 3^x(3^x - 1) = 34x^2 - 26x \Leftrightarrow 9^x + 4^x = 3^x + 2^x + 34x^2 - 26x \quad (*)$$

Ta xét hàm số $f(t) = 9^t + 4^t - 3^t - 2^t - (34t^2 - 26t), t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = 9^t \cdot \ln 9 + 4^t \cdot \ln 4 - 3^t \cdot \ln 3 - 2^t \cdot \ln 2 - 68t + 26$

$$f''(t) = 9^t \cdot (\ln 9)^2 + 4^t \cdot (\ln 4)^2 - 3^t \cdot (\ln 3)^2 - 2^t \cdot (\ln 2)^2 - 68$$

$$f'''(t) = 9^t \cdot (\ln 9)^3 + 4^t \cdot (\ln 4)^3 - 3^t \cdot (\ln 3)^3 - 2^t \cdot (\ln 2)^3 > 0, \forall t \geq 0.$$

Đạo hàm cấp ba của hàm này không đổi dấu nên theo định lý Lagrange thì phương trình tương ứng $f(t) = 0$ có không quá ba nghiệm phân biệt.

Hơn nữa, ta thấy rằng $f(0) = f(1) = f(2)$ nên ba giá trị $t = 0, t = 1, t = 2$ nghiệm đúng phương trình $f(t) = 0$.

Từ đó suy ra phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt là $x = 0, x = 1, x = 2$.

Ta cũng có ba nghiệm tương ứng của hệ đã cho là $(x; y) = (0; 0), (1; 1), (2; 4)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $(x; y) = (0; 0), (1; 1), (2; 4)$.

H2. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 2^x - 2^{1-y} + \log_2 \frac{x}{1-y} = 0 \\ x(1-y) + 5y + 1 = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+10^x} = \frac{3}{1+2^y} \\ 2^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{\sqrt{2x^2 + \frac{y^2}{2}}} \end{cases} \end{array} \quad \text{với } x, y \geq 0$$

3) Hệ phương trình mũ và logarit giải bằng cách dùng hàm số

Vận dụng hàm số vào giải các phương trình mũ, logarit luôn là một vấn đề thú vị và có nhiều cách tiếp cận rất phong phú, sáng tạo. Bên cạnh các bài giải phương trình xuất phát trực tiếp từ một hàm đơn điệu dưới dạng các hệ đối xứng, hệ lập, nhiều bài hệ phương trình mũ, logarit cũng cần phải thông qua một vài đánh giá nhất định mới có thể giải quyết đầy đủ được.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^y + 2^x = 7 \end{cases}$$

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $y = \log_2(11 - 3^x)$.

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có $y = \log_3(7 - 2^x)$.

Do đó $\log_2(11 - 3^x) = \log_3(7 - 2^x)$.

Từ đẳng thức $3^y + 2^x = 7$, ta thấy $x < 3, y < 2$, mà với $y < 2$ thì $3^x > 7 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(11 - 3^x) - \log_3(7 - 2^x)$, $\frac{3}{2} < x < 3$. Ta có

$$f'(x) = \frac{-3^x \ln 3}{(11 - 3^x) \ln 2} + \frac{2^x \ln 2}{(7 - 2^x) \ln 3} < \frac{-3^x}{11 - 3^x} + \frac{2^x}{7 - 2^x} = \frac{11 \cdot 2^x - 7 \cdot 3^x}{(11 - 3^x)(7 - 2^x)}.$$

Do $x > \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{11}{7} \Rightarrow 11 \cdot 2^x - 7 \cdot 3^x < 0$, suy ra $f'(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Hàm số này nghịch biến nên có không quá một nghiệm. Đồng thời $f(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.

Với $x = 2$, ta có $y = \log_2(11 - 3^2) = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (2; 1)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + 5} \cdot \log_3(6-y) = x \\ \sqrt{(y-1)^2 + 5} \cdot \log_3(6-z) = y \\ \sqrt{(z-1)^2 + 5} \cdot \log_3(6-x) = z \end{cases}$$

(Đề thi HSGQG năm 2006, bảng A)

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x, y, z < 6$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(6-y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}} \\ \log_3(6-z) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 2y + 6}} \\ \log_3(6-x) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 2z + 6}} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t + 6}}$, $t \in (-\infty, 6)$. Ta có

$$f(t) = \frac{6-t}{(t^2 - 2t + 6) \cdot \sqrt{t^2 - 2t + 6}} > 0, \quad t \in (-\infty, 6) \text{ nên đây là hàm đồng biến.}$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3(6-t)$, $t \in (-\infty, 6)$. Ta có

$$g'(t) = \frac{-1}{\ln 3 \cdot (6-t)} < 0, \quad t \in (-\infty, 6) \text{ nên đây là hàm nghịch biến.}$$

Giả sử (x, y, z) là nghiệm của hệ thì ta sẽ chứng minh $x = y = z$.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max(x, y, z)$.

Xét hai trường hợp sau

-Nếu $x \geq y \geq z$. Do $f(t)$ là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(y) \geq f(z)$, từ hệ trên, suy ra $\log_3(6-y) \geq \log_3(6-z) \geq \log_3(6-x) \Rightarrow y \leq z \leq x$. Do đó $y = z$, dễ dàng có được $x = y = z$.

-Nếu $x \geq z \geq y$. Do $f(t)$ là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(z) \geq f(y)$, từ hệ trên, suy ra $\log_3(6-y) \geq \log_3(6-x) \geq \log_3(6-z) \Rightarrow y \leq x \leq z$. Do đó $x = z$, dễ dàng có được $x = y = z$.

Thay $x = y = z$ vào hệ phương trình trên, ta cần giải phương trình

$$\log_3(6-x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$$

Vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến nên phương trình này có không quá một nghiệm.

Hơn nữa, khi thay $x = 3$ vào phương trình, ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = z = 3$.

H3. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt{y} = \log \frac{y^2 + 1}{x + 1} \\ 64x^2y^2 - 96y^2 + 36x^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \log_2(x^2 - 4x + 5) + 1 = 2^{y^2 - 4y + 4} \\ \log_2(y^2 - 4y + 5) + 1 = 2^{x^2 - 4x + 4} \end{cases}$$

Nhận xét. Ta thấy rằng việc dùng hàm số để giải các hệ lập hoặc hệ có dạng đối xứng loại hai trong hệ phương trình mũ và logarit thường được thực hiện tương tự như trong giải phương trình đại số thông thường. Do đó, điểm quan trọng là chúng ta khảo sát được đúng tính biến thiên của hàm số xuất hiện trong bài.

4) Một số bài toán về biện luận hệ phương trình

Trên thực tế, nhiều bài hệ phương trình không thể xác định chính xác được nghiệm của chúng nhưng vấn đề khảo sát số nghiệm hoặc tính chất các nghiệm này hoặc biện luận nghiệm của hệ phương trình cũng rất thú vị. Công cụ chủ yếu và quen thuộc giải quyết các dạng này cũng vẫn là hàm số.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ x - y = a \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x, y > -1$. Từ giả thiết, ta có $x = y + a$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $e^{y+a} - e^y = \ln(1+y+a) - \ln(1+y)$.

Xét hàm số $f(y) = e^{y+a} - e^y - \ln(1+y+a) + \ln(1+y), y > -1$.

$$\text{Ta có } f'(y) = e^{y+a} - e^y - \frac{1}{y+a+1} + \frac{1}{y+1} = (e^{y+a} - e^y) + \frac{a}{(y+1)(y+a+1)} > 0$$

Suy ra hàm số này đồng biến trên $(-1, +\infty)$ nên nó có tối đa một nghiệm.

Hơn nữa, $f(y) = e^y(e^a - 1) + \ln \frac{y+1}{y+a+1}$ có $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$ và $\lim_{y \rightarrow -1^+} f(y) = -\infty$ nên theo

tính chất liên tục của hàm $f(y)$ thì phương trình $f(y) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Do đó, phương trình $f(y) = 0$ có đúng một nghiệm.

Ta cũng thấy rằng tương ứng với mỗi giá trị y , ta có đúng một nghiệm của hệ phương trình đã cho nên với mọi $a > 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 8. Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 29 \\ \log_3 x \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$$

(Đề thi HSGQG năm 2008)

Lời giải.

Điều kiện $x, y > 0$. Đặt $\log_3 x = a, \log_2 y = b \Leftrightarrow x = 3^a, y = 2^b$.

Ta có $x^2 + y^3 = 29 \Leftrightarrow 9^a + 8^b = 29$. Do đó, ta được hệ phương trình mới như sau

$$\begin{cases} 9^a + 8^b = 29 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^a + 8^{\frac{1}{a}} = 29 \\ b = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Ta thấy rằng nếu $a < 0$ thì $9^a, 8^{\frac{1}{a}} < 1$ nên đẳng thức $9^a + 8^{\frac{1}{a}} = 29$ không thể xảy ra. Do đó, ta xét hàm số $f(t) = 9^t + 8^{\frac{1}{t}} - 29, t > 0$.

Ta có $f'(t) = 9^t \ln 9 - \frac{\ln 8}{t^2} 8^{\frac{1}{t}}, f''(t) = 9^t (\ln 9)^2 + \frac{2 \ln 8}{t^3} 8^{\frac{1}{t}} + \frac{(\ln 8)^2}{t^4} 8^{\frac{1}{t}} > 0, \forall t > 0$.

Đạo hàm cấp hai của hàm $f(t)$ không đổi dấu nên phương trình $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Ta lại có

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{9} + 8^2 - 29 = 48 > 0, f(1) = 9 + 8 - 29 = -12 < 0, f(2) = 9^2 + \sqrt{8} - 29 = 52 + 2\sqrt{2} > 0$$

Theo tính chất hàm liên tục thì phương trình $f(t) = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc các khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right), (1, 2)$.

Từ đó suy ra phương trình $f(t) = 0$ có đúng hai nghiệm thực hay có đúng hai giá trị a thỏa mãn đề bài, tương ứng với hai giá trị x và hai nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

H4. Tìm tất cả các giá trị m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

(Đề thi HSGQG năm 1978)

Nhận xét. Qua các bài toán về phương trình và hệ phương trình mũ, logarit đã xét, chúng ta thấy rằng do mang tính đặc trưng của một hàm siêu việt nên nhiều biến đổi chưa thể thực hiện được linh hoạt như ở phương trình đại số thông thường. Các bài toán có hàm số mũ, logarit xuất hiện kèm theo các hàm đa thức thường là các bài không mẫu mực và phải giải bằng cách dùng bất đẳng thức đánh giá hoặc dùng hàm số để khảo sát tính biến thiên. Và cũng chính nhờ các công cụ này mà chúng ta càng có thêm nhiều bài toán liên quan hay hơn, khó hơn cũng như thú vị hơn!

BÀI TẬP

Bài 1.

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x + y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

b) Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y \end{cases}$$

c) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^{\log_8 x} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} \log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 y \\ x^2 + 2\cos x = y^2 + 2\cos y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x + 1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y + 1) = x \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2\log_5(4y + 1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2\log_5(4z + 1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \end{cases}$$

Bài 3.

a) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \log_8 xy = 3\log_8 x \cdot \log_8 y \\ \log_2 \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \log_y x \end{cases}$$

b) Tìm các nghiệm dương của hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + y + xy = z^{2^{2012}} + 2z^{2^{2011}} \\ x^4 + y^4 = 2z^{2^{2013}} \\ (x + y)^{z-1} = (z + 1)^{x-y} \end{cases}$$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2^{\log_3 x} + y^{\log_3 2} = 6 \\ \log_x y + \log_{\frac{y}{x^3}} x = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \\ \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{y}{x}} \\ \log_3 x + \log_5 y = \log_5 x \cdot \log_3 y \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3 \log_3(x+2y+6) = 2 \log_2(x+y+2) + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} (1+4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 6.

$$\text{a) Tìm } m \text{ để hệ sau có nghiệm} \quad \begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2011x \leq 2011 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Chứng minh rằng hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} e^x = 2011 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2011 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1} \\ 6xy^2 = 16x^2 - 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \log_y(\log_y x) = \log_{3-y}(\log_{3-y}(3-x)) \\ \cot x - \cot y = \log \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

BÀI TẬP BÀI 1

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức sau

$$A = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{6 + \sqrt{8}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{2k + \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} + \dots + \frac{200 + \sqrt{9999}}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

b) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

c) Rút gọn biểu thức sau $B = \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$

Bài 2.

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Tính $M = xy + yz + zx$.

b) Tính giá trị của biểu thức $N = \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{x^8 - 1}{2x^4} \right)^2} \right)}$ tại $x = \frac{1}{\sqrt{2}} (2^{\sqrt{2}} - 2^{-\sqrt{2}})$.

Bài 3.

a) So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{222}}$.

b) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 6$ thì $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_{n \text{ số } 2} > \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ số } 2}^{\frac{222 \dots 2}{n \text{ số } 2}}$.

Bài 4.

a) Chứng minh rằng $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

b) Cho $x = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} - 1 \right)$. Hãy tính $A = x^3 + x^2 + 1$.

Bài 5.

a) Dùng các tính chất của lũy thừa để chứng minh rằng nếu số thực x thỏa mãn đẳng thức

$$(x-3)^{2010} + (x-4)^{2012} = 1 \text{ thì } x = 3 \text{ hoặc } x = 4.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = (\sqrt{\pi})^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.

Chứng minh $a^2 + a^{\frac{2}{3}}, b^2 + b^{\frac{2}{3}}, c^2 + c^{\frac{2}{3}}$ độ dài các cạnh của một tam giác nếu biết a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn.

Hỏi kết luận của bài toán còn đúng không nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì?

Bài 7.

Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số sau

a) $f(x) = (9 - 10x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$

b) $g(x) = \frac{7}{(x^2 - \pi x + 2)^{-9}}$

c) $h(x) = (\sin x + \cos x)^{\sqrt{10}}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 1

Bài 1.

a) Với mọi $k \geq 2$ thì

$$\begin{aligned}\frac{2k + \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} &= \frac{[(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{k+1})^2 + \sqrt{(k-1)(k+1)}](\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})}{(\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})} \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)^3} - \sqrt{(k-1)^3}}{2}\end{aligned}$$

Suy ra, tổng đã cho có thể viết lại là

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} [\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3} + \sqrt{4^3} - \sqrt{2^3} + \sqrt{5^3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{6^3} - \sqrt{4^3} + \dots + \sqrt{101^3} - \sqrt{99^3}] \\ &= \frac{1}{2} [-1 - \sqrt{2^3} + \sqrt{101^3} + \sqrt{100^3}] = \frac{999 + \sqrt{101^3} - \sqrt{8}}{2}\end{aligned}$$

b) Đặt $\sqrt[3]{2} = a \Leftrightarrow a^3 = 2$. Ta chứng minh $\sqrt[3]{a-1} = \frac{a^2 - a + 1}{\sqrt[3]{9}}$. Lập phương hai vế, ta có

$$\begin{aligned}a-1 &= \frac{(a^2 - a + 1)^3}{9} \Leftrightarrow 9(a-1)(a+1)^3 = (a+1)^3(a^2 - a + 1)^3 \\ &\Leftrightarrow 9(a-1)(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) = (a^3 + 1)^3 \Leftrightarrow 9(a-1)(3 + 3a^2 + 3a) = 27 \\ &\Leftrightarrow 3(a-1)(a^2 + a + 1) = 3 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 1 \Leftrightarrow a^3 = 2\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

c) Rút gọn biểu thức sau $B = \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$

Đặt $M = \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$, $N = \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$ $\Rightarrow B = M + N$. Ta có

$$MN = \sqrt[4]{(2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5})} = 1 \text{ và } M^4 + N^4 = 4 + 2\sqrt{5}.$$

Suy ra $M^4 + N^4 + 2M^2N^2 = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2 \Leftrightarrow M^2 + N^2 = \sqrt{5} + 1$, tức là

$$M^2 + N^2 + 2MN = \sqrt{5} + 3 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow M + N = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}. \text{ Vậy } B = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 2.

a) Ta thấy nếu một trong ba số x, y, z bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0 và $M = 0$.

Xét trường hợp $xyz \neq 0$, đặt $2^x = 3^y = 6^{-z} = k > 0$. Khi đó $2 = k^{\frac{1}{x}}, 3 = k^{\frac{1}{y}}, 6 = k^{-\frac{1}{z}}$, mà $2.3 = 6$ nên $k^{\frac{1}{x}} \cdot k^{\frac{1}{y}} = k^{-\frac{1}{z}} \Leftrightarrow k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{-\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có $M = 0$.

b) Ta có $1 + \left(\frac{x^4 - 1}{2x^2} \right)^2 = \frac{x^8 + 2x^4 + 1}{4x^4}$ nên $1 + \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 1}{2x^2} \right)^2} = 1 + \frac{x^4 + 1}{2x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x^2}$.

Do đó $N = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{2}}$. Thay $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(2^{\sqrt{2}} - 2^{-\sqrt{2}})$ vào, ta được

$$N = \frac{\frac{1}{2}(2^{2\sqrt{2}} + 2^{-2\sqrt{2}} - 2) + 1}{\frac{1}{2}(2^{\sqrt{2}} + 2^{-\sqrt{2}})} = \frac{2^{2\sqrt{2}} + 2^{-2\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}} + 2^{-\sqrt{2}}}.$$

Bài 3.

a) Ta thấy rằng $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$.

Mà $2^{10} = 1024 > 1000, 2^6 = 64 \Rightarrow 2^{16} = 2^{10} \cdot 2^6 > 64000$ nên $2^{2^{2^{2^2}}} > 2^{64000}$.

Mặt khác $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000} = 1000^{1001} < (2^{10})^{1001} = 2^{10010} < 2^{64000}$.

Từ đó suy ra $2^{2^{2^{2^2}}} > 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$.

b) Trước hết, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $2^{n-2} > n, \forall n \geq 6$.

Đặt $a_n = \underbrace{2^{\overbrace{2^{\overbrace{\ddots^2}^2}}^{n \text{ số } 2}}}_{n \text{ số } 2}, b_n = \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ số } 2}^{\overbrace{222 \dots 2}^{n \text{ số } 2}}, n \geq 6$.

Ta có $\underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ số } 2} < 10^n < 2^{4n}$ nên $b_n < (2^{4n})^{2^{4n}} = 2^{4n \cdot 2^{4n}} < 2^{2^{5n}}$.

Mặt khác, dễ dàng thấy rằng $a_{n-2} - 5n > \underbrace{2^{2^{n-2}}}_{n-2 \text{ số } 2} - 8 \cdot 2^{n-2} > 2^{2^n} - 2^{n+1} > 0$ nên

$a_n = 2^{2^{a_{n-2}}} > 2^{2^{5n}} > b_n$. Ta có đpcm.

Bài 4.

a) Ta có $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{25 + 10\sqrt{24} + 24} = \sqrt[4]{(5 + 2\sqrt{6})^2} = \sqrt[4]{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Tương tự $\sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ (do $\sqrt{3} > \sqrt{2}$). Suy ra

$$\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

b) Đặt $a = \sqrt[3]{\frac{23 + \sqrt{513}}{4}}, b = \sqrt[3]{\frac{23 - \sqrt{513}}{4}} \Rightarrow a^3 + b^3 = \frac{23}{2}, ab = 1$ và $3x + 1 = a + b$.

Suy ra $(3x + 1)^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 27(x^3 + x^2 + 1) + 3(3x + 1) - 29$ hay

$$\begin{aligned} A &= \frac{(3x + 1)^3 - 3(3x + 1) + 29}{27} = \frac{(a + b)^3 - 3(a + b) + 29}{27} = \\ &= \frac{a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 3(a + b) + 29}{27} = \frac{\frac{23}{2} + 29}{27} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho là $A = \frac{3}{2}$.

Nhận xét. Các bài toán dạng này thường được tạo ra từ công thức nghiệm của phương trình bậc ba trong trường hợp phương trình có nghiệm duy nhất. Bạn đọc tham khảo trong bài đọc thêm SGK lớp 11 Nâng cao để biết thêm về công thức này.

Bài 5.

a) Ta xét ba trường hợp sau

- Nếu $x > 4$ thì $x - 3 > 1 \Rightarrow (x - 3)^{2010} > 1 \Rightarrow (x - 3)^{2010} + (x - 4)^{2012} > 1$, mâu thuẫn.

- Nếu $x < 3$ thì $x - 4 < -1 \Rightarrow (x - 4)^{2012} > 1 \Rightarrow (x - 3)^{2010} + (x - 4)^{2012} > 1$, mâu thuẫn.

- Nếu $3 < x < 4$ thì $|x - 3|, |x - 4| \leq 1 \Rightarrow (x - 3)^{2010} < (x - 3), (x - 4)^{2012} \leq (4 - x)$. Do đó

$$(x - 3)^{2010} + (x - 4)^{2012} < (x - 3) + (4 - x) = 1, \text{ cũng mâu thuẫn.}$$

Mặt khác, với $x = 3, x = 4$ thì đẳng thức đúng. Vậy ta có đpcm.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = (\sqrt{\pi})^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

Do $\sqrt{\pi} > 1$ nên theo tính chất về lũy thừa số thực, ta có

$$*\text{Vì } \cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } A = (\sqrt{\pi})^{\cos x} \geq (\sqrt{\pi})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, đạt được khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$*\text{Vì } \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } A = (\sqrt{\pi})^{\cos x} \leq (\sqrt{\pi})^1 = \sqrt{\pi}.$$

Giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{\pi}$, đạt được khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 6.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là cạnh lớn nhất trong các cạnh của tam giác. Khi

đó, ta có $a^2 > b^2 > c^2, a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$ nên

$$(a^2 + a^{\frac{2}{3}}) + (b^2 + b^{\frac{2}{3}}) > c^2 + c^{\frac{2}{3}} \text{ và } (a^2 + a^{\frac{2}{3}}) + (c^2 + c^{\frac{2}{3}}) > b^2 + b^{\frac{2}{3}}.$$

Để chứng minh $a^2 + a^{\frac{2}{3}}, b^2 + b^{\frac{2}{3}}, c^2 + c^{\frac{2}{3}}$ là độ dài các cạnh của tam giác, ta cần có

$$(b^2 + b^{\frac{2}{3}}) + (c^2 + c^{\frac{2}{3}}) > a^2 + a^{\frac{2}{3}} (*)$$

Thật vậy, do a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn nên $b^2 + c^2 > a^2$.

Hơn nữa, nếu đặt $x = a^{\frac{1}{3}}, y = b^{\frac{1}{3}}, z = c^{\frac{1}{3}}$ thì $y^3 + z^3 > x^3$.

$$\text{Ta có } (y^2 + z^2)^3 = y^6 + z^6 + 3y^2z^2(y^2 + z^2) > y^6 + z^6 + 2y^3z^3 = (y^3 + z^3)^2 > (x^3)^2 = x^6.$$

Suy ra $y^2 + z^2 > x^2$ hay $b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{2}{3}}$. Từ đó ta thấy bất đẳng thức (*) đúng.

Vậy ta có đpcm.

Trong trường hợp giả thiết không cho là tam giác nhọn thì bài toán không đúng. Chẳng hạn như trường hợp $a = 4, b = 3, c = 2$. Ta dễ dàng kiểm tra được (*) sai.

Bài 7.

a) Xét hàm số $f(x) = (9 - 10x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$.

*Miền xác định. Do $\frac{1}{4}$ là số hữu tỉ không nguyên nên điều kiện xác định của hàm số này là $9 - 10x^2 + x^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)(x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Suy ra miền xác định là $D = (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$.

*Miền giá trị. Do $(9 - 10x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}} \geq 0$ nên giá trị nhỏ nhất là 0, hàm số này không có giá trị lớn nhất. Suy ra miền giá trị là $R = [0; +\infty)$.

b) Xét hàm số $g(x) = \frac{7}{(x^2 - \pi x + 2)^{-9}}$.

*Miền xác định. Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - \pi x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$.

Suy ra miền xác định là $D = (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$.

*Miền giá trị. Hàm số này không thể đạt được giá trị 0 nên miền giá trị của nó là $R = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

c) Xét hàm số $h(x) = (\sin x + \cos x)^{\sqrt{10}}$.

*Miền xác định. Lũy thừa ở đây là số vô tỉ nên điều kiện xác định là

$$\sin x + \cos x > 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < \pi + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

Suy ra miền xác định là $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right)$.

*Miền giá trị. Do $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số là $(\sqrt{2})^{\sqrt{10}}$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Miền giá trị $R = (0; \sqrt{2}^{\sqrt{10}}]$.

BÀI TẬP BÀI 2

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $\log_8 9 + \log_9 10 + \log_{10} 11 < 2 \log_2 3$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức sau $u_n = \frac{1}{\log_n 2010}, n = 2, 3, 4, \dots$

Đặt $a = u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}, b = u_{63} + u_{64} + u_{65} + u_{66} + u_{67}$. Tính $M = b - a$.

Bài 2.

a) Cho x, y, z, a là các số thực dương đôi một khác nhau và khác 1 thỏa mãn

$$\log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z, \log_a y = 1 + \log_a y \cdot \log_a x$$

Tính giá trị biểu thức sau $A = \log_{\frac{a}{x}} a \cdot \log_{\frac{a}{y}} a \cdot \log_{\frac{a}{z}} z \cdot \log_x a \cdot \log_y a \cdot \log_z a$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn dãy đẳng thức sau

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$$

Chứng minh rằng $x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y = z^x \cdot x^z$.

Bài 3.

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < c$. Chứng minh rằng

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính

$$a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$$

Bài 4.

Với mọi số tự nhiên n , hãy chứng minh rằng $n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

Hãy xây dựng và chứng minh các đẳng thức tương tự.

Bài 5.

Chứng minh hệ phương trình sau có ít nhất 6 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} 2^x + 3^y + 5^z = 10 \\ 2^x 3^y 5^z = 30 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Bài 6.

a) Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x

$$\log_2(1 + 2^x) > \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x)$$

b) Cho $a > b$. Chứng minh rằng $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b < \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Bài 7.

Người ta định nghĩa rằng: “Số siêu việt là số thực không phải là nghiệm của bất kì phương trình đại số nào”. Người ta cũng đã chứng minh được các số $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}, \dots$ là các số siêu việt. Các giá trị của logarit hầu hết là các số siêu việt nhưng để chứng minh được điều này thực sự rất khó và nó nằm ngoài chương trình THPT. Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh một số vấn đề đơn giản hơn.

Biết rằng “logarit thập phân của một số nguyên dương hoặc là số hữu tỉ hoặc là số siêu việt”, hãy chứng minh rằng $\log_2 5$ là số siêu việt.

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 2

Bài 1.

a) Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Thật vậy, vì $\log_{n+1}(n+2), \log_{n+1} n > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương này, ta có $\log_{n+1}(n+2) + \log_{n+1} n > 2\sqrt{\log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n}$. Do đó

$$2 = \log_{n+1}(n+1)^2 > \log_{n+1}[n(n+1)] = \log_{n+1}(n+2) + \log_{n+1} n > 2\sqrt{\log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)} = \log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n < 1 \Leftrightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1).$$

Từ đó suy ra $\log_8 9 + \log_9 10 + \log_{10} 11 < 3 \cdot \log_8 9 = 2 \log_2 3$.

b) Dãy số đã cho có thể viết lại là $u_n = \log_{2010} n, n = 2, 3, 4, \dots$

Do đó

$$\begin{aligned} a &= u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{24} = \log_{2010} 11 + \log_{2010} 12 + \log_{2010} 13 + \log_{2010} 14 + \log_{2010} 24 \\ &= \log_{2010}(11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 24) \text{ và } b = u_{63} + u_{64} + u_{65} + u_{66} + u_{67} = \log_{2010}(63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} M &= b - a = \log_{2010}(63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67) - \log_{2010}(11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 24) = \log_{2010} \frac{63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 24} = \\ &= \log_{2010} \frac{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 67}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \log_{2010}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67) = \log_{2010} 2010 = 1 \end{aligned}$$

Bài 2.

a) Từ giả thiết, ta thấy tất cả các biểu thức đều xác định.

$$\text{Ta có } \log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z \Leftrightarrow \log_a x = \frac{1}{1 - \log_a z} = \frac{1}{\log_a \frac{a}{z}} = \log_{\frac{a}{z}} z.$$

Do đó $\log_x a \log_{\frac{a}{z}} z = 1$. Tương tự $\log_y a \log_{\frac{a}{x}} x = 1$.

Hơn nữa, thay $\log_a x = \frac{1}{1 - \log_a z}$ vào $\log_a y = 1 + \log_a y \cdot \log_a x$, ta được

$$\log_a y = 1 + \frac{\log_a y}{1 - \log_a z} \Leftrightarrow 1 - \log_a z = \frac{\log_a y}{\log_a y - 1} \Leftrightarrow \log_z a = 1 + \log_a y \cdot \log_a z.$$

Tương tự trên, ta cũng có $\log_z a \log_{\frac{a}{y}} y = 1$. Từ đó suy ra

$$A = (\log_{\frac{a}{x}} a \cdot \log_y a) \cdot (\log_{\frac{a}{y}} a \cdot \log_z a) \cdot (\log_{\frac{a}{z}} z \cdot \log_x a) = 1.$$

b) Nếu một trong các số $x + y - z, y + z - x, z + x - y$ bằng 0 thì cả ba số đều bằng 0 và dẫn đến $x = y = z = 0$, mâu thuẫn.

Từ giả thiết, ta có
$$\begin{cases} x \log y \cdot (y + z - x) = y \log x \cdot (z + x - y) \\ y \log z \cdot (z + x - y) = z \log y \cdot (x + y - z) \\ z \log x \cdot (x + y - z) = x \log z \cdot (y + z - x) \end{cases}$$

Xét đẳng thức thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} x \log y \cdot (y + z - x) = y \log x \cdot (z + x - y) &\Leftrightarrow x \log y = y \log x \cdot \frac{z + x - y}{y + z - x} \\ \Leftrightarrow x \log y + y \log x = y \log x \left(\frac{z + x - y}{y + z - x} + 1 \right) &\Leftrightarrow x \log y + y \log x = y \log x \cdot \frac{2z}{y + z - x} \end{aligned}$$

$$\text{Biến đổi tương tự với đẳng thức thứ hai, ta có } y \log z + z \log y = z \log y \cdot \frac{2x}{z + x - y}.$$

Ta thấy rằng $x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y \Leftrightarrow x \log y + y \log x = y \log z + z \log y$. Do đó, ta cần có

$$y \log x \cdot \frac{2z}{y + z - x} = z \log y \cdot \frac{2x}{z + x - y} \Leftrightarrow y \log x \cdot (z + x - y) = x \log y \cdot (y + z - x), \text{ đúng.}$$

Do đó, ta được $x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y$. Chứng minh tương tự, ta có $y^z \cdot z^y = z^x \cdot x^z$.

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3.

a) Ta thấy rằng do $a < b$ nên $\log_a b > 1$, khi đó, nếu xét cùng các cơ số là a và b thì $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b) > 0$.

Ta cũng có $\log_c a < 1$ do $a < c$, suy ra $0 > \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$.

Từ đó suy ra $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = 0$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25} &= 27^{\log_3 7} + 49^{\log_7 11} + \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} \\ &= 7^3 + 11^2 + 25^{\frac{1}{2}} = 469 \end{aligned}$$

Bài 4.

Đặt $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = m$. Ta có $\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2^{-m} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2^{2^{-m}}$.

Ta thấy $\sqrt{2}$ có thể viết lại là $2^{\frac{1}{2}}$, tương tự với $\sqrt{\sqrt{2}}$ là $2^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \dots$

Như thế, giá trị của $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}}$ có thể viết lại là $2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ hay $2^{2^{-n}}$.

Do đó, ta được $2^{2^{-m}} = 2^{2^{-n}} \Leftrightarrow 2^{-m} = 2^{-n} \Leftrightarrow m = n$.

Vậy $n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}}$, đây chính là đpcm.

Khi thay số 2 bởi một số tự nhiên khác thì cơ số của logarit hoặc bậc của căn cũng thay đổi tương ứng. Tổng quát, ta có bài toán sau

Với n, p, q là các số nguyên dương lớn hơn 1 thì $n = -\log_p \log_q \underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\dots\sqrt[p]{q}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Bài 5.

Ta sẽ tìm nghiệm của hệ phương trình dưới dạng

$$(\log_2 a, \log_3 b, \log_5 c) = \left(\frac{\log a}{\log 2}, \frac{\log b}{\log 3}, \frac{\log c}{\log 5} \right), \text{ trong đó } a, b, c \text{ là hoán vị của } \{2, 3, 5\}.$$

Theo cách chọn này thì phương trình thứ ba của hệ luôn được thỏa.

$$\text{Ta lại thấy } 2^x + 3^y + 5^z = 2^{\log_2 a} + 3^{\log_3 b} + 5^{\log_5 c} = a + b + c = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ và}$$

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z = 2^{\log_2 a} \cdot 3^{\log_3 b} \cdot 5^{\log_5 c} = abc = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Do đó, các bộ xác định như trên luôn thỏa mãn hệ đã cho. Do có tất cả $3!$ hoán vị của $\{2, 3, 5\}$ nên cũng tương ứng có 6 nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bài 6. Xét hai trường hợp

-Nếu $x \geq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} \log_2(1 + 2^x) &> \log_3(3^x + (\sqrt{2})^x) \Leftrightarrow \log_2\left(2^x\left(1 + \frac{1}{2^x}\right)\right) > \log_3\left(3^x\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right)\right) \\ \Leftrightarrow x + \log_2\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) &> x + \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right) \Leftrightarrow \log_2\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) > \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right) \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $\log_2\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) > \log_3\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) > \log_3\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x\right)$ nên bất đẳng thức cuối ở trên đúng và bất đẳng thức đã cho đúng với $x \geq 0$.

-Nếu $x < 0$ thì $2^x > 3^x, 1 > (\sqrt{2})^x \Rightarrow 2^x + 1 > 3^x + (\sqrt{2})^x > 0$. Do đó

$$\log_2(2^x + 1) > \log_2\left(3^x + (\sqrt{2})^x\right) > \log_3\left(3^x + (\sqrt{2})^x\right). \text{ Bất đẳng thức đã cho cũng đúng.}$$

Vậy $\log_2(2^x + 1) > \log_3\left(3^x + (\sqrt{2})^x\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có đpcm.

b) Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b &< \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a \Leftrightarrow b \log_2\left(2^a\left(1 + 2^{-2a}\right)\right) < b \log_2\left(2^b\left(1 + 2^{-2b}\right)\right) \\ \Leftrightarrow ab \log_2\left(1 + 2^{-2a}\right) &< ab \log_2\left(1 + 2^{-2b}\right) \Leftrightarrow 1 + 2^{-2a} < 1 + 2^{-2b} \Leftrightarrow a > b \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

Bài 7.

Trước hết, ta chứng minh rằng $\log_2 10$ là số siêu việt.

Thật vậy, giả sử ngược lại, $\log_2 10$ là số hữu tỉ thì tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa

mãn $\log_2 10 = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2^{\frac{m}{n}} = 10 \Leftrightarrow 2^m = 10^n$. Để thấy $m > n$ nên đẳng thức trên có thể viết lại

là $2^{m-n} = 5^n$. Tuy nhiên, ta thấy rằng vế trái là số chẵn trong khi vế phải là số lẻ nên đẳng thức trên không thể xảy ra. Do đó, theo mệnh đề “logarit thập phân của một số nguyên dương hoặc là số hữu tỉ, hoặc là số siêu việt” thì $\log_2 10$ là số siêu việt.

Ta lại có $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 5 = \log_2 10 - 1$.

Từ $\log_2 10$ là số siêu việt và định nghĩa số siêu việt (số siêu việt không là nghiệm của phương trình đã số nào) thì ta cũng suy ra rằng $\log_2 5$ cũng là số siêu việt.

BÀI TẬP BÀI 3

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $x > \ln(x+1), \forall x > 0$.

Từ đó chứng minh rằng dãy số $H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ không bị chặn trên.

b) Cho các số dương a, b . Chứng minh rằng $a^b b^a \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

Bài 2.

a) Chứng minh hàm số $f(x) = \frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{c^x + a^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x}$ với a, b, c là các số thực dương cho trước đồng biến với mọi x dương.

b) Chứng minh rằng $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với $x, y > 0$.

Bài 3.

Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}, x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

b) Tính tổng $\sum_{k=1}^{99} f\left(\sin^2 \frac{k\pi}{100}\right)$.

Bài 4.

a) Với n là số nguyên dương lớn hơn 1, hãy tính giá trị của $A = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} \right]$

trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

b) Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ thỏa mãn hệ thức sau

$$2y = xy' + \ln y'$$

Bài 5.

Tính các giới hạn sau

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(n \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n} \right) \right) \right)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{1}{3x + \sin x}}$$

Bài 6.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ tại điểm $x = \frac{3}{4}$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $4(a + b + c) - 9 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = (a + \sqrt{a^2 + 1})^a (b + \sqrt{b^2 + 1})^b (c + \sqrt{c^2 + 1})^c$$

Bài 7.

Từ việc khảo sát đẳng thức $a^b = b^a$ với a, b dương, hãy giải các bài toán sau

i. Cho a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn đẳng thức $a^b = b^a$. Chứng minh rằng

bất đẳng thức $a^2 \ln^2 b - (a + b) \ln b + b < 0$.

ii. Chứng minh phương trình $(x + 1)^x = x^{x+1}$ có đúng một nghiệm dương.

iii. Gọi T là tập hợp các cặp số thực dương a, b phân biệt thỏa mãn đẳng thức $a^b = b^a$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực x_0 không phụ thuộc a, b sao cho giá trị

nhỏ nhất của hàm số $f_{(a,b)}(x) = |x - a| + |x - b| + |x - 2| + |x - 3|$ đạt tại $f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi cặp

giá trị $(a, b) \in T$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 3

Bài 1.

a) Chứng minh rằng $x > \ln(1+x), \forall x > 0$.

Xét hàm số $f(x) = x - \ln(x+1), x > 0$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$ nên hàm số này đồng biến, suy ra $f(x) > f(0) = 0$ nên $x > \ln(1+x), \forall x > 0$. Ta có đpcm.

Trong bất đẳng thức này, thay x bởi $\frac{1}{x}$, ta có $\frac{1}{x} > \ln(1 + \frac{1}{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x$.

Từ đó suy ra $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} > 1 + \sum_{i=2}^n \ln(i+1) - \ln i = 1 + \ln(n+1) - \ln 1 = 1 + \ln(n+1)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$, tức là dãy này không bị chặn trên.

Nhận xét. Dãy số nêu trong bài tập này còn được gọi là chuỗi điều hòa, là tổng của các nghịch đảo của các số tự nhiên. Tuy từng số hạng của tổng tiến về 0 nhưng tổng này tiến tới vô cực khi n tiến tới vô cực. Ngoài cách chứng minh ở trên, còn một cách khác nữa

chứng minh $H_{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} > n$ bằng phương pháp quy nạp. Chuỗi điều hòa là một khái niệm khá quan trọng và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực, khi n tiến tới vô cực, giá trị của nó xấp xỉ $\ln(n+1)$ và dãy số $H_n - \ln(n+1)$ có giới hạn hữu hạn và đó chính là hằng số Euler.

b) Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$b \ln a + a \ln b \leq (a+b) \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Leftrightarrow a \ln \left(\frac{2b}{a+b} \right) + b \ln \left(\frac{2a}{a+b} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \ln \left(\frac{2}{\frac{a}{b} + 1} \right) + \ln \left(\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} \right) \leq 0$$

Ta có thể giả sử $a \leq b$, khi đó nếu đặt $t = \frac{a}{b}$ thì $0 < t \leq 1$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau $t \ln \left(\frac{2}{t+1} \right) + \ln \left(\frac{2t}{t+1} \right) \leq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t \ln\left(\frac{2}{t+1}\right) + \ln\left(\frac{2t}{t+1}\right), t > 0$. Ta có

$$f'(t) = \ln\left(\frac{2}{t+1}\right) - \frac{t}{t+1} + \frac{1}{t+1} = \ln\left(\frac{2}{t+1}\right) + \frac{1-t}{t+1} > 0 \text{ nên đây là hàm đồng biến.}$$

Ta có $f(t) \leq f(1) = 0$. Từ đây, ta có đpcm.

Bài 2.

Ta có

$$\left(\frac{a^x}{b^x + c^x}\right)' = \frac{a^x \cdot \ln a(b^x + c^x) - a^x(b^x \cdot \ln b + c^x \cdot \ln c)}{(b^x + c^x)^2} = \frac{a^x b^x (\ln a - \ln b) + a^x c^x (\ln a - \ln c)}{(b^x + c^x)^2}$$

Do đó, suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{sym} \left(\frac{a^x}{b^x + c^x}\right)' = \sum_{sym} \left(\frac{a^x b^x (\ln a - \ln b) + a^x c^x (\ln a - \ln c)}{(b^x + c^x)^2}\right)' \\ &= \sum_{sym} \left(\frac{a^x b^x (\ln a - \ln b)}{(b^x + c^x)^2} - \frac{a^x b^x (\ln a - \ln b)}{(a^x + c^x)^2}\right) = \sum_{sym} a^x b^x (\ln a - \ln b) \frac{(a^x - b^x)(a^x + b^x + 2c^x)}{(a^x + c^x)^2 (b^x + c^x)^2} \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $\ln a - \ln b > 0 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a^x - b^x > 0, \forall x > 0$ nên mỗi số hạng trong tổng trên đều dương.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(0, +\infty)$. Ta có đpcm.

Nhận xét. Từ kết quả này, ta cũng có thể dùng để chứng minh một số bất đẳng thức liên quan bằng cách thay x bởi các giá trị cụ thể. Ví dụ như

Chứng minh rằng với mọi số thực $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{a^3}{b^3 + c^3} + \frac{b^3}{c^3 + a^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3}$$

Bất đẳng thức này nếu chứng minh theo cách thông thường sẽ rất phức tạp, cần đòi hỏi các biến đổi dưới dạng tổng các bình phương.

Đẳng thức luôn xảy ra với $a = b = c$.

b) Đặt $\frac{x+y}{x} = t > 1 \Leftrightarrow y = x(t-1) \Rightarrow \frac{2y}{2x+y} = 2\frac{t-1}{t+1}$.

Do đó, ta cần chứng minh $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}, \forall t > 1$.

Xét hàm số $f(t) = \ln t - 2\frac{t-1}{t+1}, t \in (1, +\infty)$. Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \forall t > 1 \text{ nên đây là hàm đồng biến.}$$

Suy ra $f(t) > f(1) = 0$, tức là $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}, \forall t > 1$ hay $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với $x, y > 0$.

Bài 3.

a) Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $7 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} < 8$, với mọi n nguyên dương lớn hơn 1.

Do chỉ xét các giá trị $n > 1 \Rightarrow n \geq 2$, ta có thể xét hàm số $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+1}, x \geq 2$. Ta có

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= (2x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{(2x+1)}{x^2+x} \\ \Leftrightarrow f'(x) &= \left[2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{(2x+1)}{x^2+x}\right]f(x) \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{(2x+1)}{x^2+x}, x \geq 2$. Ta có

$$g'(x) = \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2(x+1)^2} > 0 \text{ nên } g(x) \text{ là hàm đồng biến.}$$

Suy ra $g(x) < \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{(2x+1)}{x^2+x}\right] = 0$ nên $2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{(2x+1)}{x^2+x} < 0, x \geq 2$.

Từ đó suy ra $f'(x) < 0, \forall x \geq 2$, tức là $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+1}$ là hàm nghịch biến.

Ta cũng có $f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 < 8$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^2 = e^2 > 7$$

Suy ra $7 < f(x) < 8, \forall x \geq 2$ hay $7 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} < 8$, với mọi n nguyên dương lớn hơn 1.

Từ đó ta được $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1}\right] = 7$.

Nhận xét. Bài toán này có thể dùng khai triển nhị thức Newton để biến đổi chứng minh bất đẳng thức $7 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} < 8$, với mọi n nguyên dương lớn hơn 1 nhưng lời giải dài dòng và rất phức tạp. Việc khảo sát tính biến thiên của hàm mũ vừa giúp ta chứng minh được một kết quả tổng quát hơn là bất đẳng thức này cũng đúng với mọi số thực lớn không nhỏ 2, vừa cho ta một lời giải ngắn gọn, rõ ràng.

b) Xét hàm số $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$.

Theo công thức đạo hàm, ta tính được

$$y' = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2(x + \sqrt{x^2+1})} = x + \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = x + \sqrt{x^2+1}$$

Do đó, ta có

$$2y = x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad xy' = x^2 + x\sqrt{x^2+1} \quad \text{và} \quad \ln y' = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Từ đây, ta thấy rằng $2y = xy' + \ln y'$. Đây chính là đpcm.

Nhận xét. Thực ra kết quả trên tuy đẹp nhưng không phải quá khó khăn để tìm được.

Ta bắt đầu từ đẳng thức $2y = xy' + \ln y'$, đạo hàm hai vế theo biến x , ta được đẳng thức

$$2y' = xy'' + y' + \frac{y''}{y'} \Leftrightarrow (y')^2 = xy'y'' + y''.$$

Ta quan tâm đến hàm $g = y'$, hàm này thỏa mãn

đẳng thức tương ứng là $g^2 = xg.g' + g' \Leftrightarrow g' = \frac{g^2}{xg+1}$. Bằng cách giải phương trình vi

phân này và dùng phép tính tích phân (sẽ học ở chương tiếp theo) để tìm lại hàm $y = y(x)$ ban đầu, ta thu được hàm số như trên.

Còn nhiều bài toán tương tự khác như

(1) Chứng minh rằng $y = (x^2 + 1)(e^x + 1)$ thỏa mãn đẳng thức $y' = \frac{2xy}{x^2 + 1} + e^x(x^2 + 1)$.

(2) Chứng minh rằng $y = \frac{1 + \ln x}{x(1 - \ln x)}$ thỏa mãn đẳng thức $2x^2 y' = x^2 y^2 + 1$.

(3) Chứng minh rằng $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ thỏa mãn đẳng thức $y + xy' + x^2 y'' = 0$.

Bài 4.

a) Do $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$, suy ra $f(b) = f(1 - a) = \frac{9^{1-a}}{9^{1-a} + 3} = \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^a} = \frac{3}{3 + 9^a}$.

Suy ra $f(a) + f(b) = \frac{9^a}{9^a + 3} + \frac{3}{3 + 9^a} = 1$.

b) Ta thấy rằng với mọi k thỏa $1 \leq k \leq 49$ thì $\sin^2 \frac{(100-k)\pi}{100} = \sin^2(\pi - \frac{k\pi}{100}) = \sin^2 \frac{k\pi}{100}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{100} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) = \sum_{k=1}^{49} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + \sum_{k=51}^{99} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + f(\sin^2 \frac{50\pi}{100}) + f(\sin^2 \frac{100\pi}{100}) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{49} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + f(1) + f(0) = 2 \sum_{k=1}^{49} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + \frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 2 \sum_{k=1}^{49} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + 1 \end{aligned}$$

Với mọi k thỏa mãn $1 \leq k \leq 24$ thì $\sin^2 \frac{(50-k)\pi}{100} = \sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{100}) = \cos^2 \frac{k\pi}{100}$, mà

$$\sin^2 \frac{k\pi}{100} + \cos^2 \frac{k\pi}{100} = 1 \Rightarrow f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + f(\sin^2 \frac{(50-k)\pi}{100}) = 1, \text{ theo câu a).}$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{49} f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) = \sum_{k=1}^{24} \left[f(\sin^2 \frac{k\pi}{100}) + f(\sin^2 \frac{(50-k)\pi}{100}) \right] + f(\sin^2 \frac{25\pi}{100}) = 24 + f(\frac{1}{2}) = 24 + \frac{1}{2}$$

Vậy $S = 2(24 + \frac{1}{2}) + 1 = 50$.

Bài 5.

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ với x là số thực nên

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \cdot \frac{\ln \left(\cos \frac{1}{n} - 1 + 1 \right)}{\cos \frac{1}{n} - 1} \right) \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2n^2 \sin^2 \frac{1}{2n} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Ta có $\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n} \right) \right) = \ln \left(\frac{1 + \tan \frac{\pi}{n}}{1 - \tan \frac{\pi}{n}} \right) = \ln \left(1 + \tan \frac{\pi}{n} \right) - \ln \left(1 - \tan \frac{\pi}{n} \right).$

Cũng từ các giới hạn quen thuộc, ta tính được

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(n \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n} \right) \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(n \left(\ln \left(1 + \tan \frac{\pi}{n} \right) - \ln \left(1 - \tan \frac{\pi}{n} \right) \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \tan \frac{\pi}{n} \right)}{\tan \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi + \frac{\ln \left(1 - \tan \frac{\pi}{n} \right)}{(-\tan \frac{\pi}{n})} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi \right) = 2\pi \end{aligned}$$

c) Theo chứng minh dạng tổng quát như trong phần lý thuyết, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{1}{3x + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-x^2 + x}{(3x + \sin x)(2x^2 - x + 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + 1}{(3 + \frac{\sin x}{x})(2x^2 - x + 1)}} = e^{\frac{1}{(3+1)1}} = \sqrt[4]{e}$$

Bài 6.

a) Ta có $f'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Suy ra $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 + \frac{3}{5}$

Phương trình tiếp tuyến của $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ tại $x = \frac{3}{4}$ có dạng

$$y = f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\ln 2 = \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}$$

Do đó, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}$.

b) Theo giả thiết, ta có $a + b + c = \frac{9}{4}$. Lấy logarit nepe hai vế của S, ta được

$$\ln S = a \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + b \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) + c \ln(c + \sqrt{c^2 + 1}).$$

Ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) + b \ln(b + \sqrt{b^2 + 1}) + c \ln(c + \sqrt{c^2 + 1})$$

Xét hàm số $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, f''(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{(x^2 + 1)^2}} > 0, \forall x$$

Suy ra, $f(x)$ là hàm có tiếp tuyến tại mọi điểm luôn nằm dưới đồ thị. Theo câu a/, ta có tiếp tuyến của $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ tại $x = \frac{3}{4}$ là $y = \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}$.

Do đó $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \geq \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)x - \frac{9}{20}, \forall x \in \mathbb{R}$ và đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{4}$.

Từ đó, ta được

$$M = f(a) + f(b) + f(c) \geq \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)(a + b + c) - \frac{27}{20} = \left(\ln 2 + \frac{3}{5}\right)\frac{9}{4} - \frac{27}{20} = \frac{9 \ln 2}{4}.$$

Suy ra $\ln S \geq \frac{9 \ln 2}{4} \Leftrightarrow S \geq 2^{\frac{9}{4}} = 4\sqrt[4]{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$, đạt được khi $a = b = c = \frac{3}{4}$.

Nhận xét. Phương pháp để chứng minh trong bài toán này chính là phương pháp tiếp tuyến khi từ dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức và tính chất hàm lồi (lõm), ta đưa hàm số phức tạp về hàm tuyến tính.

Bài 7. Ta thấy đẳng thức $b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}, t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln t = 0 \Leftrightarrow t = e$.

Trên miền $(0, e)$ hàm số đồng biến và trên miền $[e, +\infty)$, hàm số nghịch biến và hàm đạt cực đại tại $x = e$. Suy ra trong hai số a, b đã cho, có một số thuộc miền $(0, e)$ và một số thuộc miền $[e, +\infty)$.

i) Ta thấy bất đẳng thức đã cho có thể viết lại là

$$a \ln b (\ln b - 1) - b (\ln b - 1) < 0 \Leftrightarrow (\ln b - 1)(a \ln b - b) < 0. \text{ Ta xét hai trường hợp}$$

-Nếu $a > b$ thì theo nhận xét trên, ta có $a > e > b$, suy ra $\ln b < 1 \Leftrightarrow \ln b - 1 < 0$.

Hơn nữa, ta cũng có $a \ln b - b > a \ln b - b \ln a = 0$ nên hai biểu thức trong ngoặc ở trên trái dấu, ta có $(\ln b - 1)(a \ln b - b) < 0$.

-Nếu $a < b$ thì $a < e < b$, suy ra $\ln b > 1 \Leftrightarrow \ln b - 1 > 0$.

Mặt khác $a \ln b - b < a \ln b - b \ln a = 0$ nên ta cũng có $\ln b < 1 \Leftrightarrow \ln b - 1 < 0$. Ta có đpcm.

ii) Ta thấy $x + 1 > x$ nên theo nhận xét trên, ta cần có $x \in (0, e], x + 1 \in [e, +\infty)$.

Đồ thị của hàm $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ đạt cực đại tại $x = e$ nên đường thẳng $y = m, e > m > 0$ nằm ngang cắt đồ thị tại đúng hai điểm và do tính liên tục và đơn điệu trên các khoảng nên tồn tại đúng một giá trị m mà khoảng cách giữa hai giao điểm nói trên là 1.

Suy ra có đúng một giá trị x sao cho $x^{x+1} = (x+1)^x$. Bằng cách này, ta cũng chứng minh được với mọi $a > 0$ thì phương trình $x^{x+a} = (x+a)^x$ có đúng một nghiệm thực $x \in (0, e]$.

iii) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a < b$, theo nhận xét trên thì $0 < a < e < b$.

Theo bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối, ta có

$$f_{(a,b)}(x) = |x - a| + |x - b| + |x - 2| + |x - 3| \geq |(x - a) + (b - x)| + |(x - 2) + (3 - x)| = |b - a| + 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2)(3 - x) \geq 0, (x - a)(b - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3, a \leq x \leq b$.

Tuy nhiên, do hàm số này xét mọi cặp $(a, b) \in T$ và khi $b - a \rightarrow 0$ thì $x \rightarrow e$.

Do đó, giá trị x_0 trong đề bài nêu chính là e .

BÀI TẬP BÀI 4

Bài 1.

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(a^a b^b c^c)^2 (a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)})^3 \geq 27$$

c) Cho x, y, z, a, b là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z, a \geq b$. Chứng minh rằng

$$x^a (y^b - z^b) + y^a (z^b - x^b) + z^a (x^b - y^b) \geq 0$$

Bài 2.

a) Tìm tất cả các hàm số $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức sau

$$f(\sqrt{2}x) + f((4 + 3\sqrt{2})x) = 2f((2 + \sqrt{2})x)$$

b) Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Hãy xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x(3^{b^y+f(y)-1} - b^y)$$

(Đề thi HSGQG năm 2007)

Bài 3.

a) Cho $0 < a, b \neq 1$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$.

b) Hãy xác định tất cả các cặp số dương a, b sao cho với mọi số nguyên dương n và với mọi nghiệm thực x_n của phương trình $4n^2 x = \log_2(2n^2 x + 1)$, ta luôn có

$$a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n$$

Bài 4. Một số ứng dụng của hàm số mũ và hàm số logarit.

1. Chi phí tổng cộng của một công ty được tính như sau $C(t) = 90 - 50e^{-t}$ (đơn vị tiền) với t là thời gian tính bằng năm từ khi công ty thành lập đến thời điểm hiện tại. Tính chi phí công ty đã chi ra sau 10 năm.

2. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%?

3. Một công ty vừa tung ra thị trường một số sản phẩm mới và họ có tổ chức phát quảng cáo ở truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0,15x}}, x \geq 0$.

Hãy so sánh tỉ lệ này khi có 100, 200 và 500 quảng cáo được phát đi.

4. Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường khác không khí, chẳng hạn như nước, sương mù, ... sẽ giảm dần tùy theo độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ tùy thuộc môi trường theo công thức như sau $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, tính bằng mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính xem cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

Bài 5.

Để đo độ phóng xạ của một chất phóng xạ β^- , người ta dùng một máy đếm xung. Khi chất này phóng xạ ra các hạt β^- , các hạt này đập vào máy và khi đó, trong máy xuất hiện một xung điện và bộ đếm tăng thêm 1 đơn vị. Ban đầu, máy đếm được 960 xung trong vòng một phút nhưng sau đó 3 giờ chỉ còn 120 xung trong một phút (với cùng điều kiện). Hỏi chu kỳ bán rã của chất này là bao nhiêu giờ?

Bài 6.

Giả sử một hàm chỉ mức sản xuất của một hãng DVD trong 1 ngày là $q(m, n) = m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m là số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng.

Biết rằng tiền lương cho nhân viên là 16 USD và của một lao động chính là 27 USD.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

Bài 7.

Trong Tin học, thuật toán tìm kiếm trên một cây cân bằng (một dạng graph đặc biệt) đòi hỏi số bước di chuyển là $P(n)$ ứng với cây có bậc n và được xác định theo công thức sau

$$P_n(i) = \frac{(i-1)(P_{i-1} + 1) + (n-i)(P_{n-i} + 1)}{n} \text{ và } P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_n(i).$$

Hãy đánh giá độ phức tạp của thuật toán này.

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 4

Bài 1.

a) Trong bất đẳng thức đã cho, lấy logarit thập phân hai vế, ta được

$$\begin{aligned} a \log a + b \log b + c \log c &\geq \frac{a+b+c}{3} (\log a + \log b + \log c) \\ \Leftrightarrow 3(a \log a + b \log b + c \log c) &\geq (a+b+c)(\log a + \log b + \log c) \end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì $\log a \geq \log b \geq \log c$. Theo bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu cùng chiều thì dễ thấy bất đẳng thức cuối ở trên đúng. Suy ra $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

b) Trước hết, ta chứng minh rằng $(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}$ với $a, b, c > 0$.

Thật vậy, lấy logarit nepe hai vế, ta có

$$\begin{aligned} 2[a \ln a + b \ln b + c \ln c] &\geq (b+c) \ln a + (c+a) \ln b + (a+b) \ln c \\ \Leftrightarrow \ln a(2a-b-c) + \ln b(2b-c-a) + \ln c(2c-a-b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(\ln a - \ln b) + (b-c)(\ln b - \ln c) + (c-a)(\ln c - \ln a) &\geq 0 \end{aligned}$$

Do hàm số $f(t) = \ln t, t > 0$ đồng biến nên biểu thức $a-b$ và $\ln a - \ln b$ cùng dấu hay $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$. Từ đó suy ra vế trái ở trên là tổng của ba biểu thức không âm nên nó cũng không âm và như thế bất đẳng thức đã nêu ở trên là đúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $(a^{b+c} + b^{c+a} + c^{a+b})(a^{-(b+c)} + b^{-(c+a)} + c^{-(a+b)})^3 \geq 27$.

Đặt $x = a^{b+c}, y = b^{c+a}, z = c^{a+b}, x, y, z > 0$ đưa về bất đẳng thức sau

$$xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^3 \geq 27 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}, \text{ đúng theo BĐT Cauchy cho ba số dương.}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

c) Ta có $x \geq y \geq z, a \geq b$ nên $z^b \leq y^b \leq x^b$. Xét hàm số $f(t) = t^{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b} \geq 1, t \in (z^b, x^b)$.

Ta có $f'(t) = \frac{a}{b} t^{\frac{a}{b}-1}, f''(t) = \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) t^{\frac{a}{b}-2} > 0, z^b < t < x^b$ nên hàm số $f'(x)$ là hàm đồng biến trên (z^b, x^b) . Dễ thấy hàm số này cũng liên tục trên miền xác định này.

Theo định lí Lagrange thì tồn tại số thực $c_1 \in (z^b, y^b)$ sao cho

$$f(y^b) - f(z^b) = f'(c_1)(y^b - z^b) \Leftrightarrow y^a - z^a = f'(c_1)(y^b - z^b)$$

Tương tự, ta cũng thấy rằng tồn tại số thực $c_2 \in (y^b, x^b)$ sao cho

$$x^a - y^a = f'(c_2)(x^b - y^b) \Leftrightarrow (x^a - y^a)(y^b - z^b) = f'(c_2)(x^b - y^b)(y^b - z^b)$$

Ta có $f'(c_1) \geq f'(c_2)$ nên

$$(x^a - y^a)(y^b - z^b) \geq f'(c_1)(x^b - y^b)(y^b - z^b) \Leftrightarrow (x^a - y^a)(y^b - z^b) \geq (x^b - y^b)(y^a - z^a)$$

Khai triển bất đẳng thức này, ta có $x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geq 0$ (đpcm).

Bài 2.

a) Ta xét các trường hợp sau

-Với $x = 0$ thì $2f(0) = 2f(0)$ nên $f(0) = a$ là một số thực nào đó.

-Với $x > 0$, đặt $(2 + \sqrt{2})x = t > 0 \Leftrightarrow x = \frac{t}{2 + \sqrt{2}}$ thì

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}t\right) + f\left(\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}t\right) = 2f(t) \Leftrightarrow f\left((2 - \sqrt{2})t\right) + f\left(\frac{t}{2 - \sqrt{2}}\right) = 2f(t).$$

Đặt $t = (2 - \sqrt{2})^u$ thì phương trình trên trở thành

$$f\left((2 - \sqrt{2})^{u+1}\right) + f\left((2 - \sqrt{2})^{u-1}\right) = 2f\left((2 - \sqrt{2})^u\right)$$

Tiếp tục đặt $f\left((2 - \sqrt{2})^u\right) = g(u)$ và $h(u) = g(u+1) - g(u)$ thì ta có

$$g(u+1) + g(u-1) = 2g(u) \Leftrightarrow g(u+1) - g(u) = g(u) - g(u-1) \Leftrightarrow h(u+1) = h(u), \forall u.$$

Bằng quy nạp, ta thấy rằng $g(u+n) = nh(u) + g(u)$ với n là số nguyên dương. Do đó

$$g(u) = \begin{cases} h(u) + k(u), & 0 \leq u < 1 \\ nh(u-u) + k(u-n), & n \leq u < n+1, \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (*)$$

trong đó $h(u), k(u)$ là các hàm tùy ý, $h(u)$ tuần hoàn với chu kì 1.

Suy ra $f(x) = g(\log_{\sqrt{2}-1} x), x > 0$.

-Nếu $x < 0$ thì tiến hành đặt $-(2 + \sqrt{2})x = t = (\sqrt{2} - 1)^u$, ta được

$$f(x) = g(\log_{\sqrt{2}-1} |x|), x < 0.$$

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ g(\log_{\sqrt{2}-1} |x|), & x \neq 0 \end{cases}$ với $g(x)$ xác định như (*).

b) Với mọi số thực x, y thì

$$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x(3^{b^y+f(y)-1} - b^y) \Leftrightarrow f(x+y) + b^{x+y} = (f(x) + b^x)3^{b^y+f(y)-1}.$$

Đặt $g(x) = f(x) + b^x, \forall x$ thì phương trình trên chính là $g(x+y) = g(x).3^{g(y)-1}, \forall x, y$ (*)

$$\text{Thay } y = 0, \text{ phương trình trên trở thành } g(x) = g(x).3^{g(0)-1} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

-Nếu $g(x) = 0, \forall x$ thì ta có ngay $f(x) = -b^x, \forall x$.

-Nếu $g(0) = 1$ thì trong (*), thay $x = 0$, ta có $g(y) = 3^{g(y)-1}$.

Xét hàm số $h(t) = 3^{t-1} - t, t \in \mathbb{R}$. Ta có $h'(t) = 3^{t-1} \ln 3 - 1, h''(t) = 3^{t-1} (\ln 3)^2 > 0$ nên phương trình $h(t) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Ta lại thấy $h(1) = 0, h(0) > 0, h(\frac{9}{10}) < 0$ nên theo tính chất liên tục của hàm số, phương trình $h(t) = 0$ có đúng hai nghiệm là $t_1 = 1, t_2 = c, 0 < c < 1$.

$$\text{Do đó } g(y) = 3^{g(y)-1} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = 1 \\ g(y) = c, 0 < c < 1 \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(y_0) = c$ thì

$$1 = g(0) = g(y_0 - y_0) = g(-y_0).3^{g(y_0)-1} = cg(-y_0) \Leftrightarrow g(-y_0) = \frac{1}{c} > 1 > c.$$

Điều mâu thuẫn này cho thấy hàm số có dạng $g(y) = c, 0 < c < 1$ không thỏa mãn đề bài.

Do đó $g(y) = 1, \forall y \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 1 - b^x, \forall x$. Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy các hàm số thỏa mãn đề bài là $f(x) = b^x$ hoặc $f(x) = 1 - b^x$, mọi x .

Bài 3.

a) Theo giới hạn cơ bản $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e$ thì ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}} \right]^{\frac{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a^x - 1}{2x} + \frac{b^x - 1}{2x}}.$$

Hơn nữa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b$ nên giới hạn cần tìm là

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

b) Điều kiện xác định của phương trình là $x > -\frac{1}{2n^2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2^{4n^2x} = 2n^2x + 1 \Leftrightarrow 2^{4n^2x+1} = 4n^2x + 2$.

Đặt $t = 2n^2x + 1$, ta có $2^t = t + 1$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1$. Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 - 1$, $f''(t) = 2^t (\ln 2)^2 > 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Ta cũng có $f(0) = f(1) = 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm là $t = 0, t = 1$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_n = 0, x_n = -\frac{1}{4n^2}$.

Xét bất đẳng thức $a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n$. Điều kiện $0 < a, b \neq 1$.

-Với $x_n = 0$ thì $a^{x_n} + b^{x_n} = 2 = 2 + 3x_n$, bất đẳng thức được thỏa mãn với mọi a, b .

-Với $x_n = -\frac{1}{4n^2}$, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$a^{\frac{1}{4n^2}} + b^{\frac{1}{4n^2}} \geq 2 - \frac{3}{4n^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^{\frac{1}{4n^2}} + b^{\frac{1}{4n^2}}}{2} \right)^{-4n^2} \leq \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4n^2} \right)^{-4n^2}$$

Cho $n \rightarrow +\infty$, theo câu a thì vế trái có giới hạn là $\sqrt{ab}$, vế phải có giới hạn là $e\sqrt{e}$.

Bất đẳng thức này phải đúng với mọi n nên $\sqrt{ab} \leq e\sqrt{e} \Leftrightarrow ab \leq e^3$.

Ngược lại, với $ab \leq e^3$ thì $\frac{a^{\frac{1}{4n^2}} + b^{\frac{1}{4n^2}}}{2} \geq (\sqrt{ab})^{-\frac{1}{4n^2}} \geq e^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{4n^2})} \geq 1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4n^2}\right)$.

(do ta có bất đẳng thức $e^x > 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$). Suy ra $a^{x_n} + b^{x_n} \geq 2 + 3x_n$ cũng đúng.

Vậy điều kiện cần tìm là $0 < a, b \neq 1$ và $ab \leq e^3$.

Bài 4.

1. Theo hàm số đã cho thì chi phí công ty đã chi sau 10 năm là

$$C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,99773 \text{ (đơn vị tiền)}$$

2. Theo công thức tính tỉ lệ phần trăm đã cho thì cần tìm t thỏa mãn

$$75 - 20\ln(t+1) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq 24,79 \text{ (tháng)}$$

Vậy sau khoảng 24 tháng (tức là hơn hai năm) thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

3. Khi có 100 quảng cáo được phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là

$$P(100) = \frac{100}{1 + 49e^{-1,5}} \approx 8,3799 \%$$

Khi có 200 quảng cáo được phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là

$$P(200) = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29,0734 \%$$

Khi có 500 quảng cáo được phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là

$$P(500) = \frac{100}{1 + 49e^{-7,5}} \approx 97,3614 \%$$

Ta thấy tốc độ tăng của hàm mũ rất lớn như thế cho thấy sức ảnh hưởng của quảng cáo đối với người tiêu dùng.

4. Theo công thức đã cho thì cường độ ánh sáng thay đổi khi đi từ độ sâu x_1 đến độ sâu

$$x_2 \text{ chính là } \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 e^{-\mu x_1}}{I_0 e^{-\mu x_2}} = e^{\mu(x_2 - x_1)}.$$

Do đó, khi đi từ độ sâu 2m xuống độ sâu 20m thì cường độ ánh sáng giảm đi

$$e^{1,4(20-2)} = e^{25,2} \approx 8,7947.10^{10} \text{ lần}$$

Giá trị này rất lớn chứng tỏ ở độ sâu 20m dưới mặt nước biển gần như không có ánh sáng chiếu tới được.

Bài 5.

Gọi ΔN_1 là số hạt β^- tạo thành trong khoảng thời gian Δt_1 , kể từ thời điểm ban đầu.

Ta có $\Delta N_1 = N_{01} - N_1 = N_{01}(1 - e^{-k\Delta t_1})$ với N_{01} là số hạt phóng xạ β^- ban đầu.

Sau 3 giờ, số nguyên tử còn lại trong chất phóng xạ là $N_{02} = N_{01} \cdot e^{-3k}$

Kể từ thời điểm này, trong khoảng thời gian Δt_2 thì số hạt β^- tạo thành là

$$\Delta N_2 = N_{02} - N_2 = N_{02}(1 - e^{-k\Delta t_2}).$$

Cho $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 1$ phút thì theo giả thiết, ta có $\Delta N_1 = 960, \Delta N_2 = 120$. Suy ra

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{N_{01}(1 - e^{-k\Delta t_1})}{N_{01}e^{-3k}(1 - e^{-k\Delta t_2})} \Leftrightarrow \frac{960}{120} = e^{3k} \Leftrightarrow \ln 8 = 3 \frac{\ln 2}{T} \Leftrightarrow T = 1.$$

Vậy chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đã cho là 1 giờ.

Bài 6. Theo giả thiết, ta có chi phí mỗi ngày là $C = 16m + 27n$ USD.

Do hàm sản xuất mỗi ngày phải đạt được chỉ tiêu 50 sản phẩm nên cần có

$$m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} \geq 40 \Leftrightarrow m^2 n \geq 40^3 \Leftrightarrow n \geq \frac{40^3}{m^2}.$$

Biểu thức biểu diễn mối quan hệ giữa số lượng nhân viên và chi phí kinh doanh là

$$C \geq 16m + \frac{27.40^3}{m^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$16m + \frac{27.40^3}{m^2} = 8m + 8m + \frac{27.40^3}{m^2} \geq 3\sqrt[3]{8m.8m.27.40^3} = 1440$$

Do đó, chi phí thấp nhất cần tìm là $C_{\min} = 1440$ USD, đạt được khi và chỉ khi

$$8m = \frac{27 \cdot 40^3}{m^2} \Leftrightarrow m^3 = \frac{3^3 \cdot 40^3}{2^3} = 60^3, \text{ tức là số nhân viên là } 60 \text{ và lao động chính là xấp xỉ } 18 \text{ người (do } n = \frac{160}{9} \approx 17,778 \approx 18).$$

Bài 7. Theo giả thiết, ta có $P_1 = 0$. Ta biến đổi giả thiết như sau

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_n(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(i-1)(P_{i-1} + 1) + (n-i)(P_{n-i} + 1)}{n} \right] = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} [i(P_i + 1)].$$

Suy ra $P_{n-1} = \frac{2}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-2} [i(P_i + 1)]$. So sánh hai đẳng thức này, ta được

$$P_n = P_{n-1} \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{2(n-1)(P_{n-1} + 1)}{n^2} = \frac{(n-1)}{n^2} [(n+1)P_{n-1} + 2].$$

Từ đó, ta được công thức tính P_n theo n như sau

$$\begin{aligned} P_n &= 2 \left(\frac{n-1}{n^2} + \frac{(n+1)(n-2)}{(n-1)n^2} + \frac{(n+1)(n-3)}{(n-2)(n-1)n} + \frac{(n+1)(n-4)}{(n-3)(n-2)n} \dots + \frac{n+1}{2.3n} \right) \\ &= \frac{2(n+1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{(n-i+1)(n-i+2)} = \frac{2(n+1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{2}{n-i+2} - \frac{1}{n-i+1} \right] \\ &= \frac{2(n+1)}{n} H_n - 4 \end{aligned}$$

Trong đó $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa và có giới thiệu trong bài trước. Ta biết rằng $H_n - \ln n$ có giới hạn hữu hạn nên big-O của H_n là $\ln n$.

Ta cũng có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ nên dễ dàng suy ra độ phức tạp của thuật toán này là $2 \ln n$.

BÀI TẬP BÀI 5

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$

b) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_4(\log_3(\log_2 x))$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $(\sqrt{3} - 1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} = x^2 + 1$ b) $\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x + 1} + 4x \cdot 5^x + 4x + 1 = 5^{2x}$

c) $4(x - 2)[\log_2(x - 3) + \log_3(x - 2)] = 15(x + 1)$

d) $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} - 4x^3 + 2x^2 - x + 16$

b) $(x + 1)\log 4^x = x\log(x + 2^{x+1})$

c) $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

d) $3^{\log_2(3^x - 1)} = 2^{\log_3(2^x + 1)} + 1$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau

a) $2^{x+2} + 3^{x+2} \leq 3^{2x+1} + 2^{2x+1}$

b) $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \geq 0.$

c) $\begin{cases} x^{4024} + x^{2012} > 2012^{2x} + 2012^x \\ x^{4022} + x^{2011} < 2011^{2x} + 2011^{2x} \end{cases}$

Bài 5.

a) Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$\cos x = x \quad (1)$$

$$\sin(\cos x) = x \quad (2)$$

$$\cos(\sin x) = x \quad (3)$$

b) Gọi α, β, γ lần lượt là nghiệm của các phương trình (1), (2), (3). Chứng minh rằng

$$\gamma\alpha.\ln\beta < \beta\gamma.\ln\alpha < \alpha\beta.\ln\gamma$$

Bài 6.

a) Cho x là nghiệm của phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3$

Chứng minh rằng x cũng là nghiệm của phương trình $(\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$

b) Biết rằng số thực a thỏa mãn phương trình $4^x - \frac{1}{4^x} = 2\cos ax$ có đúng 2010 nghiệm thực. Hỏi phương trình $4^x + \frac{1}{4^x} = 2\cos ax$ có bao nhiêu nghiệm thực?

Bài 7. Giải các phương trình sau

a) $\log_{1-x}(2x) + \log_{2x}(2-2x) = 0$

b) $(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} + (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$

c) Xác định các số thực $a > 0$ sao cho $a^{\cos 2x} \geq 2\cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 5

Bài 1.

a) Xét phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Điều kiện xác định là $x \geq 1$. Đặt $t = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Ta có $x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{t}$. Do đó, ta có

$$\log_2 t + \log_3 \frac{1}{t} = \log_6 \frac{1}{t} \Leftrightarrow \log_2 t - \log_3 t + \log_6 t = 0 \Leftrightarrow \log_2 t (1 - \log_3 2 + \log_6 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Ta xét phương trình $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = 1$, thỏa mãn điều kiện đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \log_4(\log_3(\log_4 x))^2 &= \log_4(\log_3(\log_2 x)) \Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 = \log_3(\log_2 x) \\ \Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 &= \log_3(2 \log_4 x) \Leftrightarrow (\log_3(\log_4 x))^2 = \log_3 2 + \log_3(\log_4 x) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_3(\log_4 x)$. Ta có phương trình bậc hai biến t là

$$t^2 = \log_3 2 + t \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \log_3 2}}{2}. \text{ Khi đó, ta có } x = 4^{3^t}, \text{ thử lại ta thấy thỏa.}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm xác định như trên.

Bài 2.

a) Điều kiện xác định $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} \left[(\sqrt{3} - 1)^{\log_2 x} + x(\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} \right] &= (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} (x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 2^{\log_2 x} + x(\sqrt{3} + 1)^{2 \log_2 x} &= (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} (x^2 + 1) \Leftrightarrow x + x(\sqrt{3} + 1)^{2 \log_2 x} = (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} (x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow x \left[(\sqrt{3} + 1)^{2 \log_2 x} + 1 \right] &= (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} (x^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^{2 \log_2 x} + 1}{(\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x}} \end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy đẳng thức } \frac{a^2 + 1}{a} = \frac{b^2 + 1}{b} \Leftrightarrow a^2 b + b = ab^2 + a \Leftrightarrow (a - b)(ab - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases}$$

Ta có hai trường hợp sau

-Nếu $x = (\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x}$ thì lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được

$$\log_2 x = \log_2 (\sqrt{3} + 1) \cdot \log_2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ thỏa mãn điều kiện xác định.}$$

-Nếu $x(\sqrt{3} + 1)^{\log_2 x} = 1$ thì cũng lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 x \cdot \log_2 (\sqrt{3} + 1) &= 0 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot [1 + \log_2 (\sqrt{3} + 1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) Điều kiện $5^x \geq 2x, x \geq -\frac{1}{2}$.

Đặt $a = \sqrt{5^x - 2x}, b = \sqrt{2x + 1}, a, b \geq 0$. Ta có

$$a^2 = 5^x - 2x, b^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5^x - 4x - 1, a^2 + b^2 = 5^x + 1. \text{ Do đó}$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (5^x + 1)(5^x - 4x - 1) = 5^{2x} - 4x \cdot 5^x - 4x - 1.$$

Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$a - b = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \Leftrightarrow (a - b)(1 - (a^2 + b^2)(a + b)) = 0.$$

-Nếu $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ thì $5^x - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow 5^x = 4x + 1$.

Đây là dạng phương trình có dạng Bernoulli và nó có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$, thỏa mãn điều kiện đề bài.

-Nếu $(a^2 + b^2)(a + b) = 1 \Leftrightarrow (5^x + 1)(\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x + 1}) = 1$.

Ta thấy rằng $\sqrt{5^x - 2x} + \sqrt{2x + 1} \geq \sqrt{(5^x - 2x) + (2x + 1)} = \sqrt{5^x + 1} > 1$ và $5^x + 1 > 1$ nên phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

c) Điều kiện xác định $x > 3$.

Phương trình đã cho có thể viết lại là $\log_2(x - 3) + \log_3(x - 2) = \frac{15}{4} \cdot \frac{x + 1}{x - 2}$.

Ta có: $(\log_2(x-3) + \log_3(x-2))' = \frac{1}{\ln 2 \cdot (x-3)} + \frac{1}{\ln 3 \cdot (x-2)} > 0, \forall x > 3,$

$$\left(\frac{15}{4} \cdot \frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{15}{4} \cdot \frac{-3}{(x-2)^2} < 0, \forall x > 3.$$

Suy ra vế trái là hàm số đồng biến theo biến x , vế phải là hàm nghịch biến theo biến x nên phương trình đã cho có không quá một nghiệm.

Ta thay $x = 11$ vào phương trình thì thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 11$.

d) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & [2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1)]^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2^x + \sin(2^x + y - 1) = 1 \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do $\cos(2^x + y - 1) = 0 \Rightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$. Ta có hai trường hợp sau

-Nếu $\sin(2^x + y - 1) = 1$ thì $2^x = 0$, vô nghiệm.

-Nếu $\sin(2^x + y - 1) = -1$ thì $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra $\sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2} - 1 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 0, y = -\frac{\pi}{2} - 1 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 3.

a) Xét hàm số $f(x) = 5^x + 4^x + 3^x + 2^x - \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x}\right) + 4x^3 - 2x^2 + x - 16, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + 4^x \cdot \ln 4 + 3^x \cdot \ln 3 + 2^x \cdot \ln 2 + \left(\frac{\ln 2}{2^x} + \frac{\ln 3}{3^x} + \frac{\ln 6}{6^x}\right) + 12x^2 - 4x + 1 > 0$

Suy ra hàm số này đồng biến và phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm. Ta

$$\text{thấy } f(1) = 5 + 4 + 3 + 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + 4 - 2 + 1 - 16 = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$x \log 4^{x+1} = x \log(x + 2^{x+1}) \Leftrightarrow x = 0 \vee 4^{x+1} = x + 2^{x+1}.$$

Ta xét phương trình $4^{x+1} = 2^{x+1} + x$, đặt $x + 1 = y$, ta có $4^y - 2^y - y + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(y) = 4^y - 2^y - y + 1$. Ta có $f'(y) = 4^y \ln 4 - 2^y \ln 2 - 1$.

Dễ thấy rằng phương trình $f'(y) = 0$ có đúng một nghiệm k và $f'(y)$ dương trên miền $(k, +\infty)$ và âm trên miền $(-\infty; k)$.

Ta cũng thấy rằng $f'\left(\frac{3}{4}\right) > 0$ do $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 4^{\frac{3}{4}} \ln 4 - 2^{\frac{3}{4}} \ln 2 - 1 = \ln 2(2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{3}{4}}) - 1$, mà

$$\ln 2 > \log 2 > \frac{3}{10} \quad \text{và} \quad 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{3}{4}} > \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \quad \text{hay} \quad f'\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2(2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{3}{4}}) - 1 > 0.$$

Do đó $k < \frac{3}{4}$. Ta cũng có $f(y) = \left(2^y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - y \Rightarrow f(y) > 0, \forall y < \frac{3}{4}$ nên $f(k) > 0$.

Rõ ràng k là điểm cực tiểu của hàm số này nên $f(y) \geq f(k) > 0$.

Suy ra phương trình $4^y - 2^y - y + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

c) Xét phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$

Điều kiện $2x^2 - 2x - 12 > 0$.

Ta thấy rằng $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$, còn $(2\sqrt{2 + \sqrt{5}})^2 = 8 + 4\sqrt{5}$ nên có thể biến đổi phương trình trên thành

$$\frac{1}{2} \log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \frac{1}{2} \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$$

$$\Leftrightarrow \log_{9+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{8+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 12)$$

Đặt $a = 8 + 4\sqrt{5}$ thì $\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12)$, tiếp tục đặt

$$\log_{a+1}(x^2 - 2x - 11) = \log_a(x^2 - 2x - 12) = t \Leftrightarrow (a+1)^t = x^2 - 2x - 11, a^t = x^2 - 2x - 12.$$

Suy ra $(a+1)^t = a^t + 1$. Đến đây, tiếp tục giải như Ví dụ., ta có $t = 1$ hay

$$x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5} \vee x = -2\sqrt{5}.$$

Dễ thấy hai nghiệm này thỏa điều kiện đề bài nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 + 2\sqrt{5}, x = -2\sqrt{5}$.

d) Điều kiện $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Đặt $a = \log_2 3, y = 2^x$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(3^x - 1)^{\log_2 3} = (2^x + 1)^{\log_2 2} + 1 \Leftrightarrow (y^a - 1)^a = (y + 1)^{\frac{1}{a}} + 1 \Leftrightarrow ((y^a - 1)^a - 1)^a = y$$

Xét hàm số $f(t) = t^a - 1, t > 0$ thì phương trình trên chính là $f(f(f(y))) = y$.

Dễ dàng thấy rằng $f(t)$ đồng biến và $f(2) = 2$ nên $f(t) > t, \forall t > 2, f(t) < t, 0 < t < 2$.

Suy ra phương trình $f(f(f(y))) = y$ có nghiệm duy nhất là $y = 2$, suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

Bài 4.

a) Ta thấy rằng nếu $x = 1$ thì hai vế của bất phương trình này bằng nhau. Ta xét thêm các trường hợp sau

-Nếu $x > 1 \Rightarrow x + 2 < 2x + 1$ thì $2^{x+2} < 2^{2x+1}, 3^{x+2} < 3^{2x+1} \Rightarrow 2^{x+2} + 3^{x+2} < 2^{2x+1} + 3^{2x+1}$, thỏa mãn đề bài.

-Nếu $x < 1$ thì bất đẳng thức ở trên đổi chiều và không thỏa với đề bài.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \geq 1$.

b) Ta thấy rằng hàm số $f(x) = 2^{1-x} - 2x + 1 = -2x + 1 + \frac{2}{2^x}$ là hàm nghịch biến và

$$f(1) = 0, f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \text{ nên } f(x) \text{ cùng dấu với } 1 - x.$$

Ta cũng thấy rằng hàm số $g(x) = 2^x - 1$ là hàm đồng biến và $g(0) = 0$ nên $g(0) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ nên $g(x)$ cùng dấu với x .

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$

Vậy tập nghiệm của BPT là $(0; 1]$.

c) Đặt $2012 = y$, ta xét bài toán tổng quát hơn như sau

$$\begin{cases} x^{2y} + x^y > y^{2x} + y^x \\ x^{2y-2} + x^{y-1} < (y-1)^{2x} + (y-1)^{2x} \end{cases}$$

Bất phương trình thứ nhất tương đương với

$$x^{2y} - y^{2x} + x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow (x^y - y^x)(x^y + y^x) + x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow (x^y - y^x)(x^y + y^x + 1) > 0$$

Dễ thấy $x^y + y^x + 1 > 0$ nên ta được $x^y > y^x$.

$$\text{Ta thấy } x^y > y^x \Leftrightarrow y \ln x > x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln 2012}{2012}.$$

Ta lại đặt $2011 = z$, phương trình thứ hai tương đương với $x^{2z} + x^z < z^{2x} + z^x$.

$$\text{Biến đổi tương tự như trên, ta được } \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln 2011}{2011}.$$

$$\text{Do đó, hệ bất phương trình đã cho tương đương với } \frac{\ln 2012}{2012} < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln 2011}{2011}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\ln t}{t}, t > 3. \text{ Ta thấy rằng } f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0, \forall t > 3.$$

Suy ra hàm số này nghịch biến trên $(3, +\infty)$.

Do đó, $\frac{\ln 2012}{2012} < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln 2011}{2011} \Leftrightarrow 2011 < x < 2012$. Đây chính là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài 5. a) Xét hàm số tương ứng với phương trình (1) là $f(x) = x - \cos x$. Do

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ nên ta chỉ cần xét } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên đây là hàm đồng biến.

Hơn nữa, do $f(0) < 0, f(1) > 0$ và đây là hàm liên tục nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất. Ta có đpcm.

Các phương trình (2) và (3) được chứng minh tương tự.

b) Dễ thấy $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\ln \beta}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\alpha} < \frac{\ln \gamma}{\gamma}$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{\ln t}{t}, 0 < t < 1$. Ta có $g'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} > 0$ nên hàm số này đồng biến trên $(0, 1)$. Do đó, để chứng minh bất đẳng thức cuối ở trên, ta chứng minh $\beta < \alpha < \gamma$.

Giả sử $\beta \geq \alpha$ thì $\beta = \sin(\cos \beta) < \cos \beta \leq \cos \alpha = \alpha$, mâu thuẫn; tức là $\beta < \alpha$.

Giả sử $\gamma \leq \alpha$ thì $\gamma = \cos(\sin \gamma) = \cos \gamma \geq \cos \alpha = \alpha$, mâu thuẫn; tức là $\alpha < \gamma$.

Vậy $\beta < \alpha < \gamma$ hay $\frac{\ln \beta}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\alpha} < \frac{\ln \gamma}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \alpha \cdot \ln \beta < \beta \gamma \cdot \ln \alpha < \alpha \beta \cdot \ln \gamma$.

Bài 6.

a) Ta thấy $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2}$ nên nếu trong phương trình đã cho, đặt

$$t = (\sqrt{2} + 1)^x > 0 \text{ thì } t^2 = \frac{1}{t} + 3 \Leftrightarrow t^3 - 3t - 1 = 0. (*)$$

Ta sẽ tìm nghiệm thực dương của phương trình này.

Trước hết, ta xét các nghiệm thuộc $[-2; 2]$, đặt $t = 2 \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$, ta có

$$8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Dễ thấy rằng trong đoạn $[0, \pi]$, có 3 giá trị α thỏa là $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$, tức là phương trình (*)

có ba nghiệm là $2 \cos \frac{\pi}{9}, 2 \cos \frac{5\pi}{9}, 2 \cos \frac{7\pi}{9}$. Phương trình (*) là phương trình bậc ba nên

có không quá ba nghiệm, suy ra đây là tất cả các nghiệm của (*).

Trong các giá trị này, chỉ có $2\cos\frac{\pi}{9} > 0$ nên suy ra $t = (\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

b) Phương trình thứ hai có thể viết lại là

$$4^x + \frac{1}{4^x} - 2 = 2(\cos ax + 1) \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{2^x}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{ax}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - \frac{1}{2^x} = 2\cos \frac{ax}{2} & (1) \\ 2^x - \frac{1}{2^x} = -2\cos \frac{ax}{2} & (2) \end{cases}$$

Giả sử $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2011}$ là 2011 nghiệm phân biệt của phương trình $4^x - \frac{1}{4^x} = 2\cos ax$ (*)

Ta thấy rằng phương trình (*) này không có hai nghiệm nào đối nhau vì nếu ngược lại, tồn tại $x_i, -x_i$ đều là nghiệm của (*) thì ta có hệ sau

$$\begin{cases} 4^{x_i} - \frac{1}{4^{x_i}} = 2\cos ax_i \\ 4^{-x_i} - \frac{1}{4^{x_i}} = 2\cos(-ax_i) \end{cases} \Rightarrow 4^{x_i} - \frac{1}{4^{x_i}} = 4^{-x_i} - \frac{1}{4^{-x_i}} \Leftrightarrow 4^{x_i} = 4^{-x_i} \Leftrightarrow x_i = 0, \text{ vô lí.}$$

-Xét phương trình (1), đặt $x = 2t$, ta có $4^t - \frac{1}{4^t} = 2\cos at$. Theo giả thiết thì phương trình này có 2011 nghiệm phân biệt là $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2011}$ nên phương trình (1) tương ứng có 2011 nghiệm phân biệt là $2x_1, 2x_2, 2x_3, \dots, 2x_{2011}$.

-Xét phương trình (1), đặt $x = -2t$, ta cũng có phương trình $4^t - \frac{1}{4^t} = 2\cos at$. Theo giả thiết thì phương trình này có 2011 nghiệm phân biệt là $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2011}$ nên phương trình (2) tương ứng có 2011 nghiệm phân biệt là $-2x_1, -2x_2, -2x_3, \dots, -2x_{2011}$.

Do các giá trị $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2011}$ phân biệt và không có hai số nào đối nhau như chứng minh ở trên nên các giá trị $-2x_1, -2x_2, -2x_3, \dots, -2x_{2011}, 2x_1, 2x_2, 2x_3, \dots, 2x_{2011}$ cũng phân biệt.

Vậy phương trình $4^x + \frac{1}{4^x} = 2(\cos ax + 2)$ có đúng 4022 nghiệm phân biệt.

Bài 7.

a) Điều kiện $0 < x < 1$. Đặt $a = \log_2(1-x), b = \log_2 x$. Ta có

$$a + b = \log_2(1-x) + \log_2 x = \log_2 [x(1-x)] \geq \log_2 \left(-\frac{1}{4}\right) = -2.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\log_2 2 + \log_2 x}{\log_2(1-x)} + \frac{\log_2 2 + \log_2(1-x)}{\log_2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1+b}{a} + \frac{1+a}{b} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 - (a+b+2) = 0$$

Do $a+b+2 \leq 0$ nên $(a+1)^2 + (b+1)^2 - (a+b+2) \geq 0$ và đẳng thức cũng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-1$ hay $\log_2(1-x) = \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Thử lại, ta thấy thỏa. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.

b) Phương trình đã cho viết lại là

$$(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x} - (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp sau

-Nếu $\cos 2x > 0 \Leftrightarrow \cos^2 x > \sin^2 x$, do $2 + \sqrt{2} > 1$ nên

$(2 + \sqrt{2})^{\sin^2 x} - (2 + \sqrt{2})^{\cos^2 x} < 0$, trong khi đó do $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1 > 2 - \sqrt{2}$ nên

$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x} - (2 - \sqrt{2})^{\cos 2x} > 0$. Trong trường hợp này, phương trình (*) ở trên không được thỏa mãn.

-Nếu $\cos 2x < 0$, lập luận tương tự trường hợp trên.

-Nếu $\cos 2x = 0$ thì (*) được thỏa mãn và phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Đặt $t = 2 \cos^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm $a > 0$ sao cho $a^{t-1} \geq t, \forall t \in [0; 2]$.

Ta thấy rằng với $t = 0$ thì bất đẳng thức đúng và không phụ thuộc vào a nên ta chỉ cần xét $0 < t \leq 2$. Lấy logarit nepe hai vế của bất đẳng thức, ta có

$$(t-1)\ln a \geq \ln t, \forall t \in (0;2] \quad (*)$$

Để thấy bất đẳng thức này cũng luôn đúng với $t = 1$ nên ta chỉ cần xét hai khoảng sau

-Nếu $t \in (0;1)$ thì $t-1 < 0, \ln t < 0$, $(*)$ tương đương với $\ln a \leq \frac{\ln t}{t-1}$.

Bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (0;1)$ nên $\ln a \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln t}{t-1} = 1$.

-Nếu $t \in (1;2)$ thì $t-1 > 0, \ln t > 0$, $(*)$ tương đương với $\ln a \geq \frac{\ln t}{t-1}$.

Bất đẳng thức này phải đúng với mọi $t \in (0;1)$ nên $\ln a \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln t}{t-1} = 1$.

Do đó, ta cần phải có $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$ để thỏa mãn cả hai bất đẳng thức trên.

Thử lại, với $a = e$, ta cần chứng minh $t-1 \geq \ln t, \forall t \in (0;2]$.

Xét hàm số $f(u) = u - 1 - \ln u, u \in (0;2]$. Ta có $f'(u) = 1 - \frac{1}{u} = \frac{1-u}{u}, f''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ nên $f(u)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại nghiệm của $f'(u) = 0$ hay $u = 1$.

Ta có $f(u) \geq f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$ nên ta được $t-1 \geq \ln t, \forall t \in (0;2]$ là đúng.

Vậy giá trị cần tìm là $a = e$.

BÀI TẬP BÀI 6

Bài 1.

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x + y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

b) Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y \end{cases}$$

c) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^{\log_8 x} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 y \\ x^2 + 2\cos x = y^2 + 2\cos y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + 3x + \ln(2x + 1) = y \\ y^2 + 3y + \ln(2y + 1) = x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2\log_5(4y + 1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2\log_5(4z + 1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \end{cases}$$

Bài 3.

$$\text{a) Giải hệ phương trình sau } \begin{cases} \log_8 xy = 3\log_8 x \cdot \log_8 y \\ \log_2 \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \log_y x \end{cases}$$

$$\text{b) Tìm các nghiệm dương của hệ phương trình sau } \begin{cases} x + y + xy = z^{2^{2012}} + 2z^{2^{2011}} \\ x^4 + y^4 = 2z^{2^{2013}} \\ (x + y)^{z-1} = (z + 1)^{x-y} \end{cases}$$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2^{\log_3 x} + y^{\log_3 2} = 6 \\ \log_x y + \log_{\frac{y}{x^3}} x = 1 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \\ \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{y}{x}} \\ \log_3 x + \log_5 y = \log_5 x \cdot \log_3 y \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3 \log_3(x+2y+6) = 2 \log_2(x+y+2) + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} (1+4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 6.

$$\text{a) Tìm } m \text{ để hệ sau có nghiệm} \quad \begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2011x \leq 2011 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

b) Chứng minh rằng hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} e^x = 2011 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2011 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1} \\ 6xy^2 = 16x^2 - 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \log_y(\log_y x) = \log_{3-y}(\log_{3-y}(3-x)) \\ \cot x - \cot y = \log \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP BÀI 6

Bài 1.

a) Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y) = t$. Suy ra $9^t = x, 6^t = y, 4^t = x+y$ hay

$$9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3^t}{2^t}\right)^2 + \frac{3^t}{2^t} - 1 = 0$$

Đặt $a = \left(\frac{3}{2}\right)^t > 0$ thì $a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ nhưng do $a > 0$ nên $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Hơn nữa $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \frac{3^t}{2^t} = a$ nên $\frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

b) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ \sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + \sqrt{xy} = 4y \end{cases}$$

Điều kiện $8x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0, xy \geq 0, y \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} - 3y) + (\sqrt{xy} - y) &= 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{(x-y)y}{\sqrt{xy} + y} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{8x+5y}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{y}{\sqrt{xy} + y} \right) &= 0 \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được phương trình sau

$$x^4 - 4x + 2^{x^2-2x+4} = 5.$$

Ta thấy rằng $2^{x^2-2x+4} = 2^{(x-1)^2+3} \geq 2^3 = 8$, suy ra

$$5 - (x^4 - 4x) = 2^{x^2-2x+4} \geq 8 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \leq 0.$$

Do đó $x = 1$ và $y = 1$. Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = y = 1$.

c) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{\log_8 x} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

Điều kiện $x, y > 0$. Phương trình thứ hai tương đương với $\log_4 \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = 4y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình, ta có

$$\begin{aligned} (4y)^{\log_8 4y} + y^{\log_8 4y} &= 4 \Leftrightarrow 4^{\log_8 y} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\log_8 4} \cdot y^{\log_8 y} = 4 \\ \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} &= 4 \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3} + \log_8 y} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + \log_8 y \right) \log_8 y = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \log_8^2 y + 2 \log_8 y - 1 &= 0 \Leftrightarrow \log_8 y = -1 \vee \log_8 y = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow y = \frac{1}{8} \vee y = 2 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 8 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8} \right), (8; 2)$.

Bài 2.

a) Điều kiện $x \geq 0, y > 0$.

Ta thấy nếu $x = 0$ thì $\log_3 y = \log_2 (1 + \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow y = 1$, thay vào phương trình thứ hai, ta thấy không thỏa.

Suy ra $x > 0$. Khi đó, ta xét hàm số $f(t) = t^2 + 2 \cos t, t > 0$.

Ta thấy rằng $f'(t) = 2t - 2 \sin t = 2(t - \sin t) > 0, \forall t > 0$ nên hàm số này đồng biến trên $(0; +\infty)$ và phương trình thứ hai của hệ tương đương với $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $\log_3 x = \log_2 (1 + \sqrt{x})$.

Đặt $\log_3 x = \log_2 (1 + \sqrt{x}) = t \Rightarrow \sqrt{x} = (\sqrt{3})^t = 2^t - 1$. Suy ra

$$(\sqrt{3})^t + 1 = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^t + \left(\frac{1}{2} \right)^t = 1$$

Vế trái rõ ràng là hàm nghịch biến nên phương trình này có không quá một nghiệm. Ta dễ thấy nghiệm duy nhất của phương trình này chính là $x = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (2, 2)$.

c) Điều kiện $x, y > -\frac{1}{2}$. Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + \ln(2t + 1)$, $t > -\frac{1}{2}$.

Ta thấy $f'(t) = 2t + 3 + \frac{1}{2t + 1} > 0$, $t > -\frac{1}{2}$ nên đây là hàm đồng biến.

Giả sử $x \geq y$ thì từ hệ trên suy ra $f(y) \geq f(x) \Rightarrow y \geq x$.

Do đó nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $x = y$.

Ta cần giải phương trình $x^2 + 2x + \ln(2x + 1) = 0$.

Dễ thấy vế trái là hàm đồng biến nên phương trình này có không quá một nghiệm. Hơn nữa, khi thay $x = 0$ vào phương trình, ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = y = 0$.

c) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 5^x = 2y + 1 + 2\log_5(4y + 1) \\ 5^y = 2z + 1 + 2\log_5(4z + 1) \\ 5^z = 2x + 1 + 2\log_5(4x + 1) \end{cases}$$

Điều kiện xác định $x, y, z \geq -\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = 5^t$ và $g(t) = 2t + 1 + 2\log_5(4t + 1)$, $t > -\frac{1}{4}$. Dễ dàng thấy rằng hai hàm

số này đồng biến trên $(-\frac{1}{4}; +\infty)$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử x là số lớn nhất. Khi đó $x \geq y, x \geq z$.

Hệ phương trình đã cho có thể viết lại là
$$\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

Do $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow g(y) \geq g(z) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow g(z) \geq g(x) \Rightarrow z \geq x$.

Nhưng do ta giả sử x là số lớn nhất nên buộc đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = y = z$.

Khi đó, ta chỉ cần giải phương trình $f(t) = g(t)$ hay $5^t = 2t + 1 + 2\log_5(4t + 1)$.

Đặt $s = \log_5(4t + 1) \Leftrightarrow 5^s = 4t + 1$ và $5^t = 2t + 2s + 1$.

Trừ từng vế hai phương trình này, ta được $5^s - 5^t = 2(t - s) \Leftrightarrow 5^t + 2t = 5^s + 2s$.

Do tính đồng biến của hàm số $h(y) = 5^y + 5y$ nên từ đây, dễ dàng thấy rằng $t = s \Leftrightarrow 5^t = 4t + 1$.

Đây là phương trình có dạng Bernoulli nên nó có hai nghiệm là $t = 0, t = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 1, 1)$.

Bài 3.

$$\text{a) } \begin{cases} 2^{\frac{x}{y}} + 4^{\frac{2x^2+2xy-y^2}{2xy}} = 5 \cdot 2^{\frac{y}{x}} \\ \log_3 x + \log_5 y = \log_5 x \cdot \log_3 y \end{cases}$$

Điều kiện xác định $x, y > 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $2^{\frac{x}{y}} + 4 \cdot 2^{\frac{2x-y}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 5 \cdot 2^{\frac{y}{x}}$.

Đặt $a = 2^{\frac{x}{y}}, b = 2^{\frac{y}{x}}$ thì $a, b > 0$. Ta có

$$a + \frac{4a^2}{b} = 5b \Leftrightarrow 5b^2 = 4a^2 + ab \Leftrightarrow (a - b)(4a + 5b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Suy ra $2^{\frac{x}{y}} = 2^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_5 x &= \log_5 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_5 3) = \log_3 x \cdot \log_5 x \\ &\Leftrightarrow \log_3 x = 0 \vee \log_5 x = \log_5 15 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 15 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (1; 1), (15; 15)$.

b) Đặt $z^{2^{2011}} = a > 0$. Hai phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại là

$$\begin{cases} x + y + xy = a^2 + 2a \\ x^4 + y^4 = 2a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = (a+1)^2 \\ x^4 + y^4 = 2a^4 \end{cases}$$

Để thấy bằng biến đổi tương đương, ta có bất đẳng thức $(x+1)(y+1) \leq \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2$.

Do đó, từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $(a+1)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow 2a \leq x+y$.

Ta cũng có $\frac{x^4 + y^4}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^4$ nên theo phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leq a^4 \Leftrightarrow x+y \leq 2a.$$

Suy ra $2a \leq x+y \leq 2a$ nên đẳng thức trong các bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức là

$$2a = x+y, x=y \Leftrightarrow x=y=a.$$

Do đó, đẳng thức cuối có thể viết lại là $(x+y)^{z-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ x+y = 1 \vee z-1 = 0 \end{cases}$.

-Nếu $x+y=1$ thì từ $x=y$, ta có ngay $x=y=\frac{1}{2}$ và $z^{2^{2011}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \sqrt[2^{2011}]{\frac{1}{2}}$.

-Nếu $z=1$ thì $a=1 \Rightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y, z) = (1; 1; 1), \left(\sqrt[2^{2011}]{\frac{1}{2}}, \sqrt[2^{2011}]{\frac{1}{2}}, \sqrt[2^{2011}]{\frac{1}{2}}\right)$.

Bài 4.

$$\text{a) } \begin{cases} 2^{\log_3 x} + y^{\log_3 2} = 6 \\ \log_x y + \log_{\frac{y}{x^3}} x = 1 \end{cases}$$

Điều kiện $0 < x, y \neq 1, y \neq x^3$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\log_x y + \frac{1}{\log_x y - 3} = 1$. Đặt $t = \log_x y$. Ta có

$$t + \frac{1}{t-3} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2, \text{ suy ra } \log_x y = 2 \Leftrightarrow y = x^2.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x^2} = 6 \Leftrightarrow 2^{\log_3 x} + 2^{2\log_3 x} = 6$.

Đặt $a = 2^{\log_3 x} > 0$. Ta có $a + a^2 = 6 \Leftrightarrow (a-2)(a+3) = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó $2^{\log_3 x} = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3^{\log_2 3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (3^{\log_2 3}, 3^{2\log_2 3})$.

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \\ \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

Điều kiện $x, y > 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} &= \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow (xy+1)(x^2+y^2+2) = 2(x^2+1)(y^2+1) \\ \Leftrightarrow xy(x^2+y^2) + 2xy + x^2 + y^2 + 2 &= 2x^2y^2 + 2(x^2+y^2) + 2 \\ \Leftrightarrow xy(x-y)^2 &= (x-y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) = 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = y \vee xy = 1$. Ta xét hai trường hợp

-Nếu $x = y$, dễ thấy $x = y = 1$ không thỏa mãn nên ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{x}{3} &= 1 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x - 1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 x + \log_3 x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} &= 1 \Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow \log_x 6 = 1 \Leftrightarrow x = 6 \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, hệ có nghiệm là $(x, y) = (6; 6)$.

-Nếu $xy = 1$ thì $y = \frac{1}{x}$ và ta có

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{1}{3x} = 1 &\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_3 x + 1) = -1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 x - \log_2 x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Trong trường hợp này, hệ có nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (6; 6), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 5.

a) Điều kiện xác định $x + 2y + 6 > 0, x + y + 2 > 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại là $e^{x^2}(x^2 + 1) = e^{y^2}(y^2 + 1)$.

Xét hàm số $f(t) = e^t(t + 1), t \geq 0$. Ta có $f'(t) = e^t + e^t(t + 1) = e^t(t + 2) > 0$ nên đây là hàm đồng biến. Phương trình ở trên chính là $f(x^2) = f(y^2)$ nên $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

-Nếu $x = y$ thì phương trình thứ hai trở thành

$$3\log_3(3x + 6) = 2\log_2(2x + 2) + 1 \Leftrightarrow \log_3(x + 2) = \log_2(x + 1).$$

$$\text{Đặt } \log_3(x + 2) = \log_2(x + 1) = t \text{ thì } x + 2 = 3^t, x + 1 = 2^t \Rightarrow 3^t = 2^t + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1.$$

Vế trái là hàm số nghịch biến nên phương trình này có không quá một nghiệm thực. Ta lại thấy $t = 1$ thỏa mãn nên phương trình có nghiệm là $t = 1$, suy ra $x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Tương ứng, ta có $y = 1$ và nghiệm $(x, y) = (1, 1)$ thỏa mãn điều kiện xác định.

$$\text{-Nếu } x = -y \text{ thì } 3\log_3(6 - x) = 2\log_2 2 + 1 \Leftrightarrow \log_3(6 - x) = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 1 \Leftrightarrow x = 5.$$

Suy ra $y = -5$ và nghiệm $(x, y) = (5, -5)$ cũng thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (1, 1), (5, -5)$.

b) Điều kiện xác định $y^2 + 2x > 0$.

Đặt $t = 2x - y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$(1 + 4^t) \cdot 5^{1-t} = 1 + 2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{1 + 4^t}{5^t} = \frac{1 + 2^{t+1}}{5} \quad (*)$$

Dễ dàng thấy rằng vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $t = 1$ thỏa mãn đẳng thức này nên đây cũng chính là nghiệm duy nhất của (*).

Với $t = 1$, ta có $x = \frac{y+1}{2}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$. Ta có

$$f'(t) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2(y+1)^2+1}{y^2+y+1} > 0 \text{ nên hàm số này đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Ta cũng có $f(-1) = 0$ nên $t = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Do đó, phương trình (**) có nghiệm là $y = -1$, tương ứng, ta có $x = 0$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (0; 1)$.

Bài 6.

a) Xét hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2011x \leq 2011 \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 \end{cases}$$

Điều kiện $x \geq -1$. Bất phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với

$$7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2x-2} - 1) \leq 2011(1-x) \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp sau

-Nếu $x = 1$ thì hai vế của bất phương trình bằng nhau.

-Nếu $x < 1$ thì $7^{2x-2} - 1 < 0, 1-x > 0$ thì (*) đúng.

-Nếu $x > 1$ thì $7^{2x-2} - 1 > 0, 1-x < 0$ thì (*) không được thỏa mãn.

Do đó, (*) có nghiệm là $-1 \leq x \leq 1$.

Bất phương trình thứ hai trong hệ tương đương với

$$m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}, \forall x \in [-1; 1] \text{ (do } x - 2 < 0 \text{ với } x \in [-1; 1]).$$

Ta có $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 1}{x - 2} - 2 = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 2} - 2 \geq -2$ nên bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Vậy điều kiện cần tìm là $m \geq -2$.

b) Xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} e^x = 2011 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2011 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$$

Điều kiện xác định $|x|, |y| > 1$.

Từ hai phương trình của hệ, ta có $e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

Xét hàm số $f(t) = e^t - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}, t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, suy ra $f(x) = f(y)$.

Ta có $f'(t) = e^t + \frac{1}{(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - 1}} > 0$ nên đây là hàm đồng biến.

Từ đẳng thức $f(x) = f(y)$, ta có ngay $x = y$.

Ta xét phương trình sau $e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2011 = 0$.

Lại xét hàm số $g(t) = e^t + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} - 2011, t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Ta có $g'(t) = e^t - \frac{1}{(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - 1}}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - 1} = 1$.

Bài 7.

$$a) \begin{cases} 2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1} \\ y(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Đặt $2x - y = a$, phương trình thứ nhất của hệ chính là

$$2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a}).$$

Ta thấy phương trình nếu có nghiệm là a thì cũng có nghiệm là $-a$ nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ đồng biến với số thực t dương tùy ý.

Ta có $f'(x) = tx^{t-1}(1 - x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1 - x^{-2t} > 0$, suy ra hàm số này đồng biến trên $(1, +\infty)$. Do đó, ta được bất đẳng thức sau $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

Suy ra $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$. Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$\begin{aligned} 2x(x^2 + 3x - 3) + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \Leftrightarrow 2x^3 &= (x-1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}x = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } y = 2x = \frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}; \frac{2}{1-\sqrt[3]{2}} \right)$.

$$b) \begin{cases} \log_y(\log_y x) = \log_{3-y}(\log_{3-y}(3-x)) \\ \cot x - \cot y = \log \frac{y}{x} \end{cases}$$

Điều kiện $0 < x, y < 3, y \neq 1, y \neq 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} = \log x - \log y$.

Do $-3 \leq y - x \leq 3$ và $\forall a \in (-3, 3) \subset (-\pi, \pi)$ thì $\sin a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0, \sin a < 0 \Leftrightarrow a < 0$ nên ta thấy nếu $x > y$ thì vế trái âm và vế phải dương, nếu $x < y$ thì vế trái dương, vế phải âm nên phương trình này tương đương với $x = y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$\log_{3-x}(\log_{3-x} x) = \log_x(\log_x(3-x)) \Leftrightarrow \log_{3-x}(\log_{3-x} x) = \frac{\log_{3-x}(\log_x(3-x))}{\log_{3-x} x}.$$

Đặt $t = \log_{3-x} x > 0$ thì phương trình trên trở thành

$$\log_{3-x} t = -\frac{\log_{3-x} t}{t} \Leftrightarrow \log_{3-x} t = 0 \vee t = -1, \text{ trường hợp sau loại do } t > 0.$$

Suy ra $\log_{3-x} t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_{3-x} x = 1 \Leftrightarrow x = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, tương ứng $y = \frac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = y = \frac{3}{2}$.