

MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG		1
1.	NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM	1
A	SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG CÔNG THỨC	1
	Dạng 1. Áp dụng bảng công thức nguyên hàm	1
	Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng	2
	Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng	3
B	SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ	4
	Dạng 4. Đổi biến dạng hàm lũy thừa	4
	Dạng 5. Đổi biến dạng hàm phân thức	4
	Dạng 6. Đổi biến dạng hàm vô tỉ	4
	Dạng 7. Đổi biến dạng hàm lượng giác	5
	Dạng 8. Đổi biến dạng hàm mũ, hàm lô-ga-rit	6
	Dạng 9. Đổi biến dạng "hàm ẩn"	6
C	SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN	7
	Dạng 10. Nguyên hàm từng phần với " $u = \text{đa thức}$ "	7
	Dạng 11. Nguyên hàm từng phần với " $u = \text{lôgarit}$ "	7
	Dạng 12. Nguyên hàm kết hợp đổi biến số và từng phần	8
	Dạng 13. Nguyên hàm từng phần dạng "lặp"	8
	Dạng 14. Nguyên hàm từng phần dạng "hàm ẩn"	8
2.	TÍCH PHÂN VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN	10
A	TÍCH PHÂN DÙNG ĐỊNH NGHĨA	10
	Dạng 1. Sử dụng định nghĩa, tính chất tích phân	10
	Dạng 2. Tách hàm dạng tích thành tổng các hàm cơ bản	11
	Dạng 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng các hàm cơ bản	12
B	TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ	13
	Dạng 4. Đổi biến loại $t = u(x)$	13
	Dạng 5. Đổi biến loại $x = \varphi(t)$ (Lượng giác hóa)	14
	Dạng 6. Đổi biến số dạng hàm ẩn	15
C	TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN	16
	Dạng 7. Tích phân từng phần với " $u = \text{đa thức}$ "	16
	Dạng 8. Tích phân từng phần với " $u = \text{logarit}$ "	17
	Dạng 9. Tích phân hàm ẩn	18
3.	ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN	19
A	TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG	19
	Dạng 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$	19
	Dạng 2. Hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị hàm số	22
	Dạng 3. Toạ độ hoá một số "mô hình" hình phẳng thực tế	22
B	TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ, KHỐI TRÒN XOAY	23
	Dạng 4. Tính thể tích vật thể khi biết diện tích mặt cắt vuông góc với Ox	23

Dạng 5. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục Ox	24
Dạng 6. Bài tập tổng hợp	26
C MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG	27

§ 1. NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

A SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG CÔNG THỨC

DẠNG 1. Áp dụng bảng công thức nguyên hàm

Phương pháp giải.

Câu 1. Tính nguyên hàm $\int x^2 dx$.

- A. $3x^2 + C$. B. $2x + C$. C. $x^3 + C$. D. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

- A. $20x^3 - 12x + C$. B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.
C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$. D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Câu 3. Tính nguyên hàm $I = \int \left(x^2 + \frac{2}{x} - 3\sqrt{x} \right) dx$ với $x > 0$.

- A. $I = \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| + 2\sqrt{x^3} + C$. B. $I = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + 2\sqrt{x^3} + C$.
C. $I = \frac{x^3}{3} - 2\ln x - 2\sqrt{x^3} + C$. D. $I = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| - 2\sqrt{x^3} + C$.

Câu 4. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$. Tính $I = \int [3f(x) + 2x] dx$

- A. $I = 3F(x) + 2 + C$. B. $I = 3F(x) + x^2 + C$.
C. $I = 3F(x) + 2x + C$. D. $I = 3F(x) + x + C$.

Câu 5. Cho $\int f(x) dx = x^2 + C_1$ và $\int g(x) dx = \frac{x^2}{3} + C_2$. Tìm nguyên hàm của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.

- A. $\int h(x) dx = \frac{x^2}{3} + C$. B. $\int h(x) dx = \frac{2x^2}{3} + C$.
C. $\int h(x) dx = -\frac{x^2}{3} + C$. D. $\int h(x) dx = -\frac{2x^2}{3} + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\cos^2 x}$ là

- A. $x^3 + \cot x + C$. B. $x^3 + \tan x + C$. C. $6x - \cot x + C$. D. $6x + \tan x + C$.

Câu 7. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+1}$ bằng

- A. $-\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$. B. $-\ln|2x+1| + C$. C. $\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$. D. $\ln|2x+1| + C$.

Câu 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$. B. $F(3) = \ln 2 + 1$. C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $y = (2x + 1)^{2019}$ là

- A. $\frac{(2x+1)^{2018}}{2018} + C$. B. $\frac{(2x+1)^{2020}}{4040} + C$. C. $\frac{(2x+1)^{2020}}{2020} + C$. D. $\frac{(2x+1)^{2018}}{4036} + C$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{4x-2}$

- A. $F(x) = \frac{3}{4}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$. B. $F(x) = \frac{2}{3}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$.
C. $F(x) = \frac{3}{16}(4x-2)\sqrt[3]{4x-2} + C$. D. $F(x) = \frac{1}{3}(4x-2)^{-\frac{2}{3}} + C$.

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- A. $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. B. $\cos 3x + C$. C. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$. D. $-\cos 3x + C$.

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

- A. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C$. B. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C$.
C. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C$. D. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$.

- A. $(2x+1)3^{2x} + C$. B. $\frac{3^{2x+1}}{\ln 3} + C$. C. $3^{2x+1}\ln 3 + C$. D. $\frac{3^{2x+1}}{\ln 9} + C$.

Câu 14. Biết $\int f(x) dx = -x^2 + 2x + C$. Tính $\int f(-x) dx$.

- A. $x^2 + 2x + C'$. B. $-x^2 + 2x + C'$. C. $-x^2 - 2x + C'$. D. $x^2 - 2x + C'$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - e^x + 1 - m$. Biết $f(0) = 2, f(2) = 1 - e^2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; 6)$. B. $(5; +\infty)$. C. $(-2; 4)$. D. $(3; 5)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ và $f(0) = 1, f(1) = 3$. Tính $f(-1)$.

- A. $f(-1) = -5$. B. $f(-1) = 3$. C. $f(-1) = -3$. D. $f(-1) = -1$.

Câu 17. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- A. 1458 m^3 . B. 1488 m^3 . C. 1450 m^3 . D. 1468 m^3 .

DẠNG 2. Tách hàm dạng tích thành tổng

Phương pháp giải.

Câu 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + 3x^3)$ là

- A. $2x\left(x + \frac{3}{4}x^4\right) + C$. B. $x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$.
C. $x^2\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right) + C$. D. $x^2\left(x + \frac{3}{4}x^3\right) + C$.

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

- A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$. B. $F(x) = 2x + 3 + C$.
C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$. D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Câu 20. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$.

- A. $\int f(x) dx = e^x + 1 + C$. B. $\int f(x) dx = e^x + x + C$.

C. $\int f(x) dx = -e^x + x + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + C.$

Câu 21. Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x \cos x$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right).$

B. $F(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} \right).$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 4x \right).$

D. $F(x) = \frac{1}{5} \sin 5x \sin x.$

Câu 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

B. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

C. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

D. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

DẠNG 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng

Phương pháp giải.

Câu 23. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln|x| + x + 2.$

B. $F(x) = \ln|x| + x^2 - 2.$

C. $F(x) = \ln|x| + 2x^2 + 1.$

D. $F(x) = \ln|x| + x^2 + 2.$

Câu 24. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^3}, (x \neq 0).$

A. $F(x) = x - 3 \ln|x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$

B. $F(x) = x - 3 \ln|x| + \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$

C. $F(x) = x + 3 \ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

D. $F(x) = x - 3 \ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ là

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x-0,5} \right| + C.$

D. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C.$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$ có $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+4}$ thỏa mãn $f(3) = 1 - \ln 2$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $1 - \ln 2.$

B. $2.$

C. $1 + 3 \ln 2.$

D. $-1 + 3 \ln 2.$

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ là

A. $\frac{2019}{2020}.$

B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}.$

C. $2018 \frac{1}{2020}.$

D. $-\frac{2019}{2020}.$

Câu 28. Biết $\int \frac{2x+2}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{mx+n} + p \ln|2x+1| + C$ với m, n, p là các số hữu tỉ. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $-\frac{11}{2}.$

B. $\frac{11}{2}.$

C. $\frac{13}{2}.$

D. $-\frac{13}{2}.$

Câu 29. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x \in (0; 2018\pi)$ để $F(x) = 1$.

A. 2018.

B. 1009.

C. 2017.

D. 2016.

Câu 30. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Phương trình $F(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0; 2020)$?

A. 2086.

B. 643.

C. 2019.

D. 2020.

B SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

□ DẠNG 4. ĐỔI BIẾN dạng hàm lũy thừa

Phương pháp giải.

Câu 31. Tính $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$, ta được kết quả là

A. $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C.$

B. $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$

C. $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$

D. $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C.$

Câu 32. Cho $I = \int x(1 - x^2)^{10} dx$. Đặt $u = 1 - x^2$, khi đó viết I theo u và du ta được

A. $I = -\frac{1}{2} \int u^{10} du.$

B. $I = -2 \int u^{10} du.$

C. $I = \int 2u^{10} du.$

D. $I = \frac{1}{2} \int u^{10} du.$

Câu 33. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x + 1)^{2016}$.

A. $2018(x + 1)^{2018} - 2017(x + 1)^{2017} + C.$

B. $\frac{(x + 1)^{2018}}{2018} - \frac{(x + 1)^{2017}}{2017} + C.$

C. $2018(x + 1)^{2018} + 2017(x + 1)^{2017} + C.$

D. $\frac{(x + 1)^{2018}}{2018} + \frac{(x + 1)^{2017}}{2017} + C.$

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = 2x \cdot (x^4 + 2x^2 + 1)^3$. Biết $\int f(x) dx = \frac{a}{b}(x^2 + c)^d + C$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c + d$.

A. 0.

B. 15.

C. 16.

D. 22.

□ DẠNG 5. ĐỔI BIẾN dạng hàm phân thức

Phương pháp giải.

Câu 35. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

A. $\ln|x^2 - 2x - 3| + C.$

B. $(x - 1) \ln|x^2 - 2x - 3| + C.$

C. $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x - 3| + C.$

D. $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 3} + C.$

Câu 36. Đổi biến $t = x - 1$ thì $\int \frac{x}{(x - 1)^4} dx$ trở thành

A. $\int \frac{t - 1}{t^4} dt.$

B. $\int \frac{(t + 1)^4}{t} dt.$

C. $\int \frac{t + 1}{t^4} dt.$

D. $\int \frac{t + 1}{t} dt.$

Câu 37. Giả sử $\int \frac{(2x + 3) dx}{x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số). Tính tổng của các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. -3.

□ DẠNG 6. ĐỔI BIẾN dạng hàm vô tỉ

Phương pháp giải.

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ là

- A. $\frac{1}{3\sqrt{x^3+1}} + C$. B. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$. C. $\frac{2}{3\sqrt{x^3+1}} + C$. D. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

Câu 39. Xét nguyên hàm $I = \int x\sqrt{x+2} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+2}$ thì ta được

- A. $I = \int (t^4 - 2t^2) dt$. B. $I = \int (4t^4 - 2t^2) dt$.
C. $I = \int (2t^4 - 4t^2) dt$. D. $I = \int (2t^4 - t^2) dt$.

Câu 40. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx$.

- A. $I = -\frac{2}{\sqrt{x}+x} + C$. B. $I = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + C$.
C. $I = -\frac{2}{\sqrt{x}+x+1} + C$. D. $I = -\frac{1}{2\sqrt{x}+x} + C$.

□ DẠNG 7. ĐỔI BIẾN DẠNG HÀM LƯỢNG GIÁC

Phương pháp giải.

Câu 41. Đặt $t = \sqrt{1+\tan x}$ thì $\int \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x} dx$ trở thành nguyên hàm nào?

- A. $\int 2t dt$. B. $\int t^2 dt$. C. $\int dt$. D. $\int 2t^2 dt$.

Câu 42. Tìm nguyên hàm $I = \int \sin^4 x \cos x dx$.

- A. $\frac{\sin^5 x}{5} + C$. B. $\frac{\cos^5 x}{5} + C$. C. $-\frac{\sin^5 x}{5} + C$. D. $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$.

Câu 43. Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

- A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2+\sin x)^2} + C$. B. $f(x) = \frac{1}{2+\cos x} + C$.
C. $f(x) = -\frac{1}{2+\sin x} + C$. D. $f(x) = \frac{\sin x}{2+\sin x} + C$.

Câu 44. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$. Biết $F(0) = 0$. Khi đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

- A. 17. B. 2. C. 16. D. 3.

Câu 45. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

- A. $\frac{1}{3\cos^3 x} + C$. B. $\tan x + \tan^3 x + C$.
C. $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$. D. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Câu 46. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$.

□ DẠNG 8. ĐỔI BIẾN dạng hàm mũ, hàm lô-ga-rít*Phương pháp giải.*

Câu 47. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{2}(2 - e^{x^2}).$

C. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 2).$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + 5).$

Câu 48. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ là

A. $I = x - \ln|x| + C.$

B. $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C.$

C. $I = x + \ln|x| + C.$

D. $I = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

Câu 49. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx.$

A. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x + 1)^3} + C.$

B. $\sqrt{\ln x + 1} + C.$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{(\ln x + 1)^2} + C.$

D. $2\sqrt{\ln x + 1} + C.$

Câu 50. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là

A. $S = \{3\}.$

B. $S = \{2; 3\}.$

C. $S = \{-2; 3\}.$

D. $S = \{-3; 3\}.$

□ DẠNG 9. ĐỔI BIẾN dạng "hàm ẩn"*Phương pháp giải.*

Câu 51. Cho $\int f(x) dx = x\sqrt{x^2 + 1}$. Tìm $I = \int x \cdot f(x^2) dx.$

A. $I = x^2\sqrt{x^4 + 1} + C.$

B. $I = \frac{x^4}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C.$

C. $I = \frac{x^2}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C.$

D. $I = x^3\sqrt{x^4 + 1} + C.$

Câu 52. Biết $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C$, tìm nguyên hàm $\int f(x) dx.$

A. $\int f(x) dx = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\ln x + C.$

B. $\int f(x) dx = 2\sin^2 x + 2\ln x - \ln 2 + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sin^2 2x + 2\ln x - \ln 2 + C.$

D. $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

Câu 53 (THPT QUỐC GIA 2018). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}.$

B. $-\frac{2}{3}.$

C. $-\frac{19}{36}.$

D. $-\frac{2}{15}.$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(2) = \frac{1}{15}$ và $f'(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Tính $f(1) + f(2) + f(3).$

A. $\frac{11}{30}.$

B. $\frac{7}{15}.$

C. $\frac{11}{15}.$

D. $\frac{7}{30}.$

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28.

B. 22.

C. $\frac{19}{2}$.

D. 10.

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

DẠNG 10. Nguyên hàm từng phần với "u = đa thức"

Phương pháp giải.

Câu 56. Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

- A. $I = xe^x - e^x + C$. B. $I = xe^x + e^x + C$. C. $I = \frac{x^2}{2}e^x + C$. D. $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

Câu 57. Tìm họ nguyên hàm $f(x) = x \cos 2x dx$.

- A. $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$. B. $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C$.
C. $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C$. D. $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$.

Câu 58. Cho $I = \int x^2 \cdot \cos x dx$ và đặt $u = x^2$, $dv = \cos x dx$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $I = x^2 \sin x - \int x \sin x dx$. B. $I = x^2 \sin x + \int x \sin x dx$.
C. $I = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$. D. $I = x^2 \sin x + 2 \int x \sin x dx$.

Câu 59. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(e^x - \sin x)$ là

- A. $(x-1)e^x + x \cos x - \sin x + C$. B. $(x+1)e^x + x \cos x - \sin x + C$.
C. $(x-1)e^x + x \cos x + \sin x + C$. D. $(x-1)e^x - x \cos x - \sin x + C$.

Câu 60. Cho $\int \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = A x \tan x + B \ln |\cos x| + C$. Khi đó, giá trị của biểu thức $T = A^3 + B$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

DẠNG 11. Nguyên hàm từng phần với "u = lôgarit"

Phương pháp giải.

Câu 61. Tìm nguyên hàm $I = \int \ln x dx$

- A. $\frac{1}{x} + C$. B. $x \ln x - x + C$. C. $x \ln x + x + C$. D. $\frac{1}{x^2} + C$.

Câu 62. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ là

- A. $-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C$. B. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$. C. $\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C$. D. $\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 63. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+1) \ln x$ là

- A. $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$. B. $(x^2 + x) \ln x - x^2 - x + C$.
C. $(x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$. D. $(x^2 + x) \ln x - x^2 + x + C$.

Câu 64. Nguyên hàm $I = \int 2x \ln(1+x) dx$ có kết quả là

- A. $(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C$. B. $(x^2 + 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C$.

C. $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - (x^2 - x) + C.$

D. $(x^2 - 1) \ln(x + 1) - 2(x^2 - 2x) + C.$

DẠNG 12. Nguyên hàm kết hợp đổi biến số và từng phần

Phương pháp giải.

Câu 65. Biết rằng $\int x^3 e^{x^2} dx = P(x)e^{x^2} + C$ ($C \in \mathbb{R}$), trong đó $P(x)$ là một hàm số đa thức. Hãy tính giá trị của biểu thức $T = P(5)$.

A. $T = \frac{125}{2}.$

B. $T = 8.$

C. $T = 12.$

D. $T = \frac{124}{3}.$

Câu 66. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\cos x} \sin 2x$.

A. $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} \cos x + 2e^{\cos x} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2e^{\cos x} \cos x - 2e^{\cos x} + C.$

C. $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} + C.$

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}e^{\sin x} \cos 2x + C.$

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}$. Tìm $f(x)$, biết $f(0) = \sqrt{2}$.

A. $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}.$

B. $f(x) = \sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}.$

C. $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| - \sqrt{2}.$

D. $f(x) = 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{2}.$

Câu 68. Tìm một nguyên hàm $y = F(x)$ của hàm số $f(x) = (x^3 + 3x)e^{x^2}$ biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = F(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0 đi qua điểm $M(-1; 2)$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + 1.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + e^{x^2} - 1.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}.$

D. $F(x) = x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + 1.$

DẠNG 13. Nguyên hàm từng phần dạng "lặp"

Phương pháp giải.

Câu 69. Cho $F(x) = \int e^x \cdot \cos x dx = e^x (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = A + B$.

A. $P = -2.$

B. $P = -1.$

C. $P = 2.$

D. $P = 1.$

Câu 70. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$ có kết quả là

A. $I = \frac{1}{x \ln x} + C.$

B. $I = \frac{x^2}{\ln x} + C.$

C. $I = -\frac{x}{\ln x} + C.$

D. $I = \frac{x}{\ln x} + C.$

Câu 71. Biết $F(x) = \frac{1}{\ln x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $\int \left(f(x) + \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \right) dx = \frac{a(bx + m)}{\ln x} + C$, với $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $T = 2a + b + 3m$.

A. $T = 4.$

B. $T = 2.$

C. $T = 5.$

D. $T = 6.$

Câu 72. Biết $\int \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) e^{x - \frac{1}{x}} dx = x \cdot e^{\frac{ax^2 - b}{mx}} + C$, với $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + m$.

A. $a + b + m = 0.$

B. $a + b + m = 3.$

C. $a + b + m = 1.$

D. $a + b + m = -2.$

DẠNG 14. Nguyên hàm từng phần dạng "hàm ẩn"

Phương pháp giải.

Câu 73. Cho biết $\int f(x) \ln x dx = \ln x + 2x + C$. Tính $I = \int (2x + 1) f'(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{x} - 2 \ln x + 4x + C$.

B. $I = \frac{1}{x} - 2 \ln x + C$.

C. $I = \frac{1}{x} - \ln x + C$.

D. $I = \frac{1}{x} + \ln x + 4x + C$.

Câu 74. Biết $F(x) = -\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{f(x)}{x}$. Tính $\int f'(x) \ln x dx$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.

C. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + C$.

D. $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + C$.

Câu 75. Cho $F(x) = (x - 1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4 - 2x)e^x + C$.

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2 - x}{2}e^x + C$.

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2 - x)e^x + C$.

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x - 2)e^x + C$.

—HẾT—

§ 2. TÍCH PHÂN VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A TÍCH PHÂN DÙNG ĐỊNH NGHĨA

☐ DẠNG 1. Sử dụng định nghĩa, tính chất tích phân

Phương pháp giải.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. -6. B. 6. C. 12. D. -12.

Câu 2. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

- A. $P = 3$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 2$.

Câu 4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$

và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 7$. C. $I = 9$. D. $I = 8$.

Câu 5. Cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là hàm số lẻ thỏa $\int_{-3}^0 f(x) dx = 4$ và

$$\int_3^5 f(x) dx = 7. \text{ Tính } \int_{-3}^5 f(x) dx$$

- A. 15. B. 7. C. 4. D. -1.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tích phân

$$I = \int_0^1 [f'(x) - e^x] dx \text{ bằng}$$

- A. $1 - e$. B. $1 + e$. C. $3 - e$. D. $3 + e$.

Câu 7. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$ bằng

- A. $\frac{2 + \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{-2 + \sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{-2 - \sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$.

Câu 8. Tích phân $\int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

- A. $2^{2018} - 1$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. D. 2^{2018} .

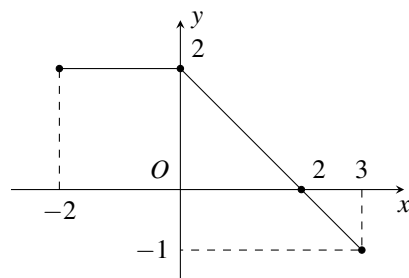
Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{nếu } x > 0 \\ \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

- A. $I = -2$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 1$. D. $I = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 3]$ và có đồ thị như

hình vẽ. Tính $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

- A. 2. B. 4. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.



Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$ trên $(-\infty; 2)$. Biết $F(1) = 2$, giá trị của $F(0)$ bằng

- A. $2 + \ln 2$. B. $\ln 2$. C. $2 + \ln(-2)$. D. $\ln(-2)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

- A. $S = \ln 4035$. B. $S = 4$. C. $S = \ln 2$. D. $S = 1$.

Câu 13. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

DẠNG 2. Tách hàm dạng tích thành tổng các hàm cơ bản

Phương pháp giải.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(1)$ bằng

- A. 4. B. $\frac{10}{3}$. C. 2. D. 20.

Câu 15. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \frac{b}{c\sqrt{2}}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a + b + c$.

- A. 40. B. 21. C. 12. D. 8.

Câu 16. Biết $\int_0^{\ln \sqrt{2}} (e^x + 1)^3 dx = a\sqrt{2} + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $a + b + c$.

- A. 6. B. 32. C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{17}{6}$.

☐ DẠNG 3. Tách hàm dạng phân thức thành tổng các hàm cơ bản*Phương pháp giải.*

Câu 17. Biết $\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3x+1} \right) dx = \frac{1}{6} \ln \frac{a}{b}$ trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} = 7$. B. $\frac{a}{9} + \frac{b}{4} = 7$. C. $a - b = 11$. D. $a + b < 22$.

Câu 18. Biết $I = \int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó $a + 2b$ bằng

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 7.

Câu 19. Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (4; 6). B. (8; 10). C. (2; 4). D. (6; 8).

Câu 20. Cho $I = \int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = 2$.

Câu 21. Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b + c = 4$. B. $a + b + c = -3$. C. $a + b + c = 2$. D. $a + b + c = 6$.

Câu 22. Biết $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 6x + 9} dx = \frac{a}{b} - \ln \frac{c}{d}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $T = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ bằng

- A. $\frac{79}{12}$. B. 41. C. $\frac{1429}{324}$. D. $\frac{1039}{12}$.

Câu 23. Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.

Câu 24. Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ với a, b là các số nguyên. Tính tổng $T = a + b + c$

- A. $T = -10$. B. $T = 8$. C. $T = 25$. D. $T = 17$.

Câu 25. Biết $I = \int_1^2 \frac{dx}{(2x+2)\sqrt{x} + 2x\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a - b + c$.

- A. $P = 24$. B. $P = 12$. C. $P = 18$. D. $P = 22$.

B TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

☐ DẠNG 4. ĐỔI BIẾN LOẠI $t = u(x)$

Phương pháp giải.

☑ Nhận dạng $I = \int_m^n f[u(x)] \cdot u'(x) dx$ (có $u(x)$ và đạo hàm của nó kèm theo là $u'(x)$).

☑ Các bước giải:

① Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$

② Đổi cận $\bullet x = m \Rightarrow t = u(m) \quad \bullet x = n \Rightarrow t = u(n)$

③ Chuyển $I = \int_{u(m)}^{u(n)} f(t) \cdot dt$. Sau đó tính kết quả.

Câu 26. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ và $u = \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = - \int_{-1}^0 u^2 du.$ B. $I = \int_0^1 u^2 du.$ C. $I = - \int_0^1 u^2 du.$ D. $I = 2 \int_0^1 u du.$

Câu 27. Cho tích phân $I = \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$. Khi đặt $t = \sqrt{x^2 + 9}$ thì tích phân đã cho trở thành

A. $I = \int_3^5 t dt.$ B. $I = \int_0^4 t dt.$ C. $I = \int_0^4 t^2 dt.$ D. $I = \int_3^5 t^2 dt.$

Câu 28. Tính $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$.

A. $\ln 2.$ B. $-\ln 2.$ C. $\ln \sqrt{2}.$ D. $-\ln \sqrt{2}.$

Câu 29. Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $\frac{1}{12}.$ B. $\frac{5}{12}.$ C. $-\frac{1}{3}.$ D. $\frac{1}{4}.$

Câu 30. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)} dx = a \ln \frac{3}{2} + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = 1.$ B. $2a + b = 1.$ C. $a^2 + b^2 = 4.$ D. $a + 2b = 0.$

Câu 31. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

A. $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1.$ B. $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1].$
C. $I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1].$ D. $I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1.$

Câu 32. Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng

- A. 9. B. 2. C. 1. D. 7.

Câu 33. Cho $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

- A. $S = -2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 34. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x + \cos x + 2x}{\sin x + 2} dx = \frac{\pi^2}{a} + \ln \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a \cdot b \cdot c$.

- A. $P = 24$. B. $P = 13$. C. $P = 48$. D. $P = 96$.

Câu 35. Cho $\int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = a \ln 5 + b \ln 2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + 2b + 4c$ bằng

- A. 0. B. -1. C. $-\frac{5}{8}$. D. 1.

Câu 36. Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = ae + b \ln(e+c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $P = a + 2b - c$.

- A. $P = -1$. B. $P = 1$. C. $P = -2$. D. $P = 0$.

Câu 37. Nếu $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx = \frac{a}{b} \ln c$, (với $a, b, c \in \mathbb{Z}, a > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a + 2b + 3c$ là

- A. 13. B. 14. C. 9. D. 11.

Câu 38. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$. B. $I = \int_0^1 \frac{1}{u^2} du$. C. $I = - \int_0^1 u^2 du$. D. $I = \int_0^1 u^2 du$.

Câu 39. Cho tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2+1) \ln x + 1}{x \ln x} dx = \frac{ae^4 + be^2}{2} + c + d \ln 2$. Chọn phát biểu đúng.

- A. $a = b = c = d$. B. $a = b^2 = \sqrt{c} = \frac{1}{d}$. C. $a = b^2 = \sqrt{d} = \frac{1}{c}$. D. $b = a^2 = \sqrt{d} = \frac{1}{c}$.

Câu 40. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{2x^3+3x}{x\sqrt{x^2+3}-4} dx = a - \frac{b}{c} \ln 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản.

Tính $a^2 + b + c$.

- A. $a^2 + b + c = 0$. B. $a^2 + b + c = 1$. C. $a^2 + b + c = -1$. D. $a^2 + b + c = 9$.

DẠNG 5. ĐỔI BIẾN LOẠI $x = \varphi(t)$ (Lượng giác hóa)

Phương pháp giải.

Câu 41. Đổi biến $x = 2 \sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt.$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}.$

Câu 42. Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt.$

B. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$

C. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$

D. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

Câu 43. Cho tích phân $I = \int_1^2 \sqrt{1 + 2x - x^2} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$, với a, b, c là số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

A. 21.

B. 18.

C. 9.

D. 16.

Câu 44. Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2+x^2} dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \pi$, với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

A. $a + b = 30$.

B. $a + b = 37$.

C. $a + b = 35$.

D. $a + b = 33$.

Câu 45. Tính tích phân $\int_2^{\sqrt{3}+2} \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$.

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

□ DẠNG 6. ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG HÀM ẨN

Phương pháp giải.

Câu 46. Cho $\int_0^4 f(x) dx = -1$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 f(4x) dx$.

A. $I = \frac{1}{4}$.

B. $I = -2$.

C. $I = -\frac{1}{4}$.

D. $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-4; 4]$. Biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx =$

4. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

Câu 48. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$, khi đó $\int_2^5 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 4.

Câu 49. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2018$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 2x dx$ bằng

A. 2018. B. 1009. C. -1009. D. -2018.

Câu 50. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x^3 + 3x + 1) = x + 2$. Tính $\int_1^5 f(x) dx$.

A. $\frac{37}{6}$. B. $\frac{527}{3}$. C. $\frac{41}{4}$. D. $\frac{464}{3}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x) dx = 8$ và $\int_0^5 f(x) dx = 4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x - 1|) dx$.

A. 6. B. $\frac{9}{4}$. C. 3. D. $\frac{11}{4}$.

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. 2. B. 6. C. 3. D. 1.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của hàm số $y = f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x = 0$ và $x = 1$ có phần đồ thị ở nửa trên trục hoành tạo với chiều dương trục Ox lần lượt các góc là 45° và 60° . Tính $I = \int_0^1 \frac{2f'(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2 + 1} dx$.

A. $I = \ln 2$. B. $I = 0$. C. $I = \ln 3$. D. $I = \ln 5$.

© TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

☐ DẠNG 7. Tích phân từng phần với "u = đa thức"

Phương pháp giải.

Câu 54. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$ bằng

A. $\frac{4 + \pi}{4\sqrt{2}}$. B. $\frac{2 - \pi}{2\sqrt{2}}$. C. $\frac{4 - \pi}{4\sqrt{2}}$. D. $\frac{2 + \pi}{2\sqrt{2}}$.

Câu 55. Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = a \cdot e^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $a + b$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 0. D. 1.

Câu 56. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a + b + c = 1$. B. $a - b + c = 0$. C. $2a + b + c = -1$. D. $a + 2b + c = 1$.

Câu 57. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$.

A. $T = 9$. B. $T = 13$. C. $T = 7$. D. $T = 11$.

Câu 58. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^a + 1}{b}$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $\sin a + \cos 2a + b$ bằng

A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

Câu 59. Biết $\int_0^{\frac{3}{2\sqrt{2}}} x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{c}} + d$, với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c + d$.

A. 0. B. $\frac{67}{2}$. C. $\frac{65}{2}$. D. 35.

DẠNG 8. Tích phân từng phần với "u = logarit"

Phương pháp giải.

Câu 60. Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\frac{9}{2}$. B. 18. C. 9. D. $\frac{27}{4}$.

Câu 61. Bằng cách đặt $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ thì tích phân $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ biến đổi thành kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx$. B. $\frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx$.
- C. $\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 + \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx$. D. $-\frac{x^3 \ln x}{3} \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx$.

Câu 62. Biết $I = \int_0^4 x \ln(2x+1) dx = \frac{a}{b} \ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 60$. B. $S = 70$. C. $S = 72$. D. $S = 68$.

Câu 63. Cho tích phân $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 6$. B. $P = -6$. C. $P = 5$. D. $P = 4$.

Câu 64. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{5}{6}$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Câu 65. Biết tích phân $\int_0^1 (2x-1) \ln(x^3+1) dx = \frac{a}{b} - c \ln 2$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 7.

B. 12.

C. -17.

D. 12.

Câu 66. Giả sử tích phân $\int_0^1 x \cdot \ln(2x+1)^{2017} dx = a + \frac{b}{c} \ln 3$. Với phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Lúc đó

A. $b+c = 6057$.

B. $b+c = 6059$.

C. $b+c = 6058$.

D. $b+c = 6056$.

□ DẠNG 9. Tích phân hàm ẩn

Phương pháp giải.

Câu 67. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x) \cdot f'(x) = x(x-2)e^x$. Tính $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$.

A. $I = -4$.

B. $I = e - 2$.

C. $I = 4$.

D. $I = 2 - e$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 x f'(2x) dx$.

A. 12.

B. 13.

C. 20.

D. 7.

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

Tính $I = \int_0^1 x^3 f'(x) dx$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. -3.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -12$.

B. $I = 8$.

C. $I = 1$.

D. $I = -8$.

Câu 71. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$, thỏa mãn điều kiện $f(0) = 6$ và $\int_0^1 (2x-2) f'(x) dx = 6$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. -3.

B. -9.

C. 3.

D. 6.

Câu 72. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$, $F(1) = 1$, $F(3) = 3$ và $\int_1^3 \frac{F(x)}{3x-1} dx = 4$. Tính $I = \int_1^3 \ln(3x-1) f(x) dx$.

A. $I = 8 \ln 2 + 12$.

B. $I = 8 \ln 2 - 4$.

C. $I = 8 \ln 2 - 12$.

D. $I = -81$.

—HẾT—

§ 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

DẠNG 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Phương pháp giải.

① Xác định 2 cận $x = a$ và $x = b$, với $a < b$;

② Diện tích được tính theo công thức $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

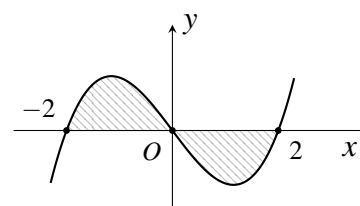
Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích hình phẳng (phần gạch chéo) được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $\int_{-2}^2 f(x) dx.$

B. $\int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$

C. $\int_2^0 f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx.$

D. $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$



Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{7}{3}.$

B. $S = \frac{8}{3}.$

C. $S = 7.$

D. $8.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 4$, $x = -1$, $x = 2$ là

A. $4.$

B. $\frac{32}{3}.$

C. $9.$

D. $\frac{17}{4}.$

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 3x^2$, $y = 2x + 5$, $x = -1$ và $x = 2$.

A. $S = \frac{256}{27}.$

B. $S = \frac{269}{27}.$

C. $S = 9.$

D. $S = 27.$

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

A. $S = \int_0^\pi \cos x dx.$

B. $S = \int_0^\pi \cos^2 x dx.$

C. $S = \int_0^\pi |\cos x| dx.$

D. $S = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx.$

Câu 6. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = a$, với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{1}{2}(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{7}{10}; 1\right).$

B. $\left(\frac{51}{50}; \frac{11}{10}\right).$

C. $\left(\frac{11}{10}; \frac{3}{2}\right).$

D. $\left(1; \frac{51}{50}\right).$

Câu 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x^2 + 1}$, $x = 1$ và trục Ox .

A. $\frac{3\sqrt{2} - 1}{5}.$

B. $\frac{5 - \sqrt{2}}{6}.$

C. $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$

D. $\frac{5 - 2\sqrt{2} - 1}{3}.$

Câu 8. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + x$.

A. $\frac{9\pi}{8}.$

B. $\frac{27}{8}.$

C. $\frac{9}{8}.$

D. $\frac{27\pi}{8}.$

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1): y = x^2 + 2x$ và $(C_2): y = x^3$.

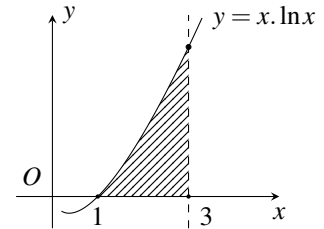
- A. $S = \frac{83}{12}$. B. $S = \frac{15}{4}$. C. $S = \frac{37}{12}$. D. $S = \frac{9}{12}$.

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 3}$ và hai trục tọa độ bằng

- A. $12 \ln 2 - \frac{3}{2}$. B. $\frac{256}{3}$. C. $17 + 12 \ln 3$. D. $16 + 12 \ln 3$.

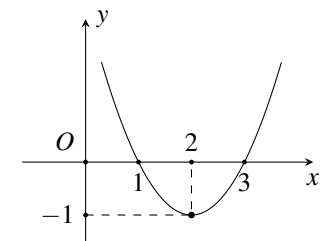
Câu 11. Cho hình phẳng (H) như hình vẽ (phần gạch sọc). Diện tích hình phẳng (H) là

- A. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$. B. 1.
C. $\frac{9}{2} \ln 3 - 4$. D. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$.



Câu 12. Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành.

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{2}{4}$.
C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

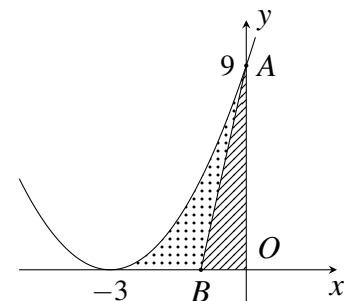


Câu 13. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = \ln \frac{9}{2}$. B. $k = \ln 4$. C. $k = \frac{2}{3} \ln 4$. D. $k = \ln 5$.

Câu 14. Xét hình phẳng $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x + 3)^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 0$. Gọi $A(0; 9)$, $B(b; 0)$ ($-3 < b < 0$). Tính giá trị của tham số b để đoạn thẳng AB chia $(\mathcal{H})$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

- A. $b = -\frac{1}{2}$. B. $b = -2$.
C. $b = -\frac{3}{2}$. D. $b = -1$.

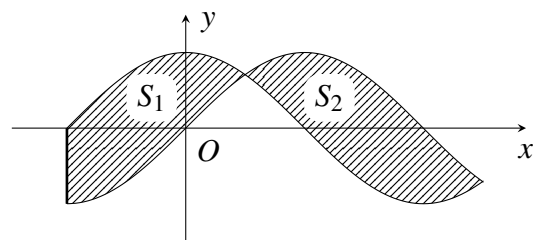


Câu 15. Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

- A. $m = 5$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

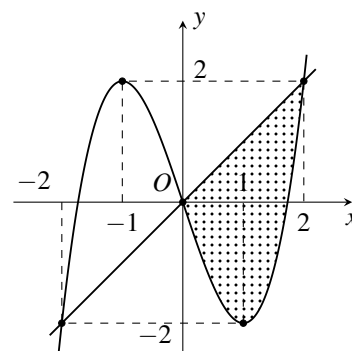
Câu 16. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ bên. Tính $S_1^2 + S_2^2$.

- A. $S_1^2 + S_2^2 = 10 - 2\sqrt{2}$.
B. $S_1^2 + S_2^2 = 10 + 2\sqrt{2}$.
C. $S_1^2 + S_2^2 = 11 - 2\sqrt{2}$.
D. $S_1^2 + S_2^2 = 11 + 2\sqrt{2}$.



Câu 17. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phần hình phẳng được tô đậm như hình bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số đa thức bậc ba và một đường thẳng. Diện tích S của phần tô đậm đó bằng bao nhiêu?

- A. $S = 8$ (đvdt). B. $S = 6$ (đvdt).
C. $S = 2$ (đvdt). D. $S = 4$ (đvdt).

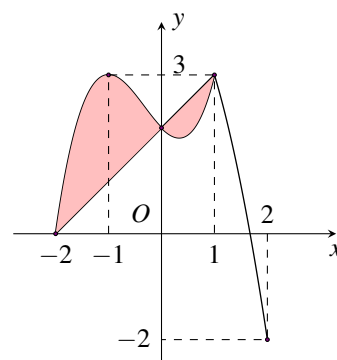


Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình

vẽ bên. Biết rằng diện tích miền tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_{-2}^0 f(x) dx =$

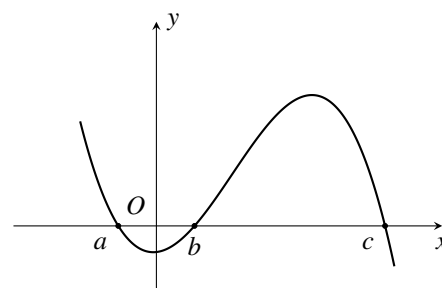
$\frac{14}{3}$. Tính $I = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$.

- A. $\frac{12}{25}$. B. $\frac{25}{12}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.



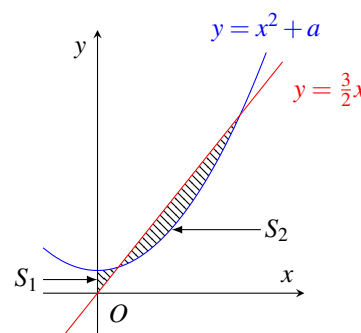
Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $f(c) > f(b) > f(a)$. B. $f(b) > f(a) > f(c)$.
C. $f(a) > f(c) > f(b)$. D. $f(c) > f(a) > f(b)$.



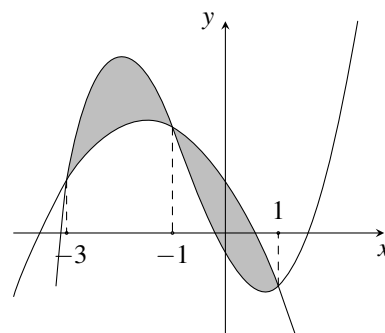
Câu 20. Cho đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{5}\right)$. D. $\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{7}\right)$.



Câu 21. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho bằng

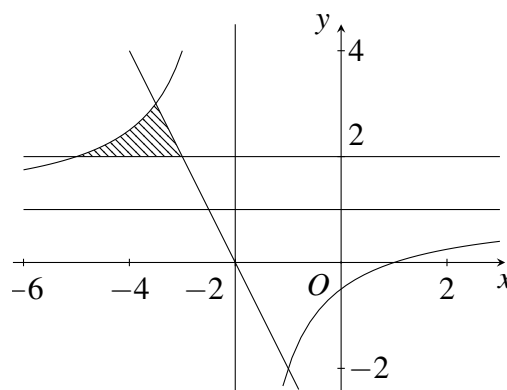
- A. 4. B. 5. C. 8. D. $\frac{9}{2}$.



DẠNG 2. Hình phẳng giới hạn bởi nhiều hơn hai đồ thị hàm số*Phương pháp giải.*

Câu 22. Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ và các đường thẳng $y = 2$, $y = -2x - 4$ (như hình vẽ bên).

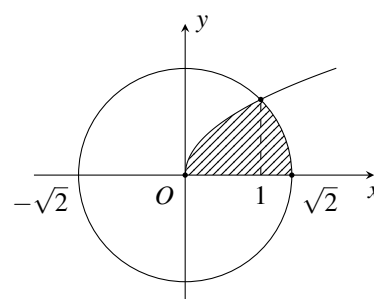
- A. $\frac{1}{4}$. B. $3\ln 3 - 2$.
C. $-\frac{5}{4} + 3\ln 2$. D. $\frac{1}{4} + 3\ln 2$.



Câu 23. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{x}$, nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{2-x^2}$ (với $0 \leq x \leq \sqrt{2}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).

Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{3\pi+2}{12}$. B. $\frac{4\pi+2}{12}$. C. $\frac{3\pi+1}{12}$. D. $\frac{4\pi+1}{6}$.



Câu 24. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx$. B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$. C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$. D. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx$.

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi - 1}{2}$. C. $\frac{\pi}{2} - 1$. D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

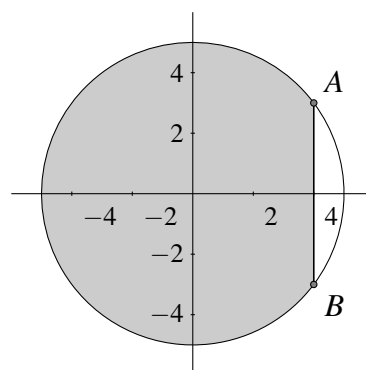
DẠNG 3. Toạ độ hoá một số "mô hình" hình phẳng thực tế*Phương pháp giải.*

Câu 26. Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m, trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

- A. 31904000. B. 23991000. C. 10566000. D. 17635000.

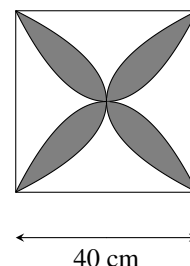
Câu 27. Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên, cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6 m vào hai đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền? (Tính theo đơn vị nghìn đồng và bỏ số thập phân).

- A. 3722. B. 7445.
C. 7446. D. 3723.



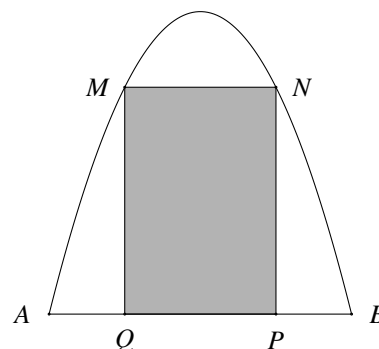
Câu 28. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người ta đã dùng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần tô đậm như hình vẽ). Diện tích của mỗi cánh hoa đó bằng

- A. 200 cm^2 . B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$. C. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$. D. $\frac{200}{3} \text{ cm}^2$.



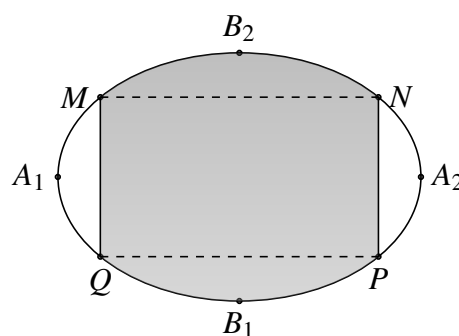
Câu 29. Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8 \text{ m}$. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần phía ngoài phong (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200.000 đồng, biết $MN = 4 \text{ m}$, $MQ = 6 \text{ m}$. Hỏi số tiền mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?

- A. 3.373.400 đồng. B. 3.434.300 đồng.
C. 3.437.300 đồng. D. 3.733.300 đồng.



Câu 30. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3 \text{ m}$.

- A. 7.322.000 đồng. B. 7.213.000 đồng.
C. 5.526.000 đồng. D. 5.782.000 đồng.



B TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ, KHỐI TRÒN XOAY

DẠNG 4. Tính thể tích vật thể khi biết diện tích mặt cắt vuông góc với Ox

Phương pháp giải.

Câu 31. Vật thể B giới hạn bởi mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt vật thể B với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq 2$) ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2 - x)$. Thể tích của vật thể B là

- A. $V = \frac{2}{3}\pi$. B. $V = \frac{2}{3}$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = \frac{4}{3}\pi$.

Câu 32. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa 2 mặt phẳng $x = 0, x = 3$, biết thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

- A. $V = 16$. B. $V = 17$. C. $V = 18$. D. $V = 19$.

Câu 33. Xét vật thể ($\mathcal{T}$) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1-x^2}$. Thể tích vật thể ($\mathcal{T}$) bằng

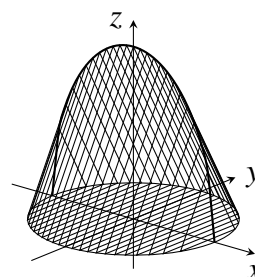
- A. $\frac{16\pi}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. π . D. $\frac{8}{3}$.

Câu 34. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36-3x^2}$.

- A. $V = \frac{81\pi}{4}$. B. $V = \frac{81}{4}$. C. $V = 81\pi$. D. $V = 81$.

Câu 35. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.

- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.



DẠNG 5. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng quay quanh trục Ox

Phương pháp giải.

Câu 36. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{16\pi}{5}$. B. $\frac{17\pi}{5}$. C. $\frac{18\pi}{5}$. D. $\frac{5\pi}{18}$.

Câu 37. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2$, $x = 5$ quanh trục Ox bằng

- A. $\pi \int_2^5 \sqrt{x-1} dx$. B. $\pi \int_2^5 (x-1) dx$. C. $\pi \int_2^5 (y^2+1)^2 dx$. D. $\int_2^5 (x-1) dx$.

Câu 38. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

- A. $V = \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{4}{3}\pi$. C. $V = \frac{16}{15}\pi$. D. $V = \frac{16}{15}$.

Câu 39. Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ khi quay quanh Ox là

- A. $\frac{\pi}{4}(e^2+1)$. B. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. C. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$. D. $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$.

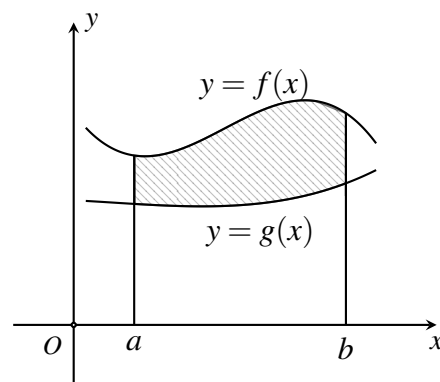
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$



Câu 41. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 - 2x + 6$.

A. $3\pi.$

B. $\pi - 1.$

C. $\pi.$

D. $2\pi.$

Câu 42. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$, $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3}\pi.$

B. $V = \frac{3}{2}\pi.$

C. $V = \frac{32}{15}\pi.$

D. $V = \frac{11}{6}\pi.$

Câu 43. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x$ xoay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx.$

B. $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_0^1 x^4 dx.$

C. $\pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx.$

D. $\pi \int_0^1 |x^2 - x| dx.$

Câu 44. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ và $x = 4$. Quay hình phẳng (S) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{43\pi}{2}.$

B. $\frac{38\pi}{3}.$

C. $\frac{40\pi}{3}.$

D. $\frac{41\pi}{3}.$

Câu 45. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - ax$ với trục hoành ($a \neq 0$). Quay hình (H) xung quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{16\pi}{15}$. Tìm a .

A. $a = -3.$

B. $a = -2.$

C. $a = 2.$

D. $a = \pm 2.$

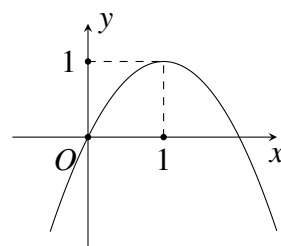
Câu 46. Cho hàm bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Ox quanh trục Ox .

A. $\frac{4\pi}{3}.$

B. $\frac{4\pi}{5}.$

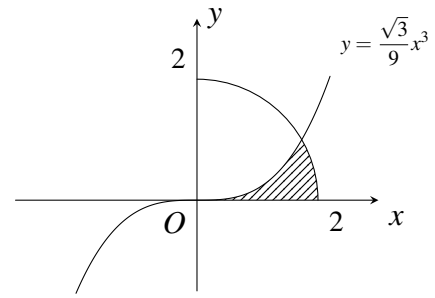
C. $\frac{16\pi}{15}.$

D. $\frac{16\pi}{5}.$



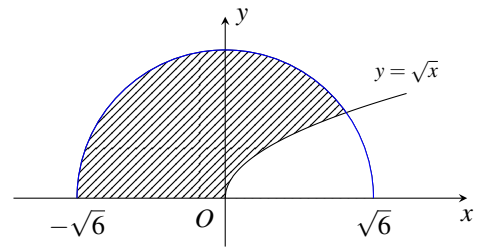
Câu 47. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

- A. $P = 52$. B. $P = 40$. C. $P = 46$. D. $P = 34$.



Câu 48. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ ($-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox

- A. $V = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$. B. $V = 8\pi\sqrt{6} - 2\pi$.
C. $V = 8\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}$. D. $V = 8\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$.



Câu 49. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

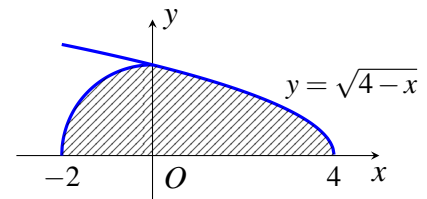
- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{15}$. D. $\frac{4\pi}{15}$.

DẠNG 6. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải.

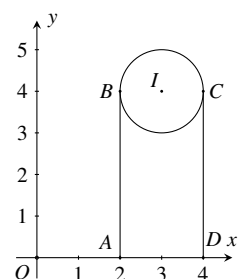
Câu 50. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $\frac{1}{4}$ đường tròn có bán kính bằng 2, đường cong $y = \sqrt{4-x}$ và trục hoành (miền gạch sọc như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox.

- A. $V = \frac{77\pi}{6}$. B. $V = \frac{53\pi}{6}$. C. $V = \frac{67\pi}{6}$. D. $V = \frac{40\pi}{3}$.



Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C) quanh trục hoành.

- A. $5\pi^2$. B. $9\pi^2$.
C. $8\pi^2$. D. $6\pi^2$.

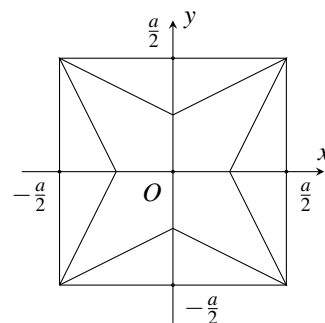


Câu 52. Du khách ghé thăm Bình Định không thể bỏ qua địa danh Tháp Bánh Ít nổi tiếng. Tháp có hai cửa, mỗi cửa có hình dáng là một cung Parabol nằm cùng một trục (hướng Đông - Tây). Hai cửa cách nhau 8 mét, có chiều cao 4 mét, lối đi rộng 1 mét thông hai cửa với nhau. Hãy tính thể tích phần không gian lối đi giới hạn giữa hai cửa.

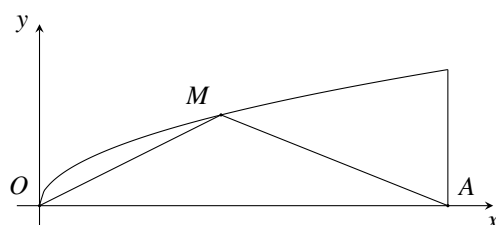
- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{128\pi}{15}$. C. $V = \frac{64}{3}$. D. $V = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 53. Bên trong hình vuông cạnh a , dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox .

A. $V = \frac{5\pi a^3}{24}$. B. $V = \frac{5\pi a^3}{48}$. C. $V = \frac{5\pi a^3}{96}$. D. $V = \frac{7\pi a^3}{24}$.



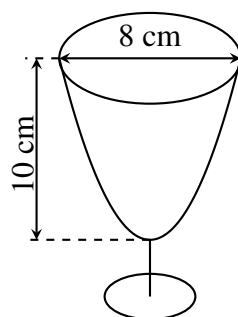
Câu 54. Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C) , đường thẳng $x = 9$, Ox . Cho điểm M thuộc (C) , $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh Ox . Biết $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi (C) , OM (hình vẽ không thể hiện chính xác điểm M).



A. $S = 3$. B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{4}{3}$.

Câu 55. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay với chiều cao (của phần đựng rượu) bằng 10 cm và đường kính miệng cốc bằng 8 cm (tham khảo hình mô phỏng ở bên). Biết thiết diện dọc (bổ dọc cốc thành hai phần bằng nhau) là một parabol. Tính dung tích V của chiếc cốc (làm tròn đến hai chữ số thập phân, coi thể tích thành cốc là không đáng kể).

A. $V \approx 320 \text{ cm}^3$. B. $V \approx 1005,31 \text{ cm}^3$.
C. $V \approx 251,33 \text{ cm}^3$. D. $V \approx 502,65 \text{ cm}^3$.

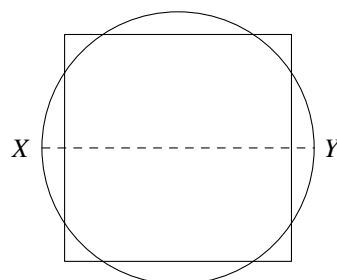


Câu 56. Một vật thể có hai đáy trong đó có đáy lớn là một elip có độ dài trục lớn bằng 8, trục bé là 4 và đáy bé có độ dài trục lớn là 4 và trục bé là 2. Thiết diện vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai đáy luôn là một elip, biết chiều cao của vật thể là 4. Tính thể tích của vật thể này.

A. $\frac{55\pi}{3}$. B. $\frac{56\pi}{3}$. C. $\frac{57\pi}{3}$. D. $\frac{58\pi}{3}$.

Câu 57. Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sao cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục XY .

A. $V = \frac{260\pi}{3} \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{290\pi}{3} \text{ cm}^3$.
C. $V = \frac{520\pi}{3} \text{ cm}^3$. D. $V = \frac{580\pi}{3} \text{ cm}^3$.



© MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 58. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ m/s. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

A. 20 m. B. 2 m. C. 0,2 m. D. 10 m.

Câu 59. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng

tốc.

A. $\frac{45}{2}$ m.

B. $\frac{201}{4}$ m.

C. $\frac{81}{4}$ m.

D. $\frac{65}{2}$ m.

Câu 60. Một chuyến máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ m/s với t là thời gian được tính bằng giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 m/s thì nó rời đường băng. Tính quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng.

A. $\frac{2500}{3}$ m.

B. 2000 m.

C. 500 m.

D. $\frac{4000}{3}$ m.

Câu 61. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s² (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 22 m/s.

B. 15 m/s.

C. 10 m/s.

D. 7 m/s.

Câu 62. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $s = 168$ (m).

B. $s = 144$ (m).

C. $s = 166$ (m).

D. $s = 152$ (m).

Câu 63. Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a m/s thì người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a$ trong đó thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi vận tốc ban đầu a của ô tô bằng bao nhiêu, biết từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn ô tô đi được 40 m.

A. $a = 40$.

B. $a = 20$.

C. $a = 25$.

D. $a = 10$.

Câu 64. Trên đoạn thẳng AB dài 200 m có hai chất điểm X, Y. Chất điểm X xuất phát từ A, chuyển động thẳng hướng đến B với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{80}t^2 + \frac{1}{3}t$ m/s, trong đó t giây là khoảng thời gian tính từ lúc X bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, chất điểm Y xuất phát từ B và xuất phát chậm hơn 10 giây so với X; Y chuyển động thẳng theo chiều ngược lại với X và có gia tốc bằng a m/s² (a là hằng số). Biết rằng hai chất điểm X, Y gặp nhau tại đúng trung điểm đoạn thẳng AB. Gia tốc của chất điểm Y bằng

A. 2 m/s².

B. $1,5$ m/s².

C. $2,5$ m/s².

D. 1 m/s².

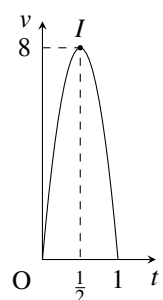
Câu 65. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.

A. $S = 5,3$ km.

B. $S = 4,5$ km.

C. $S = 4$ km.

D. $S = 2,3$ km.



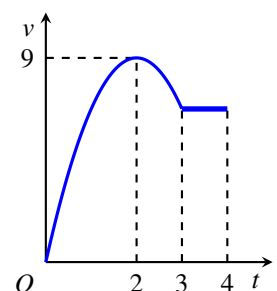
Câu 66. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.

A. 28,5 (km).

B. 27 (km).

C. 26,5 (km).

D. 24 (km).



Câu 67. Hai người A và B ở cách nhau 180 (m) trên một đoạn đường thẳng và cùng chuyển động thẳng theo một hướng với vận tốc biến thiên theo thời gian, A chuyển động với vận tốc $v_1(t) = 6t + 5$ (m/s), B chuyển động với vận tốc $v_2(t) = 2at - 3$ (m/s) (a là hằng số), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A, B bắt đầu chuyển động. Biết rằng lúc đầu A đuổi theo B và sau 10 giây thì đuổi kịp. Hỏi sau 20 (giây), A cách B bao nhiêu mét?

A. 720 m.

B. 360 m.

C. 320 m.

D. 380 m.

—HẾT—