

1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tọa độ của vectơ

a) **Định nghĩa:** $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz .

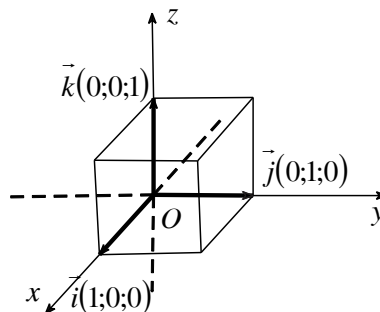
b) **Tính chất:** Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và k là số thực tùy ý, ta có:

$$\bullet \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$$

$$\bullet \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$$

$$\bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}.$$



$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \left(\vec{b} \neq \vec{0} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ với } b_1, b_2, b_3 \neq 0.$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3.$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0.$$

$$\bullet \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \text{ suy ra } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ với } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

2. Tọa độ của điểm

a) **Định nghĩa:** $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ).

Chú ý: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x; y; z)$ ta có các khẳng định sau:

$$\bullet M \equiv O \Leftrightarrow M(0; 0; 0).$$

$$\bullet M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, \text{ tức là } M(x; y; 0).$$

$$\bullet M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, \text{ tức là } M(0; y; z).$$

$$\bullet M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0, \text{ tức là } M(x; 0; z).$$

$$\bullet M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, \text{ tức là } M(x; 0; 0).$$

$$\bullet M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, \text{ tức là } M(0; y; 0).$$

- $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$, tức là $M(0;0;z)$.

b) Tính chất: Cho bốn điểm không đồng phẳng $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$.

3. Tích có hướng của hai vector

a) Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vector, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được xác định như sau:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

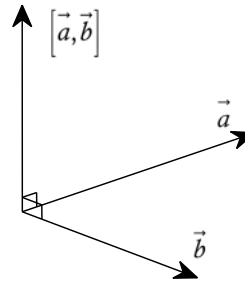
b) Tính chất

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

- $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.

- $\|[\vec{a}, \vec{b}]\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$.



c) Ứng dụng

- Xét sự đồng phẳng của ba vector:

+) Ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

+) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

- Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = \|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\|$.

- Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\|$.

• Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$.

• Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right|$.

4. Phương trình mặt cầu

• Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. (*)

Ta có (*) $\Leftrightarrow (x^2 + 2ax) + (y^2 + 2by) + (z^2 + 2cz) = -d$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = -d + a^2 + b^2 + c^2.$$

Để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > d$. Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$.

• Đặc biệt: $(S): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, suy ra (S) có $\begin{cases} \text{tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{bán kính } R \end{cases}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1. CÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTOR

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong phần:

-  Tọa độ của vector.
-  Tọa độ của điểm.
-  Liên hệ giữa tọa độ vector và tọa độ hai điểm nút.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 4)$, $C(3; 0; 5)$.

- a. Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- b. Tính chu vi, diện tích của ΔABC .
- c. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành và tính cosin góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- d. Tính độ dài đường cao h_A của ΔABC kẻ từ A .
- e. Tính các góc của ΔABC .
- f. Xác định tọa độ trực tâm H của ΔABC .
- g. Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(1; 2; 0)$, $D(3; 1; -2)$.

- a. Tìm tọa độ các điểm A_1, A_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxy) và trục Oy .
- b. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.
- c. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.
- d. Chứng minh rằng hình chóp $D.ABC$ là hình chóp đều.
- e. Tìm tọa độ chân đường cao H của hình chóp $D.ABC$.
- f. Chứng minh rằng tứ diện $ABCD$ có các cạnh đôi vuông góc với nhau.

g. Tìm tọa độ điểm I cách đều bốn điểm A, B, C, D.

Vấn đề 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

Với phương trình cho dưới **dạng chính tắc**: (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k$, với $k > 0$ ta lần lượt có:

 Bán kính bằng $R = \sqrt{k}$.

 Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ y - b = 0 \\ z - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \Rightarrow I(a; b; c).$$

Với phương trình cho dưới **dạng tổng quát** ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. (1)

Bước 2: Để (1) là phương trình mặt cầu điều kiện là: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Bước 3: Khi đó (S) có thuộc tính: $\begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình: $(S_m): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - m)^2 = m^2 - 2m + 5$.

- Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.
- Tìm mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong họ (S_m) .
- Chứng tỏ rằng họ (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định.

Ví dụ 2. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình: $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0$.

- Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.
- Chứng minh rằng tâm của họ (S_m) luôn nằm trên một Parabol (P) cố định trong mặt phẳng Oxy, khi m thay đổi.
- Trong mặt phẳng Oxy, gọi F là tiêu điểm của (P). Giả sử đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α và cắt (P) tại hai điểm M, N.
 - Tìm tọa độ trung điểm E của đoạn MN theo α .
 - Từ đó suy ra quỹ tích E khi α thay đổi.

Vấn đề 3. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

Gọi (S) là mặt cầu thỏa mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

Khi đó:

- Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, R , điều kiện $R > 0$. Tuy nhiên, trong trường hợp này chúng ta thường chia nó thành hai phần, bao gồm:
 - Xác định bán kính R của mặt cầu.
 - Xác tâm $I(a; b; c)$ của mặt cầu.

Từ đó, chúng ta nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu.

- Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, d , điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Chú ý: 1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.

- Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình mặt cầu.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- Đường kính AB với $A(3; -4; 5)$, $B(-5; 2; 1)$.
- Tâm $I(3; -2; 1)$ và đi qua điểm $C(-2; 3; 1)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(0; 1; 0)$ và tâm I thuộc trục Oz .

Ví dụ 3. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(2; 1; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 2; 4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) .

Ví dụ 4. Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(2; 1; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 2; 4)$ và có bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Ví dụ 5. Cho bốn điểm $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; 1; 2)$ và $D(2; 2; 1)$.

- Chứng tỏ rằng A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 6. Viết phương trình mặt cầu:

- Có tâm $I(2; 1; -6)$ và tiếp xúc với trục Ox .
- Có tâm $I(2; -1; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) .
- Có tâm $O(0; 0; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (T) có tâm $I(3; -2; 4)$, bán kính bằng 1.

Ví dụ 7. Lập phương trình mặt cầu:

- Có tâm nằm trên tia Ox , bán kính bằng 5 và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) .
- Có bán kính bằng 2 và tiếp xúc với (Oxy) tại điểm $M(3; 1; 0)$.

11. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba véc tơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$

- Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ và tính $|\vec{x}|$
- Tìm giá trị của x để véc tơ $\vec{y} = (2x - 1; -x; 3x + 2)$ vuông góc với véc tơ $2\vec{b} - \vec{c}$
- Chứng minh rằng các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và phân tích véc tơ $\vec{u} = (3; 7; -14)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$

- Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ và tính $|\vec{u}|$
- Tìm x để véc tơ $\vec{v} = (3x - 1; x + 2; 3 - x)$ vuông góc với $\vec{b}$
- Biểu diễn véc tơ $\vec{x} = (3; 1; 7)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Bài 2

1. Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính

- Độ dài các véc tơ $\vec{a} + \vec{b}$, $5\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$,
- Độ dài véc tơ $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, 3\vec{b}]$, $[5\vec{a}, -2\vec{b}]$.

2. Tìm điều kiện của tham số m sao cho

- Ba véc tơ $\vec{u}(2; 1; -m)$, $\vec{v}(m + 1; -2; 0)$, $\vec{w}(1; -1; 2)$ đồng phẳng.
- $A(1; -1; m)$, $B(m; 3; 2m - 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(m + 3; -m; 2 - m)$ cùng thuộc một mặt phẳng.
- Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}(2; m; 2m - 1)$, $\vec{b}(m; 2; -1)$ là 60° .

Bài 3 Cho tam giác ABC có $B(-1; 1; -1)$, $C(2; 3; 5)$. Điểm A có tung độ là $\frac{1}{3}$, hình chiếu của điểm A trên BC là

$$K\left(1; \frac{7}{3}; 3\right) \text{ và diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{49}{3}.$$

- Tìm tọa độ đỉnh A biết A có hoành độ dương.
- Tìm tọa độ chân đường vuông góc hạ từ B đến AC .
- Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp và tọa độ trục tâm H của tam giác ABC .

4. Chứng minh $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ với G là trọng tâm tam giác ABC .

Bài 4 Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Tọa độ các điểm $A(2; 4; 1), B(0; 4; 4), C(0; 0; 1)$ và D có hoành độ dương.

1. Xác định tọa độ điểm D .
 2. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng G cách đều các đỉnh của tứ diện.
 3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD .
 4. Tính độ dài các đường trọng tuyến của tứ diện $ABCD$. Tính tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh của tứ diện $ABCD$.
- Bài 5** Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(0; 2; 0), B(-1; 0; -3), C(0; -2; 0), D(3; 2; 1)$.
1. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng;
 2. Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD ;
 3. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và đường cao của tứ diện hạ từ A ;
 4. Tìm tọa độ E sao cho $ABCE$ là hình bình hành;
 5. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD ;
 6. Tìm điểm M thuộc Oy sao cho tam giác BMC cân tại C ;
 7. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ và chứng minh A, G, A' thẳng hàng với A' là trọng tâm tam giác BCD .

Bài 6 Cho tam giác ABC có $A(2; 3; 1), B(-1; 2; 0), C(1; 1; -2)$.

1. Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .
2. Tìm tọa độ H là trực tâm của tam giác ABC .
3. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
4. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng các điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 7

Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

- a) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.
- b) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Bài 8

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; -2; 4)$

- a) Tìm tọa độ các hình chiếu của A lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ
- b) Tìm $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A
- c) Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1; 4; -4)$.

Bài 9

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho $A(4; 0; 0), B(x_0; y_0; 0)$ với $x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB} = 45^\circ$.

- a) Tìm C trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện $OABC$ bằng 8.
- b) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABO$ và M trên cạnh AC sao cho $AM = x$. Tìm x để $OM \perp GM$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Vấn đề 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTO

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (-3; 4; 0), \vec{c} = (-1; -2; 0)$.

B. $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (-3; 4; 0), \vec{c} = (0; -2; 0)$.

C. $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (0; -3; 4), \vec{c} = (-1; -2; 0)$.

D. $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (1; -3; 4), \vec{c} = (-1; -2; 1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ

$\vec{a} = (0; 1; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 3; 1)$. Nếu $2\vec{x} + 3\vec{a} = 4\vec{b}$ thì tọa độ của vectơ $\vec{x}$ là:

A. $\vec{x} = \left(-4; \frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. B. $\vec{x} = \left(4; -\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\vec{x} = \left(4; \frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. D. $\vec{x} = \left(-4; -\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector

$$\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; -3; 2) \text{ và } \vec{c} = (3; 2; -4).$$

Gọi $\vec{x}$ là vector thỏa mãn:
$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a} = -5 \\ \vec{x} \cdot \vec{b} = -11 \\ \vec{x} \cdot \vec{c} = 20 \end{cases}$$
 Tọa độ của vector

$\vec{x}$ là:

A. $(2; 3; 1)$. B. $(2; 3; -2)$. C. $(3; 2; -2)$. D. $(1; 3; 2)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector

$$\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0) \text{ và } \vec{c} = (1; 1; 1).$$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector

$$\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0) \text{ và } \vec{c} = (1; 1; 1).$$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$. B. $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$. D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector

$$\vec{p} = (3; -2; 1), \quad \vec{q} = (-1; 1; -2), \quad \vec{r} = (2; 1; -3) \quad \text{và} \\ \vec{c} = (11; -6; 5). \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $\vec{c} = 3\vec{p} - 2\vec{q} + \vec{r}$. B. $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

C. $\vec{c} = 2\vec{p} + 3\vec{q} + \vec{r}$. D. $\vec{c} = 3\vec{p} - 2\vec{q} - 2\vec{r}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector

$$\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-1; 5; 2), \vec{c} = (4; -1; 3) \text{ và } \vec{x} = (-3; 22; 5)$$

. Đẳng thức nào **đúng** trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector

$$\vec{a} = (1; 0; -2), \vec{b} = (-2; 1; 3), \vec{c} = (-4; 3; 5). \text{ Tìm hai số thực } m, n \text{ sao cho } m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \text{ ta được:}$$

A. $m = 2; n = -3$.

B. $m = -2; n = -3$. C. $m = 2; n = 3$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector

$$\vec{a} = (2; m+1; -1) \text{ và } \vec{b} = (1; -3; 2). \text{ Với những giá trị nguyên nào của } m \text{ thì } \left| \vec{b} (2\vec{a} - \vec{b}) \right| = 4?$$

A. -4 .

B. 4 .

C. -2 .

D. 2 .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{vector } \vec{u} = (m; -2; m+1) \text{ và } \vec{v} = (0; m-2; 1).$$

Tất cả giá trị của m có thể có để hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương là:

A. $m = -1$. B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để hai vector

$$\vec{a} = (m; 2; 3) \text{ và } \vec{b} = (1; n; 2) \text{ cùng phương, ta phải có:}$$

A. $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

$$\text{vector } \vec{a} = (2; 1; -2) \text{ và } \vec{b} = (0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}). \text{ Tất cả giá trị của } m \text{ để hai vector } \vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} \text{ và } \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} \text{ vuông góc là:}$$

A. $\frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$.

D. $\pm \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector

$$\vec{u} = (1; 1; -2) \text{ và } \vec{v} = (1; 0; m). \text{ Tìm tất cả các giá trị của } m \text{ để góc giữa hai vector } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ có số đo bằng } 45^\circ:$$

Một học sinh giải như sau:

Bước 1: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}}.$

Bước 2: Góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có số đo bằng 45° nên suy ra

$$\frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2+1}. (*)$$

Bước 3: Phương trình

$$(*) \Leftrightarrow (1-2m)^2 = 2(m^2+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Đúng B. Sai ở bước 1
C. Sai ở bước 2 D. Sai ở bước 3

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng:

- A. -54. B. 54. C. 9. D. 6.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và vectơ đơn vị $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$. Độ dài của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ bằng:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ bằng:

- A. 10. B. 5. C. 8. D. $5\sqrt{3}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $[5\vec{a}, -2\vec{b}]$ bằng:

- A. $3\sqrt{3}$. B. 9. C. $30\sqrt{3}$. D. 90.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$. Góc giữa hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Vấn đề 2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. B. $I(1;1;0)$. C. $I(1;-1;2)$. D. $I(1;1;1)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;1;-2)$, $\vec{b} = (-3;0;-1)$ và điểm $A(0;2;1)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là:

- A. $M(-5;1;2)$. B. $M(3;-2;1)$. C. $M(1;4;-2)$. D. $M(5;4;-2)$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là:

- A. $(1;-3;5)$. B. $(1;-3;0)$. C. $(1;-3;1)$. D. $(1;-3;2)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;2;-1)$. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) là:

- A. $M'(-3;2;1)$. B. $M'(3;2;1)$. C. $M'(3;2;-1)$. D. $M'(3;-2;-1)$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2016;-1;-2017)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oz có tọa độ:

- A. $(0;0;0)$ B. $(2016;0;0)$ C. $(0;-1;0)$ D. $(0;0-2017)$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;-1)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là:

- A. $A'(-3;2;1)$ B. $A'(3;2-1)$ C. $A'(3;2;1)$ D. $A'(3;-2;-1)$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng:

- A. 10. B. $\sqrt{10}$. C. 2. D. 3.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; 2)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai? A. Tọa độ hình chiếu của M trên mặt phẳng (xOy) là $M'(3; -1; 0)$. B. Tọa độ hình chiếu của M trên trục Oz là $M'(0; 0; 2)$. C. Tọa độ đối xứng của M qua gốc tọa độ O là $M'(-3; 1; -2)$. D. Khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt[3]{14}$.	C. $D(10; -17; 7)$ D. $D(-10; -17; 7)$ Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho sáu điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(3; 3; -3)$, A', B', C' thỏa mãn $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$. Nếu G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ thì G' có tọa độ là: A. $\left(2; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ B. $\left(2; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $M(2; -3; 5)$, $N(4; 7; -9)$, $P(3; 2; 1)$ và $Q(1; -8; 12)$. Bộ ba điểm nào sau đây là thẳng hàng? A. M, N, P B. M, N, Q C. M, P, Q D. N, P, Q Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(-10; 5; 3)$ và $M(2m-1; 2; n+2)$. Để A, B, M thẳng hàng thì giá trị của m, n là: A. $m=1; n=\frac{3}{2}$ B. $m=-\frac{3}{2}; n=1$ C. $m=-1; n=-\frac{3}{2}$ D. $m=\frac{2}{3}; n=\frac{3}{2}$ Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 5)$ và $B(3; -2; 4)$. Điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm A, B có tọa độ là: A. $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ B. $M\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ C. $M(3; 0; 0)$ D. $M(-3; 0; 0)$. Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; -1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A, B, C có tọa độ là: A. $\left(0; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right)$ B. $\left(\frac{7}{6}; 0; -\frac{5}{6}\right)$ C. $\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$ D. $\left(\frac{6}{5}; 0; -\frac{6}{7}\right)$. Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC. A. $G(4; -1; -1)$ B. $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ C. $G\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ D. $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -5; 4)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai? A. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M(2; 5; -4)$. B. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M(-2; -5; -4)$. C. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa (xOz) bằng 5. D. Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{29}$.	
Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai? A. Tọa độ đối xứng của O qua điểm M là $O'(2; -4; 6)$. B. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Ox là $M'(-1; -2; 3)$. C. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa (yOz) bằng 1. D. Khoảng cách từ M đến trục Oy bằng $\sqrt{10}$.	
Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3; 4; 2)$, $B(-5; 6; 2)$, $C(-4; 7; -1)$. Tìm tọa độ điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. A. $D(-10; 17; -7)$ B. $D(10; 17; -7)$	

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-1;-2;0)$, $C(2;1;-1)$. Khi đó tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là:

- A. $H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$ B. $H\left(\frac{4}{9}; 1; 1\right)$
 C. $H\left(1; 1; -\frac{8}{9}\right)$ D. $H\left(1; \frac{3}{2}; 1\right)$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc $\widehat{B}$ của tam giác ABC là:

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ B. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ D. $(-2; 11; 1)$

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$, $C(-10;5;3)$. Độ dài đường phân giác trong góc $\widehat{B}$ của tam giác ABC bằng:

- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;-4;0)$, $B(-5;6;0)$, $C(3;2;0)$. Tọa độ chân đường phân giác ngoài góc $\widehat{A}$ của tam giác ABC là:

- A. $(15;-14;0)$ B. $(15;-4;0)$ C. $(-15;4;0)$ D. $(-15;-14;0)$

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

- A. $m=3$ B. $m=2$ C. $m=1$ D. $m=0$

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có đỉnh $C(-2;2;2)$ và trọng tâm $G(-1;1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A , B của tam giác ABC , biết A thuộc mặt phẳng (Oxy) và điểm B thuộc trục cao.

- A. $A(-1;-1;0)$, $B(0;0;4)$ B. $A(-1;1;0)$, $B(0;0;4)$
 C. $A(-1;0;1)$, $B(0;0;4)$ D. $A(-4;4;0)$, $B(0;0;1)$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4;-1;2)$, $B(3;5;-10)$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz) . Tọa độ đỉnh C là:

- A. $C(4;-5;-2)$ B. $C(4;5;2)$ C. $C(4;-5;2)$ D. $C(4;5;-2)$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

tam giác ABC là

- A. Tam giác cân. B. Tam giác đều.
 C. Tam giác vuông. D. Cả A và C.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$ và $C(0;-1;2)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Ba điểm A , B , C thẳng hàng.
 B. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác cân.
 C. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác có một góc bằng 60° .
 D. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác vuông.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;1)$, $B(0;2;0)$ và $C(1;0;2)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Ba điểm A , B , C thẳng hàng.
 B. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác cân ở A .
 C. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác cân ở B .
 D. Ba điểm A , B , C tạo thành tam giác vuông.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A , B , C có tọa độ thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là:

- A. $D(3;1;5)$ B. $D(1;2;3)$ C. $D(-2;8;6)$ D. $D(3;9;4)$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-3;0)$, $P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là:

- A. $(-2;-3;4)$ B. $(3;4;2)$ C. $(2;3;4)$ D. $(-2;-3;-4)$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;2)$, $C(6;0;1)$. Trong các điểm sau đây, điểm nào là đỉnh thứ tư của hình bình hành có ba đỉnh là A, B, C . $M(4;3;-2)$; $N(-2;1;0)$; $P(2;1;-1)$

A. Chỉ có điểm M B. Chỉ có điểm N C. Chỉ có điểm P D. Cả hai điểm M và N	C. Ba vectơ đôi một vuông góc với nhau D. Ba vectơ có độ lớn bằng nhau
Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $OABD$, có $\overrightarrow{OA} = (-1; 1; 0)$ và $\overrightarrow{OB} = (1; 1; 0)$ với O là gốc tọa độ. Khi đó tọa độ của D là: A. $(0; 1; 0)$. B. $(2; 0; 0)$. C. $(1; 0; 1)$. D. $(1; 1; 0)$.	Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các bộ ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sau đây, bộ nào thỏa mãn tính chất $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ (hay còn gọi là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng). A. $\vec{a} = (1; -1; 1), \vec{b} = (0; 1; 2), \vec{c} = (4; 2; 3)$. B. $\vec{a} = (4; 3; 4), \vec{b} = (2; -1; 2), \vec{c} = (1; 2; 1)$. C. $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (1; -1; 2), \vec{c} = (2; 2; -1)$. D. $\vec{a} = (1; -7; 9), \vec{b} = (3; -6; 1), \vec{c} = (2; 1; -7)$.
Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -2; 2)$ và $D(4; 5; -7)$. Trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là: A. $(-2; 1; 2)$ B. $(8; 2; -8)$ C. $(8; -1; 2)$ D. $(2; 1; -2)$	Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vectơ $\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (5, 7, 0), \vec{c} = (3, -2, 4)$ và $\vec{d} = (4, 12, -3)$. Mệnh đề nào sau đây sai? A. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d} + \vec{c}$ D. $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{d} - 2\vec{c}$
Câu 51. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0), B(4; 0; 0), C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là: A. $(10; 8; 6)$ B. $(6; 12; 0)$ C. $(13; 0; 17)$ D. $(8; 4; 10)$	
Vấn đề 3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ	
Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây sai? A. $\vec{a}, \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin(\vec{a}, \vec{b})$ B. $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$ C. $[2\vec{a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$ D. $[2\vec{a}, 2\vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$	Câu 57. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Gọi $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Mệnh đề sau đây là đúng? A. $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{a}$. B. $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{b}$. C. $\vec{c}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. D. Cả A và B đều đúng.
Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Phát biểu nào sau đây là sai? A. $[\vec{u}, \vec{v}]$ có độ dài là $\vec{u} \vec{v} \cos(\vec{u}, \vec{v})$ B. $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương C. $[\vec{u}, \vec{v}]$ vuông góc với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ D. $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ	Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (3; -1; 0)$ và $\vec{c} = (1; -5; 2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng? A. $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$. B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ khác $\vec{0}$. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là: A. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ B. $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$	

C. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. D. $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$.	$A(1;2;-1), B(5;0;3)$ và $C(7,2,2)$. Tọa độ giao điểm M
Câu 59. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3;-1;-2)$, $\vec{b} = (1;2;m)$ và $\vec{c} = (5;1;7)$. Giá trị của m để $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là:	của trục Ox với mặt phẳng đi qua điểm A, B, C là: A. $M(-1;0;0)$. B. $M(1;0;0)$. C. $M(2;0;0)$. D. $M(-2;0;0)$.
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2 .	Câu 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm
Câu 60. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{u} = (2;-1;1)$, $\vec{v} = (m;3;-1)$ và $\vec{w} = (1;2;1)$. Để ba vectơ đã cho đồng phẳng khi m nhận giá trị nào sau đây?	$A(0;2;-1), B(-3;1;-1), C(4;3;0)$ và $D(1;2;m)$. Tìm m để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Một học sinh giải như sau: Bước1: $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;1;2)$, $\overrightarrow{AD} = (1;0;m+2)$.
A. -8 B. 4 C. $-\frac{7}{3}$ D. $-\frac{8}{3}$	Bước2: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3;10;1)$ Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 3 + m + 2 = m + 5$. Bước3: A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -5$.
Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;m;2)$, $\vec{b} = (m+1;2;1)$ và $\vec{c} = (0;m-2;2)$. Để ba vectơ đã cho đồng phẳng khi m nhận giá trị nào sau đây?	Đáp án: $m = -5$. Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào? A. Đúng B. Sai ở Bước 1. C. Sai ở Bước 2. D. Sai ở Bước 3.
Câu 62. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2,0,3)$, $\vec{b} = (0,4,-1)$ và $\vec{c} = (m-2,m^2,5)$. Để ba vectơ đã cho đồng phẳng khi m nhận giá trị nào sau đây?	Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $[(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}), \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$ là:
A. $m = -2$ hoặc $m = -4$ B. $m = 2$ hoặc $m = 4$ C. $m = 1$ hoặc $m = 6$ D. $m = 2$ hoặc $m = 5$	A. Đường thẳng qua C và song song với cạnh AB . B. Đường thẳng qua trung điểm I của AB và song song với cạnh AC . C. Đường thẳng qua trung điểm I của AB và vuông góc với cạnh AC . D. Đường thẳng qua B và song song với cạnh AC .
Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$ và $D(0;m;p)$. Hệ thức giữa m và p để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là:	Câu 68. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:
A. $2m + p = 0$ B. $m + p = 1$ C. $m + 2p = 3$ D. $2m - 3p = 0$	
Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;4)$, $B(2;1;0)$, $C(1;4;0)$ và $D(a;b;0)$. Điều kiện cần và đủ của a, b để hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng là:	
A. $3a + b = 7$. B. $3a - 5b = 0$. C. $4a + 3b = 2$. D. $a - 2b = 1$.	
Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm	

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{2}$	
Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Độ dài đường cao kẻ từ A của tam giác ABC bằng: A. $\frac{\sqrt{30}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{6}$	$ABCD$ với $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, điểm D thuộc Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của đỉnh D là: A. $D(0;-7;0)$ B. $D(0;8;0)$ C. $D(0;-7;0)$ hoặc $D(0;8;0)$. D. $D(0;7;0)$ hoặc $D(0;-8;0)$.
Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(4;0;0)$ và $B(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MBC bằng 3. A. $M(0;3;0)$, $M(0;-2;0)$. B. $M(0;3;0)$, $M(0;-3;0)$. C. $M(0;4;0)$, $M(0;-3;0)$. D. $M(0;3;0)$, $M(0;-1;0)$.	Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ và $D(1;1;1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ kẻ từ đỉnh D bằng: A. 3 B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$
Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+c$ bằng: A. 4 B. 5 C. 7 D. 6	Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-2;2;0)$, $B(2;4;0)$, $C(4;0;0)$ và $D(0;-2;0)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng? A. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện. B. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình vuông. C. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình chóp đều. D. Diện tích $\triangle ABC$ bằng diện tích $\triangle DBC$.
Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$, $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là: A. $2\sqrt{87}$ B. $\sqrt{349}$ C. $\sqrt{87}$ D. $\frac{\sqrt{349}}{2}$	Câu 78. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ và $D(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai? A. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện. B. Ba điểm A, B, D tạo thành tam giác đều. C. $AB \perp CD$. D. Ba điểm B, C, D tạo thành tam giác vuông.
Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ và giao điểm của hai đường chéo là $I\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$. Diện tích của hình bình hành $ABCD$ bằng: A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$	Câu 79. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định ba vectơ nào sau đây đồng phẳng? A. $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ B. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ C. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CC'}$ D. $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD'}$
Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng: A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$	
Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện	Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình

hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;1;-6)$, $B(0;0;-2)$, $C(-5;1;2)$ và $D'(2;1;-1)$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng:

- A. 36 B. 38 C. 40 D. 42

Vấn đề 4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Câu 81. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

- A. $I(-1;2;1)$ và $R=3$. B. $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.
C. $I(-1;2;1)$ và $R=9$. D. $I(1;-2;-1)$ và $R=9$.

Câu 82. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

- A. Tâm $I(-1;2;-3)$ và bán kính $R=4$.
B. Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=4$.
C. Tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R=4$.
D. Tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=16$.

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên trục Oz ?

- A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$.
B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 2 = 0$.
C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z = 0$.
D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) ?

- A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$
B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$

C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 2 = 0$

D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$

Câu 85. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(6,3,-4)$ tiếp xúc với Ox có bán kính R bằng:

- A. $R=6$ B. $R=5$ C. $R=4$ D. $R=3$

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$.

Trong các số dưới đây, số nào là diện tích của mặt cầu (S) ?

- A. 12π B. 9π C. 36π D. 36

Câu 87: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$
B. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$
C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$
D. $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0$

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giả sử tồn tại mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2az + 6a = 0$. Nếu (S) có đường kính bằng 12 thì a nhận những giá trị nào?

- A. $\begin{cases} a = -2 \\ a = 8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 2 \\ a = -8 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = -2 \\ a = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 2 \\ a = -4 \end{cases}$

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giả sử tồn tại mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Với những giá trị nào của a thì (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π ?

- A. $\{1;-11\}$ B. $\{1;10\}$ C. $\{-1;11\}$ D. $\{-10;2\}$

Câu 90. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - (2m-2)x + 3my + (6m-2)z - 7 = 0$. Gọi R là bán kính của (S) , giá trị nhỏ nhất của R bằng:

- A. 7 B. $\frac{\sqrt{377}}{7}$ C. $\sqrt{377}$ D. $\frac{\sqrt{377}}{4}$

Câu 91. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng:

- A. $r = \sqrt{5}$ B. $r = 2$ C. $r = \sqrt{6}$ D. $r = 4$

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính $R = 5$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.
 B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.
 C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.
 D. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$.

Câu 93. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

- A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$
 B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$
 C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$
 D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích $V = 972\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$
 B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$

Câu 95. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$
 B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$
 C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$
 D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$

Câu 96. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua $A(0, 2, 0)$, $B(2; 3; 1)$, $C(0, 3; 1)$ và có tâm ở trên mặt phẳng (Oxz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $x^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 9$
 B. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$
 C. $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$
 D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$

Câu 97. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(S): (x+2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 B. $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
 C. $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 D. $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

Câu 98. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ).

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 20$ D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 9$	$O(0;0;0), A(2;2;3), B(2;-1;-1)$, có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu (S)? A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
Câu 99. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$. Tập hợp các điểm $M(x,y,z)$ thỏa mãn: $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là: A. $R = 2$ B. $R = \sqrt{2}$ C. $R = 3$ D. $R = \sqrt{3}$	Câu 105. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;a;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của a để điểm A nằm trong khối cầu là? A. $(-1;3)$ B. $[-1;3]$ C. $(-3;1)$ D. $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$
Câu 100. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu có phương trình nào sau đây đi qua gốc tọa độ? A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$ C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z = 0$ D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$	Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 36$. Vị trí tương đối của mặt cầu (S) với mặt phẳng (Oxy) là: A. (Oxy) cắt (S). B. (Oxy) không cắt (S). C. (Oxy) tiếp xúc (S). D. (Oxy) đi qua tâm (S).
Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Điểm nào sau đây nằm ngoài mặt cầu (S)? A. $M(-1;2;5)$. B. $N(0;3;2)$. C. $P(-1;6;-1)$. D. $Q(2;4;5)$.	Câu 107. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 4$. Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu (S)? A. (Oxy). B. (Oyz). C. (Oxz). D. Cả A, B, C.
Câu 102. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)? A. $M(0;1;-1)$. B. $N(0;3;2)$. C. $P(-1;6;-1)$. D. $Q(1;2;0)$.	Câu 108. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oxy)? A. $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$ B. $(S_2): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2$ C. $(S_3): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ D. $(S_4): x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$
Câu 103. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$. Điểm nào sau đây nằm bên trong mặt cầu (S). A. $M(3;-2;-4)$. B. $N(0;-2;-2)$. C. $P(3;5;2)$. D. $Q(1;3;0)$.	Câu 109. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 4$. Tập các giá trị của m để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là: A. $m = \sqrt{5}$. B. $m = \pm\sqrt{5}$. C. $m = 0$. D. $m = \pm 2$.
Câu 104. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm	

Câu 110. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y+\sqrt{5})^2 + z^2 = m^2 + 2m + 6$. Tập các giá trị của m để mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt là:

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < -3$ hoặc $m > 1$.

Câu 111. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (S) tiếp xúc với trục Ox B. (S) không cắt trục Oy
C. (S) tiếp xúc với trục Oy D. (S) tiếp xúc với trục Oz

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây tiếp xúc với hai trục tọa độ Oy và Oz ?

- A. $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$

B. $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$

C. $(S_3): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$

D. $(S_4): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2$

Câu 113. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$ và điểm $A(1; -1; -6)$. Tìm trên trục Oz điểm B sao cho đường thẳng AB tiếp xúc với (S) .

- A. $B\left(0; 0; -\frac{19}{3}\right)$. B. $B\left(0; 0; \frac{19}{3}\right)$. C. $B\left(0; 0; -\frac{3}{19}\right)$. D. $B\left(0; 0; \frac{3}{19}\right)$.

Câu 114. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc (S) sao cho tam giác OAB đều (O là gốc tọa độ).

- A. $\begin{pmatrix} B(0; -4; 4) \\ B(4; 0; 4) \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} B(0; 4; -4) \\ B(4; 0; 4) \end{pmatrix}$. C. $\begin{pmatrix} B(0; -4; -4) \\ B(4; 0; 4) \end{pmatrix}$. D. $\begin{pmatrix} B(0; 4; 4) \\ B(4; 0; 4) \end{pmatrix}$.

1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng toán 1: Tọa độ của điểm, vector và các yếu tố liên quan

Phương pháp

Sử dụng các kết quả trong phần:

-  Tọa độ của vector.
-  Tọa độ của điểm.
-  Liên hệ giữa tọa độ vector và tọa độ hai điểm nút.
-  Tích có hướng của hai vector và các ứng dụng

Thí dụ 1. Cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 5; 4)$, $C(3; 0; 5)$.

- a. Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- b. Tính chu vi, diện tích của ΔABC .
- c. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành và tính cosin góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- d. Tính độ dài đường cao h_A của ΔABC kẻ từ A .
- e. Tính các góc của ΔABC .
- f. Xác định tọa độ trực tâm H của ΔABC .
- g. Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

 Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}(2; 3; 1) \text{ và } \overrightarrow{AC}(2; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

Vậy, ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Ta lần lượt có:

$$\begin{aligned} CV_{\Delta ABC} &= AB + AC + BC = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} + \sqrt{(-5)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{14} + \sqrt{12} + \sqrt{26}. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} |(8; -2; -10)| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{42}.$$

c. Giả sử $D(x; y; z)$, để $ABCD$ là hình bình hành điều kiện là:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2; 3; 1) = (3 - x; -y; 5 - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 - x \\ 3 = -y \\ 1 = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1; -3; 4).$$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{12}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{68}} = \frac{\sqrt{51}}{17}.$$

d. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_A \cdot BC \Leftrightarrow h_A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{42}}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{273}}{13}.$$

e. Ta lần lượt có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ,$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{51}}{13} \text{ và } \cos C = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{118}}{13}.$$

f. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử $H(x; y; z)$ là trực tâm ΔABC , ta có điều kiện:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1; y-2; z-3) \cdot (0; -5; 1) = 0 \\ (x-3; y-5; z-4) \cdot (2; -2; 2) = 0 \\ (8; -2; -10) \cdot (x-1; y-2; z-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5(y-2) + z - 3 = 0 \\ 2(x-3) - 2(y-5) + 2(z-4) = 0 \\ 8(x-1) - 2(y-2) - 10(z-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy, ta được trục tâm $H(1; 2; 3)$.

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên trục tâm $H \equiv A$, tức là $H(1; 2; 3)$.

g. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giả sử $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 18 \\ x - y + z = 5 \\ 4x - y - 5z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5/2 \\ z = 9/2 \end{cases}$$

Vậy, ta được tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Cách 2: Vì ΔABC vuông tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là trung điểm của BC, tức là

$$I\left(3; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

F Nhận xét: Như vậy, với bài toán trên (tam giác trong không gian) các em học sinh có thể ôn tập được hầu hết kiến thức trong bài học "*Hệ tọa độ trong không gian*", và trong đó với các câu f), g):

- Ở cách 1, chúng ta nhận được phương pháp chung để thực các yêu cầu của bài toán.
- Ở cách 2, bằng việc đánh giá được dạng đặc biệt của ΔABC chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

Thí dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(1; 2; 0)$, $D(3; 1; -2)$.

- Tìm tọa độ các điểm A_1, A_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxy) và trục Oy.
- Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.
- Tính thể tích khối tứ diện ABCD.
- Chứng minh rằng hình chóp D.ABC là hình chóp đều.
- Tìm tọa độ chân đường cao H của hình chóp D.ABC.
- Chứng minh rằng tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau.
- Tìm tọa độ điểm I cách đều bốn điểm A, B, C, D.

✍ Giải

a. Ta lần lượt:

- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm E(5; 3; 0). Từ đó, vì E là trung điểm của AA_1 nên $A_1(5; 3; 1)$.
- Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oy là điểm F(0; 3; 0). Từ đó, vì F là trung điểm của AA_2 nên $A_2(-5; 3; 1)$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để chứng minh bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng ta sẽ đi chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$ không đồng phẳng.

Giả sử trái lại, tức là ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng, khi đó sẽ tồn tại cặp số thực α, β sao cho:

$$\overrightarrow{DA} = \alpha \overrightarrow{DB} + \beta \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\alpha - 2\beta \\ 2 = 2\alpha + \beta \\ 1 = -2\alpha + 2\beta \end{cases}, \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow$ Ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{DA}(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DB}(-1; 2; -2)$, $\overrightarrow{DC}(-2; 1; 2)$, từ đó suy ra:

$$[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot (-2) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot 1 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 = 27 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

c. Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC}| = \frac{9}{2}$.

d. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} DA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ DB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \\ DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \end{cases} \Rightarrow DA = DB = DC.$$

Tương tự, ta cũng có $AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$.

Vậy, hình chóp D.ABC là hình chóp đều.

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC), ta có điều kiện:

$$\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp AC \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \text{Ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 4x+y-z=15 \\ x-5y-z=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8/3 \\ y=8/3 \\ z=-5/3 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Vậy, ta được $H\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy ra chân đường cao H của hình chóp D.ABC chính là trọng tâm của ΔABC , do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ \Leftrightarrow H &\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$

f. Với cặp cạnh AD và BC, ta có:

$$\overrightarrow{DA}(2; 2; 1), \overrightarrow{BC}(-1; -1; 4) \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

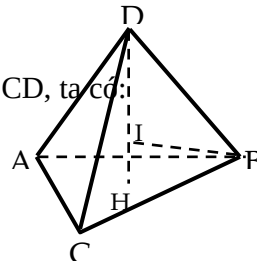
Chứng minh tương tự, ta cũng có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$.

Vậy, tứ diện ABCD có các cạnh đôi vuông góc với nhau.

g. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ AI = DI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 4x+y-z=15 \\ 4x+4y+2z=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5/2 \\ y=7/2 \\ z=-3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Cách 2: Dựa theo kết quả câu d), ta suy tâm $I(x; y; z)$ thuộc DH sao cho $ID = IB$, tức là ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} DI^2 = BI^2 \\ \overrightarrow{DI} // \overrightarrow{HI} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ \frac{x-3}{x-\frac{8}{3}} = \frac{y-1}{y-\frac{8}{3}} = \frac{z+2}{z+\frac{5}{3}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+4z=-15 \\ 5x+y=16 \\ x+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5/2 \\ y=7/2 \\ z=-3/2 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

F Nhận xét: Như vậy, với bài toán trên (khối đa diện) các em học sinh đã ôn tập được các kiến thức trong bài học "Hệ tọa độ trong không gian", và trong đó:

- Ở câu b), chúng ta nhận được hai phương pháp để chứng minh bốn điểm không đồng phẳng (tương ứng với ba vectơ không đồng phẳng) và thông thường chúng ta sử dụng cách 2 trong bài thi. Và đặc biệt giá trị $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC}$ được xác định rất nhanh và chính xác với các em học sinh biết sử dụng máy tính Casio fx – 570MS.

- Ở câu e), cách 1 trình bày phương pháp chung cho mọi dạng tứ diện và cách 2 được đề xuất dựa trên dạng đặc biệt của tứ diện ABCD. Và các em học sinh cần nhớ thêm rằng chúng ta còn có một cách chung khác bằng việc thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bước 3: Khi đó, điểm H chính là giao điểm của đường thẳng (d) với mặt phẳng (ABC).

- Hai cách sử dụng trong câu g) với ý tương tự như câu e). Tuy nhiên, các em học sinh cũng có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm).

Bước 2: Từ kết quả ở bước 1, chúng ta nhận được tọa độ tâm I.

Dạng toán 2: Phương trình mặt cầu

Phương pháp

Với phương trình cho dưới **dạng chính tắc**:

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k, \text{ với } k > 0$$

ta lần lượt có:

✚ Bán kính bằng $R = \sqrt{k}$.

✚ Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ y - b = 0 \\ z - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \Rightarrow I(a; b; c).$$

Với phương trình cho dưới **dạng tổng quát** ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu về dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad (1)$$

Bước 2: Để (1) là phương trình mặt cầu điều kiện là:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Bước 3: Khi đó (S) có thuộc tính:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$$

Thí dụ 1. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - m)^2 = m^2 - 2m + 5.$$

- Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.
- Tìm mặt cầu có bán kính nhỏ nhất trong họ (S_m) .
- Chứng tỏ rằng họ (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định.

✍ Giải

- Để (S_m) một họ mặt cầu điều kiện là:

$$m^2 - 2m + 5 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 4 > 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m thì (S_m) luôn là phương trình của mặt cầu với:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(2; 1; m) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{(m - 1)^2 + 4} \end{cases}$$

- Ta có:

$$R^2 = (m - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow R_{\min} = 2, \text{ đạt được khi } m = 1.$$

Vậy, trong họ (S_m) mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất bằng 2.

- Giả sử $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định mà họ (S_m) luôn đi qua, ta có:

$$(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - m)^2 = m^2 - 2m + 5, \forall m$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - z_0)m + (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z_0 = 0 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = 4 \end{cases}.$$

Vậy, họ (S_m) luôn chứa đường tròn (C) có tâm $I_0(2; 1; 1)$ và bán kính $R_0 = 2$ nằm trong mặt phẳng $(P_0): z = 1$.

F Chú ý: Thông qua lời giải câu c) các em học sinh hãy tổng kết để có được phương pháp thực hiện yêu cầu "Chứng tỏ rằng họ mặt cầu (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định".

Thí dụ 2. Cho họ mặt cong (S_m) có phương trình:

$$(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 2m^2x - 4my + 8m^2 - 4 = 0.$$

- Tìm điều kiện của m để (S_m) là một họ mặt cầu.
- Chứng minh rằng tâm của họ (S_m) luôn nằm trên một Parabol (P) cố định trong mặt phẳng Oxy, khi m thay đổi.
- Trong mặt phẳng Oxy, gọi F là tiêu điểm của (P) . Giả sử đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α và cắt (P) tại hai điểm M, N .
 - Tìm tọa độ trung điểm E của đoạn MN theo α .
 - Từ đó suy ra quỹ tích E khi α thay đổi.

 Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$(x - m^2)^2 + (y - 2m)^2 + z^2 = m^4 - 4m^2 + 4.$$

Từ đó, để phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu điều kiện là:

$$m^4 - 4m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bán kính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

Cách 2: Để (S_m) là một họ mặt cầu điều kiện cần và đủ là:

$$m^4 + 4m^2 - 8m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì (S_m) là phương trình của mặt cầu có:

$$\begin{cases} \text{Tâm } I(m^2; 2m; 0) \\ \text{Bán kính } R = |m^2 - 2| \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$I_m: \begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy, trong mặt phẳng Oxy tâm I_m luôn nằm trên Parabol (P): $y^2 = 4x$.

c. Trong mặt phẳng Oxy, xét Parabol

(P): $y^2 = 4x$, có tiêu điểm $F(1; 0)$.

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua F tạo với chiều dương của trục Ox một góc α có dạng:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } F(1;0) \\ \text{hệ số góc } k = \tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = (x - 1)\tan \alpha.$$

- Tọa độ giao điểm M, N của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = (x - 1)\tan \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 \tan^2 \alpha - 2(\tan^2 \alpha + 2)x + \tan^2 \alpha = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta' = (\tan^2 \alpha + 2)^2 - \tan^4 \alpha = 4\tan^2 \alpha + 4 > 0, \forall \alpha$$

do đó (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ có hoành độ thỏa mãn:

$$x_M + x_N = \frac{2(\tan^2 \alpha + 2)}{\tan^2 \alpha}.$$

- Gọi $E(x_E, y_E)$ là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \\ y_E = (x_E - 1)\tan \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\tan^2 \alpha + 2}{\tan^2 \alpha} \\ y_E = \frac{1}{2} \left[\frac{2(\tan^2 \alpha + 2)}{\tan^2 \alpha} - 2 \right] \tan \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{\tan^2 \alpha + 2}{\tan^2 \alpha} \\ y_E = \frac{2}{\tan \alpha} \end{cases}. \quad (I)$$

Khử α từ hệ (I) ta được $y_E^2 = 4x_E - 2$

Vậy, quỹ tích trung điểm E của đoạn MN thuộc Parabol (P_1) có phương trình $y^2 = 4x - 2$ trong mặt phẳng Oxy.

F Nhận xét: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), việc trình bày theo hai cách chỉ có tính minh họa, bởi trong thực tế chúng ta thường sử dụng cách 2.
- Ở câu b), chúng ta sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai.
- Ở câu c), các em học sinh đã thấy được mối liên hệ giữa hình học giải tích trong mặt phẳng với hình học giải tích trong không gian.

Dạng toán 3: Viết phương trình mặt cầu

Phương pháp

Gọi (S) là mặt cầu thỏa mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

Khi đó:

1. Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, R , điều kiện $R > 0$. Tuy nhiên, trong trường hợp này chúng ta thường chia nó thành hai phần, bao gồm:

- Xác định bán kính R của mặt cầu.
- Xác tâm $I(a; b; c)$ của mặt cầu.

Từ đó, chúng ta nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu.

2. Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 4 phương trình với bốn ẩn a, b, c, d , điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

- F Chú ý:** 1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.
 2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình mặt cầu.

Thí dụ 1. Viết phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- Đường kính AB với $A(3; -4; 5)$, $B(-5; 2; 1)$.
- Tâm $I(3; -2; 1)$ và đi qua điểm $C(-2; 3; 1)$.

 **Giải**

- Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \frac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm I}(-1; -1; 3) \\ R = \sqrt{29} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 29.$$

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (S) &\Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3; y + 4; z - 5) \cdot (x + 5; y - 2; z - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) + (y + 4)(y - 2) + (z - 5)(z - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0. \end{aligned}$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Ta có:

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (S) &\Leftrightarrow \Delta MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 + (x + 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 116 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z - 18 = 0. \end{aligned}$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

- Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Đi qua C} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm I}(3; -2; 1) \\ \text{Bán kính } R = IC = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ có phương trình:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = R^2.$$

Điểm $C(-2; 3; 1) \in (S)$ điều kiện là:

$$(-2 - 3)^2 + (3 + 2)^2 + (1 - 1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 50.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50.$$

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + d = 0.$$

Điểm $C(-2; 3; 1) \in (S)$ điều kiện là:

$$4 + 9 + 1 + 12 + 12 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 36.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 36 = 0$.

Cách 4: Ta có:

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (S) &\Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow IM^2 = IA^2 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 50. \end{aligned}$$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

F Nhận xét: Như vậy, với bài toán trên:

- Ở câu a), với cách 1 chúng ta đi xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R, từ đó sử dụng công thức để nhận được phương trình chính tắc của mặt cầu (S). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).
- Ở câu b), cách 1 có ý tương tự như trong câu a). Các cách 2, cách 3 chúng ta đã sử dụng các dạng phương trình có sẵn của mặt cầu và ở đó giá trị của tham số còn lại (R hoặc d) được xác định thông qua điều kiện C thuộc (S). Cách 4 chúng ta sử dụng phương pháp quỹ tích để nhận được phương trình mặt cầu (S).

Thí dụ 2. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A(1; 2; 2), B(0; 1; 0) và tâm I thuộc trục Oz.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

- Điểm A(1; 2; 2) $\in$ (S) nên:

$$1 + 4 + (2 - c)^2 = R^2 \Leftrightarrow (c - 2)^2 + 5 = R^2. \quad (1)$$

- Điểm B(0; 1; 0) $\in$ (S) nên:

$$1 + (-c)^2 = R^2 \Leftrightarrow c^2 + 1 = R^2. \quad (2)$$

Lấy (2) - (1), ta được:

$$4c - 8 = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

Thay c = 2 vào (2), ta được $R^2 = 5$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c) nên nó có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cy + d = 0, \text{ với } c^2 - d > 0.$$

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9 - 4c + d = 0 \\ 1 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0.$$

Cách 3: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Với các điểm A, B thuộc (S), ta có điều kiện là:

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 1 + 4 + (2 - c)^2 = 1 + (-c)^2 \Leftrightarrow c = 2.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0; 0; 2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz suy ra I(0; 0; c).

Trung điểm của AB là điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$, ta có điều kiện là:

$$\begin{aligned} IM \perp AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - c\right) \cdot (-1; -1; -2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 2(1 - c) = 0 \Leftrightarrow c = 2. \end{aligned}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(0;0;2) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5.$$

F Chú ý: Ngoài bốn cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng (d) chúng ta còn có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B suy ra tâm I thuộc mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB. Ta có:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua E là trung điểm của AB} \\ \text{vpt } \overline{AB} \end{cases}.$$

Bước 2: Tâm $\{I\} = (P) \cap (d)$, nên tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 3: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Thí dụ 3. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A(2; 1; 1), B(1; 1; 0), C(0; 2; 4) và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz).

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Vì tâm I(a; b; c) thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $a = 0$. (1)

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6 - 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 2 - 2a - 2b + d = 0 \\ 20 - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b - d = 2 \\ 4b + 8c - d = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$.

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) suy ra I(0; b; c).

Với các điểm A, B, C thuộc (S), ta có điều kiện là:

$$AI = BI = IC$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 1 + (b-1)^2 + c^2 \\ 4 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = (b-2)^2 + (c-4)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b + 3c = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;1;0) \\ \text{Bán kính } R = IA = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

F Chú ý: Ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của ΔABC để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Bước 1: Ta có:

 Nếu ΔABC đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trọng tâm H của ΔABC .

 Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm H của BC.

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bước 3: Tâm $\{I\} = (P) \cap (d)$, nên tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

Bước 4: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}$$

Chúng ta sẽ được thấy cách giải này trong phần đường thẳng.

Thí dụ 4. Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(2; 1; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 2; 4)$ và có bán kính bằng $\sqrt{5}$.

 **Giải**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

$$\text{ta có ngay } a^2 + b^2 + c^2 - d = 5. \quad (1)$$

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6 - 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 2 - 2a - 2b + d = 0 \\ 20 - 4b - 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - d = 2 \\ a + c = 2 \\ a - b - 4c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \\ d = 12a \end{cases}. \quad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$a^2 + (5a + 1)^2 + (2 - a)^2 - 12a = 5 \Leftrightarrow 27a^2 - 6a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc } a = \frac{2}{9}.$$

Khi đó:

- Với $a = 0$ ta được $b = 1$, $c = 2$ và $d = 0$ nên:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0.$$

- Với $a = \frac{2}{9}$ ta được $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ nên:

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) với bán kính bằng $\sqrt{5}$ có phương trình:

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 5.$$

Vì các điểm A, B, C thuộc (S), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 = 5 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + c^2 = 5 \\ a^2 + (2 - b)^2 + (4 - c)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + c^2 = 5 \\ a + c = 2 \\ a - b - 4c = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + c^2 = 5 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - a)^2 + 25a^2 + (2 - a)^2 = 5 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27a^2 - 6a = 0 \\ c = 2 - a \\ b = 5a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 1, c = 2 \text{ và } d = 0 \\ a = \frac{2}{9} \Rightarrow b = \frac{19}{9}, c = \frac{16}{9} \text{ và } d = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Khi đó:

- Với $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ và $d = 0$ ta được:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0.$$

- Với $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{19}{9}$, $c = \frac{16}{9}$ và $d = \frac{8}{3}$ ta được:

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}x - \frac{38}{9}y - \frac{32}{9}z - \frac{8}{3} = 0$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 5. Cho bốn điểm $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; 1; 2)$ và $D(2; 2; 1)$.

- Chứng tỏ rằng A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

 **Giải**

- a. Ta có $\overrightarrow{AB}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC}(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD}(1; 1; 0)$, suy ra:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (1; 0; 0)(1; 1; 0) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng.

Ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |1| \text{ đvtt.}$$

- b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, khi đó ta có điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3 \\ 2z = 3 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Cách 2: Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ điều kiện } a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0.$$

Điểm $A, B, C, D \in (S)$, ta được:

$$\begin{cases} 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 4b - 2c + d = 0 \\ 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 9 - 4a - 4b - 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ 2a + 4b + 2c - d = 6 \\ 2a + 2b + 4c - d = 6 \\ 4a + 4b + 2c - d = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = \frac{3}{2} \\ d = 6 \end{cases}, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

F Chú ý: Với câu b), ngoài hai cách giải trên, để viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D (ngoại tiếp tứ diện ABCD) chúng ta còn có thể tận dụng được tính chất của tứ diện ABCD để nhận được lời giải đơn giản hơn, cụ thể:

Trường hợp 1: Nếu $DA = DB = DC$ thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Dựng đường cao $DH \perp (ABC)$.
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó $\{I\} = (DH) \cap (P)$.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Nếu $DA \perp (ABC)$ thì:

Bước 1: Xác định tâm I bằng cách:

- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- Dựng đường thẳng (d) qua K và song song với DA (hoặc $(d) \perp (ABC)$).
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của DA.
- Khi đó $\{I\} = (d) \cap (P)$.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Trường hợp 3: Nếu $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$ thì mặt cầu ngoại tiếp DABC có tâm I là trung điểm AB

và bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Trường hợp 4: Nếu AD và BC có đoạn trung trực chung EF thì:

Bước 1: Ta lần lượt:

- Viết phương trình tham số của đường thẳng (EF) theo t.
- Khi đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm $I \in EF$ (thỏa mãn phương trình tham số của EF).
- Từ điều kiện $IA^2 = IC^2 = R^2$ suy ra giá trị tham số t, từ đó nhận được tọa độ tâm I.

Bước 2: Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I} \\ \text{Bán kính } R = IA \end{cases}.$$

Thí dụ 6. Viết phương trình mặt cầu:

- a. Có tâm $I(2; 1; -6)$ và tiếp xúc với trục Ox.
- b. Có tâm $I(2; -1; 4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).
- c. Có tâm $O(0; 0; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (T) có tâm $I(3; -2; 4)$, bán kính bằng 1.

 **Giải**

a. Gọi H_1 là hình chiếu vuông góc của I lên Ox, ta có $H_1(2; 0; 0)$.

Để (S) tiếp xúc với trục Ox điều kiện là:

$$R = d(I, Ox) = IH_1 = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; 1; -6) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 37.$$

b. Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) điều kiện là:

$$R = d(I, (Oxy)) = 4.$$

Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -1; 4) \\ \text{Bán kính } R = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

c. Để (S) tiếp xúc với mặt cầu (T) có tâm $I(3; -2; 4)$, bán kính bằng 1 điều kiện là:

$$\begin{cases} R+1 = OI \\ |R-1| = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R+1 = \sqrt{29} \\ |R-1| = \sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{29} - 1 \\ R = \sqrt{29} + 1 \end{cases}.$$

Khi đó:

- Với $R = \sqrt{29} - 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{29} - 1)^2.$$

- Với $R = \sqrt{29} + 1$, ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{29} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{29} + 1)^2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) , (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

F Nhận xét: Như vậy, qua bài toán trên chúng ta đã làm quen với việc viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu. Cụ thể:

- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với đường thẳng (d) khi:
 $R = d(I, (d)).$
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi:
 $R = d(I, (P)).$
- Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt cầu (T) tâm T, bán kính R_T khi:

$$\begin{cases} (S) \text{ và } (T) \text{ tiếp xúc ngoài} \\ (S) \text{ và } (T) \text{ tiếp xúc trong} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R + R_T = IT \\ |R - R_T| = IT \end{cases}.$$

Thí dụ 7. Lập phương trình mặt cầu:

- Có tâm nằm trên tia Ox, bán kính bằng 5 và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz).
- Có bán kính bằng 2 và tiếp xúc với (Oxy) tại điểm $M(3; 1; 0)$.

 Giải

a. Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R.

Từ giả thiết suy ra $R = 5$, ngoài ra:

- (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) điều kiện là:
 $d(I, (Oyz)) = R \Leftrightarrow a = 5.$
- Tâm nằm trên tia Ox điều kiện là $b = c = 0.$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(5; 0; 0) \\ \text{Bán kính } R = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

b. Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $M(3; 1; 0)$ nên tâm $I(3; 1; c)$.
- Vì $R = 2$ nên:

$$IM = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2 \Rightarrow I_1(3; 1; 2) \text{ và } I_2(3; 1; -2).$$

Khi đó:

- Với tâm $I_1(3; 1; 2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(3; 1; 2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

- Với tâm $I_2(3; 1; -2)$ ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(3; 1; -2) \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1) và (S_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bi 1

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$$

a) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ và tính $|\vec{x}|$

b) Tìm giá trị của x để véc tơ $\vec{y} = (2x - 1; -x; 3x + 2)$ vuông góc với véc tơ $2\vec{b} - \vec{c}$

c) Chứng minh rằng các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và phân tích véc tơ $\vec{u} = (3; 7; -14)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các véc tơ

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

a) Xác định tọa độ các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

b) Tìm tọa độ véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ và tính $|\vec{u}|$

c) Tìm x để véc tơ $\vec{v} = (3x - 1; x + 2; 3 - x)$ vuông góc với $\vec{b}$

d) Biểu diễn véc tơ $\vec{x} = (3; 1; 7)$ qua ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Bi 2

1. Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính

a) Độ dài các véc tơ $\vec{a} + \vec{b}$, $5\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$,

b) Độ dài véc tơ $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, 3\vec{b}]$, $[5\vec{a}, -2\vec{b}]$.

2. Tìm điều kiện của tham số m sao cho

a) Ba véc tơ $\vec{u}(2; 1; -m)$, $\vec{v}(m + 1; -2; 0)$, $\vec{w}(1; -1; 2)$ đồng phẳng.

b) $A(1; -1; m)$, $B(m; 3; 2m - 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(m + 3; -m; 2 - m)$ cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}(2; m; 2m - 1)$, $\vec{b}(m; 2; -1)$ là 60° .

Bi 3 Cho tam giác ABC có $B(-1; 1; -1)$, $C(2; 3; 5)$. Điểm A có tung độ

là $\frac{1}{3}$, hình chiếu của điểm A trên BC là $K\left(1; \frac{7}{3}; 3\right)$ và diện tích tam

giác ABC là $S = \frac{49}{3}$.

1. Tìm tọa độ đỉnh A biết A có hoành độ dương.

2. Tìm tọa độ chân đường vuông góc hạ từ B đến AC .

3. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp và tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

4. Chứng minh $\vec{HG} = 2\vec{GI}$ với G là trọng tâm tam giác ABC .

Bi 4 Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Tọa độ các

điểm $A(2; 4; 1), B(0; 4; 4), C(0; 0; 1)$ và D có hoành độ dương.

1. Xác định tọa độ điểm D .
2. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng G cách đều các đỉnh của tứ diện.
3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD .
4. Tính độ dài các đường trọng tuyến của tứ diện $ABCD$.
Tính tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh của tứ diện $ABCD$.

Bi 5 Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $A(0; 2; 0), B(-1; 0; -3), C(0; -2; 0), D(3; 2; 1)$.

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng;
2. Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD ;
3. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và đường cao của tứ diện hạ từ A ;
4. Tìm tọa độ E sao cho $ABCE$ là hình bình hành;
5. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD ;
6. Tìm điểm M thuộc Oy sao cho tam giác BMC cân tại M ;
7. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ và chứng minh A, G, A' thẳng hàng với A' là trọng tâm tam giác BCD .

Bi 6 Cho tam giác ABC có $A(2; 3; 1), B(-1; 2; 0), C(1; 1; -2)$.

1. Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .
2. Tìm tọa độ H là trực tâm của tam giác ABC .
3. Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
4. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng các điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bi 7

Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

- a) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.
- b) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Bi 8

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; -2; 4)$

- a) Tìm tọa độ các hình chiếu của A lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ
- b) Tìm $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A
- c) Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1; 4; -4)$.

Bi 9

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho $A(4; 0; 0), B(x_0; y_0; 0)$ với

$x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB} = 45^\circ$.

- a) Tìm C trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện $OABC$ bằng 8.
- b) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABO$ và M trên cạnh AC sao cho $AM = x$. Tìm x để $OM \perp GM$.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 1. CÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTO

Bài 1

1. a) Ta có: $\vec{a} = (2; 3; -5), \vec{b} = (0; -3; 4), \vec{c} = (-1; -2; 0)$

Suy ra $3\vec{a} = (6; 9; -15), 2\vec{b} = (0; -6; 8) \Rightarrow \vec{x} = (6; 3; -7)$

Do đó: $|\vec{x}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{94}$

b) Ta có: $2\vec{b} - \vec{c} = (1; -4; 8)$, nên $\vec{y}$ vuông góc với $2\vec{b} - \vec{c}$ khi và chỉ khi

$$\vec{y} \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (2x - 1) - 4 \cdot (-x) + 8(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

c)

Cách 1: Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3; -8; -6) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 3 + 16 = 19 \neq 0$

Nên ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2. Giả sử ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Khi đó tồn tại hai số thực x, y sao cho $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ (1)

$$\text{Mà } x\vec{b} + y\vec{c} = (-y, -3x - 2y, 4x) \text{ nên (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2 \\ -3x - 2y = 3 \\ 4x = -5 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Giả sử $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ (2)

Do $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = (2m - p, 3m - 3n - 2p, -5m + 4n)$ nên (2) tương đương với

$$\begin{cases} 2m - p = 3 \\ 3m - 3n - 2p = 7 \\ -5m + 4n = -14 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2, n = -1, p = 1$$

Vậy $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

2. a) Ta có $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = (0; 2; -3)$

b) Ta có: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = (1; -2; 16) \Rightarrow |\vec{u}| = 3\sqrt{29}$.

c) Ta có: $\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1(3x - 1) + 2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$.

$$\text{d) Giả sử: } \vec{x} = k\vec{a} + p\vec{b} + l\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} k - p = 3 \\ 3k + 2l = 2 \\ -k + 2p - 3l = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{32}{11} \\ p = -\frac{1}{11} \\ l = -\frac{37}{11} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{x} = \frac{32}{11}\vec{a} - \frac{1}{11}\vec{b} - \frac{37}{11}\vec{c}.$$

Bài 2

1. Do $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ nên ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$.

a) Sử dụng công thức

$$|m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b})^2} = \sqrt{m^2\vec{a}^2 + 2mn.\vec{a}\vec{b} + n^2\vec{b}^2}.$$

Ta tính được $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{39}$, $|5\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{129}$, $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$.

b) Sử dụng công thức $||m\vec{a}, n\vec{b}|| = |m.n|.|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(m\vec{a}, n\vec{b})$.

Với chú ý $(\vec{a}, 3\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $(5\vec{a}, -2\vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

2. a) Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (-2m; -m^2 - m; -m - 5)$ nên ba véc tơ đã cho đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0$ hay

$$-2m.1 + (-m^2 - m).(-1) + (-m - 5).2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = 5.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -2; m = 5$.

b) Ta có $\overrightarrow{CA}(-3; -4; m-1)$, $\overrightarrow{CB}(4-m; 0; 2-2m)$, $\overrightarrow{CD}(1-m; 3+m; m-1)$.

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] = (8(1-m); (m-1)(m+2); 4(m-4)).$$

Vậy bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, hay

$$8(1-m)^2 + (m-1)(m+2)(3+m) + 4(m-1)(m-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2(m+18) = 0 \Rightarrow m = 1; m = -18.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 1; m = -18$.

c) Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ nên

$$\cos 60^\circ = \frac{2m + 2m + (2m-1) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + m^2 + (2m-1)^2} \cdot \sqrt{m^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{\sqrt{5m^2 - 4m + 5} \cdot \sqrt{m^2 + 5}}$$

Với $m \geq -\frac{1}{2}$, nên bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$5m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 36m + 21 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2(5m^2 + 6m + 21) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Giá trị cần tìm của m là $m = 1$.

Bài 3

1. Ta có $\overline{BC}(3; 2; 6) \Rightarrow BC = 7$ nên $AK = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{14}{3}$.

Gọi $A\left(x; \frac{1}{3}; z\right)$ thì $\overline{AK}(1-x; 2; 3-z)$. Do đó từ $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK = \frac{14}{9} \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} 3x + 6z = 25 \\ (1-x)^2 + (3-z)^2 = \frac{160}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6z = 25 \\ 45z^2 - 318z + 405 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $A\left(-\frac{37}{15}; \frac{1}{3}; \frac{25}{5}\right)$ (loại) hoặc $A\left(5; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ (thỏa mãn).

2. Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ B đến AC .

Ta có $\overline{CL} = t\overline{CA}$ nên $L\left(2+3t; 3-\frac{8}{3}t; 5-\frac{10}{3}t\right)$.

Do đó $\overline{BL}\left(3+3t; 2-\frac{8}{3}t; 6-\frac{10}{3}t\right), \overline{CA}\left(3; -\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}\right)$ nên

$$\overline{BL} \cdot \overline{CA} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5} \Rightarrow L\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}; 3\right).$$

3. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right), H\left(3; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

4. $G\left(2; \frac{13}{9}; \frac{17}{9}\right) \Rightarrow \overline{HG}\left(-1; \frac{1}{9}; -\frac{4}{9}\right) = 2\overline{GI}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{18}; -\frac{2}{9}\right)$.

Bài 4 $A(2; 4; 1), B(0; 4; 4), C(0; 0; 1)$

1. Gọi $D(x; y; z)$. Từ $DA = BC, DB = CA, DC = AB$ ta có hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25 \\ x^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 20 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(1-y) \\ z = \frac{12-4y}{3} \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 13 \end{cases}$$

Suy ra $D(2; 0; 4), D\left(-\frac{166}{61}; \frac{144}{61}; \frac{52}{61}\right)$. Chọn điểm $D(2; 0; 4)$.

2. Tọa độ trọng tâm của tứ diện là $G\left(1; 2; \frac{5}{2}\right)$.

Tính được $GA = GB = GC = GD = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy G cách đều các đỉnh của tứ diện (là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện).

$$3. \text{ Ta có } M\left(1; 4; \frac{5}{2}\right), N\left(1; 0; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(0; -4; 0).$$

Do đó $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Hay MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD .

4. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt đối diện.

$$\text{Ta có } AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{2\sqrt{29}}{3}.$$

5. Ba góc ở mỗi đỉnh của tứ diện là ba góc của một tam giác, nên tổng các góc ở mỗi đỉnh là 180° .

Bài 5

$$1. \text{ Ta có } \overrightarrow{BA} = (1; 2; 3), \overrightarrow{BC} = (1; -2; 3), \overrightarrow{BD} = (4; 2; 4), \overrightarrow{CD} = (3; 4; 1)$$

$$\text{Suy ra } [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-14; 8; 10)$$

Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = 32 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng.

$$2. \text{ Ta có: } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \| [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \| = \frac{1}{2} \sqrt{(-14)^2 + 8^2 + 10^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{Vì } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BH \cdot CD \text{ nên suy ra } BH = \frac{2S_{\triangle BCD}}{CD} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{65}}{13}.$$

$$3. \text{ Ta có: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BA} \cdot [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Gọi } h = d(A, (BCD)) \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{16}{3\sqrt{10}} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{15}.$$

4. Gọi $E(x; y; z)$.

$$ABCE \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 2 = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Vậy $E(1; 0; 3)$.

$$5. \text{ Ta có: } \overrightarrow{AC} = (0; -4; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -8 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{8}{4 \cdot 6} = \frac{1}{3}.$$

$$6. \text{ Ta có } M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0). \text{ Tam giác } BMC \text{ cân tại } M \Leftrightarrow MC^2 = MB^2$$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 + y^2 + 3^2 = (y+2)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } M\left(0; \frac{3}{2}; 0\right).$$

$$7. \text{ Ta có: } A'\left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{2}{3}\right), G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{2}{3}; -2; -\frac{2}{3}\right), \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Mà } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AG} \Rightarrow A, A', G \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 6

1. Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} K \in BC \\ AK \perp BC \end{cases}$$

- $K \in BC$ nên $\overrightarrow{BK} = t.\overrightarrow{BC}$, do đó

$$\begin{cases} x_K + 1 = t(1 + 1) \\ y_K - 2 = t(1 - 2) \\ x_K - 0 = t(-2 - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = 2t - 1 \\ y_K = 2 - t \\ x_K = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow K(2t - 1; 2 - t; -2t).$$

- $AK \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Vì $\overrightarrow{AK}(2t - 3; -1 - t; -1 - 2t)$ nên

$$(2t - 3).2 + (-1 - t).(-1) + (-1 - 2t).(-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Tọa độ điểm K cần tìm là $K\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

2. Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm tam giác ABC Ta có

$$\overrightarrow{AH}(x - 2; y - 3; z - 1), \overrightarrow{BH}(x + 1; y - 2; z), \overrightarrow{AB}(-3; -1; -1), \overrightarrow{AC}(-1; -2; -3), \overrightarrow{BC}(2; -1; -2)$$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1; -8; 5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp CA \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right)$.

3. Gọi $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có

$$\overrightarrow{AI}(x - 2; y - 3; z - 1), \overrightarrow{BI}(x + 1; y - 2; z), \overrightarrow{CI}(x - 1; y - 1; z + 2).$$

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right)$.

4. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2 - 1 + 1}{3}; \frac{3 + 2 + 1}{3}; \frac{1 + 0 - 2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15}; \frac{1}{15}; 0\right)$, $\overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15}; \frac{1}{30}; 0\right)$ nên $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 7

Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x; y; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3; 0; -3)$, $\overrightarrow{AC}(x - 5; y - 3; 1)$, $\overrightarrow{BC}(x - 2; y - 3; 4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB = AC = BC$, do đó

$$\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 3)^2 + 1^2 = 18 \\ (x - 5)^2 + (y - 3)^2 + 1^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 4 \\ x = 1; y = 2 \end{cases}.$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1; 2; 0)$.

a) Gọi $D(x; y; z)$.

Khi đó $\overline{AD}(x-5; y-3; z+1), \overline{BD}(x-2; y-3; z+4), \overline{CD}(x-1; y-2; z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-x \\ y = 16-5x \\ (x-5)^2 + (13-5x)^2 + (2-x)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-x \\ y = 16-5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2 - 16x + 20 = 0$ ta được $x = 2, x = \frac{10}{3}$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2; 6; -1)$ hoặc $D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

b) Gọi $S(x; y; z)$. Ta có $\overline{AS}(x-5; y-3; z+1), \overline{BS}(x-2; y-3; z+4), \overline{CS}(x-1; y-2; z)$
 SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{AS} \cdot \overline{BS} = 0 \\ \overline{BS} \cdot \overline{CS} = 0 \\ \overline{CS} \cdot \overline{AS} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-2) + (y-3)^2 + (z+1)(z+4) = 0 \\ (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z+4)z = 0 \\ (x-1)(x-5) + (y-2)(y-3) + z(z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 6y + 5z = -23 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y + 4z = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4z = 12 \\ -3x - 3z = -3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 11 \\ x = 1 - z \\ 3z^2 + 10z + 8 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2 + 10z + 8 = 0$ ta được $z = -2; z = -\frac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3; 1; -2), S\left(\frac{7}{3}; \frac{13}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Bài 8

a) Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz . B_1, B_2, B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$.

Ta có: $A_1(3; 0; 0), A_2(0; -2; 0), A_3(0; 0; 4)$ và $B_1(3; -2; 0), B_2(3; 0; 4), B_3(0; -2; 4)$

b) Do $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0; 0), N \in Oy \Rightarrow N(0; n; 0)$

Suy ra $\overline{AM} = (m-3; 2; -4), \overline{AN} = (-3; n+2; -4)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \\ AM^2 = AN^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(m-3) + 2(n+2) + 16 = 0 \\ (m-3)^2 + 2^2 + (-4)^2 = (-3)^2 + (n+2)^2 + (-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = \frac{2(n+2)+16}{3} & (1) \\ \left[\frac{2(n+2)+16}{3} \right]^2 = (n+2)^2 + 5 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 4(n+2)^2 + 64(n+2) + 256 = 9(n+2)^2 + 45$

$$\Leftrightarrow 5(n+2)^2 - 64(n+2) - 211 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n+2 = \frac{32+3\sqrt{231}}{5} \\ n+2 = \frac{32-3\sqrt{231}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{22+3\sqrt{231}}{5} \\ n = \frac{22-3\sqrt{231}}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{189+6\sqrt{231}}{5} \\ m = \frac{189-6\sqrt{231}}{5} \end{cases}.$$

Vậy có hai bộ thỏa yêu cầu bài toán:

$$M_1 \left(\frac{189+6\sqrt{231}}{15}; 0; 0 \right), N_1 \left(0; \frac{22+3\sqrt{231}}{5}; 0 \right) \text{ hoặc}$$

$$M_2 \left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15}; 0; 0 \right), N_2 \left(0; \frac{22-3\sqrt{231}}{5}; 0 \right).$$

c) Vì $E \in (Oyz)$ nên $E(0; x; y)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AE} = (-3; y+2; z-4), \overrightarrow{BE} = (1; y-4; z+4)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}] = (8y+6z-8; 4z+8; 10-4y)$$

$$\text{Nên từ giả thiết bài toán ta có: } \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ \frac{1}{2} [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}] = 3\sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ [\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}]^2 = 1044 \end{cases}$$

$$AE^2 = BE^2 \Leftrightarrow 9 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1 + (y-4)^2 + (z+4)^2 \Leftrightarrow y = \frac{4z+1}{3}$$

$$[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}]^2 = 1044 \Leftrightarrow (8y+6z-8)^2 + (4z+8)^2 + (10-4y)^2 = 1044$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{50z-16}{3} \right)^2 + (4z+8)^2 + \left(\frac{26-16z}{3} \right)^2 - 1044 = 0 \Leftrightarrow z = 2, z = -\frac{34}{25}$$

$$\bullet z = 2 \Rightarrow y = 3 \text{ nên } E(0; 3; 2)$$

$$\bullet z = -\frac{34}{25} \Rightarrow y = -\frac{37}{25} \text{ nên } \left(0; -\frac{37}{25}; -\frac{34}{25} \right).$$

Bài 9

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OA} = (4; 0; 0), \overrightarrow{OB} = (x_0; y_0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4x_0$$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} (x_0 - 4)^2 + y_0^2 = 40 \\ \frac{4x_0}{4\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 = 24 \\ \sqrt{2}x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = x_0^2 \\ x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow B(6; 6; 0)$$

a) Do $C \in Oz \Rightarrow C(0; 0; m)$, $m > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 6; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; 0; 24)$ và $\overrightarrow{OC} = (0; 0; m)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC} = 24m \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 24m = 8 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow C(0; 0; 2).$$

b) Ta có $G\left(\frac{10}{3}; 2; 0\right)$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} = (-4x; 0; 2x)$

$$\Rightarrow M(4 - 4x; 0; 2x) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (4 - 4x; 0; 2x); \overrightarrow{GM} = \left(\frac{2}{3} - 4x; 2; 2x\right)$$

$$\Rightarrow OM \perp GM \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{GM} = 0 \Leftrightarrow (4 - 4x)\left(\frac{2}{3} - 4x\right) + 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 - \frac{56}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 14x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{15}.$$

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dựa vào lý thuyết: $\vec{x} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$, suy ra $\vec{x} = (m; n; p)$. Chọn C.

Câu 2. Ta có $2\vec{x} + 3\vec{a} = 4\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = 2\vec{b} + \left(-\frac{3}{2}\vec{a}\right)$. Suy ra $\vec{x} = \left(-4; \frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. Chọn A.

Câu 3. Đặt $\vec{x} = (m, n, p)$, ta có
$$\begin{cases} 2m - n + 3p = -5 \\ m - 3n + 2p = -11 \\ 3m + 2n - 4p = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = (2, 3, -2). \text{ Chọn B.}$$

Câu 4. Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$; $|\vec{c}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Xét $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$, suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$. Vậy đáp án còn lại D là sai. Chọn D.

Câu 5. Ta có $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Chọn C.

Câu 6. Kiểm tra các đáp án, ta thấy đáp án B đúng.

Thật vậy, ta có $2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r} = (11, -6, 5) = \vec{c}$. Chọn B.

Câu 7. Ta có $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (-3, 22, 5)$. Chọn A.

Câu 8. Ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = (m - 2n; n; -2m + 3n)$.

Suy ra $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2n = -4 \\ n = 3 \\ -2m+3n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 9. Ta có $\begin{cases} 2\vec{a} - \vec{b} = (3; 2m+5; -4) \\ \vec{b} = (1; -3; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{b}(2\vec{a} - \vec{b}) = -6m - 20$.

Do đó $|\vec{b}(2\vec{a} - \vec{b})| = 4 \Leftrightarrow |-6m - 20| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+10 = 2 \\ 3m+10 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{8}{3} \\ m = -4 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 10. Ta có $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2 = k(m-2) \\ m+1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ k = 1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 11. Để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k.1 \\ 2 = k.n \\ 3 = k.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Chọn B.

Câu 12. Ta có $\begin{cases} \vec{u} = (4, 2 - 3\sqrt{2}m, 3\sqrt{2}m - 4) \\ \vec{v} = (2m, m + \sqrt{2}, -2m - \sqrt{2}) \end{cases}$.

Do đó $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 4.2m + (2 - 3\sqrt{2}m)(m + \sqrt{2}) + (3\sqrt{2}m - 4)(-2m - \sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow -9\sqrt{2}m^2 + 6m + 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$. **Chọn A.**

Câu 13. Sai ở Bước 3, do giải phương trình cơ bản $\sqrt{A} = B$ mà không có điều kiện $B \geq 0$.

Chọn D.

Câu 14. Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9$.

Sử dụng công thức: $|\vec{m}\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{(\vec{m}\vec{a} + n\vec{b})^2} = \sqrt{m^2\vec{a}^2 + 2mn\vec{a}\vec{b} + n^2\vec{b}^2}$

Ta tính được $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{3^2.12 - 2.3.2.9 + 2^2.9} = \sqrt{36} = 6$. **Chọn D.**

Câu 15. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} |\vec{u}| = 3 \Rightarrow \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = 9 \\ |\vec{v}| = 1 \Rightarrow \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = 1 \end{cases}$. (1)

Từ $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$, suy ra $16 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v}$. (2)

Kết hợp (1) và (2), ta được $2\vec{u}\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 9 + 1 - 4^2 = -6$.

Khi đó $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{v} = 9 + 1 - 6 = 4$. Vậy $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$. **Chọn C.**

Câu 16. Áp dụng công thức $[\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$, ta được $[\vec{a}, \vec{b}] = 2.5 \cdot \sin 30^\circ = 5$. **Chọn B.**

Câu 17. Chú ý rằng $(5\vec{a}, -2\vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Sử dụng công thức $[\vec{m}\vec{a}, \vec{n}\vec{b}] = |m.n| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{m}\vec{a}, \vec{n}\vec{b})$, ta được

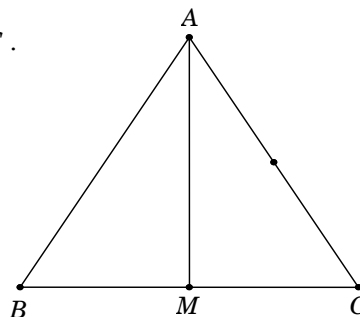
$$[5\vec{a}, -2\vec{b}] = |5 \cdot (-2)| \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sin 150^\circ = 30\sqrt{3}. \text{ **Chọn C.}**$$

Câu 18. Vẽ tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm BC .

Ta chọn $\vec{u} = \vec{BA}$, $\vec{v} = \vec{BM}$ thỏa mãn giả thiết bài toán.

Suy ra $\vec{u} - \vec{v} = \vec{BA} - \vec{BM} = \vec{MA}$.

Khi đó $(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = (\vec{BM}, \vec{MA}) = 90^\circ$. **Chọn D.**



Câu 19. M là trung điểm của AB suy ra tọa độ điểm $M(1;1;0)$.

N là trung điểm của CD suy ra tọa độ điểm $N(1;1;2)$.

I là trung điểm của MN suy ra tọa độ điểm $I(1;1;1)$. **Chọn D.**

Câu 20. Ta có $2\vec{a} - \vec{b} = (5;2;-3)$. Gọi $M(x;y;z)$, suy ra $\vec{AM} = (x;y-2;z-1)$.

$$\text{Theo giả thiết, suy ra } \begin{cases} x = 5 \\ y - 2 = 2 \\ z - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}. \text{ **Chọn D.}**$$

Câu 21. Áp dụng lý thuyết: Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có tọa độ hình chiếu trên các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) lần lượt là $M_1(x_0; y_0; 0)$, $M_2(0; y_0; z_0)$, $M_3(x_0; 0; z_0)$. **Chọn B.**

Câu 22. Áp dụng lý thuyết: Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có các điểm đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) lần lượt là $M_1(x_0; y_0; -z_0)$, $M_2(-x_0; y_0; z_0)$, $M_3(x_0; -y_0; z_0)$.

Do đó điểm đối xứng của $M(-3;2;-1)$ qua mặt phẳng (Oxy) là $M'(-3;2;1)$. **Chọn A.**

Câu 23. Áp dụng lý thuyết: Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có hình chiếu vuông góc lên các trục Ox , Oy , Oz lần lượt là $M_{Ox}(x_0; 0; 0)$, $M_{Oy}(0; y_0; 0)$, $M_{Oz}(0; 0; z_0)$. Do đó hình chiếu vuông góc của $M(2016; -1; -2017)$ trên trục Oz là

$(0;0;-2017)$. Chọn D.

Câu 24. Áp dụng lý thuyết: Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thì điểm đối xứng của M qua các trục Ox , Oy , Oz lần lượt là $M_1(x_0; -y_0; -z_0)$, $M_2(-x_0; y_0; -z_0)$, $M_3(-x_0; -y_0; z_0)$.

Do đó điểm đối xứng của $A(-3; 2; -1)$ qua trục $y'Oy$ là $A'(3; 2; 1)$. Chọn C.

Câu 25. Khoảng cách từ $A(x; y; z)$ đến trục Ox , được tính theo công thức $d[A, Ox] = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Tương tự $d[A, Oy] = \sqrt{x^2 + z^2}$ và $d[A, Oz] = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Do đó $d[A, Oy] = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Chọn B.

Câu 26. Khoảng cách từ M đến gốc tọa độ O bằng $MO = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$. Chọn D.

Câu 27. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M(-2; -5; 4)$. Chọn A.

Câu 28. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Ox là $M'(1; 2; -3)$. Chọn B.

Câu 29. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 3; -3)$. Gọi $D(x; y; z)$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 2(-2)+3(-1) = -7 \\ y-4 = 2.2+3.3 = 13 \\ z-2 = 2.0+3(-3) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 17 \\ z = -7 \end{cases}$. Chọn A.

Câu 30. Gọi $G'(x; y; z)$ là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Ta có $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{BB'}) + (\overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{CC'}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}.$$

Suy ra G' cũng là trọng tâm của tam giác ABC nên có tọa độ $G\left(2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Chọn C.

Câu 31. Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 10; -14)$, $\overrightarrow{MQ} = (-1; -5; 7)$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MQ}$.

Do đó ba điểm M , N , Q thẳng hàng. Chọn B.

Câu 32. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-12; 6; 0)$, $\overrightarrow{AM} = (2m-3; 3; n-1)$.

Để A , B , M thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 = -12k \\ 3 = 6k \\ n-1 = 0.k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ n = 1 \end{cases}$.

Chọn B.

Câu 33. Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox$.

Theo giả thiết: $MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 2^2 + (-4)^2} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$.

Suy ra $M\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **Chọn B.**

Câu 34. Gọi $M(x; 0; z) \in (Oxz)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (1-0)^2 + (1-z)^2 = (-1-x)^2 + (1-0)^2 + (0-z)^2 \\ (1-x)^2 + (1-0)^2 + (1-z)^2 = (3-x)^2 + (1-0)^2 + (-1-z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/6 \\ z = -7/6 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 35. Áp dụng công thức tìm tọa độ trọng tâm. **Chọn B.**

Câu 36. Gọi $H(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x; y; z-1)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 3; -1)$, $\overrightarrow{BH} = (x+1; y+2; z)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BH} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot 3 + y \cdot 3 + (z-1) \cdot (-1) = 0 \\ \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$.

Chọn A.

Câu 37. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{B}$ của tam giác ABC

Ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{BA}{BC} \overrightarrow{DC}$. Tính được $BA = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104}$.

Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA}$.

Gọi $D(x; y; z)$. Từ $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow \begin{cases} -4-x = -2(1-x) \\ 7-y = -2(2-y) \\ 5-z = -2(-1-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 11/3 \\ z = 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 38. Gọi D là chân phân giác trong của góc $\widehat{B}$, ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{3}{15} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{5} \overrightarrow{DC}$.

Suy ra $D(0; 0; 3)$. Vậy $BD = 2\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Câu 39. Gọi F là chân đường phân giác ngoài góc $\widehat{A}$ của tam giác ABC , ta có $\overrightarrow{FB} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{FC}$.

Tính được $AB = 5\sqrt{5}$, $AC = 3\sqrt{5}$. Suy ra $\overrightarrow{FB} = \frac{5}{3} \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{FB} = 5\overrightarrow{FC}$.

Gọi $F(x; y; z)$. Từ $3\overrightarrow{FB} = 5\overrightarrow{FC} \Rightarrow \begin{cases} 3(-5-x) = 5(3-x) \\ 3(6-y) = 5(2-y) \\ 3(0-z) = 5(0-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 40. Ta có $\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2)$, $\overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 6 + 2(m-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn D.**

Câu 41. Giả sử $A(x_A; y_A; 0) \in (Oxy)$, $B(0; 0; z_B) \in Oz$.

Vì $G(-1; 1; 2)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} -1 = \frac{x_A + 0 + (-2)}{3} \\ 1 = \frac{y_A + 0 + 2}{3} \\ 2 = \frac{0 + z_B + 2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = 1 \\ z_B = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1; 0), B(0; 0; 4).$$

Chọn B.

Câu 42. Gọi M là trung điểm của AC . Do $M \in Oy$ nên $M(0; y; 0)$.

Suy ra $C(4; 2y+1; -2)$.

Gọi N là trung điểm của BC , suy ra $N\left(\frac{7}{2}; y+3; -6\right)$.

Do $N \in (Oxz)$ nên $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3 \Rightarrow C(4; -5; -2)$. **Chọn A.**

Câu 43. Ta có $AB^2 = 125; AC^2 = 45; BC^2 = 80$.

Do đó $AB^2 = CA^2 + CB^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C . **Chọn C.**

Câu 44. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0; 2; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB \perp AC$. **Chọn D.**

Câu 45. Ta có $AB = 3; BC = 3; AC = \sqrt{2}$. Vậy tam giác cân ở B . **Chọn C.**

Câu 46. Ta có $A(1; 1; 1)$, $B(5; 1; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (2; 8; 3)$. Suy ra tọa độ điểm $C(7; 9; 2)$.

Gọi $D(x; y; z)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + x_C - x_B \\ y = y_A + y_C - y_B \\ z = z_A + z_C - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \\ z = 4 \end{cases}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 47. Gọi $Q(x; y; z)$. Để $MNPQ$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_Q = x_N - x_M \\ y_P - y_Q = y_N - y_M \\ z_P - z_Q = z_N - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = x_P + x_M - x_N \\ y_Q = y_P + y_M - y_N \\ z_Q = z_P + z_M - z_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 48. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 3)$, $\overrightarrow{MC} = (2; -3; 3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ hay $ABCM$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{NA} = (3; 1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 1; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BC}$ hay $NACB$ là hình bình hành.

Chọn D.

Câu 19. Từ giả thiết, suy ra $A(-1; 1; 0)$ và $B(1; 1; 0)$. Gọi $D(x; y; z)$.

Do $OABD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_B - x_A \\ y = y_B - y_A \\ z = z_B - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 50. Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm của tứ diện. **Chọn D.**

Câu 51. Gọi I là tâm của hình hộp nên I là trung điểm của của $D'B$, suy ra $I(5; 4; 5)$.

Và I cũng là trung điểm của AC' , suy ra $C'(8; 4; 10)$. Gọi $B'(x; y; z)$.

Do $B'C'CB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_B + x_{C'} - x_C \\ y = y_B + y_{C'} - y_C \\ z = z_B + z_{C'} - z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = 17 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 52. Rõ ràng A đúng theo tính chất của tích có hướng.

Đặt $\vec{a} = (x; y; z)$, $\vec{b} = (x'; y'; z')$ ($x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$). Ta có

$$\bullet \begin{cases} 3\vec{b} = (3x'; 3y'; 3z') \\ [\vec{a}, \vec{b}] = (yz' - zy'; xz' - zx'; xy' - x'y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\vec{a}, 3\vec{b}] = (3yz' - 3zy'; 3xz' - 3zx'; 3xy' - 3x'y) \\ [\vec{a}, \vec{b}] = (yz' - zy'; xz' - zx'; xy' - x'y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]. \text{ Do đó B đúng.}$$

$$\bullet \begin{cases} 2\vec{a} = (2x; 2y; 2z) \\ [\vec{a}, \vec{b}] = (yz' - zy'; xz' - zx'; xy' - x'y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [2\vec{a}, \vec{b}] = (2yz' - 2zy'; 2xz' - 2zx'; 2xy' - 2x'y) \\ [\vec{a}, \vec{b}] = (yz' - zy'; xz' - zx'; xy' - x'y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2\vec{a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]. \text{ Do đó C đúng.}$$

Vậy đáp án sai là D. **Chọn D.**

Câu 53. Áp dụng lý thuyết về tính chất của tích có hướng, ta có $\|[\vec{u}, \vec{v}]\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Vậy A là đáp án sai. **Chọn A.**

Câu 54. **Chọn B.**

Câu 55. Kiểm tra ta thấy chỉ có bộ B thỏa mãn.

Thật vậy, ta có $\vec{a} = (4; 3; 4)$, $\vec{b} = (2; -1; 2) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = (10; 0; -10)$.

Suy ra $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 10.1 + 0.2 - 10.1 = 0$. **Chọn B.**

Câu 56. Nhận thấy $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -35 \neq 0$ nên $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Ta có $\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (7, 10, 1) \\ \vec{c} + \vec{d} = (7, 10, 1) \end{cases}$. Suy ra $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c} + \vec{d}|$ và $\vec{d} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Vậy chỉ có câu D là sai. **Chọn D.** (Bạn đọc có thể kiểm tra trực tiếp)

Câu 57. Dựa vào lý thuyết về tích có hướng của hai vector, suy ra $\begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 58. Ta có: $\begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = (-1; -3; -7) \\ \vec{c} = (1; -5; 2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. Suy ra $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. **Chọn C.**

Câu 59. Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-m + 4, -3m - 2, 7)$.

Để $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ thì $\begin{cases} -m + 4 = 5 \\ -3m - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$. **Chọn A.**

Câu 60. Ta có: $[\vec{u}, \vec{w}] = (-3; -1; 5)$

Để ba vector đồng phẳng thì $[\vec{u}, \vec{w}] \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -3m - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$. **Chọn D.**

Câu 61. Ta có $\begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = (m - 4; 2m + 1; -m^2 - m + 2) \\ \vec{c} = (0; m - 2; 2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -5m + 2$.

Để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$. **Chọn A.**

Câu 62. Ta có $\begin{cases} [\vec{a}, \vec{b}] = (-12, -2, -8) \\ \vec{c} = (m - 2, m^2, 5) \end{cases} \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -2m^2 - 12m - 16$.

Để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 12m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -4 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 63. Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1; m + 2; p)$.

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2)$.

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 2p = 3$. **Chọn C.**

Câu 64. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 4; -4)$, $\overrightarrow{AD} = (a; b; -4)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 4; 7)$.

Để hai đường thẳng AD và BC cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng
 $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 7$. **Chọn A.**

Câu 65. Gọi $M(x; 0; 0) \in Ox$. Mà $M = Ox \cap (ABC)$ nên bốn điểm A, B, C, M đồng phẳng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (6; 0; 3)$, $\overrightarrow{AM} = (x-1; -2; 1)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-6; 12; 12)$.

Bốn điểm A, B, C, M đồng phẳng

$\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1) + 12(-2) + 12 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow M(-1; 0; 0)$. **Chọn A.**

Câu 66. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 0)$ nên bài giải sai ở Bước 1. **Chọn B.**

Câu 67. Gọi I là trung điểm của AB , ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Khi đó $[(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}), \overrightarrow{AC}] = \vec{0} \Leftrightarrow [2\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. **Chọn B.**

Câu 68. Diện tích $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \| [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 69. Diện tích $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \| [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Độ dài đường cao $AH = \frac{2S}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$. **Chọn A.**

Câu 70. Điểm $M \in Oy$ nên $M(0; m; 0)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (-2; m; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 0; 0)$.

Suy ra $[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}] = (0; 0; -2m)$. Theo giả thiết

$S_{\Delta MBC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \| [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}] \| = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |-2m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 3; 0) \\ M(0; -3; 0) \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 71: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a-1; b-2; c+1) \\ \overrightarrow{BH} = (a-2; b-1; c-1) \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -1; 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-2; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -5; -2)$.

Do H là trực tâm của tam giác

$$\begin{aligned}
 ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-1) + (c+1) = 0 \\ -1(a-2) - 1(b-1) + 3(c-1) = 0 \\ -1(a-1) - 5(b-2) - 2(c+1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + c = -3 \\ -a - b + 3c = 0 \\ -a - 5b - 2c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} . \text{ Do đó } a + b + c = 4 . \text{ Chọn A.}
 \end{aligned}$$

Câu 72. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6)$. Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3)$.

Diện tích hình bình hành $S_{\square ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{349}$. **Chọn B.**

Câu 73. Do $ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BD , suy ra $D(1; -1; 1)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 1; 1) \\ \overrightarrow{AD} = (0; -1; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (1; 0; -1).$$

Diện tích của hình bình hành $S_{\square ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 74. Áp dụng công thức $V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 75. Gọi $D(0; b; 0)$.

$$\text{Áp dụng công thức } V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 5 \Leftrightarrow |-4(b-1) - 2| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -7 \\ b = 8 \end{cases} . \text{ Chọn C.}$$

Câu 76. Diện tích tam giác $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{25}{2}$.

$$\text{Thể tích tứ diện } V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{25}{3}.$$

$$\text{Suy ra độ dài đường cao } h = d[D, (ABC)] = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = 2 . \text{ Chọn C.}$$

Câu 77. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (4; 2; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (2; -4; 0)$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Suy ra $ABCD$ là hình vuông. **Chọn B.**

Câu 78. Ta có $BC = \sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{2}$. Suy ra tam giác BCD đều.

Vậy D là đáp án sai. **Chọn D.**

Câu 79. Nhận thấy ba vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ có giá cùng song song với mặt phẳng $(BCC'B')$ nên ba vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ đồng phẳng. **Chọn A.**

Câu 80. Do $ABCD.A'B'C'D'$ nên ta có $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $A'(7; 0; -5)$.

Và $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ nên suy ra $B'(6; -1; -1)$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1; 1; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; 1; 4)$ và $\overrightarrow{BB'} = (6; -1; 1)$.

Thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{BA} \right| = 38$. **Chọn B.**

Câu 81. Chọn A.

Câu 82. Ta có: $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$

$$\text{hay } (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16.$$

Do đó mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = 4$. **Chọn A.**

Câu 83. Phương trình $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 2 = 0$ vắng x và y nên tâm mặt cầu này nằm trên trục Oz .

Ngoài ra ta có thể chuyển phương trình mặt cầu (S_2) về dạng: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 11$, suy ra tâm $I(0; 0; -3) \in Oz$.

Chọn B.

Nhận xét: Trong phương trình mặt cầu, nếu vắng đồng thời hai hệ số của biến bậc nhất nào thì tâm của mặt cầu nằm trên trục tọa độ không chứa tên của những biến đó.

Câu 84. Phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ vắng z nên tâm của mặt cầu này nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

Ngoài ra ta có thể chuyển phương trình mặt cầu (S_1) về dạng:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 7, \text{ suy ra tâm } I(-1; 2; 0) \in (Oxy). \text{ **Chọn A.**}$$

Nhận xét: Trong phương trình mặt cầu, nếu vắng hệ số của biến bậc nhất nào thì tâm của mặt cầu đó nằm trên mặt phẳng tọa độ không chứa tên của biến đó.

Câu 85. Bán kính $R = d[I, Ox] = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} = 5$. **Chọn B.**

Câu 86. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

$$\text{hay } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

Do đó mặt cầu (S) có bán kính $R = 3$. Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 36\pi$. **Chọn C.**

Câu 87. Xét đáp án B, ta có

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x - 2y + \frac{4}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 > 0. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 88. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2az + 6a = 0$

$$\text{hay } (S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-a)^2 = a^2 - 6a + 20 > 0.$$

Do đó bán kính mặt cầu : $R = \sqrt{a^2 - 6a + 20}$.

$$\text{Để } 2R = 12 \Leftrightarrow R = 6 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 6a + 20} = 6 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 8 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 89. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$

$$\text{hay } (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-a)^2 = a^2 - 10a + 5.$$

Để (S) là phương trình của mặt cầu $a^2 - 10a + 5 > 0$. (*)

Khi đó mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{a^2 - 10a + 5}$.

Chu vi đường tròn lớn của mặt cầu (S) là: $P = 2\pi R = 2\pi\sqrt{a^2 - 10a + 5}$.

Theo giả thiết:

$$2\pi\sqrt{a^2 - 10a + 5} = 8\pi \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 10a + 5} = 4 \Leftrightarrow a^2 - 10a - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 90. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - (2m-2)x + 3my + (6m-2)z - 7 = 0$

$$\text{hay } (S): \left[x - (m-1)\right]^2 + \left[y + \frac{3m}{2}\right]^2 + \left[z + (3m-1)\right]^2 = 7 + (m-1)^2 + \left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (3m-1)^2 > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra bán kính } R &= \sqrt{7 + (m-1)^2 + \left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (3m-1)^2} = \sqrt{\frac{49m^2}{4} - 8m + 9} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}m - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{377}{49}} \geq \frac{\sqrt{377}}{7}. \text{ Chọn B.} \end{aligned}$$

Câu 91. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình ta thấy đường tròn giao tuyến có

tâm $J(1, 2, 0) \in (Oxy)$ và có bán kính $r = \sqrt{5}$.

Chọn A.

Câu 92. Chọn C.

Câu 93. Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Suy ra tọa độ tâm mặt cầu cần tìm là $(0; 3; -1)$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-4)^2 + (-3-1)^2} = 6 \Rightarrow R = \frac{1}{2}AB = 3.$$

Do đó phương trình mặt cầu đường kính AB là $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$. **Chọn D.**

Câu 94. Gọi $R > 0$ là bán kính mặt cầu (S) .

$$\text{Ta có } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Leftrightarrow R^3 = 729 \Leftrightarrow R = 9.$$

Suy ra phương trình của mặt cầu (S) là $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. **Chọn A.**

Câu 95. Bán kính mặt cầu: $R = d[I, (Oyz)] = |x_I| = 2$.

Do đó phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$. **Chọn C.**

Câu 96. Gọi tâm mặt cầu (S) là $I(a; 0; b) \in (Oxz)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4 + b^2 = (a-2)^2 + 9 + (b-1)^2 \\ a^2 + 4 + b^2 = a^2 + 9 + (b-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; 0; 3) \\ R = \sqrt{14} \end{cases}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 97. Gọi $I(a; 0; 0) \in Ox$ với $a > 0$ là tâm của (S) .

Theo giả thiết, ta có $d[I, (Oyz)] = R \Leftrightarrow |x_I| = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. **Chọn C.**

Câu 98. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = IB^2 \\ IO^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = (a-2)^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-4)^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4 = 0 \\ -8b + 16 = 0 \\ -8c + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $R = IO = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. **Chọn B.**

Cách nhanh. Ta thử tọa độ các điểm vào các phương trình. Cụ thể thấy tọa độ điểm $O(0; 0; 0)$ chỉ thỏa mãn B.

Câu 99. Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 = MB^2 + MC^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2. \end{aligned}$$

Suy ra tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn là mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 100. Phương trình $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z = 0$ vắng hệ số tự do nên mặt cầu của nó đi qua gốc tọa độ O . **Chọn C.**

Câu 101. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 3$.

Xét điểm $P(-1; 6; -1)$, ta có $\overrightarrow{IP} = (-2; 4; -4)$. Suy ra $IP = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6 > R$.

Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu (S) . **Chọn C.**

Câu 102. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;1)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

Xét điểm $M(0;1;-1)$, ta có $\overrightarrow{IM} = (-3;-1;-2)$. Suy ra $IM = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} = R$.

Do đó điểm M thuộc mặt cầu (S) . **Chọn A**

Câu 103. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;2)$, bán kính $R = 5$.

Xét điểm Q , ta có $\overrightarrow{IQ} = (1;2;-2)$. Suy ra $IQ = \sqrt{1+4+4} = 3 < R$.

Do đó điểm Q nằm bên trong mặt cầu (S) . **Chọn D.**

Câu 104. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

$$\text{hay } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14.$$

Suy ra (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

Ta có $OI = \sqrt{14} = R$, $IA = 1 < R$, $IB = \sqrt{26} > R$.

Vậy trong ba điểm đã cho nhận thấy có một điểm $A(2;2;3)$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 105. Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$

$$\text{hay } (S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 14.$$

Suy ra (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

Điểm A nằm trong khối cầu $\Leftrightarrow IA < R \Leftrightarrow IA^2 < R^2 \Leftrightarrow (-1)^2 + (1-a)^2 + (-3)^2 < 14$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 3 \end{cases}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 106. Mặt cầu (S) có tâm $I(0;4;1)$, bán kính $R = 6$.

Ta có $d[I, (Oxy)] = |z_I| = 1 < R$ và $I(0;4;1) \notin (Oxy)$ (do $z_I = 1 \neq 0$). **Chọn A.**

Câu 107. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;5)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $d[I, (Oxy)] = |z_I| = 5 > R$, $d[I, (Oyz)] = |x_I| = 1 < R$, $d[I, (Oxz)] = |y_I| = 2 = R$.

Vậy chỉ có mặt phẳng (Oyz) cắt mặt cầu (S) . **Chọn B.**

Câu 108. Xét mặt cầu $(S_4): x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$, có tâm $I(0;0;-4) \in Oz$ và $R = 4$.

Ta có $d[I, (Oxy)] = |z_I| = 4 = R$. **Chọn D.**

Câu 109. Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 4}$.

Đề (S) tiếp xúc với (Oyz) khi $d[I, (Oyz)] = R \Leftrightarrow |x_I| = R \Leftrightarrow 3 = \sqrt{m^2 + 4} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$.

Chọn B.

Câu 110. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -\sqrt{5}; 0)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 2m + 6}$.

Đề (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt khi $d[I, Oz] < R \Leftrightarrow \sqrt{x_I^2 + y_I^2} < R$

$$\Leftrightarrow 3 < \sqrt{m^2 + 2m + 6} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 111. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 0)$, bán kính $R = 3$.

Nhận thấy $d[I, Ox] = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} = 3 = R$. Vậy (S) tiếp xúc với trục Ox. **Chọn A.**

Câu 112. Xét mặt cầu $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ có tâm $I(1; 0; 0)$, bán kính $R = 1$.

Ta có $d[I, Oy] = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} = 1 = R$ và $d[I, Oz] = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} = 1 = R$. **Chọn B.**

Câu 113. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -2; -3)$, bán kính $R = \sqrt{14}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (2; 1; -3)$, suy ra $IA = \sqrt{14} = R$ nên $A \in (S)$.

Gọi $B(0; 0; c) \in Oz$ là điểm cần tìm. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; c+6)$.

Để tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow 2(-1) + 1 - 3(c+6) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{19}{3}$.

Chọn A.

Câu 114. Giả sử $B(a; b; c) \in (S)$.

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} B \in (S) \\ OA^2 = OB^2 \\ OA^2 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 4b - 4c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 32 \\ (4-a)^2 + (4-b)^2 + c^2 = 32 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được hai nghiệm $(a; b; c)$ là $(0; 4; 4)$ hoặc $(4; 0; 4)$. **Chọn D.**