50 Bài Toán
Ôn luyện
TỐT NGHIỆP THPT

2020

Tóm tắt kiến thức cơ bản

Câu hỏi trắc nghiệm có lời giải chi tiết

Tài liệu lưu hành nội bộ

Table of Contents

DẠNG-1-HOÁN-VỊ-CHỈNH-HỢP-TỔ-HỢP 6
DẠNG-2-CẤP-SỐ-CỘNG-CẤP-SỐ-NHÂN 23
DẠNG-3-GIẢI-BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH-BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH-MŨ-LÔGARIT 62
DẠNG-4-TÍNH-THỂ -TÍCH-KHỐI-LĂNG-TRỤ-ĐỨNG 81
DẠNG-5 HÀM -SỐ- MŨ – LÔGARÍT 106
DẠNG-6-NGUYÊN-HÀM 124
DẠNG-7 THỂ -TÍCH- KHỐI -ĐA -DIỆN- (KHỐI CHÓP) 154
DẠNG-8 KHỐI-NÓN-TRỤ- CẦU (CÔNG THỨC THỂ TÍCH KHỐI NÓN) 186
1 Câu 10. Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của một hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón đó. Tính diện tích xung quanh của hình nón. 200
2 Câu 10. Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của một hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón đó. Tính diện tích xung quanh của hình nón. 200
3 Tứ diện đều cạnh a nên . Đường tròn đáy tâm của hình nón ngoại tiếp tam giác đều cạnh nên bán kính đường tròn là . 200
4 Tứ diện đều cạnh a nên . Đường tròn đáy tâm của hình nón ngoại tiếp tam giác đều cạnh nên bán kính đường tròn là . 201
5 Tứ diện đều cạnh a nên . Đường tròn đáy tâm của hình nón ngoại tiếp tam giác đều cạnh nên bán kính đường tròn là . 201
6 Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: 201
7 Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: 201
DẠNG-9-DIỆN-TÍCH-MẶT-CẦU 212
DẠNG-10-TÍNH-ĐƠN-ĐIỆU-CỦA-HÀM-SỐ 232
DẠNG-11-RÚT-GỌN-BIỂU-THỨC-LÔGARIT-ĐƠN-GIẢN 256
DẠNG-12-KHỐI-NÓN-TRỤ-CẦU 269
DẠNG-13-TÌM-ĐIỂM-CỰC-TRỊ-CỦA-HÀM-SỐ 290
DẠNG-14-KHẢO-SÁT-VÀ-VẼ-ĐỒ-THỊ -HÀM SỐ 313
DẠNG-15-TIỆM-CẬN-CỦA-ĐỒ-THỊ-HÀM-SỐ 339
DẠNG-16-BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH-LOGARIT 362
DẠNG-17-SỰ-TƯƠNG-GIAO-ĐỒ-THỊ 379
DẠNG-18-NGUYÊN-HÀM – TÍCH-PHÂN 404
DẠNG-19-XÁC-ĐỊNH-SỐ-PHỨC-LIÊN-HỢP KHI-ĐÃ-BIẾT-SỐ-PHỨC 421
1 I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 421
2 I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ 421
3 1. ĐỊNH NGHĨA 421
4 1. ĐỊNH NGHĨA 421
DẠNG-20 SỐ-PHỨC-(Tìm phần thực của tổng hai số phức) 433
DẠNG-21-TÌM-ĐIỂM-BIỂU-DIỄN-CỦA-SỐ-PHỨC 448
DẠNG-22-XÁC-ĐỊNH-HÌNH-CHIẾU-CỦA-ĐIỂM-LÊN-MẶT-PHẲNG 463
DẠNG-23-XÁC-ĐỊNH-TÂM-BÁN-KÍNH-DIỆN-TÍCH-THỂ-TÍCH-CỦA-MẶT-CẦU. 479
DẠNG-24-PHƯƠNG-TRÌNH-MẶT-PHẲNG 497
DẠNG-25 PHƯƠNG-TRÌNH-ĐƯỜNG-THẲNG 533
DẠNG-26 GÓC-GIỮA-ĐƯỜNG-THẲNG-VÀ-MẶT-PHẲNG 546
DẠNG-27-CỰC-TRỊ-HÀM-SỐ-KHI-BIẾT-BBT-HOẶC ĐỒ-THỊ-HÀM-SỐ 613

DẠNG-28-GIÁ-TRỊ-LỚN-NHẤT-GIÁ-TRỊ-NHỎ-NHẤT-CỦA-HÀM-SỐ 638
1 * Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ. 639
2 * Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ. 639
DẠNG-29-LOGARIT-CÓ-THAM-SỐ 665
DẠNG-30-SỰ-TƯƠNG-GIAO-CỦA-HAI-ĐỒ-THỊ 685
1 Câu 11. Tìm để phương trình có nghiệm 703
2 Câu 11. Tìm để phương trình có nghiệm 703
3 thực? 703
4 thực? 703
DẠNG-31-BẤT-PHƯƠNG-TRÌNH-MŨ – LOGARIT 713
DẠNG-32 MẶT-NÓN – MẶT-TRỤ - MẶT-CẦU 733
DẠNG-33 NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN 785
DẠNG-34-ỨNG-DỤNG-TÍCH-PHÂN (TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG) 823
DẠNG-35 SỐ-PHỨC 856
1 Câu 6. Cho số phức có . Với tìm phần thực của số phức 879
2 Câu 6. Cho số phức có . Với tìm phần thực của số phức 879
3 Câu 7. Cho số phức thỏa mãn: . Hiệu phần thực và phần ảo của số phức 879
4 là 879
5 Câu 7. Cho số phức thỏa mãn: . Hiệu phần thực và phần ảo của số phức 880
6 Câu 7. Cho số phức thỏa mãn: . Hiệu phần thực và phần ảo của số phức 880
7 là 880
8 Lời giải 880
9 Lời giải 880
10 Lời giải 880
11 Lời giải 880
12 Câu 9. Gọi là điểm biểu diễn cho số phức (với là số thực thay đổi) và 880
13 Câu 9. Gọi là điểm biểu diễn cho số phức (với là số thực thay đổi) và 880
14 là điểm biểu diễn cho số phức biết . Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn 880
15 là điểm biểu diễn cho số phức biết . Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn 880
16 Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm và là điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn 881
17 Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm và là điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn 881
18 hệ thức . Giá trị nhỏ nhất của đoạn bằng 881
19 hệ thức . Giá trị nhỏ nhất của đoạn bằng 881
20 Câu 6. Cho hai số phức z và w khác 0 thoả mãn và Phần thực 883
21 Câu 6. Cho hai số phức z và w khác 0 thoả mãn và Phần thực 883
22 của số phức bằng 883
23 của số phức bằng 883
24 Lời giải 883
25 Lời giải 883
26 Câu 7. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 884
27 Câu 7. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 884
28 Câu 7. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 884
29 . Biết . Tính . 884
30 . Biết . Tính . 884

31 . Biết . Tính . 884
32 Câu 8. Cho số thực thay đổi và số phức thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ, 884
33 Câu 8. Cho số thực thay đổi và số phức thỏa mãn . Trên mặt phẳng tọa độ, 884
34 gọi là điểm biểu diễn số phức . Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm và (khi 884
35 gọi là điểm biểu diễn số phức . Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm và (khi 884
36 thay đổi) là 884
37 thay đổi) là 884
38 Câu 10. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 885
39 Câu 10. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 885
40 Câu 10. Cho hai số phức thoả mãn , . Gọi , là các điểm biểu diễn cho và 885
41 . Biết . Tính . 885
42 . Biết . Tính . 885
43 . Biết . Tính . 885
DẠNG-36-CÁC-BÀI-TOÁN-LIÊN-QUAN-ĐẾN-NGHIỆM-CỦA-SỐ-PHỨC 887
1 PHẦN I: 887
2 PHẦN I: 887
3 I. LÝ THUYẾT 887
4 I. LÝ THUYẾT 887
4.1 1. ĐỊNH NGHĨA 887
4.2 1. ĐỊNH NGHĨA 887
4.3 2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP 887
4.4 2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP 887
4.5 3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC 887
4.6 3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC 887
4.7 4. MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC 887
4.8 4. MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC 887
4.9 5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC 887
4.10 5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC 887
4.11 1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC 888
4.12 1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC 888
DẠNG-37-PHƯƠNG-TRÌNH-ĐƯỜNG-THẲNG-TRONG OXYZ 919
DẠNG-38-VIẾT-PHƯƠNG-TRÌNH-ĐƯỜNG-THẲNG-CT 944
DẠNG-39-TỔ-HỢP – XÁC-SUẤT(XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ) 1002
1 Số phần tử không gian mẫu: . 1009
2 Số phần tử không gian mẫu: . 1009
3 Gọi là biến cố: “Số được chọn có tích các chữ số là lẻ” 1009
4 Gọi là biến cố: “Số được chọn có tích các chữ số là lẻ” 1009
5 . 1009
6 . 1009
7 . 1009
8 . 1009
9 xác suất biến cố : . 1009
10 xác suất biến cố : . 1009
DẠNG-40-KHOẢNG-CÁCH GIỮA-HAI-ĐƯỜNG-THẲNG-CHÉO-NHAU 1026
DẠNG-41-TÍNH-ĐƠN-ĐIỆU-CỦA-HÀM-SỐ 1054

DẠNG-42-HÀM-SỐ-MŨ - HÀM-SỐ-LOGARITS (BÀI TOÁN THỰC TẾ) 1077
DẠNG-43-XÁC-ĐỊNH-CÁC-HỆ-SỐ-CỦA-HÀM-SỐ-NHẤT-BIẾN 1117
DẠNG-44-KHỐI-NÓN-TRỤ-CẦU 1148
DẠNG-45TÍCH-PHÂN-LIÊN-QUAN-ĐẾN-HÀM-ẨN- 1208
DẠNG-46-TÌM-SỐ-NGHIỆM -CỦA-PHƯƠNG-TRÌNH 1234
1 Lơi giải 1256
2 Lơi giải 1256
3 Chọn C 1256
4 Chọn C 1256
5 Đặt Ta có: . 1256
6 Đặt Ta có: . 1256
7 Vậy m nguyên là: 1257
8 Vậy m nguyên là: 1257
9 Lời giải 1257
10 Lời giải 1257
11 Chọn C 1257
12 Chọn C 1257
13 Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn 1257
14 Ta có bảng biến thiên của hàm số trên đoạn 1257
15 Lơi giải 1267
16 Lơi giải 1267
17 Chọn C 1267
18 Chọn C 1267
19 Trường hợp 1: 1268
20 Trường hợp 1: 1268
21 Trường hợp 2: 1268
22 Trường hợp 2: 1268
23 Trường hợp 3: 1268
24 Trường hợp 3: 1268
25 Trường hợp 4: 1268
26 Trường hợp 4: 1268
27 Trường hợp 5: 1268
28 Trường hợp 5: 1268
29 Trường hợp 6: 1268
30 Trường hợp 6: 1268
31 Trường hợp 7: 1268
32 Trường hợp 7: 1268
33 Trường hợp 8: 1268
34 Trường hợp 8: 1268
DẠNG-47-TIỆM-CẬN-CỦA-ĐỒ-THỊ-HÀM-SỐ 1279
1 Câu 2. Cho là hai số thực dương thỏa mãn . Giá trị nhỏ nhất của là 1280
2 Câu 2. Cho là hai số thực dương thỏa mãn . Giá trị nhỏ nhất của là 1280
3 Câu 3. Cho là hai số dương thỏa mãn Giá trị nhỏ nhất của là: 1280
4 Câu 3. Cho là hai số dương thỏa mãn Giá trị nhỏ nhất của là: 1280
5 Câu 4. Cho hai số thực dương thỏa mãn và . Giá trị lớn nhất của biểu thức là 1281

6	Câu 4. Cho hai số thực dương thỏa mãn và . Giá trị lớn nhất của biểu thức là	1281
7	Câu 5. Cho với và . Tính giá trị nhỏ nhất của .	1282
8	Câu 5. Cho với và . Tính giá trị nhỏ nhất của .	1282
9	Câu 6. Cho các số thực và các số dương thay đổi thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng	1282
10	Câu 6. Cho các số thực và các số dương thay đổi thỏa mãn . Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng	1282
11	Câu 2. Cho thỏa mãn Gọi lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất cuả biểu thức Khi đó bằng bao nhiêu?	1285
12	Câu 2. Cho thỏa mãn Gọi lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất cuả biểu thức Khi đó bằng bao nhiêu?	1285
13	Câu 3. Cho hai số thực dương thỏa mãn .Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng	1286
14	Câu 3. Cho hai số thực dương thỏa mãn .Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng	1286
15	Câu 5. Cho các số thực thỏa mãn. Giá trị lớn nhất của biểu thức là	1287
16	Câu 5. Cho các số thực thỏa mãn. Giá trị lớn nhất của biểu thức là	1287
DẠNG-48-GTLN-GTNN(CỦA HÀM PHỤ THUỘC THAM SỐ TRÊN ĐOẠN)		1290
DẠNG-49 THỂ-TÍCH-KHỐI-ĐA-DIỆN(thể tích khối đa diện được cắt ra từ 1 khối khác)		1319
DẠNG-50-PHƯƠNG-TRÌNH-MŨ-LÔGARIT		1353

DẠNG TOÁN 1: HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN:

1. Quy tắc cộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

2. Quy tắc nhân: Một công việc được hoành thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

II. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP.

1. Hoán vị :

a) Hoán vị là gì ? Cho tập A có **n** ($n\geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp **n** phần tử này ***theo một thứ tự***, ta được một ***hoán vị*** các phần tử của tập A.

b) Số các hoán vị : Số các hoán vị của một tập hợp có **n** phần tử là: $P_n=n!=n(n-1)...1=1.2.3.....(n-1)n$

Chú ý : Ta có $P_n=n!=1.2.3.....(n-1)n=(n-3)!(n-2)(n-1)n=(n-2)!(n-1)n$

2. Chỉnh hợp :

a) Chỉnh hợp là gì ? Cho tập A gồm **n** phần tử và số nguyên **k** với $1\leq k\leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và *sắp xếp chúng theo một thứ tự*, ta được một ***chỉnh hợp chập k của n phần tử của A***.

b) Số các chỉnh hợp : Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1\leq k\leq n)$ là:

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \qquad (1)$$

Chú ý : • $A_n^n=P_n=n!$ • Qui ước: $0!=1$, $A_n^0=1$ thì (2) đúng với $0\leq k\leq n$ Khi k = n thì $A_n^n=P_n=n!$

• Với $0<k<n$, ta có thể viết: $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ (2)

3. Tổ hợp :

a) Tổ hợp là gì ? Cho tập A có **n** phần tử và số nguyên **k** $(1\leq k\leq n)$. Mỗi tập con của A có k phần tử đgl một ***tổ hợp chập k của n phần tử của A***.

b) Số các tổ hợp : Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1\leq k\leq n)$ là: $C_n^k=\dfrac{A_n^k}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Chú ý : • Qui ước : $0!=1, C_n^0=1$ thì (1) cũng đúng với $0\le k\le n$. Ta có $C_n^k.k!=A_n^k$.

• Với $0\le k\le n$ ta có thể viết : $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

◆ Dạng toán tìm số các số tạo thành: Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abc...}$, tuỳ theo yêu cầu bài toán:

Nếu số lẻ thì số tận cùng là số lẻ.

Nếu số chẵn thì số tận cùng là số chẵn.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Đếm số (chỉ dùng một loại P hoặc A hoặc C)

• Đếm số (kết hợp P-A-C)

• Chọn người, vật (thuần hoán vị)

• Chọn người, vật (thuần chỉnh hợp)

• Chọn người, vật (thuần tổ hợp)

• Chọn người, vật (kết hợp P-A-C)

• Bài toán liên quan hình học

• Tính toán, rút gọn biểu thức chứa P,A,C

• PT-HPT đại số tổ hợp

• Đẳng thức, bất đẳng thức đại số tổ hợp

• Hoán vị bàn tròn

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm có 10 học sinh

A. C_{10}^2. **B.** A_{10}^2. **C.** 10^2. **D.** 2^{10}.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dùng quy tắc đếm hoặc tính số tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Chọn 2 học sinh bất kỳ trong số 10 học sinh, số cách chọn bằng số tổ hợp chập 2 của 10 phần tử: C_{10}^2.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lờigiải

Chọn A

Chọn 2 học sinh bất kỳ trong số 10 học sinh, số cách chọn bằng số tổ hợp chập 2 của 10 phần tử: C_{10}^2

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Bạn Hoàng muốn đặt mật khẩu cho chiếc điện thoại của mình. Mỗi mật khẩu điện thoại của bạn Hoàng là một dãy gồm 4 ký tự, mỗi ký tự là một chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi bạn Hoàng có bao nhiêu cách đặt mật khẩu cho chiếc điện thoại.

A. 2016. **B.** 5040. **C.** 10000. **D.** 9000.

Lời giải

Chọn C

Mỗi mật khẩu điện thoại của bạn Hoàng là một dãy gồm 4 ký tự, mỗi ký tự là một chữ số (từ 0 đến 9) nên số cách đặt mật khẩu của bạn Toàn là $10^4 = 10000$.

Câu 2. Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh trong lớp học này đi dự trại hè của trường?

A. 25. **B.** 20. **C.** 45. **D.** 500.

Lờigiải

Chọn C

Áp dụng quy tắc cộng:
Số cách chọn ra một học sinh trong lớp học này đi dự trại hè của trường là $25+20=45$.

Câu 3. Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ trong lớp học này đi dự trại hè của trường?

A. 25. **B.** 20. **C.** 45. **D.** 500.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng quy tắc nhân:
Số cách chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ trong lớp học này đi dự trại hè của trường là $25.20=500$.

Câu 4. Trong một hộp bút gồm có 8 cây bút bi, 6 cây bút chì và 10 cây bút màu. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó?

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng quy tắc cộng:
Số cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó là $8+6+10=24$.

Câu 5. Từ thành phố A tới thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B tới thành phố C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A tới C qua B ?

A. 24. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải:

Chọn D

Từ A đến B có 3 cách chọn đường đi, từ B đến C có 4 cách chọn đường đi.

Vậy số cách chọn đường đi từ A đến C phải đi qua B là : $3.4=12$ cách.

Câu 6. Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$?

A. A_5^4. **B.** P_5. **C.** C_5^4. **D.** P_4.

Lời giải:

Chọn A

Số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$ là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử

Vậy có A_5^4 số cần tìm.

Câu 7. Cho đa giác lồi n đỉnh $(n>3)$. Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho là

A. A_n^3. **B.** C_n^3. **C.** $\dfrac{C_n^3}{3!}$. **D.** $n!$.

Lời giải:

Chọn B

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đã cho là số tổ hợp chập 3 của n phần tử.
Số tam giác lập được là C_n^3.

Câu 8. Số tập con của tập hợp gồm 2020 phần tử là

A. 2020. **B.** 2^{2020}. **C.** 2020^2. **D.** 2.2020.

Lời giải:

Chọn B

Số tập con của tập hợp có 2017 phần tử là 2^{2017}.

Câu 9. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau?

A. $5!$. **B.** 9^5. **C.** C_9^5. **D.** A_9^5.

Lời giải:

Chọn D

Mỗi số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác 0 và đôi một khác nhau là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy số các số tự nhiên thỏa đề bài là A_9^5 số.

Câu 10. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 song song với đường thẳng d_1 cho n điểm phân biệt. Biết có tất cả 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $(n+5)$ điểm trên. Giá trị của n là

A. $n=10$. **B.** $n=7$. **C.** $n=8$. **D.** $n=9$.

Lời giải:

Chọn B

Để tạo thành một tam giác cần 3 điểm phân biệt

Trường hợp 1: chọn 1 điểm trên đường thẳng d_1 và 2 điểm trên đường thẳng d_2 có $C_5^1.C_n^2$

Trường hợp 2: chọn 2 điểm trên đường thẳng d_1 và 1 điểm trên đường thẳng d_2 có $C_5^2.C_n^1$

Số tam giác được tạo thành là $C_5^1.C_n^2+C_5^2.C_n^1=175 \Leftrightarrow \dfrac{5.n!}{2!(n-2)!}+\dfrac{10.n!}{1!(n-1)!}=175$

$\Leftrightarrow \dfrac{5(n-1)n}{2}+10n=175 \Leftrightarrow 5n^2+15n-350=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=7 \\ n=-10(l) \end{array}\right.$.

Mức độ 2

Câu 1. Trong mặt phẳng cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 116 tam giác. **B.** 80 tam giác. **C.** 96 tam giác. **D.** 60 tam giác.

Lời giải

Chọn A

Số tam giác tạo từ 10 điểm là C_{10}^3 tam giác

Do 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng nên số tam giác mất đi là C_4^3

Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{10}^3-C_4^3=116$ tam giác.

Câu 2. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 120. **B.** 98. **C.** 150. **D.** 360.

Lời giải:

Chọn B

Số cách chọn ngẫu nhiên 5 học sinh C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh chỉ có 2 lớp: $C_7^5+C_6^5+C_5^5$

Vậy số cách chọn 5 học sinh có cả 3 lớp là $C_9^5-\left(C_7^5+C_6^5+C_5^5\right)=98$.

Câu 3. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A. 2520. **B.** 50000. **C.** 4500. **D.** 2296.

Lời giải

Chọn D

Số có 4 chữ số khác nhau đôi một: $9.A_9^3$.

↳ Số có 4 chữ số lẻ khác nhau đôi một: $5.8.A_8^2$.

Vậy số có 4 chữ số chẵn khác nhau đôi một: $9.A_9^3-5.8.A_8^2=2296$.

Câu 4. Giải phương trình $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$.

A. $x=3$. **B.** $x=6$. **C.** $x=5$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: ĐK: $x\in\mathbb{Z};x\geq 3$.

Có $A_x^3+C_x^{x-2}=14x \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+\dfrac{x(x-1)}{2}=14x \Leftrightarrow 2(x-1)(x-2)+(x-1)=28$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x-25=0 \Leftrightarrow x=5; x=-\dfrac{5}{2}$.

Kết hợp điều kiện thì $x=5$.

Cách 2: Lần lượt thay các đáp án B, C, D vào đề bài ta được $x=5$.

Câu 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

A. 72. **B.** 120. **C.** 54. **D.** 69.

Lời giải.

Chọn C

Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcd}$, $(a\neq 0)$.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau: $4.A_4^3=96$ số.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5: $A_4^3+3.A_3^2=42$.

Vậy số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không chia hết cho 5 là: $96-42=54$ số.

Câu 6. Một đoàn tàu có bảy toa đỗ ở sân ga. Có năm hành khách bước lên tàu. Có bao nhiêu trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa tàu của năm hành khách, biết rằng không có toa nào chứa nhiều hơn một hành khách?

A. 2520. **B.** 78125. **C.** 16807. **D.** 21

Lời giải

Chọn A

Không có toa nào chứa nhiều hơn một hành khách nên ta làm như sau:

- Chọn 5 toa tàu trong số 7 toa tàu ta có: C_7^5 cách chọn.

- Sắp thứ tự cho 5 hành khách lên 5 toa tàu đã chọn ta có 5! =120 cách.

- Vậy số cách chọn toa tàu của 5 khách là $120.C_7^5 = 2520$ cách.

Câu 7. Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau?

A. 48. **B.** 72. **C.** 24. **D.** 36.

Lời giải.

Chọn B

1	2	3	4	5	6

Giả sử ghế dài được đánh số như hình vẽ.

Có hai trường hợp: Một nữ ngồi ở vị trí số 1 hoặc một nam ngồi ở vị trí số 1. Ứng với mỗi trường hợp sắp xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau có $3!.3!$.

Vậy có $2.3!.3! = 72$.

Câu 8. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1000 được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4?

A. 125. **B.** 120. **C.** 100. **D.** 69.

Lời giải.

Chọn A

Các số tự nhiên nhỏ hơn 1000 bao gồm các số tự nhiên có 1, 2, 3 chữ số.

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ $\left(a,b,c \in \{0;1;2;3;4\}\right)$ (không nhất thiết các chữ số đầu tiên phải khác 0).

a có 5 cách chọn.

b có 5 cách chọn.

c có 5 cách chọn.

Vậy có $5.5.5 = 125$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $x = 1$ không là nghiệm của $g(x) = x^2 - 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Câu 9. Tính số cách chọn ra một nhóm 5 người 20 người sao cho trong nhóm đó có 1 tổ trưởng, 1 tổ phó và 3 thành viên còn lại có vai trò như nhau.

A. 310080. **B.** 930240. **C.** 1860480. **D.** 15505.

Lời giải:

Chọn A

Có 20 cách để chọn 1 tổ trưởng từ 20 người.
Sau khi chọn 1 tổ trưởng thì có 19 cách để chọn 1 tổ phó.
Sau đó có C_{18}^3 cách để chọn 3 thành viên còn lại.

Vậy có $20.19.C_{18}^3 = 310080$ cách chọn một nhóm 5 người thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10. Trong mặt phẳng có 2019 đường thẳng song song với nhau và 2020 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2019 đường thẳng đó. Đếm số hình bình hành nhiều nhất được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên.

A. 2019.2020. **B.** $C_{2019}^4 + C_{2020}^4$. **C.** $C_{2019}^2.C_{2020}^2$. **D.** $2019 + 2020$.

Lời giải:

Chọn C

Mỗi hình bình hành tạo thành từ hai cặp cạnh song song nhau. Vì vậy số hình bình hành tạo thành chính là số cách chọn 2 cặp đường thẳng song song trong hai nhóm đường thẳng trên.

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2019 đường thẳng song song có C_{2019}^2 (cách).

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2020 đường thẳng song song có C_{2020}^2 (cách).

Vậy có $C_{2019}^2.C_{2020}^2$ (hình bình hành).

Mức độ 3

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

A. 249. **B.** 1500. **C.** 3204. **D.** 2942.

Lời giải:

Chọn B

Chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4 nên ta có thể có 154 hoặc 451

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ (các chữ số khác nhau từng đôi một và a, b, c thuộc $\{0,2,3,6,7,8,9\}$), sau đó ta chèn thêm 154 hoặc 451 để có được số gồm 6 chữ số cần tìm.

TH1: $a \neq 0$, số cách chọn a là 6, số cách chọn b và c là A_6^2, sau đó chèn 154 hoặc 451 vào 4 vị trí còn lại nên có $6.A_6^2.4.2$ cách

TH2: $a = 0$, số cách chọn a là 1, số cách chọn b và c là A_6^2, sau đó chèn 154 hoặc 451 vào vị trí trước a có duy nhất 1 cách nên có $A_6^2.2$ cách

Vậy có $6.A_6^2.4.2 + A_6^2.2 = 1500$ (số).

Câu 2. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chọn từ tập $A=\{1;2;3;4;5\}$ sao cho mỗi số lập được luôn có mặt chữ số 3

A. 72. **B.** 36. **C.** 32. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tạo thành có dạng $x=\overline{abc}$, với a, b, c đôi một khác nhau và lấy từ A.

Chọn một vị trí a,b hoặc c cho số 3 có 3 cách chọn.

Chọn hai chữ số khác 3 từ A và sắp xếp vào hai vị trí còn lại của x có A_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $3.A_4^2=36$ cách.

Mỗi cách sắp xếp như trên cho ta một số thỏa yêu cầu.

Vậy có 36 số cần tìm.

Câu 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

A. 720 số. **B.** 360 số. **C.** 288 số. **D.** 240 số.

Lời giải

Chọn D

Gọi số có sáu chữ số cần tìm là $n=\overline{abcdef}$, trong đó sáu chữ số khác nhau từng đôi một, $c>2$ và f là số chẵn.

Trường hợp 1: Nếu $f=2\Rightarrow n=\overline{abcde2}$

Có 4 cách chọn c, nên có $4.4!=96$ số.

Trường hợp 2: Nếu $f=4\Rightarrow n=\overline{abcde4}$

Có 3 cách chọn c, nên có $3.4!=72$ số.

Trường hợp 3: Nếu $f=6\Rightarrow n=\overline{abcde6}$

Có 3 cách chọn c, nên có $3.4!=72$ số.

Vậy số các số cần tìm là $96+72+72=240$ số.

Câu 4. Sắp xếp 20 người vào 2 bàn tròn A,B phân biệt, mỗi bàn gồm 10 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp là

A. $\dfrac{C_{20}^{10}.9!.9!}{2}$. **B.** $C_{20}^{10}.9!.9!$. **C.** $2C_{20}^{10}.9!.9!$. **D.** $C_{20}^{10}.10!.10!$.

Lời giải

Chọn B

Giai đoạn 1: Chọn 10 người từ 20 người xếp vào bàn A nên có C_{20}^{10} cách chọn người. Tiếp theo là 10 người vừa chọn này có 9! cách chọn chỗ ngồi. Vậy giai đoạn 1 có $C_{20}^{10}.9!$ cách.

Giai đoạn 2: 10 người còn lại xếp vào bàn B, 10 người này có 9! cách chọn chỗ ngồi. Vậy giai đoạn 2 có 9! cách.

Vậy có tất cả $C_{20}^{10}.9!.9!$ cách thỏa mãn bài toán.

Câu 5. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tính số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 30 đỉnh của đa giác đó.

A. 105. **B.** 27405. **C.** 27406. **D.** 106.

Lời giải:

Chọn A

Trong đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$ nội tiếp trong đường tròn (O) cứ mỗi điểm A_1 có một điểm A_i đối xứng với A_1 qua O $(A_1 \neq A_i)$ ta được một đường kính, tương tự với A_2, A_3,.., A_{30}. Có tất cả 15 đường kính mà các điểm là đỉnh của đa giác đều $A_1A_2A_3....A_{30}$. Cứ hai đường kính đó ta được một hình chữ nhật mà bốn điểm là các đỉnh của đa giác đều: có $C_{15}^2 = 105$ hình chữ nhật tất cả.

Câu 6. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

A. 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

Lời giải:

Chọn D

Cách 1: Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có A_9^5 cách.

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí).

Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0.

Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có C_5^3 cách.

Vậy có $A_9^5C_5^3 = 151200$ số cần tìm.

Cách 2: Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

+) Chọn vị trí của 3 chữ số 0 trong 7 vị trí (trừ a_1). Vì giữa 2 chữ số 0 luôn có ít nhất 1 chữ số khác 0 nên chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để điền các số 0 , sau đó thêm vào giữa 2 số 0 gần nhau 1 vị trí nữa.

Suy ra số cách chọn là $C_5^3 = 10$.

+) Chọn các số còn lại, ta chọn bộ 5 chữ số trong 9 chữ số từ 1 đến 9, có A_9^5 cách chọn.

Câu 7. Từ các chữ số thuộc tập hợp $S=\{1;2;3;...;8;9\}$ có bao nhiêu số có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

A. 36288. **B.** 72576. **C.** 45360. **D.** 22680.

Lời giải:

Chọn C

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 1, 2 (số 1 đứng trước 2): có C_9^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 3, 4 (số 3 đứng trước 4): có C_7^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 5, 6 (số 5 đứng trước 6): có C_5^2 cách.

3 chữ số còn lại có $3!$ cách.

Vậy có $3!.C_9^2.C_7^2.C_5^2=45360$ số.

Câu 8. Có 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ được xếp vào 9 ghế theo hàng ngang. Số cách xếp sao cho các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau là

A. 1782. **B.** 1728. **C.** 3456. **D.** 288.

Lời giải:

Chọn B

Cách 1: Lấy 4 ghế xếp liền nhau coi là nhóm ghế A, lấy 3 ghế xếp liền nhau coi là nhóm B. Khi đó còn 2 ghế xếp xen kẽ giữa hai nhóm ghế A,B. Giả sử xếp nhóm ghế A trước rồi mới đến xếp nhóm ghế B thì có 6 trường hợp xen giữa khoảng trống A và B mô tả như bảng sau:

A	B		
A		B	
A			B
	A	B	
	A		B
		A	B

Vì vai trò A và B như nhau nên số cách xếp ghế thỏa mãn bài toán là $6.2.4!.3!=1728$ (cách).

Cách 2: Coi 4 bạn nam cạnh nhau là một vị trí, 3 bạn nữ cạnh nhau là một vị trí, còn hai ghế trống nên ta có 4 vị trí. Do đó số cách sắp xếp thỏa mãn bài toán là $4!.3!.A_4^2=1728$ (cách).

Câu 9. Cho một đa giác đều n đỉnh $(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$. Tìm n biết số hình chữ nhật được tạo ra từ bốn đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45.

A. $n=12$. **B.** $n=10$. **C.** $n=9$. **D.** $n=45$.

Lời giải:

Chọn B

Do đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp trong một đường tròn và có n đường chéo đi qua tâm O của đường tròn. Chọn 2 đường chéo khác nhau đi qua tâm thì 4 đỉnh của đường chéo cho ta một hình chữ nhật. Vậy có C_n^2 hình chữ nhật.

Theo đề bài ta có: $C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n = 10$.

Câu 10. Hai bạn An và Bình cùng 7 bạn khác rủ nhau đi xem bóng đá. 9 bạn được xếp vào 9 ghế thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 9 bạn sao cho An và Bình không ngồi cạnh nhau?

A. 40320. **B.** 322560. **C.** 357840. **D.** 282240.

Lời giải:

Chọn D

Số cách xếp 9 bạn vào 9 ghế thành một hàng ngang là một hoán vị của 9 phần tử nên có: $9! = 362880$ cách.

Số cách xếp 9 bạn vào 9 ghế thành một hàng ngang trong đó An và Bình xếp cạnh nhau có $(2!).(8!) = 80640$ cách (Xem hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau như ngồi một vị trí, sau đó hoán vị hai bạn An và Bình).

Vậy số cách xếp 9 bạn sao cho An và Bình không ngồi cạnh nhau là

$$362880 - 80640 = 282240.$$

↳ Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n > 4$, $n \in \mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này đồng phẳng. Tìm n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 201 mặt phẳng phân biệt.

A. 8. **B.** 12. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 :

Số cách chọn 3 điểm trong $2n$ điểm phân biệt đã cho là C_{2n}^3.

Số cách chọn 3 điểm trong n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng là C_n^3.

Số mặt phẳng được tạo ra từ $2n$ điểm đã cho là $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1$.

Như vậy: $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 201 \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 200$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 200$

$\Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 1200 = 0 \Leftrightarrow (n-6)(7n^2 + 33n + 200) = 0 \Leftrightarrow n = 6$

Vậy $n=6$.

Cách 2 :

Có các trường hợp sau :

TH1 : n điểm đồng phẳng tạo ra 1 mặt phẳng.

TH2 : n điểm không đồng phẳng tạo ra C_n^3 mặt phẳng.

TH3 : 2 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 1 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^2C_n^1=n.C_n^2$ mặt phẳng.

TH4 : 1 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 2 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^1C_n^2=n.C_n^2$ mặt phẳng.

Vậy có $1+C_n^3+2nC_n^2=201\Leftrightarrow n=6$.

Câu 2. Có hai học sinh lớp A, ba học sinh lớp B và bốn học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A. 80640. **B.** 108864. **C.** 145152. **D.** 217728.

Lời giải

Chọn C

Xét các trường hợp sau:

TH1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2!.8!$ cách.

TH2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2!.A_4^1.7!$ cách.

TH3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2!.A_4^2.6!$ cách.

TH4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2!.A_4^3.5!$ cách.

TH5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2!.A_4^4.4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!\left(8!+A_4^17!+A_4^26!+A_4^35!+A_4^44!\right)=145152$ cách.

Câu 3. Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 chỗ sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh.

A. 4320. **B.** 90. **C.** 43200. **D.** 720.

Lời giải

Chọn C

Sắp 6 học sinh thành một hàng ngang, giữa 6 học sinh có 5 khoảng trống, ta chọn 3 khoảng trống và đưa 3 giáo viên vào được cách sắp thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả có : $6!.A_5^3=43200$ cách.

Câu 4. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

A. 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

Lời giải:

Chọn D

Cách 1: Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có A_9^5 cách.

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí).

Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0.

Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có C_5^3 cách.

Vậy có $A_9^5 C_5^3 = 151200$ số cần tìm.

Cách 2: Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$

+) Chọn vị trí của 3 chữ số 0 trong 7 vị trí (trừ a_1). Vì giữa 2 chữ số 0 luôn có ít nhất 1 chữ số khác 0 nên chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để điền các số 0, sau đó thêm vào giữa 2 số 0 gần nhau 1 vị trí nữa.

Suy ra số cách chọn là $C_5^3 = 10$.

+) Chọn các số còn lại, ta chọn bộ 5 chữ số trong 9 chữ số từ 1 đến 9, có A_9^5 cách chọn.

Vậy có tất cả $10.A_9^5 = 151200$ số cần tìm.

Câu 5. Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái qua phải) bằng:

A. 204. **B.** 120. **C.** 168. **D.** 240.

Lời giải:

Chọn A

Số nguyên cần lập có 3 chữ số đôi một khác nhau. Xét hai trường hợp:

TH1: Các chữ số tăng dần từ trái qua phải.

Khi đó 3 chữ số được chọn từ tập $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Với một cách chọn 3 chữ số từ tập này ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự tăng dần. Do đó số các số lập được trong trường hợp này là: C_9^3.

TH2: Các chữ số giảm dần từ trái qua phải.

Khi đó 3 chữ số được chọn từ tập $B = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Với một cách chọn 3 chữ số từ tập này ta có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự giảm dần. Do đó số các số lập được trong trường hợp này là: C_{10}^3.

Vậy số các số cần tìm là: $C_9^3 + C_{10}^3 = 204$ số.

Câu 6. Từ 2 chữ số 1 và 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho không có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau?

A. 54. **B.** 110. **C.** 55. **D.** 108

Lời giải:

Chọn B

TH1: Có 8 chữ số 8.

Có 1 số

TH2: Có 1 chữ số 1, 7 chữ số 8.

Có 8 cách xếp chữ số 1 nên có 8 số.

TH3: Có 2 chữ số 1, 6 chữ số 8.

Xếp 6 số 8 ta có 1 cách.

Từ 6 số 8 ta có có 7 chỗ trống để xếp 2 số 1.

Nên ta có: $C_7^2 = 21$ số.

TH4: Có 3 chữ số 1, 5 chữ số 8.

Tương tự **TH3**, từ 5 chữ số 8 ta có 6 chỗ trống để xếp 3 chữ số 1.

Nên có: $C_6^3 = 20$ số.

TH5: Có 4 chữ số 1, 4 chữ số 8.

Từ 4 chữ số 8 ta có 5 chỗ trống để xếp 4 chữ số 1.

Nên có: $C_5^4 = 5$.

Vậy có: $1+8+21+20+5=55$ số.

Câu 7. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị

A. 32. **B.** 72. **C.** 36. **D.** 24.

Lời giải:

Chọn B

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần tìm

Ta có $a_6 \in \{1;3;5\}$ và $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6)=1$

Với $a_6=1$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=2 \Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{2,3,6\} \\ a_4,a_5 \in \{4,5\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{2,4,5\} \\ a_4,a_5 \in \{3,6\} \end{cases}$

Với $a_6=3$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=4 \Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{2;4;5\} \\ a_4,a_5 \in \{1,6\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{1,4,6\} \\ a_4,a_5 \in \{2,5\} \end{cases}$

Với $a_6=5$ thì $(a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5)=6 \Rightarrow \begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{2,3,6\} \\ a_4,a_5 \in \{1,4\} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1,a_2,a_3 \in \{1,4,6\} \\ a_4,a_5 \in \{2,3\} \end{cases}$

Mỗi trường hợp có $3!.2!=12$ số thỏa mãn yêu cầu

Vậy có tất cả $6.12=72$ số cần tìm.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

A. 786240. **B.** 846000. **C.** 907200. **D.** 151200.

Lời giải:

Chọn D

Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có A_9^5 cách.

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí).

Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0.

Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có C_5^3 cách.

Vậy có $A_9^5 C_5^3=151200$ số cần tìm.

Câu 9. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là

A. 2163. **B.** 2170. **C.** 3003. **D.** 3843.

Lời giải:

Chọn B

Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Khi chọn bất kỳ thì bao gồm các trường hợp sau

Chỉ có một màu		**Chỉ có hai màu**		**Có đủ ba màu**
Xanh:	C_6^5 cách.	Xanh – Đỏ:	$C_{11}^5-C_6^5-C_5^5$ cách.	
Đỏ:	C_5^5 cách.	Đỏ - Vàng:	$C_9^5-C_5^5$ cách.	
		Xanh – Vàng:	$C_{10}^5-C_6^5$ cách.	

Suy ra số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán (có đủ ba màu) là

$$C_{15}^5-C_6^5+C_5^5-\left[C_{11}^5-C_6^5-C_5^5+C_9^5-C_5^5+C_{10}^5-C_6^5\right]=2170.$$

Câu 10. Một tổ học sinh có 6 nam và 3 nữ được yêu cầu xếp thành một hàng ngang. Số cách xếp sao cho không có 2 bạn nữ nào đứng cạnh nhau là

A. $9!$. **B.** 151200. **C.** 25200. **D.** 86400.

Lời giải:

Chọn B

Coi ghế xếp hàng ngang được đánh theo số thứ tứ từ 1 đến 9 như minh họa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Số cách chọn có 3 bạn nữ đứng cạnh nhau là $3!.7!$ (cách).

Xét trường hợp có đúng 2 bạn nữ đứng cạnh nhau:

Chọn hai bạn nữ trong ba bạn nữ để xếp cạnh nhau có: C_3^2 (cách).

Nếu xếp hai bạn nữ vào vị trí ghế $(1;2)$ hoặc $(8;9)$ thì bạn nữ còn lại chỉ được chọn một trong 6 vị trị ghế để không cạnh hai bạn nữ vừa xếp. Do đó số cách xếp để có đúng hai bạn nữ cạnh nhau là $2.2!.6.6! = 17280$ (cách).

Nếu xếp hai bạn nữ vào các vị trí $(2;3)$ hoặc $(3;4)$ hoặc $(4;5)$ hoặc $(5;6)$ hoặc $(6;7)$ hoặc $(7;8)$ thì bạn nữ còn lại chỉ được chọn một trong 5 vị trị ghế để không cạnh hai bạn nữ vừa xếp. Do đó số cách xếp để có đúng hai bạn nữ cạnh nhau là $6.2!.5.6! = 43200$ (cách).

Vậy số cách xếp để không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau là

$9! - 3!.7! - C_3^2.(17280 + 43200) = 151200$ (cách).

DẠNG TOÁN 2: CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

PHẦN I:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Cấp số cộng

✪ Định nghĩa:

• Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có: $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

✪ Số hạng tổng quát:

• Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$.

✪ Tính chất:

• Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$.

✪ Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng:

Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

2. Cấp số nhân

✪ Định nghĩa:

• Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có: $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

✪ Số hạng tổng quát:

• Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

✪ Tính chất:

• Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k^{\,2} = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$.

✪ Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:

• Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

✪ Cấp số nhân lùi vô hạn:

• Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q sao cho $|q| < 1$.

• Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

Cho (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q. Khi đó tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Nhận dạng, khai triển CSC.

• Xác định U_1, d, n, U_n, S_n của CSC (cụ thể).

• Xác định U_n, S_n của CSC (tổng quát).

• Bài toán khác liên quan tổng của CSC.

• Điều kiện để dãy số thành CSC.

• Điều kiện để nghiệm của phương trình lập thành CSC.

• Toán đố, toán thực tế, liên môn về CSC.

• Nhận dạng, khai triển CSN.

• Xác định U_1, q, n, U_n, S_n của CSN (cụ thể).

• Xác định U_n, S_n của CSN (tổng quát).

• Bài toán khác liên quan tổng của CSN.

• Điều kiện để dãy số thành CSN.

• Điều kiện để nghiệm pt lập thành CSN.

• Toán đố, toán thực tế, liên môn về CSN.

• Bài toán liên quan đến CSN lùi vô hạn.

• Toán tập hợp cả CSC và CSN.

…..

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1=3, u_2=9$. Công sai của cấp số cộng đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** -6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm công sai của cấp số cộng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định công thức u_{n+1} theo u_n.

B2: Kết quả là hiệu $u_{n+1}-u_n$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_1=3, u_2=9$ nên $d=u_2-u_1=9-3=6$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Dãy số nào sau đây là cấp số cộng:

A. $-1,3,7,11,13$. **B.** $0,2,6,8,10$. **C.** $11,14,17,20,24$. **D.** $7,3,-1,-5,-9$.

Lời giải

Chọn D

Dãy số $7,3,-1,-5,-9$ là cấp số cộng với $u_1=7; d=-4$.

Câu 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5; u_8=44$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_8=44 \Leftrightarrow u_1+7d=44 \Leftrightarrow -5+7d=44 \Leftrightarrow d=7$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=28$ và công sai $d=-5$. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng bằng :

A. $u_{10}=-22$. **B.** $u_{10}=-7$. **C.** $u_{10}=-17$. **D.** $u_{10}=-12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=u_1+(n-1)d \Leftrightarrow u_{10}=u_1+9d=28+9.(-5)=-17$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-2$ và số hạng thứ 5 bằng 9. Số hạng thứ nhất của cấp số cộng bằng:

A. 15. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n=u_1+(n-1)d \Leftrightarrow u_5=u_1+4d \Leftrightarrow u_1+4.(-2)=9 \Leftrightarrow u_1=17$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=28$ và công sai $d=-6$. Hỏi -32 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=u_1+(n-1)d \Leftrightarrow -32=28+(n-1).(-6) \Leftrightarrow n=11$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-32$ và công sai $d=8$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là:

A. $S_{10}=20$. **B.** $S_{10}=80$. **C.** $S_{10}=60$. **D.** $S_{10}=40$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{10}=\dfrac{10(2u_1+9d)}{2}=40$.

Câu 7. Cho cấp số cộng có $u_1=2$ và $u_{n+1}=u_n+3$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng bằng:

A. $u_{15}=42$. **B.** $u_{15}=44$.

C. $u_{15}=24$. **D.** $u_{15}=31$.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là công sai của cấp số cộng .

Ta có: $u_{n+1}=u_n+3 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=3 \Leftrightarrow d=3.$

Suy ra: $u_{15}=u_1+14d=2+14.3=44.$

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d và S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng . Công thức nào sau đây là đúng:

A. $S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}$. **B.** $u_n=u_1+nd$. **C.** $u_4=\dfrac{u_3+u_5}{2}$. **D.** $u_n=\dfrac{u_1+u_{n+1}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_k = \frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2} \Rightarrow u_4 = \frac{u_3+u_5}{2}$.

Câu 9. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân:

A. $2;4;6;8;10$. **B.** $5;10;15;20;25$. **C.** $3;9;27;81;243$. **D.** $2;-4;8;-16;-32$.

Lời giải

Chọn C

Dãy số $3;9;27;81;243$ là cấp số nhân với $u_1 = 3; q = 3$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_n = 2^n, \forall n \in N^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trên.

A. $u_1 = 2;\ q = -2$. **B.** $u_1 = -2;\ q = 2$.

C. $u_1 = 1;\ q = 2$. **D.** $u_1 = 2;\ q = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $u_n = 2^n = 2.2^{n-1} = u_1.q^{n-1}, \forall n \in N^*$. Nên $u_1 = 2;\ q = 2$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = -2; u_2 = 10$. Lựa chọn đáp án đúng.

A. $q = 10$. **B.** $q = -5$. **C.** $q = 5$. **D.** $q = 12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_2 = u_1.q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{-2} \Rightarrow q = -5$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 3; q = -2$. Tìm u_3.

A. $u_3 = 11$. **B.** $u_3 = 12$. **C.** $u_3 = 16$. **D.** $u_3 = 14$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức: $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_3 = 3.(-2)^2 = 12$.

Câu 13. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$ .Tính S_6. .

A. $S_6 = -\frac{155}{3}$. **B.** $S_6 = -105$. **C.** $S_6 = -315$. **D.** $S_6 = 315$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_6 = u_1.\frac{q^6-1}{q-1} = 5.\frac{(-2)^6-1}{-2-1} = -105$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-\frac{1}{2}$; $u_7=-32$. Tìm q?

A. $q=\pm 1$. **B.** $q=\pm\frac{1}{2}$. **C.** $q=\pm 2$. **D.** $q=\pm 4$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân ta có:

$u_n=u_1q^{n-1}\Rightarrow u_7=u_1.q^6\Rightarrow q^6=64\Rightarrow\left[\begin{array}{l}q=2\\q=-2\end{array}\right.$.

Câu 15. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1, công bội q. Với mọi giá trị của $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $u_n=u_1+(n-1)q$. **B.** $u_n=u_1.q^{n-1}$. **C.** $u_n-u_{n-1}=q$. **D.** $S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{q-1}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16. Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào **không phải** là cấp số nhân lùi vô hạn?

A. $\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},....,\left(\frac{2}{3}\right)^n,....$ **B.** $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},...,\frac{1}{3^n},....$

C. $\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},....,\left(\frac{3}{2}\right)^n,....$ **D.** $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},...,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},....$

Lời giải

Chọn C

Chọn đáp án $\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},....,\left(\frac{3}{2}\right)^n,...$ vì cấp số nhân này có công bội $q=\frac{3}{2}>1$.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1=3;q=2$ và $u_n=192$. Tìm n.

A. $n=4$. **B.** $n=5$. **C.** $n=7$. **D.** $n=6$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow 192=3.2^{n-1}\Rightarrow n=7$.

Mức độ 2

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-2$ và công sai $d=3$. Số hạng tổng quát u_n là

A. $u_n=3n-5$. **B.** $u_n=3n-2$. **C.** $u_n=-2n+3$. **D.** $u_n=-3n+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = -2 + (n-1).3 = 3n - 5$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_{27} = -76$ và $u_{83} = -244$. Khi đó số hạng đầu u_1 của cấp số cộng đã cho bằng

A. -3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $\begin{cases} u_{27} = -76 \\ u_{83} = -244 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 26d = -76 \\ u_1 + 82d = -244 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}$

.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có 4 số hạng, biết $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $u_4 = \frac{5}{2}$. Tìm các số hạng còn lại?

A. $u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \frac{3}{2}$. **B.** $u_2 = 1; u_3 = 2$.

C. $u_2 = 1; u_3 = \frac{3}{2}$. **D.** $u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_4 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow u_1 + 3d = \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 3d = \frac{5}{2} \Leftrightarrow d = 1.$

Vậy $u_2 = u_1 + d = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, $u_3 = u_2 + d = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng có $u_1 = -1$ và $S_{23} = 483$. Công sai của cấp số cộng là:

A. $d = 3.$ **B.** $d = 4.$

C. $d = -2.$ **D.** $d = 2.$

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng .

Ta có: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[u_1 + u_1 + (n-1)d\right]}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}.$

Vậy: $S_{23} = \frac{23(2u_1 + 22d)}{2} \Leftrightarrow 483 = \frac{23(-2 + 22d)}{2} \Leftrightarrow d = 2.$

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{27} + u_2 = 83$. Khi đó tổng 28 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) là

A. $S_{28}=1162$. **B.** $S_{28}=1612$. **C.** $S_{28}=2611$. **D.** $S_{28}=1261$.

Lời giải

Chọn A

Gọi d và u_1 lần lượt là công sai và số hạng đầu của cấp số cộng (u_n).

Ta có: $S_{28}=\dfrac{28(u_1+u_{28})}{2}=\dfrac{28(u_2-d+u_{27}+d)}{2}=\dfrac{28(u_2+u_{27})}{2}=\dfrac{28.83}{2}=1162$.

Câu 6. Cho dãy cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases}u_1=-2020\\u_{n+1}=u_n+5\end{cases}(\forall n\in\mathbb{N},n\geq 1)$. Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số?

Lời giải

Chọn D

Công sai: $d=5$. Số hạng đầu tiên $u_1=-2020$

Số hạng tổng quát $u_n=u_1+5(n-1)=-2025+5n$

Câu 7. Cho cấp số cộng có $u_1=2$ và $u_2=8$. Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân là:

A. $n(2n-1)$. **B.** $n(3n+1)$.

C. $2n(3n-1)$. **D.** $n(3n-1)$.

Lời giải

Chọn D

Cấp số cộng có $u_1=2$ và $u_2=8$ nên $d=6$.

Ta có: $S_n=\dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}=\dfrac{n\left[2.2+(n-1)6\right]}{2}=n(3n-1)$.

Câu 8 . Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng

A. $u_n=n^2$. **B.** $u_n=(-1)^n n$. **C.** $u_n=\dfrac{n}{3^n}$. **D.** $u_n=2n$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_{n+1}-u_n=2(n+1)-2n=2;\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow u_n=2n$ là cấp số cộng.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) biết $\begin{cases}2u_3-u_6=-17\\S_{10}=105\end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d ?

A. $u_1=-5;\ d=-12$. **B.** $u_1=-12;\ d=5$.

C. $u_1=5;\ d=-12$. **D.** $u_1=-12;\ d=-5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{cases} 2u_3 - u_6 = -17 \\ S_{10} = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = -17 \\ 5(2u_1 + 9d) = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -17 \\ 2u_1 + 9d = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = d - 17 \\ 2(d-17) + 9d = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -12 \\ d = 5 \end{cases}.$$

Câu 10. Cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Tìm số hạng u_1 biết $u_1 \le 100$.

A. $u_1 = 16$. **B.** $u_1 = 2$. **C.** $u_1 = -16$. **D.** $u_1 = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 + u_1 q^4 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{16}(q^3 - 8) = 0 \ (1) \\ u_1(1 + q^4) = 272 \ (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $u_1 \neq 0$, do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q = 2 \end{array}\right.$.

Nếu $q = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 272$ không thỏa điều kiện $u_1 \le 100$.

Nếu $q = 2$ thì $(2) \Leftrightarrow u_1 = 16$ thỏa điều kiện $u_1 \le 100$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là:

A. $S_8 = 3280$. **B.** $S_8 = 9841$. **C.** $S_8 = 3820$. **D.** $S_8 = 1093$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 13 \\ u_1(q^3 - 1) = 26 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^3 - 1}{1 + q + q^2} = \frac{26}{13} \Rightarrow q - 1 = 2 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = 1$$

Vậy $S_8 = \dfrac{1(1 - 3^8)}{1 - 3} = 3280$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4;\ q = -4$. Viết số hạng tổng quát u_n?

A. $-4(-4)^n$. **B.** $(-4)^n$.

C. $4.(-4)^{n-1}$. **D.** 4^n.

Lời giải

Chọn C

Ta có số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1} = 4.(-4)^{n-1}$.

Câu 13. Cho cấp số nhân hữu hạn (u_n) có $u_1 = 3;\ u_2 = 6$. Tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân là:

A. $S_n = 3(2^n - 1)$. **B.** $S_n = 6(2^n - 1)$. **C.** $S_n = 2^n - 1$. **D.** $S_n = 3(2^n - 3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_1 = 3;\ u_2 = 6 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Khi đó: $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{3(1-2^n)}{1-2} = 3(2^n - 1)$.

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 5; u_4 = 135$ và tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 910$. Tìm n ?

A. 362. **B.** 363. **C.** 364. **D.** 365.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_4 = u_1.q^3 \Rightarrow 5.q^3 = 135 \Rightarrow q = 3$.

Khi đó $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow \dfrac{5(1-3^n)}{1-3} = 910 \Rightarrow n = 364$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1; u_n = 2019 - 2018n$. Tìm công sai d?

A. $d = 2018$. **B.** $d = 2019$. **C.** $d = -2019$. **D.** $d = -2018$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$u_n = 2019 - 2018n \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 2019 - 2018n \Leftrightarrow 1 - d + nd = 2019 - 2018n$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - d = 2019 \\ nd = -2018n \end{cases} \Rightarrow d = -2018$.

Câu 16. Cho ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc$. **B.** $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$.

C. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$. **D.** $a^2 - c^2 = ab - bc$.

Lời giải

Chọn C

Vì a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có: $a+c=2b \Leftrightarrow b-a=c-b$

$\Leftrightarrow (b-a)^2=(c-b)^2 \Leftrightarrow b^2-2ab+a^2=c^2-2bc+b^2 \Leftrightarrow a^2-c^2=2ab-2bc.$

Câu 17. Xác định a để 3 số: $1+3a;a^2+5;1-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

A. Không có giá trị nào của a .

B. $a=0$.

C. $a=\pm 1$.

D. $a=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ba số: $1+3a;a^2+5;1-a$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$a^2+5-(1+3a)=1-a-(a^2+5)$

$\Leftrightarrow a^2-3a+4=-a^2-a-4 \Leftrightarrow a^2-a+4=0$. PT vô nghiệm.

Suy ra chọn đáp án A.

Câu 18. Xác định x để 3 số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân:

A. Không có giá trị nào của x.

B. $x=\pm 1$.

C. $x=2$.

D. $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ba số $x-2;\ x+1;\ 3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow (x-2)(3-x)=(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+7=0$ (Phương trình vô nghiệm)

Câu 19. Cho bốn số $2;x;8;y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính $|x|+|y|$.

A. 20 .

B. 36 .

C. 16 .

D. 40 .

Lời giải:

Chọn A

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x^2=16 \\ xy=8^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. \\ xy=64 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=-16 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow |x|+|y|=20$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ biết 4 góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc A bằng 30°. Góc có số đo lớn nhất của tứ giác là

A. $165°$.

B. $156°$.

C. $150°$.

D. $135°$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề ta có: $u_1+u_2+u_3+u_4=360 \Leftrightarrow 30+30+d+30+2d+30+3d=360 \Leftrightarrow d=40$

Khi đó $u_4=u_1+3d=150$.

Vậy góc có số đo lớn nhất của tứ giác là $150°$.

Câu 2. Một cấp số cộng gồm bốn số hạng, biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120. Tìm các số hạng của cấp số cộng đó.

A. $-8,-6,-4,-2$. **B.** $1,3,5,7$. **C.** $2,4,6,8$. **D.** $-7,-5,-3,-1$.

Lời giải

Chọn C

Không mất tính tổng quát, giả sử bốn số hạng của cấp số cộng đó là $a-3x;a-x;a+x;a+3x$ với công sai là $d=2x\left(x\ge 0\right)$.

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}\left(a-3x\right)+\left(a-x\right)+\left(a+x\right)+\left(a+3x\right)=20\\ \left(a-3x\right)^2+\left(a-x\right)^2+\left(a+x\right)^2+\left(a+3x\right)^2=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=20\\ 4a^2+20x^2=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ x=1\end{cases}\left(do\,x\ge 0\right)$$

Vậy bốn số hạng của cấp số cộng cần tìm là $2,4,6,8$.

Câu 3. Xen giữa số 3 và số 768 thêm bảy số hạng để được một cấp số nhân có $u_1=3$. Khi đó u_5 là

A. 72. **B.** -48. **C.** ± 48. **D.** 48.

Lời giải

Chọn D

Từ đề bài ta suy ra $u_1=3$ và $u_9=768$ nên $768=3.q^8\Rightarrow q^8=256\Rightarrow q=\pm 2$, ta loại trường hợp $q=-2$ vì nếu nhận trường hợp này thì sẽ có những số hạng không nằm giữa 3 và 768.

Do đó, $u_5=u_1q^4=3.2^4=48$.

Câu 4. Các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2

A. $x^2+y^2=100$. **B.** $x^2+y^2=25$. **C.** $x^2+y^2=10$. **D.** $x^2+y^2=40$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ta có $\begin{cases}x+6y+8x+y=2\left(5x+2y\right)\\ \left(x-1\right)\left(x-3y\right)=\left(y+2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y=0\\ \left(y+2\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\ y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\ y=-2\end{cases}$.

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Câu 5. Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ \left(c\in\mathbb{Z}\right)$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c.$

A. $P=\dfrac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\dfrac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề ta có: $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2). \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64 \Leftrightarrow 4a-b=4\ (4)$.

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4,\ b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\dfrac{1}{3}$ và $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}u_n$. Tổng $S=u_1+\dfrac{u_2}{2}+\dfrac{u_3}{3}+...+\dfrac{u_{10}}{10}$ bằng

A. $\dfrac{29524}{59049}$. **B.** $\dfrac{1}{243}$. **C.** $\dfrac{3280}{6561}$. **D.** $\dfrac{25942}{59049}$.

Lời giải

Chọn A

$u_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{u_n}{n}$ (1).

Đặt $v_n=\dfrac{u_n}{n}$. Từ (1) suy ra $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$.

Khi đó dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1=u_1=\dfrac{1}{3}$, công bội $q=\dfrac{1}{3}$, có:

$$S=u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+...+\frac{u_{10}}{10}=v_1+v_2+v_3+...+v_{10}$$

Khi đó: $S=v_1.\dfrac{1-q^{10}}{1-q}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{29524}{59049}$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases} (n\geq 1)$. Tính u_6.

A. 191. **B.** 95. **C.** 33. **D.** 47.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{n+1}=2u_n+1\Leftrightarrow u_{n+1}+1=2u_n+2\Leftrightarrow u_{n+1}+1=2(u_n+1)$.

Đặt $v_n=u_n+1$ thì (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=2$; số hạng đầu là $v_1=3$.

Suy ra $v_n=3.2^{n-1}$. Từ đó $u_n=3.2^{n-1}-1,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó, $u_6=3.2^{6-1}-1=95$.

Câu 8. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình $x^3-7x^2+2(m^2+6m)x-8=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

A. -342 **B.** -216 **C.** 344 **D.** 216

lời giải

Chọn A

Gọi $x_1;x_2;x_3$ là nghiệm của phương trình và $x_1<x_2<x_3$

Ta có $x_1;x_2;x_3$ lập thành cấp số nhân nên $x_2^2=x_1.x_3\,(1)$

Theo Viet ta có $x_1+x_2+x_3=\dfrac{-b}{a}=7\,(2)$ và $x_1.x_2+x_2.x_3+x_1.x_3=\dfrac{c}{a}=2(m^2+6m)(3)$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow x_2=\dfrac{2}{7}(m^2+6m)$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình nên ta có

$$\left[\frac{2}{7}(m^2+6m)\right]^3=8\Leftrightarrow m^2+6m-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m_1=1\\m_2=-7\end{array}\right.\Rightarrow m_1^3+m_2^3=-342.$$

Câu 9. Chu vi của một đa giác n cạnh là 158, số đo các cạnh đa giác lập thành một cấp số cộng với công sai $d=3$. Biết cạnh lớn nhất có độ dài là 44. Tính số cạnh của đa giác.

A. 6 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 5

Lời giải

Chọn B.

Ta sắp xếp các cạnh giá trị $u_1;\ldots u_n$ tăng dần theo cấp số cộng là 3. Khi đó ta có:

$$\left\{\begin{array}{l}S_n=158\\u_n=44\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(u_1+44).\dfrac{n}{2}=158\\u_1+3(n-1)=44\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u_1=47-3n\\(47-3n+44).n=316\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 3n^2-91n+316=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4\\n=\dfrac{79}{3}\end{array}\right.$$

Vậy đa giác có 4 cạnh.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để phương trình $x^4+2(2a+1)x^2-3a=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn D

$x^4+2(2a+1)x^2-3a=0\ (1)$

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2+2(2a+1)t-3a=0\ (2)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4a^2 + 7a + 1 > 0 \\ a < -\dfrac{1}{2} \\ t_1 + t_2 = -4a - 2 \\ t_2 = 9t_1 \\ t_2 t_1 = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4a^2 + 7a + 1 > 0 \\ a < -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{12} \\ a = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = -3$$

Câu 11. Người ta trồng 3240 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Lời giải

Chọn C

Giả sử trồng được n hàng cây $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$.

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Theo giả thiết:

$$S_n = 3240 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = 3240 \Leftrightarrow n(n+1) = 6480 \Leftrightarrow n^2 + n - 6480 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 80 \\ n = -81 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, suy ra: $n = 80$.

Vậy có tất cả 80 hàng cây.

Câu 12. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp ba biết rằng sau 4 phút người ta đếm được có 121500 con. Hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 3280500 con.

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Số lượng vi khuẩn tăng lên là cấp số nhân (u_n) có công bội $q = 3$.

Theo đề $u_5 = 121500$. Suy ra $u_1.q^4 = 121500 \Rightarrow 3^4 u_1 = 121500 \Rightarrow u_1 = 1500$.

Sau n phút thì số lượng vi khuẩn là u_{n+1}.

Theo đề $u_{n+1} = 3280500$ hay $u_1.3^n = 3280500 \Rightarrow 1500.3^n = 3280500 \Rightarrow n = 7$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1,\ \forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$.

A. 100. **B.** 101. **C.** 102. **D.** 103.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a_n = 10a_{n-1} - 1 \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{9} = 10\left(a_{n-1} - \frac{1}{9}\right)(1)$.

Đặt $b_n = a_n - \frac{1}{9} \Rightarrow b_1 = a_1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Từ $(1) \Rightarrow b_n = 10b_{n-1}, \forall n \geq 2$

Dãy (b_n) là cấp số nhân với công bội là $q = 10$. Nên $b_n = b_1.q^{n-1} = \frac{8}{9}.10^{n-1}$.

Do đó $a_n = b_n + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9}, \forall n = 1, 2, \ldots$.

Ta có $\log a_n > 100 \Leftrightarrow a_n > 10^{100} \Leftrightarrow \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9} > 10^{100}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$ là $n = 102$.

Câu 2. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia các cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp như trên để được hình vuông $C_3, \ldots$ Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh của hình vuông C_n. Dãy số (a_n) có là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội q.



A. Có và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

B. Có và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

C. Có và công bội $q = \sqrt{10}$.

D. Dãy số không phải là CSN.

Lời giải

Chọn B

Cạnh của hình vuông C_1 là $a_1 = 4$.

Cạnh của hình vuông C_2 là $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a_1$.

Cạnh của hình vuông C_3 là $a_3=\sqrt{\left(\frac{a_2}{4}\right)^2+\left(\frac{3a_2}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a_2$.

Tương tự, ta có $a_n=\sqrt{\left(\frac{a_{n-1}}{4}\right)^2+\left(\frac{3a_{n-1}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a_{n-1}$.

Vậy, dãy số (a_n) là một cấp số nhân với $a_1=4$ và công sai $q=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 3. Trong năm đầu tiên đi làm, anh A được nhận lương là 10 triệu đồng mỗi tháng. Cứ hết một năm, anh A lại được tăng lương, mỗi tháng năm sau tăng 12% so với mỗi tháng năm trước. Mỗi khi lĩnh lương anh A đều cất đi phần lương tăng so với năm ngay trước để tiết kiệm mua ô tô. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì anh A mua được ô tô giá 500 triệu biết rằng anh A được gia đình hỗ trợ 32% giá trị chiếc xe?

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Số tiền anh A cần tiết kiệm là $500-500.0,12=340$ (triệu).

Gọi số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm đầu tiên là $u_1=10$ (triệu).

Thì số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ hai là

$u_2=u_1.(1+0,12)=u_1.1,12$ (triệu).

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ ba là

$u_3=u_1.(1+0,12)^2=u_1.(1,12)^2$ (triệu).

…

Số tiền mà anh A nhận được ở mỗi tháng trong năm thứ n là

$u_n=u_1.(1+0,12)^{n-1}=u_1.(1,12)^{n-1}$ (triệu).

Vậy số tiền mà anh A tiết kiệm được sau n năm là

$12.(u_2-u_1+u_3-u_2+\cdots+u_{n-1}-u_{n-2}+u_n-u_{n-1})=12.(u_n-u_1)=12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right]$.

Cho $12.\left[u_1.(1,12)^{n-1}-u_1\right]=340\Leftrightarrow(1,12)^{n-1}=\frac{23}{6}$.

Thử trực tiếp ta nhận $n=13$.

Vậy sau ít nhất 13 năm thì anh A sẽ tiết kiệm đủ tiền để mua ô tô.

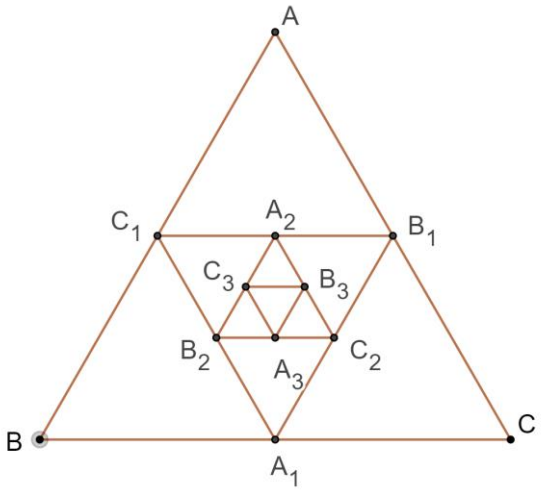
Câu 4. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu

S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$

A. $S = \frac{15\pi}{4}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = \frac{9\pi}{2}$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải

Chọn B



Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi\left(3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi\left(3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_3 = 3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi\left(3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

.....

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy S_1, S_2, ...S_n... là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng $T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + ... + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}$.

A. $\frac{1-2^{19}}{15.2^{18}}$. **B.** $\frac{1-2^{20}}{15.2^{19}}$. **C.** $\frac{2^{19}-1}{15.2^{18}}$. **D.** $\frac{2^{20}-1}{15.2^{19}}$

Lời giải

Chọn B

$$T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + ... + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}$$

$$= \frac{1}{u_1\left(1-q^4\right)} + \frac{1}{u_2\left(1-q^4\right)} + \frac{1}{u_3\left(1-q^4\right)} + ... + \frac{1}{u_{20}\left(1-q^4\right)}$$

$$= \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + ... + \frac{1}{u_{20}}\right) = \frac{1}{1-q^4}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + ... + \frac{1}{u_1 q^{19}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q^4}.\frac{1}{u_1}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^{19}}\right) = \frac{1}{1-q^4}.\frac{1}{u_1}.\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{1-q^4}.\frac{1}{u_1}.\frac{1-(q)^{20}}{(1-q)q^{19}} = \frac{1-2^{20}}{15.2^{19}}.$$

Câu 6. Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_{2018} bằng

A. $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

C. $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{3}.\frac{1}{n+1}$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{3}\left(u_n - \frac{1}{n+1}\right) \quad (1)$$

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{n+1}$, từ (1) ta suy ra: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{n+1}$.

Vậy $u_{2018} = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2017} + \frac{1}{2019} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

Câu 7. Giá trị của tổng $4+44+444+...+44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng) bằng

A. $\frac{40}{9}\left(10^{2018}-1\right)+2018$.

B. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

C. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}+2018\right)$.

D. $\frac{4}{9}\left(10^{2018}-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đặt $S = 4+44+444+...+44...4$ (tổng đó có 2018 số hạng). Ta có:

$$\frac{9}{4}S = 9+99+999+...+99...9 = \left(10-1\right)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+...\left(10^{2018}-1\right)$$

Suy ra: $\frac{9}{4}S = \left(10+10^2+10^3+...+10^{2018}\right)-2018 = A-2018$.

Với $A = 10+10^2+10^3+...+10^{2018}$ là tổng 2018 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$, công bội $q = 10$ nên ta có $A = u_1\frac{1-q^{2018}}{1-q} = 10\frac{1-10^{2018}}{-9} = \frac{10^{2019}-10}{9}$.

Do đó $\frac{9}{4}S = \frac{10^{2019}-10}{9}-2018 \Leftrightarrow S = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

Cách 2: Xét dãy số có $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 10u_n + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} + \frac{4}{9} = 10\left(u_n + \frac{4}{9}\right) \end{cases}$

Đặt $v_n = u_n + \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{40}{9} \\ v_{n+1} = 10v_n \end{cases} \Rightarrow v\left(n\right)$ là cấp số nhân.

Ta có: $S_n = u_1+u_2+.....+u_{2018} = v_1-\frac{4}{9}+v_2-\frac{v}{9}...+v_{2018}-\frac{4}{9} = v_1+v_2+...+v_{2018}-\frac{2018.4}{9}$

Trong đó $S_{v(2018)} = \frac{1-q^n}{1-q}.v_1 = \frac{1-10^{2018}}{1-10}.\frac{40}{9} = \frac{40.\left(10^{2018}-1\right)}{81}$

Vậy tổng là $S = \frac{40}{81}\left(10^{2018}-1\right)-\frac{4}{9}.2018 = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019}-10}{9}-2018\right)$.

Câu 8. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ như sau: $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n = 1,\ 2,...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_1+u_2+...+u_n\right)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=\frac{n}{\left(1+n^2\right)^2-n^2}=\frac{n}{\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Ta có $u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{21}+...+\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$.

Suy ra $\lim\left(u_1+u_2+...+u_n\right)=\frac{1}{2}\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln\left(2u_1+6u_2\right)$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ bằng.

A. 100. **B.** 99. **C.** 101. **D.** 102.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln\left(2u_1+6u_2\right)\Leftrightarrow u_1^2+u_2^2+10=2u_1+6u_2$

$\Leftrightarrow\left(u_1-1\right)^2+\left(u_2-3\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=3\end{cases}$.

Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$ với $n\geq 1\Rightarrow v_1=u_2-u_1=2$.

Theo giả thiết: $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1\Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1\Leftrightarrow v_{n+1}=v_n+1,\ \forall n\geq 1$.

Suy ra $\left(v_n\right)$ là cấp số cộng có công sai $d=1$.

Ta có: $u_{n+1}=\underbrace{u_{n+1}-u_n}_{v_n}+\underbrace{u_n-u_{n-1}}_{v_{n-1}}+...+\underbrace{u_3-u_2}_{v_2}+\underbrace{u_2-u_1}_{v_1}+u_1=S_n+u_1$.

Với $S_n=v_1+v_2+...+v_n=\frac{n}{2}\left(v_1+v_n\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$.

Suy ra: $u_{n+1}=\frac{n\left(n-1\right)}{2}+1\Rightarrow u_n=\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{2}+1$.

Ta có: $u_n>5050\Leftrightarrow\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{2}+1>5050\Leftrightarrow n^2-3n-10096>0\Leftrightarrow n>101{,}99$.

Vậy số n nhỏ nhất thỏa yêu cầu là 102.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)u_n} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính u_{2018}.

A. $u_{2018} = 7 + 5\sqrt{2}$. **B.** $u_{2018} = 2$. **C.** $u_{2018} = 7 - 5\sqrt{2}$. **D.** $u_{2018} = 7 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\tan\alpha = 2$. Ta có $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Suy ra $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \tan\dfrac{\pi}{8}}{1 - \tan\dfrac{\pi}{8}.u_n}$

Có $u_2 = \dfrac{\tan\alpha + \tan\dfrac{\pi}{8}}{1 - \tan\dfrac{\pi}{8}.\tan\alpha} = \tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n = \tan\left[\alpha + (n-1)\dfrac{\pi}{8}\right]$.

Vậy $u_{2018} = \tan\left(\alpha + \dfrac{2017\pi}{8}\right) = \tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\dfrac{\pi}{8}}{1 - \tan\alpha.\tan\dfrac{\pi}{8}} = 7 + 5\sqrt{2}$.

Câu 11. Trong dịp hội trại hè 2017, bạn Anh thả một quả bóng cao su từ độ cao $6(\text{m})$ so với mặt đất, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt đất. Tổng quãng đường quả bóng đã bay (từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa) khoảng:

A. $44(\text{m})$. **B.** $45(\text{m})$. **C.** $42(\text{m})$. **D.** $43(\text{m})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có quãng đường bóng bay bằng tổng quảng đường bóng nảy lên và quãng đường bóng rơi xuống.

Vì mỗi lần bóng nảy lên bằng $\dfrac{3}{4}$ lần nảy trước nên ta có tổng quãng đường bóng nảy lên là

$S_1 = 6.\dfrac{3}{4} + 6.\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 6.\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 + \ldots + 6.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 6.\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{2}$ và công bội $q = \dfrac{3}{4}$.

Suy ra $S_1 = \dfrac{\dfrac{9}{2}}{1 - \dfrac{3}{4}} = 18$.

Tổng quãng đường bóng rơi xuống bằng khoảng cách độ cao ban đầu và tổng quãng đường bóng nảy lên nên là $S_2 = 6 + 6.\left(\frac{3}{4}\right) + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + 6.\left(\frac{3}{4}\right)^n + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 6$ và công bội $q = \frac{3}{4}$. Suy ra $S_2 = \frac{6}{1 - \frac{3}{4}} = 24$.

Vậy tổng quãng đường bóng bay là $S = S_1 + S_2 = 18 + 24 = 42$.

Câu 12. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC.
Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$?

A. $S = \frac{15\pi}{4}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = \frac{9\pi}{2}$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải

Chọn B

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi\left(3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi\left(3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_3 = 3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi\left(3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

.....

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy S_1, S_2, ...S_n... là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

DẠNG TOÁN 2: CẤP SỐ CỘNG

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Cấp số cộng :

✪ Định nghĩa:

- u_n là cấp số cộng nếu $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*, d$ là hằng số.
- Công sai $d = u_{n+1} - u_n$.

✪ Số hạng tổng quát:

- $u_n = u_1 + (n-1)d, (n \geq 2)$.
- $d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$

✪ Tính chất:

$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$ hay $u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k$

✪ Tổng *n* số hạng đầu:

$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ hay $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

2. Cấp số nhân.

✪ Định nghĩa:

- u_n là cấp số nhân nếu $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in \mathbb{N}^*, q$ là hằng số.
- Công bội $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

✪ Số hạng tổng quát:

• $u_n = u_1.q^{n-1}, (n \geq 2)$.

✪ **Tính chất:**

$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$ hay $|u_k| = \sqrt{u_{k+1}.u_{k-1}}$, $(k \geq 2)$

✪ **Tổng *n* số hạng đầu:**

$S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ với $q \neq 1$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Nhận dạng, khai triển cấp số cộng
• Xác định U1, d, n, Un, Sn của cấp số cộng (cụ thể)
• Xác định Un, Sn của cấp số cộng (tổng quát)
• Bài toán khác liên quan tổng của CSC
• Điều kiện để dãy số thành CSC
• ĐK để nghiệm pt lập thành CSC
• Toán đố, toán thực tế, liên môn về CSC
• Nhận dạng, khai triển cấp số nhân
• Xác định U1, q, n, Un, Sn của cấp số nhân(cụ thể)
• Xác định Un, Sn (tổng quát) của cấp số nhân
• Bài toán khác liên quan tổng của CSN
• Điều kiện để dãy số thành CSN
• Toán tổng hợp cả CSC và CSN
• Toán đố, toán thực tế, liên môn về CSN

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 3, u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 12. **D.** -6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm công sai của cấp số cộng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Sử dụng công thức $d = u_2 - u_1$ tính d

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_1 = 3, u_2 = 9$ nên $d = u_2 - u_1 = 9 - 3 = 6.$

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Công thức nào sau đây đúng với cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d ?

A. $u_n = u_1 + d$.

B. $u_n = u_1 + nd$.

C. $u_n = u_1 + (n-1)d$.

D. $u_n = u_1 + (n+1)d$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d$

Câu 2. Công thức nào sau đây đúng với cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d ?

A. $u_{11} = u_1 + u_{10}$. **B.** $u_{11} = u_1 + u_{11}$. **C.** $u_{11} = \dfrac{u_{10} + u_{12}}{2}$. **D.** $u_{11} = \dfrac{u_{10} - u_{12}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $u_{11} = \dfrac{u_{10} + u_{12}}{2}$

Câu 3. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $-1;0;1;2;3....$ **B.** $-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}....$ **C.** $-3;3;-3;3;-3....$ **D.** $1;3;9;27;....$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào định nghĩa cấp số cộng.

Câu 4. Hãy chọn khẳng định đúng

A. Dãy số tăng là một cấp số cộng.

B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là cấp số cộng với công sai bằng 1.

C. Một cấp số cộng có công sai dương là dãy số tăng.

D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào định nghĩa cấp số cộng.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai d. Tổng n số hạng đầu là

A. $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2}$. **B.** $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$. **C.** $S_n = \frac{n(2u_1 + u_n)}{2}$. **D.** $S_n = \frac{u_1 + (n-1)d}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Dựa vào tổng n số hạng đầu tiên.

Câu 6: Trong các dãy số hữu hạn dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $1;-3;-7;-11;-15$. **B.** $1;0;1;0;1$. **C.** $2;4;8;16;32$. **D.** $1;3;5;7;9$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định nghĩa cấp số nhân.

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -2$. Số hạng thứ 5 của cấp số nhân (u_n) bằng bao nhiêu ?

A. $u_5 = -7$. **B.** $u_5 = 16$. **C.** $u_5 = -32$. **D.** $u_5 = -9$.

Lời giải

Chọn B

$u_5 = u_1.q^4 = 1.(-2)^4 = 16$

Câu 8: Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức :

A. $u_n = u_1 + (n-1)q$ với $n \geq 2$. **B.** $u_n = u_1.q^n$ với $n \geq 2$.

C. $u_n = u_1.q^{n+1}$ với $n \geq 2$. **D.** $u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng định nghĩa cấp số nhân.

Câu 9: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 0$ và công bội $q = \frac{1}{3}$. Số hạng thứ 75 của cấp số nhân (u_n) bằng bao nhiêu ?

A. $u_7 = 7$. **B.** $u_7 = 0$. **C.** $u_7 = \left(\frac{1}{3}\right)^6$. **D.** $u_7 = 2$.

Lời giải

Chọn B.

Khi $u_1 = 0$ thì tất cả các số hạng của cấp số nhân đều bằng 0.

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 6$. Hãy tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 5$. **B.** $q = -5$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = 6$.

Lời giải

Chọn D

$q = \dfrac{u_2}{u_1} = 6$

Mức độ 2

Câu 1. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -1; d = -2$. Hãy chọn kết quả đúng

A. Dạng khai triển $-1;0;1;2;3\ldots$. **B.** Dạng khai triển $-1;0;2;3;4\ldots$.

C. Dạng khai triển $-1;-3;-5;-7\ldots$. **D.** Dạng khai triển $-1;1;3;5\ldots$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_1 = -1; d = -2$.

$u_2 = u_1 + d = -1 + (-2) = -3$
$u_3 = u_2 + d = -3 + (-2) = -5$
$u_4 = u_3 + d = -5 + (-2) = -7$
...

Dạng khai triển là $-1;-3;-5;-7...$

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -0,1; d = 0,1$. Tìm số hạng thứ 7 của cấp số cộng này

A. $1,6$ **B.** 6 **C.** $0,5$ **D.** $0,6$

Lời giải:

Chọn C

Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow u_7 = u_1 + 6d = -0,1 + 6.(0,1) = 0,5$

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2; d = -0,1$. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng này

A. $-7,9$. **B.** -100. **C.** $7,9$. **D.** 99.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_{100} = u_1 + 99d = 2 + 99.(-0,1) = -7,9$

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tìm d?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

$u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 27 = -3 + 5d \Leftrightarrow d = 6$

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}; u_8 = 26$. Tìm d?

A. $\frac{11}{3}$. **B.** $\frac{3}{11}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Lời giải.

Chọn A

Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 26 = \frac{1}{3} + 7d \Leftrightarrow d = \frac{11}{3}$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

A. Số hạng thứ 6 **B.** Số hạng thứ 5

B. Số hạng thứ 7 **C.** Số hạng thứ 4

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_1 = 3; q = -2; u_n = 192$

$u_n = u_1.q^{n-1}$

$\Leftrightarrow 192 = 3.(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = 64 \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6 \Leftrightarrow n = 7$

Vậy $n = 7$.

Câu 7. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu là 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó. Giá trị của q bằng bao nhiêu ?

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_1 = 2; u_6 = 486$

$u_6 = u_1.q^5$

$\Leftrightarrow 486 = 2.q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q^5 = 3^5 \Leftrightarrow q = 3$

Vậy $q = 3$.

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) biết công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng thứ tư $u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm số hạng đầu u_1 .

A. $u_1 = \frac{9}{7}$. **B.** $u_1 = \frac{27}{14}$. **C.** $u_1 = -\frac{34}{21}$. **D.** $u_1 = -\frac{16}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$u_4 = u_1.q^3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = \frac{9}{7}$

Câu 9: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 3^n$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q.

A. $u_1 = 3; q = 3$. **B.** $u_1 = 0; q = 3$. **C.** $u_1 = 3; q = -3$. **D.** $u_1 = 0; q = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow q = 3$

Vậy $u_1 = 3; q = 3$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $A = 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n$; $n \in N^*$.

A. $A = \frac{2^n + 2}{2}$. **B.** $A = 2(2^n - 1)$. **C.** $A = 2(2^n + 1)$. **D.** $A = \frac{2(2^n + 1)}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: các số hạng của tổng A lập thành cấp số nhân với $u_1 = 2; q = 2$

Vậy $A = S_n = u_1.\frac{1 - q^n}{1 - q} = 2.\frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2\left(2^n - 1\right)$

Mức độ 3

Câu 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$.

Tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + ... + \frac{u_{10}}{10}$ bằng

A. $\frac{29524}{59049}$. **B.** $\frac{1}{243}$. **C.** $\frac{3280}{6561}$. **D.** $\frac{29542}{59049}$.

Lời giải:

Chọn A

$u_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n}u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\dfrac{u_n}{n}\ (1).$

Đặt $v_n=\dfrac{u_n}{n}$. Từ (1) suy ra $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$.

Khi đó dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_n=u_1=\dfrac{1}{3}$, công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

$$S=u_1+\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\cdots+\frac{u_{10}}{10}=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{10}=v_1\cdot\frac{1-q^{10}}{1-q}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{29524}{59049}$$

Câu 2. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n). Biết $\dfrac{S_6}{S_3}=4$, tính $\dfrac{S_9}{S_{12}}$.

A. $\dfrac{S_9}{S_{12}}=0,325$. **B.** $\dfrac{S_9}{S_{12}}=0,485$. **C.** $\dfrac{S_9}{S_{12}}=0,246$. **D.** $\dfrac{S_9}{S_{12}}=0,675$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_n=u_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, với q là công bội của cấp số nhân.

Do $\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{q^6-1}{q^3-1}=\dfrac{(q^3-1)(q^3+1)}{q^3-1}=q^3+1=4\Leftrightarrow q^3=3$.

Do vậy $\dfrac{S_9}{S_{12}}=\dfrac{q^9-1}{q^{12}-1}=\dfrac{3^3-1}{3^4-1}=0,325$.

Câu 3. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) biết $u_1+u_2+u_3=168$ và $u_4+u_5+u_6=21$.

A. $u_1=24$. **B.** $u_1=\dfrac{1344}{11}$. **C.** $u_1=96$. **D.** $u_1=\dfrac{217}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi q là công bội của cấp số nhân, khi đó ta có

$$\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=168\\u_1q^3+u_1q^4+u_1q^5=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=168\\q^3\left(u_1+u_1q+u_1q^2\right)=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q^3=\dfrac{1}{8}\\u_1+u_1q+u_1q^2=168\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\dfrac{1}{2}\\u_1=96\end{cases}$$

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội $q=2$. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó là

A. $1°$. **B.** $30°$. **C.** $12°$. **D.** $24°$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là $x, 2x, 4x, 8x$.

Ta có: $x+2x+4x+8x=360° \Leftrightarrow 15x=360° \Leftrightarrow x=24°$.

Câu 5. Cho các số $x+2$, $x+14$, $x+50$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Khi đó x^3+2018 bằng:

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2027. **D.** 2082.

Lời giải:

Chọn D

Yêu cầu bài toán tương đương

$(x+2)(x+50)=(x+14)^2 \Leftrightarrow x^2+52x+100=x^2+28x+196 \Leftrightarrow x=4$

Khi đó $x^3+2018=2082$

Câu 6. Cho ba số x, 5, $2y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và ba số x, 4, $2y$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì $|x-2y|$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} 5=\dfrac{x+2y}{2} \\ x.2y=4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=10 \\ x.2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ 2y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=8 \\ 2y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow |x-2y|=6$

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và biểu thức $20u_1-10u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân (u_n).

A. 2000000. **B.** 136250. **C.** 31250. **D.** 39062.

Lời giải:

Chọn C

Sử dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân $u_n=u_1q^{n-1}$.

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có:

$20u_1-10u_2+u_3=20u_1-10u_1q+u_1q^2=40-20q+2q^2=2\left(q^2-10q+25\right)-10=2(q-5)^2-10\geq -10$

Dấu bằng xảy ra khi $q=5$.

Suy ra $u_7=31250$

Câu 8. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng một bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn D

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ tầng 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{12288}{2}=6144$.

Khi đó diện tích tầng trên cùng là: $u_{11}=u_1\cdot q^{10}=6144\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=6$.

Câu 9. Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, số thứ 2 thêm 1, số thứ 3 thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp trong một cấp số nhân. Tính $a+b+c$.

A. 12. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 18.

Lời giải:

Chọn B

Do a, b, c là ba số liên tiếp trong một cấp số cộng có công sai là 2 nên $b=a+2, c=a+4$.

$a+1, a+3, a+7$ là ba số liên tiếp trong một cấp $\Leftrightarrow(a+1)(a+7)=(a+3)^2\Leftrightarrow a=1$.

Với $a=1\Rightarrow\begin{cases}b=3\\c=5\end{cases}$.

Suy ra $a+b+c=9$.

Câu 10. Xác định a để ba số $1+2a, 2a^2-1, -2a$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** ±3. **D.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Chọn D

Theo công thức cấp số cộng ta có: $2(2a^2-1)=(1+2a)+(-2a)\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

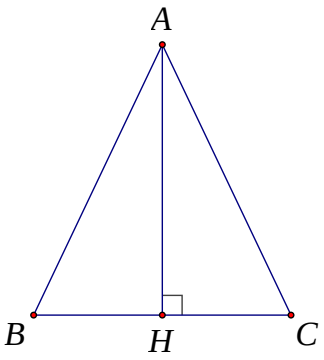
↳ Mức độ 4

Câu 1. Cho tam giác ABC cân ($AB=AC$), có cạnh đáy BC, đường cao AH, cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tính công bội q của cấp số nhân đó?

A. $\frac{1}{3}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$. **B.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$. **C.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{3}+1)}$. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{3(\sqrt{2}+1)}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết: $AB = AC$ và BC, AH, AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q} = \dfrac{BC}{AH} = \dfrac{2HC}{AH} = 2\cot C \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{AH}{AB} = \sin B = \sin C \end{cases} \Rightarrow 2\cot C = \sin C$$

hay: $2\cos C = \sin^2 C = 1 - \cos^2 C \Leftrightarrow \cos^2 C + 2\cos C - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos C = -1 + \sqrt{2} \quad \left(0 < C < 90^0\right)$

Do C là góc nhọn nên $\sin C = \sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}$

Cho nên công bội của cấp số nhân là: $q = \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\sqrt{2} - 1\right)}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{2} + 1\right)}$.

Câu 2. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $\tan A, \tan B, \tan C$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Giá trị nhỏ nhất của góc B có thể là

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết: $\tan A, \tan B, \tan C$ lập thành cấp số cộng ta có: $\tan A + \tan C = 2\tan B$

$$\tan A + \tan C = \frac{\sin(A + C)}{\cos A.\cos C} = \frac{\sin B}{\cos A.\cos C} \Rightarrow \frac{2\sin B}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos A.\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos A.\cos C} \Leftrightarrow 2\cos A.\cos C = \cos B \Leftrightarrow \cos(A + C) + \cos(A - C) = \cos B$$

$$\Leftrightarrow -\cos B + \cos(A - C) = \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2}\cos(A - C) \le \frac{1}{2} \quad (2)(\text{vì } 0 < \cos(A - C) \le 1)$$

Do $0 < B < \pi \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{\pi}{3}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $A=90°$, $BC=a, AC=b, AB=c$ và $a, \frac{\sqrt{6}}{3}b, c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Độ dài đường cao $AH\,(H\in BC)$ là

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{b\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{b}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} A=90^0 \\ CSN: a, \frac{\sqrt{6}}{3}b, c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ \frac{2}{3}b^2=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ b^2=\frac{3}{2}ac \end{cases}$

Từ đó suy ra:

$a^2=\frac{3}{2}ac+c^2 \Leftrightarrow 2a^2=3ac+2c^2 \Leftrightarrow (2a+c)(a-2c)=0 \Rightarrow a=2c, (2a+c>0)$

Mà: $\cos B=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow B=60^0, C=30^0$

Xét tam giác AHC vuông tại H ta có: $AH=AC.\sin C=b.\sin 30°=\frac{b}{2}$.

Câu 4. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ có bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng là

A. $\frac{-70}{19}$. **B.** 5. **C.** $\frac{-25}{19}$. **D.** $\frac{70}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử bốn nghiệm phân biệt của phương trình: x_1, x_2, x_3, x_4

Đặt $y=x^2$, ta được phương trình: $y^2-(3m+5)y+(m+1)^2=0\ (1)$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm dương phân biệt: $0<y_1<y_2$. Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm là: $x_1=-\sqrt{y_2}, x_2=-\sqrt{y_1}, x_3=\sqrt{y_1}, x_4=\sqrt{y_2}$

Theo đề bài bốn nghiệm lập thành cấp số công, nên: $x_1+x_3=2x_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}=-2\sqrt{y_1} \Leftrightarrow 3\sqrt{y_1}=\sqrt{y_2} \Leftrightarrow 9y_1=y_2$

Áp dụng Vi-et cho phương trình (1) ta có hệ: $\begin{cases} \Delta=(3m+5)^2-4(m+1)^2>0 \\ S=y_1+y_2=10y_1=3m+5 \\ P=y_1.y_2=(m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-\frac{25}{19} \end{cases}$

Vậy tổng cần tìm là: $5+\left(-\frac{25}{19}\right)=\frac{70}{19}$

Câu 5. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là $1,8,22,43,...$ Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng: $7,14,21,...,7n$. Số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho?

A. 100. **B.** 101. **C.** 102. **D.** 103.

Lời giải:

Chọn B

Theo đề bài ta có $\begin{cases} u_2-u_1=7 \\ u_3-u_2=14 \\ u_4-u_3=21 \\ ..... \\ u_n-u_{n-1}=7(n-1) \end{cases}$

Công các vế của các phương trình của hệ ta được:

$\Leftrightarrow u_n-u_1=7+14+21+...+7(n-1)=7\frac{n(n-1)}{2}$

Đặt: $u_n=35351\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 35351-1=7\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow n^2-n-10100=0\rightarrow n=101$

Vậy số 35351 là số hạng thứ 101 của dãy số

Câu 6. Cho phương trình: $x^3+3x^2-(24+m)x-26-n=0$. Hệ thức liên hệ giữa m và n để phương trình có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng?

A. $m=-n$. **B.** $m=n$. **C.** $m=1-n$. **D.** $m=1+n$.

Lời giải:

Chọn B

Vì 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 của phương trình lập thành một cấp số cộng, nên ta có thể đặt:

$x_1=x_0-d,x_2=x_0,x_3=x_0+d;(d\neq 0)$. Suy ra

$x^3+3x^2-(24+m)x-26-n=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=(x-x_0+d)(x-x_0)(x-x_0-d)=x^3-3x_0x^2+(3x_0^2-d^2)x-x_0^3+x_0d^2\ (\forall x)$

Đồng nhất hệ số ở hai vế của phương trình ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} -3x_0=3 \\ 3x_0^2-d^2=-(24+m) \\ -x_0^3+x_0d^2=-26-n \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=-1 \\ 3-d^2=-24-m \\ 1-d^2=-26-n \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=-1 \\ m=n \end{cases}$

Vậy với $m=n$ thì 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng ?.

Câu 7. Khi ký hợp đồng dài hạn 10 năm với các công nhân tuyển dụng, công ty X, đề xuất phương án trả lương như sau: Người lao động sẽ nhận 7 triệu ở quý đầu tiên (một quí là ba tháng), và kể từ quí làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng 500.000 đồng mỗi quí. Như vậy sau 10 năm làm việc, hết hạn hợp đồng, tổng số tiền lương người lao động đã nhận được là bao nhiêu?

A. $137,5$ triệu. **B.** 670 triệu. **C.** 570 triệu. **D.** 610 triệu.

Lời giải:

Chọn B

Số tiền nhận được hàng quý là một số hạn của cấp số cộng hữu hạn với số hạng đầu tiên là: $u_1 = 7$ (triệu), công sai là $0,5$ (triệu). Trong 10 năm sẽ có 40 quý, nên cấp số cộng trên có 40 số hạng .

Từ đó ta có tổng số tiền lương người lao động đã nhận được là

$S_{40} = \frac{40}{2}(2u_1 + (40-1).d) = \frac{40}{2}(2.7 + (40-1).0,5) = 670$ (triệu).

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = 1 + mx^2, m \neq 0$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2019; 2019]$ để phương trình $f(f(x)) = x$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

A. -2037171. **B.** -2035153. **C.** -2039190. **D.** -2401210.

Lời giải:

Chọn C

Phương trình tương đương với:

$1 + m(1 + mx^2)^2 = x \Leftrightarrow m(1 + mx^2)^2 + 1 + mx^2 = x + mx^2$

$\Leftrightarrow m\left[(1 + mx^2)^2 - x^2\right] + (1 + mx^2 - x) = 0$

$\Leftrightarrow m(1 + mx^2 - x)(1 + mx^2 + x) + (1 + mx^2 - x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + mx^2 - x)\left[m(1 + mx^2 + x) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + mx^2 - x = 0 \\ m^2x^2 + mx + m + 1 = 0 \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt thì mỗi phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm của hai phương trình phải khác nhau

Điều kiện mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$\left\{\begin{array}{l} m \neq 0 \\ 1 - 4m > 0 \\ m^2 \neq 0 \\ m^2 - 4m^2(m+1) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m < -\frac{3}{4}$

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung khi đó nghiệm chung là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+mx^2-x=0 \\ m^2x^2+mx+m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-x+1=0 \\ m\left(mx^2-x+1\right)+2mx+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2-x+1=0 \\ 2mx+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}(2mx+1)-\frac{3}{2}x+1=0 \\ 2mx+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ m=-\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy điều kiện các nghiệm của hai phương trình phải khác nhau là $m \neq -\frac{3}{4}$.

Vậy với $m < -\frac{3}{4}$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Ta lại có m là số nguyên thuộc $[-2019;2019]$ suy ra $m \in \{-2019;-2018;...;-1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là:

$$-1-2-3-...-2019=-(1+2+3+...+2019)=-\frac{1}{2}.2019.2020=-2039190.$$

Câu 9. Ông Nam gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Nam nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và ông Nam không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 1.686.898.000 đồng. **B.** 743.585.000 đồng.

C. 739.163.000 đồng. **D.** 1.335.967.000 đồng.

Lời giải:

Chọn D

Số tiền (triệu đồng) trong tài khoản của ông Nam biến động như sau:

Sau 1 năm: $200.(1+7\%)$.

Sau 2 năm: $(200.(1+7\%)+20)(1+7\%)=200.(1+7\%)^2+20.(1+7\%)$.

Sau n năm: $200.(1+7\%)^n+20.(1+7\%)^{n-1}+...+20.(1+7\%)$

$$=200.(1+7\%)^n+20.(1+7\%)\frac{(1+7\%)^{n-1}-1}{7\%}$$

Suy ra sau 18 năm số tiền ông Nam nhận được cả gốc lẫn lài là:

$$200.(1+7\%)^{18}+20.(1+7\%).\frac{(1+7\%)^{17}-1}{7\%}=1.335,967 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 10. Anh An vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%/1$ tháng theo phương thức trả góp. Cứ mỗi tháng anh An trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và trả như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi bao nhiêu tháng thì anh An trả được hết nợ ngân hàng? (Biết lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. 21 tháng. **B.** 23 tháng. **C.** 22 tháng. **D.** 20 tháng.

Lời giải:

Chọn C

Diễn biến số nợ của anh An như sau:

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1 là $T_1 = 100(1+0,007)-5$

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 2 là $T_2 = T_1(1+0,007)-5$

$= [100(1+0,007)-5](1+0,007)-5 = 100(1+0,007)^2 - 5(1+0,007)-5$

…..

Số tiền còn nợ sau tháng thứ n

$T_n = 100(1+0,007)^n - 5.\left[(1+0,007)^{n-1} + (1+0,007)^{n-2} + ... + 1\right]$

$= 100(1+0,007)^n - 5.\dfrac{(1+0,007)^n - 1}{0,007}$

Do đó:

$T_n = 0 \Leftrightarrow 100(1+0,007)^n - 5.\dfrac{(1+0,007)^n - 1}{0,007} = 0$

$\Leftrightarrow 4,3(1+0,007)^n = 5 \Leftrightarrow 1,007^n = \dfrac{5}{4,3} \Leftrightarrow n \approx 21,736$

Vậy sau 22 tháng, anh An trả hết nợ.

DẠNG TOÁN 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH -BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Các công thức thường dùng để giải phương trình bất phương trình logarit

- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$. Nếu $\log_a \left[f(x) \right]^\alpha = \alpha \log_a \left| f(x) \right|$ với α chẵn; $f(x) \neq 0$.
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$.
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_a b}$.

Phương trình logrit cơ bản: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ và $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Bất phương trình logarit cơ bản:

Với $a > 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Với $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Các công thức thường dùng để giải phương trình mũ

- $(a)^{m+n} = a^m . a^n$.
- $(a)^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.
- $\left[(a)^m \right]^n = a^{m.n}$
- $(a.b)^n = a^n . b^n$.
- $\left(\dfrac{a}{b} \right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $\left(\dfrac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a} \right)^n$.

Phương trình mũ cơ bản: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ và $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Bất phương trình mũ cơ bản:

Với $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

Với $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

A. $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán giải phương trình mũ.

2. HƯỚNG GIẢI

B1: Đưa về cùng cơ số.

B2: Áp dụng công thức $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

B3: Tìm nghiệm của phương trình.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Phương trình $4^{3x-2}=16$ có nghiệm là

A. $x=\frac{3}{4}$. **B.** $x=5$. **C.** $x=\frac{4}{3}$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4^{3x-2}=16 \Leftrightarrow 3x-2=2 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{4}{3}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là

A. $x=4$. **B.** $x=\frac{7}{2}$. **C.** $x=\frac{9}{2}$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn D

$\log_3(2x-1)=2 \Leftrightarrow 2x-1=3^2 \Leftrightarrow x=5.$

Câu 3. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x-4}=\dfrac{1}{16}$ là

A. $\{0;1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{2;4\}$. **D.** $\{-2;2\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{x^2-x-4}=\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{x^2-x-4}=2^{-4} \Leftrightarrow x^2-x-4=-4 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{0;1\}$.

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $\pi^{2x^2+x-3}=1$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\pi^{2x^2+x-3}=1 \Leftrightarrow 2x^2+x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 5. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x}>3^{x+4}$.

A. $S=(-\infty;4)$. **B.** $D=(0;4)$. **C.** $S=(-4;+\infty)$. **D.** $S=(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3^{2x}>3^{x+4} \Leftrightarrow 2x>x+4 \Leftrightarrow x>4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(4;+\infty)$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=3^{100}$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 101. **D.** 99.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{x+1}=3^{100} \Leftrightarrow x+1=100 \Leftrightarrow x=99.$

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>4$ là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < -2.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -2)$.

Câu 8. Số nghiệm thực của phương trình $9^{x^2+4x+3} = 1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $9^{x^2+4x+3} = 1 \Leftrightarrow 9^{x^2+4x+3} = 9^0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$phương trình có hai nghiệm thực.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x-1) > 3$ là:

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(14;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};14\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện của bpt là $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Do cơ số $a = 3$ nên ta có: $\log_3(2x-1) > 3 \Rightarrow 2x - 1 > 27 \Rightarrow x > 14$

Kết hợp điều kiện của bpt ta được tập nghiệm là T= $(14;+\infty)$.

Câu 10. Phương trình $5^{x^2-2x+1} = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $5^{x^2-2x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Nên phương trình có 1 nghiệm.

Mức độ 2

Câu 1. Từ phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x - 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 3$ đặt $t = \left(\sqrt{2}-1\right)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

A. $t^3 - 3t - 2 = 0$. **B.** $2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$. **C.** $2t^3 + 3t - 1 = 0$. **D.** $2t^2 + 3t - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$ và $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2}$.

Đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x$, $t>0$. Suy ra $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2x}}=\dfrac{1}{t^2}$.

Phương trình đã cho được viết lại: $\dfrac{1}{t^2}-2t=3\Leftrightarrow 2t^3+3t^2-1=0$.

Câu 2. Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3=0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3=0$. **B.** $2t^2-3=0$. **C.** $t^2+2t-3=0$. **D.** $4t-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3=0\Leftrightarrow\left(2^{x^2-2x}\right)^2+2^3.2^{x^2-2x}-3=0$.

Kho đó, đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2+8t-3=0$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $4^{x+\frac{1}{2}}-5.2^x+2=0$.

A. $S=\{-1;1\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{1\}$. **D.** $S=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4^{x+\frac{1}{2}}-5.2^x+2=0\Leftrightarrow 2.2^{2x}-5.2^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=\dfrac{1}{2}=2^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{-1;1\}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}$ là.

A. $\log_{\frac{3}{4}}\dfrac{3}{2}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{4}$. **D.** $x=\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}\Leftrightarrow 3.2^x=4.3^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{4}$.

Câu 5. Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 $\left(x_1<x_2\right)$. Giá trị của biểu thức $A=2x_1+3x_2$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $4\log_2 3$. **D.** $3\log_3 2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$ $\left(t>0\right)$, khi đó phương trình trở thành $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\left(tm\right)$

Với $t=1$ ta có $3^x=1\Leftrightarrow x=0$

Với $t=2$ ta có $3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2$

Suy ra phương trình có hai nghiệm là $x_1=0$ và $x_2=\log_3 2$

Vậy $A=2x_1+3x_2=2.0+3\log_3 2=3\log_3 2$.

Câu 6. Biết x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $16^x-3.4^x+2=0$. Tích $P=4^{x_1}.4^{x_2}$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $16^x-3.4^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x=1\\4^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

$\Rightarrow P=4^0.4^{\frac{1}{2}}=2$.

Câu 7. Kí hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$. Giá trị của $|x_1-x_2|$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3\Leftrightarrow\left(2^{x^2-x}\right)^2+2.2^{x^2-x}-3=0\quad(*)$.

Đặt $t=2^{x^2-x}$, $t>0$.

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành:

$t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.$. Đối chiếu với điều kiện $t>0$ ta được $t=1$.

Với $t=1$, ta có $2^{x^2-x}=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy $|x_1-x_2|=1$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}>3^{-x}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\geq -2$

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \sqrt{x+2} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Câu 9. Cho bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \le 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2 + b^2\right)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \le 0 \Leftrightarrow 4^x - 10.2^x + 16 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le 2^x \le 8 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[1;3]$.

Suy ra $a = 1; b = 3$ nên $\log\left(a^2 + b^2\right) = \log\left(1^2 + 3^2\right) = 1$.

Câu 10. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{x-1} = 2^{x^2-1}$. Tính $P = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$.

A. 0. **B.** $2\log_2 5 + 2$. **C.** $2\log_2 5 - 1$. **D.** $\log_2 25$.

Lời giải

Chọn D

$5^{x-1} = 2^{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-1} = \log_2 5^{x-1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x-1)\log_2 5$

$\Leftrightarrow (x-1)(x + 1 - \log_2 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 + \log_2 5 \end{array}\right.$

Hai nghiệm của phương trình $5^{x-1} = 2^{x^2-1}$ là $x_1 = 1, x_2 = -1 + \log_2 5$.

$P = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = (1+1)(-1 + \log_2 5 + 1) = 2\log_2 5 = \log_2 25$.

Mức độ 3

Câu 1. Phương trình $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = m$ có nghiệm khi:

A. $m \in (-\infty; 5)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$. **C.** $m \in (-\infty; 5]$. **D.** $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t$, $(t>0)$ phương trình trở thành $t+\frac{1}{t}=m$.

Vì $t>0$ nên ta có $m=t+\frac{1}{t} \overset{Cosi}{\geq} 2$ nên $m \geq 2$ thì phương trình có nghiệm.

Câu 2. Giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là:

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Có $4^x - 2m.2^x + 2m = 0 \quad (1)$. Đặt $t = 2^x \quad (t>0)$.

Khi đó (1) trở thành $t^2 - 2m.t + 2m = 0 \quad (2)$.

Để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ thì (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ thỏa mãn

$$t_1.t_2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m \geq 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1.t_2 = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 3. Có bao giá trị nguyên dương của m để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x > 0$.

Do phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^0 < 2^{x_2} \Rightarrow 0 < t_1 < 1 < t_2$.

Suy ra phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$

Suy ra $t_1 - 1 < 0 < t_2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0; P > 0 \\ P - S + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 20 > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ 2m - 5 - m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 4, \text{ do } m \text{ nguyên dương, suy ra } m = 3.$$

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $25^x - 3.5^x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2 **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=5^x \quad t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-3t+m-1=0 \quad 1$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ 1 có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-4m>0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{13}{4} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<\frac{13}{4}.$$

Ta có $\begin{cases} 1<m<\dfrac{13}{4} \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m\in \ 2;3$.

Câu 5. Phương trình $3^{|4x-4|}=81^{m-1}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\geq 1$. **B.** $m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m\leq 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{|4x-4|}=81^{m-1} \Leftrightarrow 81^{|x-1|}=81^{m-1} \Leftrightarrow |x-1|=m-1$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m-1<0 \Leftrightarrow m<1$.

Câu 6. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m+3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=4$?

A. $m=8$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$, phương trình có dạng: $t^2-2mt+2m+3=0$ (*).

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2.

Khi đó: $\begin{cases} \Delta'>0 \\ 2m>0 \\ 2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m-3>0 \\ m>0 \\ m>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right. \\ m>0 \\ m>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m>3.$

Ta có: $t_1.t_2=2m+3 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=2m+3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2m+3 \Leftrightarrow m=\dfrac{13}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{13}{2}$.

Câu 7. Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì biểu thức $A=1000b-4a+1$ có giá trị bằng

A. 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133.\sqrt{10^x}$

$\Leftrightarrow 50.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x+20.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x-133\le 0$.

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x$, $t>0$, ta được bất phương trình: $50t^2-133t+20\le 0 \Leftrightarrow \frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$.

Với $\frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$, ta có: $\frac{4}{25}\le\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\le 1 \Leftrightarrow -4\le x\le 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;2] \Rightarrow a=-4,\ b=2$.

$\Rightarrow A=1000b-4a+1=1000.2-4(-4)+1=2017$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$ với a,b là phân số tối giản. Tính $b-a$

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1\ (1)$.

Có $5^{x+1}>0\ \forall x$.

Xét $x^2-9=0$, VT $(1)=3^0+0=1$ (loại).

Xét $x^2-9>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}>3^0=1\\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ VT $(1)>1$ (loại).

Xét $x^2-9<0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}<3^0=1\\ \left(x^2-9\right).5^{x+1}<0\end{array}\right\} \Rightarrow$ VT $(1)<1$ luôn đúng.

Có $x^2-9<0 \Leftrightarrow x\in(-3;3)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $(-3;3) \Rightarrow b-a=6$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m \ge -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{4.2^x + 1}{4^x + 4.2^x + 1}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ $t \in (0;+\infty)$

Có $f'(t) = \dfrac{-4t^2 - 2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2} < 0,\ t \in (0;+\infty)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Từ đó ta có $0 < f(t) < 1, \forall t \in (0;+\infty)$.

Để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập $\mathbb{R}$ khi $m \ge 1$.

Câu 10. Cho phương trình $\log_2^2 2x - 2m\log_2 x + m - 1 = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để tích hai nghiệm của phương trình bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(16;\dfrac{35}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{11}{2};6\right)$. **C.** $5;9$. **D.** $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện pt: $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Pt trở thành $1 + t^{\ 2} - 2mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2\ 1 - m\ t + m = 0\quad 1$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1;\ x_2$ khi phương trình 1 có 2 nghiệm $t_1;\ t_2$.

Khi đó $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Theo giả thiết

$x_1 x_2 = 16 \Rightarrow \log_2 x_1 x_2 = \log_2 16 \Rightarrow t_1 + t_2 = 4 \Rightarrow -\dfrac{2\ 1-m}{1} = 4 \Rightarrow m = 3\ TM$.

Mức độ 4

Câu 1. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $4^{x+1} + 4^{1-x} = (m+1)\left(2^{2+x} - 2^{2-x}\right) + 16 - 8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m \Leftrightarrow 4\left(4^x+4^{-x}\right)=4(m+1)\left(2^x-2^{-x}\right)+16-8m$

Đặt $t=u(x)=2^x-2^{-x}$, $x\in[0;1]$

$u'(x)=2^x+2^{-x}>0 \ \ \forall x\in[0;1]$. Suy ra $u(0)\le t\le u(1)$ hay $t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow t^2=4^x+4^{-x}-2.2^x.2^{-x} \Rightarrow 4^x+4^{-x}=t^2+2$

Phương trình trở thành: $4\left(t^2+2\right)=4t(m+1)+16-8m$

$\Leftrightarrow t^2+2=t(m+1)+4-2m$

$\Leftrightarrow t^2-t(m+1)+2m-2=0$

$\Leftrightarrow m(t-2)=t^2-t-2$

$\Leftrightarrow m(t-2)=(t-2)(t+1)$

$\Leftrightarrow m=t+1 \quad \left(t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]\right)$

$\Leftrightarrow t=m-1$

Để phương trình đã cho có nghiệm trên $[0;1]$ thì phương trình $t=m-1$ phải có nghiệm $t\in\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$.

Suy ra $m-1\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$, hay $m\in\left[1;\ \frac{5}{2}\right]$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=m.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=m.3^{\sin^2 x}$.

Đặt $t=\sin^2 x$, $t\in[0;1]$. Phương trình đã cho trở thành: $2^t+3^{1-t}=m.3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t+3^{1-2t}=m$.

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3^{1-2t}$, với $t\in[0;1]$. Ta có $f'(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t.\ln\frac{2}{3}-2.3^{1-2t}.\ln 3$

$f''(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t.\left(\ln\frac{2}{3}\right)^2+4.3^{1-2t}.(\ln 3)^2>0 \ \ \forall t\in[0;1]$.

$\Rightarrow f'(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0;1]$ nên $f'(t)\le f'(1)=\frac{2}{3}\ln\frac{2}{9}<0 \ \ \forall t\in[0;1]$.

$\Rightarrow f(t)$ liên tục và nghịch biến trên $[0;1]$ nên $f(1)\le f(t)\le f(0) \ \ \forall t\in[0;1]$

Suy ra $1\le m\le 4$.

Câu 3. Các giá trị của m để phương trình $\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2}=2^{x^2-2}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$, $a,b\in\mathbb{Q}$; a,b là các phân số tối giản . Giá trị $b-a$ là

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{49}{64}$. **C.** $\frac{1}{64}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$\left(\sqrt{5}-1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{5}+1\right)^{x^2}=2^{x^2-2}\ (1)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2}=\frac{1}{4}.$

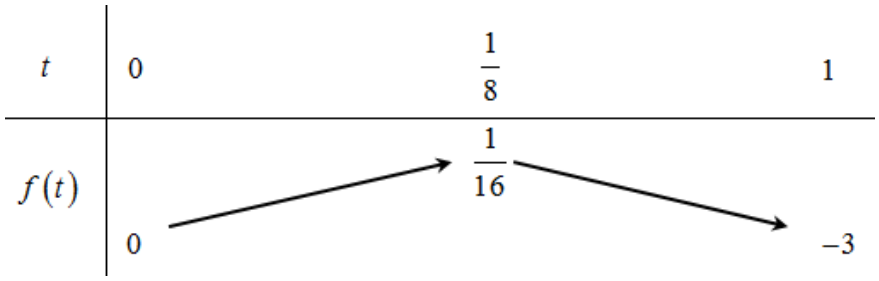
Vì $\frac{\sqrt{5}-1}{2}.\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1$ nên đặt $t=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2}\Rightarrow 0<t\le 1$ và $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2}=\frac{1}{t}$.

Ta có phương trình $t+m.\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4m=-4t^2+t\ (2)$.

Ứng với một nghiệm $t\in(0;1)$ của phương trình (2) ta có 2 nghiệm x phân biệt của phương trình (1).

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=4m$ cắt phần đồ thị của hàm số $f(t)=-4t^2+t$ với $t\in(0;1)$ tại 2 điểm phân biệt.

Bảng biến thiên của hàm $f(t)=-4t^2+t$ với $t\in(0;1)$



Từ bảng biến thiên suy ra $0<4m<\frac{1}{16}\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{64}$. Vậy $a=0;b=\frac{1}{64}\Rightarrow b-a=\frac{1}{64}$.

Câu 4. Cho phương trình $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=10a+20b$.

A. $T=10\sqrt{3}$. **B.** $T=0$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$

$\Leftrightarrow e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t\ (t\in\mathbb{R})$, $f'(t)=e^t+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)\Leftrightarrow m\cos x-\sin x=2(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow m\cos x+\sin x=2$. Phương trình có nghiệm khi $m^2+1\geq 4\Leftrightarrow m^2\geq 3$.

$\Rightarrow S=(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};+\infty)$. Vậy $T=10a+20b=10\sqrt{3}$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $0;18$ để phương trình $x-2\ \log_4\ x+m\ =x-1$ có đúng một nghiệm dương?

A. 16. **B.** 19. **C.** 17 . **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Bài yêu cầu $m\in 0;18$ và $x>0$, khi đó $x+m>0$. Xét $x=2$ không phải nghiệm của phương trình nên với $x\neq 2$ ta có:

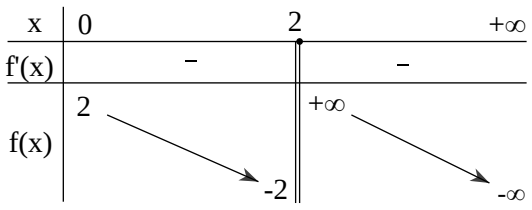
$$x-2\ \log_4\ x+m\ =x-1\Leftrightarrow \log_4\ x+m\ =\frac{x-1}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x+m=4^{\frac{x-1}{x-2}}\Leftrightarrow m=4^{\frac{x-1}{x-2}}-x\quad 1$$

Đặt $f\ x\ =4^{\frac{x-1}{x-2}}-x$, ta chỉ quan tâm nghiệm dương nên xét $f\ x$ trên $0;+\infty\ \backslash\ 2$.

Ta có $f'\ x\ =4^{\frac{x-1}{x-2}}.\frac{-1}{x-2^{\ 2}}.\ln 4-1<0,\forall x\in\ 0;+\infty\ \backslash\ 2$.

Bảng biến thiên của $f\ x$



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng một nghiệm dương khi $m\geq 2$ hoặc $m\leq -2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $0;18$ nên tập các giá trị của m là $2;3;4;...;18$, có 17 giá trị.

Câu 6. Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$.

A. $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\geq\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\geq-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$m.3^{x+1}+(3m+2).(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$

$\Leftrightarrow 3m+(3m+2).\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0$

Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$

Khi $x<0$ thì $0<t<1$

BPT trở thành $3m+\frac{3m+2}{t}+t>0,\ \forall t\in(0;1).$

$\Leftrightarrow 3m>\frac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1).$

Xét $f(t)=\frac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1).$

$f'(t)=\frac{-t^2-2t+2}{(t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+\sqrt{3}\\t=-1-\sqrt{3}\notin(0;1)\end{array}\right.$

x	0		$\sqrt{3}-1$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$	↘	$\frac{-3}{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 3m>\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 7. Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(a;b)$; $a,b\in\mathbb{Z}$. Đặt $T=b^2-a^2$ thì:

A. $T=36$. **B.** $T=48$. **C.** $T=64$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-6x^2+9x+m\right)2^{x-2}=2^{x+1}+1\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+(x-2)^3+8+m-3x=2^3+2^{2-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}}+m-3x=2^{2-x}+(2-x)^3.$

Xét hàm $f(t)=2^t+t^3$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(t)=2^t.\ln 2+3t^2>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $m-3x=(2-x)^3\Leftrightarrow m=8-9x+6x^2-x^3.$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+6x^2-9x+8$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(x)=-3x^2+12x-9$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4<m<8$.

Suy ra: $T=b^2-a^2=48$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}m+e^x\ge 0\\ m+\sqrt{m+e^x}\ge 0\end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{m+e^x}$, $(t\ge 0)$ ta suy ra:

$$\begin{cases}(e^x)^2=m+t\\ t^2=m+e^x\end{cases}\Rightarrow(e^x)^2-t^2=t-e^x\Rightarrow(e^x-t)(e^x+t+1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-t=0(1)\\ e^x+t+1=0(2)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x+t+1>0$.

Phương trình (1) tương đương với $e^x=t$

$\Leftrightarrow e^x=\sqrt{m+e^x}\Leftrightarrow m=(e^x)^2-e^x(3)$

Phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x(*)$ có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực.

Xét hàm số $f(x)=(e^x)^2-e^x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có:

$f'(x)=2(e^x)^2-e^x=0\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=(e^x)^2-e^x$ là

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m \ge -\frac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Câu 9. Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right).$$

A. 2. **B.** 0. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x \in [-1;1]$.

Xét phương trình: $e^m + e^{3m} = 2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ (1).

Đặt $t = x+\sqrt{1-x^2}$.

Ta có $t^2 = 1+2x.\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x.\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$e^m + e^{3m} = 2t\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow e^m + e^{3m} = t\left(t^2+1\right) \Leftrightarrow \left(e^m\right)^3 + e^m = t^3 + t \ (2).$$

Xét hàm số: $g(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(2) \Leftrightarrow g\left(e^m\right) = g(t) \Leftrightarrow e^m = t$.

Khi đó ta có $(1) \Leftrightarrow e^m = x+\sqrt{1-x^2}$ (3)

Xét hàm số: $f(x) = x+\sqrt{1-x^2}$. TXĐ: $[-1;1]$.

Ta có: $f'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

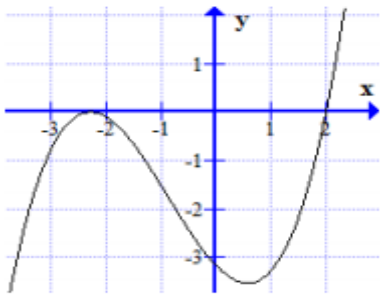
x	$-\infty$	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$		
$f(x)$		1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	

Phương trình (1) có nghiệm $x\in[-1;1]\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow -1\le e^m\le\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}$.

Do $m\in\mathbb{N}$ nên $m=0$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3\right].\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{f(x)}-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Sử dụng đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm đơn $x=2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x=2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $x\left(m-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+m^2-3=0$ phải có một nghiệm $x=2\Rightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Thử lại với $m=1$ ta có:

$\left[x\left(1-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}-2\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow(x-2)\left(1-2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)}\le 1\Leftrightarrow f(\sin x)\le 0\Leftrightarrow\sin x\le 2$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn ycbt.

Thử lại với $m=-3$ ta có:

$\left[x\left(-3-2^{f(\sin x)}\right)+2.2^{f(\sin x)}+6\right]\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0\Leftrightarrow-(x-2)\left(3+2^{f(\sin x)}\right)\left(2^{f(x)}-1\right)\ge 0$

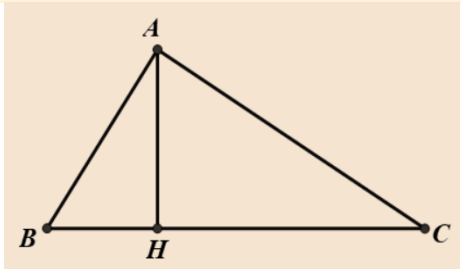
$\Leftrightarrow 3+2^{f(\sin x)}\le 0$ (vô lý) $\Rightarrow m=-3$ không thỏa mãn ycbt.

Vậy $S=\{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\varnothing$.

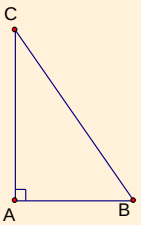
DẠNG TOÁN 4: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

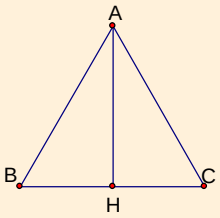
KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V = B.h}$ với B: diện tích đáy, h: chiều cao.
- Các hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC tại A có đường cao AH:
  - $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
  - $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
  - $BH.BC = AB^2, CH.CB = CA^2$.

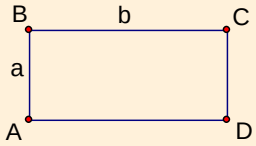


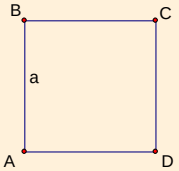
- Đường chéo của hình vuông cạnh a bằng $a\sqrt{2}$.
- Đường cao của tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích tam giác thường:
  - $S = \frac{1}{2}a.h_a$.(h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ đỉnh A, B, C).
  - $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$.
  - $S = \frac{abc}{4R}$ (R: bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).
  - $S = pr$ (r: bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).



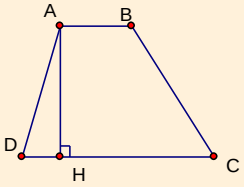


- *Trường hợp đặc biệt*:
  - Diện tích tam giác vuông: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB.AC$
  - Diện tích của tam giác đều cạnh a: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.





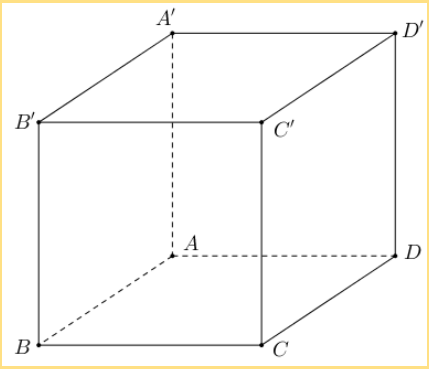
- Diện tích hình chữ nhật: ab.
- Diện tích của hình vuông: a^2.
- Diện tích hình thoi: $S.ABC$ (AC và BD là hai đường chéo).
- Diện tích hình thang: $S = \frac{(AB+CD)AH}{2}$.



- Diện tích hình bình hành: ah (a: đáy; h: chiều cao).
- Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
- Định lí côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$.
- Công thức trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Thể tích của khối lập phương cạnh bằng 2:



A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính thể tích khối lăng trụ đứng.

2. HƯỚNG GIẢI:

Nhắc lại công thức tính thể tích khối lập phương: $\boxed{V = a^3}$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối lập phương cạnh 2 bằng $2^3 = 8$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 4.1: Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh đều bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ đều là:

A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

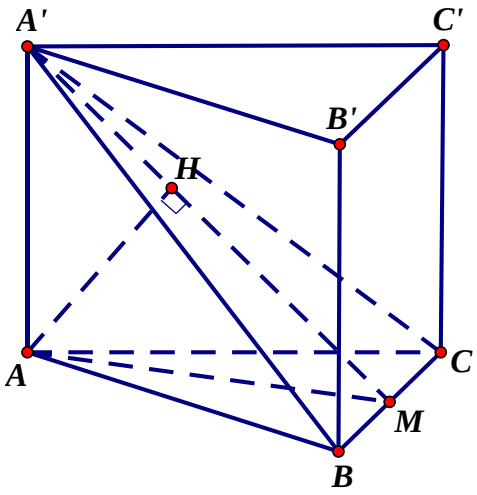
$V = B.h = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.(2a) = 2\sqrt{3}a^3.$

Câu 4.2: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $A'BC$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu của A trên $A'M$. Nhận xét $d\ A,\ A'BC\ = AH$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A nên có:

$$\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AH^2}\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{4}{a^2}\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 4.3: Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích đáy là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4.4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $A'B$ tạo với đáy một góc 45^0 Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

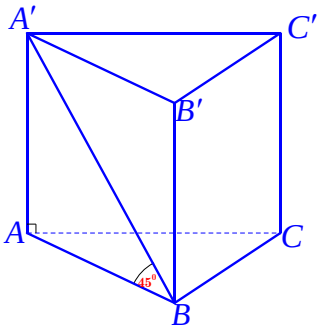
A. $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{ABC.A'B'C'}=a^3\sqrt{3}$.

C. $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^3}{6}$. **D.** $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của $A'B$ lên mp(ABC).



$\Rightarrow \ A'B,(ABC) \ = ABA' = 45^0$.

Khi đó tam giác ABA' vuông cân tại $A \Rightarrow AA' = AB = a$.

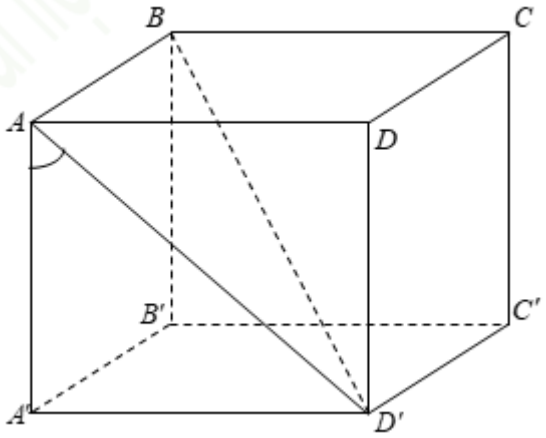
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ chọn phương án **D.**

Câu 4.5: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Biết đường chéo của mặt bên là $a\sqrt{3}$. Khi đó, thể tích khối lăng trụ bằng:

A. $2a^3$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $AB = a$, $A'B = a\sqrt{3} \ \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$. $\text{AA}' = AC.\tan 60^0$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.\ AB\ ^2 = a^3\sqrt{2}$.

Câu 4.6: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, $A'C$ hợp với mặt đáy ABC một góc $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

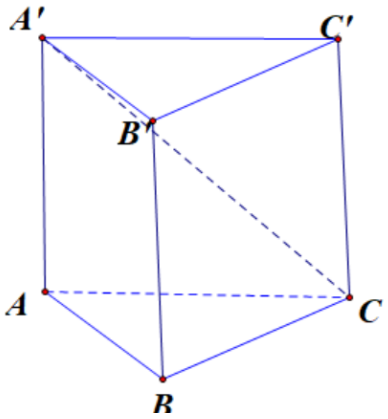
$\text{AA}' = AC.\tan 60^0$.

$V = A'A.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 4.7: Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn D

Vì lăng trụ đứng nên đường cao bằng a.

Vì đáy là tam giác đều nên diện tích đáy: $S_{ABC} = \frac{2a^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

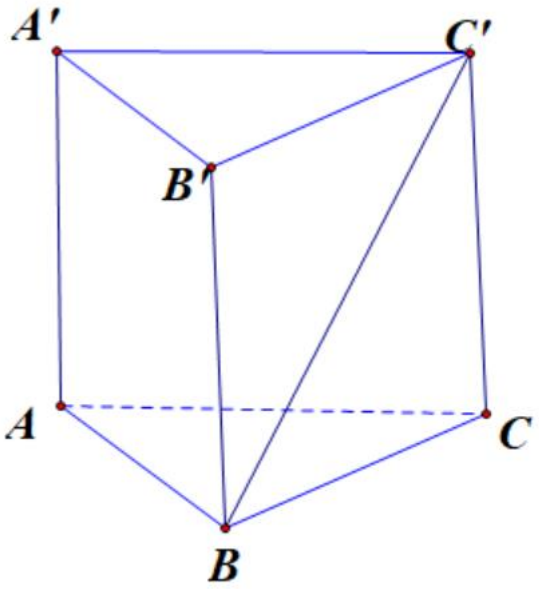
Thể tích: $V = S_{ABC}.a = a^2\sqrt{3}.a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 4.8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Góc tạo bởi cạnh BC' và mặt đáy $A'B'C'$ bằng 30°. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



$\left[BC',\ A'B'C'\right] = BC'B' = 30^0$.

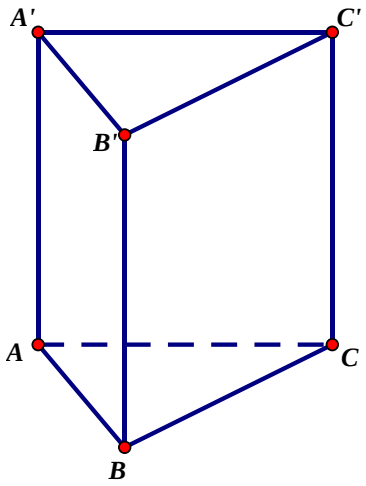
$S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $BB'=\tan 30^0.B'C'=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow V=\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 4.9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều cạnh bằng a và chu vi của mặt bên $ABB'A'$ bằng $6a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Chu vi của hình chữ nhật $2\ AB+AA'\ =6a\Rightarrow AA'=2a$.

Thể tích khối lăng trụ $V=Bh=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4.10: Nếu khối lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$ và đường chéo mặt bên bằng $4a$ thì khối lăng trụ đó có thể tích bằng.

A. $4a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B

Đường cao của lăng trụ bằng $h=\sqrt{4a^{\ 2}-\ 2a^{\ 2}}=2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ bằng $V=B.h=\ 2a^{\ 2}.2a\sqrt{3}=8a^3\sqrt{3}$.

Câu 4.11: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, diện tích xung quanh bằng $6\sqrt{3}a^2$. Thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=3a^3$. **B.** $V=\dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\dfrac{1}{4}a^3$.

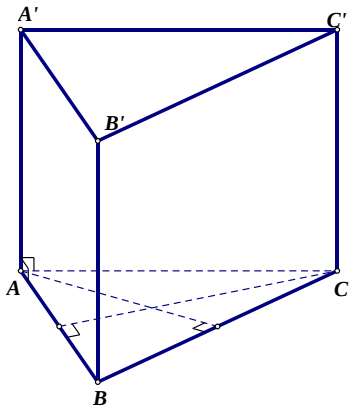
Lời giải

Chọn A

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $S_{ABB'A'}=S_{ACC'A'}=S_{BCC'B'}$.

$\Rightarrow\ S_{xp}=3S_{ABB'A'}=3AB.AA'=6a.AA'=6\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow AA'=a\sqrt{3}$.

Do đó $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3$.



Câu 4.12: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

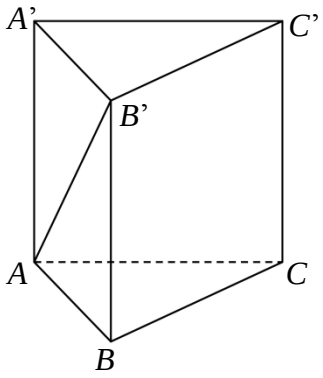
$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}; V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 4.13: Tính thể tích V của khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$ và $AB' = 2a$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

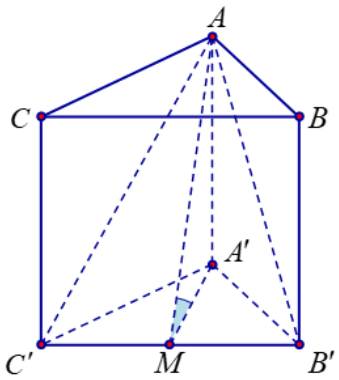
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 4.14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $AB'C'$ tạo với mặt đáy góc $60°$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $B'C'$. Ta có $\begin{cases}A'M\perp B'C'\\ AA'\perp B'C'\end{cases}\Rightarrow B'C'\perp AM$ nên góc giữa mặt phẳng $AB'C'$ tạo với đáy là góc $AMA'=60^\circ$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A' nên $AA'=A'M.\tan 60^0=\dfrac{3a}{2}$.

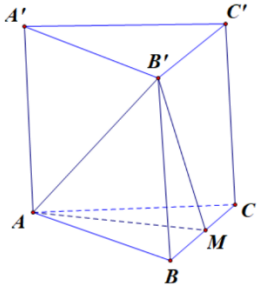
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=AA'.S_{A'B'C'}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 4.15: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $BCC'B'$ một góc 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có $AM\perp BCC'B'\Rightarrow (AB',BCC'B')=AB'M=30^\circ$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\sin 30^\circ=\dfrac{AM}{AB'}\Leftrightarrow AB'=\dfrac{AM}{\tan 30^\circ}\Leftrightarrow AB'=\dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB'=\sqrt{B'M^2-BM^2}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}$.

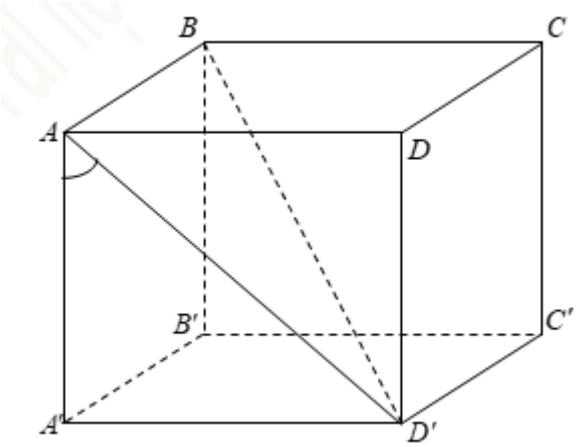
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^\circ.BB'=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 4.16: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt phẳng $D'AB$ và mặt phẳng $ABCD$ bằng $30°$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ADD'A' \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng $D'AB$ và mặt phẳng $ABCD$ là góc AD' và AA' hay $A'AD' = 30°$. Suy ra $AA' = \frac{A'D'}{\tan 30°} = a\sqrt{3}$. Vậy thể tích khối hộp $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 4.17: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc tạo bởi hai mặt phẳng ABC, $A'BC$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi K là trung điểm cạnh BC. Suy ra góc giữa mặt phẳng ABC và $A'BC$ là $A'KA = 60°$.

$AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường trung tuyến trong tam giác đều).

$AA' = AK.\tan 60° = \frac{3a}{2}$..

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{1}{2}a^2.\sin 60°.\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 4.18: Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và thể tích bằng $3a^2$. Tính chiều cao h của hình lăng trụ đã cho.

A. $h = \frac{a}{3}$. **B.** $h = 9a$. **C.** $h = 3a$. **D.** $h = a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

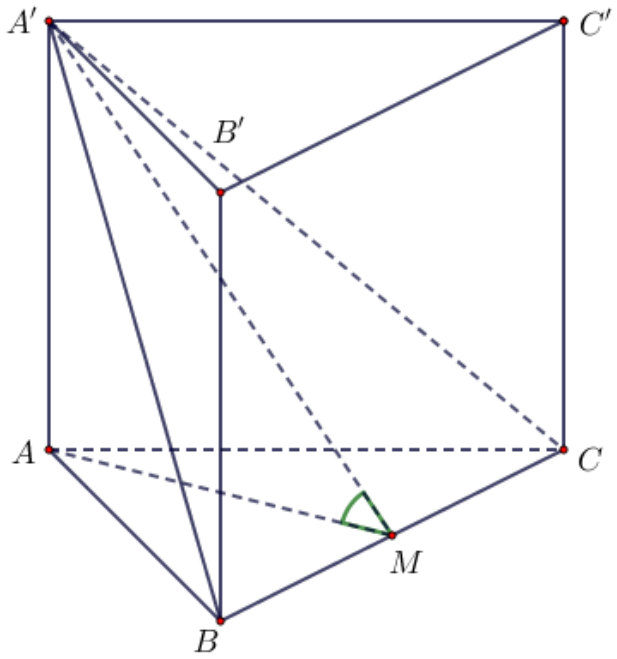
Suy ra: $h = \dfrac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3a^2}{a^2} = 3a$.

Câu 4.19: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng $A'BC$ và mặt phẳng ABC bằng $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow BC \perp AMA' \Rightarrow BC \perp MA'$

Ta có $ABC \cap A'BC = BC$, $AM \perp BC$, $BC \perp MA'$

$\Rightarrow \left(ABC, A'BC\right) = \left(AM, A'M\right) = AMA' = 45° \Rightarrow AM = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 4.20: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối lăng trụ là.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{7}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đều nên đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

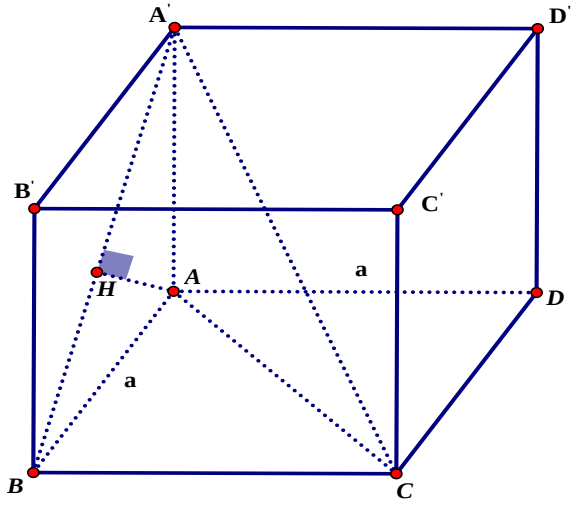
$V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 4.21: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $A'BC$ bằng $\frac{a}{3}$. Tính thể tích lăng trụ.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $BC \perp AA', BC \perp AB \Rightarrow BC \perp ABA' \Rightarrow A'BC \perp ABA'$.

Kẻ $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp A'BC$ $AH = d(A, A'BC) = \frac{a}{3}$.

Xét $\Delta A'AB$ vuông tại A: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{8}{a^2}$.

$\Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 4.22: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của lăng trụ.

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy tam giác đều $S = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

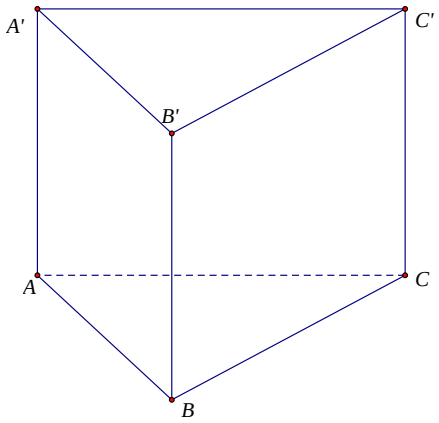
Thể tích lăng trụ $V = S.h = a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = 3a^3$.

Câu 4.23: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích khối lăng trụ đó là

A. $2a^3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Do $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều nên $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Mặt khác mỗi mặt bên có diện tích bằng $4a^2$ nên $AB.AA' = 4a^2 \Leftrightarrow AA' = \dfrac{4a^2}{AB}$

$\Leftrightarrow AA' = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow AA' = 2\sqrt{2}a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}AB.AB.\sin 60°.AA'$

$= \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\sin 60°.2\sqrt{2}a = a^3\sqrt{6}$.

Câu 4.24: Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng $2a$ là.

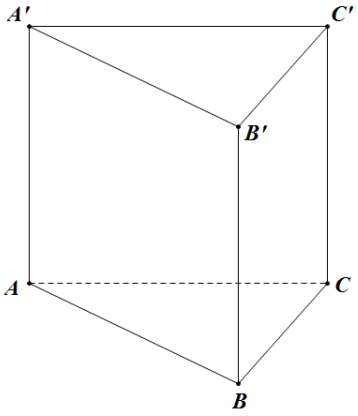
A. $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử khối lăng trụ đều là $ABC.A'B'C'$ như hình bên.

Tam giác ABC đều cạnh $2a$ có diện tích bằng $S = \dfrac{2a^{\,2}\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

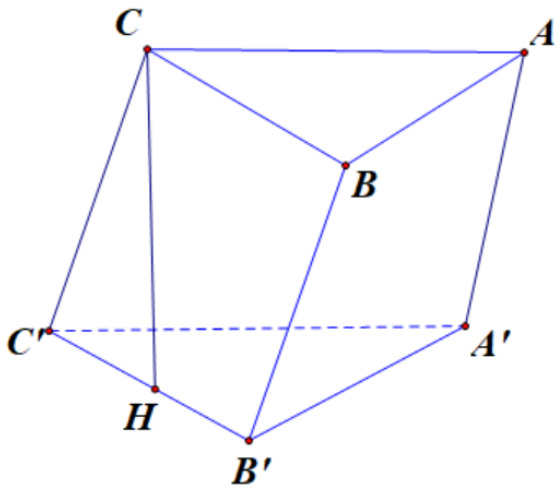


Thể tích khối lăng trụ $V = AA'.S = 2a.a^2\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 4.25: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác cân tại A; $AB=2a$; $BAC=120^0$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mp ABC trùng với trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối chóp $A'.BB'C'C$?

A. $\frac{4a^3}{3}$. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải



Chọn C

Gọi là H trung điểm của cạnh BC..

Xét tam giác ABC. có $BH=2a.\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$; $AH=2a.\cos 60^\circ=a$.

Xét tam giác $A'HA$. vuông tại H có $A'H=\sqrt{2a^{\ 2}-a^2}=a\sqrt{3}$.

Ta có: $V_{lt}=h\cdot S$.

Trong đó $h=A'H=a\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\sqrt{3}a^2$.

Vậy $V_{lt}=3a^3.\Rightarrow V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}\cdot 3a^3=a^3.$

Mặt khác $V_{A'.BCB'C'}=V_{lt}-V_{A'.ABC}=3a^3-a^3=2a^3$.

Câu 4.26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng ABC là trung điểm H của cạnh BC. $AA'=a\sqrt{7}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải

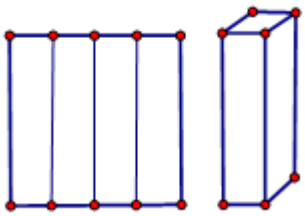
Chọn D

+ Diện tích đáy: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

+ Chiều cao $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\dfrac{5a}{2}$.

$V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{5a}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 4.27: Từ một ảnh giấy hình vuông cạnh là $4cm$, người ta gấp nó thành bốn phần đều nhau rồi dựng lên thành bốn mặt xung quanh của hình hình lăng trụ tứ giác đều như hình vẽ. Hỏi thể tích của khối lăng trụ này là bao nhiêu.



A. $4cm^3$. **B.** $16cm^3$. **C.** $\dfrac{4}{3}cm^3$ **D.** $\dfrac{64}{3}cm^3$

Lời giải

Chọn A

Đáy là hình vuông có cạnh bằng 1 nên diện tích đáy: $S=1cm^2$.
Thể tích lăng trụ là: $V=h.S=4cm^3$

Câu 4.28: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đáy lăng trụ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}\longrightarrow S_{day}=\dfrac{a\sqrt{2}^{\,2}\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

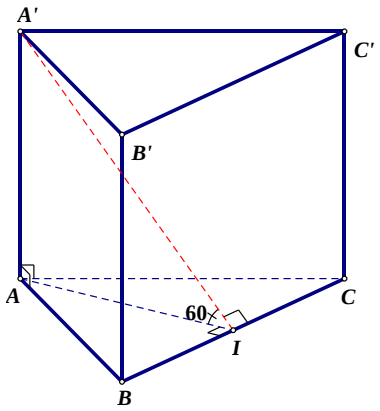
$\Rightarrow V=S_{day}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4.29: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Nếu góc giữa đường thẳng $A'I$ và mặt phẳng ABC bằng 60° thì thể tích của lăng trụ đó là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $A'I,\ ABC\ = A'I, AI\ = A'IA = 60°$.

Suy ra $A'A = \tan 60°.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A\ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 4.30: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Biết đường chéo của mặt bên là $a\sqrt{3}$. Khi đó, thể tích khối lăng trụ bằng:

A. $a^3\sqrt{2}$. **B.** $2a^3$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB = a,\ A'B = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

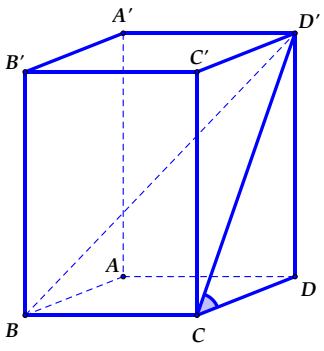
$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.\ AB\ ^2 = a^3\sqrt{2}$.

Câu 4.31: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $4\sqrt{3}\ m$. Biết mặt phẳng $D'BC$ hợp với đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ là.

A. $648\,m^3$. **B.** $478\,m^3$. **C.** $576\,m^3$. **D.** $325\,m^3$.

Lời giải

Chọn C



Phân tích: $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình lăng trụ tứ giác đều, cũng có nghĩa rằng nó là một hình hộp đứng có đáy là hình vuông cạnh $4\sqrt{3}\ m$.

Lời giải:

Ta có $BC \perp CD, BC \perp DD' \Rightarrow BC \perp CDD'C' \Rightarrow BC \perp CD'$.

Suy ra $D'BC$, $ABCD = CD', CD = D'CD = 60^o$.

$\Delta D'CD$ vuông tại D nên: $\tan D'CD = \dfrac{DD'}{CD} \Rightarrow DD' = 4\sqrt{3}.\tan 60^0 = 12\ m$.

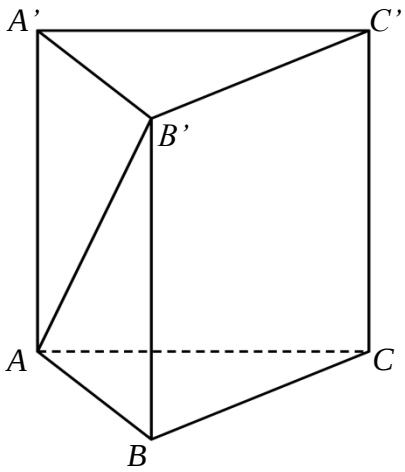
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = DD'.S_{ABCD} = 12.\ 4\sqrt{3}^{\ 2} = 576\ m^3$.

Câu 4.32: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 2. Biết góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $A'B'C'$ bằng α thỏa $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Góc tạo bởi AB' và $A'B'C'$.

là góc $AB'A' = \alpha$.

Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{AA'}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \dfrac{AA'}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{2\sqrt{2}^{\ 2}\sqrt{3}}{4}.2 = 4\sqrt{3}$.

Câu 4.33: Cho khối lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5, đáy là hình vuông có cạnh bằng 4. Hỏi thể tích khối lăng trụ là:

A. 20. **B.** 64. **C.** 80. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Lăng trụ đứng có cạnh bên bằng 5 nên có chiều cao $h=5$.

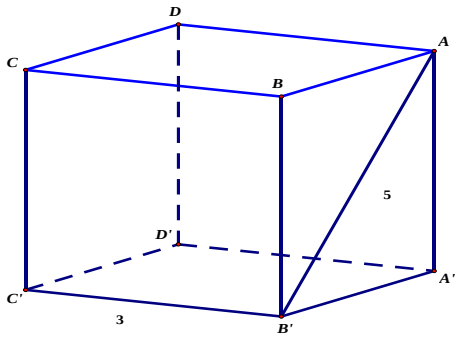
Thể tích khối lăng trụ là: $V=S_{ABCD}.h=4^2.5=80$.

Câu 4.34: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, đường chéo AB' của mặt bên $ABB'A'$ có độ dài bằng 5. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$?

A. $V=36$. **B.** $V=45$. **C.** $V=18$. **D.** $V=48$.

Lời giải

Chọn A



Xét tam giác vuông $AA'B'$ có: $AA'=\sqrt{AB'^2-A'B'^2}=4$ và có $S_{ABCD}=3^2=9$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=4.9=36$.

Câu 4.35: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của lăng trụ.

A. $V=a^3\sqrt{3}$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=2a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích đáy tam giác đều $S=\dfrac{2a^{\,2}\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

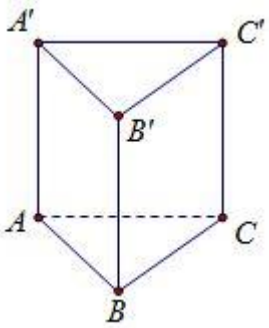
Thể tích lăng trụ $V=S.h=a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=3a^3$.

Câu 4.36: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Chọn D



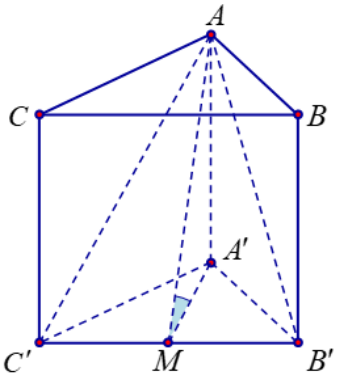
Diện tích đáy: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.3.3.\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Thể tích $V_{lt}=S_{\Delta ABC}.AA'=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4.37: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $AB'C'$ tạo với mặt đáy góc 60°. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $B'C'$. Ta có $\begin{cases}A'M\perp B'C'\\AA'\perp B'C'\end{cases}\Rightarrow B'C'\perp AM$ nên góc giữa mặt phẳng $AB'C'$ tạo với đáy là góc $AMA'=60^\circ$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A' nên $AA'=A'M.\tan 60^0=\frac{3a}{2}$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=AA'.S_{A'B'C'}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 4.38: Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và có thể tích là $\frac{9}{4}$ thì độ dài mỗi cạnh bằng.

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt[6]{243}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

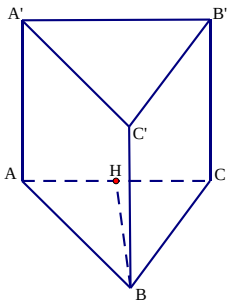
Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài cạnh là a..

$V=h.S_\Delta=h.\frac{1}{2}BH.AC=a.\frac{a\sqrt{3}}{4}.a=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow a^3=3\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}$.



Câu 4.39: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $A'BC$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

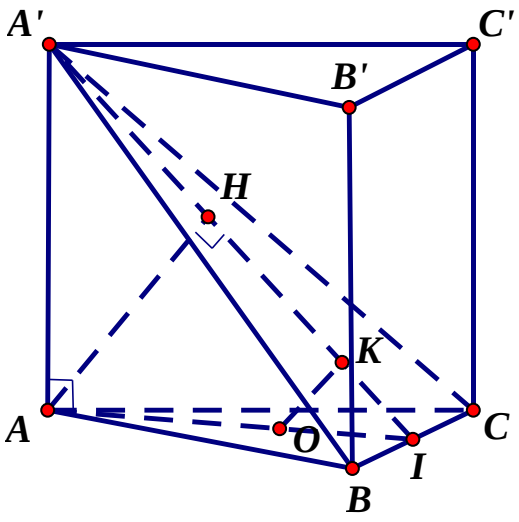
Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy là $B = S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h = d\ \ ABC\ ;\ A'B'C'\ \ = AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có $AH \perp A'BC \Rightarrow d\ A;\ A'BC\ \ = AH$



$$\frac{d\ O;\ A'BC}{d\ A;\ A'BC} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow d\ O;\ A'BC\ \ = \frac{d\ A;\ A'BC}{3} = \frac{AH}{3} = \frac{a}{6} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\qquad\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

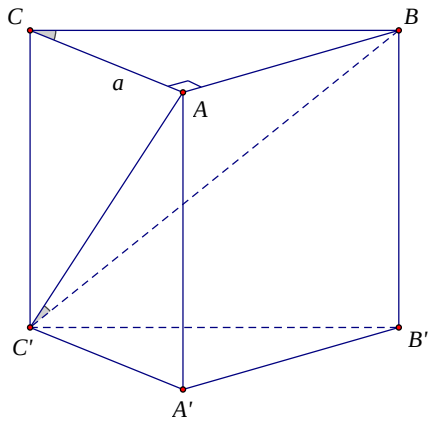
$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 4.40: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC=a$, $ACB=60^\circ$ góc giữa BC' và $AA'C$ bằng 30°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{2a^3}{\sqrt{6}}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC vuông tại A, có $\tan ACB=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AB=AC.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Tam giác ABC có diện tích là $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases}AB\perp AC\\AB\perp AA'\end{cases}\Rightarrow AB\perp AA'C'C$. Do đó AC' là hình chiếu của BC' lên $AA'C'C$.

$\Rightarrow (BC', AA'C)=(BC', AC')=BC'A=30^\circ$.

Tam giác $AC'B$ vuông tại A, có $\cot AC'B=\frac{AC'}{AB}\Rightarrow AC'=AB.\cot 30^\circ=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$.

Tam giác ACC' vuông tại C, có $CC'=\sqrt{AC'^2-AC^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2a\sqrt{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=S_{ABC}.CC'=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2}=a^3\sqrt{6}$.

Câu 4.41: Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn B

Đáy là tam giác đều cạnh a nên $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow V=Bh=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4.42: Cho hình lập phương có tổng diện tích các mặt bằng 54. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 9. **B.** 27. **C.** 54. **D.** 81.

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài của cạnh của hình lập phương là $a,\ \ a>0$. Ta có: $6.a^2=54\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$.

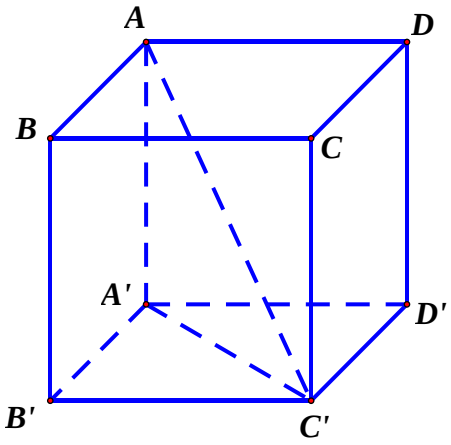
Thể tích khối lập phương đã cho bằng $V=3^3=27$.

Câu 4.43: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=75$. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 125. **B.** 75. **C.** $\frac{125}{3}$. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A



Gọi độ dài của cạnh của hình lập phương là $a,\ \ a>0$. Ta có:

$A'C'=\sqrt{2}a\Rightarrow AC'^2=AA'^2+A'C'^2=a^2+2a^2=3a^2=75\Rightarrow a^2=25\Rightarrow a=5$.

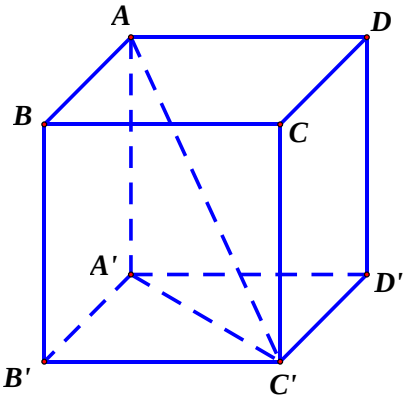
Vậy thể tích của khối lập hương đã cho bằng $V=5^3=125$.

Câu 4.44: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Biết đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $ABCD$ góc $45°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. $48\sqrt{2}$. **B.** 48. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$AA' \perp ABCD \Rightarrow \left(AC', ABCD\right) = AC'A' = 45°$;

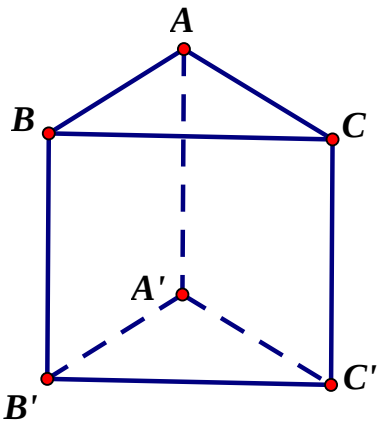
$AC' = 4\sqrt{2} \Rightarrow A'A = AC'.\tan 45° = 4\sqrt{2}$. Thể tích khối hộp đã cho bằng $V = 4\sqrt{2}.4.4 = 48\sqrt{2}$.

Câu 4.45: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh $AB = 4$, $A'A = 6$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $24\sqrt{2}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 64.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 60° = \frac{1}{2}.4.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

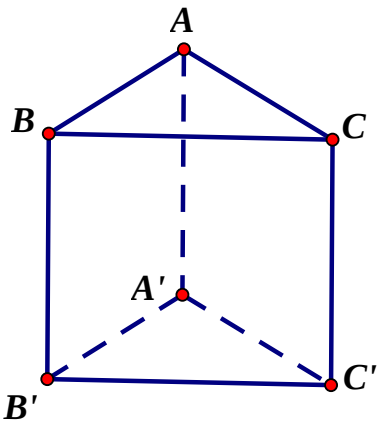
Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = A'A.S_{ABC} = 6.4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

Câu 4.46: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 4. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** 64.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 60° = \frac{1}{2}.4.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

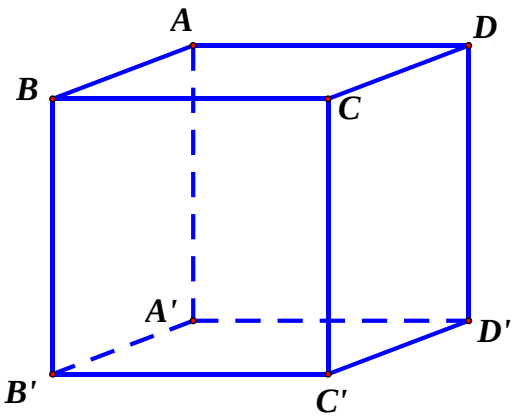
Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = A'A.S_{ABC} = 4.4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

Câu 4.47: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AD=4$, $A'A=5$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. 20. **B.** 60. **C.** 30. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B



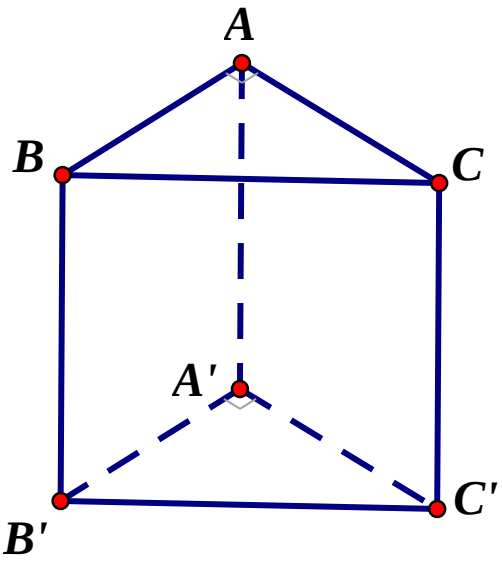
Ta có: $S_{ABCD}=AB.AD=3.4=12$. Thể tích khối hộp đã cho bằng $V=A'A.S_{ABCD}=5.12=60$.

Câu 4.48: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB=a$, $AC=2a$, $A'A=3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^2$. **B.** a^3. **C.** $3a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác ABC: $S=\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{1}{2}.a.2a=a^2$.

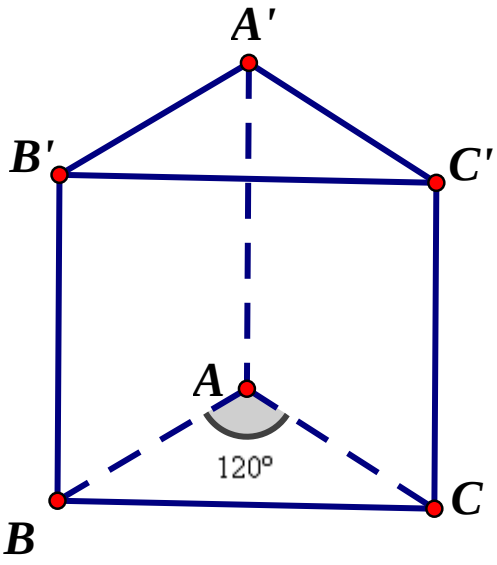
Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V=A'A.S_{ABC}=3a.a^2=3a^3$.

Câu 4.49: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC. Biết $AB=a$, $AC=2a$, $BAC=120^\circ$, $A'A=3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $3a^3$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác ABC: $S=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin 120^\circ=\frac{1}{2}.a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

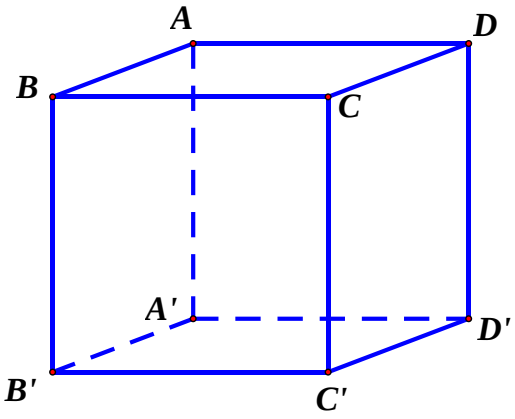
Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V=A'A.S_{ABC}=3a.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 4.50: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AC=2a$, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A. Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AD=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow S_{ABCD}=AB.AD=a.a\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A nên $A'A=AC=2a$. Thể tích khối hộp đã cho bằng $V=A'A.S_{ABCD}=2a.a^2\sqrt{3}=2\sqrt{3}a^3$.

DẠNG TOÁN 5: HÀM SỐ MŨ – LÔGARÍT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Hàm số mũ

✪ **Định nghĩa:** Hàm số mũ $y=a^x$, $(0<a\neq 1)$.

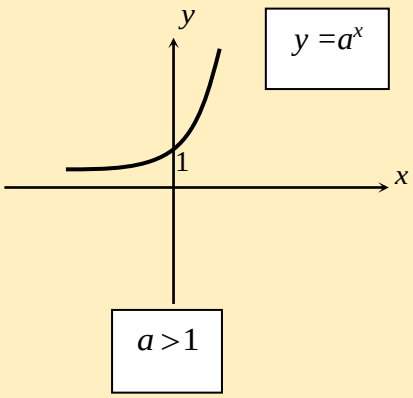
✪ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

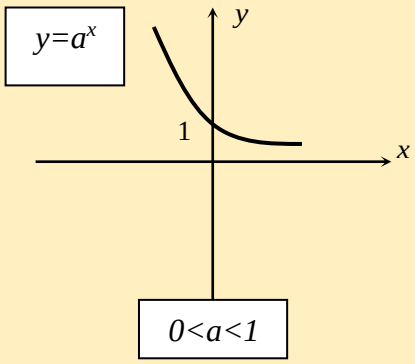
✪ Tập giá trị: $T=(0;+\infty)$.

✪ Khi $a>1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, khi $0<a<1$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

✪ Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

✪ Đồ thị:





2. Hàm số logarit

✪ **Định nghĩa :** $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$

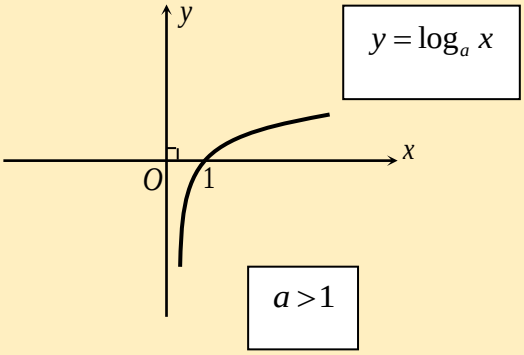
✪ Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

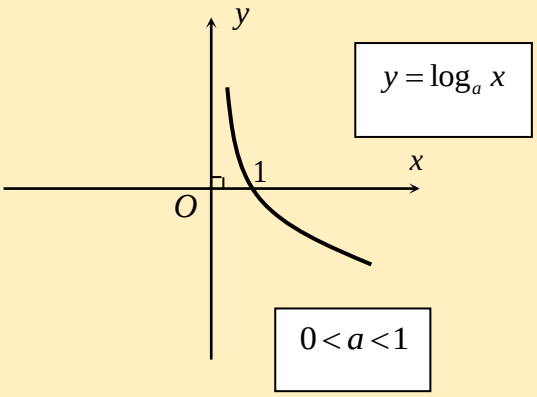
✪ Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$.

✪ Khi $a>1$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, khi $0<a<1$ hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

✪ Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

✪ Đồ thị:





3. Giới hạn đặc biệt

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

4. Đạo hàm : Cho $0<a\neq 1$

- $(a^{x})'=a^{x}\ln a$; $(a^{u})'=a^{u}\ln a.u'$

$(e^{x})'=e^{x}$; $(e^{u})'=e^{u}.u'$

- $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; $(\log_a|u|)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, $(x\neq 0)$; $(\ln|u|)'=\dfrac{u'}{u}$

5. Áp dụng tính đơn điệu: Cho $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên khoảng $(a;b)$, với $u,v\in(a;b)$

Khi đó : $f(u)=f(v)\Rightarrow u=v$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tìm tập xác định của hàm số
- Tính đạo hàm các cấp
- Toán Max-Min (1 biến) với hàm mũ, lôgarit
- Toán Max-Min (nhiều biến) liên quan mũ và lôgarit
- Sự biến thiên liên quan hàm số mũ
- Toán cực trị liên quan hàm số mũ
- Đọc đồ thị liên hàm số mũ, lôgarit

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tập xác định của hàm số logarit.

2. HƯỚNG GIẢI:

Tập xác định của hàm số logarit:

Hàm số $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Tập xác định D của hàm số $y=\log_2(x^2-2x-3)$

A. $D=(-1;3)$ **B.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

C. $D=[-1;3]$ **D.** $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$ là:

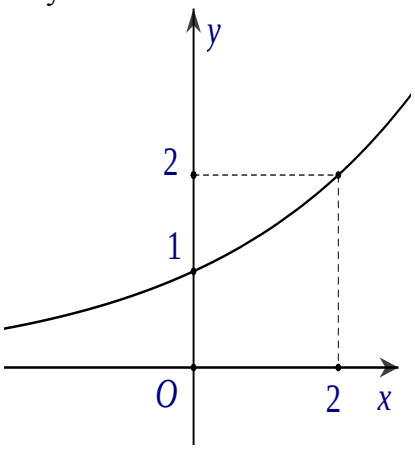
A. $D=(1;2)$ **B.** $D=(1;+\infty)$ **C.** $D=(0;+\infty)$ **D.** $D=[1;2]$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x-1)$ xác định khi $\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$.

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ **B.** $y=x$ **C.** $y=2^x$ **D.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^{-x}$

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy đây là đồ thị hàm số dạng $y=a^x$. Ta có $A(0;1)$ và $B(2;2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Suy ra, $\begin{cases}a^0=1\\a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}\\a>0\end{cases}$. Hàm số là $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=xe^x$. Gọi $f''(x)$ là đạo hàm cấp hai của $f(x)$. Ta có $f''(1)$ bằng:

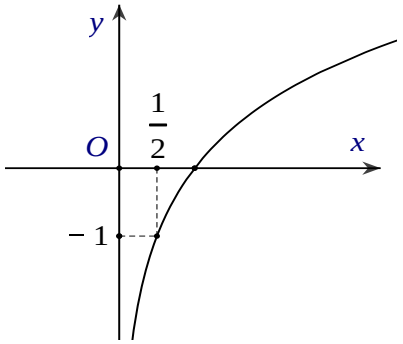
A. $3e$ **B.** $-3e^2$ **C.** e^3 **D.** $-5e^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=x.e^x\Rightarrow f'(x)=e^x+x.e^x\Rightarrow f''(x)=e^x+e^x+x.e^x\Rightarrow f''(1)=3e$.

Câu 5. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=\log_{\sqrt{2}} x$. **D.** $y=\log_2(2x)$.

Lời giải:

Chọn A

Nhận thấy đây là đồ thị hàm số $y=\log_a x$. Điểm $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-1=\log_a\frac{1}{2}\Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2$. Hàm số là $y=\log_2 x$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y=4^{2x}$ là:

A. $y'=2.4^{2x}\ln 4$. **B.** $y'=4^{2x}.\ln 2$. **C.** $y'=4^{2x}\ln 4$. **D.** $y'=2.4^{2x}\ln 2$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y=4^{2x}\Rightarrow y'=(2x)'.4^{2x}\ln 4=2.4^{2x}\ln 4$

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y=\log_5 x, x>0$ là:

A. $y'=\frac{1}{x\ln 5}$. **B.** $y'=x\ln 5$. **C.** $y'=5^x\ln 5$. **D.** $y'=\frac{1}{5^x\ln 5}$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y=\log_5 x\Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln 5}$

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **B.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **C.** $y=\log_2 x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Lời giải:

Chọn B

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên phải xác định trên $\mathbb{R}\rightarrow$ loại **C**, **D**.

Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a>1\rightarrow$ Chọn **B**.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y=\log\left(2x-x^2\right)$ là:

A. $D=[0;2]$ **B.** $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

C. $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ **D.** $D=(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(0;2)$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=2020^x$.

A. $y'=2020^x.\ln 2020$.

B. $y'=\dfrac{2020^x}{\ln 2020}$.

C. $y'=2020^x$.

D. $y'=x.2020^{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức tính đạo hàm: $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$.

Áp dụng công thức trên ta được: $\left(2020^x\right)'=2020^x.\ln 2020$.

Mức độ 2

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y=\ln(\ln x)$ là :

A. $D=(1;+\infty)$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=(e;+\infty)$ **D.** $D=[1;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\ln(\ln x)$ xác định khi $\begin{cases}x>0\\ \ln x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Rightarrow x>1$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\log_3(x-2)-3}$.

A. $D=[29;+\infty)$ **B.** $D=(29;+\infty)$ **C.** $D=(2;29)$ **D.** $D=(2;+\infty)$

Lời giải:

Chọn A

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-2>0\\ \log_3(x-2)-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2>0\\ x-2\ge 3^3\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 29$

Tập xác định $D=[29;+\infty)$

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \dfrac{(x+1)'.4^x - (x+1).(4^x)'}{(4^x)^2} = \dfrac{4^x - (x+1).4^x.\ln 4}{(4^x)^2}$

$= \dfrac{4^x.(1 - x.\ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} = \dfrac{1 - x.2\ln 2 - 2\ln 2}{4^x} = \dfrac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$.

B. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

D. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}.\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}.\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$y' = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}.\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

A. $-2 < m < 2$.

B. $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

C. $m > -2$.

D. $-2 \le m \le 2$.

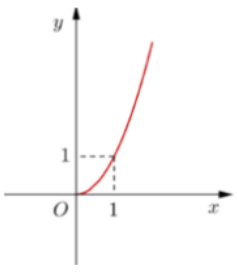
Lời giải

Chọn A

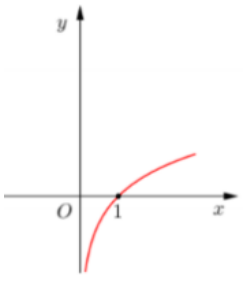
Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ Tìm đồ thị đó.

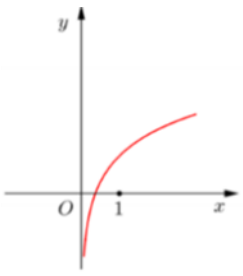
A.



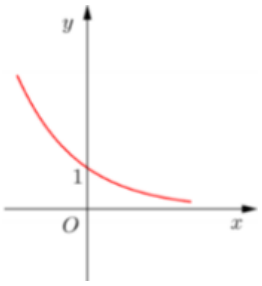
B.



C.



D.



Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $f(x) = x\ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$. Nhận thấy đồ thị $f'(x)$ đi qua điểm $(1;1) \rightarrow$ loại B, D

và $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$ nên chọn C.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x-m+1>0, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<0$.

Câu 8. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-2\ln x$ trên $\left[\frac{1}{e};e\right]$. Tính giá trị của biểu thức $T=M+2m$.

A. $T=e^2+e^{-2}$. **B.** $T=\mathrm{e}^{-2}$.
C. $M=e^2-e^{-2}$. **D.** $T=e^2$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x>0$

$y=x^2-2\ln x\Rightarrow y'=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-2}{x}=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow x=1\in\left[\frac{1}{e};e\right]$

Ta có: $y(1)=1$, $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2$, $y\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-2}+2$

$\Rightarrow M=\mathrm{e}^2-2$, $m=1$. Do đó: $T=M+2m=e^2$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-2)^2e^x$ trên $[1;3]$ là

A. e. **B.** 0. **C.** e^3. **D.** e^4.

Lời giải

Chọn C

$y'=2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x=e^x\left(x^2-2x\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. Ta có: $y(1)=3; y(3)=e^3; y(2)=0$.

Vậy GTLN của hàm số $y=(x-2)^2e^x$ trên $[1;3]$ là e^3.

Câu 10. Hàm số $y=x^2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-2;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

$y=x^2e^x$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=2xe^x+x^2e^x=e^x\left(2x+x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Mức độ 3

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1-x}}+\log_3\sqrt{x-m}$ xác định trên $(2;3)$.

A. $1\le m\le 2$ **B.** $1<m\le 2$ **C.** $-1<m<2$ **D.** $-1\le m\le 2$

Lời giải:

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1-x>0\\x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2m+1\\x>m\end{cases}$

Suy ra, tập xác định của hàm số là $D=(m;2m+1)$, với $m\ge -1$.

Hàm số xác định trên $(2;3)$ suy ra $(2;3)\subset D\Leftrightarrow m\le 2<3\le 2m+1\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2\\2m+1\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2\\m\ge 1\end{cases}$

Cách khác: Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=2m+1-x>0\\g(x)=x-m>0\end{cases}$

Vì $f(x)$ là hàm số bậc nhất nghịch biến và $g(x)$ là hàm số bậc nhất đồng biến nên để hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2;3)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(3)=2m+1-3\ge 0\\g(2)=2-m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 1\\m\le 2\end{cases}$

Câu 2. Số giá trị nguyên của $m<10$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. 10. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2x+m}{x^2+mx+1}\ge 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$.

Xét $g(x)=x^2+mx+1$ có $\Delta=m^2-4$.

TH1: $\Delta<0\Leftrightarrow -2<m<2$ khi đó $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta có $2x+m\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

Suy ra $0\le m<2$.

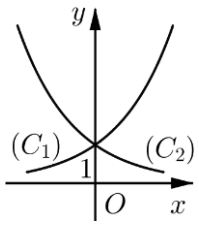
TH2: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$.

Nếu $m \le -2$ thì $\lim\limits_{x \to 0} y' = m \le -2$ nên không thỏa $y' = \dfrac{2x+m}{x^2+mx+1} \ge 0$ với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Nếu $m \ge 2$ thì $2x+m > 0$ với mọi $x \in (0;+\infty)$ và $g(x)$ có 2 nghiệm âm . Do đó $g(x) > 0, \forall x \in (0;+\infty)$. Suy ra $2 \le m < 10$.

Vậy ta có: $0 \le m < 10$ nên có 10 giá trị nguyên của m.

Câu 3. Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a , b là 2 số thực dương khác 1 , lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



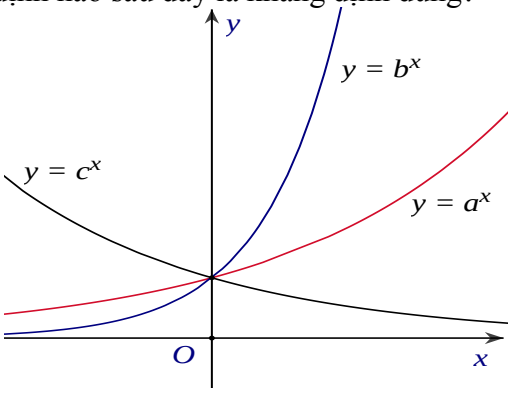
A. $0 < a < b < 1$. **B.** $0 < b < 1 < a$. **C.** $0 < a < 1 < b$. **D.** $0 < b < a < 1$

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = b^x$ nghịch biến nên $0 < b < 1$.
Vì hàm số $y = a^x$ đồng biến nên $a > 1$.

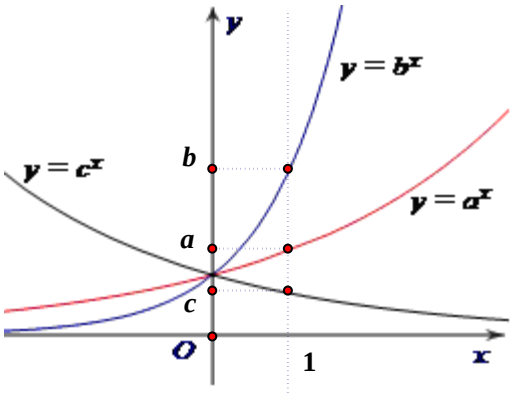
Câu 4. Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ $(0 < a, b, c \ne 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $b > a > c$ **B.** $a > b > c$ **C.** $a > c > b$ **D.** $c > b > a$

Lời giải

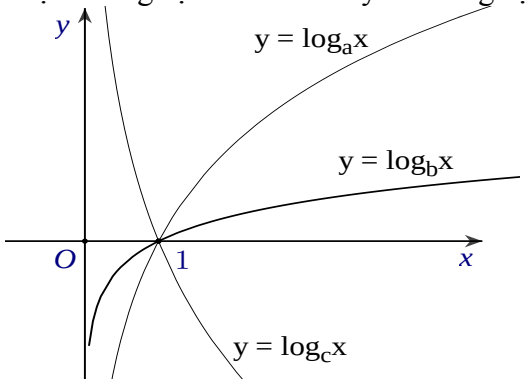
Chọn A



Ta thấy đường thẳng $x=1$ cắt ba đồ thị $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ lần lượt tại các điểm có tung độ lần lượt là a,b,c (hình vẽ)

Dễ thấy $b>a>c.$

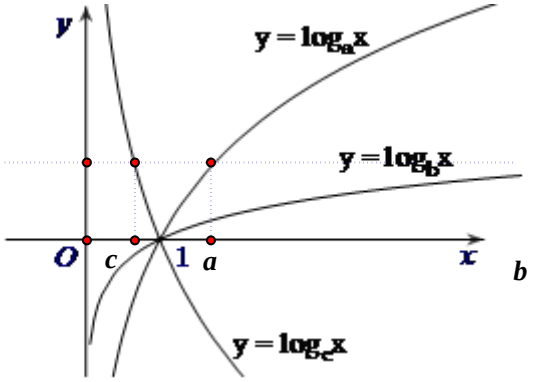
Câu 5. Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ $(0<a,b,c\neq 1)$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $a>c>b$ **B.** $a>b>c$ **C.** $b>c>a$ **D.** $b>a>c$

Lời giải:

Chọn D



Vẽ đường thẳng $y=1$ cắt các đồ thị $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ là a,b,c.

Dễ thấy: $b>a>c$

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=7^{x^3+3x^2+(9-3m)x+1}$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$?

A. 5. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $y' = \left(3x^2 + 6x + (9-3m)\right) 7^{x^3+3x^2+(9-3m)x+1} . \ln 7$.

Hàm số $y = 7^{x^3+3x^2+(9-3m)x+1}$ đồng biến trên $[0;1] \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + (9-3m) \geq 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq x^2 + 2x + 3,\ \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[0;1]} \left(x^2 + 2x + 3\right),\ \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 3$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.

Câu 7. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $b^2 = 3ab + 4a^2$ và $a \in \left[4; 2^{32}\right]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{b}{8}} 4a + \frac{3}{4}\log_2 \frac{b}{4}$. Tính tổng $T = M + m$.

A. $T = \frac{1897}{62}$. **B.** $T = \frac{3701}{124}$. **C.** $T = \frac{2957}{124}$. **D.** $T = \frac{7}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $b^2 = 3ab + 4a^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 3a(b+a) \Leftrightarrow (a+b)(b-4a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = 4a \end{array}\right.$

Vì a, b dương nên $b = 4a$, ta thay vào P ta được

$$P = \log_{\frac{a}{2}} 4a + \frac{3}{4}\log_2 a = \frac{\log_2 4a}{\log_2 \frac{a}{2}} + \frac{3}{4}\log_2 a = \frac{\log_2 a + 2}{\log_2 a - 1} + \frac{3\log_2 a}{4}$$

Đặt $\log_2 a = x$ vì $a \in \left[4; 2^{32}\right]$ nên $x \in [2;32]$

Xét hàm số $P(x) = \frac{x+2}{x-1} + \frac{3}{4}x$

$$P'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{3}{4} \Rightarrow P'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (l) \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	2		3		32
$P(x)$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	$\frac{778}{31}$

Vậy $M = \frac{778}{32}; m = \frac{19}{4} \Rightarrow T = M + m = \frac{3701}{124}$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln\left(16x^2+1\right)-\left(m+1\right)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\infty\right)$.

A. $m\in\left(-\infty;-3\right]$. **B.** $m\in\left[3;+\infty\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;-3\right)$. **D.** $m\in\left[-3;3\right]$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $y=\ln\left(16x^2+1\right)-\left(m+1\right)x+m+2$

$y'=\dfrac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}-\left(m+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 32x-\left(m+1\right)\left(16x^2+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -16\left(m+1\right)x^2+32x-\left(m+1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-16\left(m+1\right)<0\\ \Delta'=16^2-16\left(m+1\right)^2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ -16m^2-32m+240\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 3.$

Do đó: $m\ge 3$.

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)=\ln\dfrac{2020x}{x+1}$. Tính tổng $S=f'\left(1\right)+f'\left(2\right)+...+f'\left(2020\right)$.

A. $S=\dfrac{2020}{2021}$. **B.** $S=1$. **C.** $S=\ln 2020$. **D.** $S=2021$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có : $f'\left(x\right)=\left(\dfrac{2020x}{x+1}\right)'.\dfrac{x+1}{2020x}=\dfrac{2020}{\left(x+1\right)^2}.\dfrac{x+1}{2020x}=\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}$.

Khi đó : $f'\left(1\right)=\dfrac{1}{1.2}$; $f'\left(2\right)=\dfrac{1}{2.3}$; ….; $f'\left(2020\right)=\dfrac{1}{2020.2021}$.

$S=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{2020.2021}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+....+\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2021}=1-\dfrac{1}{2021}=\dfrac{2020}{2021}$.

Câu 10. Cho hai số thực a,b thỏa mãn $1>a\ge b>0$. Tính giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau $T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}$.

A. $T_{\min}=19$. **B.** $T_{\min}=16$. **C.** $T_{\min}$ không tồn tại. **D.** $T_{\min}=13$.

Lời giải:

Chọn B

$T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}=\log_a^2 b+\dfrac{36}{\log_a ab}=\log_a^2 b+\dfrac{36}{1+\log_a b}$

Đặt $t=\log_a b$, vì $1>a\ge b>0\Rightarrow \log_a b\ge \log_b b\Rightarrow t\ge 1$

Xét $f(t)=t^2+\dfrac{36}{1+t}\Rightarrow f'(t)=2t-\dfrac{36}{(1+t)^2}$. Cho $f'(t)=0\Rightarrow t=2$

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ có $\begin{cases} f(1)=19 \\ f(2)=16 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty \end{cases}\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=16\Rightarrow \min\limits_{[1;+\infty)} T=16$.

Mức độ 4

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$.

A. $m\le -2$ hoặc $m=1$.
B. $m<-2$ hoặc $m=1$.
C. $m<-2$.
D. $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\left(0;+\infty\right)\setminus\left\{e^{m+1}\right\}$.

Cách 1: $y'=\dfrac{-m^2-m+2}{x\left(\ln x-m-1\right)^2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} -m^2-m+2<0 \\ e^{m+1}\notin\left(e^2;+\infty\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m+1\le 2 \end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

Cách 2: Đặt $t=\ln x$, ta biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\ln x$ đồng biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$ với $t\in\left(2;+\infty\right)$, ta có $g'\left(t\right)=\dfrac{-m^2-m+2}{\left(t-m-1\right)^2}$.

Vậy hàm số ban đầu nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)\Leftrightarrow$ hàm số g nghịch biến trên

$\left(2;+\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases} g'\left(t\right)<0 \\ m+1\notin\left(2;+\infty\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -m^2-m+2<0 \\ m+1\le 2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m+1\le 2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow m<-2$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$.

A. 3.
B. 1.
C. 2.
D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=e^x$. Vì $t'=\left(e^x\right)'=e^x>0$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{t-m-2}{t-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Ta có: $y' = \dfrac{-m^2+m+2}{\left(t-m^2\right)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{4};1\right)$ cần:

$$\begin{cases} -m^2+m+2>0 \\ m \notin \left(\dfrac{1}{4};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ -1 < m \le \dfrac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{0;1\}$.

Câu 3. Cho hai số thực $a \ge b > 1$. Biết rằng biểu thức $T = \dfrac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \dfrac{81}{16}$. **B.** $P = \dfrac{23}{8}$. **C.** $P = \dfrac{19}{8}$. **D.** $P = \dfrac{49}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = 2\log_a (ab) + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 2\left(1+\log_a b\right) + \sqrt{1-\log_a b}$$

$$= -2\left(\sqrt{1-\log_a b} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{33}{8} \le \frac{33}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1-\log_a b} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{15}{16} \Leftrightarrow b = a^{\frac{15}{16}} \Rightarrow m = \dfrac{15}{16}$, $M = \dfrac{33}{8}$.

Khi đó $P = \dfrac{15}{16} + \dfrac{33}{8} = \dfrac{81}{16}$.

Câu 4. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{6(2x+y)}{x} + \ln \dfrac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$, trong đó a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của tích ab là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Lời giải

Chọn B

x, y dương ta có: $xy \le 4y - 1 \Leftrightarrow xy + 1 \le 4y \le 4y^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x}{y} \le 4$.

Có $P = 12 + 6\dfrac{y}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{y} + 2\right)$.

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, điều kiện: $0 < t \le 4$ thì

$$P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2)$$

$$f'(t)=-\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t+2}=\frac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3+\sqrt{21}\\t=3-\sqrt{21}\end{array}\right.$$

t	0	4
$f'(t)$	−	
$P=f(t)$		$\frac{27}{2}+\ln 6$

Từ BBT suy ra $GTNN(P)=\frac{27}{2}+\ln 6$ khi $t=4$

$\Rightarrow a=\frac{27}{2}$, $b=6\Rightarrow ab=81$.

Câu 5. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$. **B.** $\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. **C.** $\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$. **D.** $\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$, $y>0$, $xy<1$.

Ta có $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow 1+\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-3$

$\Leftrightarrow\log_3\frac{3-3xy}{x+2y}=3xy-3+x+2y\Leftrightarrow\log_3(3-3xy)+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y.\quad(*)$

Xét hàm $f(t)=\log_3 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra $(*)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\longrightarrow y=\frac{3-x}{3x+2}\longrightarrow P=x+\frac{3-x}{3x+2}$.

Xét $f(x)=x+\frac{3-x}{3x+2}$ trên $(0;3)$, ta được $\min\limits_{(0;3)}f(x)=f\left(\frac{-2+\sqrt{11}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Nhận xét. Do $y=\frac{3-x}{3x+2}$ mà $y>0\longrightarrow x<3$. Kết hợp giả thiết ta có $x\in(0;3)$.

Câu 6. Cho hai số thực không âm x,y thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{e}$. **D.** $m=e-3$.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện bài toán ta có

$(x+1)^2+\log_2(x+1)=y+\frac{1}{2}\log_2(2y+1)$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+2\log_2(x+1)=2y+\log_2(2y+1)$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2+\log\left(2(x+1)^2\right)=(2y+1)+\log_2(2y+1)$

$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=2y+1$.

Do đó

$P=f(x)=e^{2x-1}+4x^2-\left(2(x+1)^2-1\right)+1\geq \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

$f(x)=e^{2x-1}+2x^2-4x\Rightarrow f'(x)=2e^{2x-1}+4x-4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{2x-1}=-4x+4\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

Câu 7. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$. **B.** $\frac{281}{50}$. **C.** $\frac{4096}{729}$. **D.** $\frac{14}{25}$.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $a=\log_2 x$, $2b=\log_2 y$, $3c=\log_2 z$. Ta có $S=\log_2(xyz)$.

* $4=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq\left(\frac{4}{3}\right)^3\Leftrightarrow S\leq 3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$.

$max\, S=M=3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$, *khi* $x=y=z=\frac{4}{3}$.

* Gọi $z=\min(x,y,z)\Rightarrow 1\leq z\leq\frac{4}{3}$.

Do $(x-1)(y-1)\geq 0\Rightarrow xy\geq x+y+1=3-z\Rightarrow xyz\geq z(3-z)\geq 2$ (vì $z\in\left[1;\frac{4}{3}\right]$.

Suy ra $S\geq 1$, do đó $m=\min S=1$ khi $x=z=1, y=2$.

$4^M+\log_M m=4^{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)}+\log_{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)}1=\frac{4096}{729}$.

Câu 8. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{e+\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{e-\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{e\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{e}{2\ln 2}$.

Lời giải:

Chọn C

Có $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)\Leftrightarrow 2^y+y=2x+\log_2\left(2x+2^y\right)-1.\ (1)$

Đặt $t=\log_2\left(2x+2^y\right)\Rightarrow 2x+2^y=2^t\Rightarrow 2x=2^t-2^y.$

(1) trở thành : $2^y+y=2^t-2^y+t-1\Leftrightarrow 2^{y+1}+y+1=2^t+t.\ (2)$

Xét hàm số $f(x)=2^x+x, x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x)=2^x\ln 2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)=2^x+x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Kết hợp với (2) ta có: $t=y+1\Leftrightarrow\log_2\left(2x+2^y\right)=y+1\Leftrightarrow 2x+2^y=2^{y+1}\Leftrightarrow x=2^{y-1}.$

Khi đó $P=\dfrac{x}{y}=\dfrac{2^{y-1}}{y}\Rightarrow P'=\dfrac{2^{y-1}y\ln 2-2^{y-1}}{y^2}.$

Cho $P'=0\Leftrightarrow y\ln 2-1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\ln 2}.$

Bảng biến thiên:

y	0		$\dfrac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{e\ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{e\ln 2}{2}$ khi $x=\dfrac{e}{2}$ và $y=\dfrac{1}{\ln 2}.$

Câu 9. Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\log(mx-m+2)$ xác định trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow mx-m+2>0\Leftrightarrow mx>m-2.\quad (*)$

TH1. Với $m=0.$ Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2>0$: luôn đúng với $\forall x\in\mathbb{R}.$

TH2. Với $m>0.$ Khi đó $(*)\Leftrightarrow x>\dfrac{m-2}{m}.$ Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\dfrac{m-2}{m}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0<m<4$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}.$

TH3. Với $m<0.$ Khi đó $(*)\Leftrightarrow x<\dfrac{m-2}{m}.$ Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là $D=\left(-\infty;\dfrac{m-2}{m}\right).$ Do đó $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)\not\subset D\longrightarrow$ trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 0; 1; 2; 3.

Câu 10. Cho hàm số $y=\log\left[(1-m)4^x-2^{x+1}-m-1\right].$ Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số xác định trên toàn trục số là

A. $(-\infty;-1).$ **B.** $(-1;+\infty).$ **C.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right).$ **D.** $\left(-\sqrt{2};+\infty\right).$

Lời giải:

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(1-m)4^x-2^{x+1}-m-1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m\left(4^x+1\right)<4^x-2^{x+1}-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{4^x-2^{x+1}-1}{4^x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow m<\min\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{4^x-2^{x+1}-1}{4^x+1}\right)$ $(*)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4^x-2^{x+1}-1}{4^x+1},\ x\in\mathbb{R}.$

Đặt $2^x=t>0$, ta được hàm số $y=\dfrac{t^2-2t-1}{t^2+1}.$

Ta có: $y'=\dfrac{(2t-2)\left(t^2+1\right)-\left(t^2-2t-1\right).2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\dfrac{2t^2+4t-2}{\left(t^2+1\right)^2}.$

$y'=0\Leftrightarrow 2t^2+4t-2=0\Rightarrow t=\sqrt{2}-1.$

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)}\left(\dfrac{t^2-2t-1}{t^2+1}\right)=-\sqrt{2}.$

Từ $(*)\Rightarrow m<-\sqrt{2}.$

DẠNG TOÁN 6: NGUYÊN HÀM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)\ \forall x\in K$.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.
- $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k\neq 0$.
- $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
• $\int 0dx=C$ • $\int 1.dx=x+C$ • $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad(\alpha\neq-1)$ • $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$; • $\int e^{x}dx=e^{x}+C$ • $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\ \ (0<a\neq 1)$ • $\int\cos xdx=\sin x+C$ • $\int\sin xdx=-\cos x+C$ • $\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx=\tan x+C$ • $\int\frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\cot x+C$	• $\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ ,\ \alpha\neq-1$ • $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$ • $\int\frac{1}{(ax+b)^{2}}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$ • $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ (a\neq 0)$ • $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C\ \ (a\neq 0)$ • $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$ • $\int\frac{1}{\cos^{2}(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ • $\int\frac{1}{\sin^{2}(ax+b)}dx=-\frac{1}{a}\cot(ax+xb)+C$

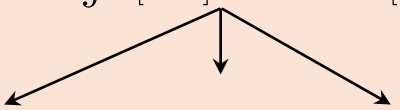
4) Một số phương pháp tính nguyên hàm

a) Áp dụng bảng nguyên hàm

b) Phương pháp đổi biến

☞ **Định lí**: Cho $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$ và $u=u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f\left[u(x)\right]u'(x)\,\mathrm{d}x = F\left[u(x)\right] + C.$$



Có sẵn Tách từ hàm Nhân thêm

Một số dạng đổi biến thường gặp

① $\begin{cases} I = \int f(ax+b)^n.x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = ax+b \Rightarrow \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x \\ I = \int \left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m \mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = x^{n+1}+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = (n+1)x^n\mathrm{d}x, \text{ với } m,\ n \in \mathbb{Z}. \\ I = \int f(ax^2+b)^n.x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t = ax^2+b \Rightarrow \mathrm{d}t = 2ax\,\mathrm{d}x \end{cases}$

② $I = \int \sqrt[n]{f(x)}.f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x.$

③ $\begin{cases} I = \int f(\ln x)\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ I = \int f(a+b\ln x)\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ t = a+b\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{b}{x}\,\mathrm{d}x \end{cases}.$

④ $I = \int f(\mathrm{e}^x).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ t = a+b\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = b\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases}.$

⑤ $I = \int f(\cos x).\sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ t = a+b\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -b\sin x\,\mathrm{d}x \end{cases}.$

⑥ $I = \int f(\sin x).\cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \\ t = a+b\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = b\cos x\,\mathrm{d}x \end{cases}.$

⑦ $I = \int f(\tan x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x.$

⑧ $I = \int f(\cot x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \cot x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x.$

⑨ $I = \int f(\sin^2 x;\cos^2 x).\sin 2x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x\,\mathrm{d}x \\ t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases}.$

⑩ $I = \int f(\sin x \pm \cos x).(\sin x \mp \cos x)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sin x \pm \cos x.$

☞ **Lưu ý**: Sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong, ta cần trả lại biến cũ ban đầu là x.

☞ **Nhóm 1.**

$\begin{cases} I = \int f\left(ax+b\right)^n.xdx \xrightarrow{PP} t = ax+b \Rightarrow dt = adx \\ I = \int \left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m dx \xrightarrow{PP} t = ax^{n+1}+1 \Rightarrow dt = a\left(n+1\right)x^n dx, \text{khi } \mathrm{m,n} \in Z \\ I = \int f\left(ax^2+b\right)^n.xdx \xrightarrow{PP} t = ax^2+b \Rightarrow dt = 2axdx \end{cases}.$

☞ **Nhóm 2.**

Hai công thức thường được sử dụng là:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C \quad \textbf{và} \quad \int \sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C.$$

☞ **Nhóm 3.**

+Nếu : $I = \int f(\ln x).\frac{1}{x}dx$ **Đặt :** $t = \ln x \to dt = \frac{1}{x}dx$

+ Nếu : $I = \int f(a+b\ln x).\frac{1}{x}dx$ **Đặt :** $t = a+b\ln x \to dt = \frac{b}{x}dx$

☞ **Nhóm 4.**

Tìm $I = \int f(e^x).e^x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left[\begin{array}{l} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ t = a+be^x \Rightarrow dt = be^x dx \end{array}\right.$.

☞ **Nhóm 5.**

Nhóm đổi biến hàm số lượng giác

c) Phương pháp từng phần

☞ **Định lý:** Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì

$$I = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \text{ hay } I = \int udv = uv - \int vdu.$$

☞ **Vận dụng giải toán:**

Nhận dạng: Tích hai hàm nhân khác nhau, ví dụ: $\int e^x \sin x dx, \int x\ln x dx, ...$

+ Đặt $\begin{cases} u = ... \\ dv = ...dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ...dx \\ v = ... \end{cases}$. Suy ra $I = \int udv = uv - \int vdu$.

+ ***Thứ tự ưu tiên chọn u: log – đa – lượng – mũ*** và $dv =$ ***phần còn lại.***

+ **Lưu ý:** Bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

+ ***Dạng mũ nhân lượng giác*** là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

5) Nguyên hàm của hàm ẩn

Nhóm 1. Sử dụng định nghĩa $F'(x) = f(x)$.

Nhóm 2. Sử dụng định nghĩa giải bài toán nguyên hàm của hàm ẩn

Vận dụng tính chất $\int f'(x)dx = f(x)+C, \int f''(x)dx = f'(x)+C, ...$ vào các dạng sau:

- $\int (u'v+v'u)'dx = \int (u.v)'dx = uv+C.$
- $\int n.u^{n-1}.u'dx = \int (u^n)'dx = u^n + C.$
- $\int \frac{u'v-v'u}{v^2}dx = \int \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u}{v}+C.$
- $\int \frac{u'}{u}dx = \int \ln|u|'dx = \ln|u|+C.$
- $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx = \int (\sqrt{u})'dx = \sqrt{u}+C.$
- $\int -\frac{u'}{u^2}dx = \int \left(\frac{1}{u}\right)'dx = \frac{1}{u}+C.$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

* DẠNG 1: Tính nguyên hàm bằng định nghĩa và bảng nguyên hàm.

* DẠNG 2: Nguyên hàm của hàm hữu tỉ.

* DẠNG 3: Nguyên hàm từng phần.

* DẠNG 4: Nguyên hàm đổi biến.

* DẠNG 5: Nguyên hàm hàm ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Câu 6. (ĐỀ MINH HỌA BDG LẦN 2 NĂM 2019-2020) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K.$ **B.** $f'(x)=F(x),\forall x\in K.$

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$ **D.** $f'(x)=-F(x),\forall x\in K.$

Lời giải

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng định nghĩa nguyên hàm.

2. HƯỚNG GIẢI:

Sử dụng định nghĩa : Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu

$F'(x)=f(x),\ \forall x\in K.$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in K.$

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Hàm số $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+e^x$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+e^x.$ **B.** $f(x)=3x^2+e^x.$ **C.** $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+e^x.$ **D.** $f(x)=x^2+e^x.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\longleftrightarrow F'(x)=f(x).$

Suy ra hàm số cần tìm $f(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+e^x\right)'=x^2+e^x.$

Câu 2. Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khi đó với $a\neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$. **B.** $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a+b}F(ax+b)+C$.

C. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=F(ax+b)+C$. **D.** $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=aF(ax+b)+C$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Câu 3. Giá trị m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ là

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x)=3mx^2+2(3m+2)x-4$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}m=1\\2(3m+2)=10\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)=\int\pi^2\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=\pi^2x+C$. **B.** $F(x)=2\pi x+C$. **C.** $F(x)=\frac{\pi^3}{3}+C$. **D.** $F(x)=\frac{\pi^2x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int\pi^2\mathrm{d}x=\pi^2x+C$ (vì π^2 là hằng số).

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-3x)(x+1)$ là

A. $-\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C$. **B.** $\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$.

C. $\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$. **D.** $\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Phân phối được: $I=\int(x^3-2x^2-3x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$.

C. $x^3-3x^2+\ln|x|+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)dx = \int\left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{x^2} + 2^x$ là.

A. $\frac{x^4}{4} + \frac{3}{x} + 2^x.\ln 2 + C$.

B. $\frac{x^4}{4} + \frac{3}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

C. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x^3} + 2^x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} - 3\ln x^2 + 2^x.\ln 2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\left(x^3 - \frac{3}{x^2} + 2^x\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{x} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = e^{2019x}$. Nguyên hàm $\int f(x)dx$ là

A. $\int f(x)dx = e^{2019x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{e^{2019x}}{2019x} + C$.

C. $\int f(x)dx = 2019e^{2019x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2019}e^{2019x} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \frac{1}{2019}e^{2019x} + C$.

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x)dx = \ln^2 x + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln x + C$

D. $\int f(x)dx = e^x + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Câu 10. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2018x$.

A. $\frac{\cos 2018x}{2018} + C$

B. $-\frac{\cos 2018x}{2019} + C$

C. $-\frac{\cos 2018x}{2018} + C$

D. $2018\cos 2018x + C$

Lời giải

Chọn C

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int \sin 2018x\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2018x}{2018} + C$.

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \cos x$ là

A. $2x - \sin x + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}x^3 + \sin x + C$. **C.** $\dfrac{1}{3}x^3 - \sin x + C$. **D.** $x^3 + \sin x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \left(x^2 + cosx\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3 + \sin x + C$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$. **B.** $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \dfrac{1}{x} + C$. **C.** $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x| + C$. **D.** $\int 2^x \mathrm{d}x = 2^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Xét A có $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ là mệnh đề đúng.

Xét B có $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \dfrac{1}{x} + C$ sai vì $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

Xét C có $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x| + C$ sai vì $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| + C$.

Xét D có $\int 2^x \mathrm{d}x = 2^x + C$ sai vì $\int 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 13. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x . \int g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm.

Hoặc B, C, D đúng (do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm) nên A sai.

Câu 14. Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$. **B.** $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + \ln x + C$.

C. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \ln x + C$. **D.** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{1}{x}+\ln x+C\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

Câu 15. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

A. $x+\frac{1}{x-1}+C$. **B.** $1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. **D.** $x^2+\ln|x-1|+C$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$.

Câu 16. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=2.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C$. **B.** $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$.

C. $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=2.5^{2x}\ln 5+C$. **D.** $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\frac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5^{2x}\mathrm{d}x=\int 25^x\mathrm{d}x=\frac{25^x}{\ln 25}+C=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$.

Câu 17. Hàm số $f(x)=(2x+1)^3$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{1}{2}\right)=4$. Tính $P=F\left(\frac{3}{2}\right)$.

A. $P=32$. **B.** $P=34$. **C.** $P=18$. **D.** $P=30$.

Lời giải

Chọn B

$\int(2x+1)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{(2x+1)^4}{4}+C=\frac{(2x+1)^4}{8}+C$.

$F\left(\frac{1}{2}\right)=4\Rightarrow 2+C=4\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\frac{(2x+1)^4}{8}+2$.

Do đó $F\left(\frac{3}{2}\right)=34$.

Câu 18. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)=\frac{4}{x^2+6x+9}$.

A. $\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx=\frac{2}{x+3}+C$.

B. $\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx=\frac{-4}{x+3}+C$.

C. $\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx=\frac{-4}{x-3}+C$.

D. $\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx=\frac{4}{x+3}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$I=\int \frac{4}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{4}{(x+3)^2}dx=-\frac{4}{1}.\frac{1}{x+3}+C=\frac{-4}{x+3}+C.$$

Mức độ 2

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin 3x\cos 2x$ là:

A. $-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x+C$.

B. $\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x+C$.

C. $5\cos 5x+\cos x+C$.

D. Kết quả khác.

Lời giải

Chọn A

$$\int 2\sin 3x\cos 2x\,dx=\int(\sin 5x+\sin x)\,dx=\int \sin 5xdx+\int \sin xdx=-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x+C.$$

Câu 20. Tính $I=\int(\sin x-\cos x)^2\mathrm{d}x$.

A. $I=x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

B. $I=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

C. $I=-x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

D. $I=-x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int(\sin x-\cos x)^2\mathrm{d}x=\int(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x)\mathrm{d}x=\int(1-\sin 2x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

Câu 21. Tính $I=\int e^x\sqrt{5-e^x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2}{3}\sqrt{5-e^x}^{\,3}+C$.

B. $I=-\frac{2}{3}\sqrt{5-e^x}^{\,3}+C$.

C. $I=-\frac{3}{4}\sqrt{5-e^x}^{\,3}+C$.

D. $I=-\frac{2}{3}\sqrt{5-e^x}^{\,2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{5-e^x}\Rightarrow t^2=5-e^x$

$\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=-e^x\mathrm{d}x$

$$I=\int e^x\sqrt{5-e^x}\mathrm{d}x=\int t.\,-2t\;\mathrm{d}x=-\int 2t^2\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}t^3+C.$$

Vậy $I=-\frac{2}{3}\sqrt{5-e^x}^{\,3}+C$.

Câu 22. Hãy xác định hàm số $F(x)=ax^3+bx^2+cx+1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$, $f(2)=3$ và $f(3)=4$.

A. $F(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+2x+1.$

C. $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1.$ **D.** $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1.$

Lời giải

Chọn C

$f(x)=3ax^2+2bx+c.$

Theo đề $\begin{cases}3a+2b+c=2\\12a+4b+c=3\\27a+6b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\frac{1}{2}\\c=1\end{cases}.$

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1.$

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $y=\frac{x-2}{x^3}$. Nếu $F(-1)=3$ thì $F(x)$ bằng

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+3.$ **B.** $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-3.$ **C.** $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+1.$ **D.** $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1.$

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int\frac{x-2}{x^3}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+C,$

mà $F(-1)=3\Rightarrow\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1.$

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^{2x}.3^x.7^x$ là

A. $\frac{84^x}{\ln 84}+C.$ **B.** $\frac{2^{2x}.3^x.7^x}{\ln 4.\ln 3.\ln 7}+C.$ **C.** $84^x+C.$ **D.** $84^x.\ln 84+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(2^{2x}.3^x.7^x\right)dx=\int(4.3.7)^x\,dx=\int 84^x\,dx=\frac{84^x}{\ln 84}+C$

Câu 25. Nguyên hàm của hàm số $\frac{2^x-1}{e^x}$ là.

A. $\frac{2^x}{e^x(\ln 2-1)}-e^{-x}+C.$ **B.** $\frac{2^x}{e^x(\ln 2-1)}+e^{-x}+C.$

C. $\frac{-2^x}{e^x(\ln 2-1)}+e^{-x}+C$.

D. $\frac{2^x}{e^x(\ln 2-1)}+2e^{-x}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\frac{2^x-1}{e^x}dx=\int\frac{2^x}{e^x}dx-\int\frac{1}{e^x}dx=\int\left(\frac{2}{e}\right)^x dx-\int e^{-x}dx$

$=\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln\frac{2}{e}}+e^{-x}+C=\frac{2^x}{e^x(\ln 2-1)}+e^{-x}+C$.

Câu 26. Nguyên hàm $\int\sin^2 2xdx$ là.

A. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

B. $\frac{1}{3}\sin^3 2x+C$.

C. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 4x+C$.

D. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\sin^2 2xdx=\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$.

B. $2x^2\ln x+x^2$.

C. $2x^2\ln x+3x^2+C$.

D. $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int f(x)dx=\int 4x(1+\ln x)dx=\int 4xdx+4\int x\ln xdx$.

+ $\int 4xdx=2x^2+C_1$.

+ $\int x\ln xdx=\int\ln xd\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C_2$

Suy ra $I=2x^2+2x^2\ln x-x^2+C=2x^2\ln x+x^2+C$.

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(8x-25).7^x$.

A. $\int f(x)dx=7^x\ln 7(8x-25-8\ln 7)+C$.

B. $\int f(x)dx=(8x-25)\frac{7^x}{\ln 7}-8\frac{7^x}{\ln 7}+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{\ln 7}(8x-25).7^x+\frac{8}{(\ln 7)^2}7^x+C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{\ln 7}(8x-25).7^x - \frac{8}{(\ln 7)^2}7^x + C$.

Lời giải

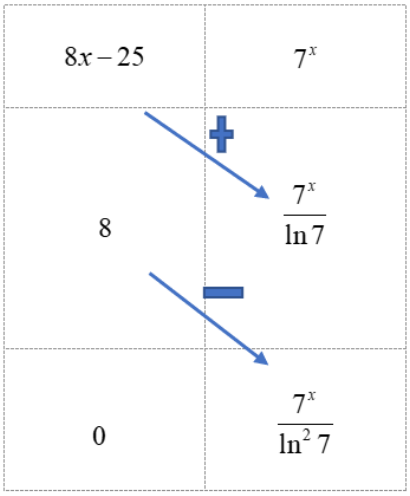
Chọn D

Cách 1: Sử dụng phương pháp từng phần

Đặt $\begin{cases} u = 8x-25 \\ dv = 7^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 8dx \\ v = \frac{7^x}{\ln 7} \end{cases}$

Vậy $\int f(x)dx = (8x-25)\frac{7^x}{\ln 7} - \frac{8}{\ln 7}\int 7^x dx = (8x-25)\frac{7^x}{\ln 7} - \frac{8}{(\ln 7)^2}7^x + C$.

Cách 2: Dùng sơ đồ đường chéo



$I = (8x-25)\frac{7^x}{\ln 7} - 8\frac{7^x}{\ln^2 7} + C$.

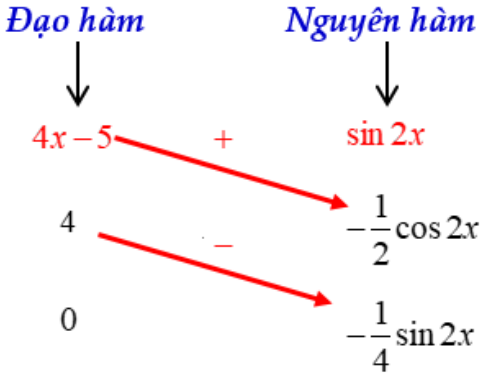
Câu 29. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 4x-5\sin 2x$ và $F(0) = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

***Cách 1*:** (Dùng mẹo tính nhanh)

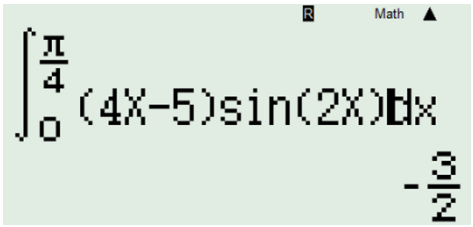


Suy ra $F\ x\ =-\frac{1}{2}\ 4x-5\ \cos 2x+\sin 2x+C\xrightarrow{F\ 0=\frac{1}{2}}\frac{5}{2}+C=-2$

Khi đó $F\ x\ =-\frac{1}{2}\ 4x-5\ \cos 2x+\sin 2x-2\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Cách 2: *(Dùng định nghĩa tích phân, kết hợp Casio).*

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ 4x-5\ \sin 2x\mathrm{d}x=F\ x\ |_0^{\frac{\pi}{4}}=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\ 0\ =\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ 4x-5\ \sin 2x\mathrm{d}x+F\ 0\ .$



Suy ra $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$.

Cách 3:

Đặt: $\begin{cases}u=4x-5\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4\mathrm{d}x\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}\Rightarrow F\ x\ =-\frac{1}{2}\ 4x-5\ \cos 2x+2\int\cos 2x\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\ 4x-5\ \cos 2x+\sin 2x+C$.

Có $F\ 0\ =\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{2}+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=-2\Rightarrow F\ x\ =-\frac{1}{2}\ 4x-5\ \cos 2x+\sin 2x-2$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Chú ý: *Ở cách số 2 khi dùng định nghĩa tích phân, chỉ làm được khi hàm số xác định và liên tục trên* $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Câu 30. Khi tính nguyên hàm $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $u\geq 0$ nên $u^2=x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\\ x=u^2-1\end{cases}$.

Khi đó $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{u^2-1-3}{u}.2u\mathrm{d}u=\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 31. Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{1+\ln x}{x}dx$

A. $I=\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}+C$. **B.** $I=x+\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

C. $I=\ln x+\ln^2 x+C$. **D.** $I=x+\ln^2 x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\frac{1+\ln x}{x}dx=\int(1+\ln x)d\ln x=\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}+C$

Câu 32. Tính $I=\int x(1-x^2)^{2017}dx$

A. $I=-\frac{(1-x^2)^{2018}}{2018}+C$.

B. $I=\frac{(1-x^2)^{2018}}{2018}+C$.

C. $I=-\frac{(1-x^2)^{2018}}{4036}+C$.

D. $I=\frac{(1-x^2)^{2018}}{4036}+C$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có: $I=\int x(1-x^2)^{2017}dx=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{2017}d(1-x^2)=-\frac{(1-x^2)^{2018}}{4036}+C$

Cách 2: Đặt $t=1-x^2\Rightarrow dt=-2xdx\Rightarrow xdx=-\frac{1}{2}dt,$

Khi đó $I=\int t^{2017}(-\frac{1}{2}dt)=-\frac{1}{2}\int t^{2017}dt=-\frac{t^{2018}}{4036}+C=-\frac{(1-x^2)^{2018}}{4036}+C$

Câu 33. Tính $I=\int\frac{4x-1}{4x^2-2x+5}dx$

A. $I=\frac{1}{4x^2-2x+5}+C$.

B. $I=-\frac{1}{4x^2-2x+5}+C$.

C. $I=\ln\left|4x^2-2x+5\right|+C$.

D. $I=\frac{1}{2}\ln\left|4x^2-2x+5\right|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int\frac{4x-1}{4x^2-2x+5}dx=\int\frac{d(2x^2-x)}{4x^2-2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(4x^2-2x+5)}{4x^2-2x+5}=\frac{1}{2}\ln\left|4x^2-2x+5\right|+C$

Câu 34. Hàm $F(x)$ nào dưới đây ***không phải*** là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^{x^2}$?

A. $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+2$.

B. $F(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x^2}+5\right)$.

C. $F(x)=-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

D. $F(x)=-\frac{1}{2}\left(2-e^{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2\longrightarrow\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t.$

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Câu 35. Cho $\int e^x\left(e^x-1\right)^3dx=\frac{a}{b}(e^x-1)^m+C$ (với $a,b\in Z$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tìm $H=a^2+b-m$.

A. $H=-4$.

B. $H=-1$.

C. $H=4$.

D. $H=1$.

Lời giải

Chọn D

$\int e^x\left(e^x-1\right)^3 dx=\int (e^x-1)^3 d(e^x-1)=\frac{1}{4}(e^x-1)^4+C$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \Rightarrow H=a^2+b-c=1^2+4-4=1 \\ m=4 \end{cases}$

Câu 36. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\ln x$. Tính $F''(x)$.

A. $F''(x)=1-\ln x$. **B.** $F''(x)=\frac{1}{x}$. **C.** $F''(x)=1+\ln x$. **D.** $F''(x)=x+\ln x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\ln x\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x)=x\ln x \Rightarrow F''(x)=\ln x+1$.

Câu 37. Tìm họ của nguyên hàm $f(x)=\tan 2x$.

A. $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=2\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **B.** $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=-\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

C. $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2 2x\right)+C$. **D.** $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \tan 2x\ \mathrm{d}x=\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\cos 2x)}{\cos 2x}=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$.

↳ Mức độ 3

Câu 38. Biết $F\ x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\ x\ =\ 2x-5\ e^{2x}$ và $F\ 3\ =1$. Biết $x=x_o$ là nghiệm của $F\ x\ =xe^{2x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{3}<x_0<\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}<x_0<1$ **C.** $-1<x_0<-\frac{3}{4}$ **D.** $-\frac{3}{4}<x_0<-\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $F\ x\ =\int\ 2x-5\ e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=2x-5 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó $F\ x\ =\frac{2x-5\ e^{2x}}{2}-\int e^{2x}dx=\frac{2x-5\ e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}+C=\ x-3\ e^{2x}+C$

Từ $F\ 3\ =1\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F\ x\ =\ x-3\ e^{2x}+1.$

Khi đó:

$$F\ x\ =xe^{2x}\Leftrightarrow\ x-3\ e^{2x}+1=xe^{2x}\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=x_0=-\frac{1}{2}\ln 3\approx -0,55\in\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{3}\right)$$

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x\left(1+\sin x\right)$ là

A. $\frac{x^2}{2}-x\sin x+\cos x+C$.

B. $\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x+C$.

C. $\frac{x^2}{2}-x\cos x-\sin x+C$.

D. $\frac{x^2}{2}-x\sin x-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int x\left(1+\sin x\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int x.\sin x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}\left(\cos x\right)$

$=\frac{x^2}{2}-\left(x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x+C$.

Câu 40. Tìm nguyên hàm $I=\int\ x^2-2x+3\ \sin x dx$.

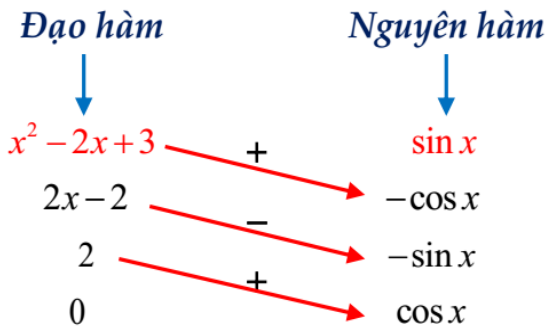
A. $I=-\ x^2-2x-3\ \cos x+2\ x-1\ \sin x+C$. **B.** $I=-\ x-1\ ^2\cos x+2\ x-1\ \sin x+C$.

C. $I=-\ x^2-2x-5\ \cos x-2\ x-1\ \sin x+C$. **D.** $I=\ x-1\ ^2\cos x-2\ x-1\ \sin x+C$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. (Dùng mẹo tính nhanh)



$\Rightarrow I=-\ x^2-2x+3\ \cos x-\ 2x-2\ \ -\sin x\ +2\cos x+C=-\ x-1\ ^2\cos x+2\ x-1\ \sin x+C$

.

Cách 2.

Đặt

$$\begin{cases}u=x^2-2x+3\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\ x-1\ dx\\v=-\cos x\end{cases}\Rightarrow I=-\ x^2-2x+3\ \cos x+\int 2\ x-1\ \cos xdx\ \ 1\ .$$

Đặt

$$\begin{cases}u=2\ x-1\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\sin x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int 2\ x-1\ \cos xdx=\ 2x-2\ \sin x-2\int\sin xdx=\ 2x-2\ \sin x+2\cos x\ \ 2$$

Thay 2 vào 1, ta được $I=-\left(x-1\right)^2\cos x+2\left(x-1\right)\sin x+C$.

Câu 41. Tính $I=\int\left(x^2+x+1\right)e^x\mathrm{d}x$

A. $I=\left(x^2-x+2\right)e^x+C$.

B. $I=\left(-x^2-x+2\right)e^x+C$.

C. $I=\left(x^2+x+2\right)e^x+C$.

D. $I=\left(x^2-x-2\right)e^x+C$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=x^2+x+1\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\left(2x+1\right)dx\\v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $I=\left(x^2+x+1\right)e^x-\int\left(2x+1\right)e^xdx$.

Tính $J=\int\left(2x+1\right)e^xdx$. Đặt $\begin{cases}u_1=2x+1\\dv_1=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=2dx\\v_1=e^x\end{cases}$.

Suy ra $J=\left(2x+1\right)e^x-2\int e^xdx=\left(2x-1\right)e^x+C'$.

Do đó $I=\left(x^2+x+1\right)e^x-J=\left(x^2+x+1\right)e^x-\left(2x-1\right)e^x+C$.

Vậy $I=\left(x^2-x+2\right)e^x+C$.

Câu 42. Tìm nguyên hàm của hàm số $I=\int\cos 2xe^{3x}\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{e^{3x}}{13}\left(-3\cos 2x+2\sin 2x\right)+C$.

B. $I=\frac{e^{3x}}{13}\left(3\cos 2x-2\sin 2x\right)+C$.

C. $I=\frac{-e^{3x}}{13}\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right)+C$.

D. $I=\frac{e^{3x}}{13}\left(3\cos 2x+2\sin 2x\right)+C$..

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=\cos 2x\\dv=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin 2xdx\\v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{cases}$.

Khi đó $I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int\sin 2xe^{3x}dx$.

Tính $J=\int\sin 2xe^{3x}dx$. Đặt $\begin{cases}u_1=\sin 2x\\dv_1=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=2\cos 2xdx\\v_1=\frac{1}{3}e^{3x}\end{cases}$.

Suy ra $J=\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{3}\int\cos 2xe^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{3}I$.

Do đó $I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}J=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{3}I\right)$

$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x - \frac{4}{9}I$.

Vậy $I = \frac{e^{3x}}{13}\left(3\cos 2x + 2\sin 2x\right) + C.$

Câu 43. Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = e^x \sin x.$

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x + C.$

B. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + C.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + C.$

D. $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x e^x dx = e^x \sin x - K$. (1)

Tính $K = \int \cos x e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra $K = e^x \cos x + \int \sin x e^x dx.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int \sin x e^x dx\right)$

$\Leftrightarrow 2\int \sin x e^x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow \int \sin x e^x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right).$

Vì các nguyên hàm sai khác nhau hằng số C nên ta **chọn D**

Câu 44. Tính $I = \int \left(2x+1\right)\ln\left(x+1\right)dx$.

A. $I = -\left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$.

B. $I = \left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) + \frac{1}{2}x^2 + C$.

C. $I = \left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $I = -\left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x+1\right) \\ dv = \left(2x+1\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1}. \\ v = x^2 + x \end{cases}$

Khi đó $I = \left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) - \int \frac{x^2 + x}{x+1}dx = \left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) - \int x dx$

$= \left(x^2 + x\right)\ln\left(x+1\right) - \frac{1}{2}x^2 + C.$

Vậy $I=\left(x^2+x\right)\ln\left(x+1\right)-\frac{1}{2}x^2+C.$

Câu 45. Nguyên hàm $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng.

A. $2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x+1}|+C$.

B. $2\sqrt{x}+C$.

C. $2\ln|\sqrt{x}+1|+C$.

D. $2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-2\ln|\sqrt{x}+1|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C.$$

Câu 46. Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ là.

A. $\frac{\left(x+1\right)\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}{2}+C$.

B. $\frac{\left(x+1\right)\sqrt{x+1}}{3}-\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}{3}+C$.

C. $\frac{\left(x+1\right)\sqrt{x+1}}{4}-\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}{4}+C$.

D. $\left(x+1\right)\sqrt{x+1}-\left(x-1\right)\sqrt{x-1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}dx=\int\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}{2}dx.$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\sqrt{x-1}}{2}\right)dx=\int\frac{1}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx-\int\frac{1}{2}\left(x-1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}.\frac{\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{\left(x+1\right)\sqrt{x+1}}{3}-\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x-1}}{3}+C.$$

Câ 47. Tính $I=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\left(x+3\right)^{10}}$.

A. $I=-\frac{1}{\left(x+3\right)^7}+\frac{3}{4\left(x+3\right)^8}-\frac{1}{\left(x+3\right)^9}+C$.

B. $I=-\frac{1}{7\left(x+3\right)^7}+\frac{3}{4\left(x+3\right)^8}-\frac{1}{\left(x+3\right)^9}+C$.

C. $I=-\frac{1}{7\left(x+3\right)^7}+\frac{3}{\left(x+3\right)^8}-\frac{1}{\left(x+3\right)^9}+C$.

D. $I=-\frac{1}{7\left(x+3\right)^7}+\frac{3}{4\left(x+3\right)^8}+\frac{1}{\left(x+3\right)^9}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x+3$, suy ra $\begin{cases}dt=dx\\x=t-3\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\frac{(t-3)^2}{t^{10}}dt=\int\left(t^{-8}-6t^{-9}+9t^{-10}\right)dt=-\frac{1}{7t^7}+\frac{3}{4t^8}-\frac{1}{t^9}+C$

$=-\frac{1}{7(x+3)^7}+\frac{3}{4(x+3)^8}-\frac{1}{(x+3)^9}+C.$

Vậy $I=-\frac{1}{7(x+3)^7}+\frac{3}{4(x+3)^8}-\frac{1}{(x+3)^9}+C.$

Câu 48. Tính $I=\int\frac{x}{(1-x)^4}\mathrm{d}x.$

A. $I=\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{3(1-x)^3}+C.$ **B.** $I=-\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+C.$

C. $I=-\frac{1}{3(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)^3}+C.$ **D.** $I=\frac{1}{3(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x)^3}+C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=1-x$ ta có: $\begin{cases}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\\x=1-t\end{cases}.$

Khi đó $I=-\int\frac{1-t}{t^4}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}+C=-\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+C.$

$I=-\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+C$

Câu 49. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}$ sau phép đặt $t=2+\sin x$ là

A. $F(t)=\frac{t^2}{2}-4t+3\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}.$ **B.** $F(t)=t^2-2t-\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}.$

C. $F(t)=-t^2+2t+\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}.$ **D.** $F(t)=-\frac{t^2}{2}+4t-3\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f(x)dx=\int\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}\cos x dx=I$. Đặt $t=2+\sin x\Rightarrow\begin{cases}dt=\cos x dx\\\sin x=t-2\end{cases}.$

Khi đó: $I=F(t)=\int\frac{1-(t-2)^2}{t}dt=\int\left(-t+4-\frac{3}{t}\right)dt=-\frac{t^2}{2}+4t-3\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}.$

Câu 50. Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{dx}{1+e^x}.$

A. $I=x-\ln\left|1-e^x\right|+C.$ **B.** $I=x-\ln\left|1+e^x\right|+C.$

C. $I=-x-\ln\left|1+e^x\right|+C.$ **D.** $I=x+\ln\left|1+e^x\right|+C.$

Lời giải

Chọn B

$I=\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x\left(1+e^x\right)}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$.

$I=\int\frac{e^x dx}{e^x\left(1+e^x\right)}=\int\frac{dt}{t(1+t)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|-\ln|t+1|+C=\ln|e^x|-\ln|e^x+1|+C$.

$=x-\ln|e^x+1|+C$.

Câu 51. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\mathrm{e}^x+3}$ thỏa mãn $F(0)=10$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-2\ln\left(2e^x+3\right)\right)+10+\frac{2\ln 5}{3}$.

B. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x+10-\ln\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\right)$.

C. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\right)\right)+10+\ln 5$.

D. $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-\ln\left(\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\right)\right)+10-\frac{\ln 5-\ln 2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\mathrm{e}^x+3}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Suy ra

$F(x)=\int\frac{1}{(2t+3)t}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{2t+3}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\ln|t|-2\ln|2t+3|\right)+C$

$=\frac{1}{3}\left(x-2\ln\left(2e^x+3\right)\right)+C$.

Vì $F(0)=10$ nên $10=\frac{1}{3}(0-2\ln 5)+C\Leftrightarrow C=10+\frac{2\ln 5}{3}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\left(x-2\ln\left(2e^x+3\right)\right)+10+\frac{2\ln 5}{3}$.

Câu 52. Nguyên hàm $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}+2}$ là

A. $I=-\frac{2}{e^x+1}+C$.

B. $I=-\frac{1}{e^x+1}+C$.

C. $I=-\frac{3}{e^x+1}+C$.

D. $I=-\frac{4}{e^x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=e^x$, suy ra $dt=e^x dx\Rightarrow\frac{dt}{e^x}=dx$ hay $\frac{dt}{t}=dx$.

Khi đó $I=\int\dfrac{dt}{t\left(t+\dfrac{1}{t}+2\right)}=\int\dfrac{dt}{t^2+2t+1}=\int\dfrac{dt}{(t+1)^2}$

$=-\dfrac{1}{t+1}+C=-\dfrac{1}{e^x+1}+C.$

Vậy $I=-\dfrac{1}{t+1}+C=-\dfrac{1}{e^x+1}+C.$

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2x^3+3x^2=x^2(2x+3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3\Leftrightarrow\int\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'dx=\int 2x+3\ \mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x+C.$

Do $f(1)=4\Rightarrow 4=1+3+C\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2\Rightarrow f(2)=20.$

Câu 54. Tìm nguyên hàm $I=\int x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$

C. $I=\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}+\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$ **D.** $I=-\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}+\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int x^3e^{x^2}dx=\int x^2e^{x^2}.xdx.$

Đặt $t=x^2$, suy ra $dt=2xdx\Rightarrow xdx=\dfrac{dt}{2}$.Khi đó $I=\int\dfrac{1}{2}te^tdt.$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}t\\dv=e^tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{2}dt\\v=e^t\end{cases}.$

Vậy $I=\dfrac{1}{2}te^t-\dfrac{1}{2}e^t+C=\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$

Câu 55. Tìm nguyên hàm $I=\int\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{(x+1)^3}dx$.

A. $I=\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2(x+1)^2}+8\ln\dfrac{4x^2+8x+3}{4(x+1)^2}+C$.

B. $I=-\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2\left(x+1\right)^2}+8\ln\dfrac{4x^2+8x+3}{4\left(x+1\right)^2}+C$.

C. $I=-\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2\left(x+1\right)^2}-8\ln\dfrac{4x^2+8x+3}{4\left(x+1\right)^2}+C$.

D. $I=\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2\left(x+1\right)^2}-8\ln\dfrac{4x^2+8x+3}{4\left(x+1\right)^2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\left(x+1\right)^2\Rightarrow dt=2\left(x+1\right)dx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2\left(x+1\right)}\Rightarrow I=\int\dfrac{\ln\left(4\left(x+1\right)^2-1\right)}{\left(x+1\right)^3}dx=\int\dfrac{\ln\left(4t-1\right)}{2t^2}dt$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(4t-1\right)\\dv=\dfrac{1}{2t^2}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{4}{4t-1}dt\\v=-\dfrac{1}{2t}\end{cases}\Rightarrow I=-\dfrac{\ln\left(4t-1\right)}{2t}+\int\dfrac{2}{t\left(4t-1\right)}dt$

$\Rightarrow I=-\dfrac{\ln\left(4t-1\right)}{2t}+8\int\left(\dfrac{1}{4t-1}-\dfrac{1}{4t}\right)dt=-\dfrac{\ln\left(4t-1\right)}{2t}+8\ln\dfrac{4t-1}{4t}+C$

$\Rightarrow I=-\dfrac{\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2\left(x+1\right)^2}+8\ln\dfrac{4x^2+8x+3}{4\left(x+1\right)^2}+C.$

Câu 56. Tìm nguyên hàm $I=\int e^{\sqrt{3x-9}}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}-1\right)e^{\sqrt{3x-9}}+C.$

B. $I=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}-1\right)e^{\sqrt{3x-9}}+C.$

C. $I=\dfrac{2}{3}\left(-\sqrt{3x-9}-1\right)e^{\sqrt{3x-9}}+C.$

D. $I=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}+1\right)e^{\sqrt{3x-9}}+C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x-9}\Rightarrow t^2=3x-9$, suy ra $2tdt=3dx\Rightarrow\dfrac{2}{3}tdt=dx$.

Khi đó $I=\int\dfrac{2}{3}te^tdt$. Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{2}{3}t\\dv=e^tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2}{3}dt\\v=e^t\end{cases}$.

Vậy $I=\dfrac{2}{3}te^t-\int\dfrac{2}{3}e^tdt=\dfrac{2}{3}te^t-\dfrac{2}{3}e^t+C=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}-1\right)e^{\sqrt{3x-9}}+C.$

Câu 57. Gọi $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2^x$, thỏa mãn $F\left(0\right)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F\left(0\right)+F\left(1\right)+F\left(2\right)+...+F\left(2017\right)$.

A. $T=1009.\dfrac{2^{2017}+1}{\ln 2}$.

B. $T=2^{2017.2018}$.

C. $T=\dfrac{2^{2017}-1}{\ln 2}$.

D. $T=\dfrac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow C=0\Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$.

Khi đó:

$$T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2017)=\frac{2^0}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}+\frac{2^2}{\ln 2}+...+\frac{2^{2017}}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}.\frac{1-2^{2018}}{1-2}=\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$$

Câu 58. Hàm số $F(x)=(ax+b)\sqrt{4x+1}$ (a,b là các hằng số thực) là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{12x}{\sqrt{4x+1}}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=a\sqrt{4x+1}+(ax+b).\frac{2}{\sqrt{4x+1}}=\frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}$.

Để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\frac{6ax+a+2b}{\sqrt{4x+1}}=\frac{12x}{\sqrt{4x+1}}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=12\\a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+b=1$.

Câu 59. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ và thỏa mãn $F(0)=2020$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $F(x)=-e^{\tan x}+2021$. **B.** $F(x)=e^{\tan x}+2019$.

C. $F(x)=-e^{-\tan x}+2021$. **D.** $F(x)=e^{-\tan x}+2019$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\tan x\longrightarrow\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int e^t\mathrm{d}t=e^t+C=e^{\tan x}+C$.

Theo giả thiết $F(0)=2020\longrightarrow e^{\tan 0}+C=2020\Leftrightarrow C=2019$.

Suy ra $F(x)=e^{\tan x}+2019$.

Câu 60. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Khi đó $\int f'(x)e^{2x}dx$ bằng

A. $-x^2+2x+C$. **B.** $-x^2+x+C$. **C.** $2x^2-2x+C$. **D.** $-2x^2+2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$

Ta có $(x^2)'=f(x)e^{2x}\Leftrightarrow 2x=f(x)e^{2x}$.

$\int f'(x)e^{2x}dx=e^{2x}f(x)-\int 2e^{2x}f(x)dx$.

$=2x-2x^2+C$.

↳ Mức độ 4

Câu 61. Biết $F\ x\ $ là một nguyên hàm của hàm số $f\ x\ =e^x\cos 2x$ và $F\ 0\ =\frac{1}{5}$. Khi đó phương trình $F\ x\ =\frac{2e^x\sin 2x}{5}$ có bao nhiêu nghiệm x thuộc đoạn $0;2\pi$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F\ x\ =\int e^x\cos 2xdx$. Đặt $\begin{cases}u=\cos 2x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin 2\,xdx\\v=e^x\end{cases}$

Khi đó $F\ x\ =e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2xdx=e^x\cos 2x+2I\ *$.

Tính $I=\int e^x\sin 2x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin 2x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\cos 2xdx\\v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $I=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2xdx=e^x\sin 2x-2F\ x\ \ 2*$.

Thay $2*$ vào $*$ ta được:

$F\ x\ =e^x\cos 2x+2\ e^x\sin 2x-2F\ x\ \Leftrightarrow F\ x\ =\frac{\cos 2x+2\sin 2x\ e^x}{5}+C$

Suy ra $F\ 0\ =\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{5}+C=\frac{1}{5}\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F\ x\ =\frac{\cos 2x+2\sin 2x\ e^x}{5}$

Khi đó $F\ x\ =\frac{2e^x\sin 2x}{5}\Leftrightarrow\frac{\cos 2x+2\sin 2x\ e^x}{5}=\frac{2e^x\sin 2x}{5}\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Do $x\in 0;2\pi\ \Rightarrow k\in\ 0;1;2;3\ \Rightarrow$ có 4 giá trị.

Câu 62. Tính nguyên hàm $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+1}-x^2}$

A. $I=\frac{x^6}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$. **B.** $I=-\frac{x^6}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$.

C. $I=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$. **D.** $I=-\frac{x^6}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$.

Lời giải

Đặt $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+1}-x^2}=\int\frac{x^3(\sqrt{x^4+1}+x^2)dx}{(\sqrt{x^4+1}+x^2)(\sqrt{x^4+1}-x^2)}=\int\frac{x^3\sqrt{x^4+1}+x^5}{(x^4+1)-x^4}dx$

$=\int(x^3\sqrt{x^4+1}+x^5)dx=\int x^5dx+\int x^3\sqrt{x^4+1}dx=\frac{x^6}{6}+B$

Tính B?

Đặt $t=\sqrt{x^4+1}\Rightarrow tdt=2x^3dx$

Ta có $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{6}t^3+C=\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$.

Vậy $I=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}+C$

Câu 63. Cho $F\ x\ =\ x-1\ e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\ x\ e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\ x\ e^{2x}$.

A. $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\ 4-2x\ e^x+C$.

B. $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\frac{2-x}{2}e^x+C$.

C. $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\ 2-x\ e^x+C$.

D. $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\ x-2\ e^x+C$.

Lời giải

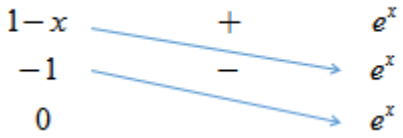
Chọn C

Do $F\ x\ =\ x-1\ e^x$ là một nguyên hàm của $f\ x\ e^{2x}\Rightarrow F'\ x\ =f\ x\ e^{2x}\Leftrightarrow xe^x=f\ x\ e^{2x}$

$\Leftrightarrow f\ x\ =\frac{x}{e^x}$. Suy ra: $f'\ x\ =\frac{e^x-xe^x}{e^x\ ^2}=\frac{1-x\ e^x}{e^{2x}}\Rightarrow f'\ x\ e^{2x}=1-x\ e^x$.

Khi đó $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\int 1-x\ e^xdx$.

Cách 1: *(Dùng mẹo tính nhanh)*



Suy ra $\int f'\ x\ e^{2x}dx=\ 1-x\ e^x-\ -1\ e^x+C=\ 2-x\ e^x+C$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases}u=1-x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int f'\ x\ e^{2x}dx=\ 1-x\ e^x+\int e^xdx=\ 1-x\ e^x+e^x$

$=\ 2-x\ e^x+C$.

Câu 64. Cho $F\ x\ =\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f\ x}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'\ x\ \ln x$.

A. $\int f'\ x\ \ln xdx=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$.

B. $\int f'\ x\ \ln xdx=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\int f'\ x\ \ln xdx=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)+C$.

D. $\int f'\ x\ \ln xdx=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+C$.

Lời giải

Chọn A

Do $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$

$\Rightarrow F'(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Suy ra: $f'(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f'(x)\ln x=\frac{2\ln x}{x^3}$.

Khi đó: $\int f'(x)\ln x dx=\int\frac{2\ln x}{x^3}dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\frac{2}{x^3}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=-\frac{1}{x^2}\end{cases}$

$\Rightarrow\int f'(x)\ln x dx=-\frac{\ln x}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+C=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$.

Câu 65. Cho $F(x)=-\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^5}+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x dx=-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

C. $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^5}+C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=x.F'(x)=x.\left(-\frac{1}{3}.x^{-3}\right)'=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$

$\Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}\Rightarrow f'(x)\ln x=-3x^{-4}\ln x$

Vậy $\int f'(x)\ln x dx=\int(-3x^{-4}\ln x)dx=-3\int\ln x.x^{-4}dx$

Đặt $u=\ln x; dv=x^{-4}dx\Rightarrow du=\frac{dx}{x};v=\frac{x^{-3}}{-3}$

Nên $\int f'(x)\ln x dx=-3\int\ln x.x^{-4}dx=-3\left(\frac{\ln x}{-3x^3}+\int\frac{x^{-4}}{3}dx\right)=\frac{\ln x}{x^3}-\int x^{-4}dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

Câu 66. Cho $F(x)=\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $(x^4-x^3)f'(x)$.

A. $\int(x^4-x^3)f'(x)=-2x^2-4x+C$ **B.** $\int(x^4-x^3)f'(x)=2x^2+4x+C$

C. $\int(x^4-x^3)f'(x)=2x^2-4x+C$ **D.** $\int(x^4-x^3)f'(x)=-2x^2+4x+C$

Lời giải

Áp dụng định nghĩa $F'(x)=f(x)$, Ta có: $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow-\frac{2}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x^2}$

Ta tìm $I=\int\left(x^4-x^3\right)f'(x)\mathrm{d}x$.

Chọn $\begin{cases}u=x^4-x^3\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x\\ v=f(x)=\dfrac{-2}{x^2}\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\dfrac{2}{x^2}\left(x^4-x^3\right)+\int\dfrac{2}{x^2}.\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=-2x^2+2x+\int(8x-6)\mathrm{d}x=$

$=-2x^2+2x+4x^2-6x+C=2x^2-4x+C$

Vậy $\int\left(x^4-x^3\right)f'(x)\mathrm{d}x=2x^2-4x+C$

Câu 67. Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos^2\dfrac{x}{2}$ và thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{2}$.

Giá trị của $F(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{4}+1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int x\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\int x\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int x\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\int x\cos x\mathrm{d}x.$

- $\dfrac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2}{2}+C_1=\dfrac{x^2}{4}+C_1.\ (1)$
- $\dfrac{1}{2}\int x\cos x\mathrm{d}x.$ Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}.$

Suy ra $\dfrac{1}{2}\int x\cos x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x\sin x+\cos x+C_2\right).\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\int x\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{4}+C_1+\dfrac{1}{2}\left(x\sin x+\cos x+C_2\right).$

Theo giả thiết $F(0)=\dfrac{1}{2}\longrightarrow C_1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}C_2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow C_1+\dfrac{1}{2}C_2=0.$

Suy ra $F(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{2}\left(x\sin x+\cos x\right)\longrightarrow F(\pi)=\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{1}{2}.$

Câu 68. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f(x)}=\int \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$

Mà $f(1)=1$ nên $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}$. Suy ra $f(5)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} \approx 3,794$.

Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln 2$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của tổng a^2+b^2 bằng

A. $0,5$. **B.** $0,75$. **C.** $\dfrac{13}{4}$. **D.** $4,5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)}f(x)+f'(x)=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)+\dfrac{x}{x+1}f'(x)=\dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left(f(x)\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{x}{x+1}$

Suy ra $\int\left(f(x)\dfrac{x}{x+1}\right)'dx=\int\dfrac{x}{x+1}dx \Leftrightarrow f(x)\dfrac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|+C$

Mà $f(1)=-2\ln 2 \Rightarrow -2\ln(2).\dfrac{1}{2}=1-\ln 2+C \Leftrightarrow C=-1$.

Do đó $f(x)=x+1-\dfrac{x+1}{x}\ln|x+1|-\dfrac{x+1}{x}=x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x}\ln|x+1|$.

Ta có $f(2)=2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$ suy ra $a=\dfrac{3}{2};b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 70. Cho $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{3x-6}$; $f(0)=\dfrac{4}{3}\ln 6$ và $f(3)=\dfrac{4}{3}\ln 3$. Tính $P=f(-7)+f(11)$.

A. $P=\ln 162$. **B.** $P=\ln 18$. **C.** $P=2\ln 3$. **D.** $P=3+\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3x-6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|x-2|+C=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln(x-2)+C_1 & \text{khi } x>2\\ \dfrac{1}{3}\ln(2-x)+C_2 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Do $\begin{cases} f(0)=\dfrac{4}{3}\ln 6 \\ f(3)=\dfrac{4}{3}\ln 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}\ln(2-0)+C_2=\dfrac{4}{3}\ln 6 \\ \dfrac{1}{3}\ln(3-2)+C_1=\dfrac{4}{3}\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{4}{3}\ln 3 \\ C_2=\ln 2+\dfrac{4}{3}\ln 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\ln(x-2)+\dfrac{4}{3}\ln 3 & \text{khi } x>2 \\ \dfrac{1}{3}\ln(2-x)+\ln 2+\dfrac{4}{3}\ln 3 & \text{khi } x<2 \end{cases}.$

Khi đó: $P=f(-7)+f(11)=\left(\dfrac{1}{3}\ln[2-(-7)]+\ln 2+\dfrac{4}{3}\ln 3\right)+\left[\dfrac{1}{3}\ln(11-2)+\dfrac{4}{3}\ln 3\right]$

$=4\ln 3+\ln 2=\ln 162.$

DẠNG TOÁN 7: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (KHỐI CHÓP)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3}B.h$$

Trong đó : B là diện tích đáy, h là chiều cao của khối chóp.

Chú ý: Một số các xác định chiều cao của hình chóp

a) Hình chóp có cạnh bên vuông góc đáy chiều cao chính là cạnh bên đó.

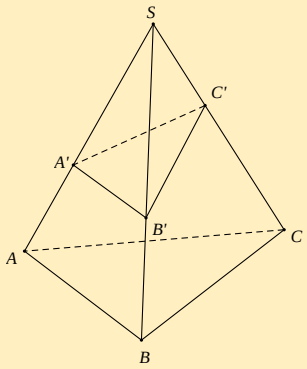
b) Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy chiều cao chính là đường cao của mặt bên vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh.

c) Hình chóp đều chiều cao chính là đoạn nối từ đỉnh đến tâm của đa giác đáy.

d) Hình chóp có hình chiếu vuông góc của đỉnh xuống mặt đáy thì chiều cao chính là đoạn nối từ đỉnh đến hình chiếu.

2. Tỉ số thể tích

Cho khối chóp $S.ABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có



$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$$

Chú ý : Phương pháp này chỉ áp dụng khi

+ Hai khối chóp cùng đỉnh.

+ Đáy 2 khối chóp phải là tam giác.

+ Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng

3. Công thức diện tích đa giác thường gặp

a. Tam giác

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \qquad S = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{1}{2}b.c\sin A = \frac{1}{2}c.a\sin B$$

Tam giác vuông tại A : $S = \frac{1}{2}AB.AC$

Tam giác đều, cạnh a có : Chiều cao $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b. Hình vuông cạnh a : $S=a^2$.

c. Hình chữ nhật : $S=a.b$.

d. Hình thang : $S=\dfrac{1}{2}(a+b).h$, với a,b cạnh đáy và h chiều cao.

e. Hình thoi : $S=\dfrac{1}{2}AC.BD=AB.AD\sin BAD$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Khối chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy
- Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy.
- Khối chóp đều
- Sử dụng định lý tỉ số thể tích.
- Tìm max, min.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính thể tích của khối chóp.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Công thức thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}B.h$.

B2: Tính V.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}B.h=\dfrac{1}{3}4.3=4$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho khối chóp có diện tich đáy $B=10\left(\text{m}^2\right)$ và chiều cao $h=6\left(\text{m}\right)$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $60\left(\text{m}^3\right)$. **B.** $20\left(\text{m}^3\right)$. **C.** $180\left(\text{m}^3\right)$. **D.** $30\left(\text{m}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}10.6=20$.

Câu 2. Cho khối chóp có thể tích $V=12$ và diện tích đáy $B=6$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 72. **C.** 24. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\frac{1}{3}B.h\Rightarrow h=\frac{3V}{B}=\frac{3.12}{6}=6$.

Câu 3. Cho khối chóp có thể tích $V=18$ và chiều cao $h=4$. Diện tích đáy của khối chóp đã cho bằng

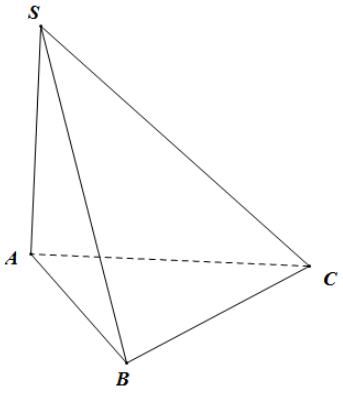
A. $\frac{27}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 72. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\frac{1}{3}B.h\Rightarrow B=\frac{3V}{h}=\frac{3.18}{4}=\frac{27}{2}$.

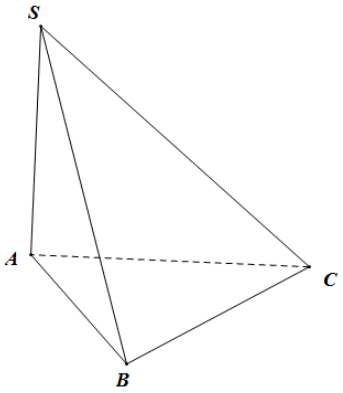
Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA=BC=a$ (như hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.



A. $V=\frac{a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3}{4}$. **C.** $V=2a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

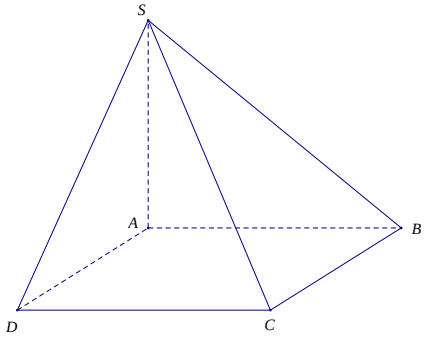
Chọn A



Ta có $AB=\dfrac{BC}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{a^2}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a^3}{12}$.

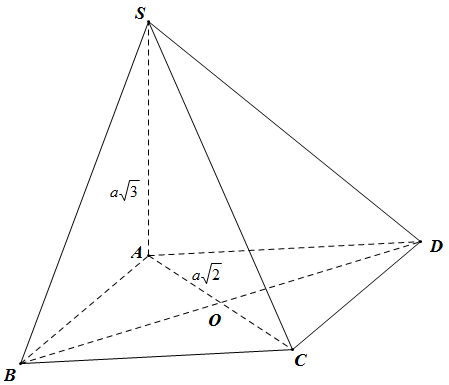
Câu 5. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$ (như hình vẽ). Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là



A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

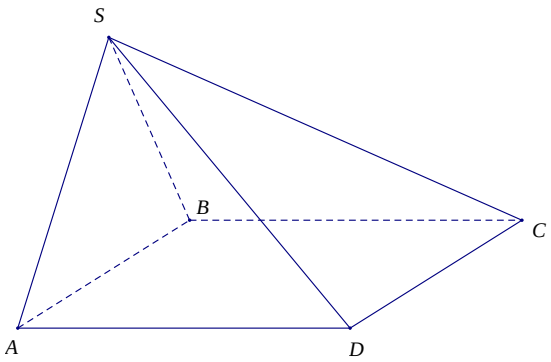
Chọn A



Ta có $ABCD$ là hình vuông có $AC=a\sqrt{2}$ suy ra $AB=a$.

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

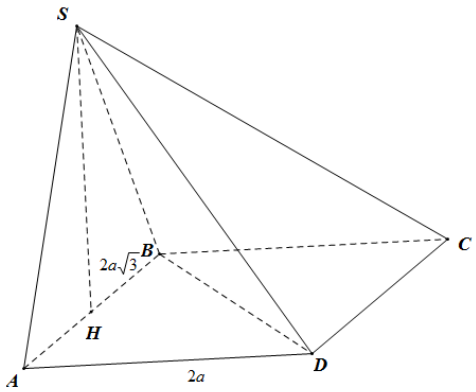
Câu 6. Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB=2a\sqrt{3};\ AD=2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (như hình vẽ). Thể tích khối chóp $S.ABD$ là



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D

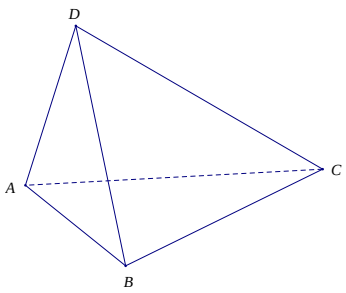


Gọi H là trung điểm AB. Vì tam giác SAB đều nên $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$ và

$SH=\frac{AB.\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=3a$.

Vậy, $V_{S.ABD}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABD}=\frac{1}{3}.3a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.2a=2a^3\sqrt{3}$.

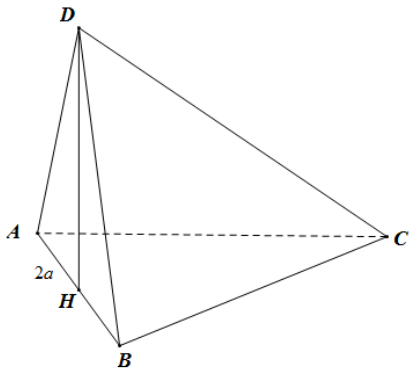
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại C và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABD), tam giác ABD là tam giác đều và có cạnh bằng $2a$ (như hình vẽ). Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.



A. $a^3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



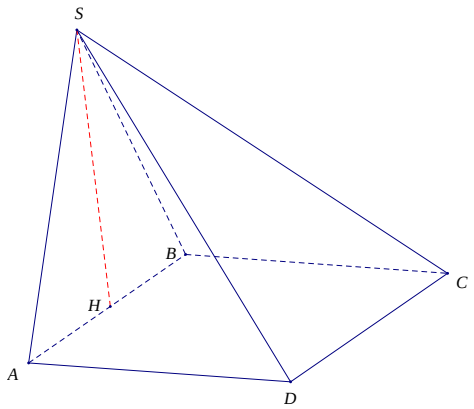
Gọi H là trung điểm của AB.

Ta có $DH \perp (ABC)$ và $DH = a\sqrt{3}$.

ΔABC vuông cân tại C nên $2CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow AC = BC = a\sqrt{2}$.

Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu của S trên $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AB; cạnh bên $SD = \frac{3a}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

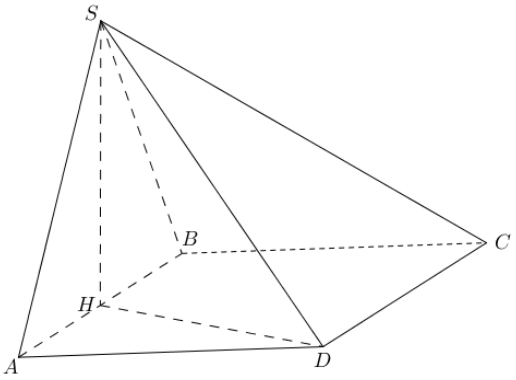


A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải:

Chọn D

Gọi H là trung điểm của AB.



Ta có: $HD=\sqrt{AD^2+AH^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{4}$.

Xét tam giác SHD vuông tại D $SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2}=a$.

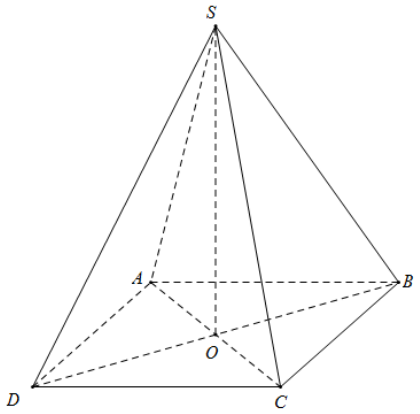
Vậy, $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a.a.a=\frac{a^3}{3}$.

Câu 9. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

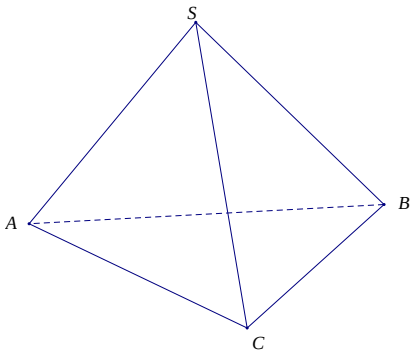


Gọi $I=AC\cap BD$. Suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Vậy, $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{2}.a.a=\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

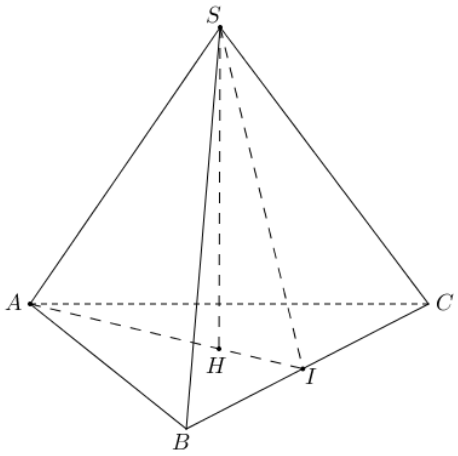
Câu 10. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là



A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của cạnh BC, H là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AH = \frac{2}{3}.AI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông SHB có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Vậy, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$.

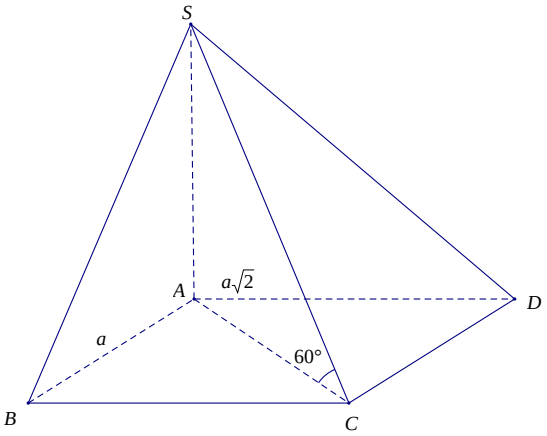
Mức độ 2

Câu 1. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$; $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $3\sqrt{2}a^3$ **B.** $3a^3$ **C.** $\sqrt{6}a^3$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$

Vậy $SA=AC.\tan SCA=a\sqrt{3}.\tan 60°=3a$. Ngoài ra

$S_{ABCD}=a.a\sqrt{2}=a^2\sqrt{2}$

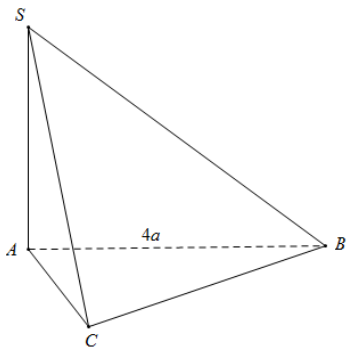
nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.3a.a^2\sqrt{2}=a^3\sqrt{2}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $AB=4a$ và góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$ **B.** $V=\frac{1}{6}a^3$ **C.** $V=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

Lời giải

Chọn C



$\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\AC\perp BC\\SC\perp BC\end{cases}$ suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $SCA=45°$.

$\Rightarrow SA=AC=\frac{4a}{\sqrt{2}}=2a\sqrt{2}$.

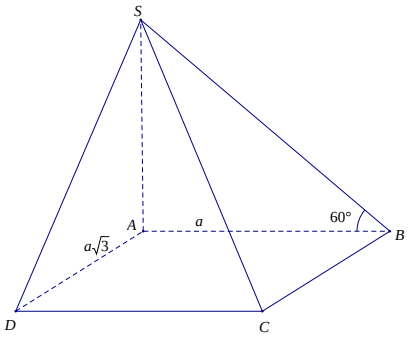
Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}.SA.S_{ABC}=\frac{1}{3}.2a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.\left(2a\sqrt{2}\right)^2=\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCD}=\sqrt{3}a^2$; $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$.

$\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\AB\perp BC\\SB\perp BC\end{cases}$ suy ra góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $SBA=60°$.

$\tan 60^o=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=a\sqrt{3}$.

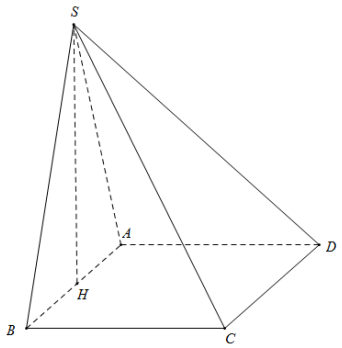
Vậy, $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AD=a$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $2a^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$ mà $(SAB)\cap(ABCD)=AB.$

$\Rightarrow((SBC),(ABCD))=(HB,SB)=SBH=45°.$

Mà $HB=\dfrac{1}{2}AB=a\Rightarrow SH=a$

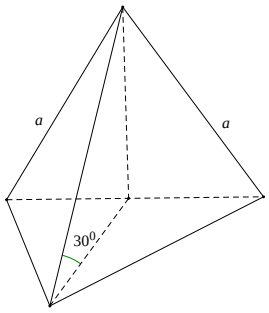
Vậy, $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a.2a.a=\dfrac{2a^3}{3}.$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB. Đường thẳng SC tạo với mặt đáy một góc $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3.$ **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^3.$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{8}a^3.$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow(SC,(ABC))=(SC,HC)=SCH=30°.$

ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Xét ΔSCH vuông tại $H \Rightarrow CH = \dfrac{SH}{\tan 30^\circ} = \dfrac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác ΔABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.CH = \dfrac{1}{2} a.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$.

Vậy, $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60°.

A. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$.

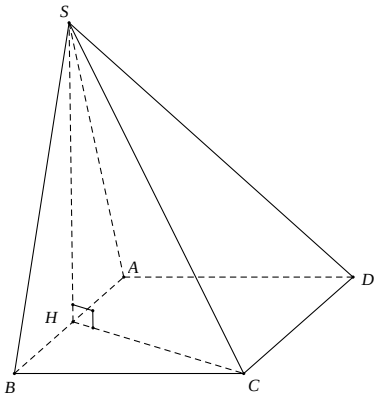
B. $V_{S.ABCD} = 9a^3\sqrt{15}$.

C. $V_{S.ABCD} = \dfrac{9a^3\sqrt{15}}{2}$.

D. $V_{S.ABCD} = 18a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Góc $(SC,(ABCD)) = (SC,HC) = SCH = 60^\circ$.

ΔBHC vuông tại B có $HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$.

ΔSHC vuông tại H có

$SH = HC.\tan 60^\circ = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a\sqrt{15}}{2}$

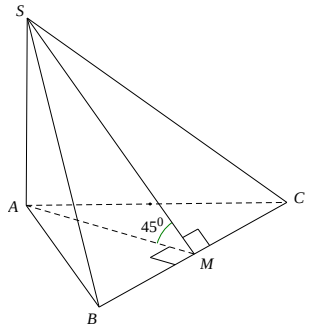
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.9a^2.\dfrac{3a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{15}}{2}$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $BAC = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



+ Trong tam giác cân ABC, kẻ $AM \perp BC$ suy ra M là trung điểm BC.

Vì $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAM)$.

Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng $SAM = 45° \Rightarrow SA = AM$.

+ ΔABM có $BAM = 60°$; $BM = \frac{BC}{2} = a$; $\tan 60° = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$AB^2 = AM^2 + BM^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow AB = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$.

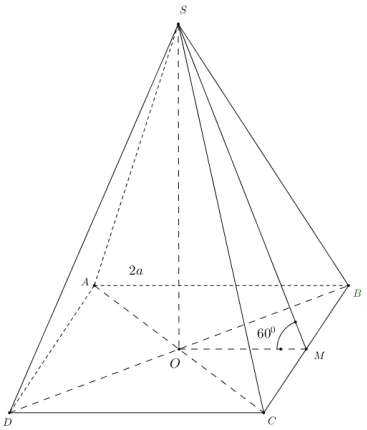
Vậy, $V_{SABC} = \frac{1}{3} SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 = \frac{a^2}{9}$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải.

Chọn C



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow SMO = 60°$.

Xét tam giác SMO vuông tại O có $\tan 60° = \dfrac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

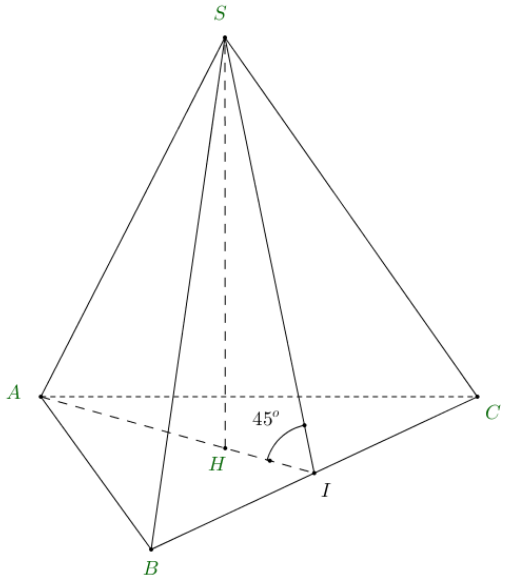
Vậy, $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.4a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $45°$. Thể tích hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3}{4}$ **C.** $\dfrac{a^3}{12}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

Chọn C

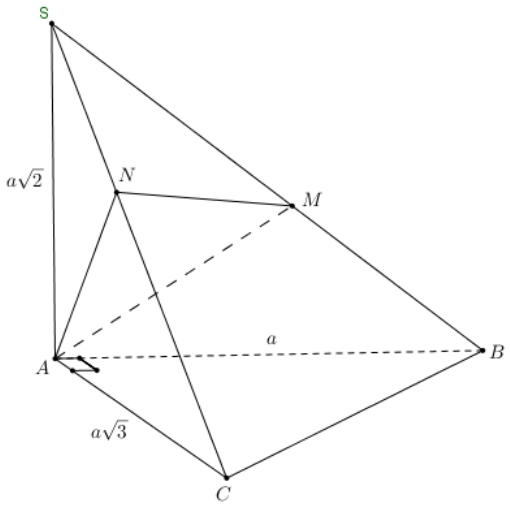


Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SB, N là trung điểm cạnh SC sao cho $SN = \dfrac{1}{3}NC$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{SABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

M là trung điểm của SB nên $\frac{SM}{SB}=\frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{SC}=\frac{1}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. Suy ra: $V_{SAMN}=\frac{1}{8}V_{SABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

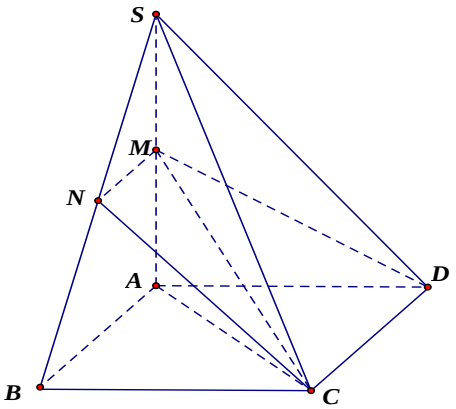
Mức độ 3

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần $S.MNCD$ và $MNABCD$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn C



- $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.MNC}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.
- $\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{S.MCD}=\frac{1}{2}V_{S.ACD}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}$

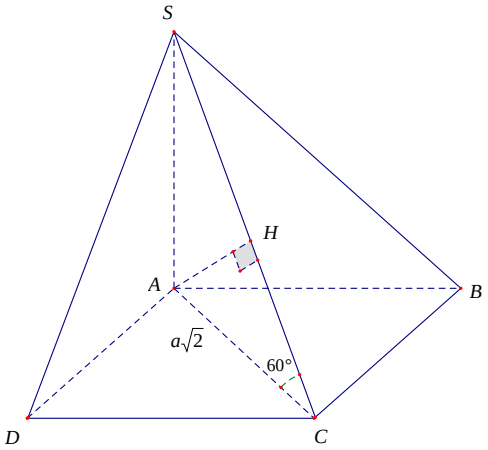
♦ $V_{S.MNCD}=V_{S.MNC}+V_{S.MCD}=\frac{3}{8}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_{MNABCD}=\frac{5}{8}V_{S.ABCD}\Rightarrow\frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}}=\frac{3}{5}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $AC=a\sqrt{2}, S_{ABCD}=\frac{3a^2}{2}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Tính theo a thể tích khối chóp $H.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



$(SC,(ABCD))=SCA=60°$.

$\tan 60°=\frac{SA}{AC}\Leftrightarrow SA=a\sqrt{6}$.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{6}.\frac{3a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

$\frac{d(S,(ABCD))}{d(H,(ABCD))}=\frac{SC}{HC}=\frac{SC.CH}{CH^2}=\frac{CA^2}{CH^2}=\frac{(a\sqrt{2})^2}{\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=4.$

$\frac{V_{H.ABCD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d(H,(ABCD)).S_{ABCD}}{\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}}=\frac{d(H,(ABCD))}{SA}=\frac{1}{4}$.

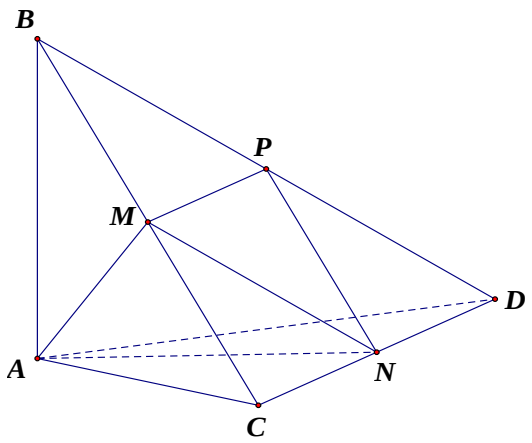
$\Rightarrow V_{H.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, $AB=6a, AC=7a, AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=\dfrac{7a^3}{3}$. **B.** $V=14a^3$. **C.** $V=\dfrac{28a^3}{3}$. **D.** $V=7a^3$.

Lời giải

Chọn D



$\dfrac{S_{\Delta BMP}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{BM}{BC}.\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta BMP}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$

$\dfrac{S_{\Delta CMN}}{S_{\Delta CBD}}=\dfrac{CM}{CB}.\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta CMN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$

$\dfrac{S_{\Delta DNP}}{S_{\Delta DCB}}=\dfrac{DN}{DC}.\dfrac{DP}{DB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta DNP}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$

$\Rightarrow S_{\Delta MNP}=S_{\Delta BCD}-\left(S_{\Delta BMP}+S_{\Delta CMN}+S_{\Delta DNP}\right)=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$

$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(A,\left(MNP\right)\right)S_{\Delta MNP}}{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right)S_{\Delta BCD}}=\dfrac{1}{4}$

$V_{ABCD}=\dfrac{abc}{6}=\dfrac{6a.7a.4a}{6}=28a^3$.

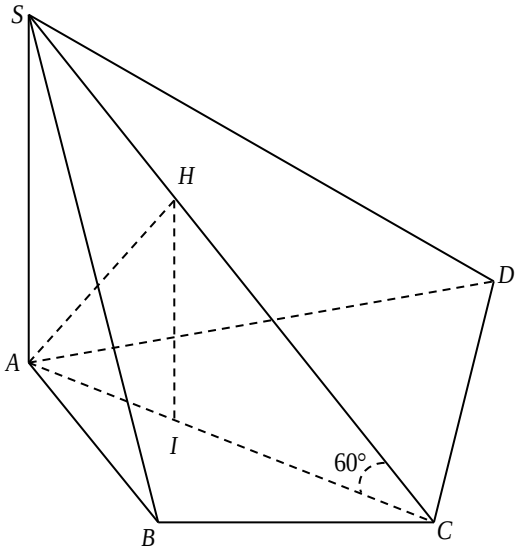
$\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{V_{ABCD}}{4}=7a^3$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$. Biết $AC=a\sqrt{2}$, cạnh SC tạo với đáy góc bằng $60°$ và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $\dfrac{3a^2}{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC. Tính thể tích khối $H.ABCD$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Lời giải

Chọn C



Gọi I là hình chiếu của H lên $(ABCD)$, vì $(SAC)\perp(ABCD)$ nên $I\in AC$.

Ta có $SA=AC\tan 60°=a\sqrt{6}$.

Suy ra $AH=\dfrac{AS.AC}{\sqrt{AS^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó $HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{2a^2-\dfrac{6a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì vậy $HI=\dfrac{HA.HC}{AC}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

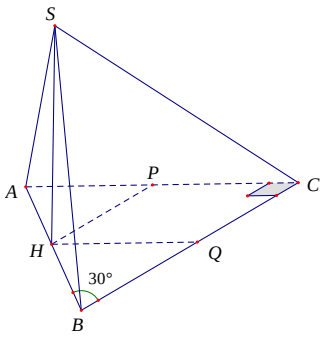
Từ đó suy ra $V_{H.ABCD}=\dfrac{1}{3}HI.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{3a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại C có $AC=a, ABC=30°$. Mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc bằng nhau và bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a là

A. $V=\dfrac{a^3}{2(1+\sqrt{5})}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2(1+\sqrt{3})}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2(1+\sqrt{2})}$.

Lời giải

Chọn B



Theo đề $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB. Dựng $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(SAB)$.

ΔABC vuông nên $\tan 30°=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (1).

Dựng $HP\perp AC, HQ\perp BC\Rightarrow SPH=SQH=\left((SAC),(ABC)\right)=\left((SBC),(ABC)\right)=60^0$.

$\Rightarrow \Delta SPH=\Delta SQH\Rightarrow HP=HQ$.

$\Rightarrow HPCQ$ là hình vuông. Đặt $HQ=x, 0<x<a\sqrt{3}\Rightarrow QB=a\sqrt{3}-x$.

ΔHQB vuông nên $\tan 60°=\frac{QB}{HQ}\Rightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}-x\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=HQ$.

ΔSHQ vuông nên $\tan 60°=\frac{SH}{HQ}\Rightarrow SH=\frac{3a}{\sqrt{3}+1}$ (2).

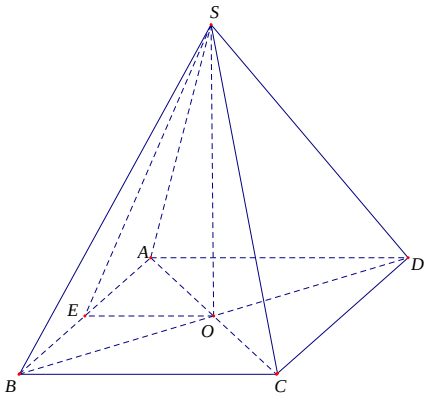
Từ (1) và (2): $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy hợp với mặt bên một góc $45°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{128\sqrt{2}}{81}$. **B.** $\frac{32\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\frac{64\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\frac{64\sqrt{2}}{81}$.

Lời giải

Chọn D



.

Đặt $AB=a$. Gọi O là tâm $ABCD$, E là trung điểm AB. Khi đó $\left(SAB,\ ABCD\right)=SEO=45°$.

Suy ra $SO=OE=\frac{a}{2}$ và $SA=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $R_{S.ABCD}=\frac{SA^2}{2SO}=\frac{\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}}=\frac{3a}{4}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

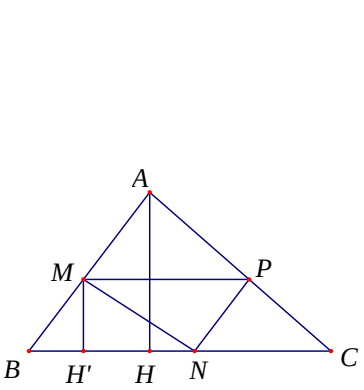
Nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{32}{9}=\frac{64\sqrt{2}}{81}$.

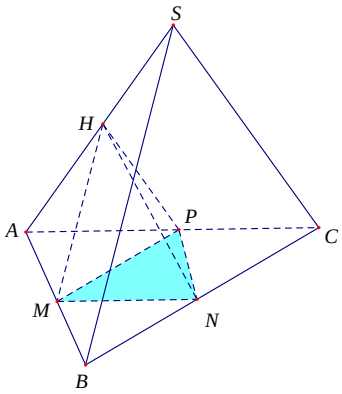
Câu 7. Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích V. Gọi H, M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, BC, CA. Thể tích khối chóp $H.MNP$ là:

A. $\frac{3}{8}V$. **B.** $\frac{1}{12}V$. **C.** $\frac{1}{8}V$. **D.** $\frac{1}{16}V$.

Lời giải

Chọn C





Ta có: $d\left(H,\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S,\left(ABC\right)\right)$.

$S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}MH'.MP=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}AH.\frac{1}{2}BC$.

$=\frac{1}{4}.S_{\Delta ABC}$.

Vậy $V_{H.MNP}=\frac{1}{3}S_{\Delta MNP}.d\left(H,\left(MNP\right)\right)$.

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.\frac{1}{2}d\left(S,\left(ABC\right)\right)$.

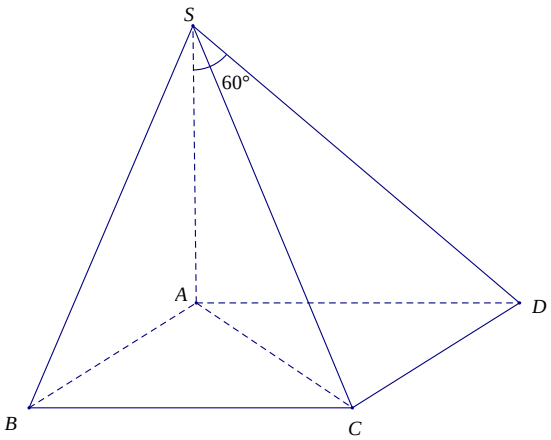
$=\frac{1}{8}.V$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng $\left(SAB\right)$ một góc $30°$. Tính thể tích V của khốichóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

Chọn D



Ta có $S_{ABCD}=a^2$.

$\begin{cases} DA\perp SA \\ DA\perp AB \end{cases}\Rightarrow DA\perp (SAB)$.

$\Rightarrow SA$ là hình chiếu của SD lên (SAB) suy ra góc giữa SD và (SAB) là góc $DSA=60°$.

ΔSAD vuông tại $A\Rightarrow SA=\dfrac{AD}{\tan ASD}=\dfrac{a}{\tan 30°}=a\sqrt{3}$.

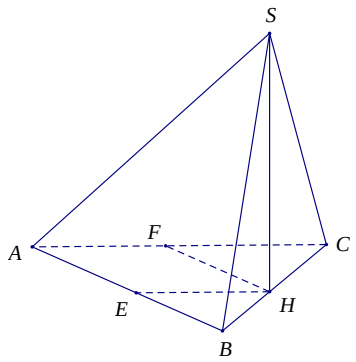
$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên cạnh BC.

$\begin{cases} (SBC)\perp (ABC) \\ (SBC)\cap (ABC)=BC \\ SH\perp BC \\ SH\subset (SBC) \end{cases}\Rightarrow SH\perp (ABC)$.

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và AC.

Khi đó, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB), (SAC) tạo với đáy lần lượt là SEH, SFH cùng bằng $60°$.

Hai tam giác ΔSEH, ΔSFH có $SHE=SHF=90°$, SH chung, $HSE=HSF=60°$ nên hai tam giác bằng nhau hay $HE=HF\Rightarrow AH$ là phân giác của góc $BAC\Rightarrow \dfrac{HB}{HC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{HC}{BC}=\dfrac{2}{3}$

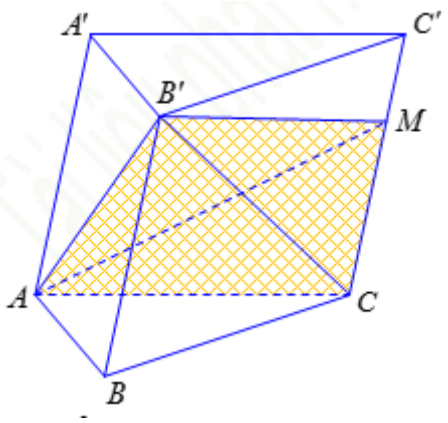
$AB//HF\Rightarrow \dfrac{HF}{AB}=\dfrac{HC}{BC}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow HF=\dfrac{2AB}{3}=\dfrac{2a}{3}$.

Suy ra $SH = HF.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = a^2$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

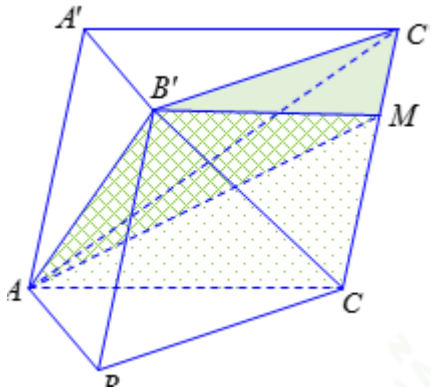
Câu 10. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $9a^3$ và M là điểm nằm trên cạnh CC' sao cho $MC = 2MC'$. Tính thể tích khối tứ diện $AB'CM$ theo a.



A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn A



Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành 3 khối tứ diện $B'.ABC$; $A.A'B'C'$ và $A.B'C'C$.

Trong đó $V_{B'.ABC} = V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 3a^3 \Rightarrow V_{A.B'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - 2V_{B.ABC} = 3a^3$.

Ta lại có $V_{A.B'C'C} = V_{A.B'C'M} + V_{A.B'CM}$ và $V_{A.B'C'M} = \dfrac{1}{2}V_{A.B'CM}$

Do đó $V_{A.B'C'C} = \dfrac{3}{2}V_{A.B'CM} \Rightarrow V_{A.B'CM} = \dfrac{2}{3}V_{A.B'C'C} = 2a^2$.

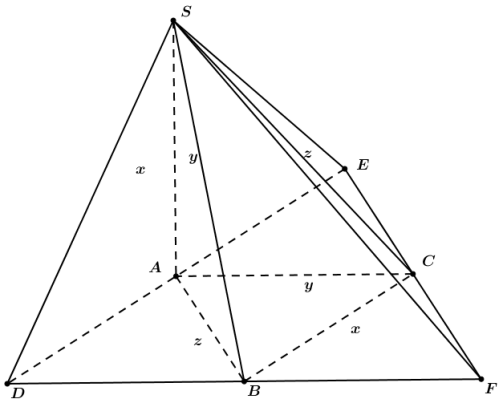
↳ Mức độ 4

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=x$, $SB=AC=y$, $SC=AB=z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC) dựng D, E, F sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Khi đó ta có $DE=2SA=2x$; $DF=2SB=2y$; $EF=2SC=2z$. Suy ra SD, SE, SF đôi một vuông góc.

Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{4}V_{S.DEF}=\frac{1}{4}.\frac{1}{6}.SD.SE.SF$.

Mặt khác $\begin{cases}SD^2+SE^2=4x^2\\SD^2+SF^2=4y^2\\SE^2+SF^2=4z^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SD^2=2\left(x^2+y^2-z^2\right)\\SE^2=2\left(x^2+z^2-y^2\right)\\SF^2=2\left(y^2+z^2-x^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SD=2\sqrt{6-z^2}\\SE=2\sqrt{6-y^2}\\SF=2\sqrt{6-x^2}\end{cases}$.

Khi đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{24}.8.\sqrt{\left(6-x^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-z^2\right)}\le\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{6-x^2+6-y^2+6-z^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2. Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB=x$ và các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Giá trị của x để thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất là

A. $x=\sqrt{6}$. **B.** $x=2\sqrt{2}$. **C.** $x=\sqrt{14}$. **D.** $x=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của cạnh AB, do ΔABC cân tại C nên CH là đường cao. Tam giác ABD có $AD=BD=2\sqrt{3}$ nên là tam giác cân tại D. Do đó HD là đường cao. Khi đó ta có $\begin{cases}CH\perp AB\\HD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(CHD)$.

Hạ đường cao CK xuống HD khi đó $CK\perp AB$. Do đó $CK\perp(ABD)$. Vậy CK là đường cao của tứ diện. Ta có $HB=\frac{x}{2}$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác HBC ta có

$HC=\sqrt{BC^2-HB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{48-x^2}}{2}$.

Tương tự, ta có $HD=\dfrac{\sqrt{48-x^2}}{2}$. Đặt $y=KD$, Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác CHK và CKD ta có :

$CK^2=CH^2-HK^2=CD^2-KD^2\Leftrightarrow CH^2-\left(HD-y\right)^2=12-y^2$.

$CH^2-HD^2+2HD.y-y^2=12-y^2\Leftrightarrow y=\dfrac{6}{HD}=\dfrac{12}{\sqrt{48-x^2}}$.

Vì vậy:

$CK^2=CD^2-y^2=12-\dfrac{12}{\sqrt{48-x^2}}=\dfrac{12\left[\left(48-x^2\right)-12\right]}{48-x^2}=\dfrac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}\Rightarrow CK=\sqrt{\dfrac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}}$.

Diện tích tam giác ABD là $S_1=\dfrac{1}{2}AB.HD=\dfrac{1}{2}x\dfrac{\sqrt{48-x^2}}{2}=\dfrac{x\sqrt{48-x^2}}{4}$.

Do đó thể tích tứ diện là $V=\dfrac{1}{3}CK.S_1=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}}.\dfrac{x\sqrt{48-x^2}}{4}=\dfrac{1}{6}\sqrt{3}.x.\sqrt{36-x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho x và $\sqrt{36-x^2}$ ta có:

$V=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x.\sqrt{36-x^2}\le\dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{x^2+\left(36-x^2\right)}{2}=3\sqrt{3}$.

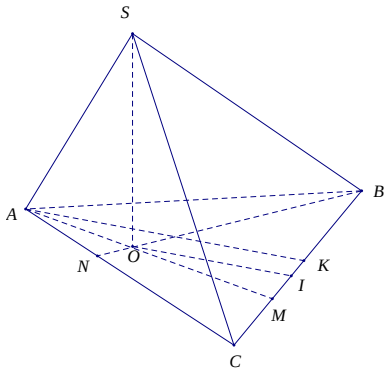
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt{36-x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{48}$. **C.** $\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

Đặt $d\left(O,BC\right)=a$, $d\left(O,AC\right)=b$, $d\left(O,AB\right)=c$, $SO=h$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}\Rightarrow a+b+c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1) (vì ΔABC đều cạnh bằng 1).

Mặt khác $\dfrac{d\left(O,\left(SBC\right)\right)}{d\left(A,\left(SBC\right)\right)}=\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{OI}{AK}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow a=h$.

Tương tự $\dfrac{d\left(O,\left(SAC\right)\right)}{d\left(B,\left(SAC\right)\right)}=\dfrac{d\left(O,AC\right)}{d\left(B,AC\right)}=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{15}}{10}=\dfrac{b}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{b^2}\Rightarrow b=2h$.

Tương tự $\dfrac{d\left(O,\left(SAB\right)\right)}{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}=\dfrac{d\left(O,AB\right)}{d\left(C,AB\right)}=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O,\left(SAC\right)\right)=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{30}}{20}=\dfrac{c}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\dfrac{10}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{c^2}\Rightarrow c=3h$.

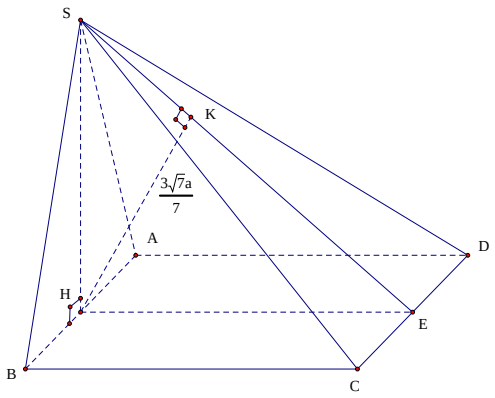
$\left(1\right)\Rightarrow h+2h+3h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{48}$.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên $\left(SAB\right)$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng $\dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{1}{3}a^3$. **C.** $V=\dfrac{2}{3}a^3$. **D.** $V=\dfrac{3}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do ΔSAB đều nên $SH\perp AB$

$$\begin{cases}\left(SAB\right)\perp\left(ABCD\right)\\ \left(SAB\right)\cap\left(ABCD\right)=AB\\ SH\perp AB\\ SH\subset\left(SAB\right)\end{cases}\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right).$$

Do đó: SH là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.

$AH // CD \Rightarrow AH // (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$.

Kẻ $HE \perp CD$, $E \in CD$, $HK \perp SE$, $K \in SE \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H,(SCD))$.

Đặt $AB = x \ (x > 0) \Rightarrow HE = x$, $SH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{7}a}{7}\right)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}a \Rightarrow AB = \sqrt{3}a.$$

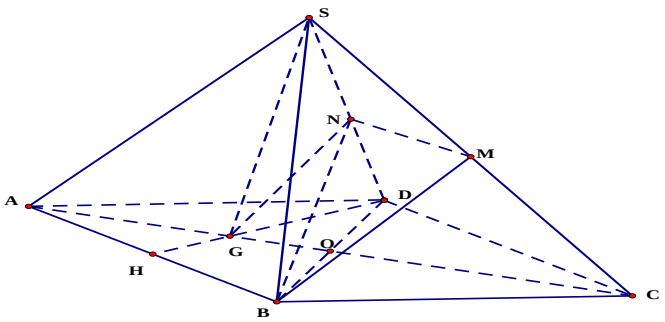
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.\left(\sqrt{3}a\right)^2.\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD = 60°$, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi G, M lần lượt là trọng tâm của tam giác BAD và trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (α) chứa GM và vuông góc với (SCD) cắt SD tại N. Thể tích khối chóp $S.BMN$ là

A. $\dfrac{5a^3\sqrt{5}}{432}$. **B.** $\dfrac{5a^3\sqrt{5}}{144}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{195}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{65}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD, H là trung điểm của AB.

Ta có $\begin{cases} DH \perp AB \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow DH \perp CD \ (1)$.

Mặt khác hình chóp $S.ABD$ có $SA = SB = SD$ và đáy ABD là tam giác đều có G là trọng tâm nên $SG \perp (ABCD) \Rightarrow SG \perp CD \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SGD)$.

Từ G kẻ $GN \perp SD$ tại $N \Rightarrow GN \perp (SCD)$.

Do đó, mặt phẳng (α) chứa GM và vuông góc với (SCD) là mặt phẳng (GNM).

Tam giác ABD đều, G là trọng tâm nên $DG=\frac{2}{3}DH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SGD vuông tại G nên $SG=\sqrt{SD^2-DG^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Trong tam giác vuông SGD có GN là đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông nên $\frac{SN}{SD}=\frac{SG^2}{SD^2}=\frac{5}{9}$.

Ta có $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}}=\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=1.\frac{1}{2}.\frac{5}{9}=\frac{5}{18}$.

$V_{SBCD}=\frac{1}{3}SG.S_{BCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

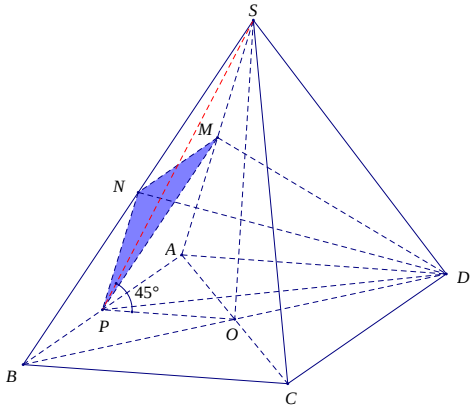
Vậy $V_{SBMN}=\frac{5}{18}.V_{SBCD}=\frac{5}{18}.\frac{a^3\sqrt{5}}{24}=\frac{5a^3\sqrt{5}}{432}$.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$; M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB và AB. Tính thể tích V khối tứ diện $DMNP$.

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi điểm O là tâm của đáy, theo giả thiết suy ra: $SO\perp(ABCD)$ tại O.

Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$ nên suy ra góc SPO bằng $45°$.

Ta có $OP=a$ suy ra $SO=OP\tan 45°=a$; $SP=a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta SAB}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.AB.SP=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Tứ diện $DMNP$ có chiều cao $h=d\left(D,(MNP)\right)=2d\left(O,(SAB)\right)$.

Trong (SPO) kẻ OH vuông góc với SP tại H thì OH là khoảng cách từ O đến (SAB).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SPO tại O, đường cao OH ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{2}}\Rightarrow h=a\sqrt{2}.$$

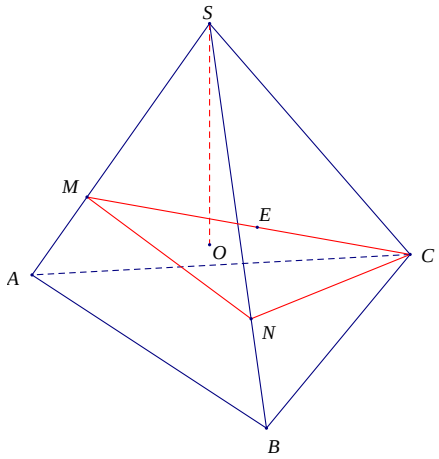
Thể tích khối chóp $DMNP$ là $V=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=6$, $SB=5$, $SC=4$, $ASB=BSC=45°$, $ASC=60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=16$. **B.** $V=10$. **C.** $V=14$. **D.** $V=12$.

Lời giải

Chọn B



Lấy $M\in SA$, $N\in SB$ sao cho $SM=SN=4$.

Áp dụng định lý cô sin cho tam giác SMN: $MN^2=SM^2+SN^2-2SM.SN.\cos MSN$

$=32-16\sqrt{2}\Rightarrow MN=4\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Tương tự $CN=4\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Gọi E là trung điểm của CM, tam giác NCM cân tại N nên $NE\perp CM$.

Ta có $NE=\sqrt{NC^2-CE^2}=2\sqrt{7-4\sqrt{2}}$ suy ra $S_{NCM}=\frac{1}{2}MC.NE=4\sqrt{7-4\sqrt{2}}$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác NCM ta có: $R=\frac{NC.NM.CM}{4.S_{NCM}}$

$\Rightarrow R=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}$.

Vì $SC=SM=SN=4$ suy ra hình chiếu của S trên $\left(NCM\right)$ trùng với tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác NCM.

$$h=SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{SN^2-R^2}=\frac{4}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}.$$

$V_{S.NMC}=\frac{1}{3}SO.S_{NCM}=\frac{16}{3}$.

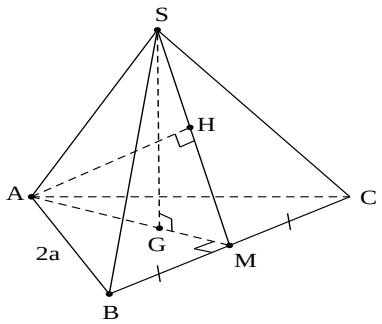
Ta có $\frac{V_{S.NMC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}=\frac{8}{15}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{15}{8}V_{S.NMC}=10$.

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB=2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC và G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG\perp(ABC)$ và G là trọng tâm ΔABC.

Ta có: $\begin{cases}AM\perp BC\\SG\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$ hay $(SBC)\perp(SAM)$ theo giao tuyến SM.

Trong (SAM), kẻ $AH\perp SM$, $H\in SM\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Vậy $d(A,(SBC))=AH=\frac{3a}{2}$.

Vì ΔABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AM=\frac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Đặt $SG=x$. Ta có: $GM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔSGM vuông tại G ta có: $SM=\sqrt{SG^2+GM^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Xét ΔSAM ta có: $S_{\Delta SAM}=\frac{1}{2}SG.AM=\frac{1}{2}AH.SM\Rightarrow x.a\sqrt{3}=\frac{3a}{2}.\sqrt{x^2+\frac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow 4x^2=3\left(x^2+\frac{a^2}{3}\right)\Leftrightarrow x=a$. Do đó: $SG=a$.

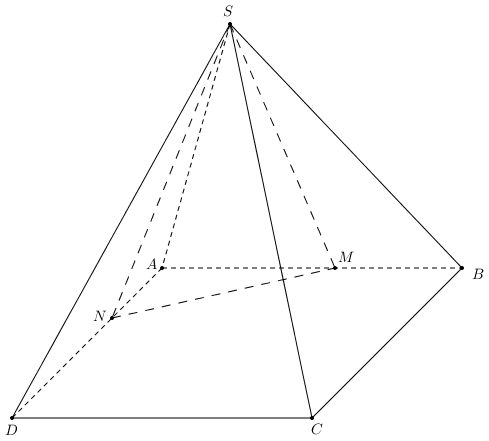
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SG.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}a.a^2\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N thuộc các cạnh AB và AD (M, N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM}+2\frac{AD}{AN}=4$. Kí hiệu $V;V_1$ lần lượt là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MNBCD$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{17}{14}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là h.

Ta có: $\frac{AB}{AM}+2\frac{AD}{AN}=4$. Áp dụng BĐT Côsi, ta có:

$\frac{AB}{AM}+2\frac{AD}{AN}\geq 2\sqrt{\frac{AB}{AM}.2\frac{AD}{AN}}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{AB.AD}{AM.AN}}$ (Hai điểm M, N thuộc các cạnh AB và AD (M, N không trùng với A) nên $\frac{AB}{AM}>1,\frac{AD}{AN}>1$).

$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{AB.AD}{AM.AN}}\leq 4\Leftrightarrow\frac{AB.AD}{AM.AN}\leq 2$

$\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}.AB.AD.\sin BAD}{\frac{1}{2}.AM.AN.\sin MAN}\leq 2\Leftrightarrow\frac{S_{ABD}}{S_{AMN}}\leq 2\Leftrightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{AMN}}\leq 4$ (vì $S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$)

$\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{S_{ABCD}-S_{ABCDN}}{S_{ABCD}}\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{S_{ABCDN}}{S_{ABCD}}\leq\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}h.S_{ABCDN}}{\frac{1}{3}h.S_{ABCD}}\leq\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{V_1}{V}\leq\frac{3}{4}$

Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ đạt GTLN bằng $\frac{AB}{AM}=2\frac{AD}{AN}$ (1)

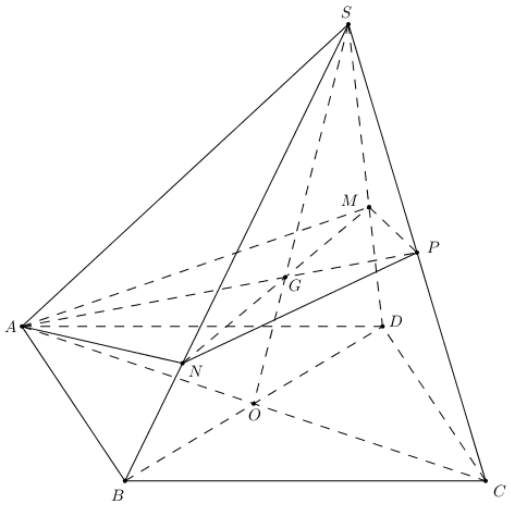
Kết hợp giả thiết $\frac{AB}{AM}+2\frac{AD}{AN}=4 \quad (2) \overset{(1);(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{AB}{AM}=2 \\ \frac{AD}{AN}=1 \end{cases}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. G là trọng tâm tam giác SAC.

Ta có M,G,N thẳng hàng. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ADC}=V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có: $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SD} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SD}$.

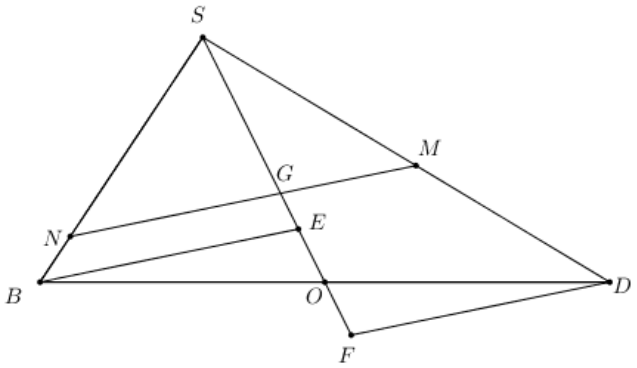
Tương tự $\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SN}{SB} \Leftrightarrow \frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SN}{SB}$.

Từ đó suy ra $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right) \Rightarrow \frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$.

Hay $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=3$.

Thậy vậy, qua B,D kẻ các đường song song với MN cắt SO lần lượt tại E,F.



Ta có: $\frac{SD}{SM}=\frac{SF}{SG};\frac{SB}{SN}=\frac{SE}{SG}\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{SE+SF}{SG}$.

$\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{2SO}{SG}=2.\frac{3}{2}=3$.

Đặt $\frac{SD}{SM}=x;\frac{SB}{SN}=y$. Ta có $x+y=3$.

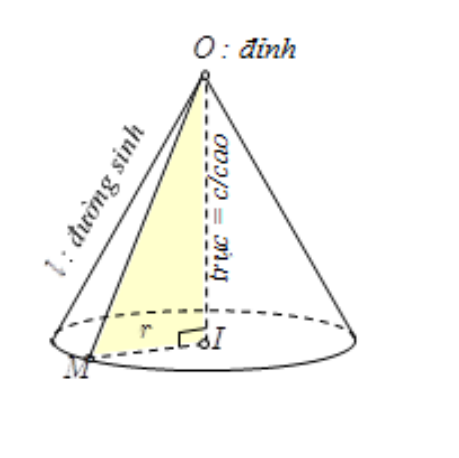
Mặt khác $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x+y}{4xy}=\frac{3}{4xy}\geq\frac{3}{(x+y)^2}=\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{V_1}{V}$ nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

DẠNG TOÁN 8: KHỐI NÓN-TRỤ- CẦU (CÔNG THỨC THỂ TÍCH KHỐI NÓN)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Công thức tính thể tích khối chóp:



$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ trong đó chiều cao h và bán kính đáy r.

Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{\text{xq nón}}=\pi rl}$, với r là bán kính đường tròn đáy, l đường sinh.

Diện tích toàn phần của hình nón: $\boxed{S_{\text{tp}}=S_{\text{xq}}+S_{\text{đáy}}=\pi rl+\pi r^2}$.

$l^2=h^2+r^2$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Khối Nón-Trụ- Cầu (Công thức thể tích khối Nón)

- ☞ Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao
- ☞ Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần
- ☞ Tính thể tích khối nón, khối liên quan nón
- ☞ Bài toán liên quan thiết diện với khối nón
- ☞ Hình nón nội tiếp-ngoại tiếp khối chóp
- ☞ Toán Max-Min liên quan khối nón
- ☞ Toán thực tế, liên môn liên quan khối nón

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BGD 2019-2020) Cho khối nón có chiều cao $h=3$ và bán kính đáy $r=4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π. **B.** 48π. **C.** 36π. **D.** 4π.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính thể tích khối nón khi biết chiều cao và bán kính đáy

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Công thức tính thể tích khối chóp:

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ trong đó chiều cao h và bán kính đáy r.

3. HƯỚNG GIẢI:

Áp dụng công thức $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón đã cho là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi 4^2.3=16\pi$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

A. πrl **B.** $4\pi rl$ **C.** $2\pi rl$ **D.** $\frac{4}{3}\pi rl$

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay: $S_{xq}=2\pi rl$.

Câu 2. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và có bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:

A. $2\sqrt{2}a$ **B.** $3a$ **C.** $2a$ **D.** $\frac{3a}{2}$

Lời giải

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq}=\pi rl$ với $r=a\Rightarrow \pi.a.l=3\pi a^2\Rightarrow l=3a$.

Câu 3. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Ta có chiều cao của khối nón bằng $h=\sqrt{l^2-r^2}$ với $\begin{cases} l=2a \\ r=a \end{cases}$. Suy ra $h=a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l=4$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

A. $S_{xq}=12\pi$ **B.** $S_{xq}=4\sqrt{3}\pi$ **C.** $S_{xq}=\sqrt{39}\pi$ **D.** $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=4\sqrt{3}\pi$.

Câu 5. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$. **B.** $l=2\sqrt{2}a$. **C.** $l=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $l=3a$.

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi al=3\pi a^2\Rightarrow l=3a$.

Câu 6. Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N)

A. $V=12\pi$. **B.** $V=20\pi$. **C.** $V=36\pi$. **D.** $V=60\pi$.

Lời giải

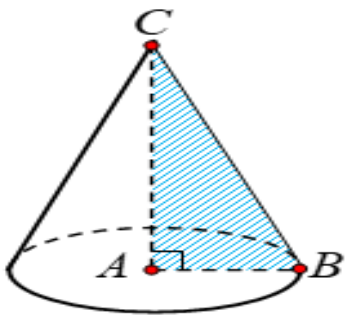
Ta có $S_{xq}=15\pi\Rightarrow\pi rl=15\pi\Leftrightarrow l=5\Rightarrow h=4$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=12\pi$.

Câu 7. Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh là $2a$, góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V=\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $V=\pi\sqrt{3}a^3$.

Lời giải:



Ta có $l=CB=2a$, $BCA=30°$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có: $\sin 30°=\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{r}{l}\Rightarrow r=l.\sin 30°=2a.\dfrac{1}{2}=a$.

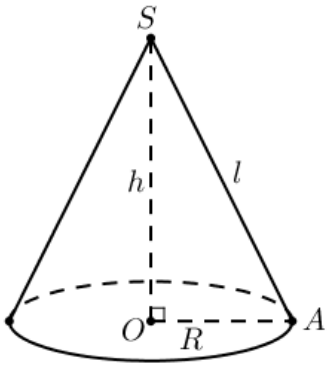
$\cos 30^\circ = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{h}{l} \Rightarrow h = l.\cos 30^\circ = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 8. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{h^2}$. **B.** $l^2 = h^2 + R^2$. **C.** $R^2 = h^2 + l^2$. **D.** $l^2 = hR$.

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn đáy hình nón, S là đỉnh và SA là đường sinh.

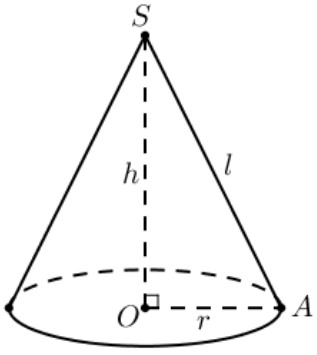
Ta có: $SO \perp OA \Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2$ hay $l^2 = h^2 + R^2$.

Câu 9. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng

A. $l = 26$ cm. **B.** $l = 28$ cm. **C.** $l = 5\sqrt{41}$ cm. **D.** $l = 6\sqrt{30}$ cm.

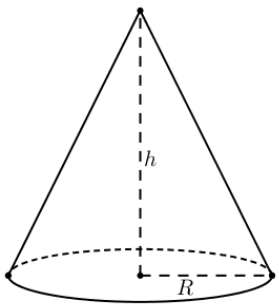
Lời giải

Chọn C



Ta có: $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{20^2 + 25^2} = 5\sqrt{41}$ cm.

Câu 10. Hình nón có đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao h. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$. **B.** Đường sinh $l=\sqrt{h^2+R^2}$.

C. Diện tích xung quanh $S_{xq}=\pi R\sqrt{R^2+h^2}$. **D.** Góc ở đỉnh $\alpha=\arctan\frac{R}{h}$.

Lời giải

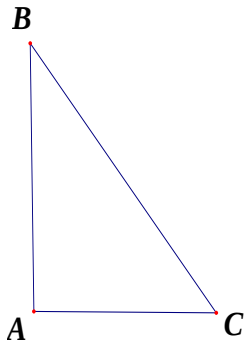
Góc ở đỉnh $2\alpha=2.\arctan\frac{R}{h}$.

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A, $AB=a$ và $AC=a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=a$ **B.** $l=a\sqrt{2}$ **C.** $l=a\sqrt{3}$ **D.** $l=2a$

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $BC^2=AC^2+AB^2=4a^2\Leftrightarrow BC=2a$

Đường sinh của hình nón cũng chính là cạnh huyền của tam giác $\Leftrightarrow l=BC=2a$

Câu 2. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $ACB=30^o$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V=\pi a^3$ **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

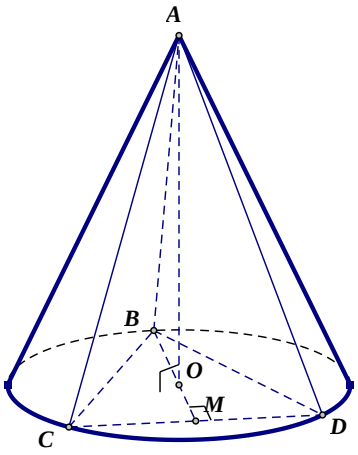
Lời giải

Ta có $AC=AB.\cot 30^o=a\sqrt{3}$. Vậy thể tích khối nón là : $V=\frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N)

A. $S_{xq}=3\sqrt{3}\pi a^2$ **B.** $S_{xq}=6\sqrt{3}\pi a^2$ **C.** $S_{xq}=12\pi a^2$ **D.** $S_{xq}=6\pi a^2$

Lời giải

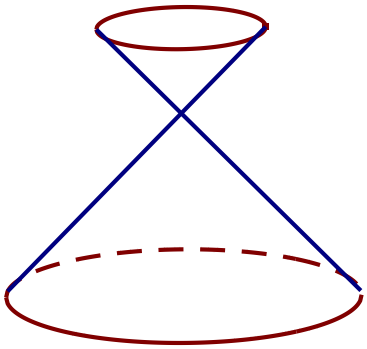


Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Ta có $BM=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$; $r=\dfrac{2}{3}BM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

$S_{xq}=\pi rl=\pi r.AB=\pi a\sqrt{3}.3a=3\sqrt{3}.\pi a^2$.

Câu 4. Một vật trang trí bằng pha lê gồm hai hình nón (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1=\dfrac{1}{2}r_2$; $h_1=\dfrac{1}{2}h_2$.



Biết rằng thể tích của khối (H_1) bằng $10\,\text{cm}^3$, thể tích toàn bộ của khối pha lê bằng

A. $90\,\text{cm}^3$. **B.** $30\,\text{cm}^3$. **C.** $50\,\text{cm}^3$. **D.** $80\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Theo bài ra ta có thể tích của khối (H_1) là: $V_1=\dfrac{1}{3}r_1^2.h_1=10\,\text{cm}^3$.

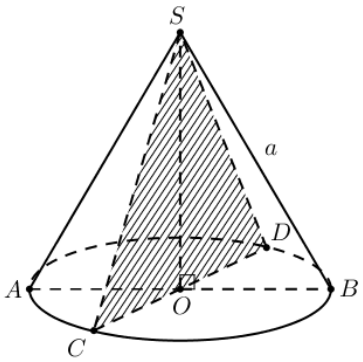
Thể tích của khối (H_2) là: $V_2=\dfrac{1}{3}r_2^2.h_2=\dfrac{1}{3}(2r_1)^2.(2h_1)=8.\dfrac{1}{3}r_1^2.h_1=80\,\text{cm}^3$.

Vậy toàn bộ thể tích của khối pha lê là: $V=V_1+V_2=90\,\text{cm}^3$.

Câu 5. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a. Thể tích của khối nón bằng

A. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, đường cao và độ dài đường sinh của khối nón.

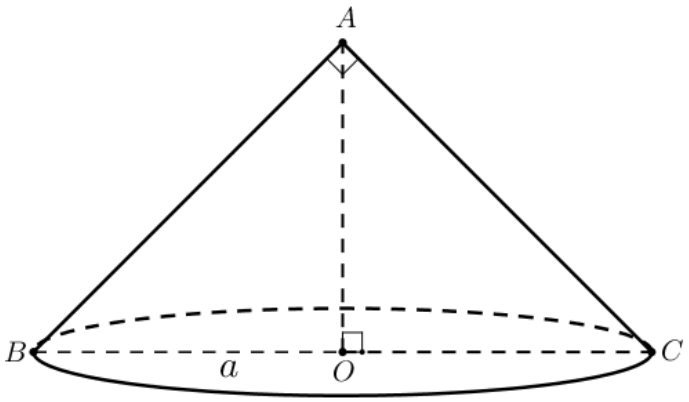
Ta có: $R=\frac{a}{2}$, $l=a$, $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

Câu 6. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón theo a.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** πa^2. **D.** $\pi a^2\sqrt{2}$.

Giải



Gọi r và l lần lượt là bán kính của đường tròn đáy và đường sinh của hình nón.

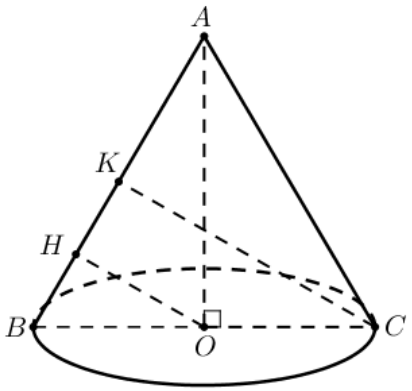
Ta có tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC=AB\sqrt{2} \Rightarrow AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $r=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$ và $l=AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $S_{xq}=\pi rl=\pi\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 7. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều và khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $S_{tp}=3\pi a^2$. **B.** $S_{tp}=5\pi a^2$. **C.** $S_{tp}=2\pi a^2$. **D.** $S_{tp}=4\pi a^2$.

Giải



Gọi O là tâm của đường tròn đáy và ABC là tam giác thiết diện qua trục của hình nón. H, K lần lượt là hình chiếu của O, C lên AB

Ta có: $d_{(O;AB)} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$CK = 2OH = a\sqrt{3}$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên $CK = AB\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2a$.

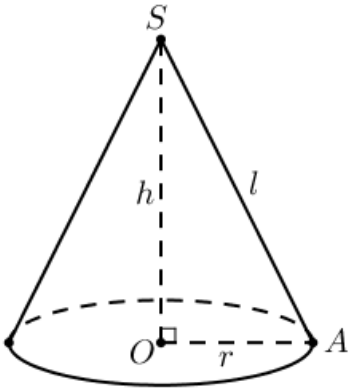
Ta có bán kính đường tròn đáy $r = \frac{AB}{2} = a$ và chiều dài đường sinh $l = AB = 2a$.

Vậy $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \pi.a.2a + \pi.a^2 = 3\pi a^2$.

Câu 8. Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng 40 cm, độ dài đường sinh bằng 44 cm. Thể tích V của khối nón này có giá trị gần đúng với giá trị nào sau đây?

A. $30700\,\text{cm}^3$. **B.** $92090\ \text{cm}^3$. **C.** $30679\,\text{cm}^3$. **D.** $92100\,\text{cm}^3$.

Lời giải



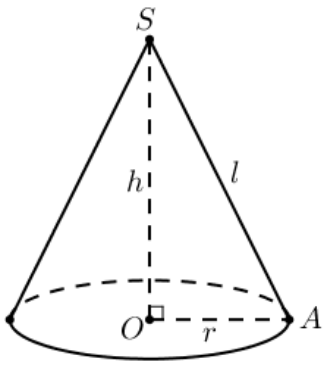
Ta có chiều cao khối nón $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{44^2 - 40^2} = \sqrt{336}$ cm.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.40^2.\sqrt{336} \approx 30712\ \text{cm}^3$.

Câu 9. Một hình nón có bán kính 5a, độ dài đường sinh bằng 13a. Độ dài đường cao h của hình nón bằng

A. $7a\sqrt{6}$. **B.** $12a$. **C.** $17a$. **D.** $8a$.

Lời giải



Ta có chiều cao hình nón $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{(13a)^2-(5a)^2}=12a$.

Câu 10. Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối nón bằng

A. $\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** 4π. **C.** $16\pi\sqrt{3}$. **D.** 12π.

Lời giải

Thể tích của khối nón là

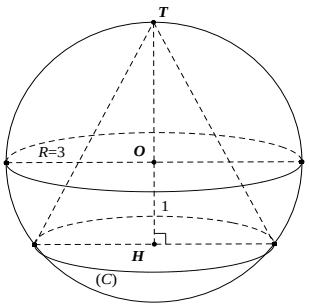
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi\left(\sqrt{3}\right)^2.4}{3}=4\pi.$$

Mức độ 3

Câu 1. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\dfrac{32\pi}{3}$ **B.** $V=16\pi$ **C.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$ **D.** $V=32\pi$

Lời giải



Gọi r là bán kính đường tròn (C)thì r là bán kính đáy của hình nón a có: $r^2=R^2-OH^2=8$.

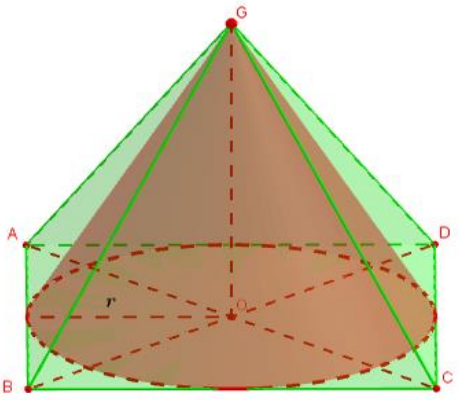
$HT=HO+OT=1+3=4=h$là chiều cao của hình nón

Suy ra: $V_{no'n}=\dfrac{1}{3}.\mathrm{h}.S_{(C)}=\dfrac{1}{3}.4.\pi.8=\dfrac{32\pi}{3}$

Câu 2. Trong hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$có cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\dfrac{\pi a^3}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

Lời giải



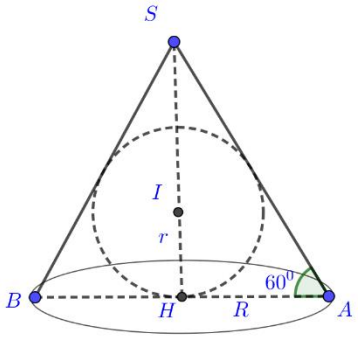
Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Lại có $OC=\dfrac{AC}{2}=a\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OC^2}=a$.

Bán kính $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Suy thể tích khối nón là: $V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.a=\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 3. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V=3\sqrt{3}\pi$ **B.** $V=9\sqrt{3}\pi$ **C.** $V=3\pi$ **D.** $V=9\pi$

Lời giải



Hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$ nên $SAH=60°$

Ta có ΔSAB cân tại S có $A=60°$ nên ΔSAB đều. Do đó tâm I của đường tròn nội tiếp ΔSAB cũng là trọng tâm của ΔSAB.

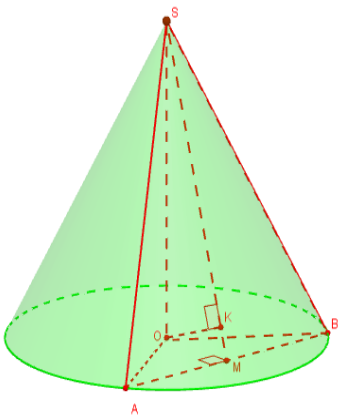
Suy ra $SH=3IH=3$. Mặt khác $SH=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=2\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{3}\Rightarrow S_{Đáy}=\pi R^2=3\pi$.

Do đó $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{Đáy}=\dfrac{1}{3}3.3\pi=3\pi$.

Câu 4. Cho một hình nón có chiều cao $h=a$ và bán kính đáy $r=2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P).

A. $d=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **B.** $d=a$ **C.** $d=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ **D.** $d=\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$

Lời giải



Có $(P)\equiv(SAB)$.

Ta có $SO=a=h, OA=OB=r=2a, AB=2a\sqrt{3}$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB, gọi H là hình chiếu của O lên SM suy ra $d\left(O;(SAB)\right)=OH$.

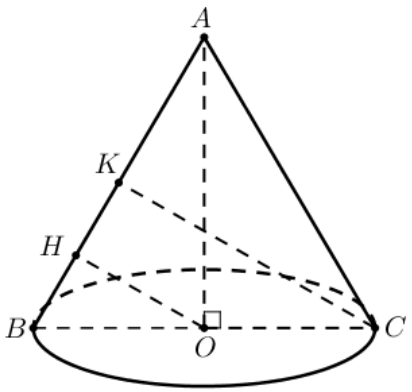
Ta tính được $OM=\sqrt{OA^2-MA^2}=a$ suy ra SOM là tam giác vuông cân tại O, suy ra H là trung điểm của SM nên $OH=\dfrac{SM}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều và khoảng cách từ tâm của đáy đến đường sinh bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. $S_{tp}=3\pi a^2$. **B.** $S_{tp}=5\pi a^2$. **C.** $S_{tp}=2\pi a^2$. **D.** $S_{tp}=4\pi a^2$.

Giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đường tròn đáy và ABC là tam giác thiết diện qua trục của hình nón. H, K lần lượt là hình chiếu của O, C lên AB

Ta có: $d_{(O;AB)}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$CK=2OH=a\sqrt{3}$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên $CK=AB\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=2a$.

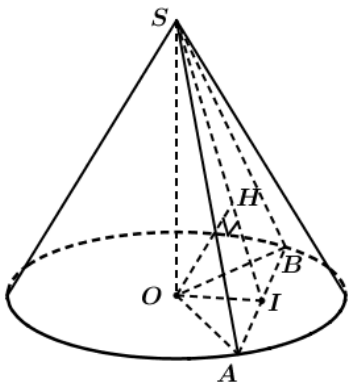
Ta có bán kính đường tròn đáy $r=\frac{AB}{2}=a$ và chiều dài đường sinh $l=AB=2a$.

Vậy $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\pi.a.2a+\pi.a^2=3\pi a^2$.

Câu 6. Một hình nón đỉnh S đáy hình tròn tâm O và $SO=h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $AOB=90°$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\frac{h}{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{6}$. **B.** $\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\frac{2\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải



Gọi r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón.

Kẻ $OI\perp AB$, $OH\perp SI\Rightarrow OH=\frac{h}{2}$.

Xét tam giác vuông cân OAB có $OI=\frac{AB}{2}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOI có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Leftrightarrow\frac{4}{h^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{2}{r^2}\Leftrightarrow r=\frac{h\sqrt{6}}{3}$.

$SI=\frac{SO.OI}{OH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$.

Xét tam giác vuông SIA có $l=SA=\sqrt{SI^2+IA^2}=\sqrt{SI^2+OI^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}h$.

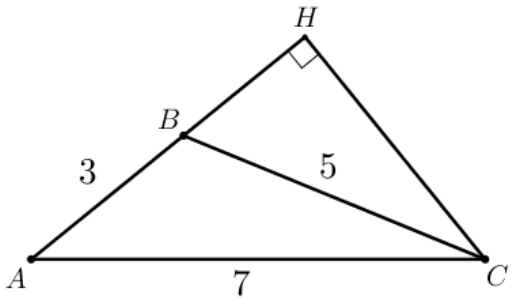
Diện tích xung quanh của hình nón bằng $S_{xq}=\pi.r.l=\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có $AB=3$, $BC=5$, $CA=7$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra do hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AB.

A. 50π. **B.** $\frac{75\pi}{4}$. **C.** $\frac{275\pi}{8}$. **D.** $\frac{125\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $CH \perp AB$.

Ta có $\cos ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2.3.5} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow ABC = 120^0 \Rightarrow CBH = 60^0$.

Suy ra $CH = BC.\sin 60^0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Quay tam giác ABC quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng hiệu thể tích của khối nón có chiều cao $h_1 = AH$, bán kính đáy CH và khối nón có đường cao $h_2 = BH$, bán kính đáy CH.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra là

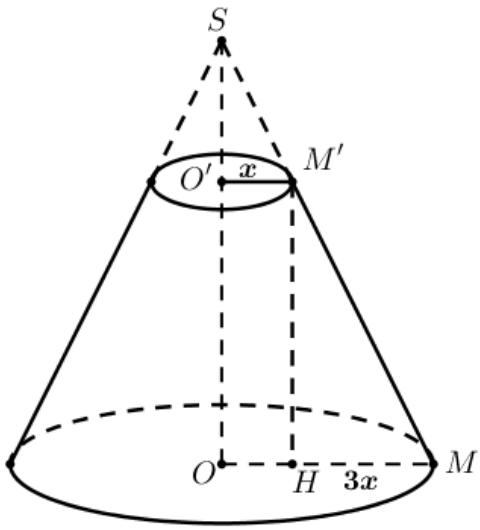
$$V = \frac{1}{3}\pi.CH^2.AH - \frac{1}{3}\pi.CH^2.BH = \frac{1}{3}\pi.\ AH - BH$$

$$= \frac{1}{3}\pi.CH^2.AB = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2.3 = \frac{75\pi}{4}.$$

Câu 8. Các bán kính đáy của khối nón cụt lần lượt là x và $3x$, đường sinh là $2,9x$. Tính thể tích khối nón cụt đó theo x.

A. $V = \frac{77\pi x^3}{10}$. **B.** $V = \frac{\pi x^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\pi x^3\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$. **D.** $V = \frac{91\pi x^3}{10}$.

Lời giải



Cách 1:

Ta có $h = OO' = M'H = \sqrt{MM'^2 - HM^2} = \sqrt{(2,9x)^2 - (2x)^2} = \dfrac{21x}{10}$

Thể tích khối chóp cụt là: $V = \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \dfrac{21\pi}{30}\left((3x)^2 + x^2 + 3x.x\right) = \dfrac{91\pi x^3}{10}$.

Cách 2:

$\dfrac{SO}{SO'} = \dfrac{OM}{O'M'} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{SO' + OO'}{SO'} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{OO'}{SO'} = 2$

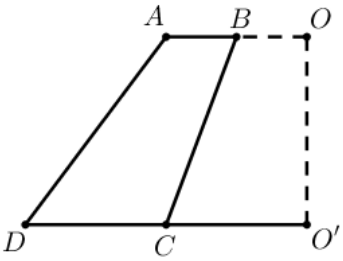
$\Leftrightarrow SO' = \dfrac{OO'}{2} = \dfrac{21x}{20}, SO = 3SO' = \dfrac{63x}{20}$

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp có đáy lớn và đáy nhỏ.

Thể tích khối chóp cụt là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}h_1B_1 - \frac{1}{3}h_2B_2 = \frac{1}{3}\frac{63x}{20}\pi(3x)^2 - \frac{1}{3}\frac{21x}{20}\pi x^2 = \frac{91\pi x^3}{10}$$

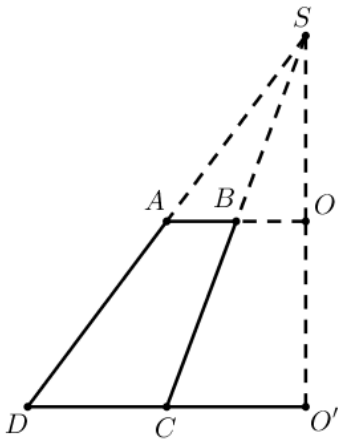
Câu 9. Tính thể tích V của khối nón tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO' như hình vẽ. Biết $OO' = 200$, $O'D = 20$, $O'C = 10$, $OA = 10$ và $OB = 5$.



A. $V = 75000\pi$. **B.** $V = 40000\pi$. **C.** $V = 35000\pi$. **D.** $V = 37500\pi$.

Lời giải

Vẽ thêm S như hình



Thể tích khối tròn xoay từ $SO'D$: $V_{SO'D}=\frac{1}{3}\pi 20^2.400=\frac{160000}{3}\pi$

Thể tích khối tròn xoay từ $SO'C$: $V_{SO'C}=\frac{1}{3}\pi 10^2.400=\frac{40000}{3}\pi$

Thể tích khối tròn xoay từ SOB: $V_{SOB}=\frac{1}{3}\pi.5^2.100=\frac{2500}{3}\pi$

Thể tích khối tròn xoay từ SOA: $V_{SOA}=\frac{1}{3}\pi.10^2.100=\frac{10000}{3}\pi$

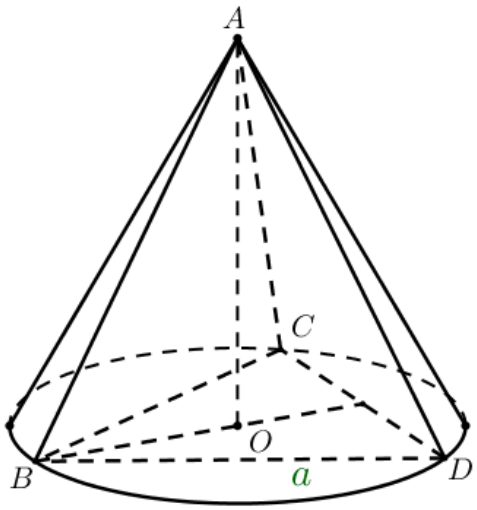
Thể tích khối tròn xoay $ABCD$:

$$\begin{aligned}V_{ABCD}&=V_{SO'D}-V_{SO'C}-\left(V_{SOA}-V_{SOB}\right)\\&=\frac{160000}{3}\pi-\frac{40000}{3}\pi-\left(\frac{10000}{3}\pi-\frac{2500}{3}\pi\right)\\&=37500\pi\end{aligned}$$

Câu 10. Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của một hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón đó. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{3}$. **C.** $S_{xq}=\pi\sqrt{2}a^2$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{2}$

Lời giải



Tứ diện $ABCD$ đều cạnh a nên $AO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Đường tròn đáy tâm O của hình nón ngoại tiếp tam giác đều ΔBCD cạnh a nên bán kính đường tròn là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

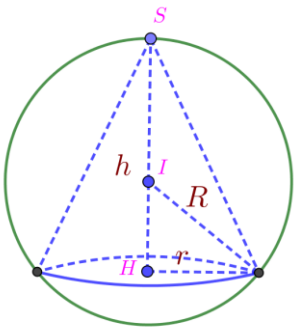
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\dfrac{a^2\sqrt{3}\pi}{3}$

Mức độ 4

Câu 1. Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h=\sqrt{3}R$ **B.** $h=\sqrt{2}R$ **C.** $h=\dfrac{4R}{3}$ **D.** $h=\dfrac{3R}{2}$

Lời giải



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH=h-R$ và $r^2=R^2-IH^2=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}h\pi r^2=\dfrac{\pi}{3}h(2Rh-h^2)$.

Ta có $h\cdot h\cdot(4R-2h)\le\left(\dfrac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3\Rightarrow h^2(2R-h)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h=4R-2h\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$.

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH=h-R$ và $r^2=R^2-IH^2=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}h\pi r^2=\frac{\pi}{3}h\left(2Rh-h^2\right)=\frac{\pi}{3}.\left(2h^2R-h^3\right)$

Xét hàm $f\left(h\right)=-h^3+2h^2R,\ h\in\left(R,2R\right)$, có $f'\left(h\right)=-3h^2+4hR$.

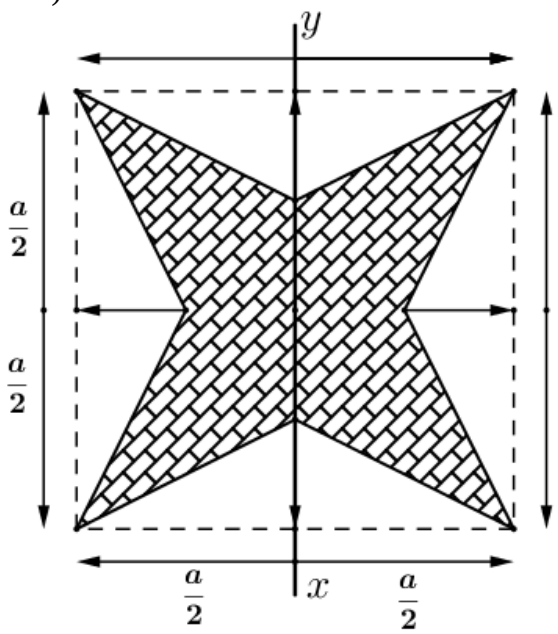
$f'\left(h\right)=0\Leftrightarrow-3h^2+4hR=0\Leftrightarrow h=0$ hoặc $h=\frac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên

h	R		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗	$\frac{32R^3}{27}$	↘	

max $f\left(h\right)=\frac{32}{27}R^3$, tại $h=\frac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi $\left(N\right)$ có giá trị lớn nhất là $V=\frac{1}{3}\pi\frac{32}{27}R^3=\frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h=\frac{4R}{3}$.

Câu 2. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao 4 cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình vẽ bên).

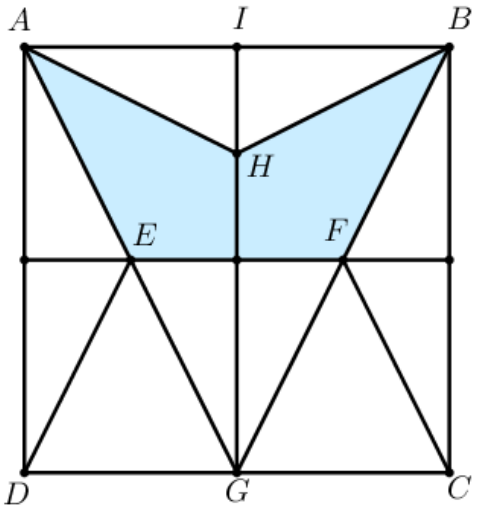


Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình bên quanh trục xy.

A. $V=\frac{5\pi a^3}{48}$. **B.** $V=\frac{5\pi a^3}{16}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng 2 lần thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ phần tô vàng quay quanh trục xy.

Gọi V_1 là thể tích khối nón có chiều cao $h_1 = GI = a$, bán kính đáy $r_1 = IA = \dfrac{a}{2}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{\pi a^3}{12}$$

Gọi V_2 là thể tích khối nón có chiều cao $h_2 = \dfrac{a}{2}$, bán kính đáy $r_1 = \dfrac{a}{4}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{\pi a^3}{96}$$

Gọi V_3 là thể tích khối nón có chiều cao $h_3 = HI = \dfrac{a}{4}$, bán kính đáy $r_3 = \dfrac{a}{2}$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi r_3^2 h_3 = \frac{\pi a^3}{48}$$

Gọi V là thể tích khối tròn xoay cần tìm, ta có

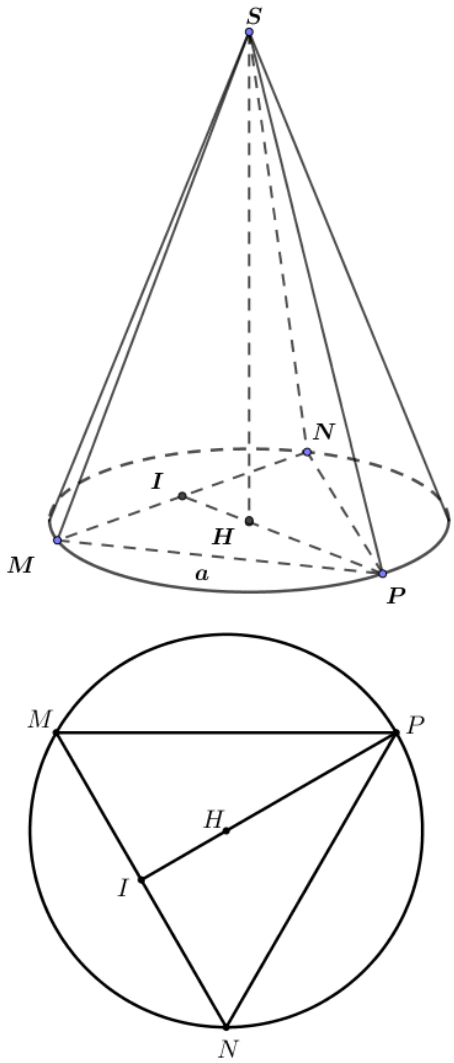
$$V = 2V_1 - 2\left(V_2 + V_3\right) = \frac{5\pi a^3}{48}$$

Câu 3. Một hình chóp tam giác đều có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón và các đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Gọi V_1 là thể tích khối chóp tam giác đều và V_2 là thể tích của khối nón. Hãy xác định tỉ số $k = \dfrac{\pi V_1}{V_2}$.

A. $k = 3\sqrt{3}$. **B.** $k = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $k = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



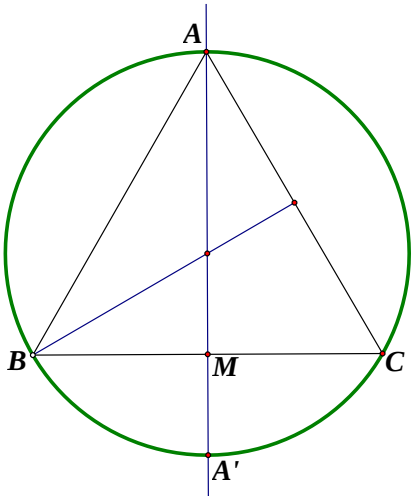
Giả sử a là cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn tâm H.

Suy ra, bán kính đường tròn là: $R = HP = \frac{2}{3}IP = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì hình nón và hình chóp tam giác đều có đường cao trùng nhau là SH nên ta có:

$$k = \frac{\pi V_1}{V_2} = \frac{\pi.\frac{1}{3}.S_{\Delta MNP}.SH}{\frac{1}{3}.S_{H,R}.SH} = \frac{\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có đỉnh $A(5;5)$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM (như hình vẽ minh họa), ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.



Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{32}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{27}{32}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi độ dài cạnh của tam giác ABC là a.

Khi đó khối nón tạo thành có bán kính đáy là: $r = BM = \frac{a}{2}$; chiều cao $h = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

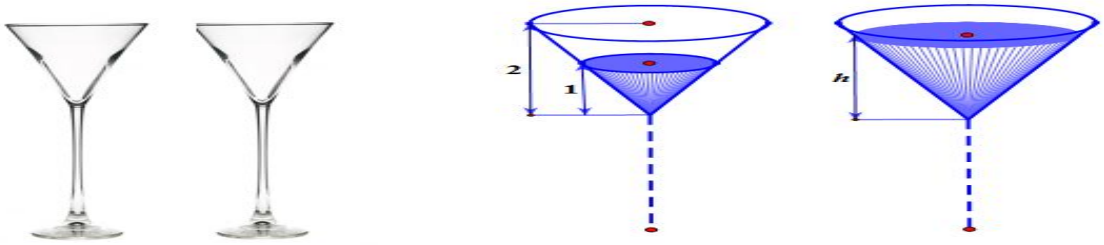
Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$

Khối cầu tạo thành có bán kính là $R = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$

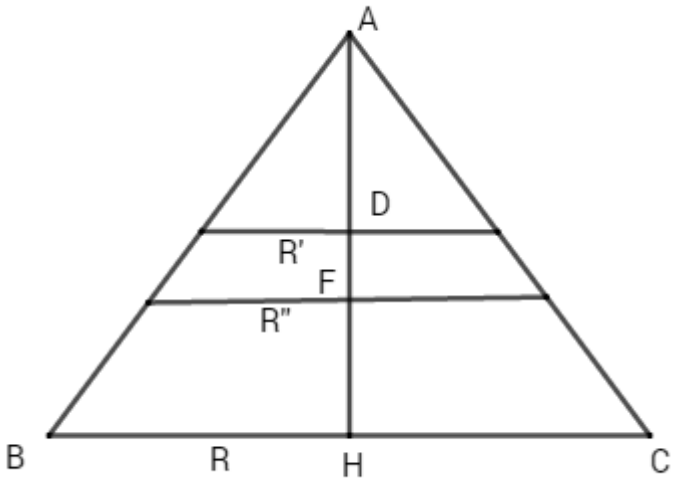
Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24} : \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27} = \frac{9}{32}$.

Câu 5. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2 dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01dm).



A. $h \approx 1,73\text{dm}$. **B.** $h \approx 1,89\text{dm}$. **C.** $h \approx 1,91\text{dm}$. **D.** $h \approx 1,41\text{dm}$.

Lời giải

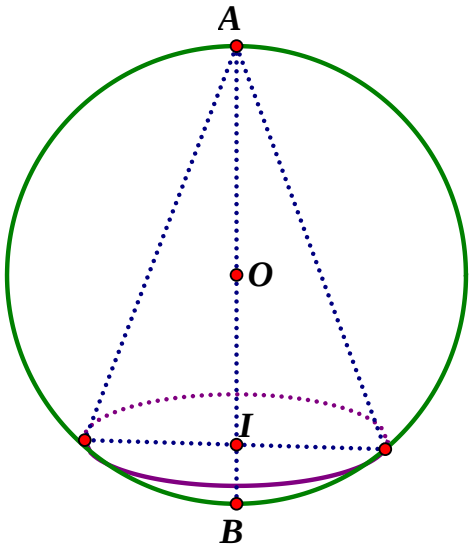


Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất: $AH = 2$.
Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai: $AD = 1$.
Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai: $AF = h$.
Theo Ta let ta có: $\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}$, $\frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2}$ suy ra $R' = \frac{R}{2}$, $R'' = \frac{Rh}{2}$.
Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất: $V = 2\pi R^2$.
Thể tích phần nước ở ly thứ hai: $V_1 = \pi R''^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$.
Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất: $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.
Mà: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} \approx 1,91$.

Câu 6. Cho mặt cầu đường kính $AB = 2R$. Mặt phẳng (P) vuông góc AB tại I (I thuộc đoạn AB), cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Tính $h = AI$ theo R để hình nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất?

A. $h = R$. **B.** $h = \frac{R}{3}$. **C.** $h = \frac{4R}{3}$. **D.** $h = \frac{2R}{3}$.

Lời giải:



Gọi O là trung điểm AB, M là điểm bất kì trên đường tròn (C).

Ta có $IM=\sqrt{OM^2-OI^2}=\sqrt{R^2-(h-R)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$.

Thể tích hình nón: $V=\frac{1}{3}.AI.S_{(C)}=\frac{1}{3}.h.\pi.(2Rh-h^2)$.

Đặt $f(h)=\frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$. ($R$ là tham số). Tập xác định $D=[0;2R]$.

$f'(h)=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)$; $f'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

$f(0)=0$; $f(R)=\frac{\pi}{3}.R^3$; $f\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{32\pi}{81}R^3$. Vậy hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h=\frac{4R}{3}$

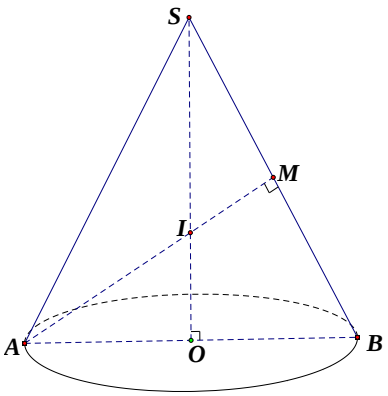
.

Hay thể tích hình nón lớn nhất đạt khi $h=\frac{4R}{3}$.

Câu 7. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối cầu nội tiếp và nội tiếp hình nón đã cho. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải



Giả sử cạnh của tam giác đều SAB bằng 1.

Gọi thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều SAB.

Gọi I là trọng tâm tam giác đều SAB, khi đó I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

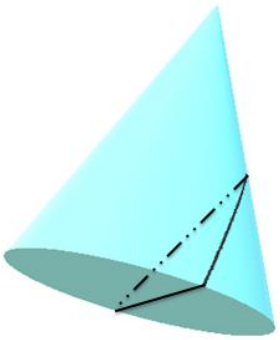
Bán kính mặt cầu nội tiếp hình nón là $r = IO = \frac{1}{3}SO = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.

Thể tích mặt cầu nội tiếp hình nón là $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi$.

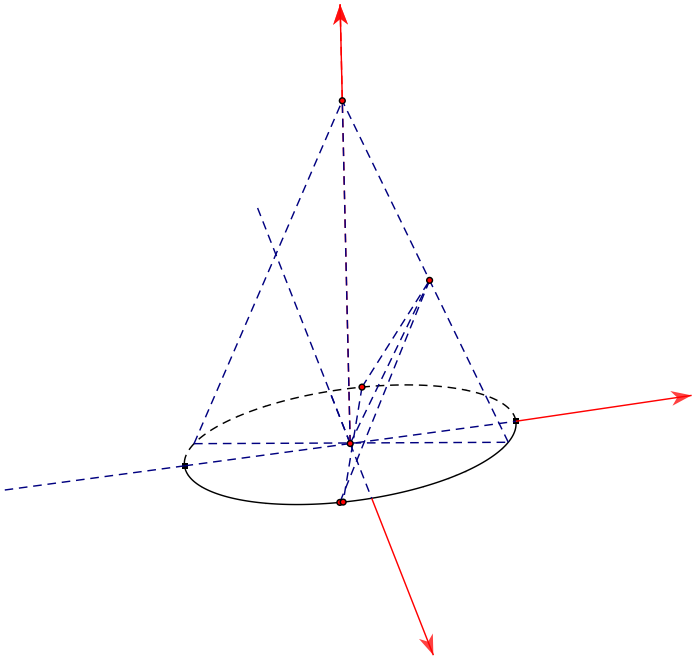
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

Câu 8. Cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng R, đường sinh $2R$ bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 tính tỷ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α)?



A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{1}{2(\pi-1)}$. **C.** $\frac{2}{3\pi}$. **D.** $\frac{3\pi-4}{6\pi}$.

Hướng dẫn giải



Không mất tính tổng quát ta giả sử $R=1$.

Khi cắt một khối nón tròn xoay có bán kính đáy bằng *R*, đường sinh 2*R* bởi một mặt phẳng (α) qua tâm đáy và tạo với mặt đáy một góc 60^0 thì ta được thiết diện là một đường parabol có đỉnh là gốc $O(0;0)$ và đỉnh còn lại là $A(1;1)$, do đó thiết diện sẽ có diện tích là $S=\frac{4}{3}$. Xét mặt phẳng đi qua cạnh đáy của thiết diện vuông góc với hình tròn đáy của hình nón cắt hình nón làm đôi.

Gọi đa diện chứa mặt thiết diện đó là (H). Gọi (K) là đa diện chứa đỉnh O của hình nón được sinh bởi khi cắt thiết diện Parabol với đa diện (H).

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt thiết diện là $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích của đa diện (K) là $V_K=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

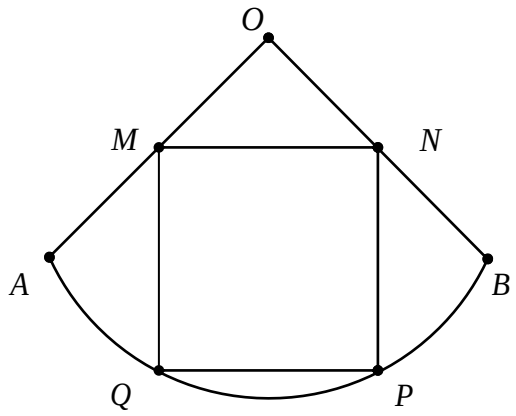
Mặt khác thể tích của nửa khối nón là $\frac{1}{2}\frac{1}{3}.\pi\sqrt{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích của đa diện nhỏ tạo bởi thiết diện và khối nón là $V=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}$.

Vậy tỉ số thể tích của hai phần khối nón chia bởi mặt phẳng (α) là $\frac{\frac{(3\pi-4)\sqrt{3}}{18}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\pi-4}{6\pi}$.

Câu 9. Cho tấm tôn hình nón có bán kính đáy là $r=\frac{2}{3}$, độ dài đường sinh $l=2$. Người ta cắt theo một đường sinh và trải phẳng ra được một hình quạt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của OA, OB

. Hỏi khi cắt hình quạt theo hình chữ nhật $MNPQ$ (hình vẽ) và tạo thành hình trụ đường PN trùng MQ (2 đáy làm riêng) thì được khối trụ có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$. **B.** $\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{4\pi}$. **C.** $\dfrac{5\left(\sqrt{13}-1\right)}{12\pi}$. **D.** $\dfrac{\pi\left(\sqrt{13}-1\right)}{9}$.

Lời giải

Độ dài cung AB trong hình quạt trên bằng chu vi đáy của hình nón và bằng $2\pi.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$.

Số đo góc AOB: $AOB=\dfrac{l_{AB}}{2\pi}=\dfrac{4\pi}{3.2\pi}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB, ta được

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB.\cos AOB=4+4-8.\cos\dfrac{2\pi}{3}=12$.

Ta có $AB=2\sqrt{3}$ $AB=2\sqrt{3}\Rightarrow MN=\sqrt{3}$.

Ta có $ONM=30°\Rightarrow ONP=120°$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ONP, ta được

$OP^2=ON^2+NP^2-2ON.NP.\cos ONP\Leftrightarrow 4=1+NP^2+NP$

$\Leftrightarrow NP^2+NP-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\\NP=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow NP=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

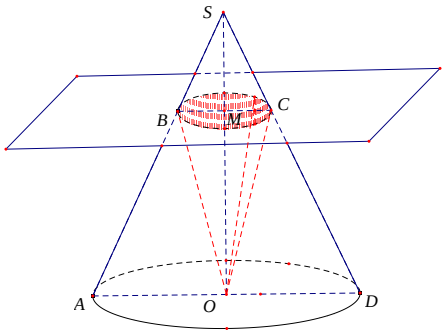
Khi đó hình chữ nhật $MNPQ$ được cuốn thành mặt trụ có chiều cao $NP=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, bán kính đáy: $R=\dfrac{MN}{2\pi}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

Thể tích khối trụ: $V=h.\pi.R^2=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}.\pi.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^2=\dfrac{3\left(\sqrt{13}-1\right)}{8\pi}$.

Câu 10. Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x$, $0<x<h$. (C) là thiết diện của mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M, với hình nón (N). Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{h}{3}$.

Lời giải



Ta có BM là bán kính đường tròn (C).

Do tam giác $\Delta SBM \backsim \Delta SAO$ nên $\frac{BM}{AO}=\frac{SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{AO.SM}{SO}\Leftrightarrow BM=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích của khối nón đỉnh O đáy là (C) là:

$$V=\frac{1}{3}\pi BM^2.OM=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{R(h-x)}{h}\right]^2 x=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $(0<x<h)$ ta có

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{4\pi R^2 h}{81}$	↘	

Từ bảng biến ta có thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất khi $x=\frac{h}{3}$.

DẠNG TOÁN 9: DIỆN TÍCH MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cho mặt cầu (S) tâm I có bán kính R

1. Diện tích mặt cầu

Công thức $S = 4\pi R^2$.

2. Thể tích khối cầu

Công thức $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Giao của mặt cầu với đường thẳng

Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I có bán kính R khi và chỉ khi $d(I;\Delta) = R$.

Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tâm I có bán kính R tại hai điểm AB. Khi đó ta có

$R^2 = d^2(I;\Delta) + \frac{AB^2}{4}$

4. Giao của mặt cầu với mặt phẳng

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I có bán kính R khi và chỉ khi $d(I;(P)) = R$.

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) tâm I theo giao tuyến là hình tròn tâm H bán kính R'. Khi đó ta có

$R^2 = d^2(I;(P)) + R'^2$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

☞ Tính bán kính khối cầu

☞ Tính diện tích mặt cầu

☞ Tính thể tích khối cầu

☞ Bài toán liên quan thiết diện, dây cung

☞ Mặt cầu nội tiếp-ngoại tiếp đa diện

☞ Toán Max-Min liên quan khối cầu

☞ …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích mặt cầu đó bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** 4π.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Tính diện tích mặt cầu

2. HƯỚNG GIẢI:

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho mặt cầu có bán kính $R = 1$. Diện tích mặt cầu đó bằng

A. 2π. **B.** 4π. **C.** $4\pi^2$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi 1^2 = 4\pi$.

Câu 2. Cho mặt cầu có diện tích bằng 20π. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. $\sqrt{\frac{5}{3}}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = 4\pi R^2 = 20\pi \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow R = \sqrt{5}$.

Câu 3. Cho mặt cầu có bán kính $R = 3$. Thể tích mặt cầu đó bằng

A. 9π. **B.** $\frac{81}{4}\pi$. **C.** 36π. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối cầu: $S = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$.

Câu 4. Cho mặt cầu có diện tích bằng 20π. Thể tích mặt cầu đó bằng

A. $\frac{20}{3}\pi$. **B.** $20\sqrt{5}\pi$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{100}\pi$. **D.** $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4\pi R^2 = 20\pi \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow R = \sqrt{5}$.

Thể tích khối cầu: $S = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\sqrt{5}^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi.$

Câu 5. Cho mặt cầu có thể tích bằng $\frac{4\pi}{3}$. Bán kính mặt cầu đó bằng

A. π. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối cầu: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow R^3 = 1 \Leftrightarrow R = 1$

Câu 6. Cho mặt cầu có thể tích bằng $\frac{4\pi}{3}$. Diện tích mặt cầu đó bằng

A. 2π. **B.** 4π. **C.** $4\pi^2$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối cầu: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow R^3 = 1 \Leftrightarrow R = 1$

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi 1^2 = 4\pi.$

Câu 7. Cho mặt cầu có đường kính bằng $2a$. Tính diện tích mặt cầu đó theo a.

A. $4\pi a^2$. **B.** 4π. **C.** $4\pi^2 a$. **D.** $\frac{32\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $R = \frac{d}{2} = a$ suy ra $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 8. Cho mặt cầu có đường kính bằng $2a$. Tính thể tích mặt cầu đó theo a.

A. a^3. **B.** $4\pi a^3$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $R = \frac{d}{2} = a$ suy ra $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 9. Cho mặt cầu có thể tích $\frac{16\pi}{3}$. Tính đường kính mặt cầu đã cho.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{32\pi}{3}\Leftrightarrow R=2$. Đường kính mặt cầu là $d=2R=4$.

Câu 10. Cho mặt cầu có bán kính $R=3$. Diện tích hình tròn qua tâm bằng

A. 3π. **B.** 6π. **C.** 4π. **D.** 9π.

Lời giải

Chọn D

Hình tròn qua tâm có bán kính bằng $R=3$ nên có diện tích $S=\pi R^2=\pi 3^2=9\pi$.

Mức độ 2

Câu 1. Cho mặt cầu tâm I có bán kính $R=5$. Đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d là $d\left(I;AB\right)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{5^2-\frac{6^2}{4}}=4$.

Câu 2. Cho mặt cầu (S) có tâm I một đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$ và khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d bằng 4. Tính diện tích mặt cầu (S).

A. 8π. **B.** 28π. **C.** 100π. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{d^2\left(I;AB\right)+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{4^2+\frac{6^2}{4}}=5$.

Diện tích mặt cầu là $4\pi R^2=4\pi 5^2=100\pi$.

Câu 3. Cho mặt cầu (S) một đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$ và khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d bằng 4. Tính thể tích khối cầu.

A. $\frac{28\pi}{3}$. **B.** 100π. **C.** $\frac{100}{3}$. **D.** $\frac{100\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{d^2\left(I;AB\right)+\dfrac{AB^2}{4}}=\sqrt{4^2+\dfrac{6^2}{4}}=5$.

Thể tích khối cầu là $\dfrac{4}{3}\pi R^2=\dfrac{4}{3}\pi 5^2=\dfrac{100\pi}{3}$.

Câu 4. Cho mặt cầu (S) một đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B sao cho $AB=6$ và khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d bằng 4. Tính chu vi đường tròn lớn của mặt cầu (S).

A. 10π. **B.** 20π. **C.** $\sqrt{7}\pi$. **D.** 2π.

Lời giải

Chọn A

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{d^2\left(I;AB\right)+\dfrac{AB^2}{4}}=\sqrt{4^2+\dfrac{6^2}{4}}=5$.

Đường tròn lớn là đường tròn đi qua tâm nên có bán kính bằng R.

Chu vi đường tròn lớn cầu là $2\pi R=2\pi 5=10\pi$.

Câu 5. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 5. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một hình tròn, biết khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng 4. Tính diện tích hình tròn trên.

A. $3\pi^2$. **B.** π. **C.** 9π. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Gọi R' là bán kính hình tròn thiết diện, ta có $R'=\sqrt{R^2-d^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Diện tích hình tròn thiết diện là $\pi R^2=\pi 3^2=9\pi$.

Câu 6. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 5. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một hình tròn, biết khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng 3. Tính chu vi hình tròn trên.

A. 8π. **B.** 8. **C.** 4π. **D.** $2\sqrt{34}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R' là bán kính hình tròn thiết diện, ta có $R'=\sqrt{R^2-d^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Chu vi hình tròn thiết diện là $2\pi R=2\pi 4=8\pi$.

Câu 7. Cho mặt cầu (S) và một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một hình tròn, biết khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng 4 và bán kính hình tròn thiết diện bằng 3. Tính diện tích mặt cầu (S) .

A. 120π. **B.** 50π. **C.** 100π. **D.** 28π.

Lời giải

Chọn C

Gọi R' là bán kính hình tròn thiết diện khi đó $R'=3$.

Ta có $R=\sqrt{d^2\left(I;(P)\right)+R'^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

Diện tích mặt cầu là $4\pi R^2=4\pi 5^2=100\pi$.

Câu 8. Cho mặt cầu (S) và một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một hình tròn, biết khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng 4 và bán kính hình tròn thiết diện bằng 3. Tính thể tích khối cầu (S).

A. $\frac{100\pi}{3}$. **B.** 100π. **C.** $\frac{100}{3}$. **D.** $\frac{28\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi R' là bán kính hình tròn thiết diện khi đó $R'=3$.

Ta có $R=\sqrt{d^2\left(I;(P)\right)+R'^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

Thể tích khối cầu là $\frac{4}{3}\pi R^2=\frac{4}{3}\pi 5^2=\frac{100\pi}{3}$.

Câu 9. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 5. Một đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B sao cho sao cho khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng d bằng 3. Độ dài dây cung AB bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm của AB, khi đó ta có $IM=3$.

$MA=MB=\sqrt{R^2-IM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$

Độ dài dây cung $AB=2MA=8.$

Câu 10. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 5. Một mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một hình tròn, biết khoảng cách từ tâm mặt cầu đến (P) bằng 3. Tính đường kính của hình tròn thiết diện

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Gọi R' là bán kính hình tròn thiết diện, ta có $R'=\sqrt{R^2-d^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$

Đường kính của hình tròn thiết diện là $d=2R'=8.$

↳ Mức độ 3

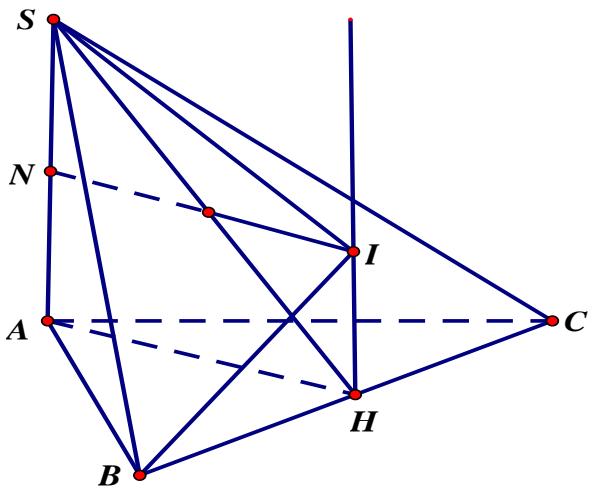
Câu 1. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng ABC, $SA=a, AB=b, AC=c$. Tính bán kính của mặt cầu đi qua các điểm và A, B, C và S.

A. $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $R=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

C. $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $R=\frac{2}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi Δ là trục của đường tròn đáy, đường trung trực của SA nằm trong mặt phẳng (SAH) cắt Δ tại I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

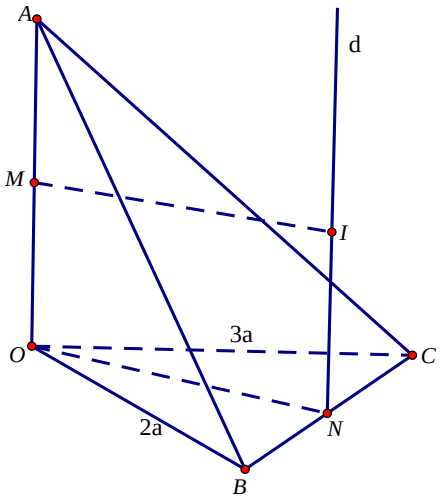
Bán kính của hình chóp là $R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2+c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $S = 8\pi a^2$. **B.** $S = 14\pi a^2$. **C.** $S = 12\pi a^2$. **D.** $S = 10\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow N$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC.

Qua N dựng đường thẳng d vuông góc với $(OBC) \Rightarrow d$ là trục của đáy.

Xét mặt phẳng chứa d và OA dựng đường trung trực của OA (M là trung điểm OA) cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $OABC$.

Ta có: $OM = NI = \frac{a}{2}$

Xét ΔOBC có $BC^2 = OB^2 + OC^2 = (2a)^2 + (3a)^2 = 13a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{13}$.

$ON = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a\sqrt{13}$.

Xét ΔSOI: $IO^2 = ON^2 + NI^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{13}{4}a^2 = \frac{14}{4}a^2 \Rightarrow OI^2 = \frac{14}{4}a^2 = R^2$.

Diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp là : $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{14}{4}a^2 = 14\pi a^2$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{5a}{2}$. **B.** $R = \frac{17a}{2}$. **C.** $R = \frac{13a}{2}$. **D.** $R = 6a$.

Lời giải

Chọn C

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có bán kính đáy là: $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}}{2} = \frac{5a}{2}$.

Đường cao $SA = 12a$.

Ta có bán kính mặt cầu là : $R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + R_d^2} = \sqrt{\left(\frac{12a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2} = \frac{13a}{2}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{32\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{4\pi a^3}{3}$. **C.** $V = 4\pi a^3$. **D.** $V = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có bán kính đáy là: $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường cao $SA = a\sqrt{2}$.

Ta có bán kính mặt cầu là : $R = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + R_d^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a$.

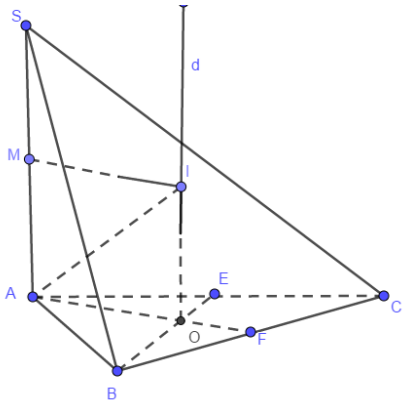
Thể tích khối cầu là $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $3a$, cạnh bên $SC = 2a$ và SC vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = 3a$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dựng đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của cạnh SA, qua M dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt đường thẳng d tại điểm I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

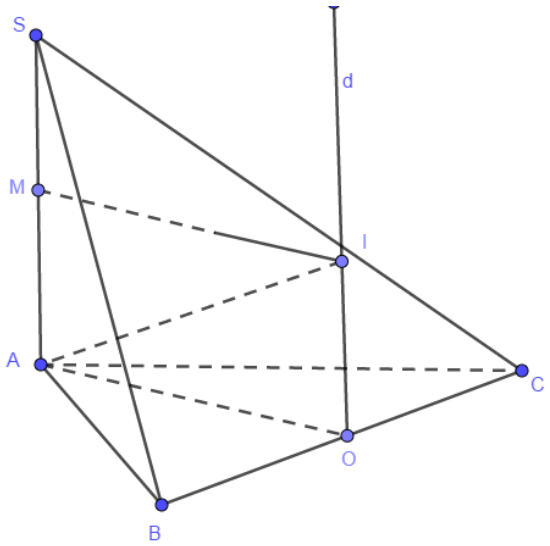
Ta có $AO = MI = a\sqrt{3} \Rightarrow R = AI = \sqrt{AM^2 + MI^2} = 2a$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam vuông tại A, $AB = 3, AC = 4$, SA vuông góc với đáy, $SA = 2\sqrt{14}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \dfrac{169\pi}{6}$. **B.** $R = \dfrac{729\pi}{6}$. **C.** $R = \dfrac{2197\pi}{8}$. **D.** $R = \dfrac{13\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, dựng đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của cạnh SA, qua M dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt đường thẳng d tại điểm I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có $AO = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow R = AI = \sqrt{AM^2 + MI^2} = \dfrac{9}{2}$.

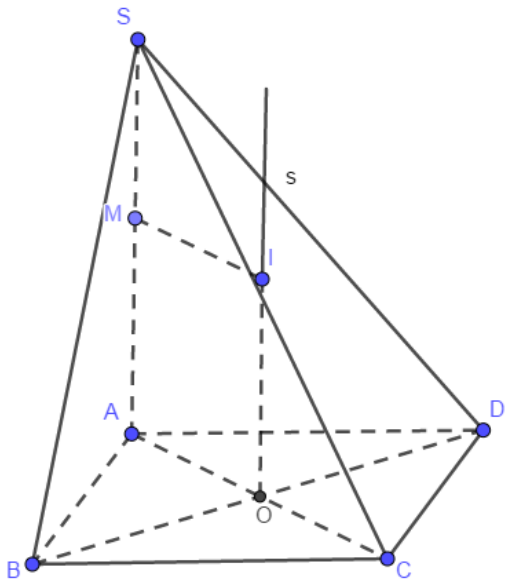
Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{243\pi}{2} = \dfrac{729\pi}{6}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45°. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $S=4\pi a^2$. **B.** $S=6\pi a^2$. **C.** $S=8\pi a^2$. **D.** $S=12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$, dựng đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh SA, qua M dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt đường thẳng d tại điểm I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° suy ra tam giác SAC vuông cân tại A suy ra $SA=AC=a\sqrt{2}$

$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R=AI=\sqrt{AM^2+MI^2}=a$.

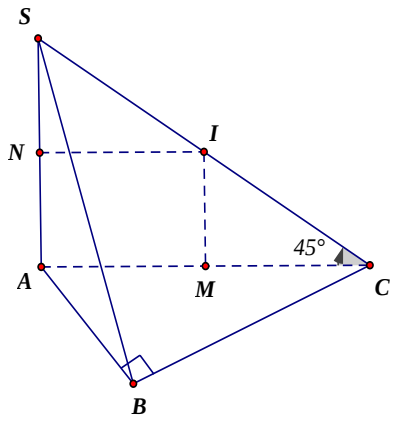
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S=4\pi R^2=4\pi a^2$.

Câu 8. Hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a$ và góc giữa SC với (ABC) bằng $45°$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=a\sqrt{2}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R=a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi ; N, M, I lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AC, SC.

Ta có: $IM \,//\, SA \Rightarrow IM \perp (ABC)$, mà M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow IA = IB = IC \ (1)$.

$NI \,//\, AC \Rightarrow NI \perp SA \Rightarrow$ NI là đường trung trực của SA nên $IA = IS \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Góc giữa đường thẳng SC và đáy là: $SCA = 45° \Rightarrow$ tam giác SAC vuông cân tại A.

Ta có: tứ giác $ANIM$ là hình vuông $\Rightarrow IA = \sqrt{2}AM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB\sqrt{2} = a$.

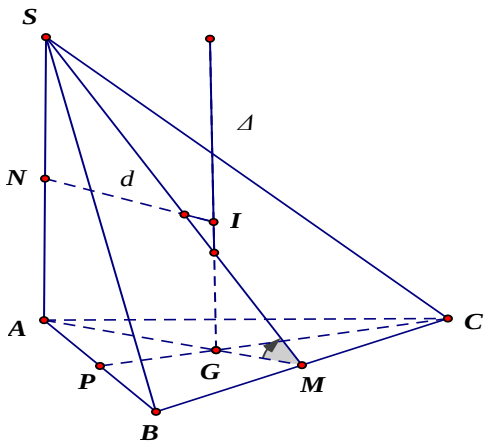
Bán kính mặt cầu: $R = IA = a$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, $SA \perp (ABC)$, góc giữa mặt bên (SBC) và đáy bằng $60°$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S = \dfrac{43\pi}{48}$. **B.** $S = \dfrac{43\pi}{36}$. **C.** $S = \dfrac{43\pi}{4}$. **D.** $S = \dfrac{43\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi Δ là đường thẳng đi qua G và vuông góc với (ABC), d là đường thẳng đi qua trung điểm N của SA và vuông góc với SA. Gọi $I = d \cap \Delta$.

Ta có: IG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow IA = IB = IC \ (1)$.

NI là đường trung trực của SA nên $IA = IS \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Góc giữa (SBC) và đáy là: $SMA = 60°$.

Xét tam giác SAM vuông tại A: $SA = AM.\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}$.

Xét tam giác ABC: $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: tứ giác $ANIG$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IA = \sqrt{AN^2 + AG^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}$.

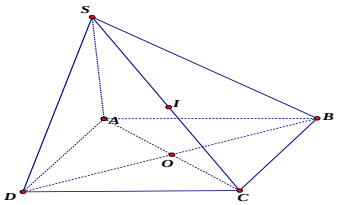
Bán kính mặt cầu: $R = IA = \frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}$. Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \frac{43\pi}{12}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AC = 7a$, $SA = a\sqrt{7}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = a\sqrt{56}$. **B.** $R = a\sqrt{14}$. **C.** $R = a\sqrt{7}$. **D.** $R = \frac{7a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm cạnh SC.

Dễ thấy:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Như vậy các điểm A, B, D đều nhìn cạnh SC dưới một góc vuông. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I là trung điểm SC và bán kính :

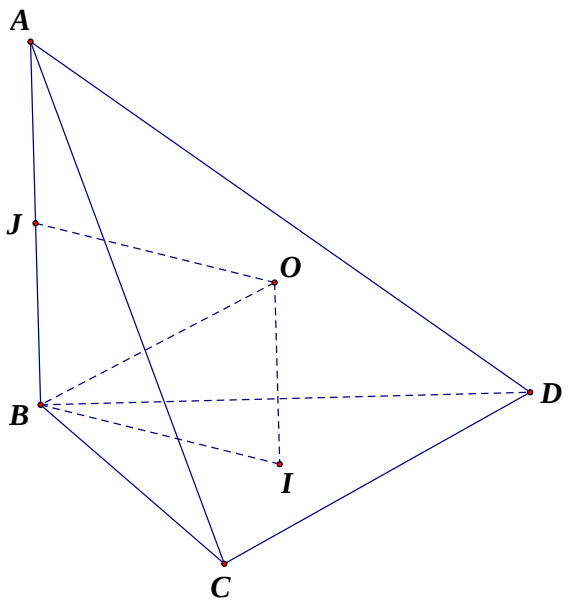
$$R = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{(7a)^2 + (\sqrt{7}\,a)^2}}{2} = \sqrt{14}a.$$

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với (BCD) và $AB = a\sqrt{2}$. Biết tam giác BCD có $BC = a, BD = a\sqrt{3}$ và $CBD = 30°$. Tính thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}\pi a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{2}$. **D.** $V = \sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



- Tìm O là tâm của mặt cầu.

Gọi I là tâm đáy BCD.

+ Dựng trục của đáy: d qua I, vuông góc (BCD). Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB // d$.

+ Gọi J là trung điểm AB. Qua J vẽ đường thẳng $\Delta // BI \Rightarrow \Delta$ là trung trực AB.

+ $d \cap \Delta = \{O\} \Rightarrow O$ là tâm của mặt cầu.

- Chứng minh:

+ Vì $O \in d$ là trục của đáy $\Rightarrow OD = OB = OC$ (1)

+ $O \in$ trung trực của AB $\Rightarrow OA = OB (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCD$.

Ta có:

+ $AB^2 = 2a^2$; $BI = R_{\text{đáy}}$

+ $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BD.BC.\cos CBD = a^2 + 3a^2 - 2.a.a\sqrt{3}.\cos 30° = a^2$

$\Rightarrow CD = a$.

+ Áp dụng định lý sin vào tam giác BCD ta có:

$\dfrac{CD}{\sin CBD} = 2R_{\text{đáy}} \Rightarrow R_{\text{đáy}} = \dfrac{CD}{2\sin CBD} = \dfrac{a}{2.\sin 30°} = a$.

Trong tam giác vuông BOJ có:

$$R^2_{\text{cầu}} = OB^2 = JB^2 + JO^2 \Rightarrow OB = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + BI^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + BI^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

thể tích V của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$:

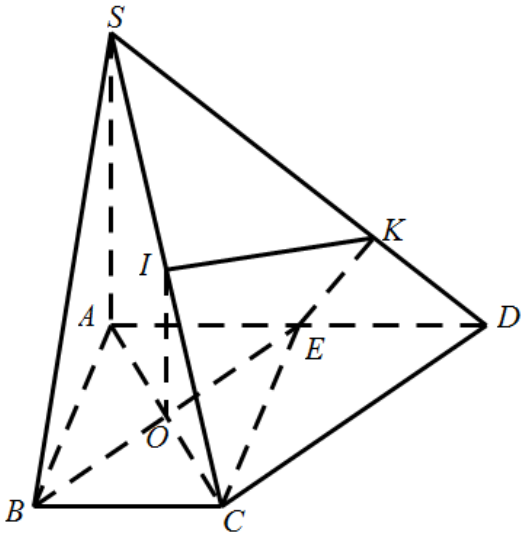
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{6a^2}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \pi a^3\sqrt{6}.$$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tại A và B, $AB = BC = a$ và $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ $EK \perp SD$ tại K. Tính bán kính của mặt cầu đi qua sáu điểm S, A, B, C, E, K.

A. $R = \dfrac{a}{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình vuông $ABCE$. Từ O kẻ $OI \parallel SA$. Suy ra I là trung điểm SC.

Ta có : $\Delta SAC, SC = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a.$

$SD = a\sqrt{6}, SK = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}, CD = a\sqrt{2}, SI = a; \Delta SCD, \cos CSD = \dfrac{SC^2 + SD^2 - CD^2}{2.SC.SD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

$\Delta SCD, IK = \sqrt{SI^2 + SK^2 - 2.SI.SK.\cos CSD} = \sqrt{SI^2 + SK^2 - 2.SI.SK.\cos CSD} = a.$

Mặt khác $I.ABCE$ là hình chóp đều nên $IA = IB = IC = IE = IK = \dfrac{SC}{2} = a.$

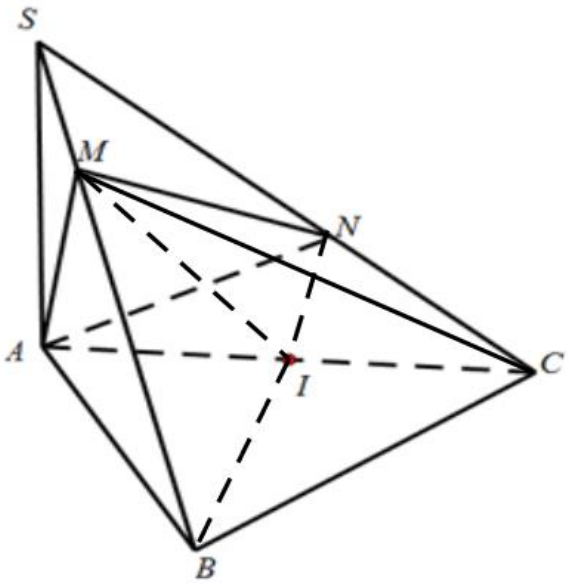
Vậy hình chóp $K.ABCE$ ngoại tiếp mặt cầu tâm I bán kính $R = a.$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC), AB = 1, AC = 2$ và $BAC = 60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu A trên B, SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N.

A. $R = \sqrt{2}.$ **B.** $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}.$ **D.** $R = 1.$

Lời giải

Chọn D



Vì ABC có $AB=1, AC=2, BAC=60^\circ$ nên ABC là tam giác vuông tại B.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $IA=IB=IC=\dfrac{AC}{2}=1$.

Mặt khác: $\left.\begin{array}{l} BC\perp AB \\ BC\perp SA \\ AM\perp SB \end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AM \Rightarrow AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp MC.$

Vì AMC là tam giác vuông tại M nên $IA=IC=IM=\dfrac{AC}{2}=1$.

Tương tự ANC là tam giác vuông tại N nên $IA=IC=IN=\dfrac{AC}{2}=1$.

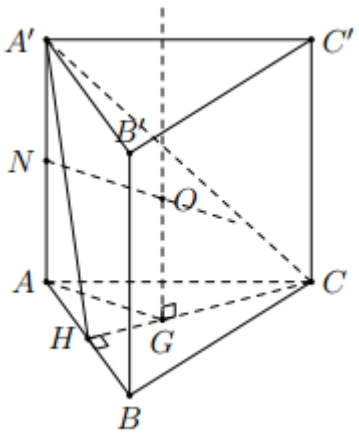
Vậy hình chóp $M.ABCN$ ngoại tiếp mặt cầu tâm I bán kính $R=1$.

Câu 14. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng 30°. Gọi H là trung điểm của AB. Tính theo a bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $CH\perp(AA'B'B)$ nên góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ là $HA'C=30^\circ$.

$A'H=\dfrac{HC}{\tan 30^\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3a}{2}$; $AA'=\sqrt{A'H^2-AH^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Dựng Δ qua G và $\Delta\perp(ABC)$.

Gọi N là trung điểm của AA'. Dựng trung trực Δ' của AA'.

Gọi $O=\Delta\cap\Delta'$. Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$.

$OG=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $GC=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

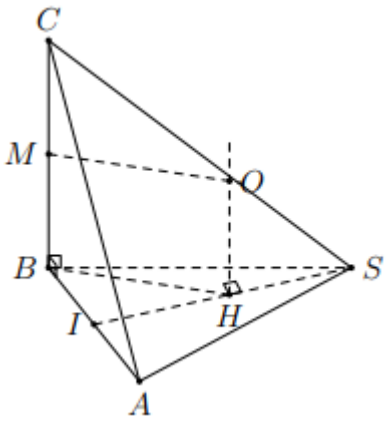
Bán kính của mặt cầu là $R=OC=\sqrt{OG^2+GC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Câu 15. Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại $B, AB=a, BC=a\sqrt{3}$ và $SA=a\sqrt{2}, SB=a\sqrt{2}, SC=a\sqrt{5}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$

A. $R=\dfrac{a\sqrt{259}}{7}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{259}}{14}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{259}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{37}}{14}$.

Lời giải

Chọn B



Do $SC^2=BC^2+SB^2$ nên tam giác SBC vuông tại B.
Có tam giác ABC vuông tại B.
Suy ra $BC\perp(SAB)$.
Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.
Dựng Δ qua H và $\Delta\perp(SAB)$.
Gọi M là trung điểm của BC. Dựng trung trực Δ' của BC.
Gọi $O=\Delta\cap\Delta'$. Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là $R=BO$.

Diện tích của tam giác SAB là

$$S_{SAB}=\sqrt{\left(\frac{SA+SB+AB}{2}\right)\left(\frac{SA+SB+AB}{2}-AB\right)\left(\frac{SA+SB+AB}{2}-SA\right)\left(\frac{SA+SB+AB}{2}-SB\right)}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là $R=BH=\dfrac{SA.SB.AB}{4.S_{SAB}}=\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.

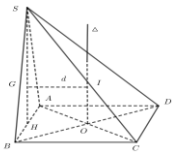
$$R=BO=\sqrt{BH^2+HO^2}=\sqrt{\left(\frac{2a}{\sqrt{7}}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{259}}{14}.$$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Vì tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy suy ra $SH \perp (ABCD)$.

* Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Từ O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

- Gọi G là trọng tâm tam giác SAB suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Từ G dựng đường thẳng $d \perp (SAB)$.

- Gọi $I = d \cap \Delta$. Suy ra $IA = IB = IC = ID = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

* Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $AC = a\sqrt{2}, OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

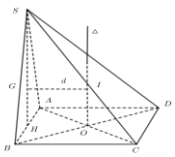
$$R = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều mà (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{7\sqrt{24}}{24}\pi a^3$. **B.** $V = \frac{5\sqrt{30}}{27}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Vì tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy suy ra $SH \perp (ABCD)$.

* Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Từ O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

- Gọi G là trọng tâm tam giác SAB suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Từ G dựng đường thẳng $d \perp (SAB)$.

- Gọi $I = d \cap \Delta$. Suy ra $IA = IB = IC = ID = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

* Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, OI = GH = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

$$R = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Vậy thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

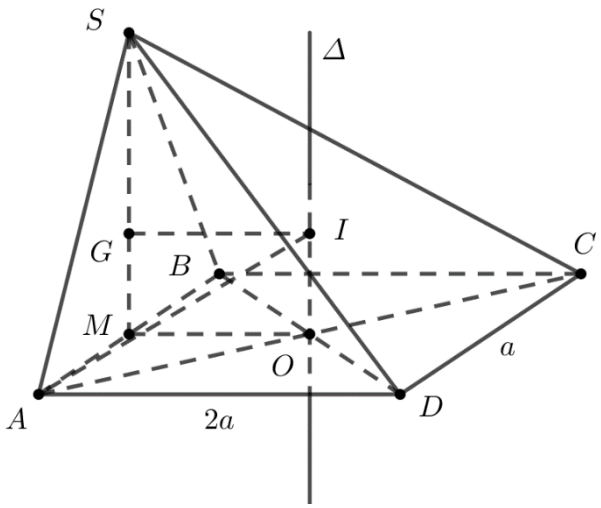
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB đều cạnh bằng $a \Rightarrow SM \perp AB, SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$.

Gọi $O = AC \cap BD$, vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$, $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Dựng Δ đi qua O và $\Delta // SM \Rightarrow \Delta \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta$ là trục của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} OM \perp AB \\ OM \perp SM \end{cases} \Rightarrow OM \perp (SAB)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, vì ΔSAB đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

Trong mặt phẳng (SM, Δ), dựng $GI // OM\ (I \in \Delta) \Rightarrow GI \perp (SAB) \Rightarrow GI$ là trục của ΔSAB.

$\Rightarrow IA = IB = IS\ (1)$.

Mà $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC = ID\ (2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R = IA$.

Ta có $IOMG$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OI = MG = \dfrac{1}{3}SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong tam giác IOA vuông tại O, có $IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

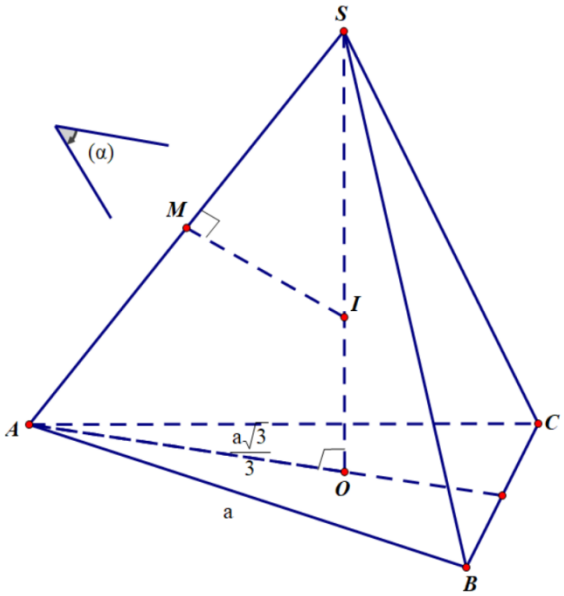
Vậy $R = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và đáy bằng $60°$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \dfrac{a}{3}$. **B.** $R = \dfrac{2a}{3}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R = \dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O, M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ΔABC và trung điểm SA.

Mặt phẳng trung trực (α) của cạnh SA cắt SO tại I.

Dễ thấy I là giao điểm của trục SO và mặt phẳng trung trực (α) của cạnh SA, nên I cách đều các đỉnh S, A, B, C.

Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và có bán kính là $R = SI$.

Trong tam giác vuông SOA có: $SA = \dfrac{AO}{\cos 60^\circ} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $SO = AO.\tan 60^\circ = a$.

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA$.

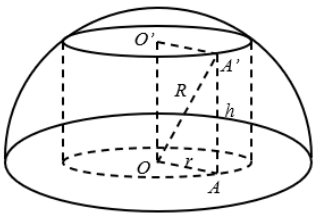
Suy ra: $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \dfrac{SM.SA}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2SO} \Rightarrow SI = \dfrac{12a^2}{9.2a}$. Vậy $R = \dfrac{2}{3}a$.

Câu 20. Khi cắt mặt cầu $S(O,\ R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,\ R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R = 1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,\ R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ h = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **B.** $r = \dfrac{\sqrt{6}}{2},\ h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.Ta có: $h^2 + r^2 = R^2 \ \ (0 < h \le R = 1)$

$\Rightarrow r^2 = 1 - h^2$.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(1-h^2)h = f(h) \ \Rightarrow f'(h) = \pi(1-3h^2) = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

h	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	↗	$\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Vậy: $\underset{(0;1]}{Max}V = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG TOÁN 10: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ: Điều kiện để hàm số đơn điệu trên khoảng K.

1. Định lí 1.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

a) Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

b) Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

2. Định lí 2.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.

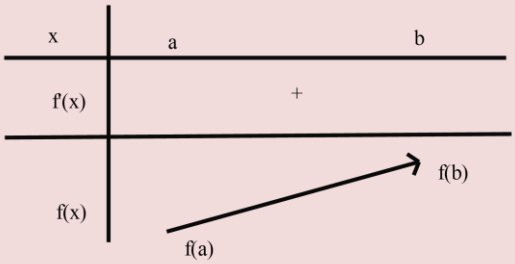
b) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số f không đổi trên K.

Chú ý: Khoảng K trong định lí trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thiết " Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó'. Chẳng hạn:

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

Ta thường biểu diễn qua bảng biến thiên như sau:



3. Định lí 3. (mở rộng của định lí 2)

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số f đồng biến trên K.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

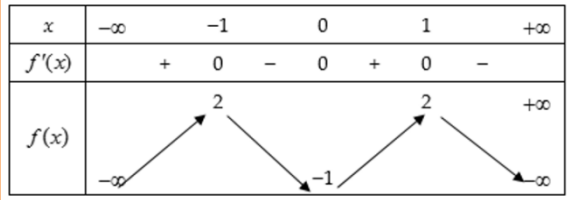
Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Dựa vào bảng biến thiên xác định khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số.

.....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Định lý:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

.....

3. HƯỚNG GIẢI:

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

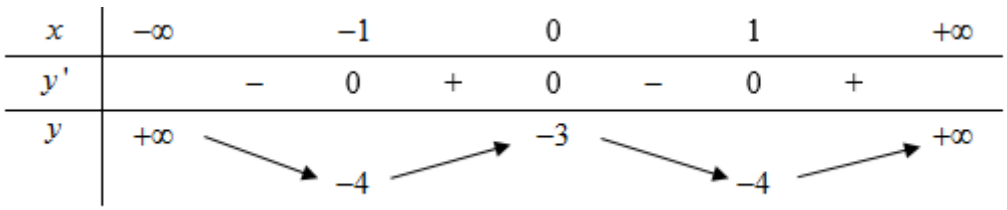
Chọn C

Trong khoảng từ $(-1;0)$ đạo hàm $f'(x)<0$ với mọi $x\in R$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

Dạng 1:

Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$**, xét tính đơn điệu của hàm số** $f(x)$**.**

Câu 10.1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

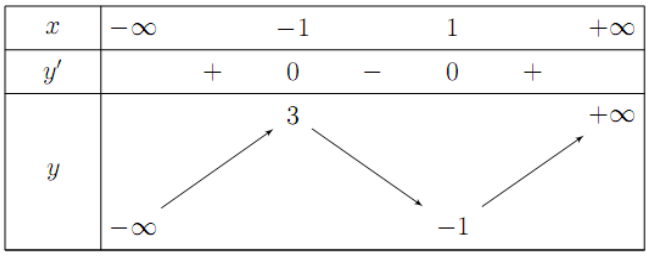
A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT ta có hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 10.2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT ta có :

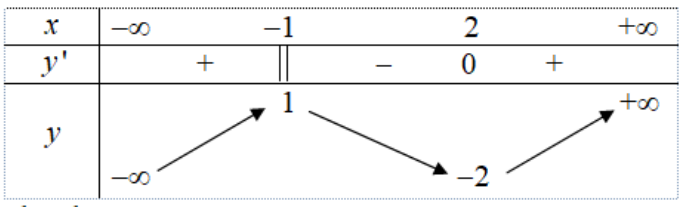
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\Rightarrow$ **A sai.**

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)\Rightarrow$ **B sai.**

Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)\Rightarrow$ **C sai.**

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)\Rightarrow$ **D đúng .**

Câu 10.3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

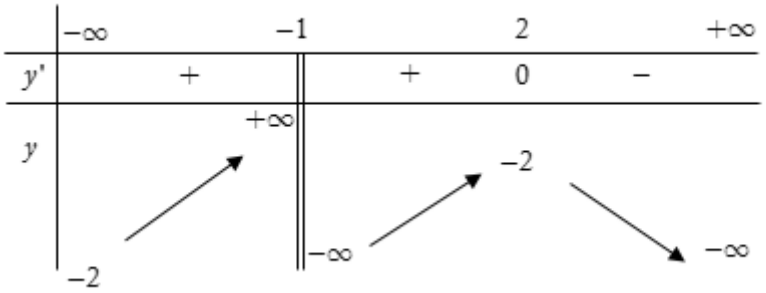
Từ BBT ta có :

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1) \Rightarrow$ **A sai** .

Hàm số nghịch biến trên $(-1;2) \Rightarrow$ **B sai , C sai** .

Hàm số đồng biến trên hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $3;+\infty \Rightarrow$ **D đúng** .

Câu 10.4. Cho hàm số $y=f\ x$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng ?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $-2;+\infty$ và $-\infty;-2$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $-\infty;-1 \cup -1;2$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $0;2$.

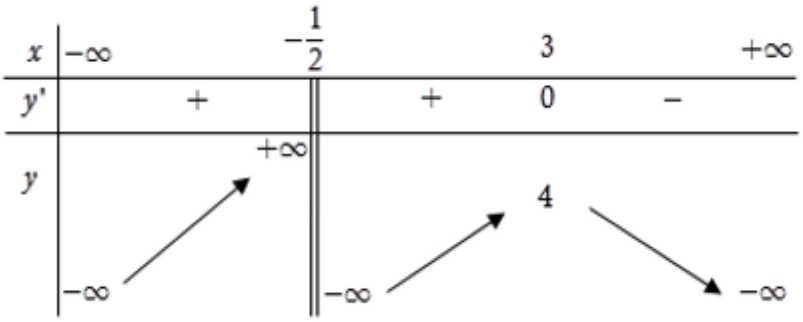
D. Hàm số đã cho đồng biến trên $-2;2$.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT ta có hàm số đồng biến trên khoảng $-\infty;-1$ và $-1;2$ nên **A, B, D sai** và **C đúng** .

Câu 10.5. Cho hàm số $y=f\ x$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng ?



A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $3;+\infty$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $3;+\infty$.

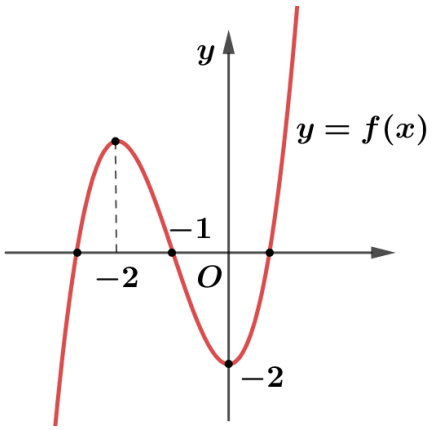
D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $-\infty;3$.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT ta có hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};3\right)$, hàm số nghịch biến trên $3;+\infty$ nên **A, B, D** sai và **C** đúng.

Câu 10.6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



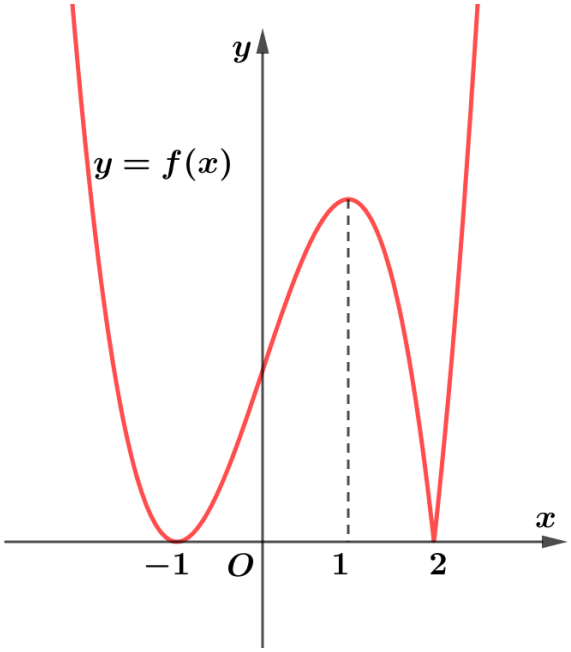
A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 10.7. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



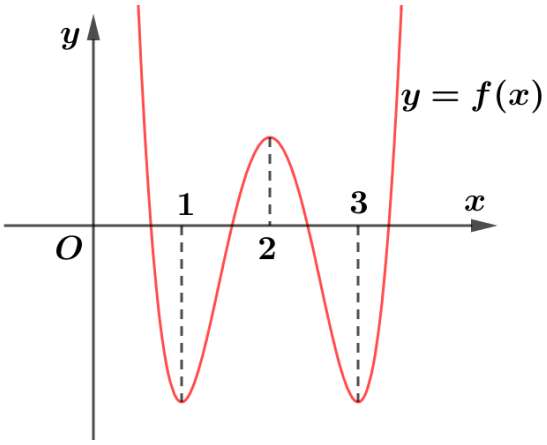
A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 10.8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



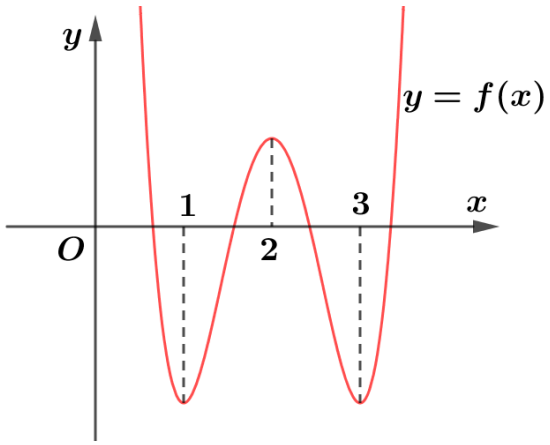
A. $(2;3)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 10.9. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



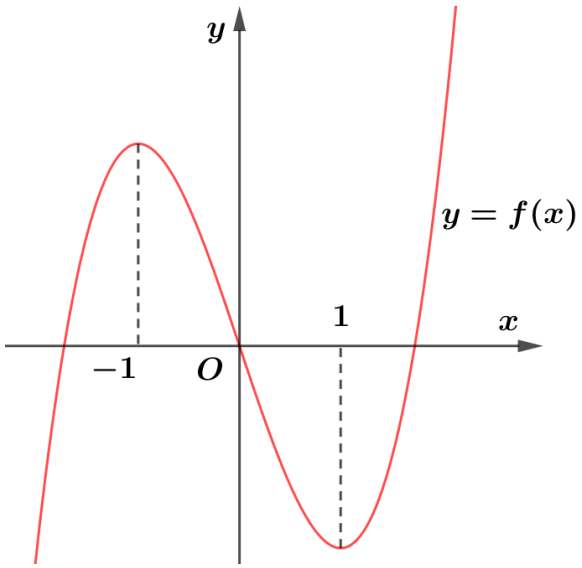
A. $(2;3)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 10.10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

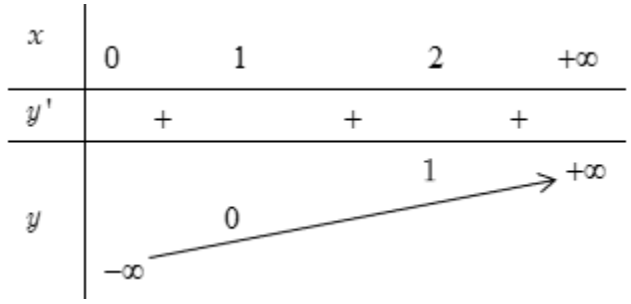
Chọn C

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Dạng 2:

Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$.

Câu 10.11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

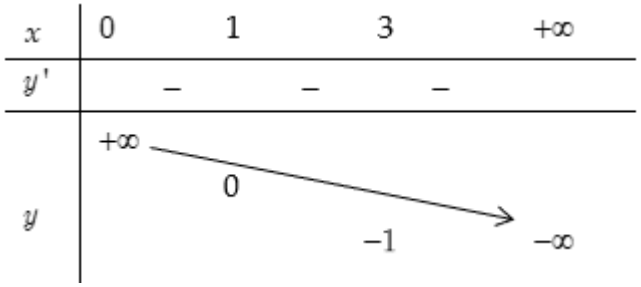
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Trong khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 10.12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

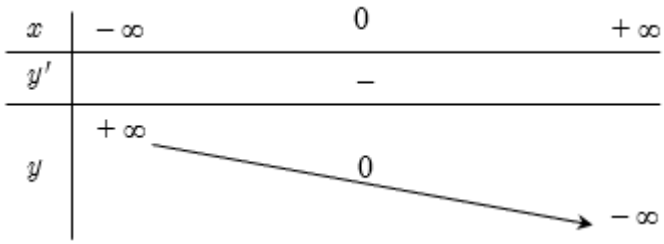
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Trong khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 10.13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ chỉ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

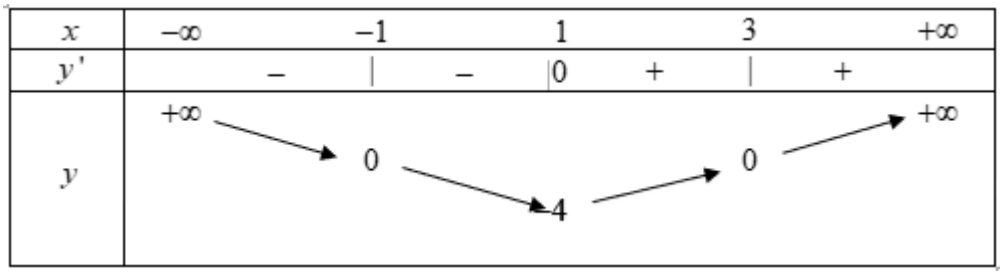
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Trong khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 10.14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

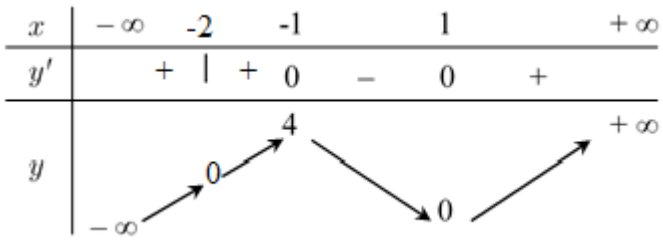
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành. Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 10.15. Cho hàm số $f\ x = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\quad a\neq 0$. Biết rằng hàm số $f\ x$ có đạo hàm là $f'\ x$ và hàm số $y=f'\ x$ có bảng biến thiên như hình bên.



Khi đó nhận xét nào sau đây là **sai**?

A. Trên $-2;1$ thì hàm số $f\ x$ luôn tăng.

B. Hàm $f\ x$ giảm trên đoạn $-1;1$.

C. Hàm $f\ x$ đồng biến trên khoảng $1;+\infty$.

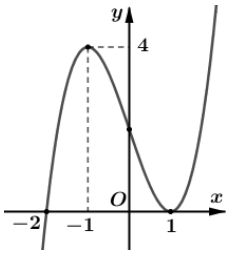
D. Hàm $f\ x$ nghịch biến trên khoảng $-\infty;-2$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Trên khoảng $-1;1$ đồ thị hàm số $f'\ x$ nằm phía trên trục hoành. Hàm $f\ x$ đồng biến trên đoạn $-1;1$.

Câu 10.16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

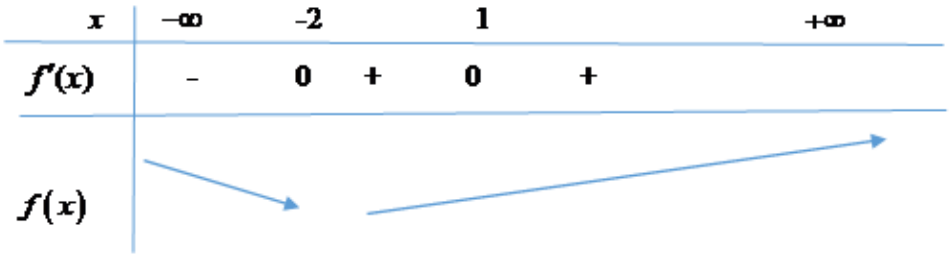
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải

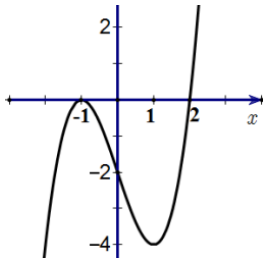
Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên sau:



Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Câu 10.17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải

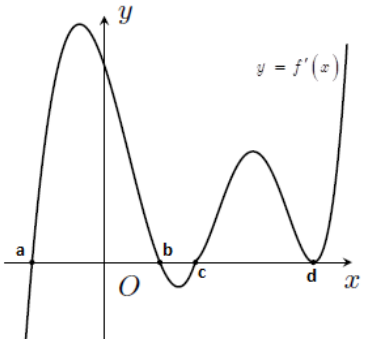
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy

-Trên $(-\infty;2)$: $f'(x)\le 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$.

- Trên $(2;+\infty)$: $f'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 10.18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số có bao nhiêu khoảng nghịch biến?



A. 3. **B.** 1. **C.** 4 **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy

-Trên $(-\infty;a)$: $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;a)$.

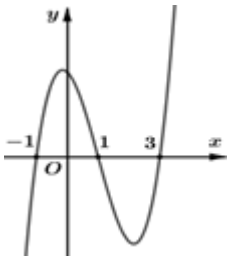
- Trên $(a;b)$: $f'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên $(a;b)$.

-Trên $(b;c)$: $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(b;c)$.

-Trên $(c;+\infty)$: $f'(x)\geq 0$ nên hàm số đồng biến trên $(c;+\infty)$.

Suy ra hàm số có hai khoảng nghịch biến.

Câu 10.19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



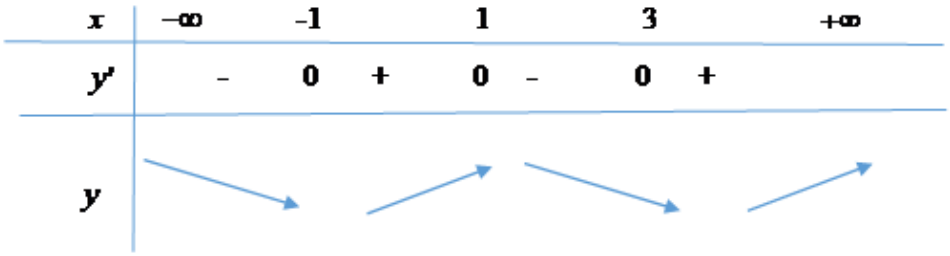
Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

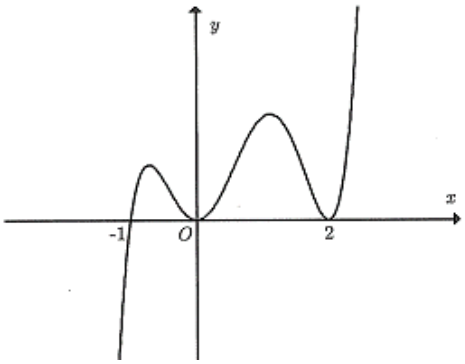
Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:



Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Câu 10.20. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Chọn đáp án **đúng.**



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		↘		↗		↗		↗	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Dạng 3:

Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$**, xét tính đơn điệu của hàm số**

$$y=-f(x),\ y=|f(x)|,\ y=f(|x|)$$

Câu 10.21. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=-f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=-f(x)\Rightarrow g'(x)=-f'(x)$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)<0$. Theo bảng biến thiên ta có trên khoảng $(3;4)$ thì $f'(x)<0$

Vậy đáp án đúng là: B.

Câu 10.22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=-f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=-f(x)\Rightarrow g'(x)=-f'(x)$.

$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x)>0$. Theo bảng biến thiên ta có trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $f'(x)>0$

Vậy đáp án đúng là: A.

Câu 10.23. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	2

Hàm số $g(x)=-f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=-f(x)\Rightarrow g'(x)=-f'(x)$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)<0$. Theo bảng biến thiên ta có trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $f'(x)>0$.

Tập hợp $(1;2)\subset(1;+\infty)$

Vậy đáp án đúng là: C.

Câu 10.24. Cho hàm số $f\ x$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	2

Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. Hàm số $f\ x$ nghịch biến trên $-2;1$.

B. Hàm số $y=-f\left(x\right)$ đồng biến trên $-1;3$.

C. Hàm số $y=-f\left(x\right)$ đồng biến trên $1;2$.

D. Hàm số $y=f\ x$ đồng biến trên $-\infty;2$.

Lời giải

Chọn C

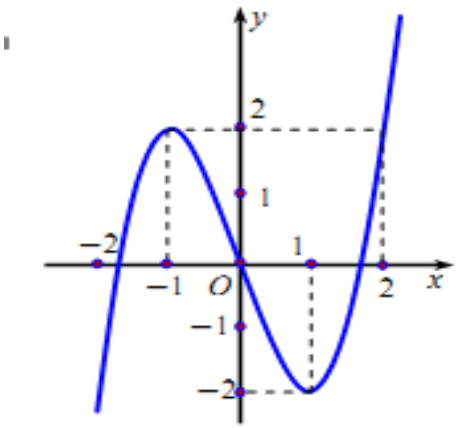
Ta có $g\left(x\right)=-f\left(x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=-f'\left(x\right).$

$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(x\right)>0$ và $g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow f'\left(x\right)<0.$

Theo bảng biến thiên ta có trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)$ thì $f'\left(x\right)>0$ và $\left(-1;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ thì $f'\left(x\right)<0.$

Vậy đáp án đúng là: C.

Câu 10.25. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=-f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-1;1\right).$ **B.** $\left(-2;1\right).$ **C.** $\left(1;2\right).$ **D.** $\left(0;1\right).$

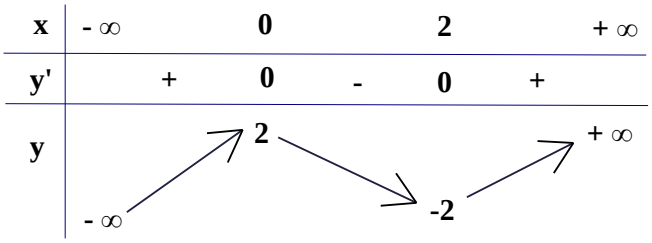
Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=-f\left(x\right)$ nghịch biến trên $K\Leftrightarrow$ hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên K .

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Câu 10.26. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có bảng biến thiên như sau:



Khi đó hàm số $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

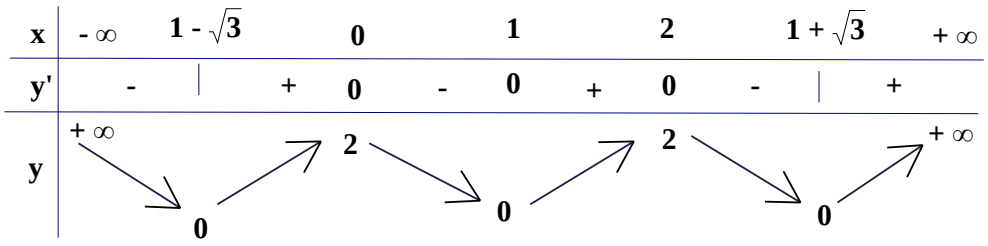
A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^3-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

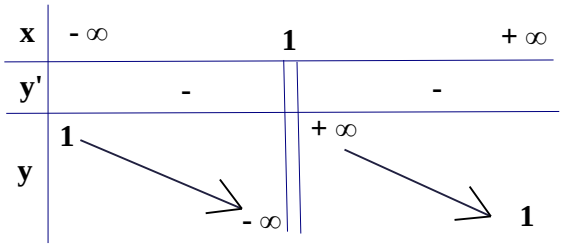
Nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$ như sau:



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến thên các khoảng $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right);\ (0;1);\ \left(2;1+\sqrt{3}\right)$.

Vậy đáp án **C** đúng.

Câu 10.27. Cho hàm số y = f(x) xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Khi đó hàm số $y=\left|f(x)\right|$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

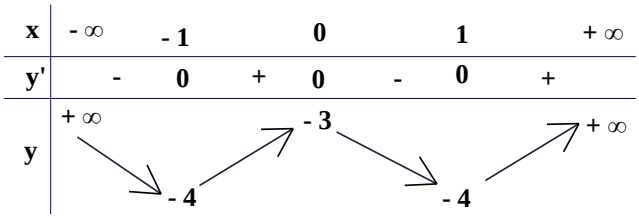
Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta suy ra, hàm số $y=\left|f(x)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 10.28. Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên như sau:



Chọn phát biểu sai trong các phát biểu sau về hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$?

A. Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên các khoảng $\left(0;1\right)$.

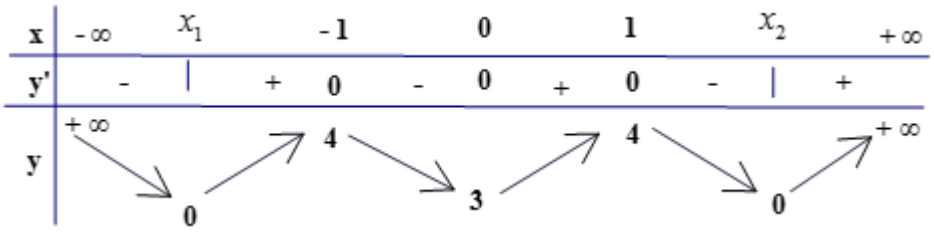
C. Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$

D. Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

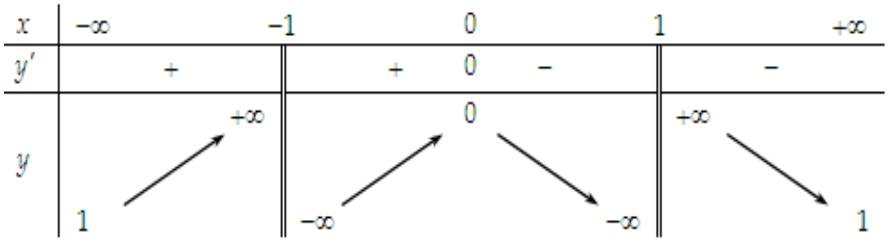
Chọn C

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là:



Từ bảng biến thiên của hàm số , suy ra phát biểu C là sai.

Câu 10.29. Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề sai?

i) Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(0;1\right)$.

ii) Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

iii) Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

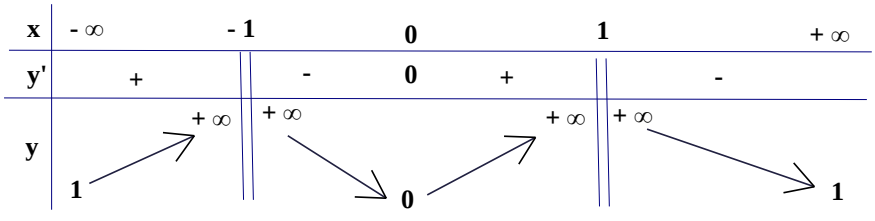
iv) Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên của hàm số y = f(x), ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:

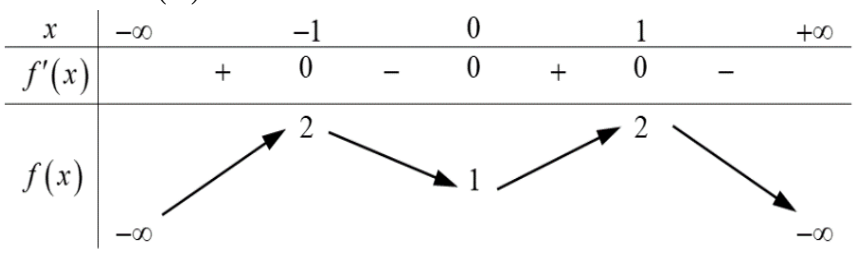


Từ bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, ta suy ra:

- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$ suy ra khẳng định i) đúng
- Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$ suy ra khẳng định ii) đúng
- Khẳng định iii) và khẳng định iv) sai

Vậy có 2 khẳng định sai trong 4 khẳng định trên. Vậy chọn đáp án B.

Câu 10.30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:



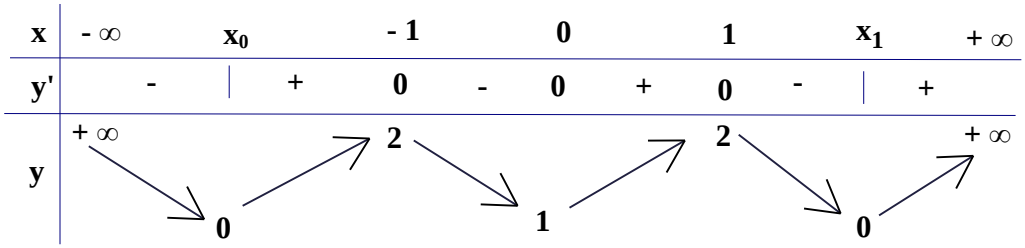
Số các khoảng nghịch biến của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là:



(trong đó x_0, x_1 là nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$).

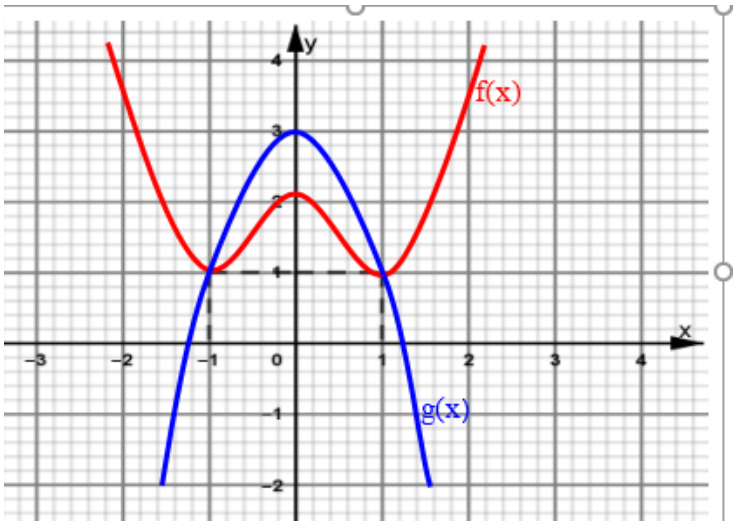
Từ bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$, suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;x_0\right)$, $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;x_1\right)$ hay hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên 3 khoảng. Vậy chọn đáp án C.

Dạng 4:

Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f\left(x\right), g(x)$**, xét tính đơn điệu của hàm số**

$y=f\left(x\right)+g(x),\ y=f\left(x\right).g(x)$

Câu 10.31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

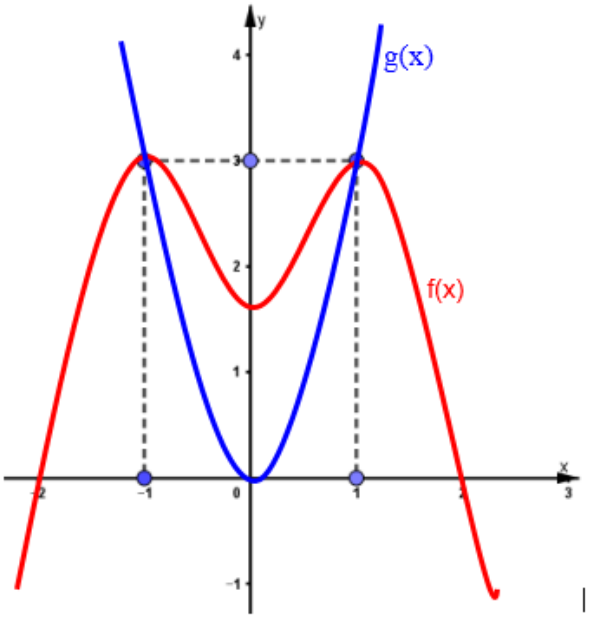
Ta có

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $(0;1)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên đoạn $(0;1)$

$\Rightarrow y=f(x)+g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 10.32. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(x)+g(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

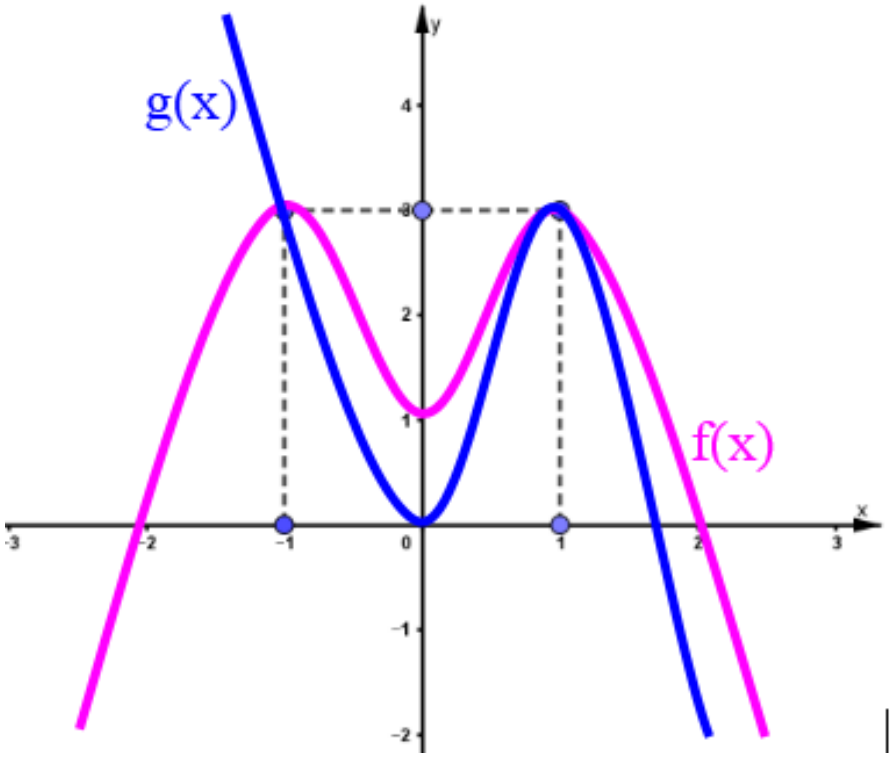
Ta có

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $(0;1)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên đoạn $(0;1)$

$\Rightarrow y=f(x)+g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 10.33. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(x).g(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

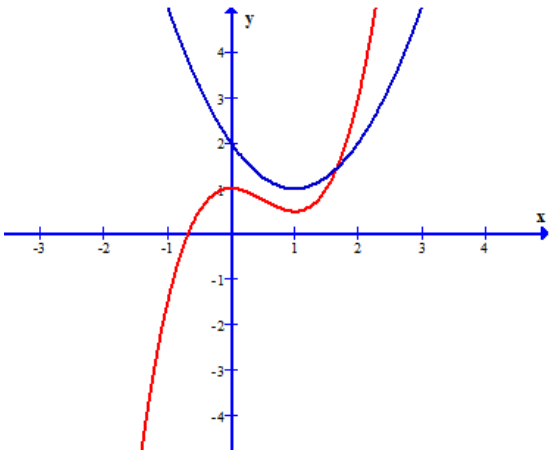
Ta có

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến và $f(x)\geq 0$ trên đoạn $(0;1)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến và $g(x)\geq 0$ trên đoạn $(0;1)$.

$\Rightarrow y=f(x).g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 10.34. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=f(x)+g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây:

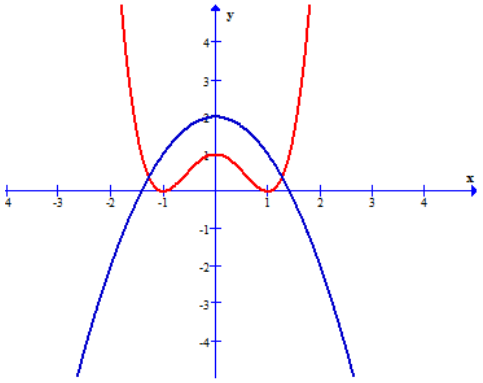
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x)$ và $g(x)$ đều nghịch biến trên $(0;1)$ nên $y=f(x)+g(x)$ cũng nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 10.35. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=2f(x)+g(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây:

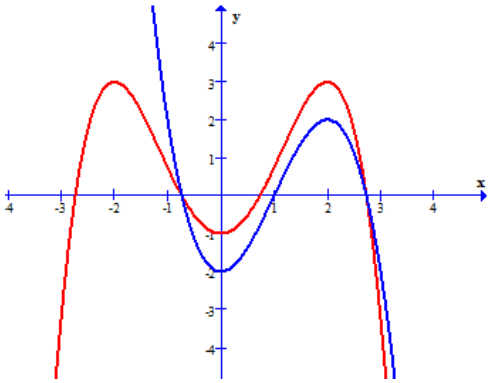
A. $(-1;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ và $g(x)$ đều đồng biến trên $(-1;0)$ nên $y=2f(x)+g(x)$ cũng đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 10.36. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=4f(x)+3g(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

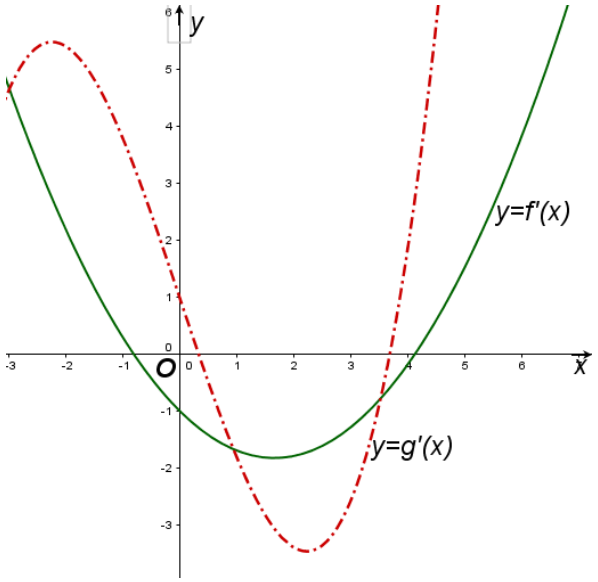
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ và $g(x)$ đều nghịch biến trên $(2;+\infty)$ nên $y=4f(x)+3g(x)$ cũng nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 10.37. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ được cho như hình bên dưới.



Khi đó hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

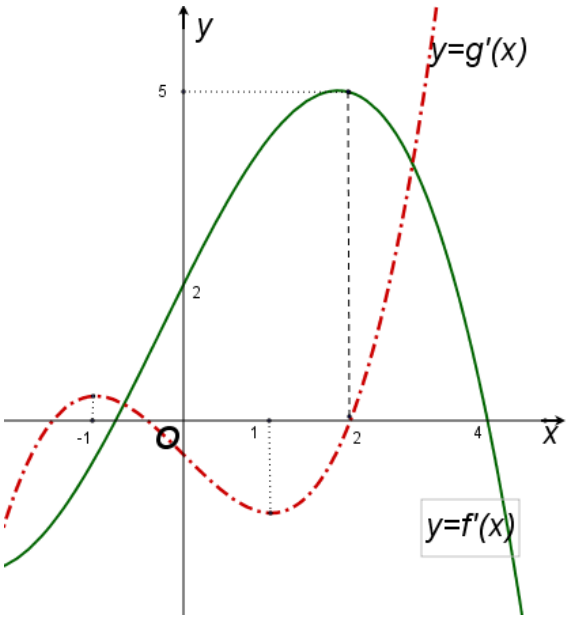
Chọn C

Ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

Trong các khoảng $(-3;-2),(-2;1)$ và $(4;+\infty)$: Đường cong $y=f'(x)$ nằm bên dưới đường cong $y=g'(x)$ nên $h'(x)<0$ do đó hàm số $h(x)$ nghịch biến

Trong khoảng $(2;3)$: Đường cong $y=f'(x)$ nằm bên trên đường cong $y=g'(x)$ nên $h'(x)>0$ do đó hàm số $h(x)$ đồng biến. Ta chọn phương án này

Câu 10.38. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ được cho như hình bên dưới.



Khi đó hàm số $h(x)=2f(x)-3g(x)-4x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

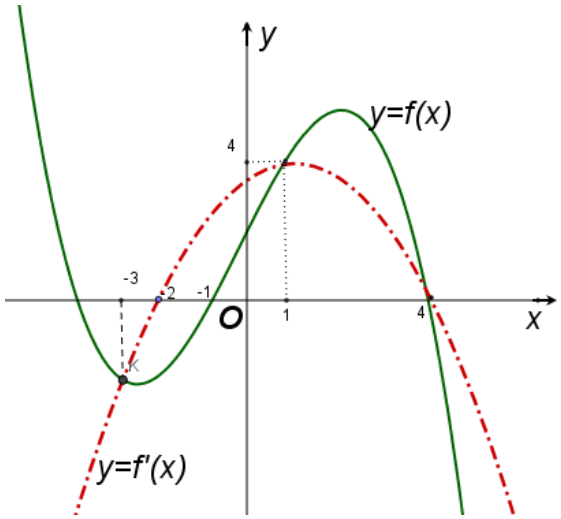
Ta có: $h'(x)=2f'(x)-3g'(x)-4=2\left[f'(x)-2\right]-3g'(x)$

Ta nhận thấy rằng, không thể xác định dấu của $h'(x)$ trong các khoảng: $(-1;1)$, $(1;4)$ và $(2;+\infty)$

Chỉ trong khoảng $(0;2)$ ta có $f'(x)>2$ và $g'(x)<0$

Nên : $h'(x)=2\left[f'(x)-2\right]-3g'(x)>0$ suy ra $h(x)$ đồng biến trên $(0;2)$. Ta chọn phương án B

Câu 10.39. Cho hai hàm số $f(x)$. Đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới.



Khi đó hàm số $g(x)=xf(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=xf'(x)+f(x)$.

Trên khoảng: $(-3;-2)$ ta có $x<0$, $f'(x)<0$ và $f(x)<0$ nên $x.f'(x)>0$, không thể xác định dấu $g'(x)=xf'(x)+f(x)$.

Trên khoảng: $(-1;0)$ ta có $x<0$, $f'(x)>0$ và $f(x)>0$ nên $x.f'(x)<0$, không thể xác định dấu $g'(x)=xf'(x)+f(x)$.

Trên khoảng: $(1;4)$ ta có $x>0$, $f'(x)>0$ và $f(x)>0$ nên $g'(x)>0$ suy ra hàm $g(x)$ đồng biến trên khoảng này.

Trên khoảng: $(-2;-1)$ ta có $x<0$, $f'(x)>0$ và $f(x)<0$ nên $x.f'(x)<0$, suy ra : $g'(x)<0$

Do đó hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng này. Chọn phương án B.

DẠNG TOÁN 11: RÚT GỌN BIỂU THỨC LÔGARIT ĐƠN GIẢN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$

2. Các tính chất: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b,\ \log_a (a^{\alpha}) = \alpha$

3. Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a (b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

4. Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$
- Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

5. Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có

- $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$
- Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

6. Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- Đặc biệt : $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

✍ **Lôgarit thập phân** và **Lôgarit tự nhiên**

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tính giá trị biểu thức chứa lôgarit .
- Các mệnh đề liên quan đến lôgarit
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Với a là số thực đương tùy ý, $\log_2 \left(a^3\right)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}\log_2 a..$ **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a..$ **C.** $3+\log_2 a..$ **D.** $3\log_2 a..$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán lý thuyết về logarit.

Phương pháp

- Áp dụng công thức $\log_b a^\alpha = \alpha \log_b a.$

……

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

◆ Công thức logarit của luỹ thừa: $\log_b a^\alpha = \alpha \log_b a.$

……

3. HƯỚNG GIẢI:

- B1: Áp dụng công thức $\log_b a^\alpha = \alpha \log_b a.$

- B2: $\log_2\left(a^3\right) = 3\log_2 a$.

Từ đó ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\log_b a^\alpha = \alpha \log_b a.$

Do đó $\log_2\left(a^3\right) = 3\log_2 a$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Nếu $\log 4 = a$ thì $\log 4000$ bằng

A. $3+a$. **B.** $4+a$. **C.** $3+2a$. **D.** $4+2a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log 4000 = \log\left(4.10^3\right) = \log 4 + \log 10^3 = \log 4 + 3 = a + 3.$

Câu 2. Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. $\ln(ab)^2 = \ln\left(a^2\right) + \ln\left(b^2\right)$. **B.** $\ln\left(\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|.$ **D.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln\left(a^2\right) - \ln\left(b^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Phương án B sai vì $\ln a, \ln b$ không xác định khi $a<b<0$.

Câu 3. Với các số thực dương x, y bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

B. $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$.

C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right)=2\log_2 x-\log_2 y$.

D. $\log_2(xy)=\log_2 x.\log_2 y$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right)=\log_2 x^2-\log_2 y=2\log_2 x-\log_2 y$.

Câu 4. Với $a,\ b,\ c>0,\ a\neq 1,\ \alpha\neq 0$ bất kỳ. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

B. $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$.

C. $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b$.

D. $\log_a b.\log_c a=\log_c b$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào công thức đổi cơ số $\log_{a^\alpha} b=\frac{1}{\alpha}\log_a b$.

Câu 5. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

B. $\ln(ab)=\ln a.\ln b$.

C. $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

D. $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

Lời giải

Chọn A

Chọn đáp án A vì đây là tính chất của logarit.

Câu 6. Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$.

B. $\log_2\sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\log_2 x+\log_2 y)$.

C. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$.

D. $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$.

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x+\log_2 y=\log_2(xy)$.

Câu7. Cho $a>0,\ a\neq 1,$ khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a a^2=2$.

B. $\log_{a^2} a=\frac{1}{2}$.

C. $\log_a 2a=2$.

D. $\log_a 2a=1+\log_a 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a = \log_a 2 + 1$.

Câu 8. Với $a;b$ là các số thực dương và $m;n$ là các số nguyên, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $a^m.a^n = a^{m+n}$. **B.** $\log a + \log b = \log(a.b)$.

C. $\log a - \log b = \dfrac{\log a}{\log b}$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Lời giải

Chọn C

Đáp án C sai vì $\log a - \log b = \log \dfrac{a}{b}$.

Câu 9. Cho a là số dương khác 1, b là số dương và α là số thực bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a b^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b.$ **B.** $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$

C. $\log_{a^\alpha} b = -\alpha \log_a b.$ **D.** $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b.$

Lời giải

Chọn B

Câu 10. Với các số thực dương a,b bất kì. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log(ab) = \log(a+b)$. **B.** $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_b(a)$.

C. $\log(ab) = \log a + \log b$. **D.** $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a-b)$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa ta có công thức $\log(ab) = \log a + \log b$ và $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

Mức độ 2

Câu 1. Cho a,b là các số hữu tỉ thỏa mãn: $\log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt{2} = a\log_2 3 + b\log_2 5$. Tính $a+b$.

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt[6]{8} = \log_2 \sqrt[6]{\dfrac{360}{8}} = \dfrac{1}{6}\log_2 45 = \dfrac{1}{3}\log_2 3 + \dfrac{1}{6}\log_2 5$

Theo đề ta có $\log_2 \sqrt[6]{360} - \log_2 \sqrt{2} = a\log_2 3 + b\log_2 5 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow a+b = \dfrac{1}{2}$

Câu 2. Cho các số dương a,b thỏa mãn $4a^2 + 9b^2 = 13ab$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\log\left(\dfrac{2a+3b}{5}\right) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\dfrac{1}{4}\log(2a+3b) = 3\log a + 2\log b$.

C. $\log\sqrt{2a+3b}=\log\sqrt{a}+2\log\sqrt{b}$. **D.** $\log\left(\frac{2a+3b}{4}\right)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4a^2+9b^2=13ab\Leftrightarrow(2a+3b)^2=25ab\Rightarrow 2a+3b=5\sqrt{ab}$.

Lấy logarit thập phân $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)=\log\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

Câu 3. Cho $a>0;b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $\log\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ **B.** $2(\log a+\log b)=\log(14ab)$

C. $\log(a+b)=2(\log a+\log b)$ **D.** $\log(a+b)-4=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

Lời giải

Chọn A

Phân tích: Ta nhận thấy nếu lấy loga hai vế luôn thì $\log(a^2+b^2)$ sẽ khó phân tích ra bởi không có công thức $\log(x+y)$. Do vậy, nhìn vào các phương án nhận thấy B là phương án lừa để ta chọn, tuy nhiên không có công thức biến đổi vế trái như vậy. Nên, để có thể biến đổi được vế trái ta đưa về dạng $pt\Leftrightarrow(a+b)^2-2ab=14ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab$.

Lời giải

$pt\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{16}=ab$.

Lấy logarit hai vế ta được $\log\frac{(a+b)^2}{16}=\log(ab)$

$\Leftrightarrow 2\log\frac{a+b}{4}=\log a+\log b\Leftrightarrow\log\frac{a+b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

Câu 4. Cho hai số thực dương a và b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$. **B.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$. **D.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Với $a,\ b>0$ và $a\neq 1$, ta có

$\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=\frac{1}{2}(1+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

Câu 5. Cho $a,b>0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^{\ln b}=b^{\ln a}$. **B.** $\ln^2(ab)=\ln a^2+\ln b^2$.

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt{b})$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\ln a.\ln b = \ln b.\ln a \Leftrightarrow \ln\left(b^{\ln a}\right) = \ln\left(a^{\ln b}\right) \Leftrightarrow b^{\ln a} = a^{\ln b}$.

Câu 6. Cho a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$.

B. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}$.

C. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{c}{d}$.

D. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d}{c}$.

Lời giải

Chọn B

$a^c = b^d \Leftrightarrow c\ln a = d\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}$.

Câu 7. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

B. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

D. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = \log_2\left(2a^3\right) - \log_2(b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

Câu 8. Với mọi số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng?**

A. $\log_{\frac{3}{4}} a < \log_{\frac{3}{4}} b \Leftrightarrow a < b$.

B. $\log_2(a^2 + b^2) = 2\log(a+b)$.

C. $\log_{a^2+1} a \geq \log_{a^2+1} b \Leftrightarrow a \geq b$.

D. $\log_2 a^2 = \frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Do $a^2 + 1 > 1 \Rightarrow \log_{a^2+1} a \geq \log_{a^2+1} b \Leftrightarrow a \geq b$

Câu 9. Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = m$, tính theo m giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $\frac{4m^2 - 3}{2m}$.

B. $\frac{m^2 - 12}{2m}$.

C. $\frac{m^2 - 12}{m}$.

D. $\frac{m^2 - 3}{2m}$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: $m \neq 0$. Từ $\log_a b = m \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{m}$.

$$P=\log_{a^2} b-\log_{\sqrt{b}} a^3=\frac{1}{2}\log_a b-\frac{3}{\frac{1}{2}}\log_b a=\frac{1}{2}\log_a b-6\log_b a=\frac{1}{2}m-\frac{6}{m}=\frac{m^2-12}{2m}.$$

Câu 10. Cho $a=\log_2 m$ với $0<m\neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m=\frac{3+a}{a}$. **B.** $\log_m 8m=(3-a)a$. **C.** $\log_m 8m=\frac{3-a}{a}$. **D.** $\log_m 8m=(3+a)a$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_m 8m=\log_m m+\log_m 8=1+\log_m 2^3=1+3\log_m 2=1+\frac{3}{a}=\frac{3+a}{a}.$$

Mức độ 3

Câu 1. Kết quả rút gọn của biểu thức $C=\sqrt{\log_a b+\log_b a+2}\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\sqrt{\log_a b}$ là:

A. $\sqrt[3]{\log_a b}$. **B.** $\sqrt{\log_a b}$. **C.** $\log_a^2 b$. **D.** $\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

$$C=\sqrt{\log_a b+\log_b a+2}\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\sqrt{\log_a b}$$

$$=\sqrt{\frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}}\left(\log_a b-\frac{\log_a b}{1+\log_a b}\right)\sqrt{\log_a b}=\frac{(\log_a b+1)}{\sqrt{\log_a b}}\left(\frac{\log_a^2 b}{1+\log_a b}\right)\sqrt{\log_a b}=\log_a^2 b$$

Câu 2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x=10^{\frac{-1}{1-\log z}}$. **B.** $x=10^{\frac{1}{1-\ln z}}$. **C.** $x=10^{\frac{1}{1+\log z}}$. **D.** $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

Lời giải

Chọn D

$$y=10^{\frac{1}{1-\log x}}\Rightarrow \log y=\frac{1}{1-\log x};\ z=10^{\frac{1}{1-\log y}}\Rightarrow \log y=1-\frac{1}{\log z}$$

Suy ra $\frac{1}{1-\log x}=1-\frac{1}{\log z}\Rightarrow \log x=\frac{1}{1-\log z}\Rightarrow x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $A=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$ ta được kết quả là:

A. $\frac{1}{\log_b a}$ **B.** $-\log_b a$ **C.** $\log_b a$ **D.** $\frac{\log_b a}{3}$

Lời giải

Chọn A

$$A=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$$

$$=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$$

$$=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(1-\log_{ab} b\log_b a\right)-1=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(1-\log_{ab} a\right)-1$$

$$=\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+2\right)\left(1-\frac{1}{1+\log_a b}\right)-1=\left(\frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}\right)\left(\frac{\log_a b}{1+\log_a b}\right)-1$$

$=1+\log_a b-1=\log_a b$

Câu 4. Gọi c là cạnh huyền, a,b là hai cạnh góc vuông của môt tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **B.** $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a>2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

C. $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a<2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **D.** $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết, ta có: $a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow a^2=c^2-b^2\Leftrightarrow a^2=(c-b)(c+b)$

$\Leftrightarrow \log_a(c-b)+\log_a(c+b)=2\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_{c-b} a}+\dfrac{1}{\log_{c+b} a}=2$

$\Leftrightarrow \log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ (đpcm).

Câu 5. Tính: $C=\log_5\log_5\sqrt[5]{5\sqrt[5]{5\sqrt[5]{...\sqrt[5]{5}}}}$ (n dấu căn)

A. $-n$. **B.** $3n$. **C.** $-3n$. **D.** $2n$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt[5]{5\sqrt[5]{5\sqrt[5]{...\sqrt[5]{5}}}}=5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}\Rightarrow C=\log_5\left[\log_5 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right]=\log_5\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=-n.$

Câu 6. Với mọi số tự nhiên n, Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $n=\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ c\breve{}n\ b\ddot{E}c\ hai}$. **B.** $n=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ c\breve{}n\ b\ddot{E}c\ hai}$.

C. $n=2+\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ b\ddot{E}c\ hai}$. **D.** $n=2-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ b\ddot{E}c\ hai}$.

Lời giải

Chọn B

+Tự luận:

Đặt $-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ c\breve{}n\ b\ddot{E}c\ hai}=m.$ Ta có: $\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}=2^{-m}\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}=2^{2^{-m}}$.

Ta thấy: $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\sqrt{\sqrt{2}}=2^{\left(\frac{1}{2}\right)^2},.....,\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}=2^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2^{2^{-n}}$.

Do đó ta được: $2^{-m}=2^{-n}\Leftrightarrow m=n$. Vậy $n=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ c\breve{}n\ b\ddot{E}c\ hai}$.

+**Trắc nghiệm**: Sử dụng máy tính Casio, lấy n bất kì, chẳng hạn $n=3$.

Nhập biểu thức $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{2}}$ (có 3 dấu căn) vào máy tính ta thu được kết quả bằng – 3.

Câu 7. Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\log_2 a\Rightarrow a=2^x;\ y=\log_2 b\Rightarrow b=2^y$.

Ta có $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}x+y=5\\ x+\frac{1}{3}y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=15\\ 3x+y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}$. Suy ra $ab=2^{x+y}=2^9$.

Câu 8. Giả sử p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ **D.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Lời giải

Chọn D

Đặt: $t=\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$ thì: $p=9^t,\ q=12^t,\ 16^t=p+q=9^t+12^t$ (1)

Chia hai vế của (1) cho 9^t ta được: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}=1+\left(\frac{4}{3}\right)^t$, đặt $x=\left(\frac{4}{3}\right)^t=\frac{q}{p}>0$ đưa về phương trình:

$x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ do $x>0$, suy ra $\frac{q}{p}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Câu 9. Cho $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=5$, với *a, b* và c là các số hữu tỷ. các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $a=b$. **B.** $a>b$. **C.** $b>a$. **D.** $c>a>b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a\log_6 3+b\log_6 2+c\log_6 5=5$

$\Leftrightarrow\log_6(3^a2^b5^c)=5\Leftrightarrow 3^a2^b5^c=6^5=3^5.2^5.5^0$

Do a,b,c là các số hữu tỉ nên $a=b=5$ và $c=0$.

Câu10 . Cho $n>1$ là một số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}$ bằng

A. 0. **B.** *n*. **C.** *n*!. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Vì $n>1, n\in\mathbb{Z}$ nên

$\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\frac{1}{\log_4 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\log_{n!}4+...+\log_{n!}n$

$=\log_{n!}(2.3.4...n)=\log_{n!}n!=1$

↳ Mức độ 4

Câu 1. Cho a,b,x là các số dương, khác 1 và thỏa mãn $4\log_a^2 x+3\log_b^2 x=8\log_a x.\log_b x$ (1).

Mệnh đề (1) tương đương với mệnh đề nào sau đây?

A. $a^3=b^2$. **B.** $x=ab$. **C.** $a=b^2$. **D.** $a=b^2$ hoặc $a^3=b^2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $m=\log_a x, n=\log_b x$, vì $x\neq 1$ nên $m\neq 0, n\neq 0$.

Khi đó $4\log_a^2 x+3\log_b^2 x=8\log_a x.\log_b x$ trở thành $4m^2+3n^2=8mn\Leftrightarrow 4\left(\frac{m}{n}\right)^2-8\frac{m}{n}+3=0$.

Giải được $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ hoặc $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$.

Với $2m=n\Leftrightarrow \log_a x=\frac{1}{2}\log_b x\Leftrightarrow a=b^2$

Với $\frac{1}{3}m=\frac{1}{2}n\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_a x=\frac{1}{2}\log_b x\Leftrightarrow a^3=b^2$.

Câu 2. Cho a,b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông, trong đó $c-b\neq 1$ và $c+b\neq 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **B.** $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=-2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.

C. $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **D.** $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=-\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$a^2+b^2=c^2\Rightarrow a^2=c^2-b^2$

$\Rightarrow \log_{c+b} a+\log_{c-b} a=\log_{c+b} a+\frac{\log_{c+b} a}{\log_{c+b}(c-b)}=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b}(c-b)+1}{\log_{c+b}(c-b)}\right)$

$=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b}(c^2-b^2)}{\log_{c+b}(c-b)}\right)=\log_{c+b} a\left(\frac{\log_{c+b} a^2}{\log_{c+b}(c-b)}\right)=2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$

Câu 3. Có tất cả bao nhiêu số dương a thỏa mãn đẳng thức $\log_2 a+\log_3 a+\log_5 a=\log_2 a.\log_3 a.\log_5 a$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$(*)\Leftrightarrow \log_2 a+\log_3 2.\log_2 a+\log_5 2.\log_2 a=\log_2 a.\log_3 5.\log_5 a.\log_5 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1+\log_3 2+\log_5 2\right)=\log_2 a.\log_3 5.\log_5^2 a$

$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 a=0\\ 1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 a=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ \log_5 a=\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}\end{array}\right.$

Câu 4. Gọi $(x;y)$ là nghiệm nguyên của phương trình $2x+y=3$ sao cho $P=x+y$ là số dương nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_2 x+\log_3 y$ không xác định. **B.** $\log_2(x+y)=1$.

C. $\log_2(x+y)>1$. **D.** $\log_2(x+y)>0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $x+y>0$ nên trong hai số x và y phải có ít nhất một số dương mà $x+y=3-x>0$ nên suy ra $x<3$ mà x nguyên nên $x=0;\pm1;\pm2;...$

+ Nếu $x=2$ suy ra $y=-1$ nên $x+y=1$

+ Nếu $x=1$ thì $y=1$ nên $x+y=2$

+ Nếu $x=0$ thì $y=3$ nên $x+y=3$

+ Nhận xét rằng: $x<2$ thì $x+y>1$. Vậy $x+y$ nhỏ nhất bằng 1.

Câu 5. Cho $\dfrac{\log a}{p}=\dfrac{\log b}{q}=\dfrac{\log c}{r}=\log x\neq 0;\ \dfrac{b^2}{ac}=x^y$. Tính y theo p,q,r.

A. $y=q^2-pr$. **B.** $y=\dfrac{p+r}{2q}$. **C.** $y=2q-p-r$. **D.** $y=2q-pr$.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{b^2}{ac}=x^y\Leftrightarrow\log\frac{b^2}{ac}=\log x^y$$

$$\Rightarrow y\log x=2\log b-\log a-\log c=2q\log x-p\log x-r\log x$$

$$=\log x(2q-p-r)$$

$\Rightarrow y=2q-p-r$ (do $\log x\neq 0$).

Câu 6. Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{54}168=\dfrac{\log_7(24.7)}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 24+1}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 54}$

$$=\frac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 12\log_{12}54}=\frac{xy+1}{x.\log_{12}54}$$

Tính $\log_{12}54=\log_{12}(27.2)=3\log_{12}3+\log_{12}2=3\log_{12}\dfrac{3.2.12.24}{2.12.24}+\log_{12}\dfrac{24}{12}$.

$$=3\log_{12}\frac{12^3}{24^2}+\log_{12}\frac{24}{12}=3(3-2\log_{12}24)+(\log_{12}24-1)=8-5\log_{12}24=8-5y.$$

Do đó: $\log_{54}168=\dfrac{xy+1}{x(8-5y)}=\dfrac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow S=a+2b+3c=15.$
$c=8$

Câu 7. Với $a>0, a\neq 1$, cho biết: $t=a^{\frac{1}{1-\log_a u}}; v=a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $u=a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$. **B.** $u=a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$. **C.** $u=a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$. **D.** $u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra: $\log_a t=\frac{1}{1-\log_a u}.\log_a a=\frac{1}{1-\log_a u}$

$$\log_a v=\frac{1}{1-\log_a t}.\log_a a=\frac{1}{1-\log_a t}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\log_a u}}=\frac{1-\log_a u}{-\log_a u}$$

$$\Leftrightarrow -\log_a v\log_a u=1-\log_a u \Leftrightarrow \log_a u\left(1-\log_a v\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_a u=\frac{1}{1-\log_a v} \Leftrightarrow u=a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$$

Câu 8. Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}} 2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}} 2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}} 2019=1008^2\times 2017^2\log_a 2019$$

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

$$\log_a 2019+2^2\log_{\sqrt{a}} 2019+3^2\log_{\sqrt[3]{a}} 2019+...+n^2\log_{\sqrt[n]{a}} 2019=1008^2\times 2017^2\log_a 2019 \ (*)$$

Ta có $n^2\log_{\sqrt[n]{a}} 2019=n^2.n.\log_a 2019=n^3\log_a 2019$. Suy ra

$$\text{VT }(*)=\left(1^3+2^3+...+n^3\right).\log_a 2019=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.\log_a 2019$$

VP $(*)=1008^2\times 2017^2\log_a 2019$. Khi đó $(*)$ được:

$$n^2(n+1)^2=2^2.1008^2.2017^2=2016^2.2017^2 \Rightarrow n=2016.$$

Câu 9. Cho hai số a, b dương thỏa mãn điều kiện: $a-b=\frac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}$. Tính $P=2017^a-2017^b$.

A. 0. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $a-b=\frac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b} \longleftrightarrow \left(a-b\right)\left(2^a+2^b\right)=a.2^b-b.2^a$.

$$\longleftrightarrow a.2^a+a.2^b-b.2^a-b.2^b=a.2^b-b.2^a \Leftrightarrow a.2^a=b.2^b. \ (*)$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x.2^x$ với $x>0$, có $f'\left(x\right)=2^x+x.2^x.\ln 2=2^x\left(1+x.\ln 2\right)>0; \forall x>0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Nhận thấy $(*) \Leftrightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow a=b.$

Khi $a=b$ thì $2017^a-2017^b=2017^a-2017^a=0$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}} x$ và $y=\log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a.

A. $a=\sqrt{3}$. **B.** $a=\sqrt[3]{6}$. **C.** $a=\sqrt{6}$ **D.** $a=\sqrt[6]{3}$.

Lời giải

Chọn D

Do $AB \parallel Ox \Rightarrow A$, B nằm trên đường thẳng $y=m$ $(m\neq 0)$.

Lại có A, B lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_{\sqrt{a}} x$.

Từ đó suy ra $A\left(a^m;m\right)$, $B\left(a^{\frac{m}{2}};m\right)$.

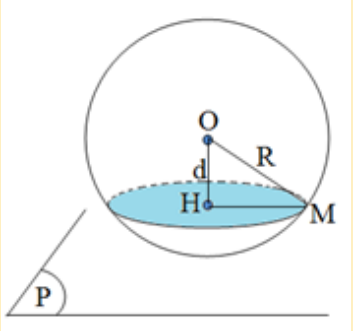
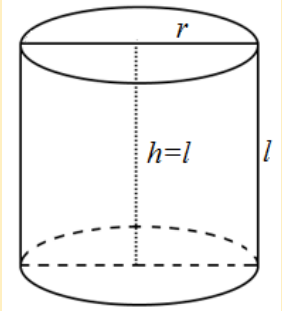
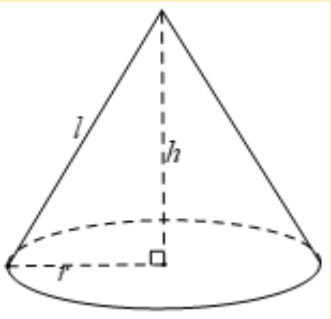
Vì $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $x_C=x_B=a^{\frac{m}{2}}$. Lại có C nằm trên đồ thị hàm số $y=\log_{\sqrt[3]{a}} x$, suy ra $C\left(a^{\frac{m}{2}};\frac{3m}{2}\right)$.

Theo đề bài $S_{ABCD}=36 \Rightarrow \begin{cases} AB=6 \\ BC=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|a^m-a^{\frac{m}{2}}\right|=6 \\ \left|\frac{3m}{2}-m\right|=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=-12 \\ a=\sqrt[6]{\frac{1}{3}}<1 (\text{loại}) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m=12 \\ a=\sqrt[6]{3}. \end{cases}$

DẠNG TOÁN 12: KHỐI NÓN-TRỤ-CẦU
(CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH HÌNH TRỤ)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Khối tròn xoay	Cầu	Trụ	Nón
			
Diện tích	$S = 4\pi R^2$	$S_{xq} = 2\pi rh$ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$	$S_{xq} = \pi rl$ (l đường sinh, r bkính) $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$
Thể tích	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ **(h : đường cao)**

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Lý thuyết về công thức tính diện tích xung quanh hình trụ.
- Tính diện tích xung quanh hình trụ khi biết một số yếu tố cho trước.
- Tính diện tích toàn phần hình trụ khi biết một số yếu tố cho trước.
- Tính diện tích xung quanh hình trụ khi quay hình chữ nhật quanh một cạnh của nó.
- Tính diện tích xung quanh hình trụ và diện tích toàn phần liên quan đến thiết diện qua trục của nó.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Diện tích xung quanh của một hình trụ có độ dài đường sinh l, bán kính đáy r bằng

A. $4\pi rl$. **B.** πrl. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $2\pi rl$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán lý thuyết về công thức diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của một hình trụ.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định các yếu tố đã biết của hình trụ như độ dài đường sinh, bán kính đáy.

B2: Áp dụng công thức diện tích xung quanh (diện tích toàn phần) của hình trụ:

$$S_{xq} = 2\pi rl,\ S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2.$$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của một hình trụ có độ dài đường sinh l, bán kính đáy r là: $S_{xq}=2\pi rl$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

A. 50 m^2. **B.** $50\pi\text{ m}^2$. **C.** $100\pi\text{ m}^2$. **D.** 100 m^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có chu vi đáy $C=2\pi R=5$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rl=5.20=100\text{ m}^2$.

Câu 2. Diện tích xung quanh của mặt trụ có bán kính đáy R chiều cao h là

A. $S_{xq}=\pi Rh$. **B.** $S_{xq}=3\pi Rh$. **C.** $S_{xq}=4\pi Rh$. **D.** $S_{xq}=2\pi Rh$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy R là: $S_{xq}=2\pi Rh$.

Câu 3. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$, chiều cao $h=7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S=35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=\frac{70}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=\frac{35}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức tính diện tích xung quanh ta có $S_{xq}=2\pi rh=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 4. Cho hình trụ tròn xoay có độ dài đường cao là h và r là bán kính đáy. Công thức diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay là

A. $S_{xq}=\pi rl$. **B.** $S_{xq}=\pi r^2h$. **C.** $S_{xq}=\pi rh$. **D.** $S_{xq}=2\pi rh$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy r là: $S_{xq}=2\pi rh$.

Câu 5. Tính diện tích xung quanh S của hình trụ có bán kính bằng 3 và chiều cao bằng 4.

A. $S=12\pi$. **B.** $S=42\pi$. **C.** $S=36\pi$. **D.** $S=24\pi$.

Lời giải:

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ $S=2\pi rh=24\pi$.

Câu 6. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r=50\text{cm}$ và có chiều cao $h=50\text{cm}$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. $2500\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $5000\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $2500\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $5000\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải:

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.50.50=5000\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 7. Cho hình trụ có bán kính đáy $r=5\left(\text{cm}\right)$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng $7\left(\text{cm}\right)$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $35\pi\left(\text{cm}^2\right)$ **B.** $70\pi\left(\text{cm}^2\right)$ **C.** $120\pi\left(\text{cm}^2\right)$ **D.** $60\pi\left(\text{cm}^2\right)$

Lời giải:

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq}=2\pi rh=2\pi5.7=70\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 8. Gọi $l,\ h,\ R$ lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình trụ $\left(T\right)$. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ là

A. $S_{tp}=2\pi Rl+2\pi R^2$. **B.** $S_{tp}=\pi Rl+2\pi R^2$. **C.** $S_{tp}=\pi Rl+\pi R^2$. **D.** $S_{tp}=\pi Rh+\pi R^2$.

Lời giải:

Chọn A

Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ là $S_{tp}=2\pi Rl+2\pi R^2$.

Câu 9. Một hình trụ có bán kính đáy $r=5\text{cm}$, chiều cao $h=7\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $S=35\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $S=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $S=\frac{70}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $S=\frac{35}{3}\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải:

Chọn B

Theo công thức tính diện tích xung quanh ta có $S_{xq}=2\pi rh=70\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 10. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r=50\text{cm}$ và có chiều cao $h=50\text{cm}$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng

A. $2500\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $5000\pi\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $2500\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $5000\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải:

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.50.50=5000\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Mức độ 2

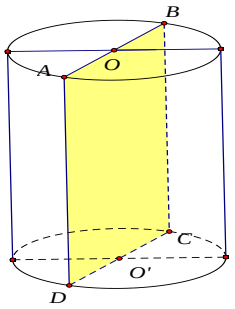
Câu 1. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có

cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối trụ.

A. $S_{tp}=\dfrac{27\pi a^2}{2}$. **B.** $S_{tp}=\dfrac{13a^2\pi}{6}$. **C.** $S_{tp}=a^2\pi\sqrt{3}$. **D.** $S_{tp}=\dfrac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Theo đề bài ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$ nên ta có $r=\dfrac{3a}{2}$ và $h=3a$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2+2\pi\dfrac{3a}{2}3a=\dfrac{27\pi a^2}{2}$.

Câu 2. Hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a thì có diện tích xung quanh bằng bao nhiêu?

A. $2\pi a^2$. **B.** $\sqrt{2}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải:

Chọn B

Gọi r là bán kính đường tròn đáy thì $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $l=a$.

Vậy diện tích xung quanh hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rl=2\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a=\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 3. Cho hình trụ có bán kính đáy $5\ cm$ chiều cao $4\ cm$. Diện tích toàn phần của hình trụ này là

A. $96\pi(cm^2)$. **B.** $92\pi(cm^2)$. **C.** $40\pi(cm^2)$. **D.** $90\pi(cm^2)$.

Lời giải

Chọn D

Hình trụ có bán kính đáy $R=5(cm)$ và chiều cao $h=4(cm)$.

Diện tích toàn phần của hình trụ này là: $S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi.25+2\pi.5.4=90\pi(cm^2)$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Diện tích S là

A. πa^2. **B.** $\pi\sqrt{2}a^2$. **C.** $\pi\sqrt{3}a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đường kính hình trụ là độ dài đường chéo của hình vuông $ABCD$.

Ta có bán kính hình trụ $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $S=2\pi Rl=2\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a=\pi a^2\sqrt{2}$.

Dạng 2 : Câu 4 trùng câu 2.

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng 18π. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ.

A. $S_{xq}=18\pi$. **B.** $S_{xq}=36\pi$. **C.** $S_{xq}=12\pi$. **D.** $S_{xq}=6\pi$.

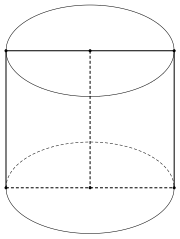
Lời giải.

Chọn C

Ta có $V=\pi r^2h\Rightarrow 18\pi=\pi 3^2h\Rightarrow h=2$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi rh=12\pi$.

Câu 6. Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng



A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $16\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta có bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là a và $2a$.

Do đó, $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.a.2a=4\pi a^2$.

Câu 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng

A. 6π. **B.** 10π. **C.** 8π. **D.** 12π.

Lời giải.

Chọn A

Ta có: thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên: $l=2R$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rl=4\pi\Leftrightarrow 2\pi R.2R=4\pi\Leftrightarrow R=1$.

Diện tích đáy của hình trụ là $S_{đ}=\pi R^2=\pi$.

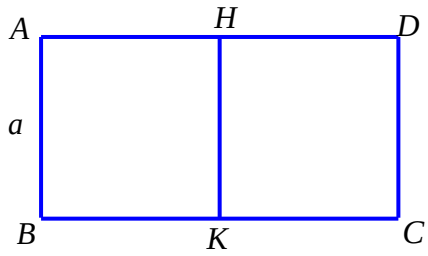
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp}=S_{xq}+2S_{đ}=6\pi$.

Câu 8. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp}=8\pi$. **B.** $S_{tp}=8a^2\pi$. **C.** $S_{tp}=4a^2\pi$. **D.** $S_{tp}=4\pi$.

Lời giải.

Chọn C



Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h = AB = a$, bán kính đường tròn đáy là $R = BK = \frac{1}{2}BC = a$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 9. Một hộp sữa có dạng hình trụ và có thể tích bằng 2825cm^3. Biết chiều cao của hộp sữa bằng 25cm. Diện tích toàn phần của hộp sữa đó gần với số nào sau đây nhất?

A. 1168cm^2. **B.** 1172cm^2. **C.** 1164cm^2. **D.** 1182cm^2.

Lời giải:

Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R. Khi đó theo bài ra ta có:

$$V = 2825 \Leftrightarrow \pi R^2.25 = 2825 \Leftrightarrow R^2 = \frac{113}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{113}{\pi}}.$$

Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi.\sqrt{\frac{113}{\pi}}.25 + 2\pi\left(\sqrt{\frac{113}{\pi}}\right)^2 \approx 1168\text{cm}^2.$$

Câu 10. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

A. $9a^2\pi$. **B.** $\frac{9\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{13\pi a^2}{6}$. **D.** $\frac{27\pi a^2}{2}$.

Lời giải:

Chọn D

Do mặt phẳng cắt hình trụ đi qua trục của nó nên ta có:

Đường sinh $l = 3a$ và bán kính đáy $r = \frac{3a}{2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi r(r + l) = \frac{27\pi a^2}{2}$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 5. Biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục, thiết diện thu được là một tam giác đều. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 100π. **B.** 50π. **C.** 25π. **D.** 200π.

Lời giải:

Chọn B

Hình nón có bán kính đáy bằng 5 thì có đường kính đáy bằng 10.

Vì vậy, khi cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục thì thiết diện thu được là một tam giác đều có cạnh bằng 10.

Suy ra đường sinh của hình nón $l=10$.

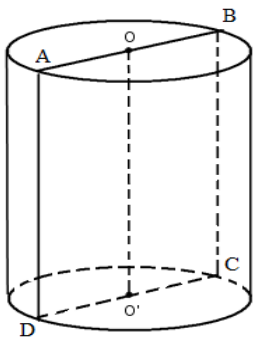
Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho: $S_{xq}=\pi rl=\pi.5.10=50\pi$.

Câu 2. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

A. 96π. **B.** 64π. **C.** 80π. **D.** 48π.

Lời giải

Chọn A



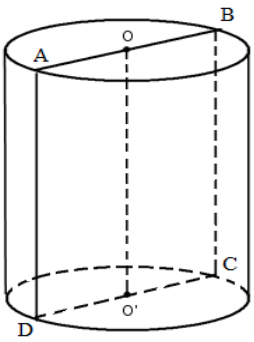
Hình trụ có bán kính đáy bằng 4 thì có đường kính đáy bằng 8.
Vì vậy, khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục thì thiết diện thu được là một hình vuông có cạnh bằng 8. Suy ra đường sinh của hình trụ $l=8$.
Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho: $S_{tp}=S_{xq}+2S_d=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi.4.8+2\pi 4^2=96\pi$.

Câu 3. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 5. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 250π. **B.** 100π. **C.** $\dfrac{250\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{100\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Hình trụ có bán kính đáy bằng 5 thì có đường kính đáy bằng 10.

Vì vậy, khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng đi qua trục thì thiết diện thu được là một hình vuông có cạnh bằng 10.

Suy ra đường sinh cũng là chiều cao của hình trụ $l = h = 10$.

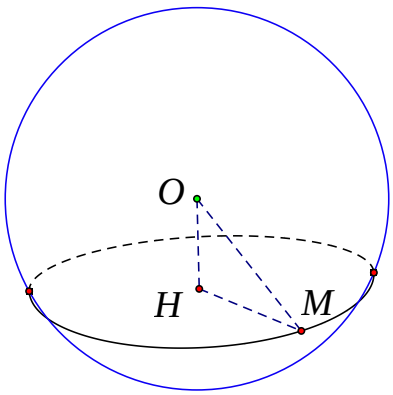
Thể tích của khối trụ đã cho: $V = \pi r^2 h = \pi .5^2 .10 = 250\pi .$

Câu 4. Một khối cầu có đường kính bằng $10(\text{cm})$. Người ta dùng một mặt phẳng cách tâm khối cầu $3(\text{cm})$ để cắt khối cầu thành hai phần. Diện tích của thiết diện bằng

A. $16(\text{cm}^2)$. **B.** $16\pi(\text{cm})$. **C.** $16(\text{cm}^3)$. **D.** $16\pi(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn D



Theo đề bài ta có: $2R = 10(\text{cm}) \Rightarrow R = OM = 5(\text{cm}), OH = 3(\text{cm})$

$\Rightarrow r = HM = \sqrt{OM^2 - HM^2} = 4(\text{cm})$.

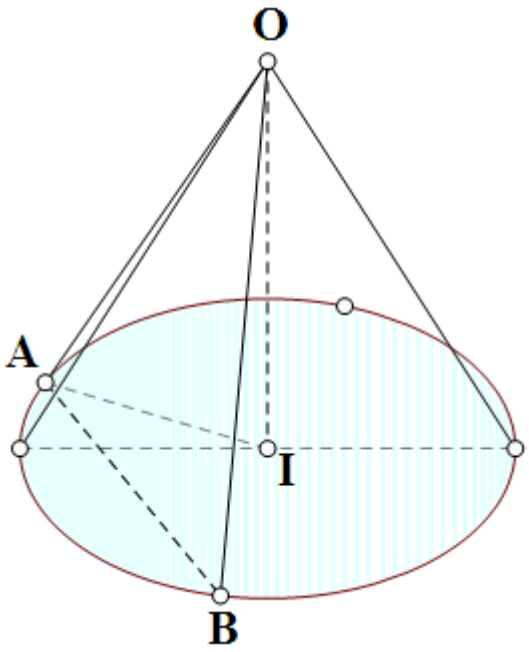
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện bằng: $S = \pi r^2 = \pi .4^2 = 16\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 5. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông có diện tích bằng 18. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π

Lời giải:

Chọn A



Gọi O là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác vuông OAB.

Ta thấy $OA=OB$ nên tam giác OAB chỉ có thể vuông tại O.

Ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA^2 \Rightarrow OA^2=2.S_{\Delta OAB}=36$.

Do đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{36-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=4$, chiều cao $OI=2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

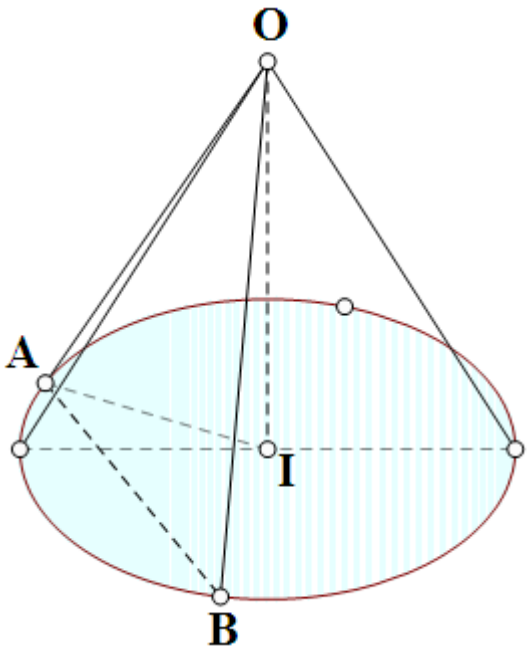
$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$.

Câu 6. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh O của hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác OAB có diện tích bằng $9\sqrt{2}$ và góc $AOB=45°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải:

Chọn A



Gọi I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác cân OAB.

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin 45^\circ \Leftrightarrow 9\sqrt{2}=\frac{1}{2}OA^2.\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow OA^2=36$.

Do đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{36-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=4$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=4$, chiều cao $OI=2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

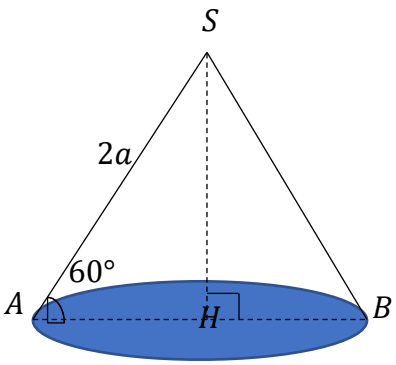
$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5}=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$.

Câu 7. Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$, góc giữa đường sinh và đáy bằng 60°. Thể tích khối nón đã cho là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải:

Chọn A



Góc giữa đường sinh và đáy bằng 60° nên thiết diện qua trục là tam giác đều SAB cạnh $2a$.

Chiều cao khối nón là $h=SH=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$, bán kính đáy $r=\frac{1}{2}AB=a$.

Thể tích khối nón đã cho là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm. Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện tích là



A. $1752\pi\text{cm}^2$. **B.** $3450\pi\ \text{cm}^2$. **C.** $1725\pi\ \text{cm}^2$. **D.** $862,5\pi\ \text{cm}^2$.

Lời giải:

Chọn C

Đường kính của đường tròn đáy là $5\text{cm}\Rightarrow 2R=5\text{cm}$

Diện tích xung quanh của mặt trụ là $S_{xq}=2\pi Rl=\pi.5.23=115\pi cm^2$.

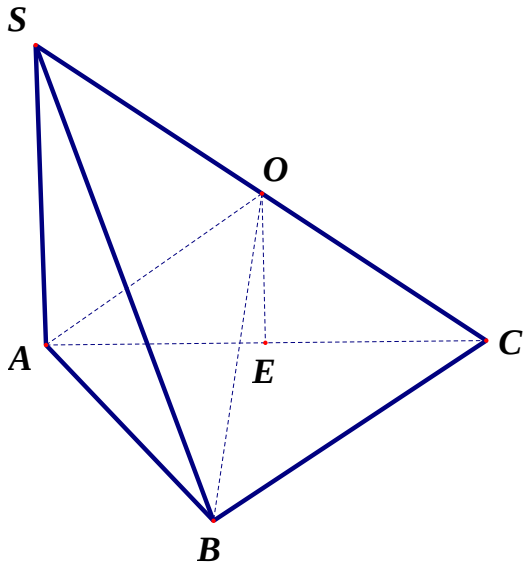
Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là: $S=115\pi.15=1725\pi cm^2$.

Câu 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=2a$ và $SA\perp(ABC)$. Tam giác ABC có $AB=a, BC=2a, AC=a\sqrt{5}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là

A. $S=18\pi a^2$. **B.** $S=36\pi a^2$. **C.** $S=9\pi a^2$. **D.** $S=27\pi a^2$.

Lời giải:

Chọn C



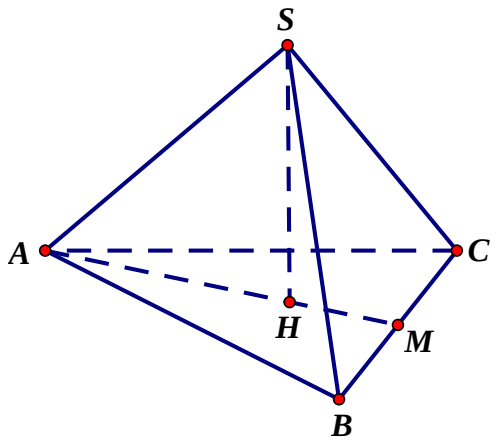
Tam giác ABC có $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Khi đó trục của tam giác ABC là đường thẳng đi qua trung điểm E của cạnh AC và song song với SA (vì $SA \perp (ABC)$), đường thẳng này cắt cạnh SC tại điểm O, suy ra O là trung điểm cạnh SC.

Ta suy ra: $OS = OA = OB = OC = R = \sqrt{OE^2 + EC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 9\pi a^2$.

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 1 và chiều cao $h = \sqrt{3}$ (hình vẽ). Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là



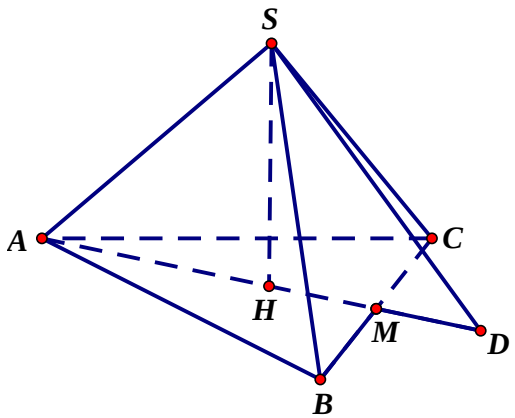
A. $\frac{100\pi}{3}$. **B.** $\frac{25\pi}{3}$. **C.** $\frac{100\pi}{27}$. **D.** 100π.

Lời giải:

Chọn C

* Gọi D là điểm đối xứng của A qua tâm H khi đó D thuộc mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

* Do (SAD) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là đường tròn lớn của mặt cầu.



* Ta có: $AD=\frac{4}{3}AM=2\sqrt{3}$, $SA=SD=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{\frac{10}{3}}$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

$$R=\frac{SA.SD.AD}{4S_{\Delta SAD}}=\frac{SA.SD.AD}{2AD.SH}=\frac{SA^2}{2SH}=\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2=\frac{100\pi}{27}$.

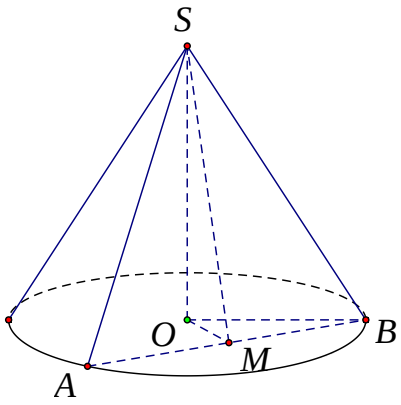
Mức độ 4

Câu 1. Cho hình nón có chiều cao bằng 6. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $10\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{3}\pi$. **D.** 128π.

Lời giải

Chọn D



Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB có cạnh bằng l như hình vẽ

$\Rightarrow l\sqrt{2}=10\sqrt{2}\Rightarrow l=10$.

Ta có: $r=OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=\sqrt{l^2-h^2}=8$.

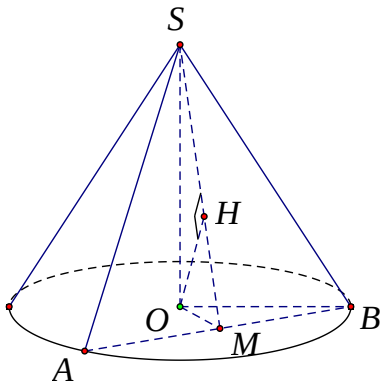
$\Rightarrow$ Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.8^2.6=128\pi.$

Câu 2. Cho hình nón có chiều cao bằng 4. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cách tâm O của mặt đáy hình nón một khoảng bằng $\frac{12}{5}$ cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** $136\sqrt{3}\pi$. **C.** $\frac{136\pi}{3}$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB có cạnh bằng l như hình vẽ.

Ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OM^2}\Rightarrow OM=\sqrt{\frac{SO^2.OH^2}{SO^2-OH^2}}=3\Rightarrow SM=MB=5$.

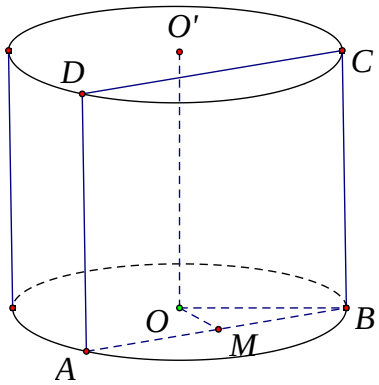
$\Rightarrow r=\sqrt{OM^2+MB^2}=\sqrt{34}\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{136\pi}{3}$

Câu 3. Cho hình trụ có chiều cao bằng 6. Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng 3 cắt hình trụ theo thiết diện có diện tích bằng 48. Thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ trên bằng

A. 15π. **B.** 150π. **C.** $\frac{150\pi}{3}$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện là hình chữ nhật và giả sử là $ABCD$ như hình vẽ.

Ta có: $\begin{cases}AD=OO'=6\\AD.AB=48\end{cases}\Rightarrow AB=8$

Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow MB=4\Rightarrow OB=\sqrt{OM^2+MB^2}=5$.

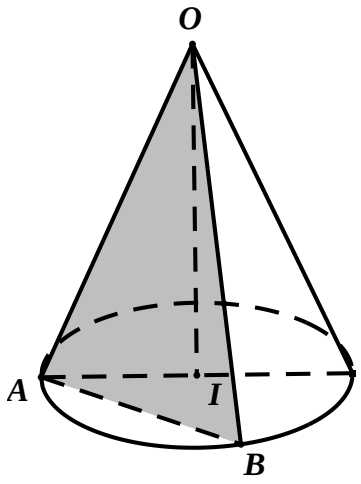
$\Rightarrow$ Thể tích khối trụ bằng: $V=\pi r^2h=\pi.5^2.6=150\pi$

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\pi\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\pi\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác đều OAB.

$S_{\Delta OAB}=\frac{OA^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow OA^2=\frac{4S_{\Delta OAB}}{\sqrt{3}}=\frac{4.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$.

Do đó $IA=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA=1$, chiều cao $OI=\sqrt{3}$ nên có thể tích là:

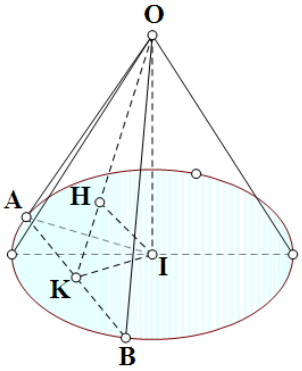
$V=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}\pi.IA^2.OI=\frac{1}{3}\pi.1.\sqrt{3}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, mặt phẳng này cách tâm của đường tròn đáy một khoảng $h=\frac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải:

Chọn A



Gọi O là đỉnh hình nón, I là tâm đường tròn đáy hình nón, thiết diện là tam giác đều OAB. Gọi K là trung điểm của AB khi đó $IK \perp AB$. Kẻ $IH \perp OK$ khi đó khoảng cách từ I đến (OAB) chính là IH hay $IH = \dfrac{2\sqrt{35}}{3\sqrt{3}}$.

Tam giác OIK vuông tại I và IH là đường cao nên: $\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IH^2} - \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow IK^2 = 7$.

Xét tam giác OIK: $OK = \sqrt{OI^2 + IK^2} = 3\sqrt{3}$.

Mà OK là đường cao của tam giác đều OAB nên $OK = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow OA = \dfrac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

Do đó $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{36 - \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 4$.

Khối nón cần tìm có bán kính đáy $IA = 4$, chiều cao $OI = 2\sqrt{5}$ nên có thể tích là:

$V = \dfrac{1}{3}.S_d.h = \dfrac{1}{3}\pi.IA^2.OI = \dfrac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{5} = \dfrac{32\pi\sqrt{5}}{3}$.

Câu 6. Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống tính cả phần thành ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó?

A. $0,18\pi\left(m^3\right)$. **B.** $0,045\pi\left(m^3\right)$. **C.** $0,5\pi\left(m^3\right)$. **D.** $0,08\pi\left(m^3\right)$.

Lời giải:

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính đáy của hình trụ lớn và hình trụ nhỏ $\Rightarrow R = 0,25m$ và $r = 0,15m$.

Thể tích hình trụ lớn là $V_1 = \pi.R^2.h = \pi\left(0,25\right)^2.2$.

Thể tích hình trụ nhỏ là $V_2 = \pi.r^2.h = \pi.\left(0,15\right)^2.2$

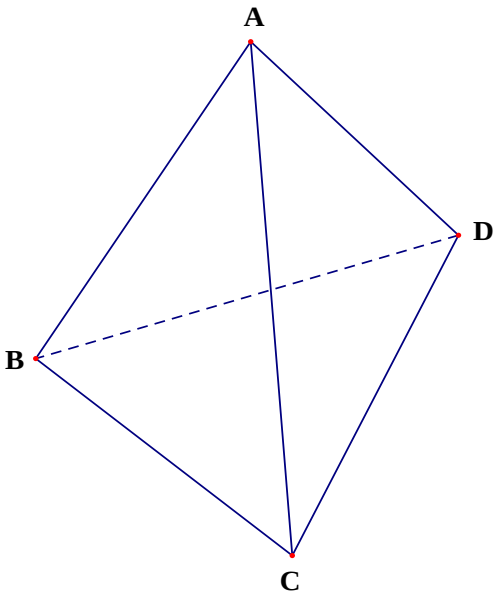
Lượng bê tông cần dùng là $V = V_1 - V_2 = 2\pi\left(0,25\right)^2 - 2\pi\left(0,15\right)^2 = 0,08\pi\left(m^3\right)$.

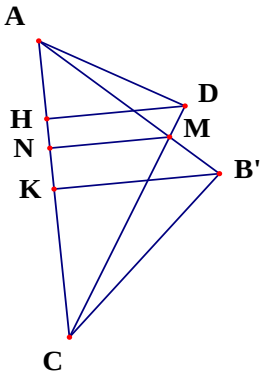
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp DC, AC = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B, góc $DAC = 60^o$. Quay tứ diện quanh trục AC được một khối tròn xoay có thể tích V. Chọn đáp án đúng.

A. $V=\dfrac{\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\dfrac{2\pi a^3}{3}$ **C.** $V=\dfrac{\left(-9+8\sqrt{3}\right)\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\left(9+\sqrt{3}\right)\pi a^3}{12}$

Lời giải:

Chọn C



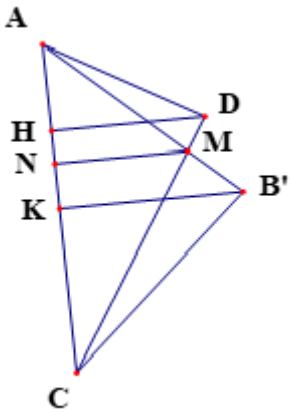


Ta quay tứ diện quanh trục AC và khi B quay đến vị trí B' cùng mặt phẳng với các điểm A,C,D khi đó ta có hình vẽ bên.

Tam giác ABC vuông cân nên $AB'C$ vuông cân có $AC=2a\Rightarrow B'K=a,AK=a,$ tam giác ADC vuông và góc $DAC=60^o\Rightarrow DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2},AH=\dfrac{a}{2};$

Gọi $M=AB'\cap CD,B'AC=45^o\Rightarrow AN=MN\Rightarrow NC=MN\cot ACM=MN\sqrt{3}$.

Mà $AN+NC=AC\Rightarrow AN+AN\sqrt{3}=2a\Rightarrow AN=\dfrac{2a}{1+\sqrt{3}}=a\left(\sqrt{3}-1\right)$



Thể tích khối tròn xoay sinh bởi AB' ,CB' quanh trục AC đều là: $V_1=\dfrac{1}{3}AK.\pi(KB')^2=\dfrac{\pi a^3}{3}$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi AM quanh trục AC là:

$V_2=\dfrac{1}{3}AN.\pi.AN^2=\dfrac{\pi.AN^3}{3}=\dfrac{\pi a^3\left(6\sqrt{3}-10\right)}{3}$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi MB' quanh trục AC là: $V_3 = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi a^3\left(11-6\sqrt{3}\right)}{3}$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi CD quanh trục AC là: $V_4 = \dfrac{1}{3}CH.\pi.HD^2 = \dfrac{3\pi a^3}{8}$

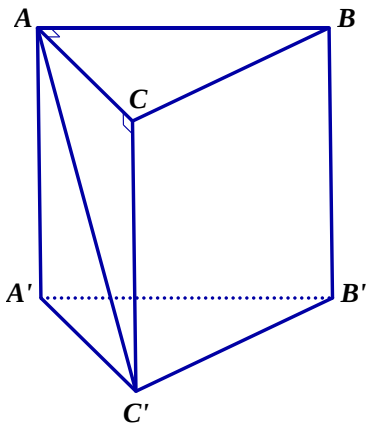
Thể tích khối tròn xoay sinh bởi CM quanh trục AC là: $V_5 = \dfrac{1}{3}CM.\pi.MN^2 = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^3\left(6\sqrt{3}-10\right)}{3}$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi DM quanh trục AC là: $V_6 = V_4 - V_5 = \dfrac{\pi a^3\left(80\sqrt{3}-135\right)}{24}$

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi AD quanh trục AC là: $V_7 = \dfrac{1}{3}.AH.\pi.HD^2 = \dfrac{\pi a^3}{8}$

Vậy $V = V_7 + V_1 + V_3 + V_6 = \dfrac{\left(-9+8\sqrt{3}\right)\pi a^3}{6}$.

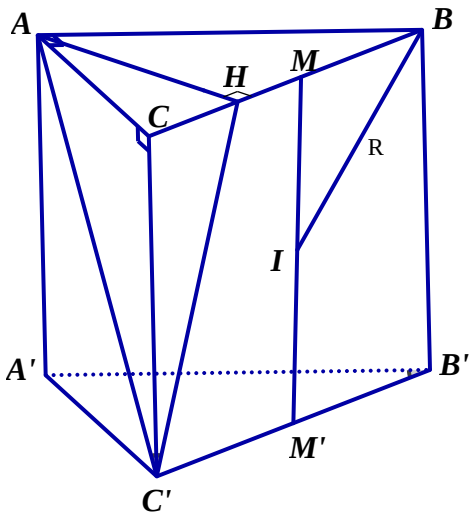
Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° (tham khảo hình vẽ bên). Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho bằng:



A. $24\pi a^2$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải:

Chọn B



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$.

Dễ thấy trung điểm I của MM' là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Kẻ AH vuông góc BC $(H \in BC) \Rightarrow AC'H = (AC', (BCC'B')) = 30°$.

Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

$AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông AHC', có: $AC' = \dfrac{AH}{\sin 30°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ACC', có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Bán kính $R^2 = IB^2 = MI^2 + MB^2 = \left(\dfrac{CC'}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a}{2}\right)^2 = \dfrac{6}{4}a^2$

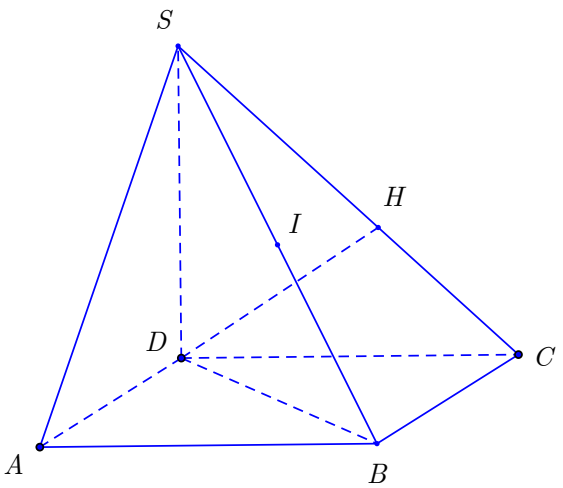
Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{6a^2}{4} = 6\pi a^2$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B. Biết $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. 3. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $12\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải:

Chọn C



Gọi D là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Do $SA \perp AB \Rightarrow DA \perp AB$, và $SC \perp CB \Rightarrow DC \perp CB$. Vậy suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Trong (SCD) kẻ $DH \perp SC$ tại H.

Ta có $AD // (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(D,(SBC)) = DH$.

Ta có $\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{SD^2}\Rightarrow SD=a\sqrt{6}$. Suy ra $SB=2a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm SB suy ra I là tâm mặt cầu và $R=\frac{SB}{2}=a\sqrt{3}$.

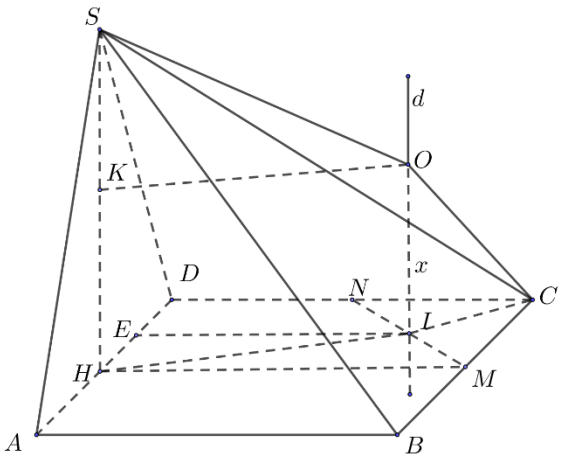
Vậy diện tích mặt cầu bằng $S=4\pi R^2=12\pi a^2$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

A. $R=\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **B.** $R=\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{37}}{6}$. **D.** $R=\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải:

Chọn B



Gọi:

- H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

- I là trung điểm của $MN\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

- d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.

- E là hình chiếu của I lên AD.

- O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

- K là hình chiếu của O lên SH.

Đặt $OI=x$.

Ta có: $CI=\frac{1}{2}MN=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $OC=\sqrt{IC^2+IO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{8}+x^2}$;

$KO=HI=\sqrt{IE^2+EH^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$;

$$SO=\sqrt{SK^2+KO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2}=\sqrt{x^2-\sqrt{3}ax+\frac{22a^2}{16}}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ nên $SO=OC$

Suy ra: $\sqrt{\frac{a^2}{8}+x^2}=\sqrt{x^2-\sqrt{3}ax+\frac{22a^2}{16}}\Leftrightarrow\sqrt{3}ax=\frac{5}{4}a^2\Leftrightarrow x=\frac{5\sqrt{3}a}{12}.$

Vậy: $R=OC=\sqrt{\frac{a^2}{8}+\frac{25a^2}{48}}=\frac{\sqrt{93}}{12}a.$

DẠNG TOÁN 13: TÌM ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

✪ Định nghĩa:

• Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$.

a) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

b) Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý:

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}$ (f_{CT}), còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và các điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được gọi là cực đại (cực tiểu) và được gọi chung là cực trị của hàm số.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

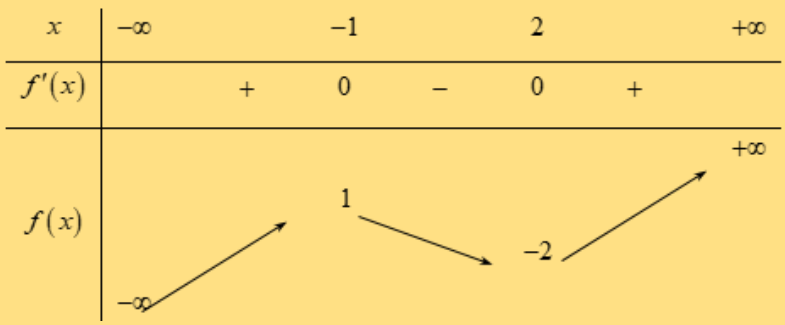
• Tìm điểm cực trị của một hàm số cụ thể.

• Tìm điểm cực trị của một hàm số khi cho bảng biến thiên.

• Tìm điểm cực trị khi biết đồ thị của y hoặc y'.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm điểm cực trị của hàm số.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 thì đạt cực đại tại x_0. Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 thì đạt cực tiểu tại x_0.

B2: Kết Luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

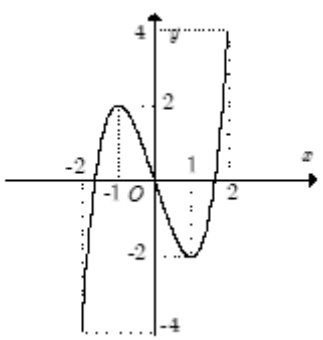
A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Lời giải:

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



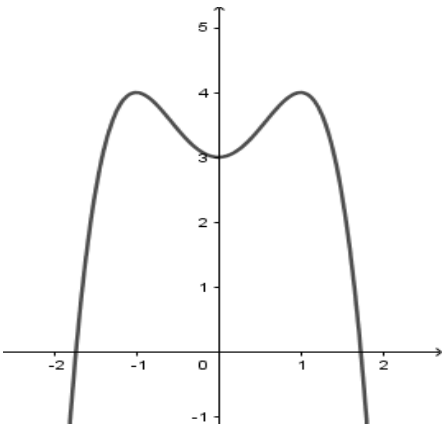
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

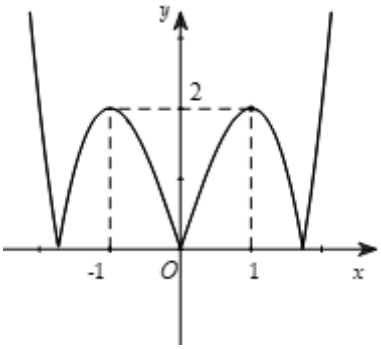
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên hàm số $f(x)$có 2 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

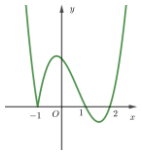
Xét $f'(x)=x(x+2)^2$. Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm suy ra hàm số có một cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của số đã cho là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

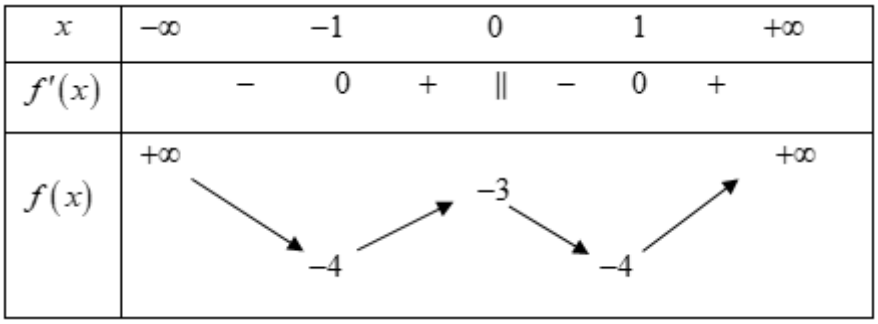
Lời giải:

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

↳ Mức độ 2

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có ba giá trị cực trị.

B. Hàm số có ba điểm cực trị.

C. Hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$ là:

A. $(0;1)$.

B. $(1;2)$.

C. $(-1;6)$.

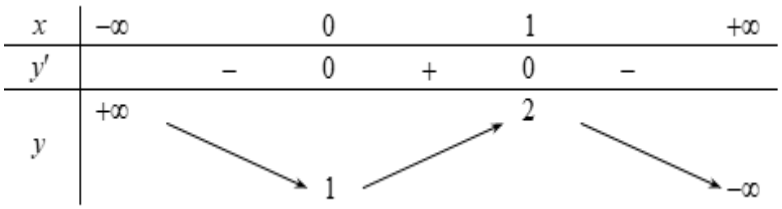
D. $(2;3)$.

Lời giải:

Chọn D

$y'=-6x^2+6x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'



Vạy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1;2)$.

Câu 3. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-2$ là:

A. $(1;-3)$.

B. $(-1;-3)$.

C. $(0;-2)$.

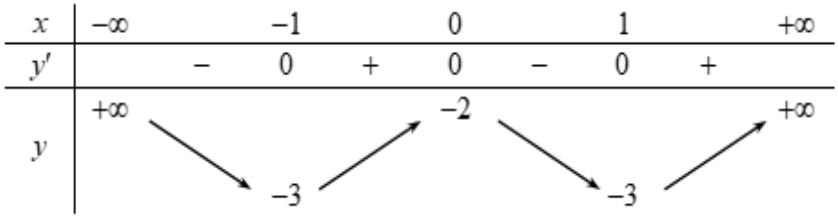
D. $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn B

$y'=4x^3-4x;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị là $(0;-2)$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây có cực trị.

A. $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$. **B.** $y=x^3+4x-2$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=-x^2+3x-1$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$, $y'=\dfrac{-9}{x-2^{\,2}}<0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\ 2$. Hàm số không có cực trị.

Xét hàm số $y=x^3+4x-2$, $y'=3x^2+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số không có cực trị.

Xét hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $y'=\dfrac{2}{x+1^{\,2}}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\ -1$. Hàm số không có cực trị.

Xét hàm số $y=-x^2+3x-1$.

$y'=-2x+3;y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Ta có $y'>0\,\forall x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ và $y'<0\,\forall x\in\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy hàm số $y=-x^2+3x-1$ có cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

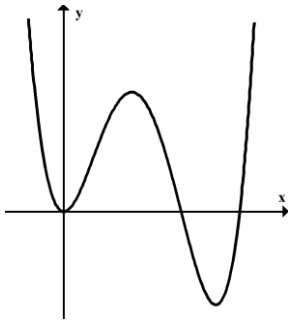
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=3\\x=-5\end{array}\right.\ .$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		-5		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình bên dưới. Khi đó trên $\mathbb{R}$ hàm số $y=f(x)$



A. Có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu. **B.** Có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

C. Có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu. **D.** Có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải.

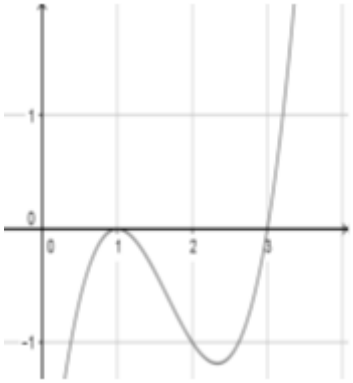
Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_1 và đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_2. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 1 cực đại và một cực tiểu.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$. **B.** Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải.

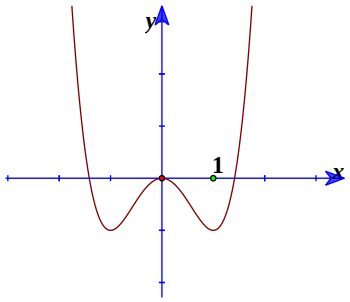
Chọn B

Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 8. Hàm số $y=f\ x$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$, biết đồ thị của hàm số $y=f'\ x$ trên K như hình vẽ bên.



Tìm số cực trị của hàm số $y=f\ x$ trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm nên đạo hàm đổi dấu tại đây và tiếp xúc với trục hoành tại $x=0$ nên đạo hàm không đổi dấu. Do đó hàm số $y=f\ x$ có 2 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$ và $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

Lời giải:

Giá trị của hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=-1$ nên ta chọn đáp án C.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(2x+3)^3(4-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\dfrac{3}{2}$.

B. Hàm số có ba cực trị.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có hai điểm cực đại.

Lời giải:

Chọn A

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{3}{2}\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta chọn A.

↳ Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)$. Hàm số $y=f(1-x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm $y=f(1-x)$.

$y'=\left[f(1-x)\right]'=-f'(1-x)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x=-2\\1-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có $y'(4)=-f'(-3)<0$ (do $f'(3)>0$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)$ đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2x-5)(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số $y=f(x^2)$ là:

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm $y=f(x^2)$.

$$y'=\left[f\left(x^2\right)\right]'=2xf'\left(x^2\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\end{array}\right..$$

Ta có $y'(3)=6f'(9)<0$ (do $f'(9)<0$). Nên có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		0		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^3-x^2+(m-4)x+5$. Tìm m để hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

A. $m>\dfrac{13}{3}$. **B.** $m\le\dfrac{13}{3}$. **C.** $m<\dfrac{13}{3}$. **D.** $m\ge\dfrac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2-2x+m-4$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai ngiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow1-3(m-4)>0$

$\Leftrightarrow-3m+13>0\Leftrightarrow m<\dfrac{13}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=(m-4)x^4+(m+3)x^2-m^2+1$. Tìm m để hàm số đã cho có ba cực trị.

A. $-3<m<4$. **B.** $m<-3,\ m>4$. **C.** $-4<m<1$. **D.** $m<-1,\ m>1$.

Lời giải

Chọn A

$y'=4(m-4)x^3+2(m+3)x=2x\left[2(m-4)x^2+m+3\right]$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2(m-4)x^2+m+3=0\ (*)\end{array}\right.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow\dfrac{m+3}{m-4}<0\Leftrightarrow-3<m<4$.

Câu 5. Số điểm cực đại của hàm số $y=(x+1)\sqrt{3-x}$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn C

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;3]$.

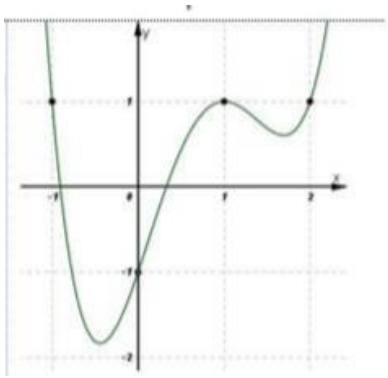
$y'=\dfrac{5-3x}{2\sqrt{3-x}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3
y'		$+$	0	$-$	‖
y	$-\infty$	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $f\ x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\ x$ như hình vẽ.



Đặt $g\ x\ =f\ x\ -x$. Hàm số $g\ x$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải:

Chọn D

$g'(x)=f'(x)-1$

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

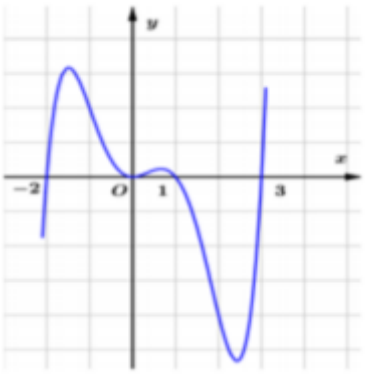
.

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=-1$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\ x$. Đồ thị của hàm số $y=f'\ x$ như hình bên.



Hàm số $g\ x\ =f\ x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D

$g'(x)=2xf'(x^2)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-2\\x^2=0\\x^2=1\\x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Ta thấy $g'(x)$ có 5 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ sẽ đổi dấu 5 lần.

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Câu 8. Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có 3 điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số m bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

$$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right..$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(0;m-1), B\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right), C\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{m};-m^2\right), \overrightarrow{OC}\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$.

Để điểm O là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0\Leftrightarrow -m+m^4-m^3+m^2=0$

$\Leftrightarrow m\left(m^3-m^2+m-1\right)=0\Leftrightarrow m=1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\left|-x^2+3x+5\right|$. Số điểm cực trị của hàm số trên là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

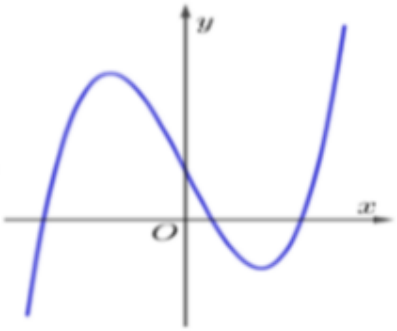
Xét hàm số $g(x)=-x^2+3x+5$

$g'(x)=-2x+3$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ta thấy hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị. Mặt khác $g(x)=0$ có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y=\left|-x^2+3x+5\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 10. Hàm số $f\ x$ có đạo hàm $f'\ x$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $f'\ x$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y=f\ \left|x\right|\ +2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$f'\ x\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<0\\x=x_2>0\\x=x_3>x_2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có bảng xét dấu của $f'\ x$

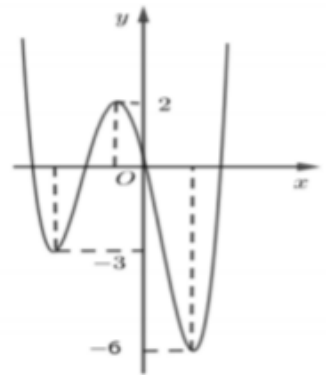
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 cực trị trong đó có 2 cực trị dương.

Do hàm số $y=f\ \left|x\right|\ +2018$ chẵn nên nó có 5 cực trị.

Mức độ 4

Câu 1. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f\ \ x\ \ .$



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\ \ x-1\ +m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

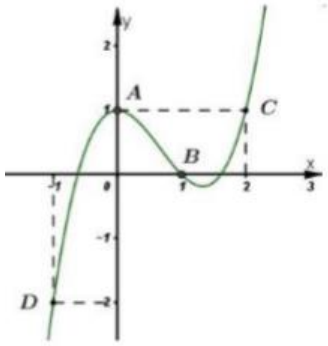
Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\ \ x\ \ $ sang phải 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f\ \ x-1\ .$

Do đó đồ thị hàm số $y=f\ \ x-1\ \ $ có 3 cực trị và có 4 giao điểm với Ox.

Để được đồ thị hàm số $y=f\ \ x\ +m$ với m nguyên dương ta phải tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\ \ x-1\ \ $ lên trên m đơn vị

Để thỏa mãn điều kiện đề bài thì đồ thị hàm số $y=f\ \ x-1\ +m$ cắt Ox tại đúng 2 điểm (không phải là điểm cực trị của chính nó), do đó $3\le m<6\Rightarrow S=\ \ 3;4;5\ \ .$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\ \ x\ \ $ với đạo hàm $f'\ x\ \ $ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g\ x\ =f\ x\ -\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=-1.$ **B.** $x=2.$ **C.** $x=0.$ **D.** $x=1.$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g\ x\ =f\ x\ -\frac{x^3}{3}+x^2-x+2,$ có $g'\ x\ =f'\ x\ -x^2+2x-1;\forall x\in R$

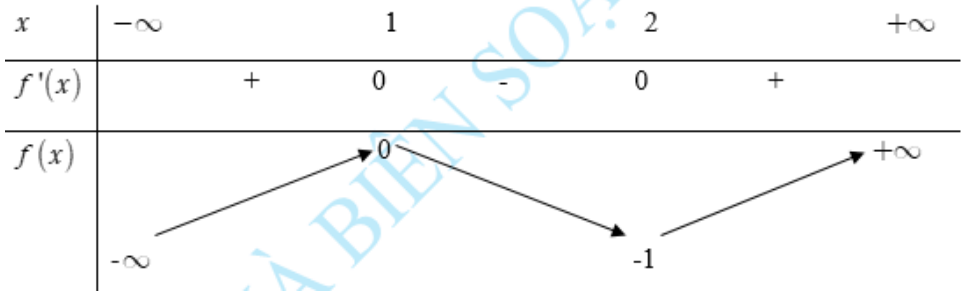
Ta có $g'\ x\ =0\Leftrightarrow f'\ x\ =\ x-1\ ^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\ \ (*)\\x=2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'\ x$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1.$

Câu 3. Cho hàm số $y=f\ x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f\ \left|x\right|\ +m\right|$ có 11 điểm cực trị

A. $m\geq 0.$ **B.** $m\leq 0.$ **C.** $0\leq m\leq 1.$ **D.** $0<m<1.$

Lời giải

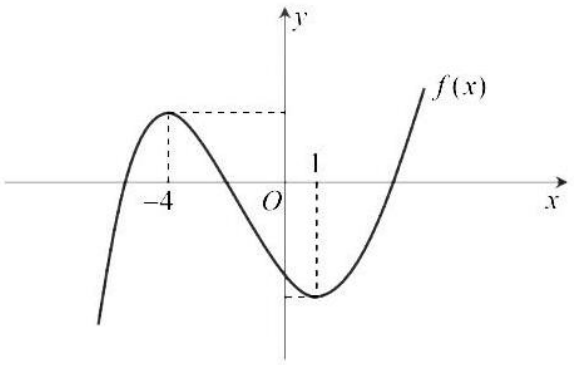
Chọn A

Xét đồ thị $y=\left|f\ \left|x\right|\ +m\right|$ khi m thay đổi thì đồ thị hàm số sẽ tịnh tiến dọc theo trục Oy.

Từ bảng biến thiên ta thấy $y=f\ x$ đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm bên phải trục Oy. Suy ra hàm số $y=f\ |x|\ +m$ có 5 điểm cực trị.

Để hàm số $y=\left|f\ |x|\ +m\right|$ có 11 điểm cực trị thì phương trình $f\ |x|\ +m=0$ phải có 6 nghiệm phân biệt $-1<-m<0\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục và xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\ x^2-4|x|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 5 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

Lời giải:

Chọn A

Xét hàm số $g\ x\ =f\ x^2-4x\ \Rightarrow g'\ x\ =\ 2x-4\ g'\ x^2-4x\ $.

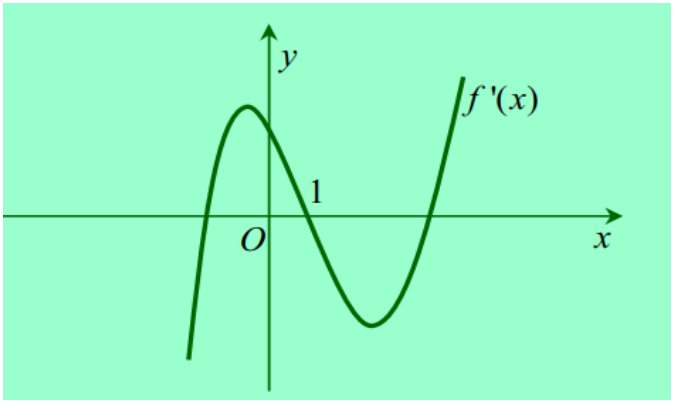
Xét phương trình đạo hàm : $g'\ x\ =\ 2x-4\ f'\ x^2-4x\ =0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x-4=0\\ f'\ x^2-4x\ =0\end{bmatrix}$.

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\ x^2-4x=-4\Leftrightarrow\ x-2\ ^2=0\\ x^2-4x=1\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=2\\ x=2\pm\sqrt{3}\end{bmatrix}$.

Suy ra hàm số $g\ x\ =f\ x^2-4x$ có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực trị dương.

Suy ra hàm số $f\ x^2-4|x|\ =f\ |x|^2-4|x|\ =g\ |x|$ năm điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m\in\left[-21;21\right]y=f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị ?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Xét hàm số: $y=g(x)=f\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{(2x+2m)\left(x^2+2mx-1\right)}{\left|x^2+2mx-1\right|}f'\left(\left|x^2+2mx-1\right|\right)$

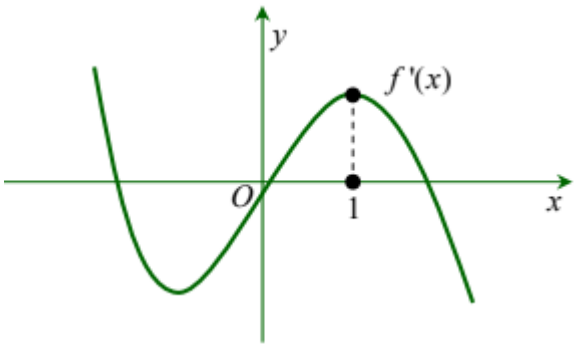
Nhận thấy, nếu phương trình $x^2+2mx-1=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt, đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ không xác định và đổi dấu tại hai nghiệm phân biệt này, tương ứng có hai điểm cực trị.

Xét phương trình đạo hàm:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m\\ \left|x^2+2mx-1\right|=a<0\rightarrow VN\\ \left|x^2+2mx-1\right|=1\\ \left|x^2+2mx-1\right|=b>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m\rightarrow \text{co them 1 diem cuc tri}\\ x^2+2mx-2=0\rightarrow \text{co them 2 diem cuc tri}\\ x^2+2mx=0\rightarrow \text{khong co hai nghiem pb}\Leftrightarrow m=0\\ x^2+2mx-1-b=0\rightarrow \text{co them 2 diem cuc tri}\\ x^2+2mx-1+b=0\rightarrow \text{khi } m=0\rightarrow VN\end{array}\right.$$

Suy ra giá trị nguyên cần tìm của m là: $m=0$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(|x|+|x-1|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $y=g(x)=\begin{cases} f(1-2x), & (x\in(-\infty;0)) \\ f(1), & (x\in[0;1)) \\ f(2x-1) & (x\in[1;+\infty)) \end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases} -2f'(1-2x), & (x\in(-\infty;0)) \\ 0, & (x\in[0;1)) \\ 2f'(2x-1), & (x\in[1;+\infty)) \end{cases}$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow \Rightarrow g'\ x\ =\begin{cases} -2f'\ 1-2x\ =0 & khi\ \ x\in\ -\infty;0\quad 1 \\ 0 & khi\ \ x\in\ 0;1\quad\ 2 \\ 2f'\ 2x-1\ =0 & khi\ \ x\in\ 1;+\infty\quad 3 \end{cases}$

Xét phương trình 1 $g'(x)=-2f'(1-2x)=0$ với $(x\in(-\infty;0))$ thì $1-2x\in\ 1;+\infty$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $g'(x)=-2f'(1-2x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất và $f'\ 1-2x$ đổi dấu tạ nghiệm đó.

Xét phương trình 2 , phương trình này có vố số nghiệm bằng 0 trên nửa đoạn $0;1$, do đó hàm số không có cực trị.

Xét phương trình 3 , $g'(x)=2f'(2x-1)=0$ với $(x\in[1;+\infty))$ thì $2x-1\in\ 1;+\infty$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trìn $g'(x)=2f'(2x-1)=0$ có 1 nghiệm duy nhất và $f'\ 2x-1$ đổi dấu tại nghiệm đó.

Do đó hàm số $y=g(x)=f\left(|x|+|x-1|\right)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+2m$ có ba điểm cực trị A,B,C sao cho O,A,B,C,D là các đỉnh của một hình thoi (với O là gốc tọa độ).

A. $m=-1.$ **B.** $m=2.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=1.$

Lời giải:

Chọn D

$y=x^4-2m^2x^2+2m\Rightarrow y'=4x^3-4m^2x$

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4m^2x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=0 \\ x^2=m^2 \end{bmatrix}.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m\neq 0.$ Khi đó, tọa độ 3 điểm cực trị:

$A\ -m;-m^4+2m\ ,B\ 0;2m\ ,C\ \ m;-m^4+2m$

Do AC luôn nhận Oy là trục đối xứng và $O,B\in Oy$ nên để O, A, B, C là các đỉnh của một hình thoi thì OA = AB.

$\Leftrightarrow OA^2=AB^2\Leftrightarrow m^2+\ -m^4+2m\ ^2=m^2+\ -m^4+2m-2m\ ^2\Leftrightarrow\ -m^4+2m\ ^2=m^8$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} -m^4+2m=m^4 \\ -m^4+2m=-m^4 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} m=0 \\ m^4-m=0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} m=0(L) \\ m=1(TM) \end{bmatrix}.$

Vậy m = 1.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^4-2\left(1-m^2\right)x^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y'=4x^3-4\left(1-m^2\right)x;\forall x\in R$.

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1-m^2\ \ (*)\end{array}\right.$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ * có 2 nghiệm phân biệt khác $1-m^2>0\Leftrightarrow-1<m<1$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=m+1\\x=\sqrt{1-m^2}\Rightarrow y=-\left(m^2-1\right)^2+m+1\\x=-\sqrt{1-m^2}\Rightarrow y=-\left(m^2-1\right)^2+m+1\end{array}\right.$

Gọi $A\left(0;m+1\right),B\left(\sqrt{1-m^2};-\left(m^2-1\right)^2+m+1\right),C\left(-\sqrt{1-m^2};-\left(m^2-1\right)^2+m+1\right)$ là ba điểm cực trị. Tam giác ABC cân tại A.

Trung điểm H của BC là $H\left(0;-\left(m^2-1\right)^2+m+1\right)\Rightarrow AH=\left(m^2-1\right)^2=\left(1-m^2\right)^2$

Và $BC=2\sqrt{1-m^2}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC=\left(1-m^2\right)^2\sqrt{1-m^2}=\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}$

Mà $1-m^2\le1;\forall m\in R$ suy ra $\sqrt{\left(1-m^2\right)^5}\le1\Rightarrow S_{\Delta ABC}\le1$.

Vậy $S_{max}=1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+m\left|x\right|-3m+1$. Số giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số có hai điểm cực trị là

A. 21. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải:

Chọn B

Hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+m\left|x\right|-3m+1$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=f\left(x\right)=x^3+mx-3m+1,\ x\ge0\\y=f\left(x\right)=x^3-mx-3m+1,\ x<0\end{array}\right.$

+) $y=f\left(x\right)=x^3+mx-3m+1,\ x\ge0$

$y'=3x^2+m$. Nhận xét : $y'=3x^2+m$ có 2 nghiệm phân biệt thì có 2 nghiệm trái dấu.

Để hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm cực trị dương thì : $y'=3x^2+m$ có hai nghiệm trái dấu: $3.m<0\Leftrightarrow m<0$

+) $y=f\ x\ =x^3-mx-3m+1,\ x<0$

$y'=3x^2-m$. Nhận xét : $y'=3x^2-m$ có 2 nghiệm phân biệt thì có 2 nghiệm trái dấu.

Để hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm cực trị âm thì : $y'=3x^2-m$ có hai nghiệm trái dấu.

$\Leftrightarrow 3\ -m\ <0\Leftrightarrow m>0$

$\Rightarrow y=f\left(x\right)=x^3+m|x|-3m+1$ có hai điểm cực trị thì

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>0\\m<0\end{array}\right.\\ m\in\ -10;10\ \Rightarrow m\in\ -10;-9;...;-1;1;2;...;10\ \ .\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Vậy có 20 giá trị m.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm $f'\ x\ =\ x-1\ ^2\ x^2-2x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\ x^2-8x+m$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $g'\ x\ =\ 2x-8\ .f'\ x^2-8x+m\ =0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\f'\ x^2-8x+m\ =0\ \ (*)\end{array}\right.$. (I)

Mà $f'\ x\ =\ x-1\ ^2\ x^2-2x\ =\ x-1\ ^2x\ \ x-2\ ;\forall x\in R.$

Suy ra $*\ \Leftrightarrow\ x^2-8x+m-1\ ^2\ \ x^2-8x+m\ \ x^2-8x+m-2\ =0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x+m-1=0\ \ (1)\\x^2-8x+m=0\ \ \ \ \ \ (2)\\x^2-8x+m-2=0\ \ (3)\end{array}\right.\ .$$

Qua các nghiệm của phương trình (1) (nếu có) thì $g'\ x$ đều không đổi dấu. Do đó ta không xét phương trình (1).

Để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (2);(3) có 2 nghiệm phân biệt khác 4.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\16-m+2>0\\-16+m\neq0\\-18+m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<16$$

Kết hợp $m\in Z^+\Rightarrow$ có 15 giá trị m cần tìm.

DẠNG TOÁN 14: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

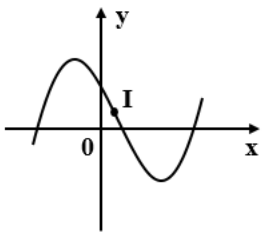
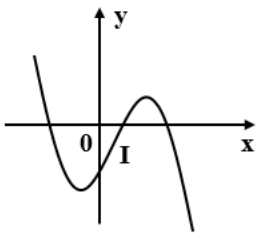
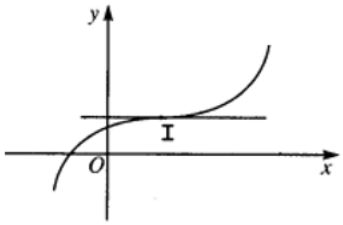
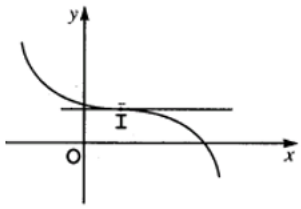
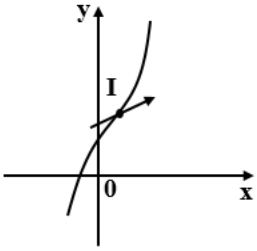
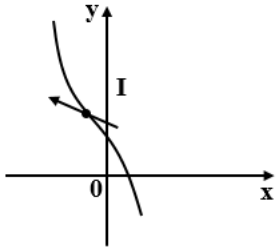
1. Đồ thị hàm số bậc ba :

✪ **Hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ **:**

• **Tập xác định D = R.**

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

• **Các dạng đồ thị:**

	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$		
$y' = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac = 0$		
$y' = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$		

2. Đồ thị hàm trùng phương.

✪ **Hàm trùng phương có dạng** $y = ax^4 + bx^2 + c$

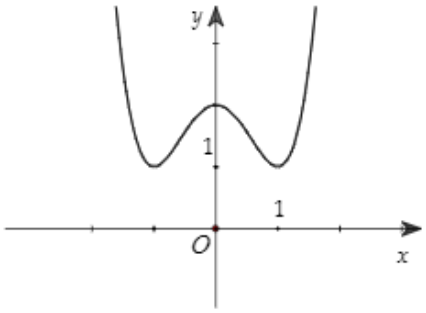
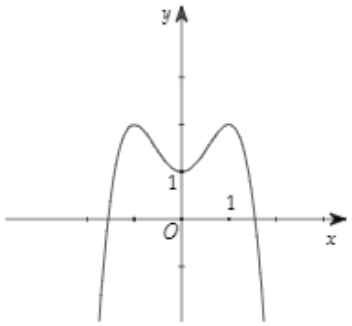
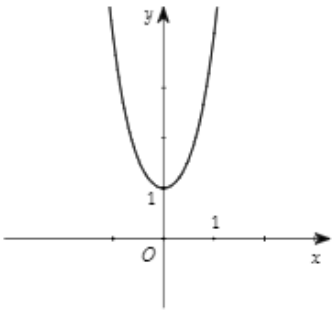
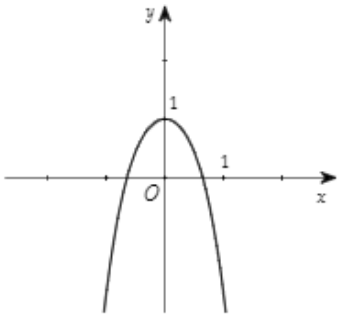
• **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$

• **Đạo hàm:** $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **hoặc** $x^2 = -\dfrac{b}{2a}$ **.**

*** Nếu** $ab \geq 0$ **thì y có một cực trị** $x_0 = 0$

*** Nếu** $ab<0$ **thì y có 3 cực trị** $x_0=0;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

• Đồ thị:

TRƯỜNG HỢP	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ *có 3 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y'=0$ *có 1 nghiệm.*		

2. Đồ thị hàm số hữu tỷ.

✪ Hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$**:**

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$**.**

• Giới hạn và tiệm cận:

*** Tiệm cận đứng:** $x=-\dfrac{d}{c}$**.**

*** Tiệm cận ngang:** $y=\dfrac{a}{c}$**.**

• Khảo sát sự biến thiên:

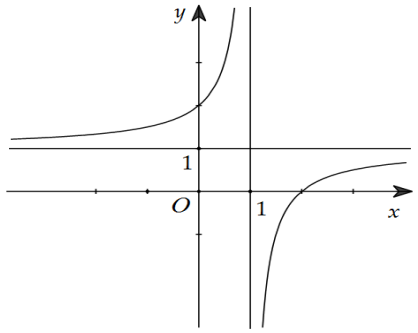
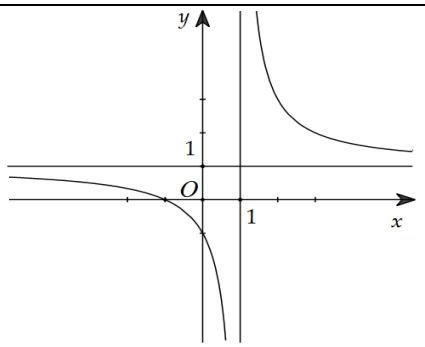
***** $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$**.**

***** $y'>0$**: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.**

***** $y'<0$**: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.**

- **Hàm số không có cực trị.**

- **Đồ thị:**

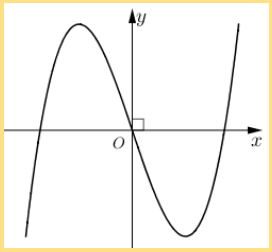
$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Nhận dạng đồ thị.
- Các phép biến đổi đồ thị.
- Biện luận số giao điểm dựa vào BBT, đồ thị.
- Sự tương giao của hai đồ thị.
- Câu hỏi lý thuyết.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán nhận dạng đồ thị hàm số.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ: các dạng đồ thị hàm bậc ba.

3. HƯỚNG GIẢI

Lời giải

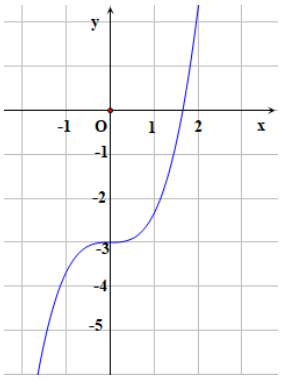
Chọn A

Từ đồ thị ta thấy đường cong trên là hàm số bậc ba.

Lại có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên $a > 0$. Vậy đồ thị hàm số trên là $y = x^3 - 3x$.

Mức độ 1

Câu 1. Đường cong trong hình trên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây?



A. $y=\dfrac{3x+1}{2x+5}$.

B. $y=x^4-2x^2+3$.

C. $y=-\dfrac{2x^3}{3}-3$.

D. $y=\dfrac{2x^3}{3}-3$.

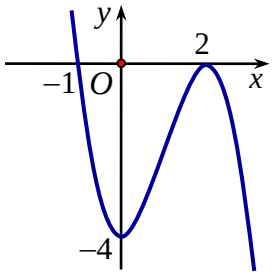
Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-3)$ nên đường cong trong hình trên không phải là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{2x+5}$, $y=x^4-2x^2+3$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ nên đường cong trong hình trên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^3}{3}-3$.

Câu 2. Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2-4$.

B. $y=-x^3+3x^2-4$.

C. $y=x^3+3x^2-4$.

D. $y=-x^3-3x^2-4$.

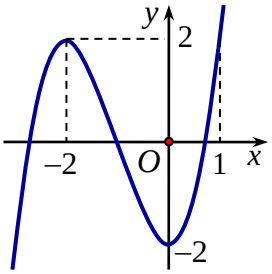
Lời giải

Chọn B

Đồ thị của hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ nên $a<0$, đồ thị có hoành độ điểm cực đại là $x=2$ nên phải là đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-4$.

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=2x^3+6x^2-2$ **B.** $y=x^3+3x^2-2$.

C. $y=-x^3-3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x^2-2$.

Lời giải

Chọn B

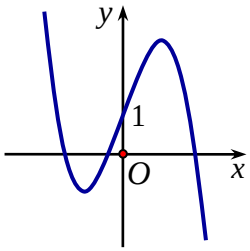
Từ đồ thị hàm số ta có:

Đồ thị trong hình là của hàm số bậc 3, có hệ số $a>0$.

Đồ thị hàm số đạt cực trị tại các điểm $A(-2;2);B(0;-2)$.

Vậy chọn phương án **B.**

Câu 4. Đường cong bên dưới là đồ thị hàm số nêu dưới đây.



A. $y=x^3+3x^2-3x+1.$ **B.** $y=-x^3-2x^2+x-2$.

C. $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=x^3+3x^2+3x+1.$

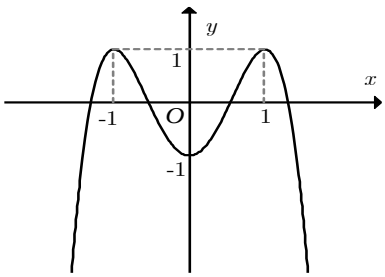
Lời giải

Chọn C

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với hệ số $a<0$, do đó loại phương án A và D.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d=1$, do đó loại phương án **B.**

Câu 5. Đường cong trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-2x^4+4x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$.

C. $y=-x^4+4x^2-1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

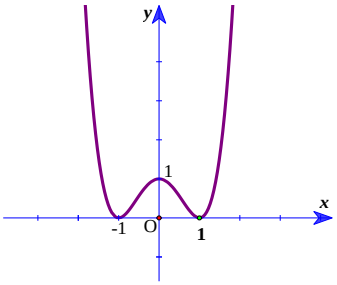
Lời giải:

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ nên loại phương án D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(1;1)$ nên loại phương án B, C.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ bên



A. $y=-x^4+2x^2+1$.
B. $y=-x^4-2x^2+1$.
C. $y=x^4-2x^2-1$.
D. $y=x^4-2x^2+1$.

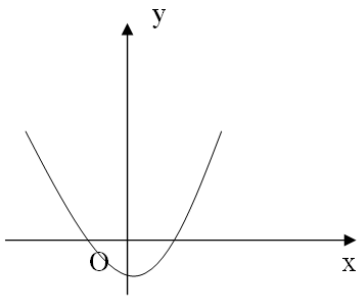
Lời giải:

Chọn D

Vì đồ thị hàm số có ba cực trị $\Rightarrow a,b$ trái dấu $\Rightarrow$ Loại B
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $y=1\Rightarrow c=1\Rightarrow$ Loại C
Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow a>0$ chọn D.

Câu 7. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê trong bốn đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y=x^4+x^2-1$.
C. $y=-x^4+3x^2-3$.
B. $y=x^4+x^2+2$.
D. $y=x^4-3x^2+2$.



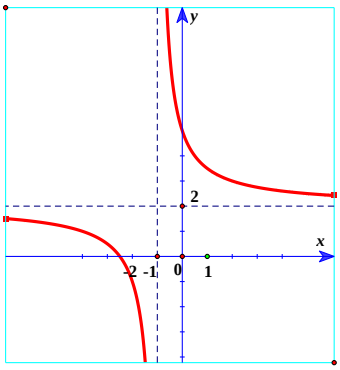
Lời giải:

Chọn A

Hàm số có một cực trị $\Rightarrow a,b$ cùng dấu $\Rightarrow$ loại C, D.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có hoành độ âm nên loại B

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=x^3+3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải:

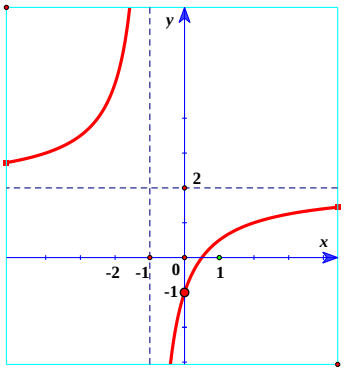
Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án A, C.

Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có $ab-bc=1>0$ nên loại đáp án D.

Hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ có $ad-bc=-3<0$ nên chọn đáp án B.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

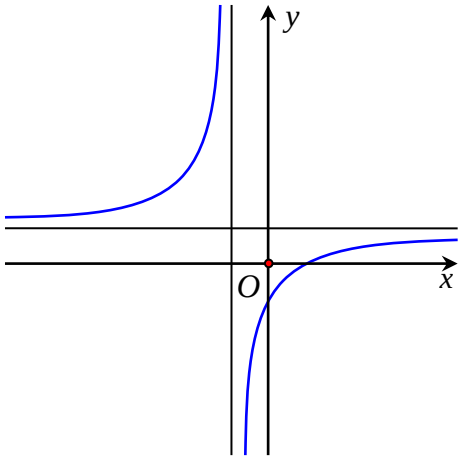
Lời giải:

Chọn A

Đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$ nên loại B, D.

Đồ thị đi qua điểm $(0;-1)$ nên chọn A.

Câu 10. Hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải:

Chọn B

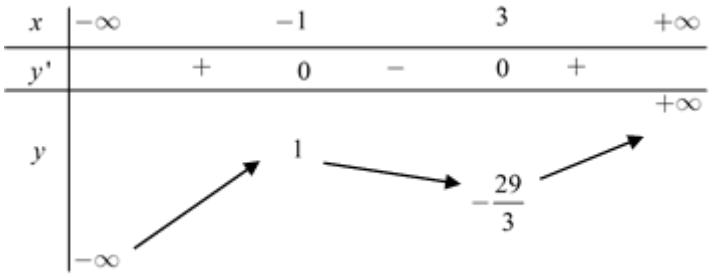
Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án A, D.

Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ có $ab-bc=-1<0$ nên loại đáp án C.

Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có $ad-bc=2>0$ nên chọn đáp án B.

Mức độ 2

Câu 1. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?



A. $y=-x^3+3x^2+9x-2$. **B.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x-\dfrac{2}{3}$.

C. $y=x^3-3x^2-9x-2$. **D.** $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x+\dfrac{2}{3}$.

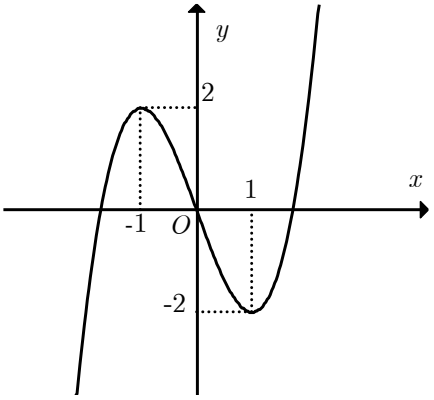
Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT và các phương án lựa chọn, ta thấy:

- Đây là dạng hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$ nên loại A và D.
- Mặt khác, đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;1)$ nên loại C.

Câu 2. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. Hàm số có hệ số $a<0$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hệ số tự do của hàm số khác 0.

Lời giải:

Chọn B

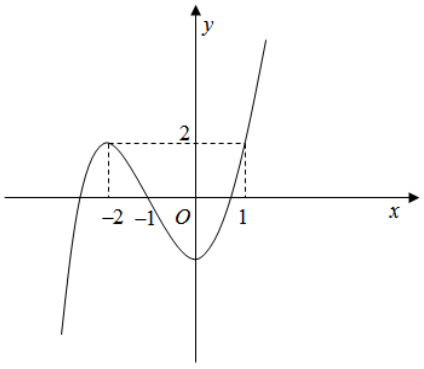
Hình dáng đồ thị thể hiện $a>0$. Do đó A sai.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó B đúng.

Hàm số có hai cực trị. Do đó C sai.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do của hàm số phải bằng 0. Do đó D sai.

Câu 3. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, với a, b, c, d là các số thực và $a\neq 0$ (có đồ thị như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây sai?



A. $y'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=-2$.

C. $y'<0,\forall x\in(-2;0)$.

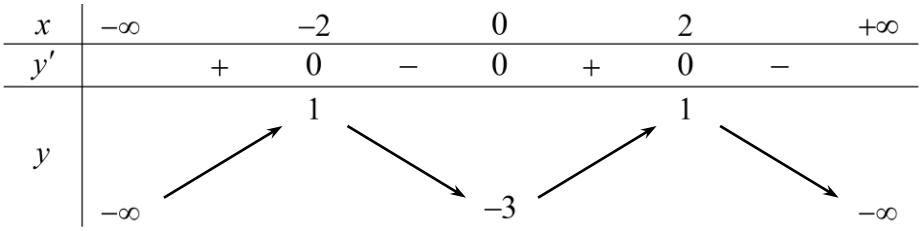
D. Đồ thị có đúng hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $M(0;-3)$ là điểm cực tiểu của hàm số.

B. Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

C. $f(2)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số.

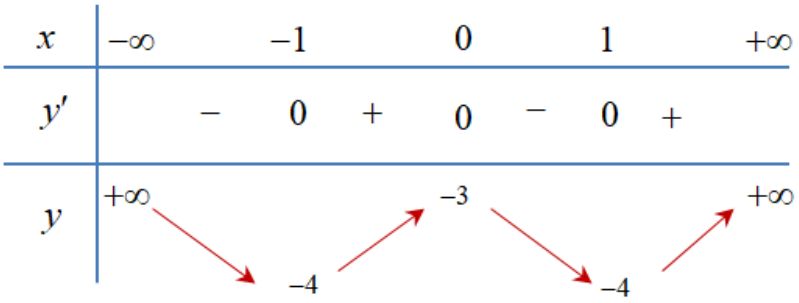
D. $x_0=2$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số là $f(-2)=f(2)=1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)+2=0$ là



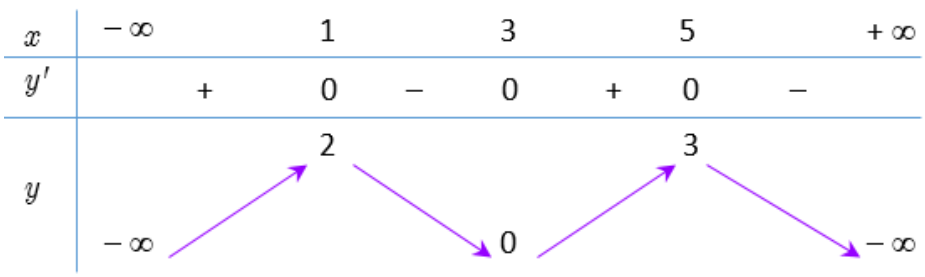
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Chọn A

$f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2$ phương trình này có hai nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên cho bởi bảng sau. Khẳng định nào **sai**:



A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3.

B. $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1);(3;5)$.

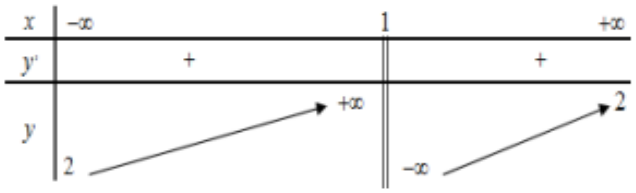
C. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1;2);(5;3)$.

D. $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(1;3);(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

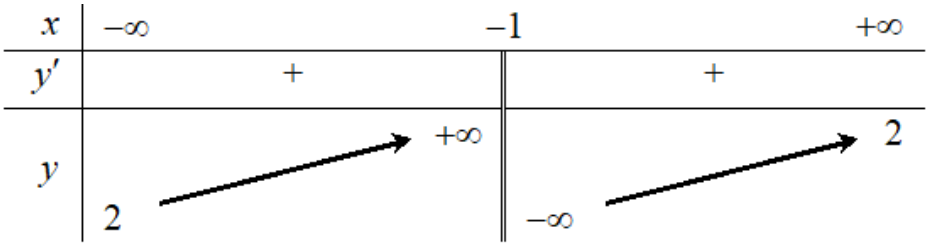
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..

Lời giải.

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

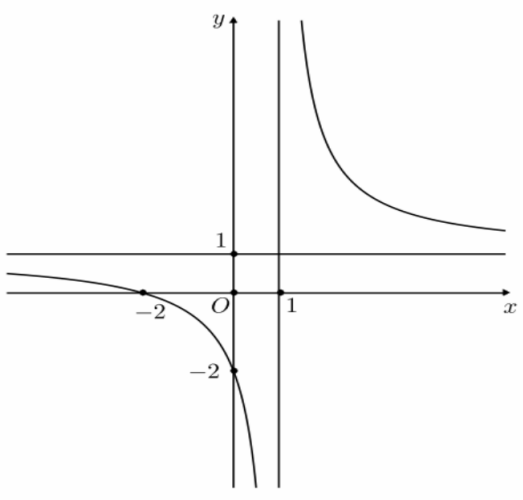
Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

A sai do hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C, **D** sai do hàm số bị gián đoạn tại $x=-1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $b<0<a$. **B.** $a<b<0$. **C.** $a<0;\ b<0$. **D.** $0<b<a$.

Lời giải:

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có:

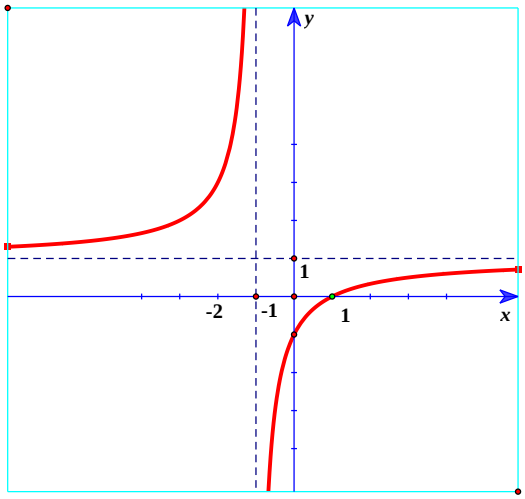
+ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=a=1>0$.

+ Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-2)\Rightarrow b=-2<0$.

+ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $y'<0\Rightarrow -a+b<0\Rightarrow b<a$.

Vậy $b<0<a$.

Câu 10. Xác định a,b để hàm số $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=1,\ b=-1$. **B.** $a=1,\ b=1$. **C.** $a=-1,\ b=1$. **D.** $a=-1,\ b=-1$.

Lời giải:

Chọn B

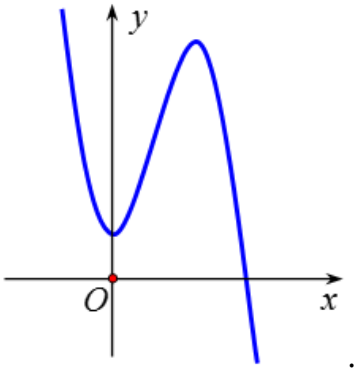
Dựa vào đồ thị, ta có tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1$ (1)

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{a\,x-1}{x+b}$ có tiệm cận đứng $x=-b$, tiệm cận ngang $y=a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1, b=1$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0, b<0, c=0, d>0$.

B. $a>0, b<0, c>0, d>0$.

C. $a<0, b>0, c=0, d>0$.

D. $a<0, b>0, c>0, d>0$.

Lời giải:

Chọn C

Từ hình dáng đồ thị ta suy ra hệ số $a<0, d>0$ loại phương án **C**.

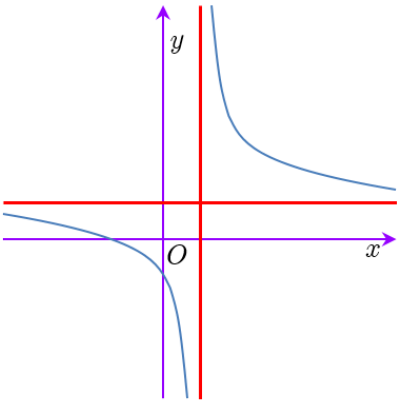
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ nên $y'(0)=0\Rightarrow c=0$ loại phương án **A.**

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-\dfrac{2b}{3a}$.

Do hoành độ điểm cực đại dương nên $-\dfrac{2b}{3a}>0$, mà $a<0\Rightarrow b>0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $ab<0,\ cd<0$.

B. $bc>0,\ ad<0$.

C. $ac>0,\ bd>0$.

D. $bd<0,\ ad>0$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ad-bc<0$, với mọi $x\neq -\frac{d}{c}$ nên $ad<bc$

.

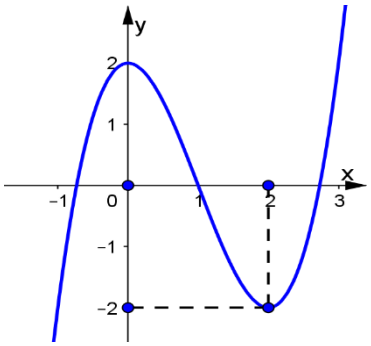
Mặt khác $(C)\cap Ox=A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và $-\frac{b}{a}<0$ nên $ab>0$ (1) $\Rightarrow$**Loại A**

Và $(C)\cap Oy=B\left(0;\frac{b}{d}\right)$ và $\frac{b}{d}<0$ nên $bd<0$ $(2)\Rightarrow$**Loại C**

Từ (1) và (2) ta có $ad<0$ $\Rightarrow$**Loại D**

Mặt khác, phương trình đường tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}>0$ nên $cd<0$. Suy ra $bc>0$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Tính tổng $S=a+b+c+d$.

A. $S=0$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=2$.

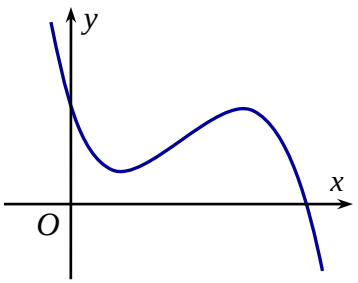
Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ liên tục trên $\mathbb{R}$; đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;-2)$ và $(0;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=-2\\f'(2)=0\\f(0)=2\\f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a+4b+2c+d=-2\\12a+4b+c=0\\d=2\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}\Rightarrow S=0.$$

Câu 4. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0$, $c>0$, $d>0$. **B.** $a<0$, $c>0$, $d>0$.

C. $a<0$, $c<0$, $d<0$. **D.** $c<0$, $d>0$.

Lời giải

Chọn B

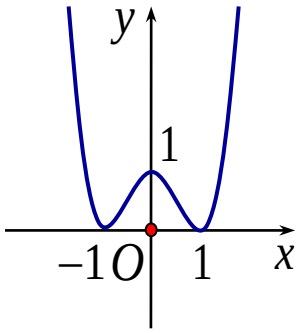
Dựa vào hình dạng đồ thị: đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a<0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung nên $y'=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Suy ra $\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ -\dfrac{2b}{3a}>0 \\ \dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-3ac>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$

Vậy $a<0$, $c>0$, $d>0$.

Câu 5. Giả sử hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a>0, b<0, c=1$.

B. $a>0, b>0, c=1$.

C. $a<0, b>0, c=1$.

D. $a>0, b>0, c>0$.

Lời giải:

Chọn A

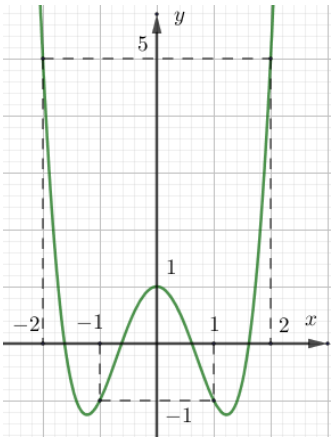
Dựa vào đồ thị ta có:

+ Đồ thị hướng lên nên $a>0$, loại đáp án **C.**

+Với $x=0 \Rightarrow y=c=1$ nên loại đáp án **D.**

+Có 3 cực trị nên $ab<0$ suy ra $b<0$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên dưới



Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)+2m=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{5}{8}<m<\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<1$. **D.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{8}$.

Lời giải:

Chọn D

Theo đồ thị trên hình vẽ, ta thấy đồ thị đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;-1)$ và $C(2;5)$. Do đó ta có hệ phương trình

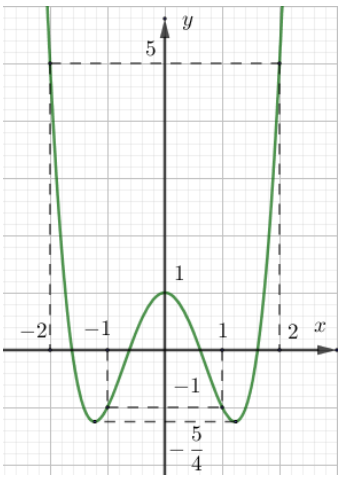
$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 16a+4b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=1 \\ b=-2 \end{cases}.$$

Ta có $f(x)=x^4-3x^2+1$

$f'(x)=4x^3-6x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$$

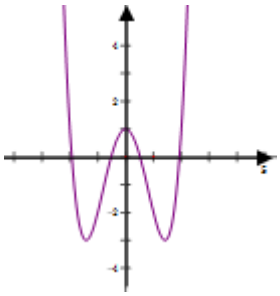
Ta được đồ thị



Do đó phương trình $f(x)+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-\frac{5}{4}<-2m<1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{8}.$$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực đại?

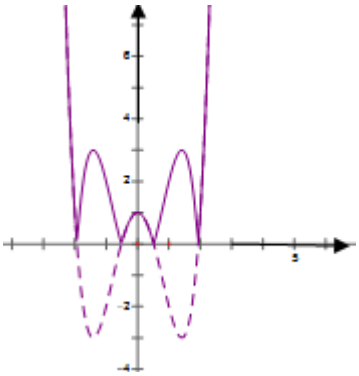


A. 5 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 3 .

Lời giải:

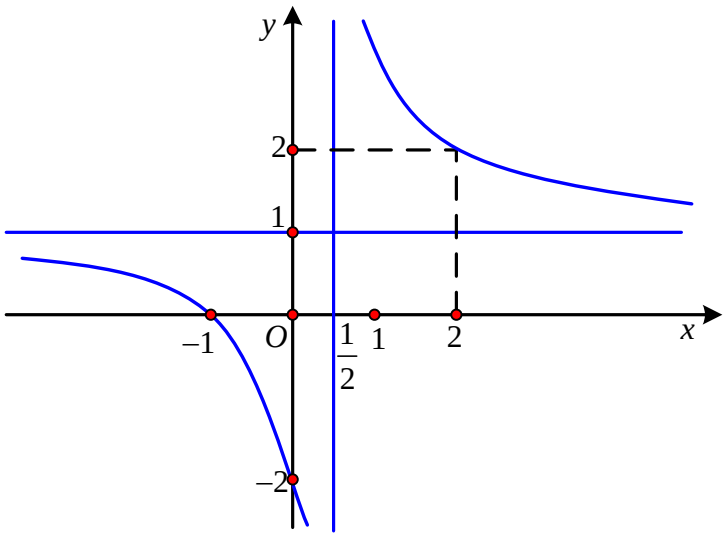
Chọn D

Ta có đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y=|f(x)|$,ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực đại.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $\max\limits_{[3;4]} f(x) = f(4)$. **B.** $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$. **D.** $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Lời giải:

Chọn D

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy: Đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

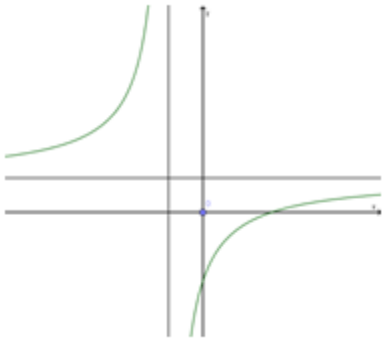
Trên $[1;2]$ hàm số liên tục và $f(1) > f(2) = 2$.

Trên $[-2;1]$ hàm số gián đoạn tại $x = \frac{1}{2}$.

Trên $[3;4]$ hàm số liên tục và $f(3) > f(4)$.

Trên đoạn $[-3;0]$ hàm số liên tục và $f(-3) > f(0)$ nên $\max\limits_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là **đúng**?



A. $ad > 0,\ bc < 0$. **B.** $ad < 0,\ bc > 0$. **C.** $cd < 0,\ bd > 0$. **D.** $ac > 0,\ ab > 0$.

Lời giải:

Chọn B

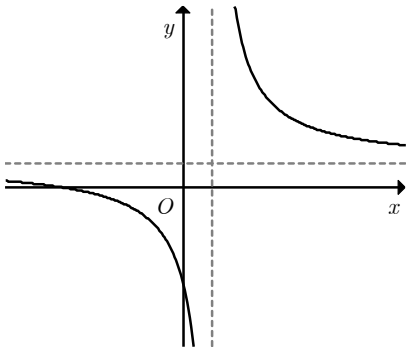
Quan sát đồ thị ta có: TCĐ d $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \frac{d}{c} > 0 \Rightarrow c, d$ cùng dấu.

Lại có TCN $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow a, c$ cùng dấu. Suy ra a, c, d cùng dấu.

Lại có $x = 0 \Rightarrow \frac{b}{d} < 0$ suy ra b, d trái dấu.

Suy ra: $ad > 0,\ bc < 0$.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ $(a \neq 0;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,b>0,c-ab<0$. **B.** $a>0,b>0,c-ab>0$.

C. $a>0,b>0,c-ab=0$. **D.** $a>0,b<0,c-ab>0$.

Lời giải:

Chọn A

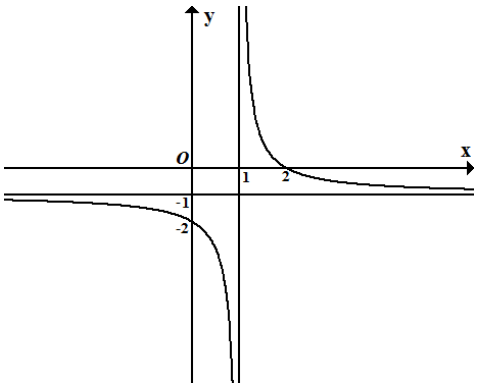
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a>$; tiệm cận ngang $y=b>0$.

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y'=\dfrac{c-ab}{(x-a)^2}<0,\forall x\neq a\to c-ab<0$.

Vậy $a>0,b>0,c-ab<0$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a-3b+2c$?



A. $T=-9$. **B.** $T=-7$. **C.** $T=12$. **D.** $T=10$.

Lời giải

Chọn A

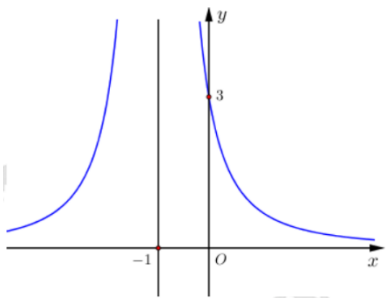
Đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng nên $c=-1$.

Đồ thị hàm số có $y=-1$ là tiệm cận ngang nên $a=-1$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $\dfrac{b}{c}=-2$ do đó $b=2$.

Vậy $T=a-3b+2c=-1-3.2+2(-1)=-9$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $f(1)=2$. **B.** $f(2)=\dfrac{11}{2}$. **C.** $f(1)=\dfrac{7}{2}$. **D.** $f(2)=6$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $A(0;4)$ nên $b=4d\ (1)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\dfrac{d}{c}=-1\Rightarrow c=d\ (2)$.

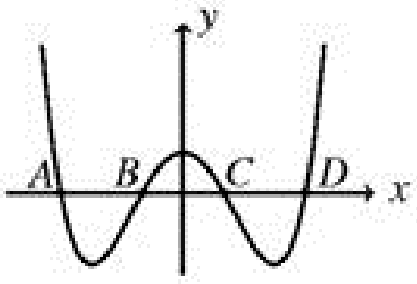
Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua $(0;3)$ nên $\dfrac{ad-bc}{d^2}=3\Rightarrow ad-bc=3d^2\ (3)$.

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ad-4d^2=3d^2\Rightarrow a=7d\ (d\neq 0)$ vì nếu $d=0$ thì $a=b=c=d=0$ (vô lí).

Do đó $f(x)=\dfrac{7dx+4d}{dx+d}=\dfrac{7x+4}{x+1}$.

Vậy $f(2)=6$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB=BC=CD$, mệnh đề nào sau dây đúng?



A. $a>0,b<0,c>0,100b^2=9ac$.

B. $a>0,b>0,c>0,9b^2=100ac$.

C. $a>0,b<0,c>0,9b^2=100ac$.

D. $a>0,b>0,c>0,100b^2=9ac$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$. Mặt khác đồ thị hàm số giao với trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c>0$. Đồ thị hàm số có ba cực trị nên $ab<0\Rightarrow b<0$. Loại B,D.

Xét pt hoành độ giao điểm $ax^4+bx^2+c=0$.Đặt $t=x^2, t\ge 0$ pt thành $at^2+bt+c=0\ (1)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 . (giả sử $t_1>t_2$).

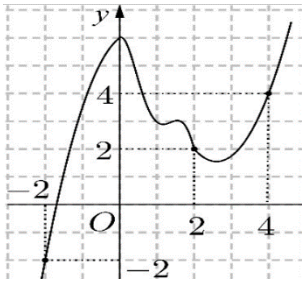
Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}(I)$.

Giả sử $A\left(-\sqrt{t_1};0\right), \mathrm{B}\left(-\sqrt{t_2};0\right)$ thì $C\left(\sqrt{t_2};0\right), D\left(\sqrt{t_1};0\right)$.

Mà $AB=BC=CD\Rightarrow \sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_2}\Leftrightarrow \sqrt{t_1}=3\sqrt{t_2}\Leftrightarrow \mathrm{t}_1=9\,\mathrm{t}_2 (II)$

Từ (I) và (II) suy ra: $\begin{cases} 10t_2=\dfrac{-b}{a} \\ 9t_2^2=\dfrac{c}{a} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t_2=\dfrac{-b}{10a} \\ 9t_2^2=\dfrac{c}{a} \end{cases}\Rightarrow 9\left(\dfrac{-b}{10a}\right)^2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow 9b^2=100ac$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(0)=h(4)+2<h(2)$.

B. $h(-1)<h(0)<h(2)$.

C. $h(2)<h(4)<h(0)$.

D. $h(1)+1=h(4)<h(2)$.

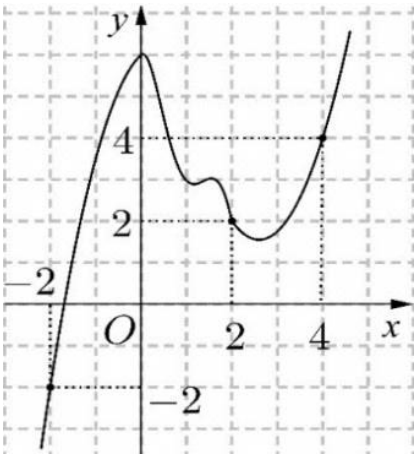
Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f(x)-x$ trên đoạn $[-1;4]$.

Ta có $h'(x)=f'(x)-1$. Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ ta được $h'(x)>0$. Suy ra hàm số đồng biến trên $[-1;4]$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.



Đặt $h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;3)$.

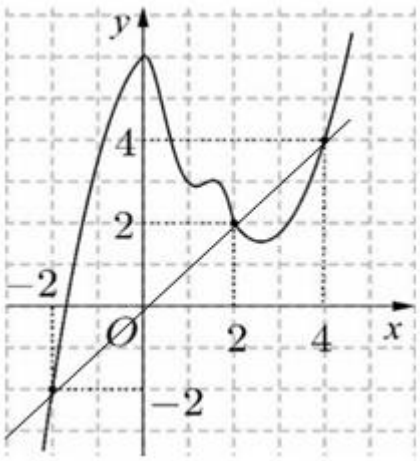
B. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

C. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

Lời giải:

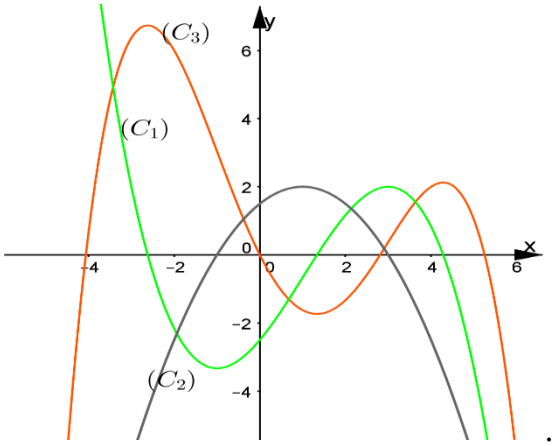
Chọn D



$h'(x)=f'(x)-x$.

Từ đồ thị của $f'(x)$ và đường thẳng $y=x$ ta suy ra trên khoảng $(2;4)$ thì đồ thị $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y=x$. Do đó $h'(x)<0$ trên $(2;4)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=f''(x)$ lần lượt là đường cong nào trong hình bên?



.

A. $(C_3),(C_2),(C_1)$. **B.** $(C_1),(C_3),(C_2)$. **C.** $(C_3),(C_1),(C_2)$. **D.** $(C_1),(C_2),(C_3)$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi hàm số của các đồ thị $(C_1);(C_2);(C_3)$ tương ứng là $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.

Ta thấy đồ thị (C_3) có các điểm cực trị có hoành độ là nghiệm của phương trình $f_1(x)=0$ nên hàm số $y=f_1(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_3(x)$.

Đồ thị (C_1) có các điểm cực trị có hoành độ là nghiệm của phương trình $f_2(x)=0$ nên hàm số $y=f_1(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=f_2(x)$.

Vậy, đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong $(C_3);(C_1);(C_2)$.

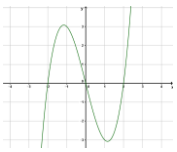
Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.



Lời giải:

Chọn A

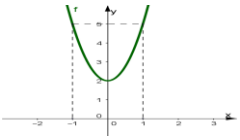
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có:

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

Khi đó, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$.

hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;2)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c\in R, a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) đi qua $A(1;4)$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ.



Giá trị $f(3)-2f(1)$ là

A. 30. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải:

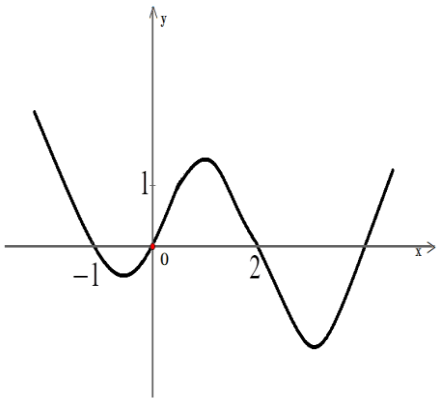
Chọn C

Từ đồ thị của $y=f'(x)\Rightarrow f(x)=x^3+2x+d$. Do đồ thị (C) đi qua $A(1;4)$ nên $d=1$ $\Rightarrow y=f(x)=x^3+2x+1$.

Vậy $f(3)-2f(1)=26$.

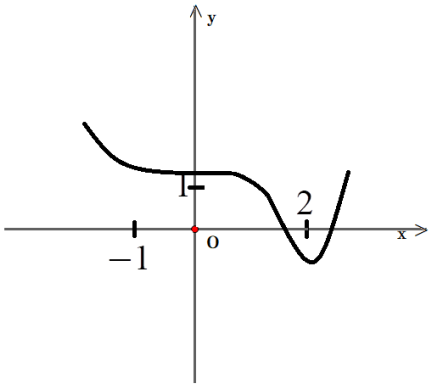
Câu 9. Một trong các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'\ 0\ =0$ và $f''\ x\ <0,\forall x\in\ -1;2\ $. Hỏi đó là đồ thị nào?

A.



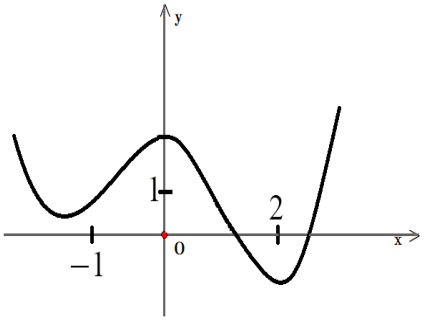
.

B.



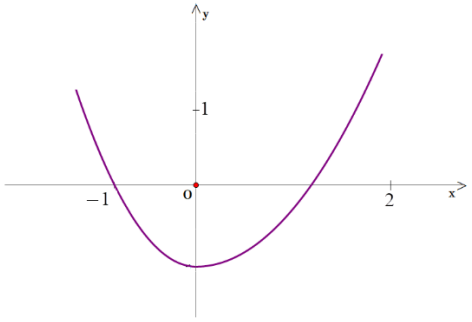
.

C.



.

D.



.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f'(0)=0;\ f''(0)<0,\forall x\in(-1;2)$

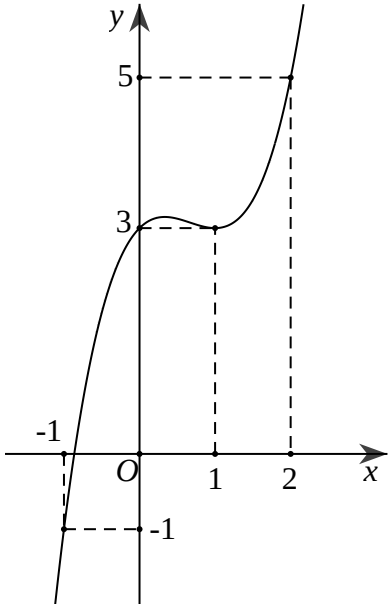
$\Rightarrow f'(x)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(x)>f'(0),\forall x\in(-1;0)\\f'(x)<f'(0),\forall x\in(0;2)\end{cases}$$

Suy ra $f(x)$ tăng trên khoảng $(-1;0)$, giảm trên khoảng $(0;2)$ và đạt cực đại tại $x=0$.

Chỉ có đáp án **C** thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



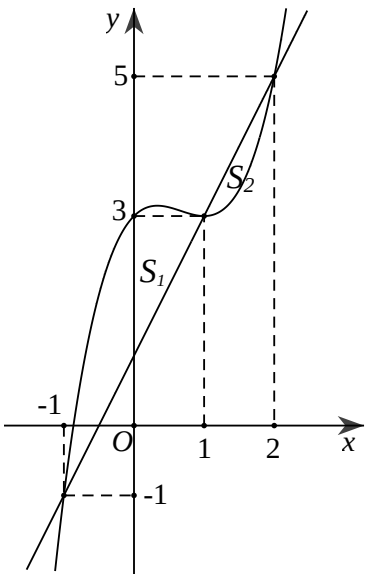
Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(1)>g(2)$ **B.** $g(-1)=g(1)$ **C.** $g(1)=g(2)$ **D.** $g(-1)>g(1)$

Lời giải:

Chọn A

Xét hàm số $h(x)=f'(x)-(2x+1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1;1]$, $[1;2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ y=f'(x) \\ y=2x+1 \end{cases}$ là

$$S_1=\int_{-1}^{1}\left|f'(x)-(2x+1)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[f'(x)-(2x+1)\right]\mathrm{d}x=g(x)\Big|_{-1}^{1}=g(1)-g(-1).$$

Vì $S_1>0$ nên $g(1)>g(-1)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases}x=1\\x=2\\y=f'(x)\\y=2x+1\end{cases}$ là

$$S_2=\int_{1}^{2}\left|f'(x)-(2x+1)\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left[(2x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x=-g(x)\Big|_{1}^{2}=g(1)-g(2).$$

Vì $S_2>0$ nên $g(1)>g(2)$.

DẠNG TOÁN 15: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Đường tiệm cận đứng

✪ Định nghĩa:

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty ; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty .$$

2. Đường tiệm cận ngang.

✪ Định nghĩa:

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 ; \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

Chú ý:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận ngang khi TXĐ của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến x có thể dần tới $+\infty$ hoặc $-\infty$).

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể có tiệm cận đứng khi TXĐ của hàm số có một trong các dạng sau $(a;b), [a;b), (a;b], (a;+\infty), (-\infty;a)$ hoặc là hợp của các tập hợp này và TXĐ không có một trong các dạng sau: $\mathbb{R}$, $[c;+\infty)$, $(-\infty;c]$, $[c;d]$.

-Nếu $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu Q(x) = 0 có nghiệm là x_o, và x_o không là nghiệm của P(x) = 0 thì đồ thị có tiệm cận đứng là $x = x_0$

+ Nếu bậc (P(x)) ≤ bậc (Q(x)) thì đồ thị có tiệm cận ngang.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Lý thuyết về đường tiệm cận.
• Nhận dạng bảng biến thiên, nhận dạng hàm số.
• Tìm đường tiệm cận (biết BBT, đồ thị).
• Tìm đường tiệm cận (biết y).
• Đếm số đường tiệm cận (Biết BBT, đồ thị).

- Đếm số đường tiệm cận (biết y).
- Biện luận số đường tiệm cận.
- Đường tiệm cận thỏa mãn điều kiện nào đó.
- Tổng hợp đường tiệm cận với diện tích, góc, khoảng cách.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính giới hạn của hàm số tại $+\infty$ và $-\infty$.

B2: Kết quả giới hạn là 1, suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{3}{1+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{3}{2}$. **B.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$. **D.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1+2x}=0$ nên đồ thi hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 2. Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **B.** $y=\frac{x-2}{x+3}$. **C.** $y=\frac{4-x^2}{2-x}$. **D.** $y=\frac{2x^2+3x+2}{2-x}$.

Lời giải

Chọn A

• Xét phương án A: $y=\frac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1}=-\infty\Rightarrow x=1$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow$ ***Phương án A là đáp án đúng***.

• Xét phương án B: $y=\frac{x-2}{x+3}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+3}=\frac{-1}{4}\Rightarrow x=1$ không phải là đường TCĐ của đồ thị hàm số.

• Xét phương án C: $y=\frac{4-x^2}{2-x}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{4-x^2}{2-x}=3\Rightarrow x=1$ không phải là đường TCĐ của đồ thị hàm số.

• Xét phương án D: $y=\frac{2x^2+3x+2}{2-x}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+3x+2}{2-x}=7\Rightarrow x=1$ không phải là đường TCĐ của đồ thị hàm số.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-2$.

B. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=2$ và $x=-2$.

C. Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.

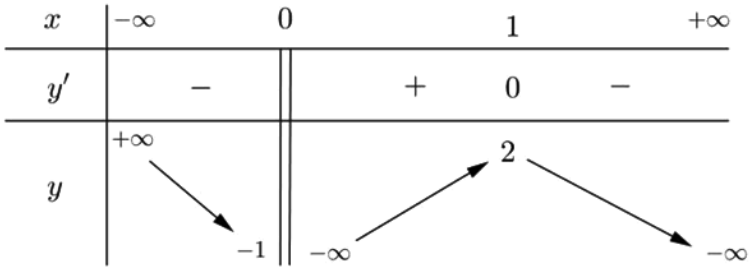
D. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x=2$ và $x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ nên đồ thi hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=2$ và $y=-2$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

B. $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

C. $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

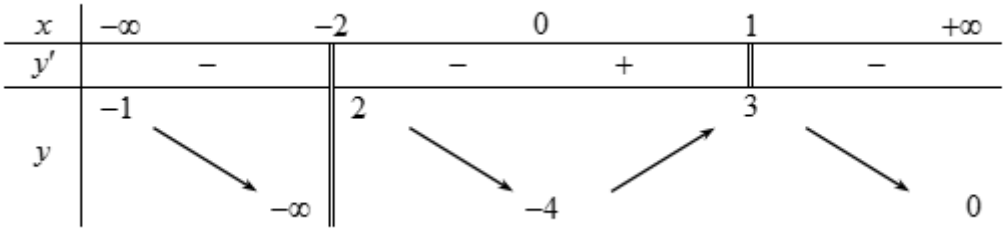
D. $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ nên $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn A

Từ bảng biến thiên, ta được:

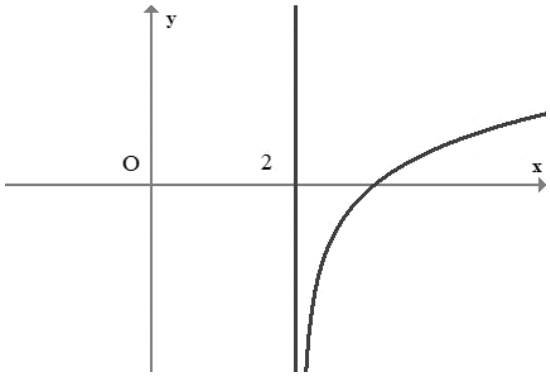
$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=-\infty$ suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 đường tiệm cận.

Câu 6. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Chọn phát biểu **đúng.**



A. Đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ có tiệm cận đứng $x=3$.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ có tiệm cận đứng $x=2$.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ có tiệm cận đứng $x=1$.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ không có tiệm cận đứng.

Lời giải:

Chọn C

Nhìn đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=2$. Suy ra đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ có tiệm cận đứng $x+1=2\Rightarrow x=1$.

Câu 7. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 đường tiệm cận ?

A. $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.

Lời giải:

Chọn C

Xét phương án C:

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^+} y=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}=+\infty$ nên $x=1$, $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}$ có ba đường tiệm cận.

Câu 8. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x+1}$ lần lượt là

A. $x=0;\ y=-1.$ **B.** $x=-1;\ y=1.$ **C.** $x=1;\ y=-1.$ **D.** $x=-1;\ y=0.$

Lời giải:

Chọn D

Tập xác đinh $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 0$, suy ra $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-1^+} y = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$, suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 9. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận là các đường thẳng $y=3$ và $x=1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

Lời giải:

Chọn D

Áp dụng định nghĩa về đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mức độ 2

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+1}$. Tìm m để đồ thị hàm số có tọa độ giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang nằm trên đường thẳng $d: y=x-m+1$.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

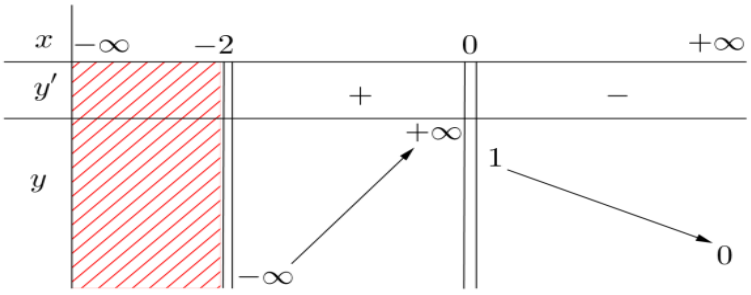
Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y=-\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Và $\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty} y=1$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

Suy ra giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $I(-1;1)\in d: y=x-m+1$.

$\Rightarrow 1=-1-m+1\Leftrightarrow m=-1.$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị của hàm số đã cho có số tiệm cận đứng là n, số tiệm cận ngang là d. Giá trị của $T=2019n-2020d$ là



A. -4038. **B.** 2018. **C.** 2001. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)=-\infty$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x=0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, suy ra đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

$\Rightarrow n=2; d=1\Rightarrow T=2018.$

Câu 3. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

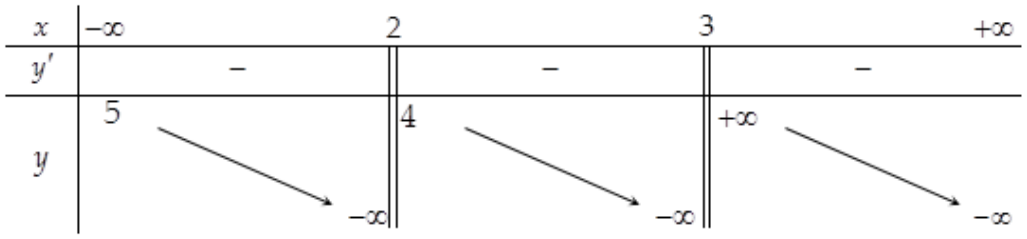
Tập xác định: $D=(1;\ +\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+}y=-\infty$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 1.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

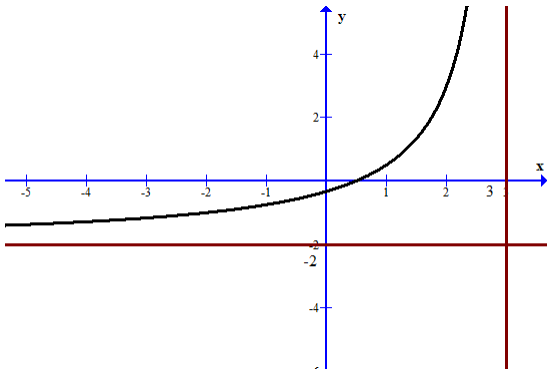
Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=5\Rightarrow y=5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

Vậy số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 1.

Câu 5. Biết hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là

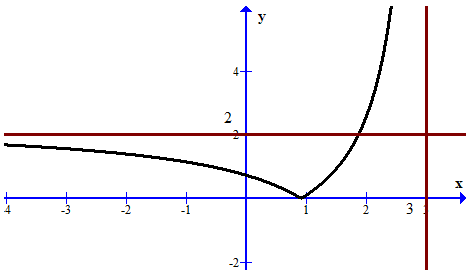


A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $y=|f(x)|$ là



Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 1 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 6. Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\left(-1;1\right)$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}=+\infty$. Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}=0$. Suy ra $x=-1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác do tập xác định của hàm số là $D=\left(-1;1\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho một đường tiệm cận.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn B

Tập xác định $D=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;1\right)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}=0$. Suy ra $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}=+\infty$. Suy ra $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x-m^2+1}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m\neq 0$. **B.** $m=0$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn A

Để đồ thị (C) có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-2x-m^2+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1^2-\left(-m^2+1\right)>0\\ 1^2-2.1-m^2+1\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\\ -m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0$$

Câu 9. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ có các đường tiệm cận là $x=3, y=2$.

Do vậy hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ hình chữ nhật diện tích bằng 6.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+1}{2-x}$ đi qua điểm $A(2;1)$.

A. $m=-2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Lời giải:

Chọn C

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx+1}{2-x}=-m$ nên phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $(d): y=-m$.

(d) đi qua điểm $A(2;1)$ nên $-m=1$. Vậy $m=-1$.

Mức độ 3

Câu 1. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

A. $m<\dfrac{3}{2};m\neq 1;m\neq -3$.

B. $m>-\dfrac{3}{2};m\neq 1$.

C. $m>-\dfrac{3}{2}$.

D. $m<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m+3>0\\ m^2+2m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m\neq 1\\ m\neq -3\end{cases}.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A\in(C)$. Tiếp tuyến với (C) tại A tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là bao nhiêu?

A. $2+2\sqrt{2}$.

B. $4-2\sqrt{2}$.

C. $3-\sqrt{2}$.

D. $4+2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$.
Suy ra $I(-1;1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.
Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $A\in(C)$ là: $y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{(x_A+1)^2}(x-x_A)+\frac{x_A-3}{x_A+1}.$$

Giả sử M và N lần lượt là hai giao điểm của tiếp tuyến với (C) tại A với đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang. Suy ra $M\left(-1;\dfrac{x_A-7}{x_A+1}\right);N(2x_A+1;1)$.

Suy ra $IN=2|x_A+1|$, $IM=\dfrac{8}{|x_A+1|}$.

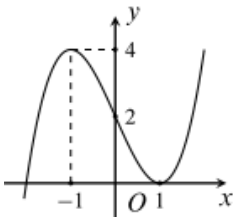
Khi đó diện tích tam giác ΔIMN là $S_{\Delta IMN}=\dfrac{1}{2}IN.IM=8$

Và chu vi tam giác ΔIMN là $C_{\Delta IMN}=IM+IN+\sqrt{IM^2+IN^2}\geq 2\sqrt{IM.IN}+\sqrt{2}\sqrt{IM.IN}$

$\Rightarrow C_{\Delta IMN} \geq 8+4\sqrt{2}$.

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp ΔIMN lớn nhất là $r_{\Delta IMN} = \dfrac{S}{p} = \dfrac{8}{4+2\sqrt{2}} = 4-2\sqrt{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận **đứng**?



A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét $f^2(x)-4f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=4 \end{array}\right.$.

Xét $f(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1<-1$ và $x_2=1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x=1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x)=4$ có 2 nghiệm $x_3>1$ và $x_4=-1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại $x=-1$. Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

B. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

C. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-2$.

D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-2$ và $y=2$.

Lời giải

Chọn D

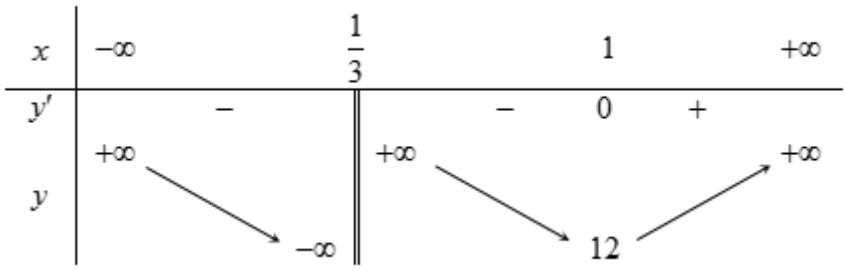
Tập xác định: $D=(1;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}} = 2$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=-2$$

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=-2$ và $y=2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:



Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3f(x)-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x)=\frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm a (với $a<\frac{1}{3}$).

Nên, tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{3f(x)-2}$ là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3};a\right\}$.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{3f(x)-2}=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-}\frac{1}{2f(x)+3}=0$;
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\frac{1}{2f(x)+3}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3f(x)-2}$ có 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 6. Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2020;2020]$ sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. 2019. **B.** 1.
C. 2022. **D.** 2021.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \le 1 \\ x \ne m \end{cases}$.

+) Nếu $m > 1$ thì $\lim\limits_{x \to m^+} y$; $\lim\limits_{x \to m^-} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+) Nếu $m = 1$ thì hàm số trở thành $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to 1^-$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} y$ không tồn tại.

Do đó, $m = 1$ thỏa mãn.

+) Nếu $m < 1$ thì $\lim\limits_{x \to m^+} y = \lim\limits_{x \to m^+} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to m^-} y = \lim\limits_{x \to m^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to m^+$ và $x \to m^-$.

Vậy $m \le 1$ và $m \in [-2020; 2020]$ nên có tất cả 2022 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \le -4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -4 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2 - m}$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có một nghiệm đơn $x = -1$ và một nghiệm kép khác -1 hoặc có đúng một nghiệm khác -1.

TH1: Phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có một nghiệm đơn $x = -1$ và một nghiệm kép khác -1.

Phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có nghiệm $x = -1$ nên $(-1)^3 - 3(-1)^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Với $m = -4$ phương trình trở thành $x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn vì $x = 2$ là nghiệm kép).

TH2: Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có đúng một nghiệm khác $-1 \Leftrightarrow x^3-3x^2=m$ có một nghiệm khác -1(*)

Xét hàm số: $y=x^3-3x^2 \Rightarrow y'=3x^2-6x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	

$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ (-1)^3-3.(-1)^2 \neq m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ m \neq -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right.$.

Kết hợp 2 TH ta được $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành.

A. $M(0;-1), M(3;2)$. **B.** $M(2;1), M(4;3)$.

C. $M(0;-1), M(4;3)$. **D.** $M(2;1), M(3;2)$.

Lời giải:

Chọn D

Do M thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ nên $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ với $x_0 \neq 1$.

Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x-1=0$ (d).

Ta có: $d(M,d)=d(M,Ox) \Leftrightarrow |x_0-1|=\left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y_0=-1 \\ x_0=4 \Rightarrow y_0=3 \end{array}\right.$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang.

A. $0<m<1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m=1$.

Lời giải:

Chọn D

- Nếu $m=0$ thì $y=x+1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m<0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2+1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{-m}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $0<m<1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m=1$ thì $y=x+\sqrt{x^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=0$.

Suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

- Với $m>1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C). Tính diện tích của tam giác IAB.

A. 2. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$y'=\frac{-3}{(x-1)^2},\forall x\neq 1.$$

(C) có tiệm cận đứng : $x=1$ (d_1) và tiệm cận ngang : $y=2$ (d_2) nên $I(1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)\in(C), x_0\neq 1$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$

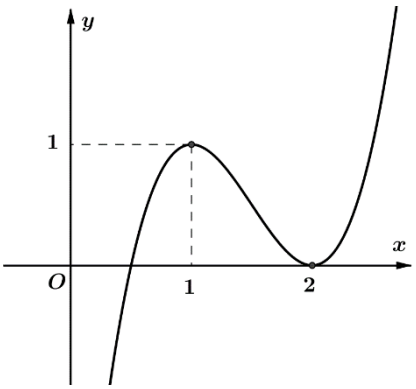
Δ cắt d_1 tại $A\left(1;\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\right)$ và cắt d_2 tại $B(2x_0-1;2)$.

Ta có $IA=\left|\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}-2\right|=\dfrac{4}{|x_0-1|}$; $IB=|(2x_0-1)-1|=2|x_0-1|$.

Do đó, $S=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=4$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Để biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa ta cần có: $x\ge 1$.

Từ đồ thị hàm số ta có:

+) $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=2\end{array}\right.$ với $0<x_1<1$. Từ đó suy ra: $f(x)=a(x-x_1)(x-2)^2$ với $a\neq 0$.

+) $f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $x_2>2$. Từ đó suy ra: $f(x)-1=b(x-1)^2(x-x_2)$ với $b\neq 0$.

Khi đó: $g(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a.b.x(x-x_1)(x-2)^2(x-1)^2(x-x_2)}=\dfrac{1}{a.b.x(x-x_1)(x-2)\sqrt{x-1}(x-x_2)}$.

Đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ thì cần có $x_0\ge 1$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x=1, x=2, x=x_2$.

vì $y=f(x)$ là hàm số bậc 3 nên

$x\left[f^2(x)-f(x)\right]$ có bậc là 7 và $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-1}$ có bậc nhỏ hơn 7. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang là: $y=0$.

Vậy, tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x)$ là 4.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn A

Có $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x-2}$. Điều kiện: $\begin{cases}x(x-m)\ge 0\\x\neq 2\end{cases}$.

- Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{|x|}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{m}{x}}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(\sqrt{1-\frac{m}{x}}+\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}}=-1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{|x|}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1.$$

Suy ra, $\forall m\in\mathbb{R}$, đồ thị hàm số luôn có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\pm1$.

Ta có: $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x-2}=\dfrac{x^2-mx-1}{(x-2)\left(\sqrt{x(x-m)}+1\right)}$ đặt $g(x)=x^2-mx-1$

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x-2}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị có duy nhất 1 đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(2-m)\ge0\\ g(2)\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le2\\ 3-2m\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le2\\ m\ne\frac{3}{2}\end{cases}\text{ mà } m\in(-2020;2020)\Rightarrow m\in(-2020;2]\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Mặt khác $m\in\mathbb{Z}$ nên $-2019\le m\le2$. Vậy, số giá trị m thỏa mãn đề bài là 2022.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Lấy điểm $M(x_0,y_0)$, $(x_0\le0)$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn $AI^2+IB^2=40$. Hỏi có tất cả bao nhiêu điểm M thỏa mãn đề bài?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Chọn B

+ TCĐ: $x=-1$ và TCN: $y=2$. Suy ra $I(-1;2)$.

+ $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$. PTTT tại điểm $M(x_0,y_0)$ là $d:y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$ (với $x_0\le0$)

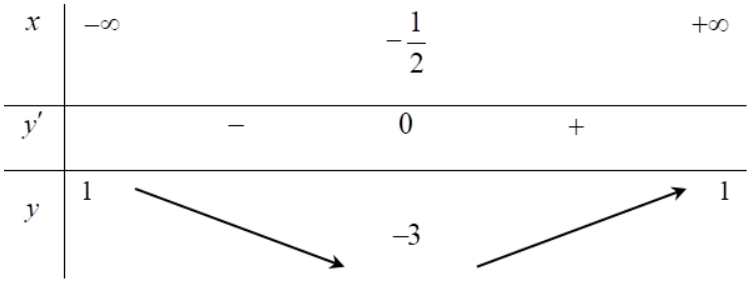
+ Giả sử A là giao điểm của d và TCĐ. Suy ra $A\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, B là giao điểm của d và TCĐ. Suy ra $B(2x_0+1;2)$.

$$+\ AI^2+IB^2=40\Leftrightarrow\left(\frac{2x_0-4}{x_0+1}-2\right)^2+(2x_0+2)^2=40\Leftrightarrow(x_0+1)^4-10(x_0+1)^2+9=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}(x_0+1)^2=1\\ (x_0+1)^2=9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_0=0\\ x_0=-2\\ x_0=-4\\ x_0=2\end{bmatrix}.$$

Vậy có 3 điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây:



Biết tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+9}$ là số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(-3;1\right)$.

B. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

C. $m\in\left(-3;+\infty\right)$.

D. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f\left(x\right)+9}=\dfrac{1}{11}$. Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+9}$ có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{1}{11}$.

Ta có $2f\left(x\right)+9=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{9}{2}$ vô nghiệm vì đường thẳng $d:y=-\dfrac{9}{2}$ không cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+9}$ không có tiệm cận đứng.

$\Rightarrow$ tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+9}$ là 1

$\Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=m$ với $m\in\mathbb{R}$ có 1 nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ đường thẳng $\Delta:y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại duy nhất 1 điểm

Từ bảng biến thiên ta được $m=-3\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}\left(C\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $\left(-6;6\right)$ của tham số m để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất ?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}=0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó $\left(C\right)$ có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất khi $\left(C\right)$ có 3 đường tiệm cận đứng nên phương trình $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq3$.

Ta có : $(1)\Leftrightarrow (x-m)\left(x^2-2mx+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ g(x)=x^2-2mx+1=0(2)\end{array}\right.$

Suy ra $m\neq 3$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ \Delta>0 \\ g(3)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m^2-1>0 \\ 10-6m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1\end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;2;4;5\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi d là tiếp tuyến bất kì của $(C), d$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại A, B. Khi đó khoảng cách giữa A và B ngắn nhất là

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$

Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $(d_1): x=2$.

Tiệm cận ngang của đồ thị (C) là $(d_2): y=2$.

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$.

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\dfrac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}(d)$.

Tọa độ giao điểm của $(d),(d_1)$ là $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$.

Tọa độ giao điểm của $(d),(d_2)$ là $B(2x_0-2;2)$.

Suy ra $AB=\sqrt{4(x_0-2)^2+\dfrac{4}{(x_0-2)^2}}\geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(x_o-2)^4=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=3 \\ x_o=1\end{array}\right.$

Vậy $AB_{\min}=2\sqrt{2}$.

Câu 7. Giả sử đường thẳng $(d): x=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại một điểm duy nhất, biết khoảng cách từ điểm đó đến tiệm cận đứng của đồ thị hàm số bằng 3. Tổng các giá trị của m là

A. -1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn C

+ Tiệm cận đứng $\Delta: x=2$.

+ Giao điểm của đường thẳng $(d): x=m$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là $I\left(m;\dfrac{m+1}{m-2}\right)$.

+ Ta có: $d(I,\Delta)=|m-2|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 8. Số các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+m}{mx+1}$ có đúng 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang, đồng thời hai tiệm cận này tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 8 là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn C

Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{m} \\ 2\left(\dfrac{-1}{m}\right)+m\neq 0 \\ m\neq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{m} \\ m\neq 0 \\ m\neq\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{m} \\ m\neq 0 \end{array}\right.$.

Khoảng cách từ tiệm cận đứng đến trục Oy là $\left|\dfrac{-1}{m}\right|$.

Khoảng cách từ tiệm cận ngang đến trục Ox là $\left|\dfrac{2}{m}\right|$.

Theo giả thiết $\left|\dfrac{-1}{m}\right|.\left|\dfrac{2}{m}\right|=8\Leftrightarrow\left|\dfrac{-1}{m}.\dfrac{2}{m}\right|=8\Leftrightarrow\left|\dfrac{-2}{m^2}\right|=8\Leftrightarrow\dfrac{2}{m^2}=8\Leftrightarrow m^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2}(N) \\ m=-\dfrac{1}{2}(N) \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị $m=\dfrac{1}{2};m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tìm tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $S=[8;9)$ **B.** $S=\left[4;\dfrac{9}{2}\right)$ **C.** $S=\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$ **D.** $S=(0;9]$

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}0\le x\le 4\\ x^2-6x+2m>0\end{cases}$

Ta có $12+\sqrt{4x-x^2}\neq 0\ \forall x$ nên để (C_m) có hai tiệm cận đứng thì phương trình $\sqrt{x^2-6x+2m}=0\Leftrightarrow x^2-6x+2m=0(*)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;4]$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta'=9-2m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{2}$.

Gọi 2 nghiệm phân biệt của (*) là $x_1<x_2$. Ta có $0\le x_1<x_2\le 4$.

Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1.x_2=2m\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{cases}x_1x_2\ge 0\\ x_1+x_2\ge 0\\ (x_1-4)(x_2-4)\ge 0\\ (x_1-4)+(x_2-4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2\ge 0\\ x_1+x_2\ge 0\\ x_1x_2-4(x_1+x_2)+16\ge 0\\ (x_1+x_2)-8\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m\ge 0\\ 6\ge 0\\ 2m-24+16\ge 0\\ 6-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ 2m-8\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 4$$

Vậy $4\le m<\dfrac{9}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C), M là điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

A. $\left[\begin{matrix}M(1;1)\\ M(3;3)\end{matrix}\right.$. **B.** $\left[\begin{matrix}M(-1;-1)\\ M(3;3)\end{matrix}\right.$. **C.** $\left[\begin{matrix}M(1;1)\\ M(-3;-3)\end{matrix}\right.$. **D.** $\left[\begin{matrix}M(-1;-1)\\ M(-3;-3)\end{matrix}\right.$

Lời giải:

Chọn A

+ Đường tiệm cận đứng $\Delta_1: x=2$ và tiệm cận ngang $\Delta_2: y=2$. Suy ra giao hai tiệm cận là $I(2;2)$.

+ Do $M \in (C)$ nên $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, với $x_0 \neq 2$.

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $(d): y=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$.

+ (d) cắt Δ_1 tại $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$ và (d) cắt Δ_2 tại $B(2x_0-2;2)$.

+ Do đó $IA=\dfrac{2}{|x_0-2|}$, $IB=2|x_0-2|$, $AB=\sqrt{4(x_0-2)^2+\dfrac{4}{(x_0-2)^2}}$

+ Chu vi của tam giác AIB là:

$$IA+IB+AB=\frac{2}{|x_0-2|}+2|x_0-2|+\sqrt{4(x_0-2)^2+\frac{4}{(x_0-2)^2}} \geq 4+2\sqrt{2}$$

+ Chu vi nhỏ nhất khi $(x_0-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} M(1;1) \\ M(3;3) \end{array}\right.$.

DẠNG TOÁN 16: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1.Bất phương trình lôgarit cơ bản:

1. Xét bất phương trình $\log_a x \ge b$.

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a x \ge b \Leftrightarrow x \ge a^b$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a x \ge b \Leftrightarrow 0<x\le a^b$.

2. Xét bất phương trình $\log_a x \le b$.

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a x \le b \Leftrightarrow 0<x\le a^b$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a x \le b \Leftrightarrow x \ge a^b$.

3. Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a x \ge b \Leftrightarrow 0<x\le a^b$.

4. Xét bất phương trình $\log_a x < b$.

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a x < b \Leftrightarrow 0<x< a^b$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$.

Mở rộng:

1. $\log_a f(x) \ge b$

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a f(x) \ge b \Leftrightarrow f(x) \ge a^b$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a x \ge b \Leftrightarrow 0< f(x) \le a^b$.

Các dạng $\log_a f(x) > b$; $\log_a f(x) \le b$; $\log_a f(x) < b$ tương tự.

2. $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$

Trường hợp $a>1$, ta có $\log_a f(x) \ge \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x) > 0$.

Trường hợp $0<a<1$, ta có $\log_a f(x) \ge \log_a f(x) \Leftrightarrow 0< f(x) \le g(x)$.

Các dạng BPT $\log_a f(x) < \log_a g(x); \log_a f(x) \le \log_a g(x)$ làm tương tự

2.Các phương pháp thường dùng giải Bất phương trình logarit:

- Đưa về dạng BPT cơ bản.
- Đưa về cùng cơ số.

- Đặt ẩn phụ.
- Mũ hóa.
- Phương pháp hàm số.

I. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

-Điều kiện xác định của bất phương trình.
-Giải BPT logarit cơ bản;thường gặp.
-Tìm nghiệm nguyên của bất phương trình logarit.
-Tìm nghiệm bất phương trình logarit thỏa mãn điều kiện cho trước.
-Cho một bất phương trình lôgarit, nếu đặt ẩn phụ thì thu được bất phương trình nào (ẩn t).
-Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình logarit thỏa mãn điều kiện cho trước như có nghiệm; vô nghiệm; nghiệm đúng với mọi x.
-Biện luận số nghiệm BPT .

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \ge 1$ là

A. $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán giải bất phương trình lôgarit dạng cơ bản $\log_a x \ge b$.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm điều kiện.

B2: Giải bất phương trình.

B3: Đối chiếu điều kiện và kết luận tập nghiệm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 10$. So với điều kiện, ta được $x \ge 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[10;+\infty)$.

Bài tập tương tự và phát triển

↳ Mức độ 1

Câu 1. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_3(2x-3)>1$ là:

A. $x>3$. **B.** $x>\frac{3}{2}$. **C.** $x \ge \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}<x<3$.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$.

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $x>\frac{3}{2}$.

Câu 2. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)<-2$ là:

A. $0<x<2$. **B.** $x<0$. **C.** $x>2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện: $x^2-2x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Câu 3. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_2(\log_2 x)>0$ là:

A. $x>1$. **B.** $x>0$. **C.** $x>2$. **D.** $0<x<1$.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $x>1$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<1$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(0;2]$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_2 x<1 \Leftrightarrow x<2$. So với điều kiện, ta được $0<x<2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;2)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x là nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -2$

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq (\frac{1}{3})^{-2} \Leftrightarrow x \leq 9$. Đối chiếu điều kiện, ta được $0<x \leq 9$.

Do x nguyên nên có tất cả 9 giá trị x thỏa mãn bất phương trình.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là:

A. $(-\infty;10)$. **B.** $(1;9)$. **C.** $(1;10)$. **D.** $(-\infty;9)$.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Ta có $\log_2(x-1)<3\Leftrightarrow x-1<2^3\Leftrightarrow x<9$. So với điều kiện, ta được $1<x<9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1;9)$.

Câu 7. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)>-3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

A.Vô số. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $3x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)>-3\Leftrightarrow 3x-1<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\Leftrightarrow 3x<28\Leftrightarrow x<\frac{28}{3}$.

So với điều kiện, ta được $\frac{1}{3}<x<\frac{28}{3}$.

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên là $x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Số nghiệm nguyên là 9.`

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x+1)<2$ là:

A. $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};12\right)$. **C.** $(-\infty;12)$. **D.** $(12;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $2x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$.

$\log_5(2x+1)<2\Leftrightarrow 2x+1<25\Leftrightarrow 2x<24\Leftrightarrow x<12$.

Đối chiếu điều kiên ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{1}{2};12\right)$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}2x\geq\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{9}$ là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(0;1]$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log_{\frac{2}{3}} 2x \ge \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} \Leftrightarrow 2x \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0;1]$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(1-x) \ge \log_3 27$ là:

A. $(-\infty;-2)$. **B.**. $[-2;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện: $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

Ta có $\log_3(1-x) \ge \log_3 27 \Leftrightarrow 1-x \ge 3 \Leftrightarrow x \le -2$.

Đối chiếu điều kiện có tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;-2]$.

↳ Mức độ 2

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log^2_3 x - 5\log_3 x + 4 \ge 0$

A. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **B.** $S=[3;81]$.

C. $S=(0;3\cup 81;+\infty$. **D.** $S=(-\infty;3\cup 81;+\infty$.

Lời giải:

Chọn C.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x, t\in R$. Bất phương trình trở thành:

$$t^2-5t+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 4 \\ t\le 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x\ge 4 \\ \log_3 x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 81 \\ x\le 3 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $S=(0;3\cup 81;+\infty$.

Câu 2. Khi đặt $t=\log_5 x$, $x>0$ thì bất phương trình $\log^2_5(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-6t-4\le 0$. **B.** $t^2-6t-5\le 0$.

C. $t^2-4t-4\le 0$. **D.** $t^2-3t-5\le 0$.

Lời giải:

Chọn C

$\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}}x-5\le 0 \Leftrightarrow (\log_5 x+1)^2-6\log_5 x-5\le 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x-4\log_5 x-4\le 0$.

Với $t=\log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2-4t-4\le 0$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

A. $S=(-1;2)$. **B.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn B .

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Khi đó: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow x+1>2x-1\Leftrightarrow x<2$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm BPT là: $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 4. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+1)\ge\log_2(x-5)$

A. $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-\frac{1}{2};5\right)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $S=\left[\frac{4}{3};5\right)$.

Lời giải:

Chọn D .

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1>0\\5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\x<5\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<5$.

Khi đó: $\log_2(2x+1)\ge\log_2(5-x)\Leftrightarrow 2x+1\ge 5-x\Leftrightarrow x\ge\frac{4}{3}$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm BPT là: $S=\left[\frac{4}{3};5\right)$.

Câu 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3 x>\log_3(8-x)$

A. $S=(-\infty;4)$. **B.** $S=(8;+\infty)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $S=(4;8)$.

Lời giải:

Chọn D .

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\8-x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<8$.

Khi đó: $\log_3 x>\log_3(8-x)\Leftrightarrow x>8-x\Leftrightarrow x>4$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm BPT là: $S=(4;8)$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2(4-x)-1}$ là:

A. $(-\infty;4)$. **B.** $[2;4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải:

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases}4-x>0\\ \log_2(4-x)-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ \log_2(4-x)\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ 4-x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x\le 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty;2]$.

Câu 7. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5)>\log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên bé hơn 10?

A. 9. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 10.

Chọn C.

Điều kiện: $\begin{cases}2x+5>0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{5}{2}\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Khi đó: $\log_2(2x+5)>\log_2(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x+5>x-1\Leftrightarrow x>-6$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là: $1;+\infty$.

Số giá trị nguyên dương bé hơn 10 là: 8 .

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)<0$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn A

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2x>0\\ 3x^2-2x>1\end{cases}\Leftrightarrow 3x^2-2x-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Tập nghiệm BPT là: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 9. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}11-2x>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{11}{2}\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\dfrac{11}{2}$.

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0\Leftrightarrow\log_3\dfrac{11-2x}{x-1}\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{11-2x}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{12-3x}{x-1}\ge 0$

$\Leftrightarrow 1<x\le 4$.

Kết hợp điều kiện tập nghiệm BPT là $S=(1;4]$.

Số giá trị nguyên của S là: 3.

Câu 10. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x-1)>\log_9(x^2)$.

A. $S=(1;+\infty)$ **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=(0;1)$. **D.** $S=\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$. Khi đó bất phương trình tương đương với

$\log_3(2x-1)>\log_9(x^2)\Leftrightarrow\log_3(2x-1)>\log_3 x\Leftrightarrow x>1$. Vậy tập nghiệm là $S=(1;+\infty)$.

↳ Mức độ 3

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(2x^2+3x+1)>\log_2(2x+1)$ là:

A. $S=\left[-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B .** $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **D.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải:

Chọn C.

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3x+1>0\\2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}.\\x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có: $\log_4(2x^2+3x+1)>\log_2(2x+1)$

$\Leftrightarrow\log_4(2x^2+3x+1)>\log_4(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1>4x^2+4x+1\Leftrightarrow 2x^2+x<0$

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<x<0.$

Đối chiếu điều kiện có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 2. Bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}}\left[\log_2(x+\sqrt{2x^2-x})\right]<0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương bé thua 2020.

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải:

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-x\ge 0 & (1)\\ x+\sqrt{2x^2-x}>0 & (2)\\ \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>0 & (3)\end{cases}$

Ta có: $\log_{\frac{e}{3}}\left[\log_2(x+\sqrt{2x^2-x})\right]<0 \Leftrightarrow \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>1 (TM(3))$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x}>2\ (TM(2))$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}>2-x \Leftrightarrow \left[\begin{cases}2-x<0\\ 2x^2-x\ge 0\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}2-x\ge 0\\ 2x^2-x>(2-x)^2\end{cases}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x>2\\ \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2}\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>1\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ 1<x\le 2\\ x<-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>1\end{array}\right.$ (thỏa mãn (1)).

Tập nghiệm BPT là $S=(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

Số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 2020 là 2018 giá trị.

Câu 3. Bất phương trình $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$ có tập nghiệm là $a;b$. Tổng $a+b$ bằng

A. $\frac{19}{8}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải:

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases}4x-3>0\\ 18x+27>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{4}\\ x>\frac{-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$.

Khi đó: $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$

$\Leftrightarrow (4x-3)^2\le 18x+27$

$\Leftrightarrow 16x^2-42x-18\le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{8}\le x\le 3.$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là: $\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Vậy $a+b=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$.

Câu 4. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Khi đó: $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)\Leftrightarrow \log_2(x+1)\le\log_2\frac{4}{x-2}$

$\Leftrightarrow x+1\le\frac{4}{x-2}\Leftrightarrow\frac{x^2-x-6}{x-2}\le 0$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x\le -2\\2<x\le 3\end{bmatrix}$

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm là: $2;3$ .Bất phương trình có nghiệm nguyên là $x=3$

Vậy tổng các nghiệm nguyên là 3.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2\left[x^2+(m-1)x+m+3\right]\ge\log_2(x^2+4)$ nghiệm đúng với mọi $x\in R$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A.

Ta có: $\log_2\left[x^2+(m-1)x+m+3\right]\ge\log_2(x^2+4)$ nghiệm đúng $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+m+3\ge x^2+4$, $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow (m-1)x+m-1\ge 0$, $\forall x\in R$

$\Leftrightarrow m=1$.

Vậy có một giá trị m thỏa mãn.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x+2m-5<0$

có nghiệm.

A. $m>6$. **B.** $m<6$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải:

Chọn D.

$\log_3^2 x-2\log_3 x+2m-5<0(1)$

Điều kiện $x>0$. Đặt $\log_3 x=t;t\in R$.

BPT trở thành: $t^2-2t+2m-5<0\Leftrightarrow 2m<-t^2+2t+5$ (2)

(1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t\in R$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+5$ trên R .

$f'(t)=-2t+2$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$. Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	6	↘	$-\infty$

Từ BBT ta có bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m<6\Leftrightarrow m<3$.

Vậy $m<3$.

Câu 7. Tìm tất cả giá trị thực của tham số *m* để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{2}}9$ vô nghiệm?

A. $-6\le m\le 6$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<-6 \end{array}\right.$. **C.** $m<6$. **D.** $-6<m<6$.

Lời giải:

Chọn D.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{2}}9\Leftrightarrow\begin{cases} mx-x^2>0 \\ mx-x^2\ge 9 \end{cases}\Leftrightarrow mx-x^2\ge 9\Leftrightarrow x^2-mx+9\le 0$.

$\log_{\frac{1}{2}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{2}}9$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow x^2-mx+9\le 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow x^2-mx+9>0$,$\forall x\in R$

$\Leftrightarrow\Delta<0$

$\Leftrightarrow m^2-36<0\Leftrightarrow -6<m<6$

Vậy $-6<m<6$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\log_2^2 x+m\log_2 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x\in(0;+\infty)$?

A. $m \le -4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge 0 \end{array}\right.$. **C.** $-4 \le m \le 0$. **D.** $-4 < m < 0$.

Lời giải:

Chọn C

Đkiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x; t \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 + mt - m \ge 0$

BPT đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in (0; +\infty)$ khi và chỉ khi $t^2 + mt - m \ge 0$ nghiệm đúng $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4m \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$.

Vậy $-4 \le m \le 0$

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $x^{\ln x} + e^{\ln^2 x} \le 2e^4$ có dạng $[a; b]$. Tính $2ab$.

A. -8. **B.** 2. **C.** e^2. **D.** e^4.

Lời giải:

Chọn B.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có: $e^{\ln^2 x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln x}$

$x^{\ln x} + e^{\ln^2 x} \le 2e^4 \Leftrightarrow 2e^{\ln^2 x} \le 2e^4 \Leftrightarrow \ln^2 x \le 4 \Leftrightarrow -2 \le \ln x \le 2$

$\Leftrightarrow e^{-2} \le x \le e^2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^2} \le x \le e^2$.

Tập nghiệm BPT là $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$. Do đó $2ab = 2.\frac{1}{e^2}.e^2 = 2$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$ là:

A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **B.** $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **D.** $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải:

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2^{u^2} - 10\left(2^u\right)^{-u} + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{u^2} - \frac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0$ (1)

Đặt $t = 2^{u^2}$, $t \ge 1$. ta có $(1) \Rightarrow t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -5 \\ t > 2 \end{array}\right. \Rightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u < -1 \\ u > 1 \end{array}\right.$.

- Với $u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$
- Với $u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>2$ hoặc $0<x<\frac{1}{2}$.

↳ Mức độ 4

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$.

A. $-12\le m\le 13$. **B.** $m\le 13$. **C.** $m\ge -12$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -12 \\ m\ge 13 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Chọn A

$\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+1>\dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2+4x+m>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>-x^2-4x=f(x) \\ m<4x^2-4x+5=g(x) \end{cases}$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge \underset{2<x<3}{Max}\, f(x)=-12 \quad \text{khi } x=2 \\ m\le \underset{2<x<3}{Min}\, f(x)=13 \quad \text{khi } x=2 \end{cases}\Leftrightarrow -12\le m\le 13.$

Câu 2. Bất phương trình: $\log_2{}^2 x-4038\log_2 x+2019^2+x^2-2^{2020}x+2^{4038}\le 0$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left[2^{2019};+\infty\right)$. **B.** $S=(-\infty;2020)$. **C.** $S=\left\{2^{2019}\right\}$. **D.** $S=(2019;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn C

$\log_2{}^2 x-4038\log_2 x+2019^2+x^2-2^{2020}x+2^{4038}\le 0$.

$\Leftrightarrow\left(\log_2 x-2019\right)^2+\left(x-2^{2019}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases} \log_2 x-2019=0 \\ x-2^{2019}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=2^{2019}$.

Câu 3. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-2)\ge 1$ đồng thời tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $4x+3y-2m=0$. Tính tổng các giá trị của S.

A. 10. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-2)\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases} 4x+4y-2>0 \\ 4x+4y-2\ge x^2+y^2+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4x+4y-2\ge x^2+y^2+2\Leftrightarrow 4\ge(x-2)^2+(y-2)^2$ (1)

Do tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $4x+3y-2m=0(2)$.

Nên $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\le 4\\ 4x+3y-2m=0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hay đường thẳng (2)tiếp xúc với hình tròn (1).

$$d_{(I;\Delta)}=\frac{|8+6-2m|}{5}=2\Leftrightarrow|14-2m|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=12\\ m=2\end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị của S là 14.

Câu 4. Cho bất phương trình $\log_{m^2+1}\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)\ge(m-1)^2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải:

Chọn B.

Điều kiện cần: Nhận thấy nếu $x=x_0$ là nghiệm của bất phương trình đã cho thì $x=-x_0$ cũng là nghiệm của bất phương trình. Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=-x_0\Leftrightarrow x_0=0$.

Thay $x=0$ và bất phương trình thu được $\log_{m^2+1}1\ge(m-1)^2\Leftrightarrow(m-1)^2\le 0\Leftrightarrow m=1.$

Điều kiện đủ: Thay $m=1$ vào bất phương trình đã cho ta được

$$\log_2\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)\ge 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+1}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\le 1\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x=0.$$

Vậy với $m=1$ bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m đê bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in R$

A. $-1<m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m<3$. **D.** $2<m\le 3$.

Lời giải:

Chọn D.

$$1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_5 5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\ 5(x^2+1)\ge mx^2+4x+m\end{cases}$$

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\ 5(x^2+1)\ge mx^2+4x+m\end{cases},\forall x\in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ (5-m)x^2-4x+5-m\geq 0 \end{cases}, \forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 4-m^2<0 \\ 5-m>0 \\ -m^2+10m-21\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 3 .$$

Câu 6. Biết bất phương trình $\log_{2020}\left(x.2020^{x-1}\right)\leq m(x-1)$ nghiệm đúng với mọi x dương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m\in[1;2]$. **B.** $m\in[4;5]$. **C.** $m\in[3;4)$. **D.** $m\in(5;6]$.

Lời giải:

Chọn A.

Bất phương trình $\log_{2020}\left(x.2020^{x-1}\right)\leq m(x-1)$ nghiệm đúng với mọi x dương

$\Leftrightarrow \log_{2020} x+x-1\leq m(x-1)$ đúng với $\forall x>0$.

$\Leftrightarrow \log_{2020} x\leq (m-1)x-(m-1)$ đúng với $\forall x>0\ (*)$

Khi đó $(*)$ đúng khi $y=(m-1)x-(m-1)$ là tiếp tuyến của đồ thị $f(x)=\log_{2020} x$ tại điểm $M(1;0)$

$\Leftrightarrow m-1=f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2020} \Leftrightarrow m=1+\dfrac{1}{\ln 2020}\approx 1{,}131\in[1;2]$.

Câu 7. Gọi $S=[a;b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_3\left(x.3^x\right)\geq\sqrt{m}(x-1)+1$ có nghiệm đúng với mọi $x\in[3;9]$. Tính tổng $T=a+b$.

A. $T=\dfrac{9}{4}$. **B.** $T=\dfrac{61}{16}$. **C.** $T=\dfrac{41}{16}$. **D.** $T=\dfrac{25}{16}$.

Lời giải:

Chọn D.

Bất phương trình $\log_3\left(x.3^x\right)\geq\sqrt{m}(x-1)+1\Leftrightarrow \log_3 x\geq\left(\sqrt{m}-1\right)x-\left(\sqrt{m}-1\right)(*)$.

Ta cần tìm m để $(*)$ nghiệm đúng $\forall x\in[3;9]$.

Xét sự tương giao của đồ thị $y=\log_3 x(C); d: y=\left(\sqrt{m}-1\right)x-\left(\sqrt{m}-1\right)$.

Xét $\sqrt{m}-1\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 1$ khi đó với $\forall x\geq 1$ thì (C) nằm phía trên của đường thẳng (d) hay (*) đúng với $\forall x\geq 1$ nghĩa là nó cũng đúng với mọi $\forall x\in[3;9]$ (1).

Xét $\sqrt{m}-1>0\Leftrightarrow m>1$. Khi đó đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ và một điểm có hoành độ $x=x_0$.

Xét $x_0=9\Rightarrow m=\dfrac{25}{16}$. Khi (d) có hệ số góc nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$ thì $x_0>9$. Do đó các giá trị thỏa mãn trường hợp này là $m\in\left(1;\dfrac{25}{16}\right](2)$.

Từ (1) và (2) suy ra : $m\in\left[0;\frac{25}{16}\right]=S\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\frac{25}{16}\end{cases}\Rightarrow T=a+b=\frac{25}{16}$.

Câu 8. Biết bất phương trình $\log_m x\ge\frac{\left(3m^2-10m+4\right)(x-1)}{\ln m}$ nghiệm đúng với mọi x dương. Khi đó tập các giá trị m là tập con của tập hợp nào ?.

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{15}{4}\right]$. **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{15}{4};4\right)$.

Lời giải:

Chọn B.

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=\log_m x$ nằm phía trên đường thẳng $(d):y=\frac{\left(3m^2-10m+4\right)(x-1)}{\ln m}$.

Nhận thấy nếu hàm số $y=\log_m x$ đồng biến sẽ không thỏa mãn. Hàm số $y=\log_m x$ phải nghịch biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow 0<m<1$ (*).

Ta cần tìm m sao cho (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(3m^2-10m+4\right)}{\ln m}=f'(1)=\frac{1}{\ln m}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\ln m}=\frac{\left(3m^2-10m+4\right)}{\ln m}\Leftrightarrow 3m^2-10m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{2}{5}\right)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm $m\log_{3-\sqrt{4-x}}3\ge\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)$

A. $m>0$. **B.** $m\ge 2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}\le m\le 12\log_3 5$. **D.** $m\ge 12\log_3 5$.

Lời giải:

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases}4-x\ge 0\\3-\sqrt{4-x}>0\\3-\sqrt{4-x}\ne 1\\x\ge 0\\x+12\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 4$

Nhận thấy $x>0\Rightarrow 3-\sqrt{4-x}>1$ nên $\log_{3-\sqrt{4-x}}3>\log_{3-\sqrt{4-x}}1=0$

$m\log_{3-\sqrt{4-x}}3 \ge x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$

$\Leftrightarrow m \ge \dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\log_{3-\sqrt{4-x}}3}$

$\Leftrightarrow m \ge \left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\log_3(3-\sqrt{4-x})$

Đặt $f(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\log_3(3-\sqrt{4-x})$

$f'(x)=(\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+12}})\log_3(3-\sqrt{4-x})+(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}).\dfrac{1}{(3-\sqrt{4-x})\ln 3.2\sqrt{4-x}}$

$f'(x)>0\ \forall x\in(0;4)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(0;4)$.

Tập giá trị của $f(x)$ là $(0;12)$. Do đó bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m>0$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(1;2020)$ sao cho bất phương trình $\log_m x>\log_x m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải :

Chọn B

$\log_m x>\log_x m\ ,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln m}>\dfrac{\ln m}{\ln x}\ ,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

$\Leftrightarrow \ln^2 x>\ln^2 m,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ (Do $x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right),m\in(1;2020)$ nên $\ln x<0,\ln m>0$.

Xét hàm số: $f(x)=\ln^2 x;x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ có $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}<0\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Do đó $\Leftrightarrow \ln^2 x>\ln^2 m,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)\Leftrightarrow \ln^2\dfrac{1}{3}>\ln^2 m\Leftrightarrow \ln^2 3\ge\ln^2 m\Leftrightarrow \ln 3\ge\ln m$

$\Leftrightarrow m\ge 3$.

Do $m\in(1;2020)$ nên các giá trị m nguyên là: $m\in\{3;4;5;...;2019\}$. Có tất cả 2017 giá trị.

DẠNG TOÁN 17:
SỰ TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ (ĐẾM SỐ NGHIỆM CỦA PT KHI BIẾT ĐỒ THỊ)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \qquad (*)$

- Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ điểm chung của (C) và (C').
- Số nghiệm của $(*)$ chính là số điểm chung của hai đồ thị.
- Nếu $(*)$ vô nghiệm thì hai đồ thị không có điểm chung.

2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ có đồ thị (C).

- Điểm $I(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$, được gọi là điểm uốn của đồ thị (C).

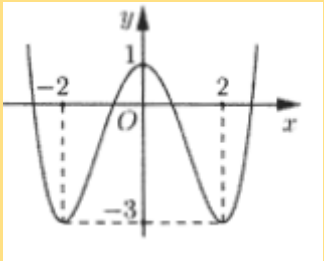
- Điểm $I(x_0; f(x_0))$ là tâm đối xứng của đồ thị (C).

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $y = f(x)$ tìm số nghiệm của phương trình
- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $y = f(x)$ biện luận số nghiệm của phương trình theo tham số m.
- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $y = f(x)$ tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = k$, với k là hằng số.
- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $y = f(x)$ biện luận số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ theo tham số m.
- Tìm số điểm chung của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
- Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành thỏa mãn điều kiện cho trước
- Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm bậc ba (hoặc hàm trùng phương) cắt trục hoành tạo thành cấp số cộng hoặc cấp số nhân.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm phương trình $f(x) = -1$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định số nghiệm của phương trình dựa vào sự tương giao của 2 đồ thị**(cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)**

.....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ: (thầy cô liệt kê hết các công thức cần dùng cho biến đổi của bài toán)

- Sự tương giao giữa đồ thị của hai hàm số.
- Số giao điểm bằng với nghiệm của phương trình

.....

3. HƯỚNG GIẢI: (nếu là câu hỏi lý thuyết hay câu hỏi dễ quá chỉ có 1; 2 dòng thì bỏ qua bước này)
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x)=-1$ là PT hoành độ giao điểm của hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

Ta thấy đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=-1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại một điểm duy nhất, ký hiệu $(x_0;\ y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=4$. **B.** $y_0=0$. **C.** $y_0=2$. **D.** y_0-1.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3+x+2=-2x+2\Leftrightarrow x^3+3x=0\Leftrightarrow x\left(x^2+3\right)=0\Leftrightarrow x=0.$$

Do $x_0=0\Rightarrow y_0=2$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và đồ thị của hàm số $y=-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Số giao điểm của hai đồ thị chính bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2x^2+2=-x^2+4\Leftrightarrow x^4-x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị có tất cả 2 giao điểm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

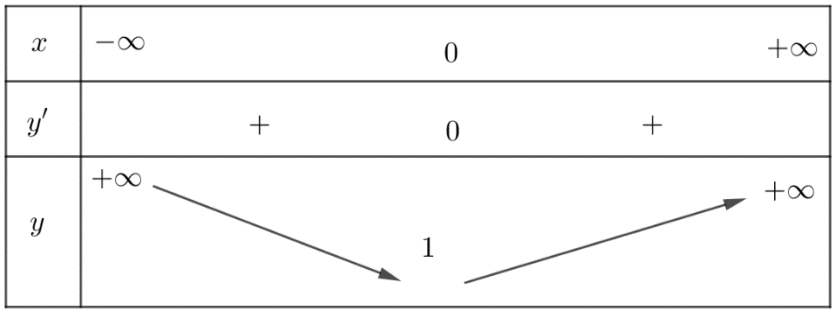
Lời giải

Chọn B.

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.

Theo BBT ta thấy đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

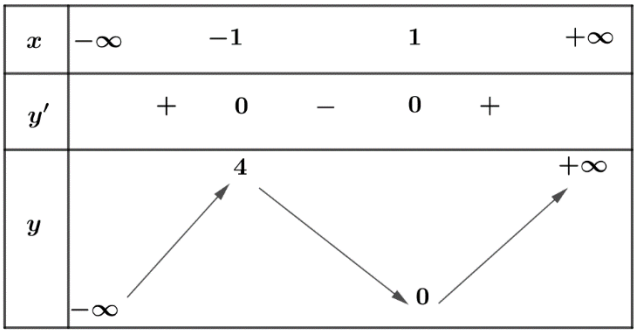
Lời giải

Chọn A.

Số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=-1$ không cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ nên phương trình $f(x)+1=0$ vô nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $f(x)+7=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

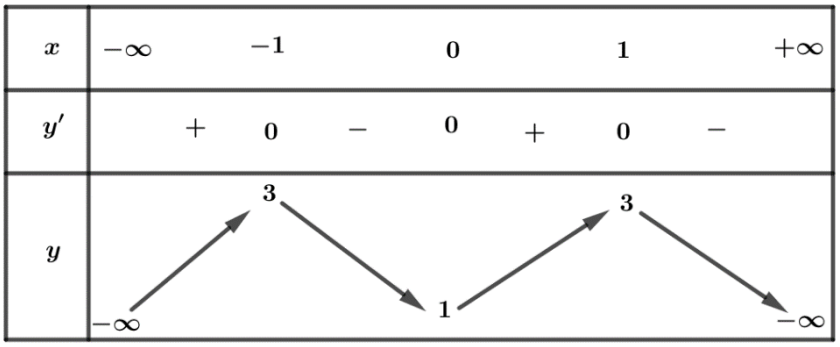
Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x)+7=0 \Leftrightarrow f(x)=-7$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-7$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=-7$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

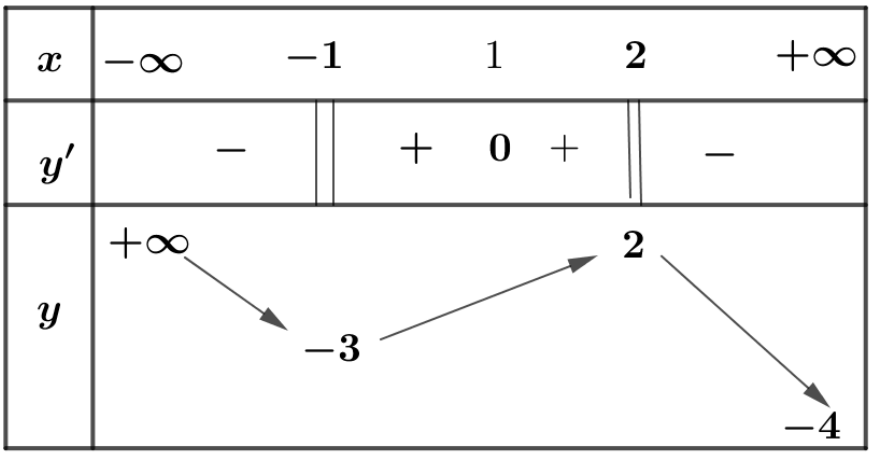
A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Với giá trị nào của m để phương trình $f(x)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $-3\le m\le 2$. **B.** $-4\le m\le 2$. **C.** $-3<m<2$. **D.** $-4<m<2$.

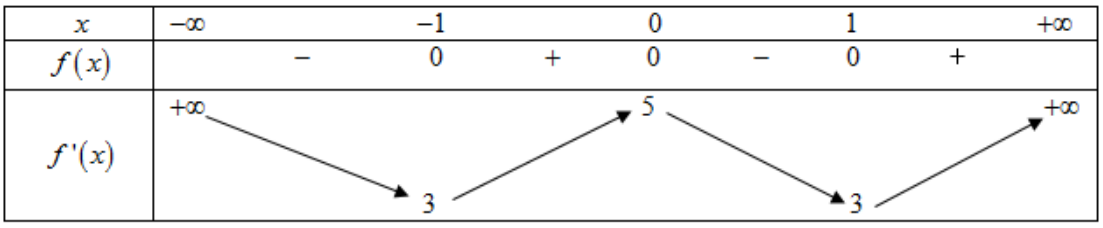
Lời giải

Chọn C.

Số nghiệm của phương trình $f(x)-m=0 \Leftrightarrow f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt thì $-3<m<2$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Với các giá trị nào của m thì phương trình: $f(x)-2+3m=0$ vô nghiệm?

A. $m \le -1$. **B.** $-1 < m < -\frac{1}{3}$. **C.** $m = -\frac{1}{3}$. **D.** $m > -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình $f(x) - 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 - 3m$.

Do đó, để phương trình vô nghiệm thì đường thẳng $y = 2 - 3m$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y = 2 - 3m$ không cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi $2 - 3m < 3 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị hàm số là (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy có ba giao điểm.

Cách 2: Xét hàm số $y = x^3 - 3x$.

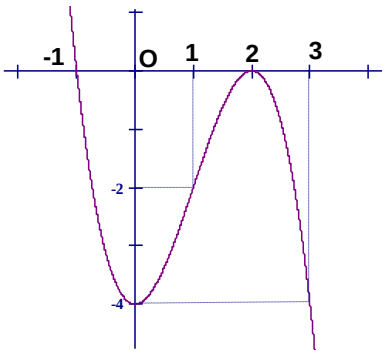
+ Có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

+ Xét dấu y' suy ra: hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CĐ} = 2$.

hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = -2$.

+ $y_{CĐ}.y_{CT} = -4 < 0$ dựa vào hình dạng đồ thị suy ra đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 3m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.



A. $m > \frac{1}{3}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{1}{3} \end{array}\right.$. **C.** $-1 < m < \frac{1}{3}$. **D.** $-1 < m$.

Lời giải

Chọn B.

Để đường thẳng $y = 3m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3m - 1 = -4 \\ 3m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Mức độ 2

Câu 1. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ lần lượt x_A,x_B. Khi đó giá trị của x_A+x_B bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x-2=\frac{2x+1}{x-1}\Leftrightarrow x^2-3x+2=2x+1\Leftrightarrow x^2-5x+1=0.$$

Do đó $x_A+x_B=5$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

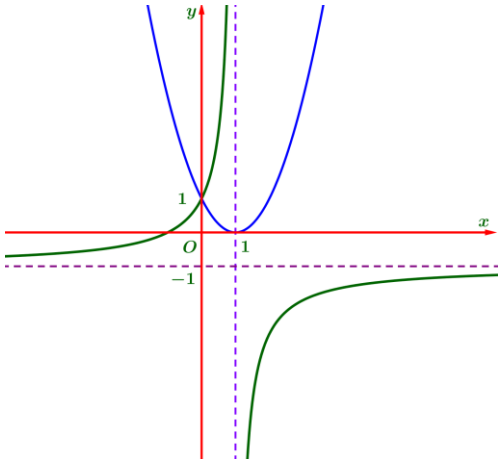
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	-1

Số nghiệm của phương trình $f(x)-x^2+2x-1=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

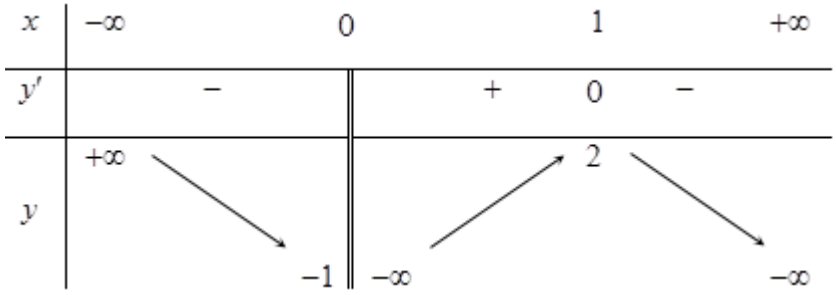
Chọn B.



Số nghiệm của phương trình $f(x)-x^2+2x-1=0\Leftrightarrow f(x)=x^2-2x+1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và parabol $y=x^2-2x+1$ (Có đỉnh $I(1;0)$, có bề lõm hướng lên)

Theo BBT và dựa vào dạng của parabol $y=x^2-2x+1$ ta thấy parabol $y=x^2-2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm duy nhất.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau :



Phương trình $f(x)=m$, với $m\in(-1;2)$ có số nghiệm là :

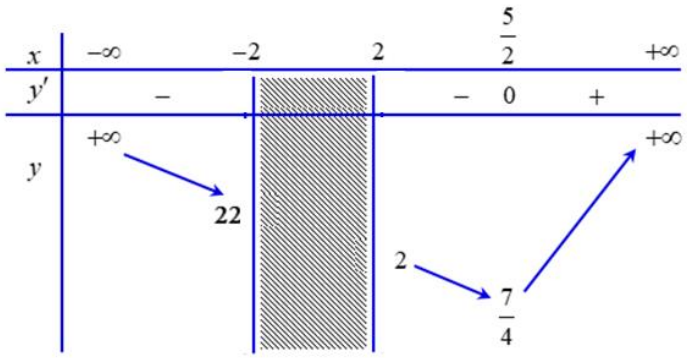
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $m\in(-1;2)$, đường thẳng $y=m$ sẽ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Do đó, với $m\in(-1;2)$, phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[2;+\infty)$, có bảng biến thiên như hình.



Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$. **B.** $[22;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào BBT, $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt khi $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\in\left(\frac{7}{4};2\right]\cup[22;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên từng khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, có bảng biến thiên như bên dưới. Tìm m để phương trình $f(x)-m=0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	1	$\nearrow$	3 $\searrow$	$-\infty$

A. $m \le 1$. **B.** $1 < m \le 3$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m < 1 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \le 1 \end{array}\right.$.

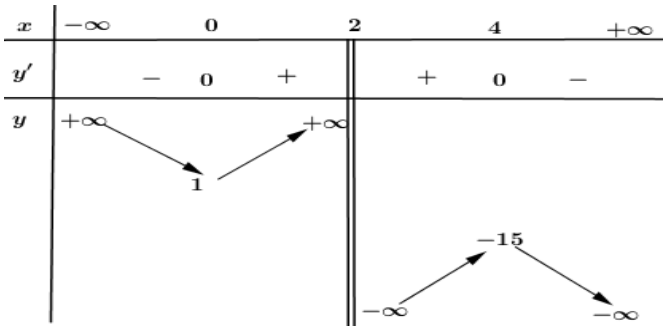
Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm thì $m = 3$ hoặc $m \le 1$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm m để phương trình $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 15 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -15 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 15 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -15 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C.

Số nghiệm của phương trình $f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -m$.

Dựa vào BBT $f(x) + m = 0$ có nhiều nghiệm thực nhất

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhiều nhất tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m > 1 \\ -m < -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 15 \end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$-\infty$	$\nearrow$	2 $\searrow$	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

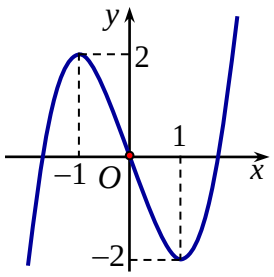
A. $[-1;2]$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-1;2]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên đã cho, phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<2$ hay $m\in(-1;2)$ vì lúc đó, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $0\le m\le 2$. **B.** $0<m<2$. **C.** $-2\le m\le 0$. **D.** $-2<m<0$.

Lời giải

Chọn B

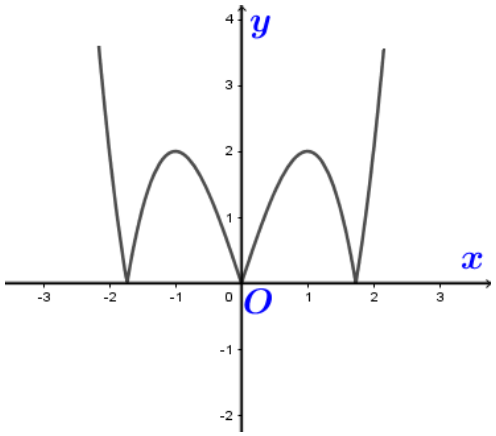
Phương trình $|f(x)|=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và đường thẳng $y=m$ (cùng phương Ox).

Ta có: $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & khi\ f(x)\ge 0 \\ -f(x) & khi\ f(x)<0 \end{cases}$ suy ra: đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=f(x)$ phía trên Ox.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f(x)$ phí dưới Ox qua trục Ox.

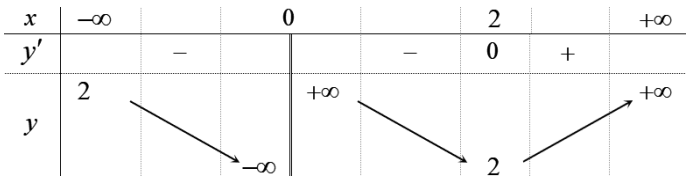
Ta được đồ thị:



Quan sát đồ thị hàm số, ta có: để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 0<m<2$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới



Hỏi phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & khi\ f\left(x\right)\ge 0 \\ -f\left(x\right) & khi\ f\left(x\right)<0 \end{cases}$

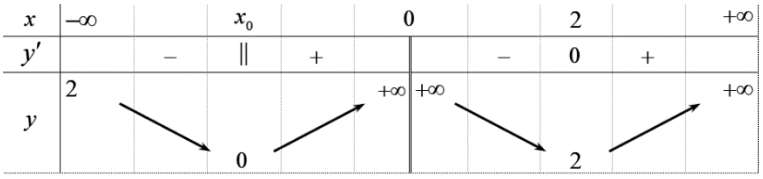
Suy ra: đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ phía trên Ox.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ phía dưới Ox qua trục Ox.

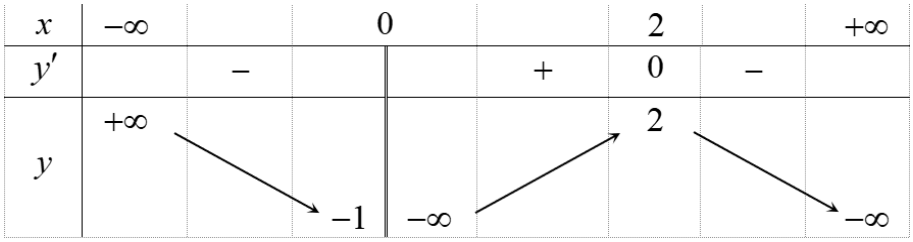
Ở phần này, khi lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua trục Ox ta sẽ có giao điểm của nó với Ox, ta gọi là x_0. Lưu ý rằng x_0 không là nghiệm của y'

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=3$ có 3 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(x\right)-\left|m\right|=0$ có 1 nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m<-2$. **C.** $m>2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)-\left|m\right|=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=\left|m\right|\quad (1)$.

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=\left|m\right|$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(x\right)=\left|m\right|$ có 1 nghiệm khi: $\left|m\right|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Mức độ 3

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB=BC$

A. $m\in(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$ **B.** $m\in\mathbb{R}$

C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in(-2;+\infty)$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(C): y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ và $d: y = mx - m + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d là

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (1-m)x + 1 + m = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \ (1) \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm A, B, C phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2 (*)$. Trong đó $g(x) = x^2 - 2x - m - 1$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho $AB = BC \Rightarrow$ điểm B chính là điểm uốn của đồ thị (C).

Ta có $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $y = 1 \Rightarrow$ điểm uốn $B(1;1) \in d$, $\forall m > -2$.

Vậy với $m \in (-2; +\infty)$ thì yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 3)$. **B.** $m \in (-\infty; -1)$. **C.** $m \in (-\infty; +\infty)$. **D.** $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ và đường thẳng $(d): y = -mx$ là

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x + m - 2 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C

$\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (m-2) > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$, với $g(x) = x^2 - 2x + m - 2$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$ thì điểm B chính là điểm uốn của đồ thị (C).

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. y'' đổi dấu khi x đi qua $x = 1$.

Điểm uốn của đồ thị (C) là $B(1; -m)$.

Mặt khác điểm $B(1; -m)$ thuộc đường thẳng $(d): y = -mx$ với mọi m.

Vậy với $m < 3$ thì yêu cầu bài toán thỏa mãn.

Câu 3. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ (1). Điều kiện của tham số m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 < x_3$ là

A. $m = -1$. **B.** $-1 < m < 3$. **C.** $-3 < m < -1$. **D.** $-3 \le m \le -1$.

Lời giải

Chọn C

* Phương trình tương đương: $(1) \Leftrightarrow x^3-3x^2+1=m$.

* Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $(C): y=f(x)=x^3-3x^2+1$ và đường thẳng $y=m$.

* Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1<x_2<x_3$ điều kiện là $(C): y=f(x)=x^3-3x^2+1$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 và một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Xét hàm số: $y=f(x)=x^3-3x^2+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta suy ra: $-3<m<-1$.

Câu 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $\left|x^3-3x^2+2\right|-m=1$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $1<m<3$. **B.** $-2<m<0$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $0<m<2$.

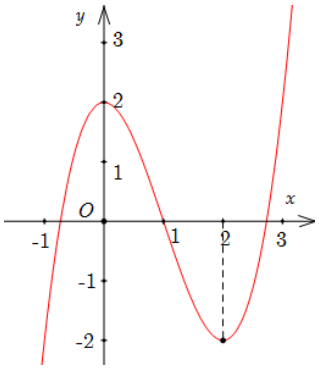
Lời giải

Chọn C

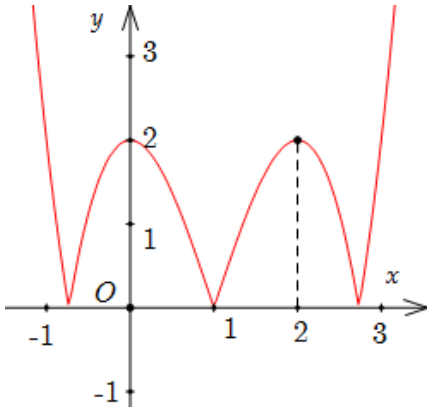
$\left|x^3-3x^2+2\right|-m=1 \Leftrightarrow \left|x^3-3x^2+2\right|=m+1$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Ta có $y'=3x^2-6x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$.



Từ đó ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$.



Số nghiệm của phương trình $\left|x^3-3x^2+2\right|-m=1$ là hoành độ giao điểm của đồ thi hàm số $y=\left|x^3-3x^2+2\right|$ và đường thẳng $y=m+1$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy để phương trình có 6 nghiệm cần: $0<m+1<2\Leftrightarrow -1<m<1.$

Câu 5. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d):y=mx-m-1$ cắt đồ thị $(C):y=x^3-3x^2+1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc toạ độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C):

$$x^3-3x^2+1=mx-m-1\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-2-m=0(*)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$(*)\Leftrightarrow (x-1)^2=m+3$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi $m>-3$.

Khi đó $(*)$ có hai nghiệm $x_1=1-\sqrt{m+3}$, $x_2=1+\sqrt{m+3}$ thỏa $x_1<1<x_2$.

Không mất tính tổng quát, gọi

$A\left(1-\sqrt{m+3};-m\sqrt{m+3}-1\right)$, $B(1;-1)$, $C\left(1+\sqrt{m+3};m\sqrt{m+3}-1\right)$.

Tam giác AOC cân tại O $\Leftrightarrow OA=OC\Leftrightarrow OA^2=OC^2$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{m+3}\right)^2+\left(-m\sqrt{m+3}-1\right)^2=\left(1+\sqrt{m+3}\right)^2+\left(m\sqrt{m+3}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{m+3}-4m\sqrt{m+3}=0\Leftrightarrow 4(m-1)\sqrt{m+3}=0\Leftrightarrow m=1.$

Với $m=1$ thỏa mãn điều kiện tồn tại các điểm A, B, C và khi đó đường thẳng $(d):y=x-2$ không đi qua gốc tọa độ O nên A, O, C tạo thành tam giác cân. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C):

$$x^3-3x^2+1=mx-m-1\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-2-m=0(*)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$(*)\Leftrightarrow (x-1)^2=m+3$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 khi và chỉ khi $m>-3$.

Xét $x^2-2x-2-m=0$ $(*)$

Theo Viet: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-m-2 \end{cases}$

Khi đó: $A\left(x_1;mx_1-m-1\right)$, $B\left(1;-1\right)$, $C\left(x_2;mx_2-m-1\right)$.

Cần có: $OA^2=OC^2$

$\Leftrightarrow x_1^2+\left(mx_1-m-1\right)^2=x_2^2+\left(mx_2-m-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)+m\left[m\left(x_1+x_2\right)-2m-2\right]\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)+m\left[m\left(x_1+x_2\right)-2m-2\right]=0$

$\Leftrightarrow 2+m\left(2m-2m-2\right)=0 \Leftrightarrow m=1.$

Với $m=1$ thỏa mãn điều kiện tồn tại các điểm A, B, C và khi đó đường thẳng $\left(d\right):y=x-2$ không đi qua gốc tọa độ O nên A, O, C tạo thành tam giác cân. Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm m sao cho đường thẳng $d:y=x-m$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn điểm $G\left(2;-2\right)$ là trọng tâm của tam giác OAB.

A. $m=2$. **B.** $m=5$. **C.** $m=6$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ điểm A, B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=x-m \\ \dfrac{x+3}{x+1}=x-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-m \\ x^2-mx-\left(m+3\right)=0 \ \left(1\right) \end{cases} \quad ĐK: x\neq -1.$$

Để đường thẳng $d:y=x-m$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A và B điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta=m^2+4\left(m+3\right)>0 \\ 1^2+m.1-\left(m+3\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m+12>0 \\ -2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\mathbb{R} \quad \left(*\right).$$

Với $m\in\mathbb{R}$ ta có $A\left(x_1;\ x_1-m\right)$, $B\left(x_2;\ x_2-m\right)$ trong đó x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình $\left(1\right)$, để $G\left(2;-2\right)$ là trọng tâm của tam giác OAB điều kiện là

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_O}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_O}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\dfrac{x_1+x_2}{3} \\ -2=\dfrac{x_1+x_2-2m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1+x_2=2m-6 \end{cases}$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} m=6 \\ m=2m-6 \end{cases} \Leftrightarrow m=6$ thỏa mãn điều kiện $\left(*\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ và đường thẳng $y=2x+m$. Giá trị của m để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất?

A. $m=-1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ và đường thẳng $y=2x+m$:

$\frac{x+3}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m+1)x+m-3=0\ (1)$.

Đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

ĐK: $\begin{cases}(m+1)^2-8(m-3)>0\\ g(-1)=2-m-1+m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+25>0\\ -2\neq 0\end{cases}(luon\ dung)$

luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}$.

Khi đó đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm $A(a;2a+m)$ và $B(b;2b+m)$ với a, b là các nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét, ta có $a+b=-\frac{1}{2}(m+1)$ và $ab=\frac{m-3}{2}$.

Ta có $AB^2=(a-b)^2+4(a-b)^2=5.\left[(a+b)^2-4ab\right]$

$=5\left[\frac{1}{4}(m+1)^2-2(m-3)\right]=\frac{5}{4}(m^2-6m+25)=\frac{5}{4}\left[(m-3)^2+16\right]\geq 20$.

Suy ra $\min AB=2\sqrt{5}$ đạt được tại $m=3$. Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm

Câu 8. Cho hàm số $y=x^4-3x^2-2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=\frac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$x^4-3x^2-2=m\Leftrightarrow x^4-3x^2-2-m=0\quad(1)$.

Vì $m>0\Leftrightarrow -2-m<0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$x^2=\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}};\ x_2=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}}$.

Khi đó: $A(x_1;m)$, $B(x_2;m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1.x_2+m^2=0$.

$\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{4m+17}}{2}=m^2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-3\geq 0\\ 4m^4-12m^2-4m-8=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-3\geq 0\\ (m-2)(4m^3+8m^2+4m+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\geq\frac{\sqrt{6}}{2}\\ m\leq-\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m-2=0\\ 4m^3+8m^2+4m+4=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\geq\frac{\sqrt{6}}{2}\\ m\leq-\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m=2\\ m\approx -1,75\end{array}\right.\end{cases}$.

Theo giả thiết $m>0\Rightarrow m=2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

$x^3+(m+2)x^2+(m^2-m-3)x-m^2=0\ (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+(m+3)x+m^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(m+3)x+m^2=0\ (2) \end{array}\right.$

Để đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\begin{cases} \Delta_g>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2+6m+9>0 \\ m^2+m+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<3 \\ \forall m\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<3$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^3-mx+2$, m là tham số. Biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là a, b, c. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{f'(b)}+\dfrac{1}{f'(c)}$

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $29-3m$. **D.** $3-m$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=x^3-mx+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-m$

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-m=0$

- Hàm số có cực trị $m>0$.
- Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Dễ thấy $\begin{cases} y_1=y(x_1)=-\dfrac{2m}{3}x_1+2 \\ y_2=y(x_2)=-\dfrac{2m}{3}x_2+2 \end{cases}$

  Đồ thị hàm số $f(x)=x^3-mx+2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là a, b, c khi $y_1.y_2<0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}m^2x_1x_2-\dfrac{4}{3}m(x_1+x_2)+4<0$

  Theo Viet, có $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2=-\dfrac{m}{3} \end{cases}$. Do đó $\dfrac{4}{9}m^2\left(-\dfrac{m}{3}\right)+4<0 \Leftrightarrow m^3>27 \Leftrightarrow m>3$.

Mặt khác, $x^3-mx+2=(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$

Suy ra $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=-m \\ abc=-2 \end{cases}\quad (1)$

Ta có $f'(x)=3x^2-m$ nên $\begin{cases} f'(a)=3a^2-m \\ f'(b)=3b^2-m \\ f'(c)=3c^2-m \end{cases}$.

$$P=\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}=\frac{f'(a)f'(b)+f'(b)f'(c)+f'(c)f'(a)}{f'(a)f'(b)f'(c)}$$

$$=\frac{9\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-6m\left(a^2+b^2+c^2\right)+3m^2}{\left(3a^2-m\right)\left(3b^2-m\right)\left(3c^2-m\right)} \quad (2)$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(ab+bc+ca\right)^2-2abc\left(a+b+c\right) \\ a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ca\right) \end{cases}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $P=\frac{9(-m)^2-6m.2m+3m^2}{\left(3a^2-m\right)\left(3b^2-m\right)\left(3c^2-m\right)}=\frac{9m^2-12m^2+3m^2}{\left(3a^2-m\right)\left(3b^2-m\right)\left(3c^2-m\right)}=0$

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	2018	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|=2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét đồ thị hàm số $y=f\left(x+2017\right)-2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ song song với trục Ox sang trái 2017 đơn vị, rồi sau đó tịnh tiến song song với trục Oy xuống dưới 2018 đơn vị.

Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f\left(x+2017\right)-2018$ như sau

x	$-\infty$		-2017		-2016		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4036	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+2017\right)-2018$ nằm phía trên trục hoành.

+ Và phần đối xứng của đồ thị $y=g(x)=f\left(x+2017\right)-2018$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Ta có: $y=\left|g\left(x\right)\right|=\begin{cases}g\left(x\right) & khi\, g\left(x\right)\ge 0\\ -g\left(x\right) & khi\, g\left(x\right)<0\end{cases}$

Suy ra: đồ thị hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ phía trên Ox.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ phía dưới Ox qua trục Ox.

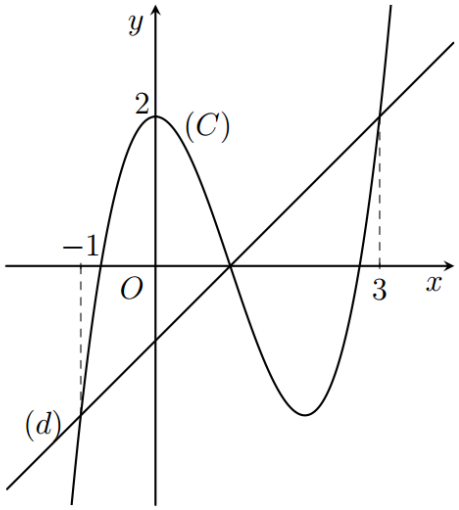
Ở phần này, khi lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới Ox qua trục Ox ta sẽ có giao điểm của nó với Ox, ta gọi là x_0. Lưu ý rằng x_0 là nghiệm của $g\left(x\right)=0$

Do đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ như sau

x	$-\infty$	x_0	-2017	-2016	$+\infty$
$\left\|g\left(x\right)\right\|$	$+\infty$	0	4036	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|=2019$ có 4 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y=x-1$. Biết phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm $x_1<x_2<x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng



A. -2. **B.** $-\frac{5}{2}$. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng d:

$$f\left(x\right)=x-1\Leftrightarrow f\left(x\right)-x+1=0\ \left(*\right)$$

Từ đồ thị ta thấy $\left(C\right)$ cắt d tại $x=-1;x=1;x=3$.

Do đó từ $\left(*\right)$ ta có thể viết là: $f\left(x\right)-x+1=a\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)$

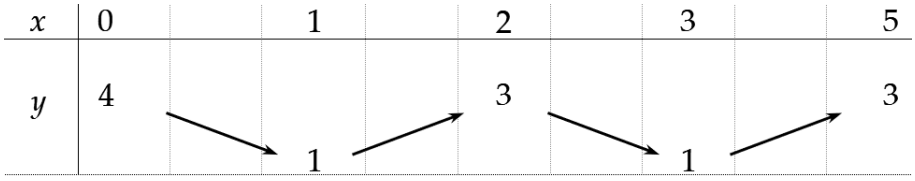
$\Leftrightarrow f\left(x\right)=a\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)+\left(x-1\right)$

Ta lại có $\left(C\right)$ đi qua điểm $\left(0;2\right)$ nên ta suy ra $2=3a-1\Leftrightarrow a=1$.

Suy ra $f(x)=(x-1)(x+1)(x-3)+(x-1)=(x-1)(x^2-2x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Như vậy, $x_1x_3=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-2$.

Câu 3. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m\cdot u(x)$ có nghiệm trên $[0;5]$



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

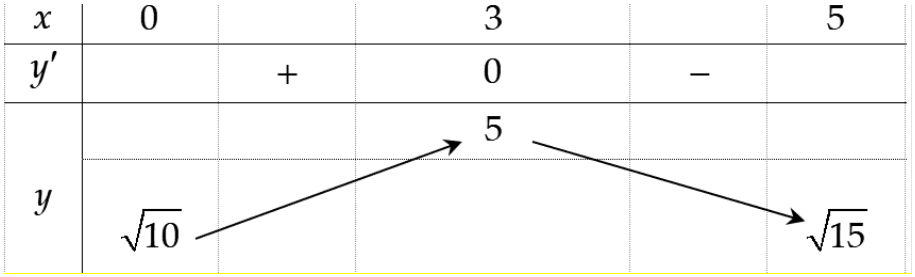
Lời giải

Chọn A

Đặt $y=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$, $0\le x\le 5$.

$y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}-\dfrac{2}{2\sqrt{10-2x}}=\dfrac{3\sqrt{10-2x}-2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}\sqrt{10-2x}}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow 3\sqrt{10-2x}-2\sqrt{3x}=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng biến thiên:



Suy ra $y\in\left[\sqrt{10};5\right]$.

Ta có $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m\cdot u(x)\Leftrightarrow m=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)}=g(x)$.

Vì $0\le u(x)\le 5$ và $y\in\left[\sqrt{10};5\right]$ nên ta có

$\max\limits_{[0;5]}g(x)=5$ khi $x=3$.

$\min\limits_{[0;5]}g(x)=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ khi $x=0$.

Suy ra $g(x)\in\left[\dfrac{\sqrt{10}}{4};5\right]$.

Do đó phương trinh $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m\cdot u(x)$ có nghiệm trên $[0;5]$ khi $m\in\left[\dfrac{\sqrt{10}}{4};5\right]$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 4. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2m+1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt cách đều nhau là

A. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-3x^2+2m+1=0\ (*)$.

Giả sử $x_1;\ x_2;\ x_3$ là ba nghiệm của $(*)$.

Để $x_1;\ x_2;\ x_3$ cách đều nhau $\Leftrightarrow\ 2x_2=x_1+x_3$ (1)

Mặt khác $x^3-3x^2+2m+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$

Nên $x_1+x_2+x_3=3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x_2=1$ (3)

Thế (3) vào $(*)$ ta được $1-3+2m+1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Với $m=\frac{1}{2}$ thế vào $(*)$, ta được $x^3-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\x=1\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Rõ ràng 3 nghiệm này cách đều nhau. Vậy $m=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=0$

Gọi x_1,x_2,x_3 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

Đồng nhất 2 vế ta được $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=3m+1\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=5m+4\\x_1x_2x_3=8\end{array}\right.$ (1)

Mặt khác theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_2^2=x_1x_3\ \Leftrightarrow\ x_2^2=x_1x_3$ (2)

Thế (1) và (2), ta có $x_1x_2+x_2x_3+x_2^2=5m+4\ \Leftrightarrow\ x_2(x_1+x_2+x_3)=5m+4\ \Leftrightarrow\ x_2=\frac{5m+4}{3m+1}$.

Với $x_2=\frac{5m+4}{3m+1}$ thay vào phương trình đã cho ta được

$$\left(\frac{5m+4}{3m+1}\right)^3-(3m+1)\left(\frac{5m+4}{3m+1}\right)^2+(5m+4).\frac{5m+4}{3m+1}-8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5m+4}{3m+1}\right)^3-8=0 \Leftrightarrow \frac{5m+4}{3m+1}=2 \Leftrightarrow m=2.$$

Với $m=2$, ta có phương trình $x^3-7x^2+14x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân nên $m=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. Biết rằng tồn tại hai giá trị thực của tham số m_1 và m_2 để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=2x^3+2\left(m^2+2m-1\right)x^2-7\left(m^2+2m-2\right)x-54$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P=m_1^3+m_2^3$.

A. $P=-56$. **B.** $P=8$. **C.** $P=56$. **D.** $P=-8$.

Lời giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$2x^3+2\left(m^2+2m-1\right)x^2-7\left(m^2+2m-2\right)x-54=0$

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $2x^3+2\left(m^2+2m-1\right)x^2-7\left(m^2+2m-2\right)x-54=2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

$$=2x^3-2\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+2\left(x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3\right)x-2x_1x_2x_3$$

Đồng nhất 2 vế ta được $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=-\left(m^2+2m-1\right) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-\frac{7}{2}\left(m^2+2m-2\right) \\ x_1x_2x_3=27 \end{array}\right.$ (1)

Mặt khác theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_2^2=x_1x_3$ (2)

Thế (1) và (2), ta có $x_1x_2+x_2x_3+x_2^2=-\frac{7}{2}\left(m^2+2m-2\right)$

$$\Leftrightarrow x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)=-\frac{7}{2}\left(m^2+2m-2\right) \Leftrightarrow x_2=\frac{7\left(m^2+2m-2\right)}{2\left(m^2+2m-1\right)}.$$

Với $x_2=\frac{7\left(m^2+2m-2\right)}{2\left(m^2+2m-1\right)}$ thay vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{343\left(m^2+2m-2\right)^3}{4\left(m^2+2m-1\right)^3}+\frac{49\left(m^2+2m-2\right)^2}{2\left(m^2+2m-1\right)}-\frac{49\left(m^2+2m-2\right)^2}{2\left(m^2+2m-1\right)}-54=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{343\left(m^2+2m-2\right)^3}{4\left(m^2+2m-1\right)^3}-54=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(m^2+2m-2\right)^3}{\left(m^2+2m-1\right)^3}=\frac{216}{343} \Leftrightarrow \frac{m^2+2m-2}{m^2+2m-1}=\frac{6}{7} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2+2m-8=0 \\ m^2+2m-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-4 \end{array}\right.$$

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số m nên $m=2$ và $m=-4$ là các giá trị thỏa mãn. Suy ra $P=2^3+(-4)^3=-56$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x-1$ luôn cắt trục hoành tại 3 điểm phân phân biệt và các giao điểm này có hoành độ lập thành cấp số nhân.

A. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$ **B.** $m=2$. **C.** Không tồn tại m. **D.** Vô số giá trị m.

Lời giải

Chọn D.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x-1=0$

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

Đồng nhất 2 vế ta được $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=m^2+3 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m^2+3 \\ x_1x_2x_3=1 \end{array}\right.$ (1)

Mặt khác theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_2^2=x_1x_3$ (2)

Thế (1) và (2), ta có $x_1x_2+x_2x_3+x_2^2=m^2+3$

$\Leftrightarrow x_2(x_1+x_2+x_3)=m^2+3 \Leftrightarrow x_2=1$.

Với $x_2=1$ thay vào phương trình đã cho ta được $1-(m^2+3)+(m^2+3)-1=0$ (luôn đúng)

Vậy với mọi giá trị của tham số m thì phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm lập thành 1 csn.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân ?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B.

CÁCH 1

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0$

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

Đồng nhất 2 vế ta được $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=m-5 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=6-5m \\ x_1x_2x_3=6m \end{array}\right.$ (1)

Mặt khác theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_2^2=x_1x_3 \Leftrightarrow x_2^2=x_1x_3$ (2)

Thế (1) và (2), ta có $x_1x_2+x_2x_3+x_2^2=6-5m$

$\Leftrightarrow x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)=6-5m \Leftrightarrow x_2=\dfrac{6-5m}{m-5}$.

Với $x_2=\dfrac{6-5m}{m-5}$ thay vào phương trình đã cho ta được

$$\left(\frac{6-5m}{m-5}\right)^3+(5-m)\left(\frac{6-5m}{m-5}\right)^2+(6-5m).\frac{6-5m}{m-5}-6m=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6-5m}{m-5}\right)^3-\frac{(6-5m)^2}{m-5}+\frac{(6-5m)^2}{m-5}-6m=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6-5m}{m-5}\right)^3-6m=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(6-5m)^3-6m(m-5)^3=0\\ m\neq 5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-6m^4-575m^3+230m^2+570m+216=0\\ m\neq 5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm\sqrt{6}\\ m=-\dfrac{4}{3}\\ m=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$.

Thế lần lượt các giá trị vừa tìm được của tham số m để thử lại.

CÁCH 2

Dễ thấy $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0 \qquad (*)$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+3)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-3\\ x=m\end{array}\right.$$

Để $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\notin\{-3;-2\} \qquad (**)$

Để các nghiệm này lập thành cấp số nhân và ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

- TH1: $-3;-2;m$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow (-2)^2=-3m \Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{3}$.
- TH2: $-3;m;-2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow m^2=(-3).(-2) \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{6}$.
- TH3: $m;-3;-2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow (-3)^2=-2m \Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{2}$.

Nhận thấy các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện $(**)$.

Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=3\\ m=-4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-4\end{array}\right.$ **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$

Gọi x_1,x_2,x_3 là 3 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$

Đồng nhất 2 vế ta được $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m+1 \\ x_1x_2x_3=-2(m+1) \end{cases}$ (1)

Mặt khác theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_2^2=x_1x_3$ (2)

Thế (1) và (2), ta có $x_1x_2+x_2x_3+x_2^2=m+1$

$\Leftrightarrow x_2(x_1+x_2+x_3)=m+1 \Leftrightarrow x_2=-\dfrac{m+1}{2}$.

Với $x_2=-\dfrac{m+1}{2}$ thay vào phương trình đã cho ta được

$$\left(-\frac{m+1}{2}\right)^3+2\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2+(m+1)\left(-\frac{m+1}{2}\right)+2(m+1)=0$$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(m+1)^3}{8}+\dfrac{(m+1)^2}{2}-\dfrac{(m+1)^2}{2}+2(m+1)=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{(m+1)^3}{8}+2(m+1)=0$

$\Leftrightarrow (m+1)^3-16(m+1)=0 \Leftrightarrow (m+1)(m^2+2m-15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \\ m=-4 \end{array}\right.$

- Với $m=-1$ thế vào phương trình đã cho ta được $x^3+2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$ (loại)
- Với $m=3$ thế vào phương trình đã cho ta được $x^3+2x^2+4x+8=0 \Leftrightarrow x=-2$ (loại)
- Với $m=-4$ thế vào phương trình đã cho ta được $x^3+2x^2-4x-8=0 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

Vậy không có giá trị nào của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị (C_m) của hàm số $f(x)=16x^4-mx^3+(2m+17)x^2-mx+16$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

A. 170. **B.** 17. **C.** Không tồn tại m. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A.

Gọi x_1,x_2,x_3,x_4 là 4 nghiệm phân biệt của phương trình đã cho, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Khi đó $16x^4-mx^3+(2m+17)x^2-mx+16=16(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$=16x^4-16(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+16(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2$

$$-16\left(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3\right)x+16x_1x_2x_3x_4$$

Đồng nhất 2 vế ta được $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{m}{16} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{2m+17}{16} \end{cases}$ (1)

Theo cách đặt x_1,x_2,x_3,x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên gọi q, với $|q|\geq 1$ là công bội của cấp số nhân trên

Theo tính chất số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có $\begin{cases} x_2=x_1.q \\ x_3=x_1.q^2 \\ x_4=x_1.q^3 \end{cases}$

Nhận thấy: Nếu $x=a$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $x=\dfrac{1}{a}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Do đó $\dfrac{1}{x_1};\dfrac{1}{x_2};\dfrac{1}{x_3};\dfrac{1}{x_4}$ hay $\dfrac{1}{x_1};\dfrac{1}{x_1.q};\dfrac{1}{x_1.q^2};\dfrac{1}{x_1.q^3}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Nên $x_1.q^3=\dfrac{1}{x_1} \Leftrightarrow q=x_1^{-\frac{2}{3}}$.

Kết hợp (1), ta có $\begin{cases} x_1+x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{-\frac{1}{3}}+x_1^{-1}=\dfrac{m}{16} \\ x_1^{\frac{4}{3}}+x_1^{\frac{2}{3}}+1+1+x_1^{-\frac{2}{3}}+x_1^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2m+17}{16} \end{cases}$ (2)

Đặt $t=x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{-\frac{1}{3}}$, điều kiện $t\geq 2$

Kết hợp (2), ta có $\begin{cases} t^3-2t=\dfrac{m}{16} \\ t^4-3t^2+2=\dfrac{2m+17}{16} \end{cases}$

$$\Rightarrow (2t-5)(2t-3)\left(4t^2-4t-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2}\ (N) \\ t=\dfrac{3}{2}\ (L) \\ t=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}\ (L) \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow m=170$.

Thay giá trị $m=170$ vào phương trình đã cho ta được

$16x^4-170x^3+357x^2-170x+16=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{1}{8},\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_3=2,\ x_4=8$

Rõ ràng 4 nghiệm này lập thành 1 cấp số nhân với công bội $q=4$

Vậy $m=170$ là giá trị cần tìm.

DẠNG TOÁN 18: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN (TÍNH TÍCH PHÂN DỰA VÀO TÍNH CHẤT TÍNH PHÂN)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Định nghĩa tích phân:

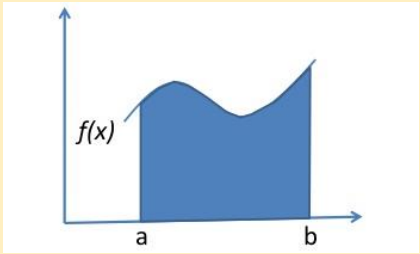
✪Định nghĩa:

•Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay còn gọi là tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$).

$$\text{Kí hiệu: } \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Nhận xét: tích phân chỉ phụ thuộc vào hàm f , vào cận a,b mà không phụ thuộc vào biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$.



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Tính chất tích phân.

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\ (k\in\mathbb{R})$.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ (a<c<b)$.

$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

Nếu $y=f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì: $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Nếu $y=f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì: $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Lý thuyết về tích phân.
- Sử dụng định nghĩa, ý nghĩa hình học của tích phân.
- Các bài toán liên quan tổng, hiệu, tích với các số thực, các hàm đơn giản.
- Các bài toán liên quan nguyên hàm cơ bản, nguyên hàm mở rộng.
- Các bài toán liên quan nguyên hàm chứa nhánh.
- Tích phân hàm chẵn, hàm lẻ.
- Tích phân lượng giác đặc biệt.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Nếu $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int_{0}^{1} 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A.16. **B.**4. **C.**2. **D.**8.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tích phân dựa vào tính chất của tích phân.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Tính chất tích phân: $\int_{a}^{b} k.f(x)\mathrm{d}x=k\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x\ \ (k\in\mathbb{R},k\neq 0)$.

3. HƯỚNG GIẢI:

Dựa vào tính chất của tích phân $\int_{a}^{b} k.f(x)\mathrm{d}x=k\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x\ \ (k\in\mathbb{R},k\neq 0)$ ta được kết quả.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_{0}^{1} 2f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2.4=8$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Nếu $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_{-2}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_{-2}^{2} 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 9$.

Câu 2. Nếu $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2; \int_{0}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_{0}^{2}\left[3f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\int_{0}^{2}\left[3f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 3\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 5$.

Câu 3. Nếu $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_{-2}^{1}\left[f(x) + 3\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.**14. **C.**15. **D.**11.

Lời giải

ChọnB

Ta có : $\int_{-2}^{1}\left[f(x) + 3\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-2}^{1}\mathrm{d}x = 5 + 3x\big|_{-2}^{1} = 14$.

Câu 4. Nếu $\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$ thì $\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A.8. **B.**14. **C.** -1 . **D.**11.

Lời giải

ChọnC

Ta có : $\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -1$.

Câu 5. Nếu $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_{0}^{2}\left[2f(x) - 8\right]\mathrm{d}x$ bằng

A.8. **B.** -8 . **C.**0. **D.**4.

Lời giải

ChọnB

Ta có : $\int_{0}^{2}\left[2f(x) - 8\right]\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x - 8\int_{0}^{2}\mathrm{d}x = 2.4 - 8x\big|_{0}^{2} = -8$.

Câu 6. Nếu $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=2,\ \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=5$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A.3. **B.**-3. **C.**7. **D.**-7.

Lờigiải

ChọnA

Ta có: $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x+\int_4^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x-\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=3.$

Câu 7. Biết rằng $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=3,\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$?

A.2. **B.**5. **C.**8. **D.**-2.

Lờigiải

ChọnD

Ta có : $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3-5=-2.$

Câu 8. Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_1^2\frac{f(x)}{3}\mathrm{d}x$ bằng

A.9. **B.**3. **C.**1. **D.**6.

Lờigiải

ChọnC

Ta có : $\int_1^2\frac{f(x)}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1.$

Câu 9. Nếu $\int_0^2\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x=3$ thì $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A.2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lờigiải

ChọnB

Ta có : $\int_0^2\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^2\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2.$

$\Rightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\int_0^2\left[2f(x)-1\right]\mathrm{d}x+2}{2}=\frac{5}{2}.$

Câu 10. Nếu $\int_0^2\left[3f\left(x\right)-x\right]\mathrm{d}x=5$ thì $\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\int_0^2\left[3f\left(x\right)-x\right]\mathrm{d}x=3\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_0^2 x\mathrm{d}x=3\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=3\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-2$.

$\Rightarrow\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\int_0^2\left[3f\left(x\right)-x\right]\mathrm{d}x+2}{3}=\frac{7}{3}$.

Mức độ 2

Câu 1. Nếu $\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

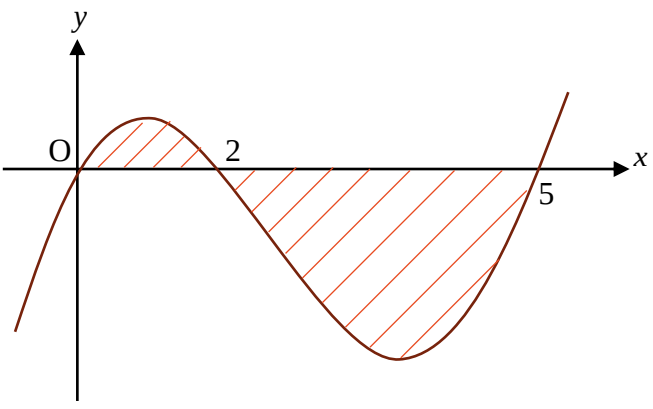
Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $\begin{array}{l}x=0\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=4\end{array}$.

$\int_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{f\left(t\right)}{2}\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$.

Câu 2. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có dạng như hình bên và $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-6$.

Diện tích phần gạch sọc là:



A.4. **B.**6. **C.**5. **D.**7.

Lờigiải

ChọnD

Diện tích phần gạch sọc: $S=\int_0^2\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_2^5\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=7$.

Câu 3. Nếu $\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ thì $\int_{-1}^0 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.**4. **C.**1. **D.** -1.

Lờigiải

ChọnC

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=-1\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$\int_{-1}^0 f\left(2x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=1$.

Câu 4. Biết $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, xác định, liên tụctrên $\left[-1;1\right]$ và $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ .Tính $\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A.0. **B.**4. **C.**1. **D.**2.

Lờigiải

ChọnB

Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn,xác định,liên tục trên $\left[-1;1\right]$ nên $\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$.

Câu 5. Biết $y=f\left(x\right)$ là hàm số lẻ, xác định, liên tục trên $\left[-2;2\right]$ và $\int_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$ .Tính $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. -4. **B.**4. **C.**0. **D.**2.

Lờigiải

ChọnA

Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số lẻ,xác định,liên tục trên $\left[-2;2\right]$ nên

$\int_{-2}^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-4$.

Câu 6. Biết $\int_1^2\left[3f\left(x\right)+2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=8,\ \int_1^2\left[4f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=7$ .Tính $\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $a=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x,\ b=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$. Theo đề bài ta có: $\begin{cases}3a+2b=8\\4a-b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 7. Cho $\int_1^2\left[3f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=1,\ \int_1^2\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=-3$. Khi đó, $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{7}$. **B.** $-\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{6}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $a=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x,\ b=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}3a+2b=1\\2a-b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{7}\\b=\frac{11}{7}\end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{7}$.

Câu 8. Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3,\ \int_0^2 f(5x+2)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $\int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 18. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$, với $x=0\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=12$.

$\Rightarrow\int_0^2 f(5x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow\int_2^{12} f(t)\mathrm{d}t=5.\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=15$.

Vậy ta có $\int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{12} f(x)\mathrm{d}x=3+15=18$.

Câu 9. Cho $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=5,\ \int_2^{-1} g(x)\mathrm{d}x=3$. Khi đó $\int_{-1}^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** −8. **C.** 2. **D.** −2.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\int_2^{-1} g(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-3$.

$\int_{-1}^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=8$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1)=3$ và $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=10$. Khi đó giá trị $f(3)$ bằng

A. -13. **B.** 13. **C.** -7. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_{-1}^{3}=f(3)-f(-1)=10\Rightarrow f(3)=10+f(-1)=13$.

↳ Mức độ 3

Câu 1. Cho $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+\sin^{2019}x\right]\mathrm{d}x$

A. -1. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** -2019.

Lời giải

Chọn C

Vì $y=\sin^{2019}x$ là hàm số lẻ, xác định và liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2019}x\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+\sin^{2019}x\right]\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2019}x\mathrm{d}x=1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[-4;4]$. Biết rằng $\int_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

A. -10. **B.** -10. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ là hàm số lẻ nên : $2=\int_{-2}^{0}f(-x)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=4$.

$\Rightarrow\int_{1}^{2}f(-2x)\mathrm{d}x=-\int_{1}^{2}f(2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{2}^{4}f(t)\mathrm{d}t=4\Rightarrow\int_{2}^{4}f(t)\mathrm{d}t=-8$.

$\Rightarrow\int_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Vậy $I=\int_{0}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}f(x)\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Giá trị tích phân $\int_{0}^{1}f'(x)\mathrm{d}x$ bằng?

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} 2f(0)+3f(1)=1 \\ 2f(1)+3f(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-\dfrac{2}{5} \\ f(1)=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Vậy: $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\big|_0^1 = f(1)-f(0)=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 x^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int_0^1 x^{2019} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{2}{2019}$. **B.** -4038. **C.** $\dfrac{2}{2019}$. **D.** 4038

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_0^1 x^{2019} f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2019}\mathrm{d}\big(f(x)\big) = x^{2019} f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 2019x^{2018} f(x)\mathrm{d}x$

$= f(1) - 2019\int_0^1 x^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 0 - 2019.2 = -4038$.

Câu 5. Cho $y=f(x)$, $y=g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và $\int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \big[f(x).g(x)\big]'\mathrm{d}x$.

A. $I=-1$. **B.** $I=6$. **C.** $I=5$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int_0^2 \big[f(x).g(x)\big]'\mathrm{d}x = \int_0^2 \big[f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\big]\mathrm{d}x$

$= \int_0^2 g'(x).f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 g(x).f'(x)\mathrm{d}x = 5$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1$, $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2}{2x-1}\mathrm{d}x = \int \dfrac{2.\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1|+c$.

+) Với $x<\frac{1}{2}$ từ giả thiết $f(0)=1 \Leftrightarrow C_1=1 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$.

+) Với $x>\frac{1}{2}$ từ giả thiết $f(1)=2 \Leftrightarrow C_2=2 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+2$.

+) $f(0)=1 \Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow f(x)=\ln|2x-1|+1$.

$\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+2 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 7. Cho $\int_0^1 (1+3x)f'(x)\mathrm{d}x=2019;\ 4f(1)-f(0)=2020$ Tính $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{1}{9}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=1+3x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=3\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

$\int_0^1 (1+3x)f'(x)\mathrm{d}x=2019$

$\Leftrightarrow (1+3x).f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 3.f(x)\mathrm{d}x=2019$

$\Leftrightarrow 4f(1)-f(0)-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2019$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$

Ta có: $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$, biết $f'(x)=\begin{cases} \frac{\ln x}{x} & \text{khi } x>0 \\ 4(x+2)^3 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$ và thoả mãn $f(1)=0$, $f(-1)=1$. Tính $f(e)+f(0)$.

A. 33. **B.** $\frac{33}{2}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1$

Do $f(1)=0$ nên $C_1=0$. Suy ra $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$

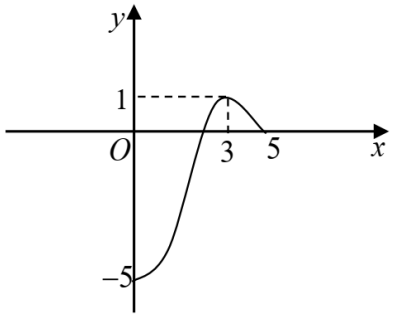
Với $x\le 0$ ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 4(x+2)^3\mathrm{d}x=\int 4(x+2)^3\mathrm{d}(x+2)=(x+2)^4+C_2$

Do $f(-1)=1$ nên $C_2=0$. Suy ra $f(x)=(x+2)^4$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln^2 x & \text{khi } x>0\\ (x+2)^4 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$.

Khi đó $f(e)=\frac{1}{2};\ f(0)=16\Rightarrow f(e)+f(0)=\frac{33}{2}$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0\Rightarrow f(5)>f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0\Rightarrow f(3)<f(0)$.

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0\Rightarrow f(5)<f(0)$.

Vậy $f(3)<f(5)<f(0)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[3;7]$ và thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ với $\forall x\in[3;7]$ và $\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$?

A.20. **B.** -20. **C.** 40. **D.** -40.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=10-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=3\Rightarrow t=7,\ x=7\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=-\int_7^3(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-x)f(10-x)\mathrm{d}x$.

Vì $f(x)=f(10-x)\Rightarrow I=\int_3^7(10-x)f(x)\mathrm{d}x=10\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x-\int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=10.4-I\Rightarrow I=20$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{d}x$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)\mathrm{d}x$.

Tính: $A = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\mathrm{d}x$. Đặt $t = -4x+1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}\int\limits_{5}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{5} f(t)\mathrm{d}t = 1$

Tính: $B = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 4x-1 \Rightarrow \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

$\Rightarrow B = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f(t)\mathrm{d}t = 2$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)\mathrm{d}x = A + B = 3$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập hợp $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{0}^{\ln 3} f\left(e^x+3\right)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{4}^{6} \frac{(2x-1)f(x)}{x-3}\mathrm{d}x = -3$. Giá trị của $\int\limits_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -5. **C.** -4. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $I_1 = \int\limits_{0}^{\ln 3} f\left(e^x+3\right)\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $e^x + 3 = t \Rightarrow e^x = t-3 \Rightarrow e^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t-3}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 4$, $x = \ln 3 \Rightarrow t = 6$.

Khi đó: $I_1 = \int\limits_{4}^{6} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-3} = \int\limits_{4}^{6} \frac{f(x)\mathrm{d}x}{x-3} = 1$.

Ta có $\int\limits_{4}^{6} \frac{(2x-1)f(x)}{x-3}\mathrm{d}x = \int\limits_{4}^{6} \frac{(2x-6)f(x)+5f(x)}{x-3}\mathrm{d}x = 2\int\limits_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x + 5\int\limits_{4}^{6} \frac{f(x)}{x-3}\mathrm{d}x = -3$.

$\Rightarrow 2\int\limits_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x + 5 = -3 \Rightarrow \int\limits_{4}^{6} f(x)\mathrm{d}x = -4$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=6$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\tan x;\mathrm{d}t=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x;\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ và đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=4;$

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=4+2=6.$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $\int_{-2}^{2} f\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int_1^5 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -15. **B.** -2. **C.** -13. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=\sqrt{x^2+5}-x\Rightarrow x=\frac{5-t^2}{2t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Ta có: $1=\int_1^5 f(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)\mathrm{d}t+\frac{5}{2}\int_1^5 \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^5 f(t)\mathrm{d}t=1-\frac{5}{2}\int_1^5 \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t=1-\frac{5}{2}.3=-\frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 f(t)\mathrm{d}t=-13.$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=2$.

Giá trị tích phân $I=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2020^x+1}\mathrm{d}x$ bằng?

A. $\frac{1}{2020}$. **B.** $\frac{1}{2^{2020}}$. **C.** 2^{2020}. **D.** 2.

Lờigiải

Chọn D

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-\pi\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=-\pi$.

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{-\pi} \frac{f(-t)}{2020^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2020^{-t}+1}\mathrm{d}t$$ (vì $y=f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(t)=f(-t)$).

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2020^t f(t)}{2020^t+1}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(2020^t+1-1\right)f(t)}{2020^t+1}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2020^t+1}\mathrm{d}t$$

$2I=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t$ (vì $y=f(t)$ là hàm số chẵn)

Vậy $I=\int_{0}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=2$.

Câu 6. Biết $I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2020}x}{\sin^{2020}x+\cos^{2020}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^a}{b}+\mathrm{c},\ \left(a,b,c\in\mathbb{Z}^+\right)$. Tính $P=a.b.c$

A. 4 . **B.** 0 . **C.** 2^{2020} . **D.** 4^{2020} .

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\pi-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$.

$$I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t .$$

Đặt $u=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2},\ t=\pi\Rightarrow u=-\frac{\pi}{2}$.

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2020}u}{\sin^{2020}u+\cos^{2020}u}\mathrm{d}u$$

Vì $f(u)=\frac{\cos^{2020}u}{\sin^{2020}u+\cos^{2020}u}$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2020}u}{\sin^{2020}u+\cos^{2020}u}\mathrm{d}u=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2020}u}{\sin^{2020}u+\cos^{2020}u}\mathrm{d}u .$$

Xét $J=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t$.

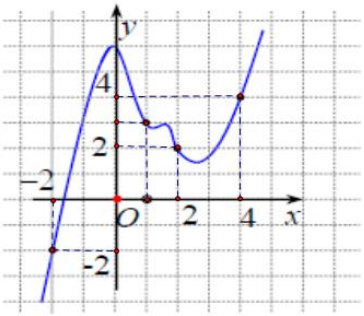
Ta có: $I+J=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}$.

Mặt khác: $I=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2020}u}{\sin^{2020}u+\cos^{2020}u}\mathrm{d}u=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2020}t}{\sin^{2020}t+\cos^{2020}t}\mathrm{d}t=J$ (dễ dàng suy ra được thông qua phép đổi biến $t=\frac{\pi}{2}-u$).

$\Rightarrow I=J=\frac{\pi^2}{4}$.

Vậy $abc=0$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Cách1:

Đặt $I_1=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x$, $I_2=\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$.

Tính I_1: Đặt $u=x-2\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	4
u	-2	2

Ta có: $I_1=\int\limits_{-2}^2 f'(u)\mathrm{d}u=\int\limits_{-2}^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-2}^2=f(2)-f(-2)=2-(-2)=4$.

Tính I_2: Đặt $v=x+2\Rightarrow \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	2
v	2	4

Ta có: $I_2=\int\limits_2^4 f'(v)\mathrm{d}v=\int\limits_2^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)=4-2=2$.

Vậy: $I=I_1+I_2=4+2=6$.

Cách2: $I=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int\limits_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)$

$=f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=\big(f(2)-f(-2)\big)+\big(f(4)-f(2)\big)=\big(2-(-2)\big)+(4-2)=6$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$.

Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{3}{4}+\ln 2$. **B.** $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$. **C.** $\dfrac{3}{4}+2\ln 2$. **D.** $3+\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết, ta có: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$$\int_0^1\left[f(x)+f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2+2x+3}{x+1}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x\ (1)$$

Đặt $1-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=1$, với $x=1\Rightarrow t=0$

Do đó: $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\ (2).$$

Lại có $\int_0^1\frac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}+2\ln 2\ (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+2\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}+\ln 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)\in[-1;1]$ với mọi $x\in[0;2]$. Biết rằng $f(0)=f(2)=1$. Đặt $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, phát biểu nào dưới đây đúng?

A. $I\in(-\infty;0]$. **B.** $I\in(1;+\infty)$. **C.** $I\in[1;+\infty)$. **D.** $I\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

- Xét $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

  Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)\mathrm{d}x\\ dv=\mathrm{d}x\Rightarrow v=x-1\end{cases}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x$.

  $\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+\int_0^1(1-x)f'(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

- Xét $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

  Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\Rightarrow v=x-1\end{cases}\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=(x-1)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)f'(x)\mathrm{d}x$.

  $\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1+\int_1^2(1-x)f'(x)\mathrm{d}x\ge\int_1^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

  Vậy $I\ge 1$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$. Tích phân $I=\int_0^1 e^x f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};e-1\right)$. **C.** $\left(e-1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $0=\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=a\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 axf\left(x\right)\mathrm{d}x,$ với mọi $a\in\left[0;1\right]$.

Với mọi $a\in\left[0;1\right]$ ta có:

$$\left|\int_0^1 e^x f\left(x\right)dx\right|=\left|\int_0^1 e^x f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 axf\left(x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1\left(e^x-ax\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1\left|e^x-ax\right|.\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$\le\int_0^1\left|e^x-ax\right|.\underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|e^x-ax\right|\mathrm{d}x.$$

Đặt $I\left(a\right)=\int_0^1\left(e^x-ax\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\left|\int_0^1 e^x f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\le I\left(a\right),\ \forall a\in\left[0;1\right]\Rightarrow\left|\int_0^1 e^x f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\le\underset{[0;1]}{Min}\,I\left(a\right)$.

Mặt khác: $I\left(a\right)=\int_0^1\left(e^x-ax\right)\mathrm{d}x=\left(e^x-\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1=e-\frac{a}{2}-1,\ a\in\left[0;1\right]$.

$$\Rightarrow\underset{[0;1]}{Min}\,I\left(a\right)=e-\frac{3}{2}\Rightarrow\int_0^1 e^x f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\left|\int_0^1 e^x f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|\le e-\frac{3}{2}\approx 1,22.$$

Vậy $I\in\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

DẠNG TOÁN 19: XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC LIÊN HỢP KHI ĐÃ BIẾT SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

+ Một số phức là một biểu thức dạng $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$,

i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức . $z=a+bi$.

+ Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}=\left\{a+bi/a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\right\}$.

+ Chú ý:

- Khi phần ảo $b=0\Leftrightarrow z=a$ là số thực.
- Khi phần thực $a=0\Leftrightarrow z=bi\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

+ Hai số phức bằng nhau: $a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$ vôùi $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

+ Hai số phức $z_1=a+bi;\ z_2=-a-bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là $a-bi$ và được kí hiệu bởi $\bar{z}$. Rõ ràng $\bar{\bar{z}}=z$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a;b)$.

4. MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

Môđun của số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho hai số phức ; $z'=a'+b'i$ với $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$ và số $k\in\mathbb{R}$.

a) Tổng hai số phức: $z+z'=a+a'+(b+b')i$

b) Hiệu hai số phức: $z+z'=a-a'+(b-b')i$.

c) Nhân hai số phức: $z.z'=(a+bi)(a'+b'i)=(a.a'-b.b')+(a.b'+a'.b)i$.

d) Chia 2 số phức: + Số phức nghịch đảo: $z^{-1}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$

+ Nếu $z\neq0$ thì $\frac{z'}{z}=\frac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z\neq0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

6. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM:

Căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$

7. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho phương trình bậc 2: $Az^2+Bz+C=0$ (1)

Trong đó A,B,C là những số phức A≠0.

Xét biệt thức $\boxed{\Delta=B^2-4AC}$

+ Nếu $\Delta\neq0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $\boxed{z_1=\frac{-B+\sigma}{2A};\qquad z_2=\frac{-B-\sigma}{2A}}$

Trong đó σ là một căn bậc 2 của Δ.

+ Nếu $\Delta=0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $\boxed{z_1=z_2=\frac{-B}{2A}}$

CHÚ Ý:

+ Mọi phương trình bậc n: $A_0z^n+A_1z^{n-1}+...+A_{n-1}z+A_n=0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

+ Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực: Cho phương trình bậc 2 : $Az^2+Bz+C=0$ $(A,B,C\in\mathbb{R};A\neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức). Ta có:

$$\begin{cases} S=z_1+z_2=\dfrac{-B}{A} \\ P=z_1z_2=\dfrac{C}{A}. \end{cases}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Thực hiện các phép toán.
- Tìm phần thực, phần ảo.
- Số phức liên hợp.
- Tính mô đun của số phức.
  - Phương trình bậc nhất theo z (và liên hợp của z).
  - Hỏi tổng hợp về các khái niệm.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2 - BDG 2019 - 2020) Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định số phức liên hợp khi đã biết số phức.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Số phức z có dạng: $z=a+bi$.

Số phức liên hợp của số phức z có dạng: $\overline{z}=a-bi$.

3. HƯỚNG GIẢI:

Ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Số phức $z=2+i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}=2-i$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho số phức $z=-2+3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=\sqrt{13}$. **B.** $\overline{z}=2-3i$. **C.** $\overline{z}=3-2i$. **D.** $\overline{z}=-2-3i$.

Lời giải

Chọn D

$\overline{z}=-2-3i$.

Câu 2. Số phức z thỏa mãn $\overline{z}=-3-2i$ là

A. $z=-3-2i$ **B.** $z=-3+2i$ **C.** $z=3-2i$ **D.** $z=3+2i$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{z}=-3-2i$ suy ra $z=-3+2i$.

Câu 3. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(2+i)(-3i)$.

A. $\overline{z}=3-6i$. **B.** $\overline{z}=3+6i$. **C.** $\overline{z}=-3+6i$. **D.** $\overline{z}=-3-6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(2+i)(-3i)=3-6i\Rightarrow \overline{z}=3+6i$.

Câu 4. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=3(2+3i)-4(2i-1)$.

A. $\overline{z}=10-i$. **B.** $\overline{z}=10+3i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=10+i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z=3(2+3i)-4(2i-1)=6+9\text{i}-8\text{i}+4=10+\text{i}\Rightarrow \overline{\text{z}}=10-\text{i}$.

Câu 5. Tìm số phức liên hợp của số phức z biết $z=i.z+2$.

A. $1-i$. **B.** $-1+i$. **C.** $-1-i$. **D.** $1+i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=i.z+2\Leftrightarrow z=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{2}=1+i$. Vậy $\overline{z}=1-i$.

Câu 6. Cho các số phức $z_1=2+3i$, $z_2=4+5i$. Số phức liên hợp của số phức $w=2(z_1+z_2)$ là

A. $\overline{w}=28i$. **B.** $\overline{w}=8+10i$. **C.** $\overline{w}=12-16i$. **D.** $\overline{w}=12+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w=2(6+8i)=12+16i\Rightarrow \overline{w}=12-16i$.

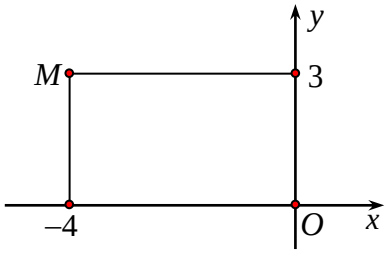
Câu 7. Kí hiệu a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z=-4-3i$. Tìm a,b.

A. $a=4$, $b=3$. **B.** $a=-4$, $b=-3i$. **C.** $a=-4$, $b=3$. **D.** $a=-4$, $b=-3$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8. Cho điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là 3 và phần ảo là -4. **B.** Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$. **D.** Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

Lời giải

Chọn D

Câu 9. Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}=3-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng.

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=3+2i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng 5.

Câu 10. Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần ảo của của số phức liên hợp z.

A. $-2i$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z}=3+2i\Rightarrow$ phần ảo của $\overline{z}$ là 2.

Mức độ 2

Câu 1. Cho số phức z thoả mãn $\dfrac{z}{3+2i}=1-i$ Số phức liên hợp $\overline{z}$ là.

A. $\overline{z}=5+i$. **B.** $\overline{z}=-5-i$. **C.** $\overline{z}=-1-5i$. **D.** $\overline{z}=-1+5i$.

Lời giải

Chọn A

$z=(3+2i)(1-i)=5-i$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=5+i$.

Câu 2. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(2+i)(-1+i)(2i+1)^2$.

A. $\overline{z}=5+15i$. **B.** $\overline{z}=5+5i$. **C.** $\overline{z}=1+3i$. **D.** $\overline{z}=5-15i$.

Lời giải

Chọn A

$z=(2+i)(-1+i)(2i+1)^2=(-3+i)(-3+4i)=5-15i\Rightarrow\overline{z}=5+15i$.

Câu 3. Số phức liên hợp của số phức $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$ là

A. $\overline{z}=-4+4i$. **B.** $\overline{z}=4-4i$. **C.** $\overline{z}=-4-4i$. **D.** $\overline{z}=4+4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-4-4i$. Suy ra $\overline{z}=-4+4i$.

Câu 4. Tìm số phức $\overline{z}$ thỏa mãn $\dfrac{2+i}{1-i}z=\dfrac{-1+3i}{2+i}$.

A. $-\dfrac{22}{25}+\dfrac{4}{25}i$. **B.** $\dfrac{22}{25}+\dfrac{4}{25}i$. **C.** $\dfrac{22}{25}-\dfrac{4}{25}i$. **D.** $\dfrac{22}{25}i+\dfrac{4}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Dùng máy tính: $z=\dfrac{22}{25}+\dfrac{4}{25}i$. Vậy $\overline{z}=\dfrac{22}{25}-\dfrac{4}{25}i$.

Câu 5. Cho hai số phức $z=1+3i$, $w=2-i$. Tìm phần ảo của số phức $u=\overline{z}.w$.

A. 5. **B.** $-7i$. **C.** -7. **D.** $5i$.

Lời giải

Chọn C

$\overline{z}=1-3i$; $u=\overline{z}.\mathrm{w}=(1-3i)(2-i)=-1-7i$.

Vậy phần ảo của số phức u bằng -7.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z=7+5i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ của số phức z là

A. $\overline{z}=\dfrac{31}{5}-\dfrac{1}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\dfrac{31}{13}-\dfrac{1}{13}i$. **C.** $\overline{z}=-\dfrac{31}{13}+\dfrac{1}{13}i$. **D.** $\overline{z}=-\dfrac{31}{5}+\dfrac{1}{5}i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(3+2i)z=7+5i\Rightarrow z=\dfrac{7+5i}{3+2i}=\dfrac{31}{13}+\dfrac{1}{13}i$.

Vậy $\overline{z}=\dfrac{31}{13}-\dfrac{1}{13}i$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)z=14-2i$. Tổng phần thực và phần ảo của $\overline{z}$ bằng

A. -4. **B.** 14. **C.** 4. **D.** -14.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(1+i)z=14-2i\Leftrightarrow z=\dfrac{14-2i}{1+i}=6-8i\Rightarrow\overline{z}=6+8i$

Vậy tổng phần thực phần ảo của $\bar{z}$ là 14.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z=4+i-(2-i)^2 \Leftrightarrow (3+2i)z=1+5i \Leftrightarrow z=\dfrac{1+5i}{3+2i}$

$\Leftrightarrow z=1+i$

$\Rightarrow$ phần thực của số phức z là $a=1$, phần ảo của số phức z là $b=1$.

Vậy $a-b=0$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(4+7i)z-(5-2i)=6iz$. Tìm phần ảo của số phức z ?

A. $\dfrac{18}{17}$. **B.** $-\dfrac{18}{17}$. **C.** $-\dfrac{13}{17}$. **D.** $\dfrac{13}{17}$.

Lời giải

Chọn C

$(4+7i)z-(5-2i)=6iz \Leftrightarrow (4+i)z=5-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{5-2i}{4+i}=\dfrac{(5-2i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}=\dfrac{18-13i}{17}=\dfrac{18}{17}-\dfrac{13}{17}i$.

Câu 10. Cho số phức $z=a+bi$. Số phức z^2 có phần ảo là?

A. $2ab$. **B.** a^2b^2. **C.** a^2-b^2. **D.** $2abi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2=\left(a+bi\right)^2=a^2-b^2+2abi$. Phần ảo của z^2 là $2ab$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho số phức $z=(1+i)^n$, biết $n\in\mathbb{N}$ và thỏa mãn $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$. Tìm phần thực của số phức z.

A. $a=-8$. **B.** $a=7$. **C.** $a=0$. **D.** $a=8$.

Lời giải

Chọn D

Đk: $n>3$ $pt \Leftrightarrow (n-3)(n+9)=4^3 \Leftrightarrow n^2+6n-91=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=7 \\ n=-13 \end{array}\right. \Rightarrow n=7$.

$z=(i+1)^7=8-8i$. Phần thực của z là 8.

Câu 2. Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\bar{z}=-2i$ bằng

A. -6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $iz+(1-i)\bar{z}=-2i \Leftrightarrow i(x+yi)+(1-i)(x-yi)=-2i$

$\Leftrightarrow (x-2y)-yi=-2i \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$, suy ra $x+y=6$.

Câu 3. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=m-3+(m^2-6)i$, $(m\in\mathbb{R})$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị m để z_1+z_2 là số thực.

A. $\{-2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{-2;2\}$. **D.** $\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+z_2=m-2+\left(m^2-4\right)i$. Để z_1+z_2 là số thực $\Leftrightarrow m^2-4=0\Leftrightarrow m=2$ hoặc $m=-2$.

Câu 4. Tìm phần ảo của số phức z thỏa mãn $z+2\bar{z}=\left(2-i\right)^3\left(1-i\right)$.

A. 9. **B.** –9. **C.** 13. **D.** –13.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z+2\bar{z}=\left(2-i\right)^3\left(1-i\right)\Leftrightarrow z+2\bar{z}=-9-13i$.

Đặt $z=a+bi\ \left(a,\,b\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó $\left(a+bi\right)+2\left(a-bi\right)=-9-13i\Leftrightarrow\begin{cases}3a=-9\\-b=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=13\end{cases}$.

Câu 5. Cho số phức $z=\dfrac{9m-6+\left(m^3-4m^2+7m+2\right)i}{m+2i}$. với m là tham số thực**.** Với giá trị nào của m thì z là số thực**.**

A. $m=-1,m=-3$. **B.** $m=4,m=5$. **C.** $m=1,m=3$. **D.** $m=2,m=4$.

Lời giải

Chọn C

$z=2m+1+\left(m^2-4m+3\right)i$.

z là số thực khi và chỉ khi $m^2-4m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$.

Câu 6. Cho hai số phức $z=\left(a-2b\right)-\left(a-b\right)i$ và $w=1-2i$. Biết $z=w.i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=7$. **B.** $S=-7$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=-3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=\left(a-2b\right)-\left(a-b\right)i=\left(1-2i\right).i=2+i$.

$\Rightarrow\begin{cases}a-2b=2\\-a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-3\end{cases}$. Vậy $S=a+b=-7$.

Câu 7. Cho số phức $z=a+bi$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) thỏa $\left|z\right|\left(2+i\right)=z-1+i\left(2z+3\right)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=7$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

$\left|z\right|\left(2+i\right)=z-1+i\left(2z+3\right)\Leftrightarrow\left|z\right|\left(2+i\right)+1-3i=z\left(1+2i\right)\Leftrightarrow\left(1+2\left|z\right|\right)+\left(\left|z\right|-3\right)i=z\left(1+2i\right)$

Suy ra: $\left(1+2\left|z\right|\right)^2+\left(\left|z\right|-3\right)^2=5\left|z\right|^2\Leftrightarrow\left|z\right|=5$

Khi đó, ta có: $5\left(2+i\right)=z-1+i\left(2z+3\right)\Leftrightarrow z\left(1+2i\right)=11+2i\Leftrightarrow z=\dfrac{11+2i}{1+2i}=3-4i$

Vậy $S=a+b=3-4=-1$.

Câu 8. Cho số phức z bất kỳ, xét các số phức $\alpha=z^2+\left(\bar{z}\right)^2,\beta=z.\bar{z}+i\left(z-\bar{z}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha,\ \beta$ là các số thực. **B.** α là số thực, β là số ảo.

C. α là số ảo, β là số thực. **D.** $\alpha,\ \beta$ là các số ảo.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi,\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\alpha=z^2+\left(\bar{z}\right)^2=a^2-b^2+2abi+a^2-b^2-2abi=2\left(a^2-b^2\right)$.

$\beta = z.\overline{z} + i\left(z - \overline{z}\right) = a^2 + b^2 + i.2bi = a^2 + b^2 - 2b$.

Vậy: α, β là các số thực.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z.\overline{z} - z\right| = 2$ và $\left|z\right| = 2$. Số phức $w = z^2 - z - 3i$ bằng:

A. $z = 2 - 3i$. **B.** $z = 6 - 3i$. **C.** $z = -1 - 2i$. **D.** $z = -1 - 4i$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = x + yi$ với x, $y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\left|z\right| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$.

Mà $\left|z.\overline{z} - z\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z.\left(\overline{z} - 1\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\overline{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2$ nên $w = z^2 - z - 3i = 2 - 3i$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $\left(1 - i\right)z + 4\overline{z} = 7 - 7i$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $\left|z\right| = \sqrt{5}$. **B.** $\left|z\right| = 3$. **C.** $\left|z\right| = 5$. **D.** $\left|z\right| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$.

$\left(1 - i\right)z + 4\overline{z} = 7 - 7i \Leftrightarrow \left(1 - i\right)\left(a + bi\right) + 4\left(a - bi\right) = 7 - 7i$.

$\Leftrightarrow a + bi - ai + b + 4a - 4bi = 7 - 7i \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 7 \\ -a - 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 2i$.

Vậy $\left|z\right| = \sqrt{5}$.

Câu 11. Cho số phức $z = a + bi$ $\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ thoả mãn $\left(3 - i\right)\left|z\right| = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{z} + 5 - i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -2$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(3 - i\right)\left|z\right| = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{z} + 5 - i \Leftrightarrow \left(3 - i\right)\left|z\right| = \dfrac{\left(1 + i\sqrt{7}\right)\overline{z}}{\left|z\right|^2} + 5 - i$

$\Leftrightarrow \left(3\left|z\right| - 5\right) + \left(1 - \left|z\right|\right)i = \dfrac{\left(1 + i\sqrt{7}\right)\overline{z}}{\left|z\right|^2} \Leftrightarrow \left(3\left|z\right| - 5\right)^2 + \left(1 - \left|z\right|\right)^2 = \dfrac{8\left|z\right|^2}{\left|z\right|^4}$

$\Leftrightarrow 10\left|z\right|^4 - 32\left|z\right|^3 + 26\left|z\right|^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\left|z\right| - 2\right)\left(5\left|z\right|^3 - 6\left|z\right|^2 + \left|z\right| + 2\right) = 0$

$\Rightarrow \left|z\right| = 2$ (phương trình $5\left|z\right|^3 - 6\left|z\right|^2 + \left|z\right| + 4 = 0$ vô nghiệm do $\left|z\right| \geq 0$).

Với $\left|z\right| = 2$ thay vào biểu thức $\left(3 - i\right)\left|z\right| = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{z} + 5 - i$ ta được

$1 - i = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{z} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{1 - i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} + \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} \\ b = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$.

Vậy $a + b = 1$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 16

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow z(1+3i)-4+4i=(1+i)|z|$

$\Leftrightarrow (a+bi)(1+3i)-4+4i=(1+i)\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a-3b-4+(3a+b+4)i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ 3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16} \\ a=-2b-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8\ge 0 \\ 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\le -\dfrac{8}{5} \\ \left[\begin{array}{l} b=-2(N) \\ b=-\dfrac{6}{5}(L) \end{array}\right. \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases}.$

Vậy $|z|=2$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho a là số thực, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng $120°$, tính tổng các giá trị của a.

A. -6. **B.** 6. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$. Do đó, ta phải có: $\Delta=a^2-12a+16<0 \Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_1=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

Tam giác OMN cân nên $MON=120°$ $\Rightarrow \dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos 120°$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2-6a+7=0$ $a=3\pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải

Chọn C

$w=2z+1-i\Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\le 2\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\le 2\Leftrightarrow|w-1+i-6+8i|\le 4\Leftrightarrow|w-7+9i|\le 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow(x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi$.

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\bar{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $R=5\sqrt{10}$ **B.** $R=5\sqrt{5}$ **C.** $R=5\sqrt{13}$ **D.** $R=5\sqrt{17}$

Lời giải

Chọn C

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ là đường tròn (C) tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=5$. Ta có (C) nhận trục hoành là trục đối xứng nên tọa độ điểm biểu diễn $\bar{z}$ cũng nằm trên đường tròn này hay $|\bar{z}-1|=5$.

Ta có

$w=(2+3i)\bar{z}+3+4i\Leftrightarrow w=(2+3i)(\bar{z}-1)+(2+3i)+3+4i\Leftrightarrow w-(5+7i)=(2+3i)(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow|w-(5+7i)|=|(2+3i)||(\bar{z}-1)|\Leftrightarrow|w-(5+7i)|=5\sqrt{13}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 10. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi\ \ (a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$.

$(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25\Leftrightarrow[a-2+(b+1)i][a-2-(b+1)i]=25$

$\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+1)^2=25\ (1)$

Theo giả thiết: $w=2\bar{z}-2+3i\Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-2+3i\Leftrightarrow x+yi=2a-2+(3-2b)i$.

$\Rightarrow\begin{cases}x=2a-2\\y=3-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x+2}{2}\\b=\dfrac{3-y}{2}\end{cases}(2)$.

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\dfrac{x+2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{3-y}{2}+1\right)^2=25\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-5)^2=100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.

Vậy $a+b+c=17$.

Câu 5. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+m-1+\sqrt{3}i|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;\ m=3$. **B.** $m=5;\ m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi\ ,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó.

$\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4\Leftrightarrow\left|x+yi+m-1+\sqrt{3}i\right|=4.$

$\Leftrightarrow\left|(x+m-1)+\left(y+\sqrt{3}\right)i\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{(x+m-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=4.$

$\Leftrightarrow(x+m-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=16.$

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I\left(1-m;-\sqrt{3}\right)$ và bán kính $R=4$. Để đường tròn này tiếp xúc với trục Oy thì $|1-m|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$.

Vậy $m=5;m=-3$.

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=3+2i$ **B.** $z=-1+i$ **C.** $z=-2+2i$ **D.** $z=2+2i$

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi$. Khi đó $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow\ |(a-2)+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow\ (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow\ a+b=4\ (1)$

Mà $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Mà $\left(a^2+b^2\right)\left(1^2+1^2\right)\overset{BCS}{\geq}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}=8$ (Theo (1))

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a^2+b^2}\geq2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\ |z|\geq2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \min|z|=2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}a=2\\b=2\end{array}\right.\Rightarrow\ z=2+2i$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=|z-i|$. Tìm mô đun nhỏ nhất của số phức $w=2z+2-i$.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$. Khi đó $|z-1|=|z-i|\Leftrightarrow|a-1+bi|=|a+(b-1)i|$.

$\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2\Leftrightarrow a-b=0$.

Khi đó $w=2z+2-i=2(a+ai)+2-i=(2a+2)+i(a-1)$.

$\Rightarrow|w|=\sqrt{(2a+2)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{8a^2+4a+5}\geq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy mô đun nhỏ nhất của số phức w là $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Cho các số phức z thoả mãn $|z|=2$. Đặt $w=(1+2i)z-1+2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

A. 2. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Ta có $|z|=2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2\Leftrightarrow a^2+b^2=4$ $(*)$.

Mà số phức $w=(1+2i)z-1+2i$

$\Leftrightarrow w=(1+2i)(a+bi)-1+2i\Leftrightarrow w=(a-2b-1)+(2a+b+2)i$.

Giả sử số phức $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $\begin{cases}x=a-2b-1\\y=2a+b+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=a-2b\\y-2=2a+b\end{cases}$.

Ta có: $(x+1)^2+(y-2)^2=(a-2b)^2+(2a+b)^2$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=a^2+4b^2-4ab+4a^2+b^2+4ab$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=5(a^2+b^2)\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=20$ (theo $(*)$).

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Điểm M là điểm biểu diễn của số phức w thì $|w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OI=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $IM=R=2\sqrt{5}$.

Mặt khác $OM\geq|OI-IM|\Leftrightarrow OM\geq|\sqrt{5}-2\sqrt{5}|\Leftrightarrow OM\geq\sqrt{5}$.

Do vậy $|w|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\overline{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.

A. $\sqrt{17}+3$ **B.** $\sqrt{13}+3$ **C.** $\sqrt{13}-3$ **D.** $\sqrt{17}-3$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=1$.

$N(x';y')$ biểu diễn số phức $w=x'+iy'$ thì N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;-3)$, bán kính $R_2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2}=(1;-4)\Rightarrow I_1I_2=\sqrt{17}>R_1+R_2\Rightarrow(C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

$\Rightarrow MN_{\min}=I_1I_2-R_1-R_2=\sqrt{17}-3$

Câu 10. Cho số phức z thoả mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{309}$. **B.** $|w|=\sqrt{2315}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=3\sqrt{137}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi$. Ta có $P=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$.

Mặt khác $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $x=3+\sqrt{5}\sin t$, $y=4+\sqrt{5}\cos t$

Suy ra $P = 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t + 23$.

Ta có $-10 \le 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t \le 10$.

Do đó $13 \le P \le 33 \Rightarrow M = 33,\ m = 13 \Rightarrow |w| = \sqrt{33^2 + 13^2} = \sqrt{1258}$.

DẠNG TOÁN 20: SỐ PHỨC (Tìm phần thực của tổng hai số phức)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Các kiến thức cơ bản về số phức

- Tập hợp số phức: $\mathbb{C}$
- Số phức (*dạng đại số*) : $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2=-1$).
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b=0)$.
- z là thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0 $(a=0)$.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

◆ **Hai số phức bằng nhau**

Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$.

Khi đó $z_1=z_2\Leftrightarrow a+b.i=c+d.i\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$ (phần thực bằng nhau, phần ảo bằng nhau)

2. Các phép toán về số phức

◆ **Phép cộng hai số phức**

Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$.

Khi đó $z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức**

$z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

*) Số phức nghịch đảo của $z=a+bi\neq 0$: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\cdot\overline{z}$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

◆ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

- $|z.z'|=|z||z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$
- $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Số phức liên hợp:** Số phức liên hợp của $z=a+bi$ là $\overline{z}=a-bi$.

• $\overline{\overline{z}}=z;\ \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'};\quad \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'};\quad \overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'};\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}};\quad z.\overline{z}=a^2+b^2$

***) Chú ý:** Với $k\in\mathbb{N}^*$ thì $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$

• Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Cho một cấp số nhân (u_n) với công bội $q\neq 1$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

Khi đó: $S_n=\frac{n(1-q^n)}{1-q}$ (4) hoặc $S_n=\frac{u_1-u_{n+1}}{1-q}$ (5)

• Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Cho một cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Khi đó:

$$\boxed{S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Thực hiện các phép toán.

• Tìm phần thực, phần ảo.

• Số phức liên hợp .

• Tính mô đun của số phức.

• Phương trình bậc nhất theo z (và liên hợp của z)

• Hỏi tổng hợp về các khái niệm.

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định phần thực của tổng các số phức.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Áp dụng công thức tính tổng của hai số phức.

B2: Suy ra phần thực.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=2+i+1+3i=3+4i$.

Khi đó phần thực của số phức z_1+z_2 bằng 3.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho hai số phức $z_1=2-2i$, $z_2=-3+3i$. Khi đó số phức z_1-z_2 là

A. $-5i$. **B.** $5-5i$. **C.** $-1+i$. **D.** $-5+5i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1-z_2=(2-2i)-(-3+3i)=5-5i$.

Câu 2. Cho số phức $z_1=1-6i; z_2=2-4i$. Phần thực, phần ảo của $3z_1-2z_2$ lần lượt là

A. $-1;-10i$. **B.** $1;2$. **C.** $-1;-10$. **D.** $-2;1$.

Lời giải

Chọn C

$3z_1-2z_2=3(1-6i)-2(2-4i)=-1-10i$

Câu 3. Phần thực của $z=(2+3i)i$ là

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

$z=(2+3i)i=-3+2i \Rightarrow$ phần thực là -3.

Câu 4. Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=-5+2i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. 5. **B.** -5. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $-\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

$z_1+z_2=(1+i)+(-5+2i)=-4+3i \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

Câu 5. Cho số phức $z=i$. Số phức $2z-3+i$ là

A. $-1+i$. **B.** $-3+3i$. **C.** $-1+3i$. **D.** $1-i$.

Lời giải

Chọn B

$2z-3+i=2i-3+i=-3+3i$.

Câu 6. Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}=3-2i$. Tổng phần ảo của số phức z và $\overline{z}$ bằng.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=3+2i;\ \overline{z}=3-2i$. Vậy tổng phần ảo của số phức z và $\overline{z}$ bằng 0.

Câu 7. Số nào trong các số phức sau là số thuần ảo?

A. $\left(\sqrt{7}+i\right)+\left(\sqrt{7}-i\right)$.

B. $(10+i)+(10-i)$.

C. $\left(5-i\sqrt{7}\right)+\left(-5-i\sqrt{7}\right)$.

D. $(3+i)-(-3+i)$.

Lời giải

Chọn C

✍ $\left(5-i\sqrt{7}\right)+\left(-5-i\sqrt{7}\right)=-2i\sqrt{7}$ là số thuần ảo.

✍ $(10+i)+(10-i)=20$ là số thực.

✍ $\left(\sqrt{7}+i\right)+\left(\sqrt{7}-i\right)=2\sqrt{7}$ là số thực.

✍ $(3+i)-(-3+i)=6$ là số thực.

Câu 8. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=2-3i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=3z_1+2z_2$ là

A. 7.

B. 11.

C. 1.

D. $7i$.

Lời giải

Chọn A

$\mathrm{w}=3z_1+2z_2=3(1+2i)+2(2-3i)=7+0i$. Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Câu 9. Với mọi số phức $z=a+bi$ $(\forall a,\ b\in\mathbb{R})$, hãy xác định mệnh đề đúng.

A. $z-\overline{z}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

B. $z+2\overline{z}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

C. $z-2\overline{z}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

D. $z+\overline{z}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi$ $(\forall a,\ b\in\mathbb{R})$, suy ra $\overline{z}=a-bi$. Khi đó $z+\overline{z}=2a\in\mathbb{R}$.

Do vậy mệnh đề đúng là : $z+\overline{z}\in\mathbb{R},\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=-1-2i$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $|z_1-z_1|=5$.

B. $|z_1|=|z_2|$.

C. $|z_1+2z_2|=5$.

D. $z_1+z_2=1$.

Lời giải

Chọn B

$|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=|z_2|=\sqrt{5}$;

Mức độ 2

Câu 1. Cho hai số phức $z_1=1+i; z_2=1-i$. Phần thực của số phức z_1z_2 bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$z_1z_2=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$.

Câu 2. Với mọi số ảo z, số $z^2+|z|^2$ là:

A. Số thực âm **B.** Số thực dương **C.** Số 0 **D.** Số ảo khác 0

Lời giải

Chọn C

Do z là số ảo nên z có dạng: $z=bi(b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z^2+|z|^2=(bi)^2+b^2=-b^2+b^2=0$.

Câu 3. Số phức $\dfrac{1+3i}{1-3i}$ có phần ảo bằng

A. $-\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$\dfrac{1+3i}{1-3i}=\dfrac{(1+3i)^2}{(1-3i)(1+3i)}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$. Suy ra số phức $\dfrac{1+3i}{1-3i}$ có phần ảo bằng $\dfrac{3}{5}$.

Câu 4. Phần thực, phần ảo của số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{5}{1-2i}-3i$ lần lượt là

A. $1;1$. **B.** $1;-2$. **C.** $1;2$. **D.** $1;-1$

Lời giải

Chọn A

$\overline{z}=\dfrac{5}{1-2i}-3i=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}-3i=\dfrac{5(1+2i)}{5}-3i=1-i$

$\Rightarrow z=1+i$

Phần thực, phần ảo của z lần lượt là $1;1$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z+\dfrac{1-i}{1+i}=5-i$. Môđun của số phức $w=1+2z+z^2$ có giá trị là

A. 100. **B.** -10. **C.** 10. **D.** -100.

Lời giải

Chọn C

$(2+i)z+\dfrac{1-i}{1+i}=5-i\Leftrightarrow(2+i)z+\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=5-i\Leftrightarrow(2+i)z+\dfrac{-2i}{2}=5-i$

$\Leftrightarrow(2+i)z=5\Leftrightarrow z=\dfrac{5}{2+i}=2-i$

$\Rightarrow w=1+2z+z^2=(1+z)^2=(3-i)^2=8-6i\Leftrightarrow|w|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$.

Câu 6. Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$.

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+3i$. **D.** $w=-7-7i$.

Lời giải

Chọn B

$z=2+5i\Rightarrow\begin{cases}iz=-5+2i\\ \overline{z}=2-5i\end{cases}\Leftrightarrow w=iz+\overline{z}=-3-3i$.

Câu 7. Tìm các số thực x,y thỏa mãn đẳng thức $x(3+5i)+y(1-2i)^3=-35+23i$.

A. $(x;y)=(-3;4)$. **B.** $(x;y)=(-3;-4)$. **C.** $(x;y)=(3;-4)$. **D.** $(x;y)=(3;4)$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $(1-2i)^3=-11+2i$

Vậy ta có $x(3+5i)+y(1-2i)^3=-35+23i\Leftrightarrow(3x-11y)+(5x+2y)i=-35+23i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-11y=-35\\ 5x+2y=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$. Tính tích phần thực và phần ảo của số phức z.

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+y\text{i}$ (với $x,\ y\in\mathbb{R}$), ta có $\overline{z}=x-y\text{i}$.

Theo giả thiết, ta có $x+y\text{i}-(2+3i)(x-y\text{i})=1-9i\Leftrightarrow-x-3y-(3x-3y)\text{i}=1-9\text{i}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x-3y=1\\ 3x-3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$. Vậy $xy=-2$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Xác định phần thực và phần ảo của z.

A. Phần thực là -2; phần ảo là $5i$. **B.** Phần thực là -3; phần ảo là $5i$.

C. Phần thực là -2; phần ảo là 3. **D.** Phần thực là -2; phần ảo là 5.

Lời giải

Chọn D

Giả sử số phức $z=a+bi\ (a,\mathrm{b}\in\mathbb{R})$.

Phương trình $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$

$\Leftrightarrow(2-3i)(a+bi)+(4+i)(a-bi)=-(-8+6i)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=4\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}$.

Câu 10. Gọi z_1 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2-4z+20=0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z_1.

A. $M(4;-2)$. **B.** $M(-2;-4)$. **C.** $M(-4;-2)$. **D.** $M(2;-4)$.

Lời giải

Chọn D

Có $z^2-4z+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2+4i\\z=2-4i\end{array}\right.\Rightarrow z_1=2-4i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức z_1 là $M(2;-4)$.

Mức độ 3

Câu 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi\ \ x,y\in\mathbb{R}$

Ta có $|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=2\ \ (1)$

$z^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2-y^2=0\,(2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^2-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm1\end{cases}$

Vậy có 4 số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 2. Cho số phức $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3=2-2i$. Cặp số $(x;y)$ là

A. $(2;2)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-2+\sqrt{3};-2+\sqrt{3})$. **D.** $(-2-\sqrt{3};-2-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x+iy)^3=2-2i\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3xy^2=2\\3x^2y-y^3=-2\end{cases}\Rightarrow x^3-3xy^2=-(3x^2y-y^3)$

Đặt $y=tx$ suy ra $t=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow(x;y)=(1;1)$

Câu 3. Số phức z thỏa $z=1+2i+3i^2+4i^3+...+18i^{19}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overline{z}=18$.

B. z có phần thực bằng -18 và phần ảo bằng 0.

C. z có phần thực bằng -9 và phần ảo -9.

D $\overline{z-i}=-9+9i$.

Lời giải

Chọn C

$$z-iz=1+i+...+i^{19}-18i^{20}=1.\frac{1-i^{20}}{1-i}-18i^{20}=-18\Rightarrow z=\frac{-18}{1-i}=-9-9i.$$

Câu 4. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+6=0$. Trong đó z_1 có phần ảo âm. Giá trị biểu thức $M=|z_1|+|3z_1-z_2|$ là:

A. $\sqrt{6}-2\sqrt{21}$ **B.** $\sqrt{6}+2\sqrt{21}$ **C.** $\sqrt{6}+4\sqrt{21}$ **D.** $\sqrt{6}-4\sqrt{21}$

Lời giải.

Chọn B

$z^2-2z+6=0\Leftrightarrow(z-1)^2+5=0\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{5}i$

$\Rightarrow z_1=1-\sqrt{5}i;z_2=1+\sqrt{5}i$

$\Rightarrow M=|z_1|+|3z_1-z_2|=\left|1-\sqrt{5}i\right|+\left|2-4\sqrt{5}i\right|=\sqrt{6}+\sqrt{84}=\sqrt{6}+2\sqrt{21}$

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$. Giá trị của $|z|$ là ?

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Chọn A

Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ ta có :

$(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i\Leftrightarrow\left[(2a-1)+2bi\right](1+i)+\left[(a+1)-bi\right](1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow(2a-2b-1)+(2a+2b-1)i=(a-b+1)-(a+b+1)i=2-2i$

$$\Leftrightarrow(3a-3b)+(a+b-2)=2-2i\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=2\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 6. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{8}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Giải phương trình đã cho ta được các nghiệm: $z_1=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i, z_2=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$; $z_1+z_2=2$. Do đó $\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}=\dfrac{11}{4}$.

Câu 7. Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{(2+i)|z|^2}{z}=z+2i-1$. Tìm phần ảo của số phức z^3.

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{32}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$\dfrac{(2+i)|z|^2}{z}=z+2i-1\Leftrightarrow\dfrac{(2+i)z\bar{z}}{z}=z+2i-1\Leftrightarrow(2+i)\bar{z}=z+2i-1\ (1)$.

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và $x^2+y^2>0$. Ta có: $(1)\Rightarrow(2+i)(x-yi)=x+yi+2i-1$

$\Leftrightarrow(x+y+1)+(x-3y-2)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1=0\\x-3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\y=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ (Thỏa mãn).

Vậy $z=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i\Rightarrow z^3=\dfrac{13}{32}+\dfrac{9}{32}i\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 8. Cho các số phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=1;|z_2|=2;|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2$

A. $P=-2$ **B.** $P=2$ **C.** $P=8$ **D.** $P=-8$

Lời giải

Chọn A

$|z_1|=1\Rightarrow z_1\bar{z}_1=1;\ \ |z_2|=2\Leftrightarrow z_2\bar{z}_2=4$

$|z_1+z_2|=\sqrt{3}\Leftrightarrow(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=3\Leftrightarrow|z_1|^2+|z_2|^2+P=3\Rightarrow P=-2.$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là:

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

B. Hình tròn tâm O, bán kính $R=1$ (kể cả biên).

C. Hình tròn tâm O , bán kính $R=1$ (không kể biên).

D. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ bỏ đi một điểm $(0,1)$

Lời giải:

Chọn D

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$

Ta có: $\frac{z+i}{z-i}=\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}+\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}i$

Để $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo thì $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(x-1)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x\neq 0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ bỏ đi một điểm $(0,1)$.

Câu 10. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$thỏa mãn $z-\frac{\overline{z}}{1+3i}=\frac{6+7i}{5}$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:

$$a+bi-\frac{a-bi}{1+3i}=\frac{6+7i}{5}\Leftrightarrow 9a+3b+(3a+11b)i=12+14i \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b=12 \\ 3a+11b=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow P=2.$$

↳ Mức độ 4

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , giả sử ba điểm A,B,C lần lượt biểu diễn các số phức $1+i, 3+2i, z$ trong đó $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z+1+i|=|\overline{z}-1-2i|$. Tìm $a+b$ biết ba điểm A,B,C thẳng hàng.

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow \overline{z}=a-bi$ theo giả thiết ta có: $|a+1+i(b+1)|=|(a-1)-(b+2)i|$

$\Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=(a-1)^2+(b+2)^2$

$\Leftrightarrow 4a-2b-3=0\ (1)$

Do đó $A(1;1);B(3;2);C(a;b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(2;1),\overrightarrow{AC}(x-1;y-1)$

Để 3 điểm $A;B;C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB},\ k\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=k.2 \\ b-1=k.1 \end{cases}\Rightarrow a-2b+1=0\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a-2b+1=0 \\ 4a-2b-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{3} \\ a=\dfrac{7}{6} \end{cases}\Rightarrow a+b=\dfrac{5}{2}$.

Câu 2. Cho số phức $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m\in[1;50]$ để z là số thuần ảo?

A. 26. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=\left(\dfrac{2+6i}{3-i}\right)^m=(2i)^m=2^m.i^m$

z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 3. Cho số phức $z=1+\sum_{n=1}^{26}(1+i)^n(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{26}$. Phần thực của số phức z là

A. $(1+2^{13})$. **B.** $-(1+2^{13})$. **C.** -2^{13}. **D.** 2^{13}.

Lời giải

Chọn D

$$z=1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{26}=\frac{(1+i)^{27}-1}{i}$$

$$=\frac{(1+i)^{26}.(1+i)-1}{i}=\frac{(2i)^{13}(1+i)-1}{i}=\frac{2^{13}i-2^{13}-1}{i}=2^{13}+(1+2^{13})i$$

Vậy phần thực là 2^{13}.

Câu 4. Cho số phức $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}+(1+i)^{20}+(1+2i)(1-2i)+\dfrac{1}{i^3}$. Phần thực của số phức z là

A. 2018. **B.** 2020. **C.** -1018. **D.** -2020.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{1-i^2}=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i\Rightarrow\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}=(-i)^{20}=\left(i^4\right)^5=1$.

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i\Rightarrow(1+i)^{20}=\left[(1+i)^2\right]^{10}=(2i)^{10}=2^{10}.i^8.i^2=-2^{10}$

$(1+2i)(1-2i)+\frac{1}{i^3}=1-4i^2+\frac{i}{i^4}=5+i$.

Do đó, $B=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+(1+i)^{20}+(1+2i)(1-2i)+\frac{1}{i^3}=1-2^{10}+5+i=-1018+i$.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn $1-i=(1+i)|z|-\frac{2i+6}{\overline{z}}$. Biết $z=a+bi$ (Với $a,b\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $A=a^2+3b$.

A. $A=\frac{156}{25}$. **B.** $A=\frac{183}{25}$. **C.** $A=6$. **D.** $A=5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $|z|=k\geq 0$

Khi đó $1-i=(1+i)|z|-\frac{2i+6}{\overline{z}}\Leftrightarrow 1-i=(1+i)|z|-\frac{2i+6}{z}\Leftrightarrow 1-k-(1+k)i=-\frac{2i+6}{z}$.

Lấy mô đun 2 vế ta có $\sqrt{(1-k)^2+(1+k)^2}=\frac{\sqrt{40}}{k}\Leftrightarrow k=2$.

Suy ra $1+3i=\frac{2i+6}{\overline{z}}\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{2i+6}{1+3i}=\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\Rightarrow z=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$.

Vậy $A=a^2+3b=\frac{156}{25}$.

Câu 6. Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $a,b\neq 0$ và $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1-a^4-b^4}{1-a^6-b^6}$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B

$1+z+z^2=1+(a+bi)+(a+bi)^2=(a^2-b^2+1+a)+i(2ab+b)$

$1-z+z^2=(1+a^2-b^2-a)+i(2ab-b)$

$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}=\frac{(a^2-b^2+1+a)+i(2ab+b)}{(1+a^2-b^2-a)+i(2ab-b)}$

$$=\frac{\left[\left(a^2-b^2+1+a\right)+i\left(2ab+b\right)\right]\left[\left(1+a^2-b^2-a\right)-i\left(2ab-b\right)\right]}{\left(1+a^2-b^2-a\right)^2+\left(2ab-b\right)^2}$$

$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực $\Leftrightarrow -\left(2ab-b\right)\left(a^2-b^2+1+a\right)+\left(2ab+b\right)\left(1+a^2-b^2-a\right)=0$

$\Leftrightarrow -2a^2b-2b^3+2b=0\Leftrightarrow 2b\left(a^2+b^2-1\right)=0\Leftrightarrow a^2+b^2=1.$

Ta có :

$1=a^4+b^4+2a^2b^2\Leftrightarrow a^4+b^4=1-2a^2b^2$

$1=a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4\Leftrightarrow a^6+b^6=1-3a^2b^2\left(a^2+b^2\right)=1-3a^2b^2$

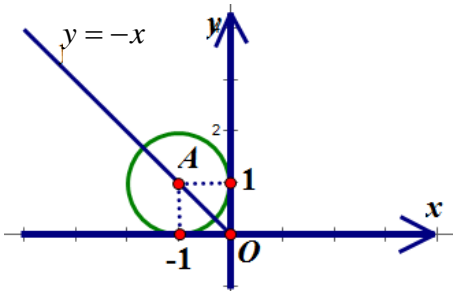
Vậy $A=\frac{1-\left(a^4+b^4\right)}{1-\left(a^6+b^6\right)}=\frac{2}{3}.$

Câu 7. Trong mặt phẳng phức Oxy, trong các số phức z thỏa $\left|z+1-i\right|\le 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{-\sqrt{2}-2}{2}.$ **B.** $\frac{\sqrt{2}-2}{2}.$ **C.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1+i$

Ta có : $\left|z+1-i\right|\le 1\Leftrightarrow MA\le 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A\left(-1;1\right),R=1$ như hình vẽ

Để $\max\left|z\right|\Leftrightarrow\max\left(OM\right)\Rightarrow M$ thỏa hệ : $\begin{cases}\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 1\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{2}-2}{2}\\ x=-\frac{\sqrt{2}+2}{2}\end{array}\right.$

OM lớn nhất khi $x=-\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

Câu 8. Tính $S=i+2i^2+3i^3+...+2020i^{2020}.$

A. $S=-1010+1010i$ **B.** $S=-1010-1010i.$

C. $S=1010-1010i.$ **D.** $S=1010+1010i.$

Lời giải

Chọn C

Đặt $P=1+2i+3i^2+4i^3+...+2020i^{2019}\Rightarrow S=Pi$.

Xét hàm số $f(x)=x+x^2+x^3+...+x^{2020}$.

-Nếu $x=1$ thì $f(x)=2020$

-Xét $x\neq 1$ ta có $f(x)=x+x^2+x^3+...+x^{2020}=\dfrac{x\left(x^{2020}-1\right)}{x-1}=\dfrac{x^{2021}-x}{x-1}$

Có

$$f'(x)=1+2x+3x^2+...+2020x^{2019}=\dfrac{\left(2021x^{2020}-1\right)(x-1)-\left(x^{2021}-x\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{2020x^{2021}-2021x^{2020}+1}{(x-1)^2}$$

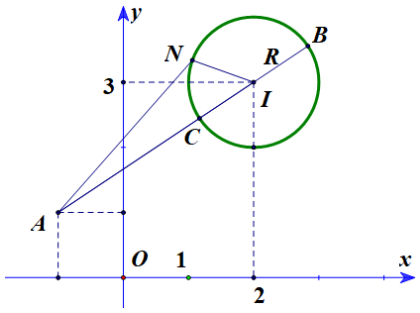
Do đó $P=f'(i)=\dfrac{2020i^{2021}-2021i^{2020}+1}{(i-1)^2}=-1010-1010i\Rightarrow S=Pi=1010-1010i$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z+1-i|$. Tính $T=M^2+m^2$.

A. 27. **B.** 29. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn D



Gọi $N,A(-1;1)$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức $z;-1+i$.

Vì $|z-(2+3i)|=1\Rightarrow N$ thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R=1$.

$\max|z+1-i|=\max NA=R+IA=1+\sqrt{13}$; $\min|z+1-i|=\min NA=|R-IA|=-1+\sqrt{13}$.

Vậy $T=28$.

Câu 10. . Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có môđun bằng 2 và phần ảo dương. Tính giá trị của $S=(5(a+b)+2)^{2020}$ khi biểu thức $P=|2+z|+3|2-z|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2^{2020}$. **D.** $S=2^{1010}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $|z|=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=4$. Suy ra $-2 \le a \le 2$.

Khi đó, $P=|2+z|+3|2-z|=\sqrt{(a+2)^2+b^2}+3\sqrt{(2-a)^2+b^2}=\sqrt{8+4a}+3\sqrt{8-4a}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$P \le \sqrt{\left(1^2+3^2\right)\left[(8+4a)+(8-4a)\right]}$ hay $P \le 4\sqrt{10}$, với mọi $-2 \le a \le 2$.

Vậy $P_{\max}=4\sqrt{10}$ khi $3\sqrt{8+4a}=\sqrt{8-4a} \Leftrightarrow a=-\dfrac{8}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{6}{5} \\ b=-\dfrac{6}{5}(L) \end{array}\right.$

$S=(5(a+b)+2)^{2018}=\left[5\left(-\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}\right)+2\right]^{2018}=0.$

DẠNG TOÁN 21: TÌM ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Điểm biểu diễn số phức:**

Số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$.

◆ **Nhận xét:**

- Nếu số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ thì $|z|=OM$.
- Nếu M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z, z' thì $|z-z'|=MN$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Cho điểm biểu diễn, tìm số phức tương ứng.
- Tìm quỹ tích điểm biểu diễn cho số phức thỏa mãn điều kiện cho trước.
- Tìm cực trị của biểu thức liên quan đến modul số phức.

BÀI TẬP MẪU

Câu 21(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây ?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm điểm biểu diễn của số phức.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính $z=(1+2i)^2$ đưa về dạng $z=x+yi$.

B2: Tìm điểm biểu diễn của số phức z.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

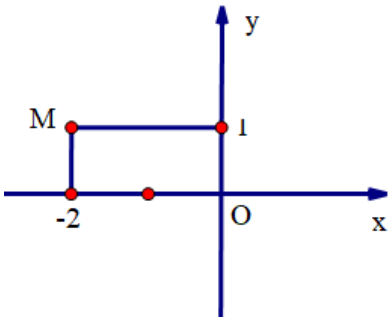
Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là điểm có tọa độ $(a;b)$.

Do đó, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm có tọa độ $(-1;2)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức



A. $z=-2+i.$ **B.** $z=1-2i.$ **C.** $z=2+i.$ **D.** $z=1+2i.$

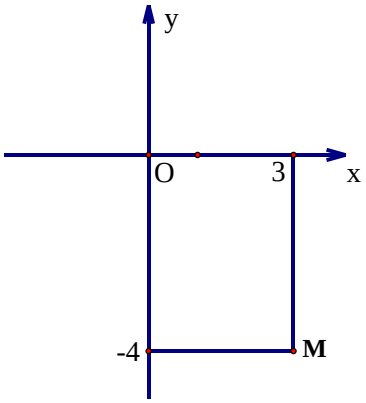
Lời giải

Chọn A

Số phức $z=a+bi$ có phần thực là -2 ảo là 1.

Số phức cần tìm là $z=-2+i.$

Câu 2. Điểm M trong hình là điểm biểu diễn số phức z. Tìm số phức $\bar{z}$



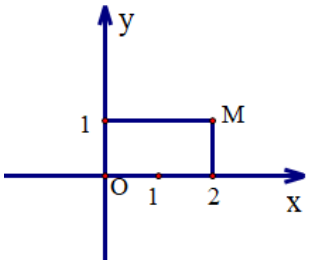
A. $\bar{z}=-3+4i.$ **B.** $\bar{z}=3-4i.$ **C.** $\bar{z}=3+4i.$ **D.** $\bar{z}=-4+3i.$

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(3;-4)$ biểu diễn số phức $z=3-4i\Rightarrow\bar{z}=3+4i$.

Câu 3. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z=-1+2i.$ **B.** $z=1+2i.$ **C.** $z=1-2i.$ **D.** $z=2+i.$

Lời giải

Chọn D

Điểm $M(2;1)$ biểu diễn số phức $z=2+i.$

Câu 4. Trong mặt phẳng phức gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi$ với $a,\ b\in\mathbb{R},\ ab\neq 0$ và M' là diểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. M' đối xứng với M qua Oy.

B. M' đối xứng với M qua Ox.

C. M' đối xứng với M qua O.

D. M' đối xứng M qua đường $y=x$.

Lời giải

Chọn B

M là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi\Rightarrow M\ a;b$.

M' là điểm biểu diễn cho số phức $\overline{z}=a-bi\Rightarrow M\ a;-b$.

Vậy, M' đối xứng với M qua Ox.

Câu 5. Gọi $A,\ B,\ C$ là các điểm trong mặt phẳng theo thứ tự biểu diễn số phức $2+3i,\ 3+i,\ 1+2i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức z. Tìm z.

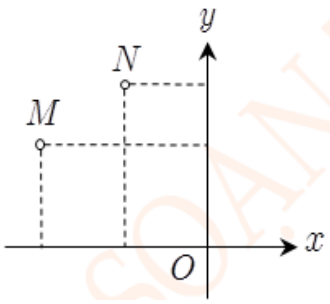
A. $z=1+i$. **B.** $z=2-2i$. **C.** $z=1-i$. **D.** $z=2+2i$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ $A\ 2;3\ ,B\ 3;1\ ,C\ 1;2\ \Rightarrow G\ 2;2\ \Rightarrow z=2+2i$.

Câu 6. Gọi $M,\ N$ lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1,\ z_2$ khác 0.



Khẳng định nào **sai** ?

A. $|z_2|=ON$. **B.** $|z_1-z_2|=MN$. **C.** $|z_1+z_2|=MN$. **D.** $|z_1|=OM$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z_1|=OM,|z_2|=ON,|z_1-z_2|=MN$ nên đáp án **A, B, D** đúng.

Câu 7. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_1\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$4z^2-16z+17=0.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2+\frac{1}{2}i\\z=2-\frac{1}{2}i\end{array}\right.\Rightarrow z_0=2+\frac{1}{2}i$$

$w=iz_\circ=i\left(2+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+2i\Rightarrow M_w\left(-\frac{1}{2};2\right)$ là điểm biểu diễn số phức $w=iz_\circ$.

Câu 8. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1=1+2i;z_2=5-i$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

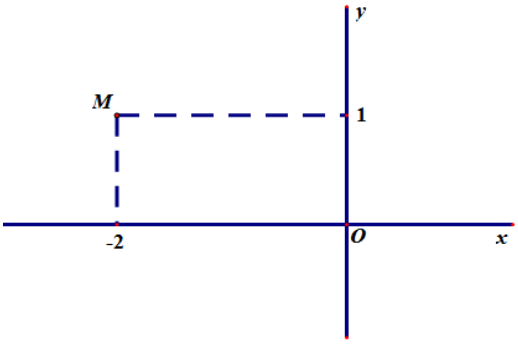
A. $\sqrt{5}+\sqrt{26}$. **B.** 5. **C.** 25. **D.** $\sqrt{37}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A\ 1;2\ ;B\ 5;-1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\ 4;-3\ \Rightarrow AB=\sqrt{4^2+\ -3\ ^2}=5.$

Câu 9. Điểm M trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức z. Môđun của z bằng



A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=-2+i\Rightarrow|z|=\sqrt{-2\ ^2+1^2}=\sqrt{5}.$

Câu 10. Gọi z_0 là nghiệm có phần ảo âm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Điểm biểu của z_0 có tọa độ là

A. $(2;1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;-1)$. **D.** $(-2;-1)$.

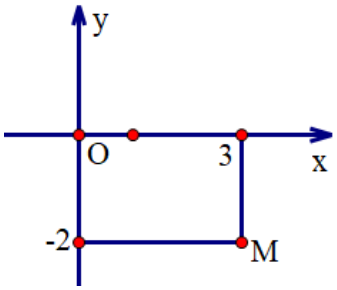
Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\ z-2\ ^2=i^2\Leftrightarrow z=2\pm i\Rightarrow z=2-i\Rightarrow M\ 2;-1\ .$

Mức độ 2

Câu 1. Điểm M trong hình là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi điểm nào sau đây biểu diễn số phức $w=z+i\bar{z}$



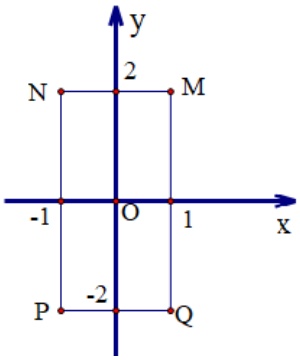
A. $N(1;-5)$. **B.** $P(5;-5)$. **C.** $Q(1;1)$. **D.** $R(5;1)$.

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(3;-2)$ là điểm biểu diễn số phức $z=3-2i \Rightarrow \mathrm{w}=z+i\bar{z}=3-2i+i(3+2i)$
$\Rightarrow w=1+i \Rightarrow \mathrm{w}$ có điểm biểu diễn là $Q(1;1)$.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z=3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?



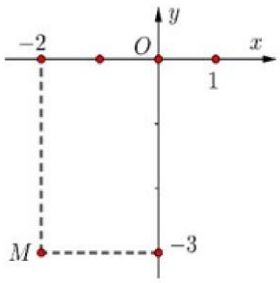
A. Điểm P **B.** Điểm Q. **C.** Điểm M. **D.** Điểm N.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(1+i)z=3-i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{1+i}=1-2i \Rightarrow z$ có điểm biểu diễn là $Q(1;-2)$.

Câu 3. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $1+i \quad 2-i$. **B.** $1+i \quad 2-3i$. **C.** $\dfrac{3-2i}{i}$. **D.** $\dfrac{i}{2+3i}$.

Lời giải

Chọn C

$M \ -2;-3$ nên biểu diễn số phức $-2-3i$

Ta có: $\frac{3-2i}{i}=-2-3i$.

Câu 4. Cho số phức $z=1-2i$. Điểm biểu diễn của số phức $w=iz$ là

A. $Q\ 1;2$. **B.** $N\ 2;1$. **C.** $M\ 1;-2$. **D.** $P\ -2;1$ /

Lời giải

Chọn B

$w=iz=i\ 1-2i\ =2+i\Rightarrow$ Ứng với điểm biểu diễn có toạ độ $2;1$

Câu 5. Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=-3+i$. Điểm biểu diễn của $z=z_1+z_2$ là

A. $N\ 4;-3$. **B.** $M\ 2;-5$. **C.** $P\ -2;-1$. **D.** $Q\ -1;7$.

Lời giải

Chọn C

$z=z_1+z_2=\ 1-2i\ +\ -3+i\ =-2-i\Rightarrow$ Ứng với điểm biểu diễn có toạ độ $-2;-1$.

Câu 6. Cho số phức $z=3+2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w=iz-\bar{z}$.

A. $M\ 5;5$. **B.** $N\ -5;5$. **C.** $P\ 5;-5$. **D.** $Q\ -5;-5$.

Lời giải

Chọn B

$w=iz-\bar{z}=i\ 3+2i\ -\ 3-2i\ =-5+5i\Rightarrow$ Ứng với điểm có toạ độ $-5;5$

Câu 7. Điểm biểu diễn của số phức z thoả điều kiện $1-i\ z=5+3i$ là

A. $M\ 1;2$. **B.** $N\ 4;1$. **C.** $P\ 1;4$. **D.** $Q\ -1;-4$.

Lời giải

Chọn C

$1-i\ z=5+3i\Leftrightarrow z=\frac{5+3i}{1-i}=1+4i\Rightarrow$ Ứng với điểm có toạ độ $1;4$.

Câu 8. Điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn $z+3\bar{z}=16-2i$ là

A. $M\ 4;1$. **B.** $N\ 4;-1$. **C.** $P\ -4;1$. **D.** $Q\ -4;-1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$

Theo giả thiết ta có

$x+yi+3\ x-yi\ =16-2i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3x=16\\y-3y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\Rightarrow z=4+i$

Khi đó z ứng với điểm có toạ độ $4;1$

Câu 9. Cho 2 số phức $z_1=1+i, z_2=2\bar{z_1}$ có điểm biểu diễn là M,N . Độ dài MN bằng

A. $MN=\sqrt{2}$. **B.** $MN=2$. **C.** $MN=\sqrt{10}$. **D.** $MN=5$.

Lời giải

Chọn C

$z_1=1+i\Rightarrow M\ 1;1$

$z_2 = 2\overline{z_1} = 2\ 1-i\ = 2-2i \Rightarrow N\ 2;-2$

$MN = \sqrt{2-1^{\ 2} + -2-1^{\ 2}} = \sqrt{10}$.

Câu 10. Điểm biểu diễn của số phức z thoả mãn $1+i\ z + \ 2-i\ \overline{z} = 13+2i$ là

A. $M\ 3;2$. **B.** $N\ 3;-2$. **C.** $P\ -3;2$. **D.** $Q\ -3;-2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x+yi$

$1+i\ z + \ 2-i\ \overline{z} = 13+2i$

$\Leftrightarrow\ 1+i\ \ x+yi\ + \ 2-i\ \ x-yi\ = 13+2i$

$\Leftrightarrow x+yi+xi-y+2x-2yi-xi-y = 13+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 13 \\ -y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 3-2i$

Mức độ 3

Câu 1. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+2| = |i-z|$ là đường thẳng có phương trình là

A. $2x+4y+13=0$. **B.** $4x+2y+3=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M\ x;y$ là điểm biểu diễn của $z = x+yi$.

Theo đề, ta có: $|z+2| = |i-z|$.

$\Leftrightarrow |x+yi+2| = |i-\ x+yi\ |$.

$\Leftrightarrow |\ x+2\ +yi| = |-x+\ 1-y\ \ i|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2^{\ 2}+y^2} = \sqrt{-x^{\ 2}+\ 1-y^{\ 2}}$.

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2 = x^2+1-2y+y^2$.

$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Câu 2. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa $|z-2-i| = |\overline{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y+1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y-1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\ x;y$ là điểm biểu diễn của $z = x+yi$.

Theo đề, ta có: $|z-2-i| = |\overline{z}+2i|$.

$\Leftrightarrow |x+yi-2-i| = |x-yi+2i|$.

$\Leftrightarrow \left| x-2+y-1\,i \right| = \left| x+2-y\,i \right|.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2^{2}+y-1^{2}} = \sqrt{x^{2}+2-y^{2}}.$

$\Leftrightarrow x^{2}-4x+4+y^{2}-2y+1 = x^{2}+4-4y+y^{2}.$

$\Leftrightarrow 4x-2y-1=0.$

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $z\,1+i$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng có phương trình

A. $x+y-1=0.$ **B.** $x+y=0.$ **C.** $x+y+1=0.$ **D.** $x-y=0.$

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $z\,1+i = x+yi\ \ 1+i = x-y+x+y\,i$ là số thực nên $x+y=0.$

Câu 4. Cho z thỏa $\left|z-i\right| = \left|z-1+2i\right|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2-i\,z+1$ là đường thẳng có dạng

A. $x-7y-9=0.$ **B.** $x+7y-9=0.$ **C.** $x+7y+9=0.$ **D.** $x-7y+9=0.$

Lời giải

Chọn C

Gọi $M\ \ x;y$ là điểm biểu diễn $w=x+yi$.

Có $w=2-i\,z+1=x+yi \Leftrightarrow z=\dfrac{x-1+yi}{2-i}.$

Mà $\left|z-i\right| = \left|z-1+2i\right|.$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{x-1+yi}{2-i}-i\right| = \left|\dfrac{x-1+yi}{2-i}-1+2i\right|.$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left| x-2+y-2\,i \right|}{\left|2-i\right|} = \dfrac{\left| x-1+y+5\,i \right|}{\left|2-i\right|}.$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2^{2}+y-2^{2}} = \sqrt{x-1^{2}+y+5^{2}}.$

$\Leftrightarrow x+7y+9=0.$

Câu 5. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa $z\,2+3i\,+5-i$ là số thuần ảo đường thẳng có phương trình là

A. $3x+2y-1=0.$ **B.** $2x-3y+5=0.$ **C.** $3x+2y+1=0.$ **D.** $2x+3y+5=0.$

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}$.

$z\ 2+3i\ +5-i=\ x+yi\ \ 2+3i\ +5-i=2x-3y+5+\ 3x+2y-1\ i$.

$z(2+3i)+5-i$ là số thuần ảo nên phần thực $2x-3y+5=0$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa $|z-i|=|\ 1+i\ \ z|$. Tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I\ 0;1\ ,\ R=\sqrt{2}$. **B.** $I\ 0;-1\ ,\ R=\sqrt{2}$. **C.** $I\ 0;1\ ,\ R=2$. **D.** $I\ 0;-1\ ,\ R=2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi\ \ x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-i|=|\ 1+i\ \ z|=|1+i||z|\Leftrightarrow|x+yi-i|=\sqrt{2}|x+yi|$.

$\Leftrightarrow|x+\ y-1\ i|=\sqrt{2}|x+yi|$.

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\ y-1^{\ 2}}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

$\Leftrightarrow x^2+\ y-1^{\ 2}=2\ \ x^2+y^2\ \ .$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0$ là đường tròn có tâm $I\ \ 0;-1\ $, bán kính $R=\sqrt{0^2+\ -1^{\ 2}+1}=\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa $|zi-\ \ 2+i\ |=2$. Tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I\ 1;-2\ \ ,R=4$. **B.** $I\ 1;-2\ \ ,R=2$. **C.** $I\ 1;2\ \ ,R=2$. **D.** $I\ 1;2\ \ ,R=4$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=x+yi\ \ \ x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|\ x+yi\ \ i-\ \ 2+i\ |=2\Leftrightarrow|-2-y+\ \ x-1\ i|=2$.

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1^{\ 2}+\ -y-2^{\ 2}}=2\Leftrightarrow\ \ x-1^{\ 2}+\ \ y+2^{\ 2}=4$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là $I\ 1;-2\ \ ,R=2$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $\ \overline{z}+2i\ \ \ z-2\ \ $ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\ \overline{z}+2i\ \ \ z-2\ \ =\overline{z}.z-2\overline{z}+2iz-4i=\ \ x+yi\ \ \ x-yi\ \ -2\ \ x-yi\ \ +2i\ \ x+yi\ \ -4i.$

$=x^2+y^2-2x+2yi+2xi-2y-4i=x^2+y^2-2x-2y+2\ \ x+y-2\ \ i.$

Vì $\overline{z}+2i\ \ z-2$ là số thuần ảo nên $x^2+y^2-2x-2y=0\Leftrightarrow\ x-1\ ^2+\ y-1\ ^2=2.$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}.$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{9}{2}.$ **B.** $3\sqrt{2}.$ **C.** 3. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}\ .$

Ta có: $\overline{z}+3i\ \ z-3\ =\overline{z}.z-3\overline{z}+3iz-9i=\ x+yi\ \ x-yi\ -3\ x-yi\ +3i\ \ x+yi\ -9i.$

$=x^2+y^2-3x+3yi+3xi-3y-9i=x^2+y^2-3x-3y+3\ \ x+y-3\ \ i.$

Vì $\overline{z}+3i\ \ z-3$ là số thuần ảo nên $x^2+y^2-3x-3y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}.$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Câu 10. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+2|=5.$ Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\ 1-2i\ \ z+3$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $5\sqrt{5}.$ **B.** 125. **C.** $3\sqrt{2}.$ **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=\ 1-2i\ \ z+3\Leftrightarrow z=\frac{w-3}{1-2i}\Leftrightarrow z+2=\frac{w-1-4i}{1-2i}.$

Gọi $w=x+yi,\ \ x,y\in\mathbb{R}\ .$ Khi đó ta có

$$|z+2|=5\Leftrightarrow\left|\frac{w-1-4i}{1-2i}\right|=5\Leftrightarrow\left|\frac{x-1+\ y-4\ i}{1-2i}\right|=5\Leftrightarrow\ x-1\ ^2+\ y-4\ ^2=\ 5\sqrt{5}\ ^2$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\ 1-2i\ \ z+3$ là đường tròn có bán kính bằng $5\sqrt{5}$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5,$ với m là tham số thực thuộc $\mathbb{R}$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3-4i)z-2i$ là một đường tròn. Bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó bằng:

A. 20. **B.** 4. **C.** 22. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w=x+yi\ \ x,y\in\mathbb{R}\ .$

Ta có: $w=(3-4i)z-2i\Leftrightarrow z=\frac{w+2i}{3-4i}\Rightarrow|z|=\left|\frac{w+2i}{3-4i}\right|=\frac{|w+2i|}{5}$

$\Leftrightarrow\left|x+\ y+2\ i\right|=5\ \ m^2+2m+5\ \Leftrightarrow\sqrt{x^2+\ y+2\ ^2}=5m^2+10m+25$

$\Leftrightarrow x^2+\ y+2\ ^2=\ 5m^2+10m+25\ ^2$

Do đó, số phức $w=(3-4i)z-2i$ nằm trên đường tròn tâm $I\ 0;-2$; bán kính

$R=5m^2+10m+25=5\ m+1\ ^2+20\geq 20,\forall m.$

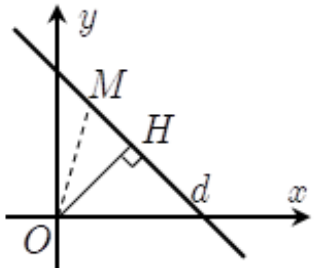
Do đó, bán kính đường tròn nhỏ nhất là: $R_{\min}=20.$

Câu 2. Cho $z=x+yi$ thỏa$|z-2-4i|=|z-2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x-2y$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow|(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x+y-4=0:$ là đường thẳng $d.$

Khi đó: $|z|=OM\Rightarrow|z|_{\min}=OM_{\min}$

$\Leftrightarrow M\equiv H.$

Do $OH\perp d:x+y-4=0$

$\Rightarrow OH:x-y+m=0.$

$O(0;0)\in OH\Rightarrow m=0\Rightarrow OH:x-y=0.$

Tọa độ $H=d\cap OH$ thỏa $\begin{cases}x+y=4\\x-y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 2. Từ $d:y=4-x\Rightarrow|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Suy ra: $|z|_{\min}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=2\Rightarrow 3x-2y=2.$

Cách 3. Sử dụng Cauchy – Schwarz, có

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}}\geq\sqrt{\frac{(x+y)^2}{1+1}}=\sqrt{\frac{4^2}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" khi $x=y$ và $x+y=4\Leftrightarrow x=y=2\Rightarrow 3x-2y=2.$

➢**Lưu ý**. Nếu đề bài chỉ yêu cầu tính $|z|_{\min}$, thì nó là $|z|_{\min}=OH=d(O;d).$

Câu 3. Cho $z=x+yi$ thỏa mãn $|z+1-5i|=|\overline{z}+3-i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $3x+y$.

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $-\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z+1-5i|=|\overline{z}+3-i| \Leftrightarrow |x+yi+1-5i|=|x-yi+3-i|$

$\Leftrightarrow |x+1+\ y-5\ i|=|x+3+\ -y-1\ i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1^{\ 2}+\ y-5^{\ 2}}=\sqrt{x+3^{\ 2}+\ -y-1^{\ 2}}$

$\Leftrightarrow 2x-10y+26=6x+2y+10$

$\Leftrightarrow x+3y-4=0 \Leftrightarrow x=4-3y$

Ta có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4-3y^{\ 2}+y^2}=\sqrt{10y^2-24y+16}=\sqrt{10\left(y-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{8}{5}} \geq \sqrt{\frac{8}{5}}$

Suy ra $|z|_{\min}=\sqrt{\frac{8}{5}} \Leftrightarrow y=\frac{6}{5} \Rightarrow x=\frac{2}{5} \Rightarrow 3x+y=\frac{12}{5}$.

Câu 4. Cho $z=x+yi$ thỏa mãn $|z+3i|=|z+2-i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $x-2y$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z+3i|=|z+2-i| \Leftrightarrow |x+\ y+3\ i|=|x+2+\ y-1\ i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\ y+3^{\ 2}}=\sqrt{x+2^{\ 2}+\ y-1^{\ 2}}$

$\Leftrightarrow x-2y-1=0 \Leftrightarrow x=2y+1$

Ta có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2y+1^{\ 2}+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}} \geq \sqrt{\frac{1}{5}}$

Suy ra $|z|_{\min}=\sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{5} \Rightarrow x-2y=1$.

Câu 5. Cho z thỏa $|z-1-2i|=|z+3i-1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-2+2i|$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$.

$|z-1-2i|=|z+3i-1| \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i|=|x-1+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow 2y+1=0$ là đường thẳng d.

Có $|z-2+2i|=AM$ với $A(2;-2)$.

$|z-2+2i|_{\min} \Leftrightarrow AM_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của A lên đường thẳng d (xem lý thuyết). Khi đó:

$$|z-2+2i|_{\min} = AM_{\min} = d(A;d) = \frac{|2.\ -2\ +1|}{\sqrt{0^2+2^2}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 6. Cho các số phức z thỏa $|z-3+4i| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. 9. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$|z-3+4i| = 4 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i| = 4$

Suy ratập hợp điểm $M(x;y)$ là đường tròn tâm $I(3;-4)$ bán kính $R = 4$

$|z|_{\max} = OI + R = 9$

Câu 7. Xét các số phức z thỏa $|z-2-4i| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$|z-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i| = \sqrt{5}$

Suy ratập hợp điểm $M(x;y)$ là đường tròn tâm $I(2;4)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

$|z|_{\min} = OI - R = \sqrt{5}$

Câu 8. Xét các số phức z thỏa $|z+3+4i| = 2$. Gọi $z_1,\ z_2$ là hai số phức có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần thực của $z_1,\ z_2$ bằng

A. 8. **B.** -6. **C.** -8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.

$|z+3+4i| = 2 \Leftrightarrow |(x+3)+(y+4)i| = 2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$

Suy ratập hợp điểm $M(x;y)$ là đường tròn (C) tâm $I(-3;-4)$ bán kính $R = 2$

$$OI:\begin{cases} qua\, O(0;0) \\ \vec{u}(3;4) \end{cases} \Rightarrow OI:\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ (x+3)^2+(y+4)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x=-\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{12}{5} \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x=-\dfrac{21}{5} \\ y=-\dfrac{28}{5} \end{cases}\right.$$

Vậy tổng phần thực của $z_1,\ z_2$ bằng $-\dfrac{9}{5}-\dfrac{21}{5}=-6$

Câu 9. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|-iz+1\right|=1$. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z\right|$. Giá trị của biểu thức $2020-M+m$ bằng

A. 2014. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$.

$\left|-iz+1\right|=1 \Leftrightarrow \left|(1-y)+xi\right|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$

Suy ratập hợp điểm $M(x;y)$ là đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R=1$

Tọa độ giao điểm của (C) và OI là $(0;0),(0;2)$

$\Rightarrow m=\left|z\right|_{\min}=0, M=\left|z\right|_{\max}=2$

Vậy $2020=M+m=2018$

Câu 10. Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overline{z}+1+i\right|$ lần lượt là

A. $\sqrt{14}+2,\ \sqrt{14}-2$. **B.** $\sqrt{13}+1,\ \sqrt{13}-1$.

C. $\sqrt{13}+4,\ \sqrt{13}-4$. **D.** $\sqrt{14}+1,\ \sqrt{14}-1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

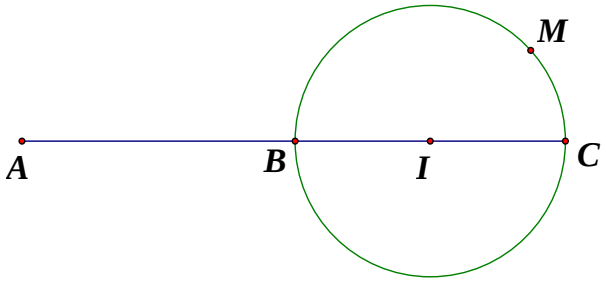
Khi đó $\left|z-2-3i\right|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-3)^2=1$.

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z ta có $M \in (I;1)$ với $I(2;3)$.

Có $|\overline{z}+1+i| = \sqrt{(x+1)^2+(-y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

Gọi $A(-1;1)$ suy ra $|\overline{z}+1+i| = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = AM$.

Dễ thấy $AI = \sqrt{13} > 1$ nên A nằm ngoài $(I;1)$.



Kẻ đường thẳng AI cắt đường tròn $(I;1)$ tại B,C như hình vẽ.

Có $AB \le AM \le AC$ nên $\begin{cases} AM_{\max} = AC = AI + IC = \sqrt{13}+1 \\ AM_{\min} = AB = AI - IB = \sqrt{13}-1 \end{cases}$.

DẠNG TOÁN 22: XÁC ĐỊNH HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Hình chiếu của điểm lên các mặt phẳng của hệ trục $(Oxyz)$

- Điểm $M(a;b;c)$ **có hình chiếu lên mp** (Oxy) **là** $M'(a;b;0)$

- Điểm $M(a;b;c)$ **có hình chiếu lên mp** (Oyz) **là** $M(a;b;0)$

- Điểm $M(a;b;c)$ **có hình chiếu lên mp** (Oxz) **là** $M(a;b;0)$

3. Cách xác định hình chiếu của điểm M **lên các mặt phẳng** (α)

- Viết ptđt Δ **qua** M **và vuông góc với** (α)**.**

- Tọa độ hình chiếu vuông góc H **là giao điểm của** Δ **và** (α)

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Xác định hình chiếu của điểm lên các trục .
- Xác định hình chiếu của điểm lên đường thẳng bất kỳ.
- Xác định hình chiếu của điểm lên mặt phẳng bất kỳ .
- Tính độ dài đoạn thẳng.
- Tìm tọa độ điểm , tọa độ véc tơ thỏa mãn đk cho trước.
- ….

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $(Oxyz)$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ lên (Oxz) có tọa độ là

A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

Sử dụng các xác định hình chiếu của điểm lên mặt phẳng của hệ trục $(Oxyz)$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lờigiải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ lên (Oxz) có tọa độ là $(2;0;-1)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là

A. $M(3;0;5)$. **B.** $M(3;-2;0)$. **C.** $M(0;-2;5)$. **D.** $M(0;2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(3;-2;5)$ lên mặt phẳng (Oxz) ta chỉ cần giữ nguyên hoành độ và cao độ, cho tung độ bằng 0.

Câu 2: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là

A. $M(2;0;2)$. **B.** $M(3;-2;0)$. **C.** $M(0;-2;5)$. **D.** $M(1;0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(2;-3;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) ta chỉ cần giữ nguyên hoành độ và cao độ, cho tung độ bằng 0.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(13;2;15)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $H(a;b;c)$. Tính $P=3a+15b+c$

A. $P=48$. **B.** $P=54$. **C.** $P=69$. **D.** $P=84$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu của $M(13;2;15)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $H(13;2;0)$.

Do đó $a=13,\ b=2,\ c=0\Rightarrow P=69$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;2;3)$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $H(a;b;c)$. Tính $P=a+b+c$

A. $P=6$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu của $M(13;2;15)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $H(13;2;0)$.

Do đó $a=13,\ b=2,\ c=0\Rightarrow P=69$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

A. $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0;2;3)$.

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz).

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1;2;3)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxy) là

A. $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(1;2;0)$.

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz).

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(1;2;-3)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của trung điểm đoạn thẳng AB, với $A(1;-2;3)$ và $B(3;0;1)$ lên mặt phẳng (Oxz) là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(-2;0;-2)$. **C.** $(2;0;2)$. **D.** $(2;-1;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow H(2;-1;2)$

Hình chiếu của $H(2;-1;2)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $H'(2;0;2)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của trung điểm đoạn thẳng OA, với $A(2;-2;0)$ lên mặt phẳng (Oxy) là

A. $(0;-1;0)$. **B.** $(-2;0;-2)$. **C.** $(1;-1;0)$. **D.** $(-1;1;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow H(1;-1;0)$

Hình chiếu của $H(1;-1;0)$ trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $H'(1;-1;0)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là M. Tính $\overrightarrow{OM}$

A. $(1;0;5)$. **B.** $(3;-2;0)$. **C.** $(0;-2;5)$. **D.** $(0;2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(3;-2;5)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $M(1;0;5) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1;0;5)$.

Câu 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;-3;2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) là M. Tính $\overrightarrow{AM}$

A. $(0;3;0)$. **B.** $(1;0;3)$. **C.** $(-1;0;2)$. **D.** $(0;2;5)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(-1;-3;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) là $M(-1;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;3;0)$. **Mức độ 2**

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2;3;1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương , khi đó :

$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 2. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;-1;1), N(2;0;-1), P(-1;2;1)$. Xét điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành. Tọa độ Q là

A. $(-2;1;3)$ **B.** $(-2;1;3)$ **C.** $(-2;1;-3)$ **D.** $(4;1;3)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $Q(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{MN} = (1;1;-2)$, $\overrightarrow{QP} = (-1-x;2-y;1-z)$.

Tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -1-x \\ 1 = 2-y \\ -2 = 1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Vậy, $Q(-2;1;3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-5;4)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng 5.

B. Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{29}$.

C. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(2;5;-4)$.

D. Tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$.

Lời giải

Chọn C

+) Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng tọa độ (xOz) bằng $|-5|=5$ nên **A** đúng.

+) Khoảng cách từ M đến trục Oz bằng $\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$ nên **B** đúng.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (yOz) là $I(0;-5;4)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (yOz) là $M'(-2;-5;4)$ nên **C sai**.

+) Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oy là $J(0;-5;0)$.

Suy ra tọa độ điểm M' đối xứng với M qua trục Oy là $M'(-2;-5;-4)$ nên **D** đúng.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;-1)$, $C(x+2;y;-2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{8}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(x+2;y-1;-1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k:\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=k \\ y-1=0 \\ -1=-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-5}{3} \\ y=1 \\ k=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x+y=-\frac{2}{3}.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-3)$, $B(3;-1;1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác OAB, véctơ $\overrightarrow{OG}$ có độ dài bằng:

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

G là trọng tâm tam giác OAB nêntọa độ $G\left(\frac{4}{3};0;\frac{-2}{3}\right)$.

Ta có: $OG=\sqrt{\frac{16}{9}+0+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;3;2)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục Oz sao cho E cách đều hai điểm A, B.

A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(0;0;-1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $E(0;0;t)\in Oz$.

$AE=BE\Leftrightarrow\sqrt{t^2-4t+17}=\sqrt{t^2-8t+21}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow E(0;0;1).$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;4;3)$. Tổng khoảng cách từ A đến ba trục tọa độ bằng

A. $\sqrt{34}$. **B.** 10. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **D.** $10+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi B, C, D lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz. Khi đó

$$\begin{cases}B(3;0;0)\\C(0;4;0)\\D(0;0;3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0;-4;-3)\\\overrightarrow{AC}=(-3;0;-3)\\\overrightarrow{AD}=(-3;-4;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=5\\AC=3\sqrt{2}\\AD=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d(A;\mathrm{Ox})=5\\d(A;\mathrm{Oy})=3\sqrt{2}\\d(A;\mathrm{Oz})=5\end{cases}.$$

$\Rightarrow d(A;\mathrm{Ox})+d(A;\mathrm{Oy})+d(A;\mathrm{Oz})=10+3\sqrt{2}$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm của đoạn MN là

A. $(1;-1;2)$. **B.** $(1;1;0)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

M là trung điểm của AB, ta có $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)\Rightarrow M(1;1;0)$

N là trung điểm của CD, ta có $N\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2};\frac{z_C+z_D}{2}\right)\Rightarrow N(1;1;2)$

I là trung điểm của MN, ta có $I\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)\Rightarrow I(1;1;1)$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(x;y;-3)$; $B(6;-2;4)$; $C(-3;7;-5)$. Giá trị $x;y$ để $A;B;C$ thẳng hàng là

A. $x=1;y=-5$. **B.** $x=-1;y=-5$. **C.** $x=-1;y=5$. **D.** $x=1;y=5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(6-x;-2-y;7)$ và $\overrightarrow{BC}=(-9;9;-9)$.

Giá trị x; y để $A;B;C$ thẳng hàng thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{6-x}{-9}=\dfrac{-2-y}{9}=\dfrac{7}{-9}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A\ -1;2;-3$, $B\ 1;0;2$, $C\ x;y;-2$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\dfrac{11}{5}$. **D.** $x+y=\dfrac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Có $\overrightarrow{AB}=\ 2;-2;5$, $\overrightarrow{AC}=\ x+1;y-2;1$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x+y=1$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$. Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

A. $H\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. **B.** $H(1;4;-4)$. **C.** $H(-1;2;0)$. **D.** $H(3;6;4)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Vì $MH\perp(\alpha)$ nên đường thẳng MH có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng MH là: $\begin{cases} x=1+t \\ y=4+t \\ z=2+t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R})\Rightarrow H(1+t;4+t;2+t)$.

Mà $H\in(\alpha)\Leftrightarrow 1+t+4+t+2+t-1=0\Leftrightarrow t=-2$.

Vậy $H(-1;2;0)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a;b;c)$ với $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(a-3;b-1;c-7)$ và $\overrightarrow{BM}=(a-5;b-5;c-1)$.

Vì $\begin{cases}M\in(P)\\MA=MB=\sqrt{35}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(P)\\MA^2=MB^2\\MA^2=35\end{cases}$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}2a-b-c+4=0\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=(a-5)^2+(b-5)^2+(c-1)^2\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b-c=-4\\4a+8b-12c=-8\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=c\\c=a+2\\(a-3)^2+(b-1)^2+(c-7)^2=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+2\\c=a+2\\3a^2-14a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\\c=2\end{cases},\ (\text{do } a\in\mathbb{Z}).$$

Ta có $M(2;2;0)$. Suy ra $OM=2\sqrt{2}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;3;-3)$, $B(2;-6;7)$, $C(-6;-4;3)$, $D(0;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $M(-1;-2;3)$. **B.** $M(0;-2;3)$. **C.** $M(-1;0;3)$. **D.** $M\left(-\frac{3}{4};-2;0\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Suy ra: $\begin{cases}x_G=\dfrac{1+2-6}{4}=\dfrac{-3}{4}\\y_G=\dfrac{3-6-4-1}{4}=-2\\z_G=\dfrac{-3+7+3+4}{4}=\dfrac{11}{4}\end{cases}$

Ta có $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|$.

Để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất thì điểm M là hình chiếu vuông góc của điểm G lên mặt phẳng tọa độ (Oyz).

Suy ra: $M(-\frac{3}{4};-2;0)$.

Câu 4. Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (Oxy)$ sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi I thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ suy ra I là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $I(1;3;-1)$.

Ta có: $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$

$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + IC^2$

$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2$

Mà $IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên

Để $T_{\min} \Leftrightarrow 3MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của $I(1;3;-1).$ trên (Oxy).

Suy ra $M(1;3;0)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;2;5), B(3;4;1), C(2;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm thay đổi trên $mp(Oxz)$. Độ dài đoạn GM ngắn nhất bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(2;3;1)$. Giả sử $M(a;0;c) \in (Oxz)$.Gọi H là hình chiếu của G trên $mp(Oxz)$, ta có $GM \geq GH = d(G;mp(Oxz)) = 3$ và $GM = GH \Leftrightarrow M \equiv H$, khi đó $M(2;0;1)$. Vậy độ dài đoạn GM ngắn nhất bằng 3.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $E(1;-2;4)$, $F(1;-2;-3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tổng $ME + MF$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ của điểm M.

A. $M(-1;2;0)$. **B.** $M(-1;-2;0)$. **C.** $M(1;-2;0)$. **D.** $M(1;2;0)$.

Lời giải

ChọnC

Hai điểm $E(1;-2;4)$, $F(1;-2;-3)$ nằm về hai phía mặt phẳng (Oxy).

Vì $\overrightarrow{EF}=(0;0;-7)\Rightarrow EF$ vuông góc với (Oxy).

Vậy điểm M thuộc (Oxy) sao cho tổng $ME+MF$ có giá trị nhỏ nhất là giao điểm của EF với (Oxy), hay chính là hình chiếu vuông góc của E trên (Oxy).

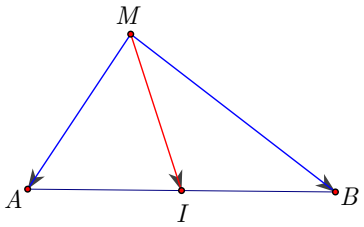
Vậy $M=(1;-2;0)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z-3=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $M(2;2;-4)$. **D.** $M(-2;-2;4)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC, khi đó với điểm M bất kỳ ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{MI}$; tương tự $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$.

Suy ra $d=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}\right|=4\left|\overrightarrow{MO}\right|$ nên d nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left|\overrightarrow{MO}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MO\perp(P)$ nên M là hình chiếu vuông góc của O lên (P).

Có $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)\Rightarrow I(-1;-3;1)$, kết hợp với $C(1;3;-1)$ ta có $O(0;0;0)$.

Đường thẳng qua $O(0;0;0)$ vuông góc với (P) có phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$.

Giao điểm của d và (P) chính là hình chiếu vuông góc M của $O(0;0;0)$ lên mặt phẳng (P).

Giải hệ $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-2t\\x+y-2z-3=0\end{cases}$ ta được $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-1$.

Vậy $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$.

Câu 8. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(2;1;1)$, $C(1;1;2)$, tập hợp tất cả các điểm M trên mặt phẳng $(\alpha):3x+6y-6z-1=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ là

A. một mặt phẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một mặt cầu. **D.** một điểm.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Khi đó.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})=MG^2+\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

Tương tự ta suy ra được:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0\Leftrightarrow 3MG^2+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=0\Leftrightarrow MG=\frac{1}{3}$.

Mặt khác, ta có $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ nên $d\left(G,(\alpha)\right)=\frac{1}{3}$, suy ra M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (α). Vậy tập hợp cần tìm là một điểm.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;2;1)$, $B(6;0;3)$, $C(2;1;1)$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng trung trực của đoạn AB bằng

A. $\frac{7}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{6}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{11}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB nên (α) qua $I(3;1;2)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(6;-2;2)$ là một vectơ pháp tuyến.

Phương trình (α) có dạng $3(x-3)-1(y-1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-y+z-10=0$.

$d\left(C;(\alpha)\right)=\frac{|3x_C-y_C+z_C-10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|3.2-1+1-10|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{4}{\sqrt{11}}$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C sao cho OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{16}{\sqrt{91}}$. **B.** $\frac{24}{\sqrt{91}}$. **C.** $\frac{32}{\sqrt{91}}$. **D.** $\frac{18}{\sqrt{91}}$.

Lời giải

Chọn C

Vì (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt ở A,B,C nên ta gọi tọa độ các điểm là $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $M(2;3;5)\in(P)\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}=1$.

Vì đô dài các đoạn OA,OB,OC lập thành cấp số nhân với công bội bằng 3

$\Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b = 9a \end{cases}$.

$\Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{3}{3a} + \frac{5}{9a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{32}{9} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{32}{3} \\ c = 32 \end{cases}$

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{\frac{32}{9}} + \frac{y}{\frac{32}{3}} + \frac{z}{32} = 1$

Hay $(P): 9x + 3y + z - 32 = 0$.

Do đó: $d(O;(P)) = \frac{|-32|}{\sqrt{9^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{32}{\sqrt{91}}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

+ Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;3)$.

+ Mặt phẳng $(P): 2x + y - z = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2;1;-1)$.

+ Gọi $\vec{n}_{(Q)}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Vì mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\begin{cases} \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{u} \\ \vec{n}_{(Q)} \perp \vec{n}_{(P)} \end{cases}$ và (Q) đi qua điểm $M(1;0;-1)$.

Do đó mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = \vec{u} \wedge \vec{n}_{(P)} = (-4;8;0) = -4(1;-2;0)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $1.(x-1) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$.

+ Vậy khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

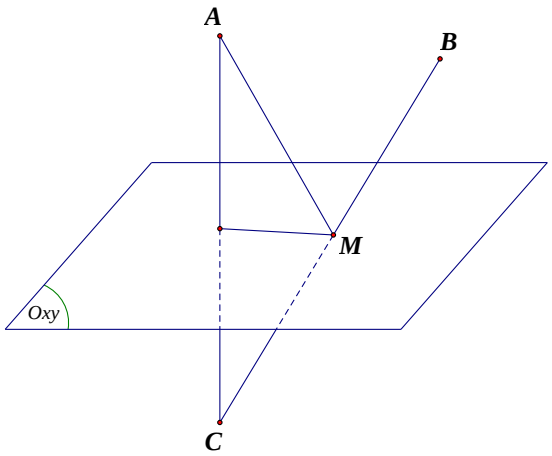
$d(O;(Q)) = \frac{|0 - 2.0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(-2;8;3)$ và điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy). Khi $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a+b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oxy) suy ra $C(2;0;-1)$.

Đường thẳng BC đi qua $C(2;0-1)$ và $\vec{u}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=(-1;2;1)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}$

Khi đó $MA+MB=MC+MB\geq BC=4\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, B, C thẳng hàng.

Suy ra $\min(MA+MB)=4\sqrt{6}\Leftrightarrow M=(Oxy)\cap BC$ nên tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn hệ:

$\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=0\end{cases}$. Vậy $M(1;2;0)\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=0\Rightarrow a+b+3c=3$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(-2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(6;-18;12)$. **D.** $M(-6;18;12)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ nên ta có $a+b+c=0$

$MA^2-2MB^2=(-3-a)^2+(5-b)^2+(-5-c)^2-2\left[(5-a)^2+(-3-b)^2+(7-c)^2\right]$

$=-a^2-b^2-c^2+26a-22b+38c-107=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544$.

Theo BĐT Bunnhia ta có

$a+b+c=0\Rightarrow|-21|=|(a-13)+(b+11)+(c-19)|\le\sqrt{3\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]}$

$\Rightarrow(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\ge147$

$MA^2-2MB^2=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544\le397$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a-13}{1}=\frac{b+11}{1}=\frac{c-19}{1}=-7\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=-18\\c=12\end{cases}\Rightarrow M(6;-18;12).$$

Câu 5. Cho $A(4;5;6);B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z+1=0$.

Khi đó $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|MA-MB|\le AB$ với mọi điểm $M\in(P)$

Vì $(2.4+5+2.6+1).(2.1+1+2.2+1)=208>0$ nên hai điểm A,B nằm cùng phía với (P)

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $M=AB\cap(P)$

Khi đó, $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$.

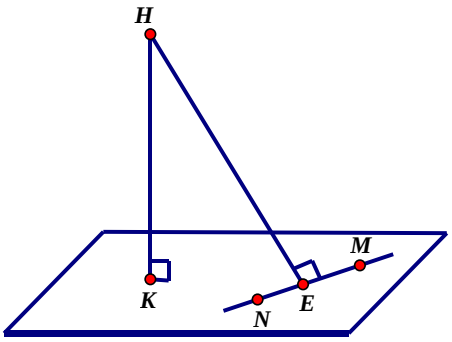
Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2),N(-1;1;3)$ và không đi qua điểm $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $T=a-2b+3c+12$ bằng

A. -16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Gọi K là hình chiếu của H lên (P), E là hình chiếu của H lên MN.



Ta có : $d\left(H;(P)\right)=HK$ và $d\left(H;MN\right)=HE$, $HK\le HE$ (không đổi) .

Vậy $d\left(H;(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv E$, với E là hình chiếu của H lên $MN\Rightarrow E\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua M .

$\Rightarrow (P):-x-y+z-3=0$.

Vậy $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow T=16$.
$\quad\ \ c=1$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z-3=0$. Biết điểm $M(a;b;c)\in(P)$ thỏa mãn $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

có $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge 2\sqrt{\frac{(a+b-2c)^2}{1^2+1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

$T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{6}\begin{cases}\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{-2}\\ a+b-2c-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{1}{2}\\ c=-1\end{cases}$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2 \\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) \\ &= 3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$ Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

DẠNG TOÁN 23: XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH, DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Phương trình mặt cầu dạng chính tắc:**

Cho mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$**, bán kính** R**. Khi đó phương trình chính tắc của mặt cầu là**

$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

◆ **Phương trình mặt cầu dạng khai triển là** $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Khi đó mặt cầu có có tâm $I(a;b;c)$**, bán kính** $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Hệ Oxyz (Tìm tọa độ tâm mặt cầu)

☞ Tìm tâm và bán kính, ĐK xác định mặt cầu

☞ PTMC biết tâm, dễ tính bán kính (Chưa học PTMP)

☞ PTMC biết 2 đầu mút của đường kính

☞ PTMC ngoại tiếp tứ diện

☞ PTMC qua nhiều điểm, thỏa ĐK

☞ PTMC biết tâm, tiếp xúc với mặt phẳng

☞ PTMC biết tâm và đường tròn trên nó

☞ PTMC biết tâm và ĐK của dây cung

☞ PTMC biết tâm thuộc d, thỏa ĐK

☞ PTMC biết tâm thuộc mặt phẳng, thỏa ĐK

☞ PTMC biết tâm, thỏa ĐK khác

☞ Toán Max-Min liên quan đến mặt cầu

☞ Điểm thuộc mặt cầu thỏa ĐK

☞ Toán thực tế, liên môn liên quan PTMC

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian *oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-1)$. **B.** $(2;-4;1)$ **C.** $(2;4;1)$. **D.** $(-2;-4;-1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định tâm của mặt cầu.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì (S) có tâm là $I(a;b;c)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$ có tọa độ tâm là $(2;-4;1)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình mặt cầu dạng 1, suy ra tâm $I(1;-2;3)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó

A. $I(-1;3;0)$; $R=3$. **B.** $I(1;-3;0)$; $R=9$. **C.** $I(1;-3;0)$; $R=3$. **D.** $I(-1;3;0)$; $R=9$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;-3;0)$ và bán kính $R=3$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x+4y-8z+4=0$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu (S).

A. $I(3;-2;-4)$. **B.** $I(-3;2;4)$.

C. $I(3;-2;4)$. **D.** $I(-3;2;-4)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm là $I(3;-2;4)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2y+4z+2=0$. Độ dài đường kính của mặt cầu (S) bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình mặt cầu dạng 2, suy ra $I(0;1;-2), R=\sqrt{0+1+4-2}=\sqrt{3}$,

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$, bán kính $R=3$ là

A. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=3$. **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$, bán kính $R=3$ là

$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Tính diện tích mặt cầu (S).

A. 42π. **B.** 36π. **C.** 9π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2-5}=3$.

Diện tích mặt cầu (S) là: $S=4\pi R^2=4\pi 3^2=36\pi$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

A. $V=16\pi$. **B.** $V=36\pi$. **C.** $V=14\pi$. **D.** $V=\frac{4}{36}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tâm là $(1;-2;0)$, bán kính $R=3$.

Thể tích mặt cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt cầu (S) $3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y-18z-3=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $I(-3;-6;9)$. **B.** $I(1;2;-3)$. **C.** $I(-1;-2;3)$. **D.** $I(3;6;-9)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y-18z-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-1=0$.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-1;-2;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S) $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.Điểm nào dưới đây thuộc (S)

A. $M(4;0;0)$. **B.** $N(0;4;0)$. **C.** $P(0;4;0)$. **D.** $Q(0;0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng, ta thấy chỉ có tọa độ điểm M thỏa mãn.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$ **B.** $N(0;1;0)$ **C.** $P(1;0;1)$ **D.** $Q(1;1;0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$MI=\sqrt{2}=R$; $NI=0<R$, $PI=\sqrt{3}>R$, $QI=1<R$. Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các tham số m để $x^2+y^2+z^2+2x-4y-m=0$ là một phương trình mặt cầu.

A. $m>5$. **B.** $m\geq -5$. **C.** $m\leq 5$. **D.** $m>-5$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình mặt cầu dạng 2, suy ra $0^2+(-1)^2+2^2+m>0\Leftrightarrow m>-5$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-m=0$ có bán kính $R=5$. Giá trị của tham số m bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt cầu dạng 2, suy ra tâm $I\ 1;-2;2$.

$R=\sqrt{1+4+4+m}=5\Leftrightarrow m=16$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+8y-2mz+6m=0$ có đường kính bằng 12 thì tổng các giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đường kính bằng 12, suy ra bán kính $R=6$.

Từ phương trình mặt cầu dạng 2, suy ra tâm $I\ 2;-4;m$, $R=\sqrt{4+16+m^2-6m}=6$,

Suy ra $m^2-6m-16=0\Leftrightarrow m_1+m_2=6$. (Theo Viet)

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phươngtrình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và qua điểm $A(5;-1;4)$ là

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=\sqrt{24}$. **B.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\sqrt{24}$.

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=24$. **D.** $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=24$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ bán kính $R=IA=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=2\sqrt{6}$ là

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=24.$

Câu 5. Trong không gian *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(1;0;-1)$ và đi qua điểm $M(2;2;-3)$. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

Lời Giải

Chọn D

$IM=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3=R$

Mặt cầu (S) $\begin{cases}\text{Tâm } I(1;0;-1)\\ R=3\end{cases}$ có PT: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$

Câu 6. Trong không gian *Oxyz* , phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$ là

A. $x^2+(y-2)^2+z^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$,

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$.

Lời Giải

Chọn B

Tọa độ trung điểm của AB: $I\left(\frac{2+0}{2};\frac{3+1}{2};\frac{-1+1}{2}\right)\Rightarrow I(1;2;0)$

$IA=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}=R$. Mặt cầu (S): $\begin{cases}\text{Tâm } I(1;2;0)\\ R=\sqrt{3}\end{cases}$

có PT: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): x-2y-2z-8=0. Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

. Lời Giải

Chọn C

$$d(I,(P))=\frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3=R$$

Mặt cầu (S) $\begin{cases}\text{Tâm } I(1;2;-1)\\ R=3\end{cases}$ có PT: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với trục hoành có dạng

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

. Lời Giải

Chọn A

$$d(I,Ox)=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}=R$$

Mặt cầu (S) $\begin{cases}\text{Tâm } I(1;2;3)\\ R=\sqrt{13}\end{cases}$ có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=13$

Câu 9. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và đi qua giao điểm của đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+t\end{cases}$ với mặt phẳng (Oxy).

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=27$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3\sqrt{3}$ **D.** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $Oxyz$ là : $z=0$

Gọi $A=d\cap(Oxyz)\Rightarrow t=-3\Rightarrow A(-2;5;0)$

Vì điểm A nằm trên mặt cầu nên bán kính của mặt cầu là $R=IA=\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}=3\sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$ là

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$.

Câu 10. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và diện tích bằng 32π. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$.

B. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$.

D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S=4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2=32\pi \Leftrightarrow R=\sqrt{8}$.

Khi đó $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm: } I(1;2;3)\\ \bullet\ \text{Bán kính: } R=\sqrt{8}\end{cases}$

$\Rightarrow (S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$ và $C(0;0;6)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

A. $\frac{7}{2}$.

B. $\sqrt{11}$.

C. 11.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu có dạng: $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Do A, B, C và O thuộc mặt cầu (S) nên:

$$\begin{cases}4-4a+d=0\\ 9+6b+d=0\\ 36-12c+d=0\\ d=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1,\ b=-\frac{3}{2},\ c=3,\ d=0.$$

Do đó, mặt cầu có bán kính bằng: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\frac{7}{2}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, Viết phương trình mặt cầu đi qua $A(2;3;-3)$, $B(2;-2;2)$, $C(3;3;4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy).

A. $(x-6)^2+(y-1)^2+z^2=29$.

B. $(x+6)^2+(y+1)^2+z^2=29$.

C. $(x-6)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{29}$. **D.** $(x+6)^2+(y+1)^2+z^2=\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $I(a;b;0)\in(Oxy)$ và r là tâm và bán kính của mặt cầu (S) và đi qua

$A(2;3;-3)$, $B(2;-2;2)$, $C(3;3;4)$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$

Vì mặt cầu ñi qua $A(2;3;-3)$, $B(2;-2;2)$, $C(3;3;4)$ nên

$$\begin{cases}(2-a)^2+(3-b)^2+(-3)^2=r^2\\(2-a)^2+(-2-b)^2+2^2=r^2\\(3-a)^2+(3-b)^2+4^2=r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10b+10=0\\2a-12=0\\(3-a)^2+(3-b)^2+4^2=r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=6\\r^2=29\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-6)^2+(y-1)^2+z^2=29$.

Câu 3. Cho $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm *I*, cắt trục *Ox* tại hai điểm *A* và *B* sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

Lời giải

Chọn A

Gọi *M* là hình chiếu vuông góc của *I* (1; -2;3) trên trục Ox

$\Rightarrow$ *M* (1;0;0) và *M* là trung điểm của *AB*

Ta có: $IM=\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$, $AM=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}$.

ΔIMA vuông tại $M\Rightarrow IA=\sqrt{IM^2+AM^2}=\sqrt{13+3}=4\Rightarrow R=4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

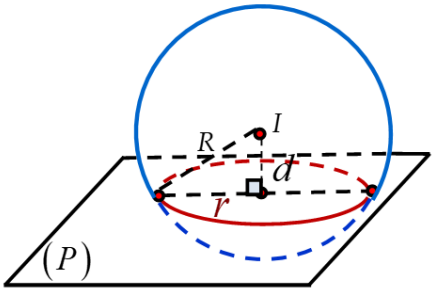
Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):2x-3y+6z+11=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 3. Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=5$.

C. $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=25$. **D.** $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=7$.

Lời giải

Chọn A



Ta có : $d=d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|2.1-3.1+6.3+11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=4$.

Suy ra $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Vậy, mặt cầu có phương trình : $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

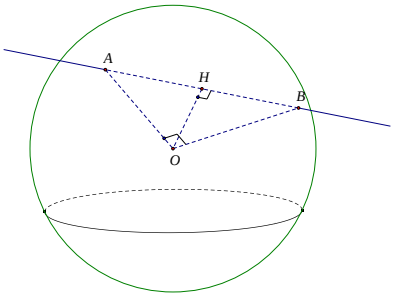
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $I(1;-2;5)$. Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

A. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=40$. **B.** $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=49$

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=69$. **D.** $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=64$.

Lời giải

Chọn A.



Đường thẳng d đi qua $M(2;0;1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;6;2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, với

$\overrightarrow{IM}=(1;2;-4)$, $\vec{u}=(3;6;2)$ $IH=d(I,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{20}$.

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA=IH\sqrt{2}=\sqrt{40}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(x-5)^2=40$.

Câu 6. Viết phương trình mặt cầu S có tâm $I\ 1;0;3$ và cắt $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I

A. $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

B. $(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{40}{9}$.

C. $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

D. $(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ và $P(1;-1;1)\in d$.

Ta có: $\overrightarrow{IP}=(0;-1;-2)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]=(0;-4;2)$. Suy ra: $\mathrm{d}(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IP}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{20}}{3}$.

ΔIAB vuông tại $I\Leftrightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại I $IA=\sqrt{2}\mathrm{d}(I,d)=\dfrac{\sqrt{40}}{3}$.

Vậy $(S):(x-1)^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{40}{9}$.

Câu 7. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$. Một mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C). Biết chu vi lớn nhất của (C) bằng $2\pi\sqrt{2}$. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

B. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$.

D. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) đạt chu vi lớn nhất khi (C) đi qua tâm I của mặt cầu (S).

Ta có: $C=2\pi R=2\pi\sqrt{2}\Leftrightarrow R=\sqrt{2}$.

Khi đó $(S):\begin{cases}\bullet\ \text{Tâm: } I(1;1;1)\\ \bullet\ \text{Bán kính: } R=\sqrt{2}\end{cases}$

$\Rightarrow(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 8. Cho $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25.$ **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$

Lời giải

Chọn A

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I (1; -2;3) trên trục Ox

$\Rightarrow$ M (1;0;0) và M là trung điểm của AB

Ta có: $IM=\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{13},\ AM=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}$.

ΔIMA vuông tại $M \Rightarrow IA=\sqrt{IM^2+AM^2}=\sqrt{13+3}=4 \Rightarrow R=4$.

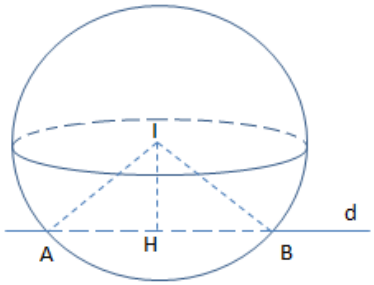
Phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16.$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A,B. Tính diện tích tam giác IAB.

A. $\dfrac{8\sqrt{11}}{3}.$ **B.** $\dfrac{16\sqrt{11}}{3}.$ **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{6}.$ **D.** $\dfrac{8\sqrt{11}}{9}.$

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d .

Khi đó: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, với $\overrightarrow{IC}=(0;-2;-2)$; $2x+y-3z-4=0$

Vậy $IH=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{66}}{3}$

Suy ra $HB=\sqrt{18-\dfrac{22}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Vậy, $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{66}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{11}}{3}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ cắt mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ theo một hình tròn giao tuyến có chu vi bằng bằng 8π có diện tích bằng

A. 80π. **B.** 50π. **C.** 100π. **D.** 25π.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 8π nên bán kính của nó là $r=4$.

Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng giao tuyến là $d=d\left(I,(\beta)\right)=\frac{|-2-2+6-8|}{\sqrt{2^2+1^1+2^2}}=2$.

Theo công thức $R^2=r^2+d^2=20$.

Diện tích của mặt cầu (S) là $S=4\pi R^2=80\pi$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $A=2x_M-y_M+2z_M$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị biểu thức $B=x_M+y_M+z_M$ bằng.

A. 21 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 10

Lời giải

Chọn D

Ta có $A=2x_M-y_M+2z_M=2(x_M-1)-(y_M-2)+2(z_M-3)+6$

$\le\sqrt{\left(2^2+1^2+2^2\right)\left((x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right)}+6=3.4+6=18$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x_M-1}{2}=\frac{y_M-2}{-1}=\frac{z_M-3}{2}=t>0\Rightarrow\begin{cases}x_M=1+2t\\y_M=2-t\\Z_M=3+2t\end{cases}$, thay vào phương trình (S) ta được: $4t^2+t^2+4t^2=16\Rightarrow t=\frac{4}{3}$. Do đó $M\left(\frac{11}{3};\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$ và $B=x_M+y_M+z_M=10$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A. $(x+3)^2+(y+4)^2+z^2=25$ **B.** $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=5$

C. $(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=5$ **D.** $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-4)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=(-2;-2;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(9;-9;0)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|=9\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là $d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=3$.

Diện tích tam giác IAB bằng 12 nên $AB=\dfrac{2S_{IAB}}{d(I,\Delta)}=\dfrac{2.12}{3}=8$.

Bán kính mặt cầu (S) là $R=\sqrt{\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+\left[d(I,\Delta)\right]^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Phương trình mặt cầu (S) cần lập là $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho diện tích tam giác OIA bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu (S).

A. $R=3$. **B.** $R=9$. **C.** $R=1$. **D.** $R=5$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;c)$

Ta có $IA=IO=R\Leftrightarrow$ hình chiếu của I lên OA là trung điểm $H\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{-1}{2}\right)$ của OA.

$$S_{\Delta OIA}=\frac{1}{2}IH.OA=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2+\left(c+\frac{1}{2}\right)^2}.\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{17}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-a+c+\frac{1}{2}}.\sqrt{2}\Leftrightarrow 17=2a^2+2b^2+2c^2-2a+2c+1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2a+2c-16=0.$$

Theo bài ra ta có $\begin{cases}OI=IA\\ S_{\Delta OIA}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}\\ I\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2+(c+1)^2}\\ 2a^2+2b^2+2c^2-2a+2c-16=0\\ a+b-c-3=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-c-1=0 & (1)\\ a^2+b^2+c^2-a+c-8=0 & (2)\\ a+b-c-3=0 & (3)\end{cases}.$$

Từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} a-c=1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+c \\ b=2 \end{cases}$ thế vào (2) ta có

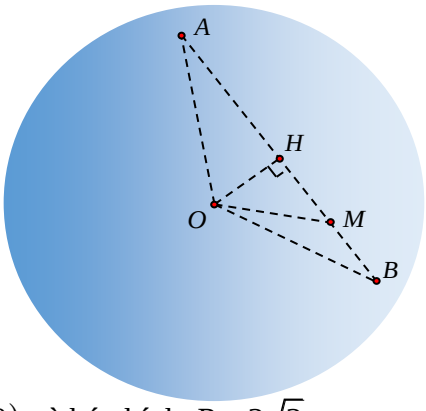
$$(c+1)^2+4+c^2-(c+1)+c-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-2 \\ c=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I(-1;2;-2) \\ I(2;2;1) \end{array}\right. \Rightarrow OI=R=3.$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$ **B.** $S=4$ **C.** $S=2\sqrt{7}$ **D.** $S=2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Vì $OM=1<R$ nên M thuộc miền trong của mặt cầu (S). Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB.

Đặt $x=OH$, ta có $0<x\le OM=1$, đồng thời $HA=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{8-x^2}$.

Khi đó diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=OH.HA=x\sqrt{8-x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$, ta được $\max\limits_{(0;1]} f(x)=f(1)=\sqrt{7}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB}=\sqrt{7}$, đạt được khi $x=1$ hay $H\equiv M$, nói cách khác là $d\perp OM$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=9$ và tam giác ABC với $A(5;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(4;5;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc cầu (S) sao cho khối tứ diên $MABC$ có thể tích lớn nhất.

A. $M(0;0;3)$ **B.** $M(2;3;2)$ **C.** $M(2;3;8)$ **D.** $M(0;0;-3)$

Lời giải

Chọn C

Kẻ $MJ\perp(ABC)$, $V_{M.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.MJ$

Để $V_{M.ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow MJ$ lớn nhất $\Leftrightarrow MJ$ đi qua tâm I của mặt cầu (S)

$\Rightarrow M = IJ \cap (S)$

Phương trình mặt phẳng (ABC): $z = 0$

Đường thẳng JI: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 + t \end{cases} \Rightarrow M(2;3;5+t)$

$M \in (S) \Rightarrow (2-2)^2 + (3-3)^2 + (5+t-5)^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3 \Rightarrow M(2;3;2), M_1(2;3;8)$

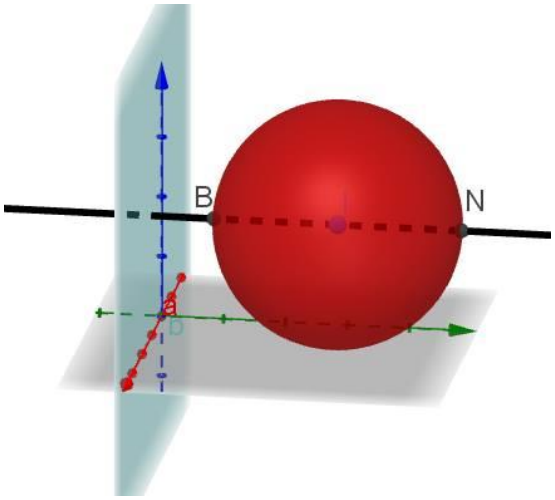
Do $MJ = d(M_1,(ABC)) > d(M,(ABC)) \Rightarrow M_1(2;3;8)$

Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$. Gọi $N(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc (S) sao cho khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (Oxz) lớn nhất. Giá trị của biểu thức $P = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. 6 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn B



Gọi d là đường thẳng đi qua tâm $I(1;3;2)$ của mặt cầu (S) và vuông góc với (Oxz).

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 \end{cases}$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d và (S) suy ra: $A(1;5;2)$, $B(1;1;2)$.

Ta có: $d(A;(Oxz)) > d(B;(Oxz))$.

Theo đề bài thì $N \equiv A \Rightarrow N(1;5;2) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Câu 7. Cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 2z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặt cầu (S) là

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) và A là giao điểm của IH với (S).

Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặtcầu (S) là đoạn $AH, AH=d(I,(P))-R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất. Bán kính đường tròn (C) là

A. 1. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có $IA=\sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}<3=R$ nên A nằm trong mặt cầu (S).

Đặt h là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P), r là bán kính đường tròn (C). Khi đó:

$h\le IA=\sqrt{5}$ và $h=\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $IA\perp(P)$.

$r^2=R^2-h^2\ge 3^2-\sqrt{5}^2=4\Rightarrow r\ge 2$.

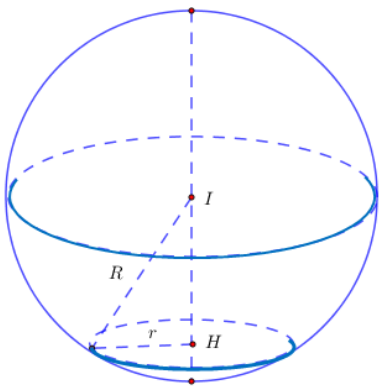
Đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất nên $r=2$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(\alpha):ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

A. -4. **B.** 8. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Vì $(\alpha): ax+by-z+c=0$ đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ nên $c=-4$ và $a=2$.

Suy ra $(\alpha): 2x+by-z-4=0$.

Đặt $IH=x$, với $0<x<3\sqrt{3}$ ta có $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{27-x^2}$.

Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 IH=\frac{1}{3}\pi(27-x^2)x=\frac{1}{3\sqrt{2}}\pi\sqrt{(27-x^2).(27-x^2).2x^2}\le 18\pi$.

$V_{\max}=18\pi$ khi $27-x^2=x^2\Leftrightarrow x=3$.

Khi đó, $d(I;(\alpha))=\frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}=3\Leftrightarrow(2b+5)^2=9(b^2+5)\Leftrightarrow b=2$.

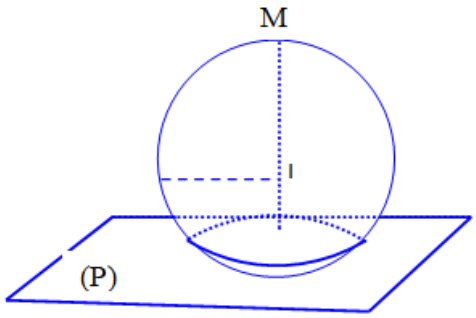
Vậy $a-b+c=-4$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn D



Mặt (S) cầu có tâm $I(1;2;3), R=3$.

$d(I,(P))=\frac{|2.1-2.2+3+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{3}<R$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi M thuộc đường thẳng Δ vuông đi qua M và vuông góc với (P)

$\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$. Thay vào mặt cầu $(S)\Rightarrow(2t)^2+(-2t)^2+(t)^2=9\Rightarrow 9t^2=9\Rightarrow t=\pm 1$

Với $t=1\Rightarrow M(3;0;4)\Rightarrow d(M;(P))=\frac{|2.3-2.0+4+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{10}{3}$

Với $t=-1\Rightarrow M\left(-1;4;2\right)\Rightarrow d\left(M;\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2.\left(-1\right)-2.4+2+3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $M\left(3;0;4\right)\Rightarrow a+b+c=7$.

DẠNG TOÁN 24: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

PHẦN I:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

✪ **Định nghĩa.**

• Cho $\vec{n}\neq\vec{0}$, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).

Chú ý :

• Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau. Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) suy ra $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

• Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Ta có : $\vec{n}\perp\vec{a}$, $\vec{n}\perp\vec{b}$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương $\Rightarrow\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

2. Mối liên hệ giữa quan hệ hình học và quan hệ vectơ được sử dụng để tìm véctơ pháp tuyến của mặt phẳng.

✪ Ký hiệu $\vec{n}_\alpha$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α), $\vec{u}_d$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

• Đường thẳng d song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α) suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_d}$.

• Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{u_d}$ là hai véctơ cùng phương.

• Hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ là hai véctơ cùng phương.

• Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_\beta}$.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng.

✪ Mặt mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình dạng : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

✪ Mặt mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát dạng : $Ax+By+Cz+D=0$.

Chú ý: $mp(\alpha)$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ với $abc\neq 0$. Có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tìm VTPT, các vấn đề về lý thuyết.
- PTMP trung trực của đoạn thẳng.
- PTMP qua 1 điểm, dễ tìm VTPT (không dùng tích có hướng).
- PTMP qua 1 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng.
- PTMP qua 1 điểm, tiếp xúc với mặt cầu.
- PTMP qua 1 điểm, cắt mặt cầu.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 2 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 3 điểm không thẳng hàng.
- PTMP theo đoạn chắn.
- PTMP song song với mp, thỏa ĐK.
- PTMP qua 1 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng (đường-mặt).
- PTMP qua 1 điểm và chứa đường thẳng.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với đường thẳng khác.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với mặt phẳng.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với mặt cầu.
- PTMP theo đoạn chắn thỏa ĐK với đường thẳng.
- PTMP song song với mp, thỏa ĐK.
- Toán Max-Min liên quan đến mặp phẳng.
- Điểm thuộc mặt phẳng thỏa ĐK.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+2=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}_3(2;3;2)$. **B.** $\vec{n}_1(2;3;0)$. **C.** $\vec{n}_2(2;3;1)$. **D.** $\vec{n}_4(2;0;3)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm véctơ pháp tuyến của mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đối chiếu phương trình của mặt phẳng trong đề bài với công thức phương trình tổng quát của mặt phẳng: $Ax+By+Cz+D=0, (A^2+B^2+C^2\neq 0)$ suy ra véctơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(A;B;C)$.

B2: Chọn đáp án đúng.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng: $Ax+By+Cz+D=0, (A^2+B^2+C^2\neq 0)$ có véctơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(A;B;C)$.

- Vì phương trình của mặt phẳng $(P): 2x+3y+z+2=0$ có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ suy ra véctơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(2;3;1)$. Chọn đáp án C.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): -y+2z-3=0$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}=(0;1;2)$. **B.** $\vec{n}=(0;-1;2)$. **C.** $\vec{n}=(0;-1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-1;0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(0;-1;2)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+z-1=0$. Vectơ nào dưới đây không là vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\vec{n}=(2;1;1)$. **B.** $\vec{n}=(-2;1;-1)$. **C.** $\vec{n}=(2;-1;1)$. **D.** $\vec{n}=(4;-2;2)$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ không là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(2;1;1)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là

A. $\vec{n}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{n}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{n}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là $\vec{n}=\vec{i}=(1;0;0)$.

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là

A. $\vec{n}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{n}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{n}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxz) là $\vec{n}=\vec{j}=(0;1;0)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là

A. $\vec{n}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{n}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{n}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{n}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Câu 6. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (Oxz)?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y-1=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Oxz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\vec{j}=(0;1;0)$ nên có phương trình $y=0$.

Câu 7. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (Oxy)?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $z-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$ nên có phương trình $z=0$.

Câu 8. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz)?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $z+1=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oyz) đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$ nên có phương trình $x=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0)$, $N(0;-2;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=-1$. **B.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=0$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-2}=1$. **D.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (MNP) có phương trình là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(1;2;-1)$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n_1}=(0;2;-3)$. **B.** $\vec{n_2}=(0;-2;3)$. **C.** $\vec{n_3}=(2;-2;3)$. **D.** $\vec{n_4}=(-2;2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AI}=(-2;2;3)$.

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A nên $AI\perp(\alpha)$ tại A.

$\Rightarrow \vec{n_4}=\overrightarrow{AI}=(-2;2;3)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

↳ Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

A. $\vec{n}=(3;6;-2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;3)$. **C.** $\vec{n}=(-3;-6;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;-1;3)$.

Lời giải

Chọn A

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 3x+6y-2z+6=0$.

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=(3;6;-2)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $M(0;0;1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $5x+2y-3z+3=0$. **B.** $-5x+2y+3z+3=0$.

C. $-5x+2y+3z-3=0$. **D.** $-10x+4y+6z+3=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(0;0;1)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-10;4;6)$ là

$-10(x-0)+4(y-0)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow -5x+2y+3z-3=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cặp mặt phẳng nào sau đây song song với nhau?

A. $P:2x-y+z-5=0$ và $Q:-4x+2y-2z+10=0$.

B. $R:x-y+z-3=0$ và $S:2x-2y+2z+6=0$.

C. $T:x-y+z=0$ và $U:\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0$.

D. $X:3x-y+2z-3=0$ và $Y:6z-2y-6=0$.

Lời giải

Chọn B.

Ta xét hai mặt phẳng R và S lần lượt có véctơ pháp tuyến là:

$\vec{n}_R=(1;-1;1)$ và $\vec{n}_S=(2;-2;2)$

Ta có tỉ lệ: $\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{6}\Rightarrow R\ //\ S$.

Xét các cặp còn lại ta thấy chúng không song song với nhau.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;2;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P):-x+3y+3z-2=0$. **B.** $(P):x-3y-3z-2=0$.

C. $(P):2x-y+z+2=0$. **D.** $(P):2x-y+z-2=0$.

Lời giải

Chọn B.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{AB}=(-1;3;3)$.

$\Rightarrow (P):-(x-2)+3(y+1)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+3y+3z+2=0 \Leftrightarrow x-3y-3z-2=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+4=0$ có phương trình là

A. $2x-y+3z+7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.

C. $2x+y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z-7=0$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P):2x-y+3z+4=0$ nên phương trình (Q) có dạng: $(Q):2x-y+3z+D=0,\ (D\neq 4)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;3;-2)$, ta có: $2.1-3+3.(-2)+D=0\Leftrightarrow D=7\neq 4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q):2x-y+3z+7=0$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-1;1)$, $B(3;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $2x+y-z-2=0$. **B.** $2x+y-2=0$. **C.** $x+2y-2=0$. **D.** $x+2y-z-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $I(1;0;1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $I(1;0;1)$ và có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $4(x-1)+2(y-0)=0\Leftrightarrow 2x+y-2=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$ và một điểm $A(1;1;0)$ thuộc (S). Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình là

A. $x+y+1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x-1=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;0)$, $\overrightarrow{IA}=(3;0;0)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và có VTPT $\overrightarrow{IA}=(3;0;0)$ có phương trình là

$$3(x-1)+0(y-1)+0(z-0)=0\Leftrightarrow 3(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=0.$$

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1;2;0)$ và nhận $\vec{n}(-1;0;2)$ là VTPT có phương trình là

A. $-x+2y-5=0$ **B.** $-x+2z-5=0$

C. $-x+2y-5=0$ **D.** $-x+2z-1=0$

Lời giải.

Chọn D

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1;2;0)$ và nhận $\vec{n}(-1;0;2)$ là VTPT có phương trình là: $-1(x+1)+0(y-2)+2(z-0)=0 \Leftrightarrow -x-1+2z=0 \Leftrightarrow -x+2z-1=0$.

Vậy $-x+2z-1=0$.

Phương pháp trắc nghiệm (nên có)

Từ tọa độ VTPT suy ra hệ số $B=0$, vậy loại ngay đáp án $-x+2y-5=0$ và $-x+2y-5=0$

Chọn 1 trong 2 PT còn lại bằng cách thay tọa độ điểm A vào.

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z=0$.

B. $4y+2z-3=0$.

C. $3x+2y+1=0$.

D. $2y+z-3=0$.

Lời giải.

Chọn A

Phương pháp tự luận

$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$

(ABC) qua $A(3;-2;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)=2(2;-3;6)$

$\Rightarrow (ABC): 2x-3y+6z=0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng MTBT tính tích có hướng.

Hoặc thay tọa độ cả 3 điểm A,B,C vào mặt phẳng xem có thỏa hay không?

Câu 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng qua $A(2;5;1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) là

A. $2x+5y+z=0$.

B. $x-2=0$.

C. $y-5=0$.

D. $z-1=0$.

Lời giải.

Chọn D

Phương pháp tự luận

Mặt phẳng qua $A(2;5;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$ có phương trình: $z-1=0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Mặt phẳng qua A và song song với (Oxy) có phương trình $z=z_A$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)=0$. Gọi ba điểm A, B, C lần lượt là giao điểm (khác gốc tọa độ O) của mặt cầu (S) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $6x-3y-2z+12=0$.

B. $6x-3y+2z-12=0$.

C. $6x+3y+2z-12=0$.

D. $6x-3y-2z-12=0$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$.

Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;1;4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $4x-12y-3z+12=0$.

B. $3x+12y-4z+12=0$.

C. $3x+12y-4z-12=0$.

D. $4x-12y-3z-12=0$.

Lời giải

Chọn A

Vì A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz nên $A(-3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{-3}+y+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-12y-3z+12=0$.

Câu 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q): x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=3 \\ y=3+t \\ z=5-t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và vuông góc với (Q) là

A. $3x+y+z-1=0$.

B. $3x-y-z+1=0$.

C. $x+3y+z-3=0$.

D. $x+y+z-1=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;-4)$.

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(0;1;-1)$.

Gọi VTPT của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}$.

Từ giả thiết ta có : $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q}$ và $\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_d}$ nên chọn $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{u_d}\right]=(3;1;1)$.

(P) đi qua điểm $A(0;1;0)$ và có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(3;1;1)$ có phương trình là: $3x+y+z-1=0$.

Câu 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$, hai đường thẳng cắt nhau là $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và $d':\begin{cases}x=1+4t\\y=2+t\\z=2\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d và d' là

A. $x-4y+5z+2=0$. **B.** $x-4y+5z-2=0$.

C. $x-4y-5z-2=0$. **D.** $x+4y+5z-2=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d và d' lần lượt có VTCP là $\vec{u}=(3;2;1)$, $\vec{u'}=(4;1;0)$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của (P).

Do $\begin{cases}(P)//d\\(P)//d'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\\vec{n}\perp\vec{u'}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(-1;4;-5)$.

(P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có VTPT $\vec{n}=(-1;4;-5)$ có phương trình là: $x-4y+5z-2=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q):2y+3z-10=0$. **B.** $(Q):2x+3z-11=0$.

C. $(Q):2y+3z-12=0$. **D.** $(Q):2y+3z-11=0$.

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ và $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\dfrac{1}{4}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;2;3)$.

Khi đó, mặt phẳng (Q) qua $A(2;4;1)$ và có VTPT là $\vec{n}=(0;2;3)$.

$\Rightarrow(Q):2y+3z-11=0$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là $x+y-z=0$, $x-2y+3z=4$ và cho điểm $M(1;-2;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $5x+2y-z+14=0$. **B.** $x-4y-3z+6=0$.

C. $x-4y-3z-6=0$. **D.** $5x+2y-z+4=0$.

Lời giải:

Chọn B

(P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;1;-1)$.

(Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;-2;3)$.

Do (α) vuông góc với (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(1;-4;-3)$.

(α) đi qua điểm $M(1;-2;5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ có phương trình là: $x-1-4(y+2)-3(z-5)=0 \Leftrightarrow x-4y-3z+6=0$.

Câu 7. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song trục Ox có phương trình là

A. $2y-z-1=0$. **B.** $2y+z-1=0$. **C.** $2y-z+1=0$. **D.** $2y+z+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, trục Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song trục Ox nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0;-2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(2;1;1)$ và có VTPT $\vec{n}=(0;-2;1)$ là : $2y-z-1=0$.

Câu 8. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song trục Oy có phương trình là

A. $2x+z+5=0$. **B.** $2x-z-3=0$. **C.** $2x+z-5=0$. **D.** $2x-z+5=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, trục Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song trục Oy nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{j}\right]=(2;0;1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(2;1;1)$ và có VTPT $\vec{n}=(2;0;1)$ là : $2x+z-5=0$.

Câu 9. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song trục Oz có phương trình dạng $ax+by+cz-3=0$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+b-10c$.

A. $P=4$. **B.** $P=2$.

C. $P=5$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song trục Oz nên (α) có một vectơ pháp tuyến $\Rightarrow \vec{n} = -\left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = (1;1;0)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y - 3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 1,\ c = 0$.

Khi đó $P = 2.1 + 1 - 10.0 = 3$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;0;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

A. $x - y + z - 2 = 0$. **B.** $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

C. $4x + 2y - z - 9 = 0$. **D.** $3x + y - 2z - 5 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$, $\overrightarrow{OC} = (2;0;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC nên (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}\right] = (-3;-7;2)$.

$\Rightarrow (P): -3(x-2) - 7(y-1) + 2(z-1) = 0$.

Hay $(P): 3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

↳ Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α), (P) song song với giá của vecto $\vec{v} = (1;6;2)$ và (P) tiếp xúc với (S). Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $2x - y + 2z + 3 = 0$; $2x - y + 2z - 21 = 0$.

B. $2x - y + 2z + 5 = 0$; $2x - y + 2z - 2 = 0$.

C. $2x - y + 2z - 2 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$.

D. $x - 2y + 2z + 3 = 0$; $x - 2y + z - 21 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R = 4$.

Vectơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;4;1)$.

Vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \vec{v}\right] = (2;-1;2)$.

Suy ra (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d\left(I,(P)\right) = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2 + 3 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = -21 \\ d = 3 \end{array}\right.$.

Vậy Phương trình của mặt phẳng (P) là: $2x - y + 2z + 3 = 0$; $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $H(1;1;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua H cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác O) sao cho H là trực tâm tam giác ABC là

A. $x+y+3z-7=0$.

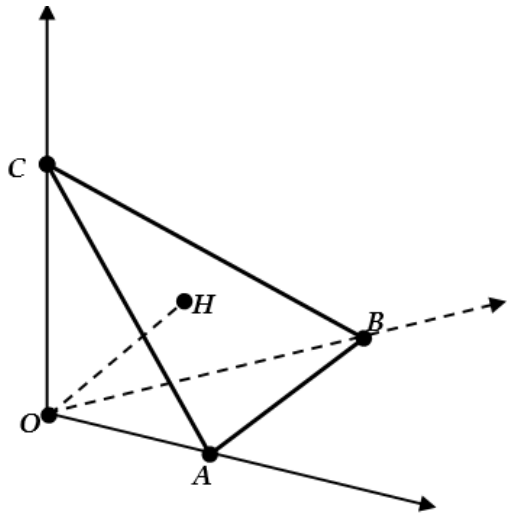
B. $x+y+3z+7=0$.

C. $x+y+3z+11=0$.

D. $x+y+3z-11=0$.

Lời giải

Chọn D



Do H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

Mặt khác: $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow OH \perp BC$.

Tương tự: $OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (ABC)$ hay $\overrightarrow{OH} = (1;1;3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) đi qua $H(1;1;3)$ nên phương trình mặt phẳng (P) là: $x+y+3z-11=0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho bốn điểm $S(-1;6;2)$, $A(0;0;6)$, $B(0;3;0)$, $C(-2;0;0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n} = (1;1;-1)$.

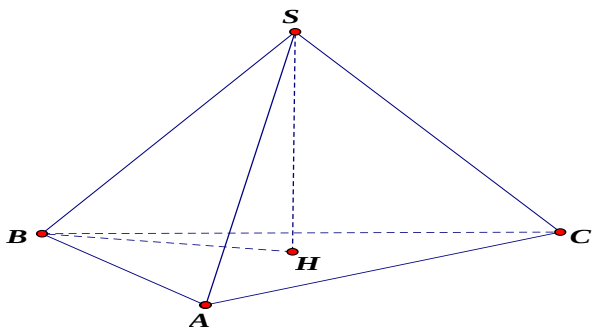
B. $\vec{n} = (1;5;-7)$.

C. $\vec{n} = (7;5;-4)$.

D. $\vec{n} = (1;1;1)$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình Mặt phẳng $(ABC): \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1 \quad \Leftrightarrow -3x+2y+z-6=0$.

Đường thẳng d qua điểm S và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

$$d:\begin{cases}x=-1-3t\\y=6+2t\\z=2+t\end{cases}$$

Khi đó $H=d\cap(ABC)$. Tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=-1-3t\\y=6+2t\\z=2+t\\-3x+2y+z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19}{14}\\y=\dfrac{31}{7}\\z=\dfrac{17}{14}\\t=-\dfrac{11}{14}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{19}{14};\frac{31}{7};\frac{17}{14}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{19}{14};\frac{10}{7};\frac{17}{14}\right)$, $\overrightarrow{SB}=(1;-3;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BH},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\frac{11}{14};\frac{55}{14};-\frac{11}{2}\right)=\frac{11}{14}(1;5;-7)$

Mặt phẳng (SBH) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;5;-7)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ cắt các trục tọa độ tại điểm A,B,C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC có phương trình $ax+by+cz-18=0$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(m;0;0);B(0;n;0);C(0;0;p)$.

Mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ cắt các trục tọa độ tại điểm A,B,C có dạng

$$(P):\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$$

Ta có $G(1;2;3)$ là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow\begin{cases}m=3x_G=3\\n=3y_G=6\\p=3z_G=9\end{cases}$.

$$\Rightarrow(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$$

Vậy $a+b+c=11$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$. **B.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{12}=1$.

C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$. **D.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;0;b)$, $C(0;0;c)$ thì $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

$M\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}=1$.

$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}\right|=\frac{abc}{6}$.

Áp dụng BDT Côsi ta có:

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{4}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{abc}}\Rightarrow 1\geq\frac{216}{abc}\Rightarrow\frac{1}{6}abc\geq 36\Rightarrow V_{OABC}\geq 36.$$

Vậy V_{OABC} đạt giá trị nhỏ nhất là 36 khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=12\end{cases}$.

Mặt phẳng thỏa yêu cầu có phương trình là $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $C(0;0;3)$ và $M(-1;3;2)$. Mặt phẳng (P) qua C, M đồng thời chắn trên các nửa trục dương Ox,Oy các đoạn thẳng bằng nhau. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}=(1;1;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;1;2)$.

C. $\vec{n}=(1;1;-1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt phẳng (P) chắn Ox,Oy lần lượt tại $A(a;0;0)$; $B(0;a;0)$ với $a>0$.

Mặt phẳng (P) qua A,B,C có phương trình là $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{3}=1$.

Mặt khác (P) qua $M(-1;3;2)$ nên ta có $\frac{-1}{a}+\frac{3}{a}+\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow a=6$.

Do đó $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow x+y+2z-6=0$.

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;2)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P):ax+by-\sqrt{2}z+d=0$ với $a>0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc $60°$. Khi đó tổng $a+b+d$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}b+d=0\\a+d=0\end{cases}$. Suy ra $a=b$ và $d=-a$.

Suy ra (P) có dạng $ax+ay-\sqrt{2}z-a=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(a;a;-\sqrt{2}\right)$.

Mặt phẳng (yOz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ta có: $\cos 60^\circ = \dfrac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+2.1}} \Leftrightarrow 2a^2+2 = 4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

Với $a=1$ ta có: $b=1$ và $d=-1$.

Ta có: $a+b+d=1+1-1=1$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) qua $M(1;2;1)$, lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ đều là

A. $(P): x+y+z-4=0$.

B. $(P): x-y+z-4=0$.

C. $(P): x+y+z-1=0$.

D. $(P): x-y+z=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi mặt phẳng (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ đều $OA=OB=OC=a$.

Phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$.

Mà (P) qua $M(1;2;1)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a}=1 \Leftrightarrow a=4$.

Phương trình mặt phẳng (P): $x+y+z-4=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Ozyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x+3y+2z+10=0$.

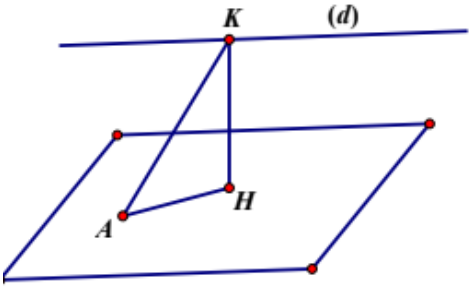
B. $x-2y-3z-1=0$.

C. $3x+z+2=0$.

D. $x-y-6=0$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng d.

Suy ra $(\alpha): x-y+z-1=0$.

Đường thẳng d có phương trình tham số: $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{array}\right.$.

Gọi $K(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d. Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+t \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=0 \end{cases}$. Vậy $K(1;1;1)$.

Ta có $d(d,(P))=d(K,(P))=KH\le KA=\sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overrightarrow{KA}$.

Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overrightarrow{KA}=(1;-2;-3)$.

$\overrightarrow{KA}=(1;-2;-3)$, mặt phẳng $3x+z+2=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;0;1)$ thỏa $\overrightarrow{KA}.\vec{n}=0$.

Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x+z+2=0$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(1;2;1)$ và $C(2;-1;2)$. Biết mặt phẳng (P) qua B, C và tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$. Khi đó mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $(10;a;b)$. Tổng $a+b$ là

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Gọi tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ là $I(x;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{OB}=(1;2;1)$, $\overrightarrow{OC}=(2;-1;2)$, $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}=(5;0;-5)$ nên mặt phẳng (OBC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a}=(1;0;-1)$.

Phương trình (OBC) qua O và có VTPT $\vec{a}=(1;0;-1)$ là: $x-z=0$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;-1;2)$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(5;0;-5)$ nên mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{b}=(5;3;4)$.

Phương trình (ABC) qua A và có VTPT $\vec{b}=(5;3;4)$ là: $5x+3y+4z-15=0$.

Tâm I cách đều hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) suy ra:

$$\frac{|x-z|}{\sqrt{2}}=\frac{|5x+3y+4z-15|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y+3z-5=0 & (\alpha) \\ 10x+3y-z-15=0 & (\beta) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Hai điểm A và O nằm về cùng phía với (α) nên loại (α).

Hai điểm A và O nằm về khác phía (β) nên nhận (β).

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $(10;a;b)$ thì $a=3$, $b=-1$.

Vậy $a+b=2$.

DẠNG TOÁN 24: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

✪ **Định nghĩa.**

• Cho $\vec{n}\neq\vec{0}$, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).

Chú ý :

• Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau. Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) suy ra $k\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

• Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Ta có : $\vec{n}\perp\vec{a}$, $\vec{n}\perp\vec{b}$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương $\Rightarrow\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

2. Mối liên hệ giữa quan hệ hình học và quan hệ vectơ được sử dụng để tìm véctơ pháp tuyến của mặt phẳng.

✪ Ký hiệu $\vec{n}_\alpha$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α), $\vec{u}_d$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

• Đường thẳng d song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α) suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_d}$.

• Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{u_d}$ là hai véctơ cùng phương.

• Hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ là hai véctơ cùng phương.

• Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{n_\beta}$.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng.

✪ Mặt mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình dạng : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

✪ Mặt mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát dạng : $Ax+By+Cz+D=0$.

Chú ý: $mp(\alpha)$ cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ với $abc\neq 0$. Có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Tìm VTPT, các vấn đề về lý thuyết.

• PTMP trung trực của đoạn thẳng.

• PTMP qua 1 điểm, dễ tìm VTPT (không dùng tích có hướng).

• PTMP qua 1 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng.

- PTMP qua 1 điểm, tiếp xúc với mặt cầu.
- PTMP qua 1 điểm, cắt mặt cầu.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 2 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 3 điểm không thẳng hàng.
- PTMP theo đoạn chắn.
- PTMP song song với mp, thỏa ĐK.
- PTMP qua 1 điểm, VTPT tìm bằng tích có hướng (đường-mặt).
- PTMP qua 1 điểm và chứa đường thẳng.
- PTMP qua 1 điểm, thỏa ĐK khác.
- PTMP qua 2 điểm, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với đường thẳng khác.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với mặt phẳng.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK về góc, khoảng cách.
- PTMP chứa 1 đường thẳng, thỏa ĐK với mặt cầu.
- PTMP theo đoạn chắn thỏa ĐK với đường thẳng.
- PTMP song song với mp, thỏa ĐK.
- Toán Max-Min liên quan đến mặp phẳng.
- Điểm thuộc mặt phẳng thỏa ĐK.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng: $(P): 2x+3y+z+2=0$. Vecto nào dưới đây là một vecto pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(2;3;2)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;0)$. **C.** $\vec{n}=(2;3;1)$. **D.** $\vec{n}=(2;0;3)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tọa độ vecto pháp tuyến của phương trình mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định các hệ số của x, y, z trong phương trình MP (P).

B2: Từ đó suy ra VTPT là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Hệ số x, y, z trong phương trình MP (P) lần lượt là $2, 3, 1$.

Vậy VTPT của MP (P) là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x-z+1=0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}(3;-1;1)$. **B.** $\vec{n}(3;0;-1)$. **C.** $\vec{n}(3;0;1)$. **D.** $\vec{n}(3;-2;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ số x, y, z trong phương trình MP (P) lần lượt là $3, 0, -1$.

Vậy VTPT của MP (P) là $\vec{n}=(3;0;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}(4;-4;2)$. **B.** $\vec{n}(-2;2;-3)$. **C.** $\vec{n}(-4;4;2)$. **D.** $\vec{n}(3;-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Hệ số x, y, z trong phương trình MP (P) lần lượt là $-2, 2, -1$.

Khi đó $(4;-4;2)=-2(-2;2;-1)$.

Vậy VTPT của MP (P) là $\vec{n}(4;-4;2)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1), B(-2;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB có một VTPT là:

A. $\vec{n}(4;-4;2)$. **B.** $\vec{n}(-3;1;0)$. **C.** $\vec{n}(-1;0;1)$. **D.** $\vec{n}(-1;1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$ làm VTPT.

Vậy VTPT cần tìm là $\vec{n}(-1;1;0)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(-1;0;1)$ và song song với mặt phẳng $(P): x-2y-z+1=0$ có một VTPT là.

A. $\vec{n}(1;-2;-1)$. **B.** $\vec{n}(1;1;0)$. **C.** $\vec{n}(1;-2;1)$. **D.** $\vec{n}(-1;1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng song song với (P) có dạng $(Q): x-2y-z+D=0 (D\neq 1)$.

Vậy VTPT cần tìm là $\vec{n}(1;-2;-1)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng qua $A(2;5;1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}(2;1;5)$. **B.** $\vec{n}(1;0;0)$. **C.** $\vec{n}(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}(1;0;0)$.

Lời giải:

Chọn C

Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$

Nên mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng đi qua $M(1;4;3)$ và vuông góc với trục Oy có phương trình là:

A. $y-4=0$. **B.** $x-1=0$.

C. $z-3=0$. **D.** $x+4y+3z=0$.

Lời giải:

Chọn A

Mặt phẳng qua $M(1;4;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{j}=(0;1;0)$ có phương trình $y-4=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm $M(3;4;-2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. $(R):x+y-7=0$. **B.** $(S):x+y+z+5=0$. **C.** $(Q):x-1=0$. **D.** $(P):z-2=0$..

Lời giải:

Chọn A

Thay tọa độ điểm M vào các pt của các mp ta thấy tọa độ điểm M chỉ thỏa mãn ptmp (R).

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-3)$ đến mp $(P):x+2y-2z-2=0.$

A. 1. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $d(M;(P))=\frac{|1.1+2.2-2.(-3)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3.$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mp$(P):y-2z+1=0.$ Vectơ nào dưới đây là một VTPT của (P)?

A. $\vec{n}=(1;-2;1)$. **B.** $\vec{n}=(1;-2;0)$. **C.** $\vec{n}=(0;1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(0;2;4)$.

Lời giải:

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của $mp(P)$ là $\vec{n}=(0;1;-2).$

Câu 10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\ 2;-1;1$, $B\ 1;0;4$ và $C\ 0;-2;-1$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có VTPT là:

A. $\vec{n}(2;1;5)$. **B.** $\vec{n}(1;0;0)$. **C.** $\vec{n}(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}(1;2;5)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{CB}=\ 1;2;5\ .$

Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có một *VTPT* là $\overrightarrow{CB}=\ 1;2;5\ .$

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(-1;3;3)$, $C(2;-4;2)$. Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (ABC) là:

A. $\vec{n}=(9;4;-1)$. **B.** $\vec{n}=(9;4;1)$. **C.** $\vec{n}=(4;9;-1)$. **D.** $\vec{n}=(-1;9;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)$.

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(9;4;-1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$ có phương trình là:

A. $-2x+y+z-2=0$. **B.** $-2x-y-z+2=0$.

C. $-2x+y+z-2=0$. **D.** $-2x+y-z-2=0$.

Lời giải:

Chọn D

Theo công thức viết phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có:

$(P):\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-2}=1 \Leftrightarrow -2x+y-z-2=0$.

Vậy $(P):-2x+y-z-2=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và song song với CD.

A. $2x+5y+z-18=0$. **B.** $2x-y+3z+6=0$.

C. $2x-y+z+4=0$. **D.** $x+y+z-9=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và song song với CD.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;2)$.

Vì $\overrightarrow{AB}=(-4;1;3)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;2)$ không cùng phương nên $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(2;5;1)$.

Mặt phẳng đi qua A có VTPT $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;5;1)$ có phương trình là: $2x+5y+z-18=0$.

Thay tọa độ điểm C vào phương trình mặt phẳng thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $2x+5y+z-18=0$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q):x+y+z-3=0$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $y+z=0$. **B.** $y-z=0$. **C.** $y-z-1=0$. **D.** $y-2z=0$.

Lời giải

Chọn B

Trục Ox véctơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_{(Q)}=(1;1;1)$.

Mặt phẳng (P) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q):x+y+z-3=0$ nên (P) có VTPT: $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(0;-1;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $y-z=0$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$ và mp $(P):3x-3y+2z+1=0.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. d song song với (P).

B. d nằm trong (P).

C. d cắt và không vuông góc với (P).

D. d vuông góc với (P).

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\vec{u}_d=(1;-1;-3);\vec{n}_{(P)}=(3;-3;2),$ có $1.3-1.(-3)-3.2=0\Rightarrow\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}.\Rightarrow d//(P)$ hoặc $d\subset(P)$. Lấy $M(-1;0;1)\in d$ ta thấy $M\in(P)\Rightarrow d\subset(P)$.

Câu 6. Trong kg $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=81$ tại điểm $C(-5;-4;6)$ là:

A. $7x+8y+67=0$ **B.** $4x+2y-9z+82=0$ **C.** $x-4z+29=0$ **D.** $2x+2y-z+24=0$

Lời giải

Chọn D

Ta có $I(1;2;3)$ là tâm của mặt cầu $(S)\Rightarrow\overrightarrow{IC}=(-6;-6;3)=-3(2;2;-1)\Rightarrow\vec{n}(2;2;-1)$ là 1 VTPT của mặt phẳng đi qua (P) và tiếp xúc với (S). Do đó mặt phẳng cần tìm có phương trình:

$$2(x+5)+2(y+4)-1(z-6)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+24=0$$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(0;-2;3)$, song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=z$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta):x+y-z=0$ có phương trình:

A. $2x-3y-5z-9=0$.

B. $2x-3y+5z-9=0$.

C. $2x+3y+5z+9=0$.

D. $2x+3y+5z-9=0$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{u_d}=(2;-3;1)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(1;1;-1)$

Mặt phẳng (α) đi qua $M(0;-2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;3;5)$.

$\Rightarrow (\alpha): 2x+3y+5z-9=0$.

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi α là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A\ 5;4;3$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng α là:

A. $12x+15y+20z-60=0$ **B.** $12x+15y+20z+60=0$.

C. $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}-60=0$.

Lời giải.

Chọn A

Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox,Oy,Oz.

Ta có: $M\ 5;0;0$, $N\ 0;4;0$, $P\ 0;0;3$.

Phương trình mặt phẳng α qua $M\ 5;0;0$, $N\ 0;4;0$, $P\ 0;0;3$ là:

$\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 12x+15y+20z-60=0$.

Vậy $12x+15y+20z-60=0$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 mặt phẳng $(P): x-2y+4x-3=0$, $(Q): -2x+4y-8z+5=0$, $(R): 3x-6y+12z-10=0$, $(\mathrm{W}): 4x-8y+8z-12=0$. Có bao nhiêu cặp mặt phẳng song song với nhau.

A.2. **B.** 3. **C.**0. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn B

Hai mặt phẳng song song khi $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$

Xét (P) và (Q): $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{4}{-8}\neq\frac{-3}{5}\Rightarrow (P)\parallel(Q)$

Xét (P) và (R): $\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}=\frac{4}{12}\neq\frac{-3}{-10}\Rightarrow (P)\parallel(R)$

$\Rightarrow (Q)\parallel(R)$

Xét (P) và (W): $\frac{1}{4}=\frac{-2}{-8}\neq\frac{4}{8}$

Xét (Q) và (W): $\frac{-2}{4}=\frac{4}{-8}\neq\frac{-8}{8}$

Xét (R) và (W): $\frac{3}{4}=\frac{-6}{-8}\neq\frac{12}{8}$.

Vậy có 3 cặp mặt phẳng song song.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-3=0$, $(\beta): x-2y+2z-8=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là bao nhiêu ?

A. $d((\alpha),(\beta))=\frac{5}{3}$ **B.** $d((\alpha),(\beta))=\frac{11}{3}$ **C.** $d((\alpha),(\beta))=5$ **D.** $d((\alpha),(\beta))=\frac{4}{3}$

Lời giải:

Chọn A

Lấy $M(1,0,1)$ thuộc mặt phẳng (α) .Ta có $d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))=\dfrac{5}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$.

Vậy $d((\alpha),(\beta))=\dfrac{5}{3}$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $(b>0,c>0)$ và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Xác định b và c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

A. $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $b=1,c=\dfrac{1}{2}$ **C.** $b=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{2}$ **D.** $b=\dfrac{1}{2},c=1$

Lời giải:

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\Leftrightarrow bcx+cy+bz-bc=0$

Ta có : $\vec{n}_{(ABC)}=(bc;b;c)$, $\vec{n}_{(P)}=(0;1;-1)$. Theo giả thiết, ta được:

$$\begin{cases}(ABC)\perp(P)\\ d(O,(ABC))=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}_{(ABC)}.\vec{n}_{(P)}=0\\ \dfrac{|-bc|}{\sqrt{(bc)^2+c^2+b^2}}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-c=0\\ \dfrac{|-bc|}{\sqrt{(bc)^2+c^2+b^2}}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=c\\ \dfrac{b^2}{\sqrt{b^4+2b^2}}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3b^2=\sqrt{b^4+2b^2}\Leftrightarrow 8b^4=2b^2\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $y+z+1=0$ góc 60^0. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $\left[\begin{array}{l}x-z=0\\ x+z=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x+y=0\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x-z-1=0\\ x-z=0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x-2z=0\\ x+z=0\end{array}\right.$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) chứa trục Oy nên có dạng: $Ax+Cz=0$ $(A^2+C^2\neq 0)$.

Mặt phẳng (P) tạo với mặt phẳng $y+z+1=0$ góc 60^0 nên $\cos 60^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}$.

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+C^2}.\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sqrt{A^2+C^2}=\sqrt{2}|C|\Leftrightarrow A^2-C^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=C\\ A=-C\end{array}\right.$$

Phương trình mặt phẳng (P) là: $\left[\begin{array}{l}x-z=0\\ x+z=0\end{array}\right.$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$,

điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất ?

A. $(P): x+2y+3z-6=0$.

B. $(P): x+2y+z-2=0$.

C. $(P): 3x+2y+2z-4=0$.

D. $(P): x-2y+3z-6=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1,2,3), R=3$ và $\overrightarrow{AI}=(1;2;1) \Rightarrow IA=\sqrt{6}$

Ta có $IA<R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Ta có : $d\left(I,(P)\right)=\sqrt{R^2-r^2}$

Diện tích hình tròn (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)$ lớn nhất.

Do $d\left(I,(P)\right)\le IA \Rightarrow \max d\left(I,(P)\right)=IA$ Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vtpt

$\Rightarrow (P): x+2y+z-2=0$

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x+y+z-3=0$.

B. $(P): x+y-z+1=0$.

C. $(P): x-y-z+1=0$.

D. $(P): x+2y+z-4=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 (a,b,c\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} N\in(P) \\ NA=NB \\ NA=NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ |a-1|=|b-1| \\ |a-1|=|c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=3 \Rightarrow x+y+z-3=0$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;3)$ và $D(0;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B đồng thời cách đều C, D

A. $(P_1): 4x+2y+7z-15=0; (P_2): x-5y-z+10=0$.

C. $(P_1): 6x-4y+7z-5=0; (P_2): 3x+y+5z+10=0$.

C. $(P_1): 6x-4y+7z-5=0; (P_2): 2x+3z-5=0$.

D. $(P_1): 3x+5y+7z-20=0; (P_2): x+3y+3z-10=0$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2), \overrightarrow{CD}=(-2;4;-2)$

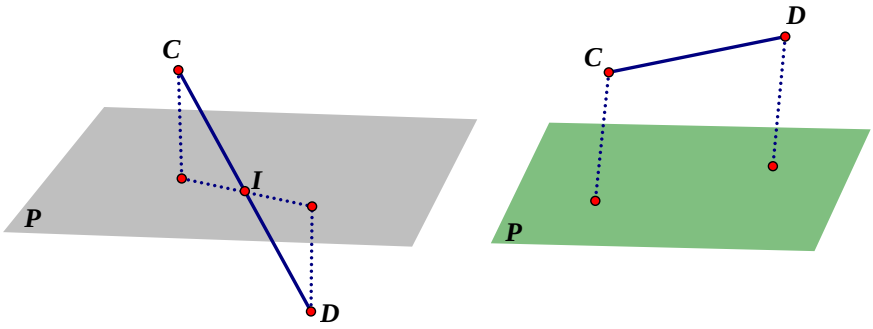
Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $CD \parallel (P)$

$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-6;-10;-14)=-2(3;5;7)\Rightarrow (P): 3x+5y+7z-20=0$

Trường hợp 2: (P) đi qua trung điểm $I(1;1;2)$ của CD

$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}=(1;3;3)\Rightarrow (P): x+3y+3z-10=0$.



Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng α đi qua điểm $M\ 1;2;3$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng α có phương trình là:

A. $x+2y+3z-14=0$.

B. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}-1=0$.

C. $3x+2y+z-10=0$.

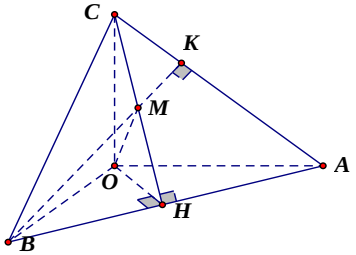
D. $x+2y+3z+14=0$.

Lời giải:

Chọn A

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, K là hình chiếu vuông góc B trên AC. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M=BK\cap CH$

Ta có : $\left.\begin{matrix} AB\perp CH \\ AB\perp CO \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp COH \Rightarrow AB\perp OM$ (1) (1)



Chứng minh tương tự, ta có: $AC\perp OM$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $OM\perp ABC$

Ta có: $\overrightarrow{OM}\ 1;2;3$.

Mặt phẳng α đi qua điểm $M\ 1;2;3$ và có một *VTPT* là $\overrightarrow{OM}\ 1;2;3$ nên có phương trình là:

$x-1\ +2\ y-2\ +3\ z-3\ =0\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Cách 2:

Do A,B,C lần lượt thuộc các trục Ox,Oy,Oz nên $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ $(a,b,c\neq 0)$.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\\ M\in(ABC)\end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a,b,c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x+2y+3z-14=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $T=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):6x-3y+2z-6=0$.

B. $(P):6x+3y+2z-18=0$.

C. $(P):x+2y+3z-14=0$.

D. $(P):3x+2y+z-10=0$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$, khi đó phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$M(1;2;3)\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$1=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2\leq\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{14}\Leftrightarrow\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\geq\frac{1}{14}\Rightarrow T_{\min}=\frac{1}{14}$$

Dấu = xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c}\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{a}{2}\\ c=\frac{a}{3}\\ \frac{1}{a}+\frac{4}{a}+\frac{9}{a}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14\\ b=7\\ c=\frac{14}{3}\end{cases}\Rightarrow(P):\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và mp $(P):x+my+(2m+1)z-(2+m)=0,$ với m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P). Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất.

A. $a+b=2$

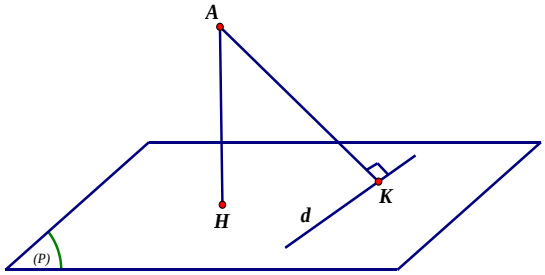
B. $a+b=-\frac{1}{2}$

C. $a+b=0$

D. $a+b=\frac{3}{2}$

Lời giải:

Chọn D



$(P): x+my+(2m+1)z-2(2+m)=0 \Leftrightarrow m\left(y+2z-1\right)+x+z-2=0$

Khi đó, (P) luôn đi qua đường thẳng cố định $(d):\begin{cases} y+2z-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$ với mọi *m*.

Do *A, (d)* cố định nên đoạn AK (K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d) là cố định.

Vì $AH \perp (P) \Rightarrow AH \le AK \Rightarrow AH_{\max} = AK$ khi và chỉ khi H trùng K, hay khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất khi H trùng K.

+) Ta tìm tọa độ của điểm K: $\left(d\right):\begin{cases} y+2z-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$

Cho $z=0 \Rightarrow y=1; x=2 \Rightarrow I(2;1;0) \in d$

Đặt $\overrightarrow{n_1}=(0;1;2), \overrightarrow{n_2}=(1;0;1), (d)$ có 1 VTCP $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(1;2;-1)$

Phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t; K \in (d) \Rightarrow K(2+t;1+2t;-t) \\ z=-t \end{cases}$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, Khi đó, (Q) có 1 VTPT $\vec{n}_{(Q)}=\vec{u}(1;2;-1)$

Phương trình mặt phẳng (Q): $1(x-2)+2(\mathrm{y}-1)-1(\mathrm{z}-3)=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}+2\,\mathrm{y}-\mathrm{z}-1=0$

$K \in (Q) \Rightarrow 2+t+2(1+2t)-(-t)-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{t}=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow K\left(\dfrac{3}{2};0;\dfrac{1}{2}\right) \to a=\dfrac{3}{2}; b=0 \Rightarrow a+b=\dfrac{3}{2}.$

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right): x+2y-2z+1=0$, 2 điểm $A\left(1;0;0\right), B(-1;2;0)$ và mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+z^2=25$. Viết phương trình mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ vuông với mặt phẳng $\left(P\right)$, song song với đường thẳng AB, đồng thời cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo đường tròn có bán kính bằng $r=2\sqrt{2}$

A. $2x+2y+3z+11=0;\ 2x+2y+3z-23=0$.

B. $2x-2y+3z+11=0;\ 2x-2y+3z-23=0$.

C. $2x-2y+3z-11=0;\ 2x-2y+3z+23=0$.

D. $2x+2y+3z-11=0;\ 2x+2y+3z+23=0$.

Lời giải:

Chọn A

Mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+z^2=25$ có tâm $I\left(1;2;0\right)$ và bán kính $R=5$.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=\left(1;2;-2\right), \overrightarrow{AB}=\left(-2;2;0\right)$

Gọi $\overrightarrow{n_\alpha}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

Ta có : $\vec{n}_\alpha=\left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AB}\right] \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left(4;4;6\right)=2\left(2;2;3\right)=2\overrightarrow{n_1}$

Lúc đó mặt phẳng (α) có dạng : $2x+2y+3z+m=0$

Gọi J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α)

Ta có : $R^2=r^2+IJ^2\Rightarrow IJ^2=17\Rightarrow d\left(I,(\alpha)\right)=\sqrt{17}\Leftrightarrow|6+m|=17\Leftrightarrow m=11$ hoặc $m=-23$

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha):2x+2y+3z+11=0$ hoặc $2x+2y+3z-23=0$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho 3 điểm $A(1;1;-1),B(1;1;2),C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB=2IC$ biết tọa độ điểm I là số nguyên.

A. $(\alpha):2x-y-2z-3=0$.

B. $(\alpha):4x+3y-2z-9=0$.

C. $(\alpha):6x+2y-z-9=0$.

D $(\alpha):2x+3y+2z-3=0$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi $I(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{IB}=(1-a;1-b;2-c);\overrightarrow{IC}=(-1-a;2-b;-2-c);$

Do I,B,C thẳng hàng và $IB=2IC\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC}\\\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{IC}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(-3;3;-6)\\I\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)\end{array}\right.$

Vì tọa độ điểm I là số nguyên nên $I(-3;3;-6)$

Lúc đó mặt phẳng (α) đi qua $A,I(-3;3;-6)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên VTPT của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{IA},\vec{n}_{(P)}\right]=(2;-1;-2)\Rightarrow(\alpha):2x-y-2z-3=0$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất có phương trình là:

A. $6x+3y+2z=0$.

B. $6x+3y+2z-18=0$.

C. $x+2y+3z-14=0$.

D. $x+y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn B

MP (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C nên $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ $(a,b,c>0$).

Phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (P) qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Ta có $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Leftrightarrow abc\geq162$

Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $V=\frac{1}{6}abc\geq 27$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$ suy ra $a=3,b=6,c=9$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ hay $6x+3y+2z-18=0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1),B(2;0;2)$, $C(-1;-1;0),D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa : $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất ?

A. $16x+40y-44z+39=0$.

B. $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$.

D. $16x-40y-44z-39=0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có : $4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\geq 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\geq \frac{27}{64}\Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\geq \frac{27}{64}\Rightarrow V_{AB'C'D'}\geq \frac{27}{64}V_{ABCD}$.

Ta gọi $B'(a;b;c)$ nên $\overrightarrow{AB'}=(a-1;b-1;c-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;-1;1)$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

Ta lại có $\vec{n}_{(BCD)}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD}\right]=(-4;-10;11)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) nên

$\vec{n}_{(B'C'D')}=\vec{n}_{(BCD)}=(-4;-10;11)$ và mặt phẳng $(B'C'D')$ đi qua $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow (B'C'D'):16x+40y-44z+39=0$.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A,B,C (khác gốc O) sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $3x+6y+2z+18=0$.

B. $6x+3y+2z-18=0$.

C. $2x+y+3z-9=0$.

D. $6x+3y+2z+9=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ *là giao điểm của mặt phẳng* (α) *các trục* Ox,Oy,Oz

Phương trình mặt phẳng $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$.

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{3}=1\\ \frac{b}{3}=2\\ \frac{c}{3}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha):\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0$

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0$,$(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của$(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Chọn B

Chọn $M(6;0;0),N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của$(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox,Oy,Oz

$\Rightarrow(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$

(α) chứa $M,N\Rightarrow\begin{cases}\frac{6}{a}=1\\ \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1\end{cases}$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều$\Rightarrow OA=OB=OC\Rightarrow|a|=|b|=|c|$

Vậy phương trình $x+y+z-6=0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\ a;0;0$, $B\ 0;b;0$, $C\ 0;0;c$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng P cố định. Khoảng cách từ M $2019;0;0$ tới mp P bằng:

A. 2018. **B.** $\frac{2018}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2019}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2020}{\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có phương trình mặt phẳng Oxy là: $z=0$

Gọi I là trung điểm $AB\longrightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng $OAB \equiv Oxy$, nên VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = 0;0;1$. Suy ra $d: \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$

Gọi α là mặt phẳng trung trực của đoạn OC nên α có VTPT là $\overrightarrow{OC} = 0;0;c$ và đi qua trung điểm $I\left(0;0;\frac{c}{2}\right)$ của đoạn OC. Suy ra ptmp $\alpha: z - \frac{c}{2} = 0.$

Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là giao điểm của d và α có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \\ z - \frac{c}{2} = 0. \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right).$

Ta có $x_I + y_I + z_I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2}{2} = 1 \longrightarrow x_I + y_I + z_I - 1 = 0$. Điều này chứng tỏ tâm I của mặt cầu luôn thuộc mp $P: x + y + z - 1 = 0.$ Khi đó

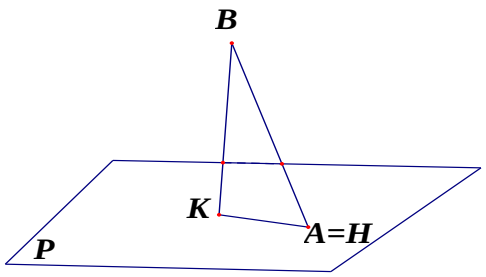
$d\left[M, P\right] = \frac{|2019-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2018}{\sqrt{3}}.$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 3 = 0$ và điểm $A(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc trục Oz sao cho độ dài đoạn hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB lên (P) bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

A. $B\left(0;0;\frac{6}{5}\right).$ **B.** $B\left(0;0;-\frac{3}{5}\right).$ **C.** $B\left(0;0;-\frac{6}{5}\right).$ **D.** $B\left(0;0;\frac{3}{5}\right).$

Lời giải

Chọn C



Gọi $B\ 0;0;b \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2;1;b)$ và $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;1;2)$

Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và (P), ta có: $\sin\varphi = \frac{|2b-3|}{\sqrt{b^2+5}.\sqrt{9}}$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên (P)

$$\Rightarrow HK = AB.\cos\varphi = \sqrt{b^2+5}.\sqrt{1-\left(\frac{2b-3}{\sqrt{b^2+5}.\sqrt{9}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5b^2+12b+36}}{3} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

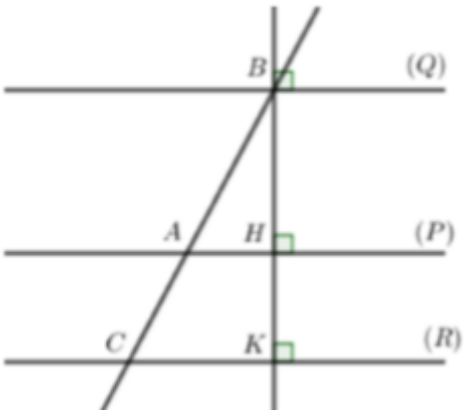
$$\Leftrightarrow b = -\frac{6}{5} \Rightarrow B\left(0;0;-\frac{6}{5}\right)$$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$, cho ba mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0; (Q): x-2y+2z-8=0;\ (R): x-2y+2z+4=0.$ Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P);\ (Q); (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB+\frac{86}{AC^2}$ là

A. $\frac{41}{8}$ **B.** 99 **C.** 18 **D.** 24

Lời giải:

Chọn C



Nhận xét $(P)//(Q)//(R)$ và (P) nằm giữa (Q) và (R)

Ta có $BH = d\left((Q);(P)\right) = 3; HK = d\left((P);(R)\right) = 1$

Áp dụng định lí Ta-lét ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{HK} = 3$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$AB+\frac{96}{AC^2} = \frac{AB}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{96}{AC^2} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{AB}{2}.\frac{AB}{2}.\frac{96}{AC^2}}$$

$$= 3.\sqrt[3]{24.\left(\frac{AB}{AC}\right)^2} = 3.\sqrt[3]{24.9} = 18$$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất ?

A. $(P): x+2y+3z-6=0$. **B** $(P): x+2y+z-2=0$.

C. $(P): 3x+2y+2z-4=0$. **D.** $(P): x-2y+3z-6=0$.

Lời giải:

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1,2,3), R=3$.

Ta có $IA<R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Ta có : $d(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}$

Diện tích hình tròn (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Do $d(I,(P))\le IA \Rightarrow \max d(I,(P))=IA$ Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}=(-1;-2;-1)$ làm vtpt

$\Rightarrow (P): x+2y+z-2=0$

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x-2y-4z=0$. **B.** $7x-2y-4z+3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $14x-4y-8z+3=0$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}}=(2;-1;4)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2); \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$;

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\overrightarrow{AB}=-1\neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

Do (α) cách đều d_1, d_2 nên (α) song song với $d_1, d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$

$\Rightarrow (\alpha)$ có dạng $7x-2y-4z+d=0$

Theo giả thiết thì $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{69}}=\frac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow (\alpha): 14x-4y-8z+3=0$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\ 1;0;0$, $B\ 0;1;0$, $C\ 0;0;1$, $D\ 0;0;0$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng ABC , BCD , CDA , DAB .

A. 4 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 8

Lời giải:

Chọn D

Phương trình các mặt phẳng: $(ABC): x+y+z-1=0; (BCD): x=0; (CDA): y=0; (DAB): z=0$

Gọi $M\ a;b;c$ là điểm cách đều cả 4 mặt phẳng trên

$$\Leftrightarrow d\left(M;(ABC)\right)=d\left(M;(BCD)\right)=d\left(M;(CDA)\right)=d\left(M;(DAB)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}=|a|=|b|=|c| \Rightarrow \begin{cases} |a|=|b|=|c| \\ \dfrac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}}=|a| \end{cases}$$

$$|a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=c=-b \\ b=c=-a \end{cases}$$

TH1:

$$a=b=c \Rightarrow \frac{|3a-1|}{\sqrt{3}}=|a| \Leftrightarrow 9a^2-6a+1=3a^2 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6};\frac{3+\sqrt{3}}{6};\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \\ M\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6};\frac{3-\sqrt{3}}{6};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \end{array}\right.$$

TH2:

$$a=b=-c \Rightarrow \frac{|a-1|}{\sqrt{3}}=|a| \Leftrightarrow a^2-2a+1=3a^2 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \\ M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$$

TH3:

$$a=c=-b \Rightarrow \frac{|a-1|}{\sqrt{3}}=|a| \Leftrightarrow a^2-2a+1=3a^2 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \\ M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$$

TH4:

$$b=c=-a \Rightarrow \frac{|a+1|}{\sqrt{3}}=|a| \Leftrightarrow a^2+2a+1=3a^2 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \\ M\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 8 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG TOÁN 25: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG
(TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

+ Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là phương trình có dạng: $\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}$ trong đó t là tham số.

Chú ý: Nếu $a_1;\ a_2;\ a_3$ đều khác 0 thì có thể viết phương trình của Δ dưới dạng chính tắc:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

+ Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A),\ B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ ta có : $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

+ Hình chiếu của $M(a;b;c)$ trên Ox là $M_1(a;0;0)$, trên Oy là $M_2(0;b;0)$, trên Oz là $M_3(0;0;c)$.

+ Hình chiếu của $M(a;b;c)$ trên (Oxy) là $M_1(a;b;0)$, trên (Oyz) là $M_2(0;b;c)$, trên (Oxz) là $M_3(a;0;c)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Phương trình đường thẳng(Tìm tọa độ điểm thuộc đường thẳng đã cho)

☞Tìm VTCP, các vấn đề về lý thuyết

☞PT hình chiếu vuông góc của d lên (P)

☞Điểm thuộc đường thẳng thỏa ĐK

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

A. $P(1;2;-1)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $N(2;3;-1)$. **D.** $Q(-2;-3;1)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Xác định điểm thuộc đường thẳng cho trước

……

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Phương trình tham số của đường thẳng d :

Cho đường thẳng d qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$, $a^2+b^2+c^2>0$. Khi đó phương trình tham số của đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$

+ Nếu $a.b.c\neq 0$ thì đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

.....

3. HƯỚNG GIẢI:

Thay tọa độ các điểm của đáp án vào phương trình đường thẳng d.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm $P\left(1;2;-1\right)$ vào phương trình đường thẳng d ta có: $\frac{1-1}{2}=\frac{2-2}{3}=\frac{-1+1}{-1}=0$

Ta suy ra được $P\in d$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+t\\z=-2-t\end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $M\left(2;-1;2\right)$. **B.** $N\left(1;-2;-2\right)$. **C.** $P\left(1;2;3\right)$. **D.** $Q\left(-2;1;-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $N\left(1;-2;-2\right)\in d$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{-2}$ đi qua điểm nào dưới đây ?

A. $M\left(2;-1;2\right)$. **B.** $N\left(1;-4;0\right)$. **C.** $P\left(1;-4;-2\right)$. **D.** $Q\left(-2;1;-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ điểm $N\left(1;-4;0\right)$ vào phương trình đường thẳng d ta có: $\frac{1-1}{-2}=\frac{-4+4}{1}=\frac{0}{-2}=0$

$\Rightarrow N\left(1;-4;0\right)\in d$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q(2;-1;2)$. **B.** $M(-1;-2;-3)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $N(-2;1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $P(1;2;3)$ vào phương trình đường thẳng d ta có: $\dfrac{1-1}{2}=\dfrac{2-2}{-1}=\dfrac{3-3}{2}=0$

$\Rightarrow P(1;2;3)\in d$.

Câu 4. Cho đường $d:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}\cdot$ Điểm nào sau đây không thuộc d?

A. $N(4;0;-1)$. **B.** $M(1;-2;3)$. **C.** $P(7;2;1)$. **D.** $Q(-2;-4;7)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ $P(7;2;1)$ vào phương trình đường thẳng d không thỏa mãn nên $P\notin d$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$?

A. $P(1;1;2)$. **B.** $N(2;-1;2)$. **C.** $Q(-2;1;-2)$. **D.** $M(-2;-2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d ta thấy điểm $Q(-2;1;-2)\in d$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2;-3)$. **B.** $M(2;-1;2)$. **C.** $P(0;2;-8)$. **D.** $N(0;5;-8)$

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng ta thấy: $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{2-2}{-3}\neq\dfrac{-8+3}{5}\Rightarrow P\notin d$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng (d) có phương trình $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng (d)?

A. $P(7;2;1)$. **B.** $M(1;-2;3)$. **C.** $N(4;0;-1)$. **D.** $Q(-2;-4;7)$.

Lời giải

Chọn A

Thế tọa độ điểm $P(7;2;1)$ vào đường thẳng (d) ta có: $2=2\neq\dfrac{-1}{2}$ nên $P(7;2;1)$ không thuộc đường thẳng (d).

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3=(2;1;3)$ **B.** $\vec{u}_4=(-1;2;1)$ **C.** $\vec{u}_2=(2;1;1)$ **D.** $\vec{u}_1=(-1;2;3)$

Lời giải

Chọn B

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;-3)$. **B.** $\vec{u}=(2;-3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;2;3)$. **D.** $\vec{u}=(-2;1;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-2t\\y=-2+3t\\z=2+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(3;-2;2)$. **B.** $\vec{u}=(2;-3;2)$. **C.** $\vec{u}=(-3;2;2)$. **D.** $\vec{u}=(-2;3;1)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(3;-1;5)$. **B.** $\vec{u}_4=(1;-1;2)$. **C.** $\vec{u}_2=(-3;1;5)$. **D.** $\vec{u}_3=(1;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=2+3t\\z=5-t\end{cases};\ (t\in\mathbb{R})$. Véctơ nào dưới đây là véctơ chỉ phương của d ?

A. $\vec{u}_1=(0;3;-1)$ **B.** $\vec{u}_2=(1;3;-1)$ **C.** $\vec{u}_3=(1;-3;-1)$ **D.** $\vec{u}_4=(1;2;5)$

Lời giải

Chọn A

Mức độ 2

Câu 1. Cho d qua $A(3;0;1)$, $B(-1;2;3)$. Đường thẳng d có một véctơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{u}=(2;1;0)$. **C.** $\vec{u}=(2;-1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Véctơ chỉ phương là véctơ có giá song song hoặc nằm trên đường thẳng d. Do đó:

$\vec{u}_d=\overrightarrow{AB}=(-4;2;2)=-2(2;-1;-1)$

Câu 2. Cho hai điểm $A(5;-3;6)$, $B(5;-1;-5)$. Tìm một véctơ chỉ phương của đường thẳng AB.

A. $\vec{u}=(5;-2;1)$. **B.** $\vec{u}=(10;-4;1)$. **C.** $\vec{u}=(0;2;-11)$. **D.** $\vec{u}=(0;2;11)$.

Lời giải

Chọn C

Véctơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0;2;-11)$.

Câu 3. Cho điểm $M(1;\ 2;\ 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Véctơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2.

A. $\vec{u}_2=(1;2;0)$. **B.** $\vec{u}_3=(1;0;0)$. **C.** $\vec{u}_4=(-1;2;0)$. **D.** $\vec{u}_1=(0;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox nên $M_1(1;\ 0;\ 0)$

M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy nên $M_2(0;2;0)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;\ 2;\ 0)$.

Câu 4. Cho điểm $M(3;-1;\ 5)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy. Véctơ nào dưới đây là một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2.

A. $\vec{u}_2=(3;-1;\ 5)$. **B.** $\vec{u}_3=(1;0;0)$. **C.** $\vec{u}_4=(-3;-1;0)$. **D.** $\vec{u}_1=(0;2;0)$.

Lời giải

Chọn C

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox nên $M_1(3;0;0)$

M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy nên $M_2(0;-1;\ 0)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;-1;0)$.

Câu 5. Cho điểm $M(-2;\ 3;\ 4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz). Tìm một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2.

A. $\vec{u}_2=(2;\ 3;\ 0)$. **B.** $\vec{u}_3=(1;\ 0;\ 2)$. **C.** $\vec{u}_4=(0;-3;4)$. **D.** $\vec{u}_1=(-2;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục (Oxy) nên $M_1(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$

M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục (Oyz) nên $M_2(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$ nên $\vec{u}_3=(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2.

Câu 6. Cho điểm $M(-2;5;1)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các mặt phẳng (Oxy), (Oxz). Tìm một véctơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2.

A. $\vec{u}_2=(-2;5;1)$. **B.** $\vec{u}_3=(0;\ 5;\ -1)$. **C.** $\vec{u}_4=(0;\ 5;\ 0)$. **D.** $\vec{u}_1=(-4;5;1)$.

Lời giải

Chọn B

M_1 là hình chiếu vuông góc của M lên trục (Oxy) nên $M_1(-2;5;0)$

M_2 là hình chiếu vuông góc của M lên trục (Oxz) nên $M_2(-2;0;1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(0;-5;1)$ nên $\vec{u}_3=(0;-5;1)$ là một vectơ chỉ phương của M_1M_2.

Câu 7. Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P):4x-z+3=0$. Tìm một véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $\vec{u}=(4;1;3)$. **B.** $\vec{u}=(4;0;-1)$. **C.** $\vec{u}=(4;1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(4;-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $d\perp(P)$ nên $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(4;0;-1)$.

Câu 8. Cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P):-2x+y-z+1=0$. Tìm một véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

A. $\vec{u}=(-2;-1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(2;-1;1)$. **C.** $\vec{u}=(-2;1;1)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $d\perp(P)$ nên $\vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(-2;1;-1)$. Chọn $\vec{u}=(2;-1;1)$

Câu 9. Cho hai mặt phẳng $(P):2x+y-z-1=0,(Q):x-2y+z-5=0$. Khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;-2;1)$ **B.** $\vec{u}=(2;1;-1)$ **C.** $\vec{u}=(1;3;5)$ **D.** $\vec{u}=(-1;3;-5)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Khi đó, chọn một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-3;-5)$.

Vậy $\vec{u}=(1;3;5)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

Câu 10. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=3t\\z=-2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Biết $A(m;m+2;1)\in d$. Tìm m.

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=7$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn C

$$A(m;m+2;1)\in d\Rightarrow\begin{cases}m=1+2t\\m+2=3t\\1=-2+t\end{cases}\Leftrightarrow\frac{m-1}{2}=\frac{m+2}{3}=3\Leftrightarrow m=7$$

Câu 11. Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$. Giá trị $m+n$ bằng

A. -1. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2;m;n)$ khi và chỉ khi $\frac{2}{1}=\frac{m+2}{-1}=\frac{n-1}{3}$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{m+2}{-1}=\frac{n-1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}m+2=-2\\n-1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-4\\n=7\end{cases}.$$

Suy ra $m+n=3$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy)?

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+3t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-3t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+3t\\z=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ qua $M(1;-2;3)$ và $N(3;1;4)$.

Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu của M và N trên (Oxy) ta có $M'(1;-2;0)$, $N'(3;1;0)$.

Phương trình hình chiếu cần tìm là: $M'N':\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+3t\\z=0\end{cases}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oyz)?

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-2-3t \\ z=-3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=0 \\ y=2-3t \\ z=-3+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=2+3t \\ z=-3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=0 \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ qua $M(1;-2;3)$ và $N(3;1;4)$.

Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu của M và N trên (Oyz) ta có $M'(0;-2;3)$, $N'(0;1;4)$.

Phương trình hình chiếu cần tìm là: $M'N': \begin{cases} x=0 \\ y=-2+3t \\ z=3+t \end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi $A=d\cap(P)$

$A\in d \Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A\in(P) \Rightarrow a=-3 \Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

$BH:\begin{cases}x=12+3t\\y=9+5t\\z=1-t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H\left(12+3t;9+5t;1-t\right)$

$H\in\left(P\right)\Rightarrow t=-\dfrac{78}{35}\Rightarrow H\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A\left(0;0;-2\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}}=\left(62;-25;61\right)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Cách 2:

Gọi $\left(Q\right)$ qua d và vuông góc với $\left(P\right)$

d đi qua điểm $B\left(12;9;1\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\left(4;3;1\right)$

$\left(P\right)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\left(3;5;-1\right)$

$\left(Q\right)$ qua $B\left(12;9;1\right)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_P}\right]=\left(-8;7;11\right)$

$\left(Q\right):8x-7y-11z-22=0$

d' là giao tuyến của $\left(Q\right)$ và $\left(P\right)$

Tìm một điểm thuộc d', bằng cách cho $y=0$

Ta có hệ $\begin{cases}3x-z=2\\8x-11z=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}\Rightarrow M\left(0;0;-2\right)\in d'$

d' đi qua điểm $M\left(0;0;-2\right)$và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=\left(62;-25;61\right)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên $\left(P\right)$ có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$

B. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$

D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$

Lời giải

Chọn C

Gọi M là giao điểm của d với (P).

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y=1 \\ x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1;1)$

Lấy điểm $N(0;-1;2) \in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P).

Tọa độ của N' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=1 \\ x-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

$N'\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

$\overrightarrow{MN'}=\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\vec{u}(1;4;-5)$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=(1;4;-5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

A. $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(2;-1;4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P): x+3=0$.

Suy ra mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có VTPT là $[\vec{n}_P;\vec{u}_d]=(0;4;1)$

$\Rightarrow (Q): 4y+z+17=0$.

Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

$\begin{cases} 4y+z+17=0 \\ x+3=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$

Cách 2: Ta có $M \in d \Rightarrow M(1+2t;-5-t;3+4t)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên $(P): x+3=0$. Suy ra $M'(-3;-5-t;3+4t)$. Suy ra $d': \begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=3+4t \end{cases}$

So sánh với các phương án, ta chọn D là đáp án đúng.

Câu 6. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$

B. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{1}$

Lời giải

Chọn C

Gọi M là giao điểm của d với (P).

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y=1 \\ x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(1;1;1)$

Lấy điểm $N(0;-1;2) \in d$.

Một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ làm vec tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$

Gọi N' là giao điểm của Δ với (P).

Tọa độ của N' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=1 \\ x-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=\frac{8}{3} \end{cases}$

$N'\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$

$\overrightarrow{MN'}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}\vec{u}(1;4;-5)$

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=(1;4;-5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương trinh $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

A. $d':\frac{x+2}{7}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{2}$.

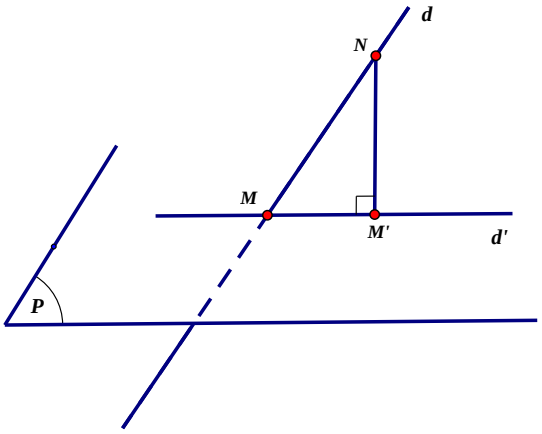
B. $d':\frac{x-2}{7}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{2}$.

C. $d':\frac{x+2}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}$.

D. $d':\frac{x-2}{7}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



+) Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=4-2t\\z=-1+t\end{cases}$, $t\in R$. Gọi $M=(-2+2t;4-2t;-1+t)$ là giao điểm của d và $(P)\Rightarrow(-2+2t)+(4-2t)-(-1+t)-1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M=(2;0;1)$.

+) Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$. Điểm $N=(0;2;0)\in d$.

Gọi Δ là đường thẳng qua $N(0;2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow\Delta$ nhận vectơ $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Suy ra phương trình của Δ là:

$(\Delta):\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{-1}\Leftrightarrow(\Delta):\begin{cases}x=c\\y=2+c\\z=-c\end{cases}$, $c\in\mathbb{R}$. Gọi $M'=(c;2+c;-c)$ là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P)\Rightarrow c+(2+c)-(-c)-1=0\Leftrightarrow c=-\frac{1}{3}\Rightarrow M'\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$.

+) $\overrightarrow{MM'}=\left(-\frac{7}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$, đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) nên d' chính là đường thẳng MM', suy ra d' đi qua $M(2;0;1)$ và nhận vectơ $\vec{u}=-3\overrightarrow{MM'}=(7;-5;2)$ làm vector chỉ phương nên phương trình của d' là:

$$d' : \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

Mức độ 4

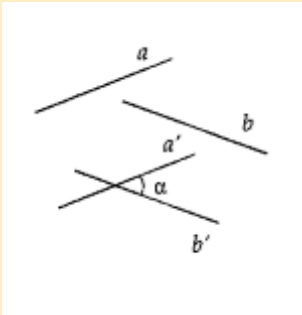
DẠNG TOÁN 26: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

PHẦN I

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Góc giữa hai đường thẳng

✪ Định nghĩa :



• Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b là góc nhỏ nhất trong bốn góc mà a và b cắt nhau tạo nên.

• Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

• **Chú ý :** góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn hoặc vuông.

✪ Phương pháp :

Phương pháp 1:

• Tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

Chú ý: Điểm O có thể nằm trên đường thẳng a hoặc b.

Phương pháp 2:

• Tính góc giữa hai vectơ chỉ phương, từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng.

Chú ý: Nếu $\vec{u},\vec{v}$ lần lượt là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a,b:

- Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)\le 90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng góc $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

- Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)>90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^0-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

✪ Một số công thức cần nhớ :

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian chúng ta cần nhớ các công thức sau:

• Định lý hàm số cosin trong tam giác $\Delta ABC: cos BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos BAC = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

• Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ dựa vào công thức $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} \Rightarrow \cos\left(AB;CD\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

✪ **Định nghĩa :**

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

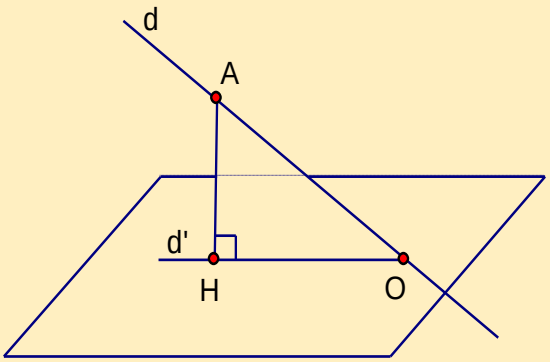
• Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90^0.

• Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

• **<u>Chú ý:</u>** - Nếu φ là góc giữa d và (α) thì ta luôn có $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

Nếu đường thẳng d nằm trên (α) hoặc

✪ **Phương pháp :**



• Xác định giao điểm O của d và (α).

• Lấy một điểm A tùy ý trên d khác với O.

Xác định hình chiếu H của A lên mp (α).

• φ là góc giữa d và (α) thì $\varphi = AOH$.

3. Góc giữa hai mặt phẳng.

✪ **Định nghĩa :**

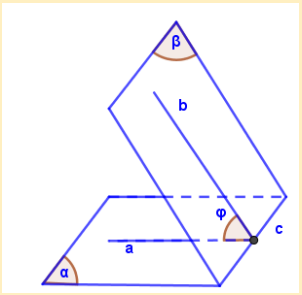
• Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

• Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

✪ **Phương pháp :**

Phương pháp 1: Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\big((\alpha),(\beta)\big)=\big(a,b\big)$. Tính góc $\big(a,b\big)$.

Phương pháp 2:

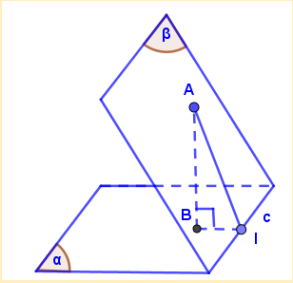


• Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).

• Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\big((\alpha),(\beta)\big)=\big(a,b\big)$.

• Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a$, $(\beta)\cap(\gamma)=b$. Suy ra $\big((\alpha),(\beta)\big)=\big(a,b\big)$.

Phương pháp 3: (trường hợp đặc biệt)



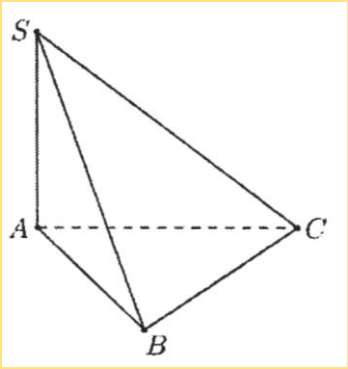
• Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $\big(A\in(\alpha),B\in(\beta)\big)$ mà $AB\perp(\alpha)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại I. Khi đó $\big((\alpha),(\beta)\big)=AIB$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Góc giữa hai mặt phẳng.
- Góc giữa hai đường thẳng.
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=\sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B va $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định giao điểm giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là B.

B2: Xác định hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là A.

B3: Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là SBA. Tính SBA.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} SB\cap(ABC)=B \\ SA\perp(ABC) \end{cases} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (SB,(ABC))=(SB,AB)=SBA.$

Do tam giác ABC vuông cân tại B

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 2AB^2$

$\Leftrightarrow (2a)^2 = 2AB^2$

$\Leftrightarrow AB = a\sqrt{2}$

Xét tam giác SAB vuông tại A có $SA = AB = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow SBA = 45^o$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

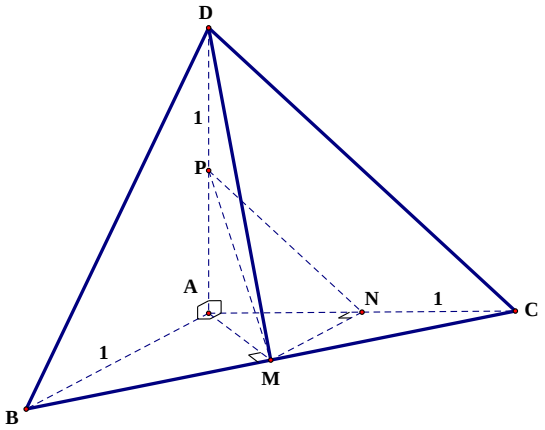
A. 45°. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.

CÁCH 2.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

Trong ΔABC, có $\begin{cases} MN // AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔACD, có $\begin{cases} NP // CD \\ NP = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔAMP, có $MP=\sqrt{AP^2+AM^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ NP \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (AB;CD)=(MN;NP)=MNP$

Áp dụng định lý Cosin cho ΔMNP, có

$$\cos MNP=\frac{NP^2+NM^2-MP^2}{2NP.NM}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow MNP=90^\circ$$

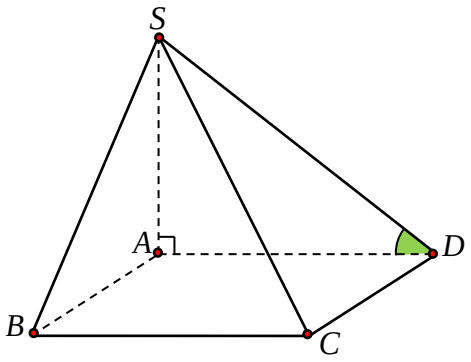
Hay $(AB;CD)=90^\circ$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=2a$, $SA=3a$ và SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. SAD. **B.** ASD. **C.** SDA. **D.** BSD.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SA\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow AD$ là hình chiếu vuông góc của SD xuống mặt $(ABCD)$.

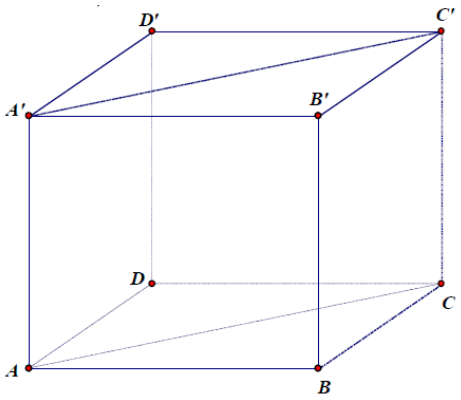
$\Rightarrow \left(SD,(ABCD)\right)=(SD,AD)=SDA$.

Câu 3. **(THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018)** Cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ACC'A')$.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



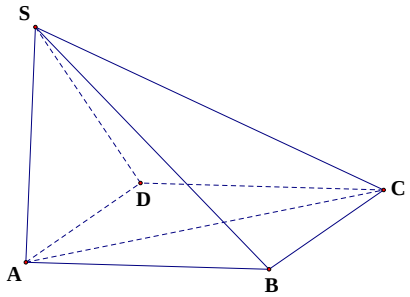
Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



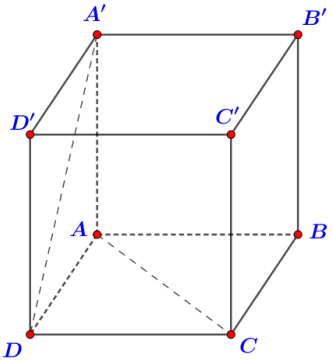
Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC.

Do đó góc giữa SC và đáy là góc SCA.

Tam giác SAC có $SC = SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân.

$\Rightarrow SCA = 45°$.

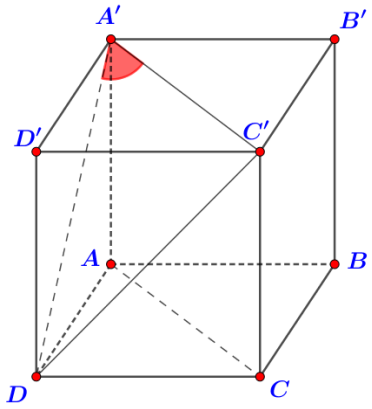
Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AC \,//\, A'C'$ nên $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = DA'C' = 60°$.

Tam giác $A'DC$ có: $A'D = A'C' = C'D \Rightarrow \Delta ABC$ đều

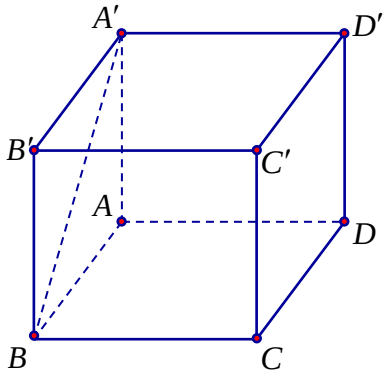
$\Rightarrow DA'C' = 60°$.

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



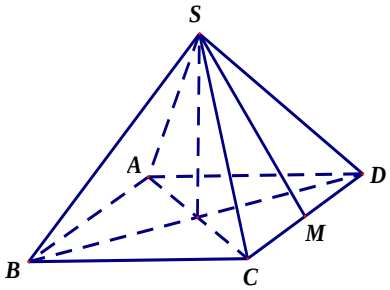
Có $CD // AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = ABA' = 45°$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $\arctan 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB//CD$ nên $\left(AB;SC\right)=\left(CD;SC\right)=SCD$.

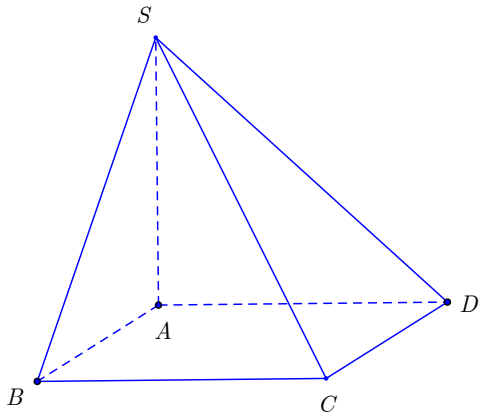
Gọi M là trung điểm của CD. Tam giác SCM vuông tại M và có $SC=a\sqrt{2}$, $CM=a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $SCD=45°$. Vậy $\left(AB;SC\right)=45°$.

Câu 8. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA\perp\left(ABCD\right)$. Góc giữa đường SC và mặt phẳng $\left(SAD\right)$ là góc?

A. CSA. **B.** CSD. **C.** CDS. **D.** SCD.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SAD\right)$. Do đó góc giữa SC và $\left(SAD\right)$ bằng góc giữa SC và SD.

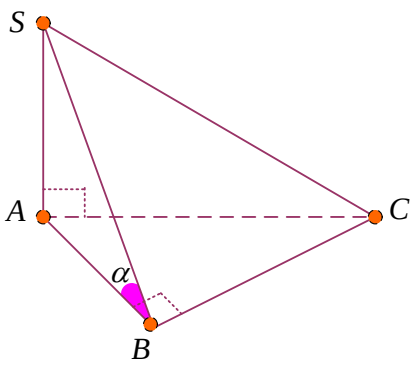
Do góc $CSD<90°$ nên chọn **B.**

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp\left(ABC\right)$, $SA=\sqrt{3}$ cm, $AB=1$ cm, $BC=\sqrt{2}$ cm. Mặt bên $\left(SBC\right)$ hợp với đáy một góc bằng:

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết vì $SA\perp\left(ABC\right)$ nên $SA\perp AB$, $SA\perp BC$. Mặt khác $BC\perp AB$ nên $BC\perp SB$.

Vậy góc giữa $\left(SBC\right)$ và đáy là góc $SBA=\alpha$.

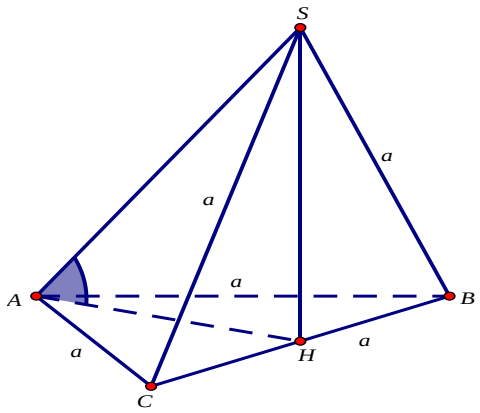
Trong tam giác vuông SAB ta có: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là SAH.

Mặt khác, $\Delta ABC = \Delta SBC \Rightarrow SH = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H hay $SAH = 45°$.

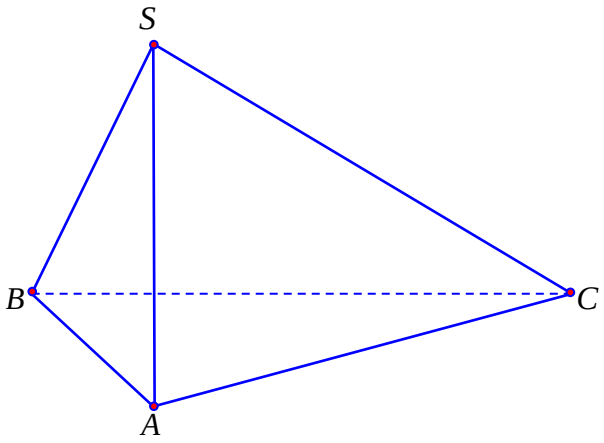
Mức độ 2

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $30°$. **B.** $150°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

Ta có : $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \left((SAB),(SAC)\right) = \left(AB, AC\right) = BAC$.(hoặc góc bù với nó)

Xét ΔABC có $\cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120°$.

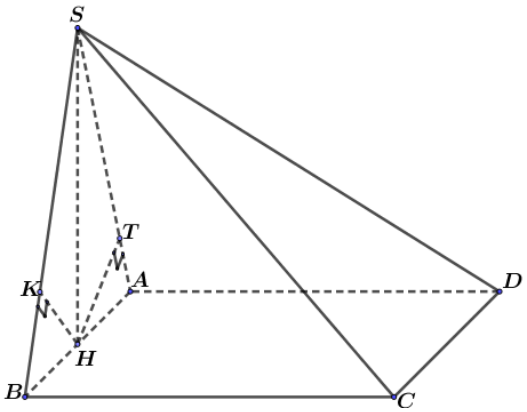
Vậy $\left((SAB),(SAC)\right) = 60°$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $ASB = 120°$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, theo đề ra ta được $SH \perp (ABCD)$.

Dựng T, K lần lượt là hình chiếu của H lên SA, $SB \Rightarrow HT \perp (SAD)$ và $HK \perp (SBC)$.

Vậy $\left((SAD);\ (SBC)\right) = \left(HT;\ HK\right)$.

Xét tứ giác $SKHT$ có hai góc vuông đối diện nhau nên $SKHT$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow KHT = 60°$ do $ASB = 120°$.

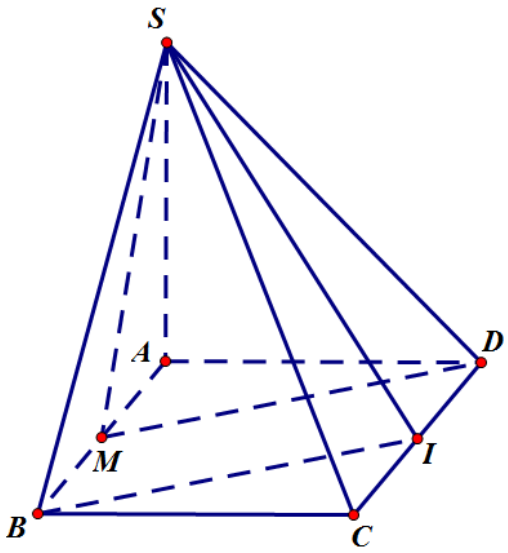
Vậy $\left((SAD);\ (SBC)\right) = \left(HT;\ HK\right) = KHT = 60°$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $45°$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Góc giữa hai đường thẳng BI và SD bằng *(Số đo góc được làm tròn đến hàng đơn vị).*

A. $39°$. **B.** $42°$. **C.** $51°$. **D.** $48°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp SA \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB) \Rightarrow A$ là hình chiếu của D lên $(SAB) \Rightarrow DSA = 45^{\circ}$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow DM \,//\, BI$

Góc giữa BI và SD bằng góc giữa DM và SD và bằng SDM

Đặt $AB = a \Rightarrow SA = a$ (Vì ΔSAD vuông cân tại A)

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$,

$SM = \sqrt{SA^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,

$MD = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

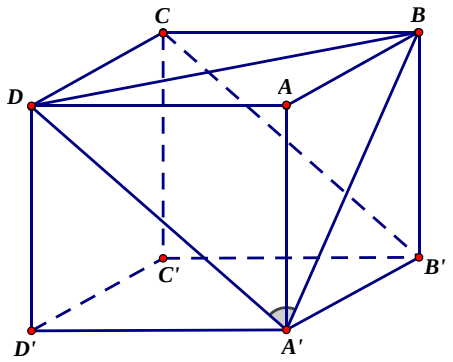
$\cos SDM = \frac{SD^2 + MD^2 - SM^2}{2SD.MD} = \frac{2a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow SDM \approx 51°$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \,//\, A'D \Rightarrow (A'B;B'C) = (A'B;A'D) = DA'B$.

Xét $\Delta DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

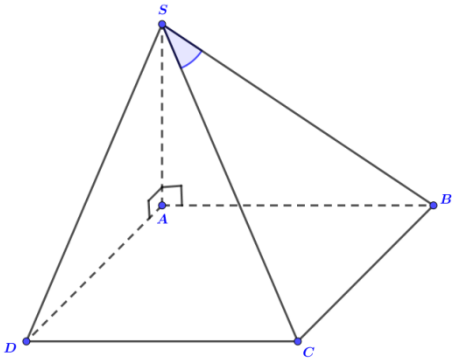
Vậy $DA'B = 60°$.

Câu 5. hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa SC và (SAB).

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB)

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = CSB$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

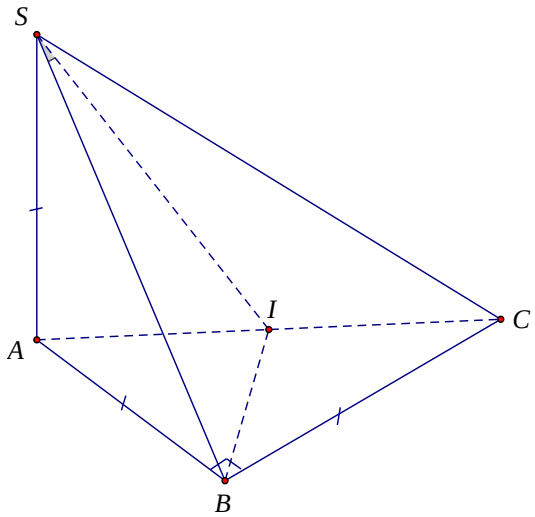
Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan CSB = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CSB = 30°$.

Câu 6. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $arc\cos\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \perp AC$ (vì ΔABC vuông cân tại A). (1)

Mặt khác: $SA \perp BI$ (vì $SA \perp (ABC)$) (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BI \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB lên (SAC).

$\Rightarrow (SB,(SAC)) = (SB,SI) = BSI$ .Xét ΔBSI vuông tại I, ta có: $\sin BSI = \frac{BI}{SB} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

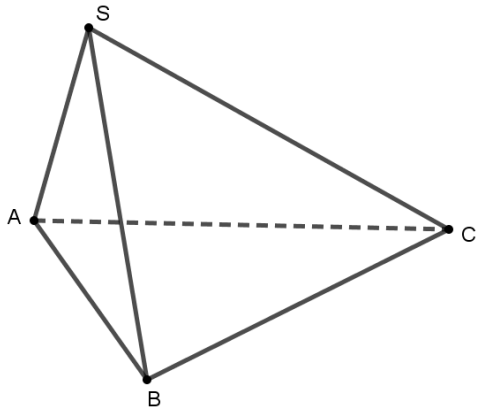
$\Rightarrow BSI = 30°$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$, $ASB = BSC = 60°$, $CSA = 90°$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}\right|}{SA.BC} = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB})\right|}{SA.BC} = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}\right|}{SA.BC}$$

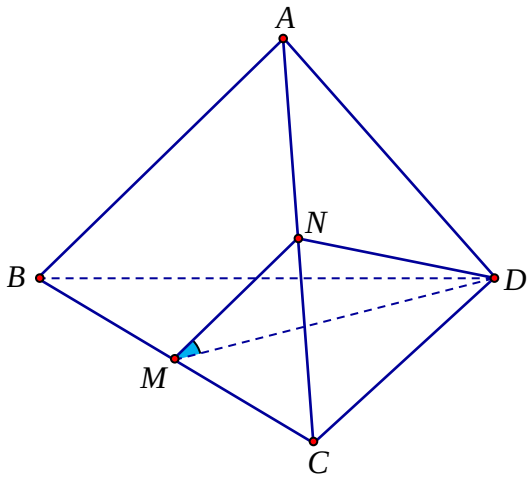
$$= \frac{\left|SA.SC.\cos 90^\circ - SA.SB.\cos 60^\circ\right|}{a.\sqrt{4a^2+9a^2-2.2a.3a.\cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB,DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN // AB \Rightarrow (AB,DM) = (MN,DM) = DMN$.

Tam giác DMN có $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $\cos DMN = \frac{DM^2+MN^2-DN^2}{2.DM.MN}$.

$$\Leftrightarrow \cos DMN = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

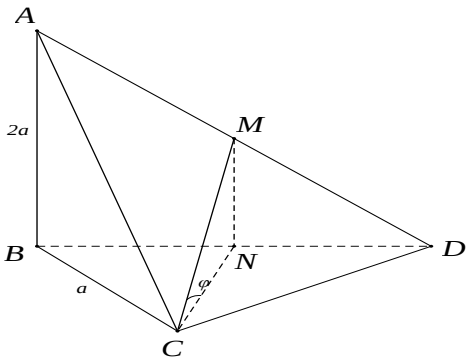
Vậy $\cos(AB,DM)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, AB vuông góc với $mp(BCD)$, $AB=2a$. M là trung điểm đoạn AD, gọi φ là góc giữa CM với $mp(BCD)$. khi đó:

A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm BC. Ta có góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc MCN.

$+\ MN=\dfrac{AB}{2}=a$.

$+CN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

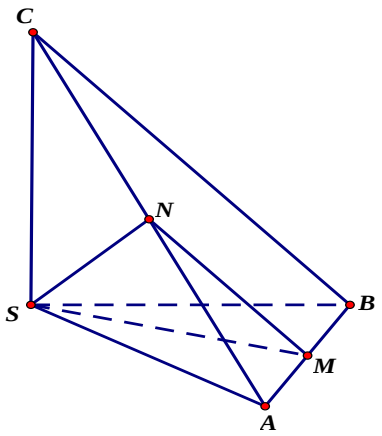
Vậy $\tan\varphi=\dfrac{MN}{CN}=a.\dfrac{2}{a\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN.

Ta có: $AB=BC=CA$ suy ra:

$SM=\frac{1}{2}AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$SN=\frac{1}{2}AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

$MN=\frac{1}{2}BC$.

Suy ra $SM=MN=SN$ hay tam giác SMN đều. Do đó $\left(SM;BC\right)=SMN=60°$.

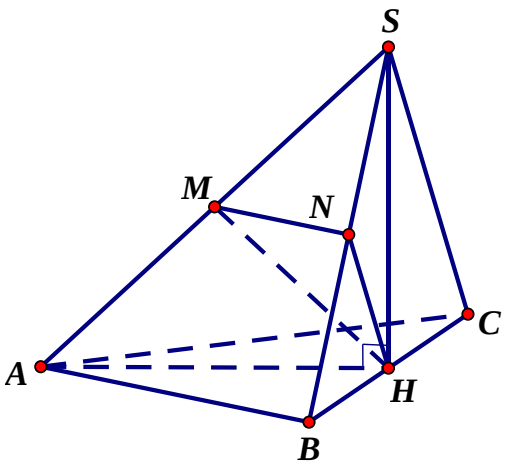
Mức độ 3

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



* Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo đầu bài $SA=SB=SC$ và tam giác ΔABC vuông cân tại A ta có H là trung điểm của BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB ta có: $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ HN \,//\, SC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa AB và SC là góc giữa MN và HN.

Xét tam giác ΔMNH ta có: $MN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$; $HN=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{a}{2}$; $MH=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a}{2}$ (Do ΔSHA vuông tại H)

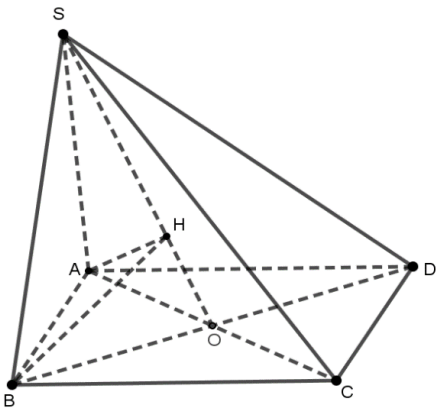
$\Rightarrow$ tam giác ΔMNH là tam giác đều $\Rightarrow MNH=60^\circ$. Vậy góc cần tìm là 60°.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Kẻ $AH\perp SO$ tại H.

Ta có: $BD\perp AO$, $BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAO)\Rightarrow BD\perp AH$. Vậy $AH\perp(SBD)$.

Lại có: $AB\perp(SAD)$, do đó góc α giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AB. Vậy $\alpha=BAH$.

Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ nên ta có: $\dfrac{1}{3}SA.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow SA=a\sqrt{2}$.

Tam giác SAO vuông tại A, đường cao AH nên: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{4}{2a^2}=\dfrac{5}{2a^2}$

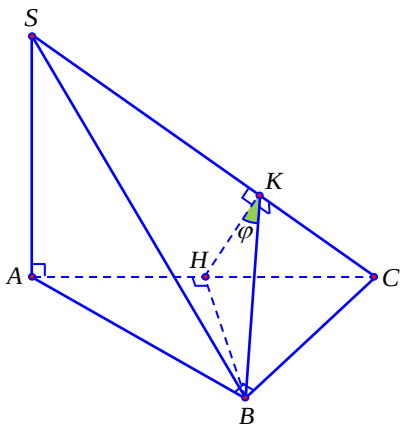
Suy ra: $AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. Từ đó: $\cos\alpha=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC)\perp(ABC)$ (vì $SA\perp(ABC)$) và $BH\perp AC\Rightarrow BH\perp(SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK\perp SC$ thì $SC\perp(BHK)\Rightarrow SC\perp BK$.

$\Rightarrow\big((SAC),(SBC)\big)=SKH=\varphi$.

Mặt khác Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ và $BH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK=\dfrac{HC.SA}{SC}\Leftrightarrow HK=\dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi=\dfrac{BH}{BK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60°$.

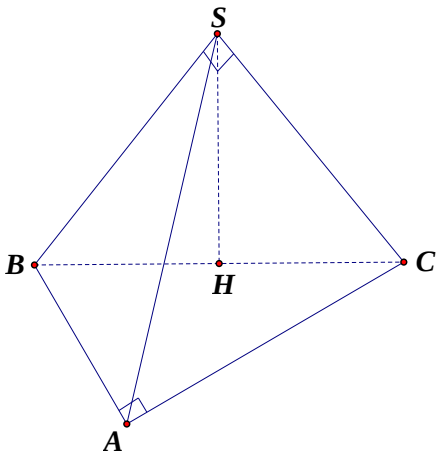
Vậy $\big((SAC),(SBC)\big)=60°$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, SC.

A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông tại A và tam giác SBC vuông tại S vì $AB=AC=1,\ BC=\sqrt{2}$ và $SB=SC=1,\ BC=\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}=0-SC.SB.\cos 60^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

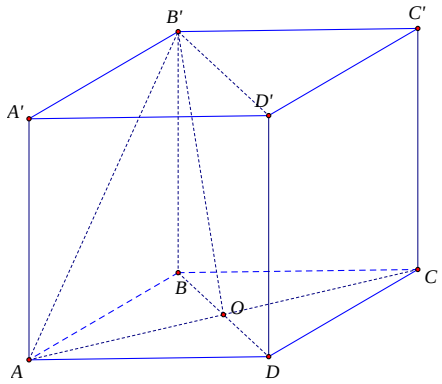
Suy ra $\cos\left(SC;AB\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{AB}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}\right|}{SC.AB}=\dfrac{1}{2}$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB, SC bằng 60°.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình bên). Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $\left(BDD'B'\right)$.

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO\perp BD$ (1).

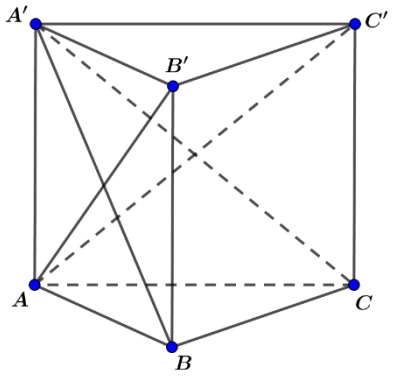
Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB'\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow BB'\perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO\perp\left(BDD'B'\right)\Rightarrow\left(AB',\left(ABCD\right)\right)=\left(AB',B'O\right)=AB'O$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin AB'O=\dfrac{AO}{AB'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AB'O=30^\circ$.

Vậy $\left(AB',\left(ABCD\right)\right)=30^\circ$.

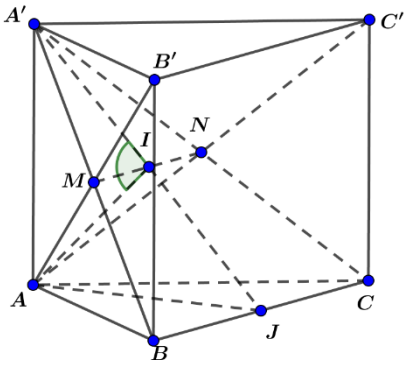
Câu 6. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$.



A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.

Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

Kẻ $A'I \perp MN$ $(I \in MN)$ mà $AA' \perp BC$, $BC // MN \Rightarrow AA' \perp MN$. Vậy $AI \perp MN$.

Khi đó $((AB'C'),(A'BC)) = (AI, A'I) = \alpha$.

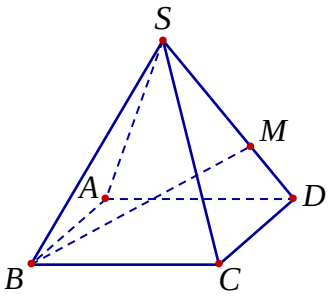
Gọi J là trung điểm BC.

$$AJ = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ A'J = \sqrt{AA'^2 + AJ^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}A'J = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có:

$$\cos A'IA = \frac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2.AI.A'I} = \frac{-1}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \cos(AI, A'I) = \cos\left(180^\circ - A'IA\right) = \frac{1}{7}.$$

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$.

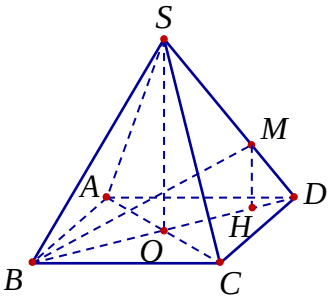


Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MH \perp BD$ tại H nên $(BM;(ABCD)) = MBH$

Do $MH \perp BD \Rightarrow MH \,//\, SO$. Ta có $\frac{MH}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{HD}{OD} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow MH = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ và $HD = \frac{1}{3}OD = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow BH = BD - HD = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Xét tam giác BHM vuông tại H có:

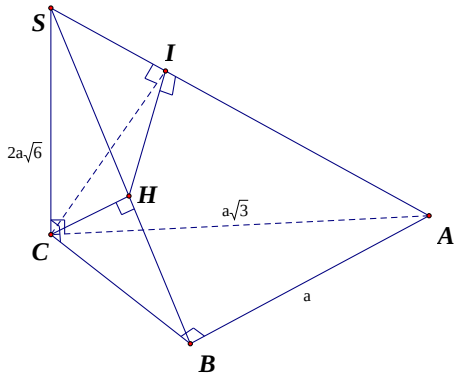
$\tan(BM;(ABCD)) = MBH = \frac{MH}{BH} \Rightarrow \tan(BM;(ABCD)) = \frac{1}{5}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a\sqrt{6}$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) bằng

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAC) từ C kẻ $CI \perp SA,\ I \in SA$. Trong mặt phẳng (SAB) từ I kẻ $IH \perp SA$ cắt SB tại H.

Ta có: $AB \perp SC,\ AB \perp BC \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp CH$ mà $CH \perp SB \Rightarrow CH \perp (SAB)$

$\Rightarrow CH \perp SA$ mà $CI \perp SA \Rightarrow SA \perp (CIH)$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),\ (SAC)$ là CIH. Vì $CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp IH$ hay tam giác CHI vuông tại H.

Xét tam giác vuông SAC có: $CI = \dfrac{SC.CA}{\sqrt{SC^2 + CA^2}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác vuông SBC có: $CH = \dfrac{SC.CB}{\sqrt{SC^2 + CB^2}} = \dfrac{SC.\sqrt{CA^2 - AB^2}}{\sqrt{SC^2 + CA^2 - AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{78}}{13}$.

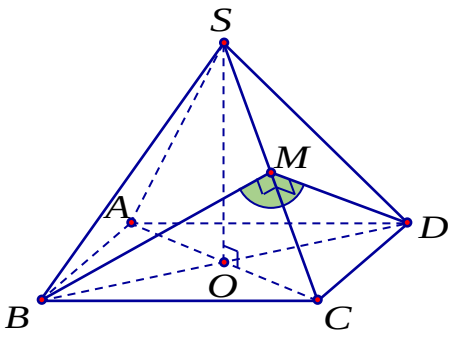
Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),\ (SAC)$ là CIH nên $\sin CIH = \dfrac{CH}{CI} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC = SB = a, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.

Ta có $\Delta SBO = \Delta CBO$ suy ra $SO = CO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $BMO = 45°$, suy ra $BMD = 90°$.

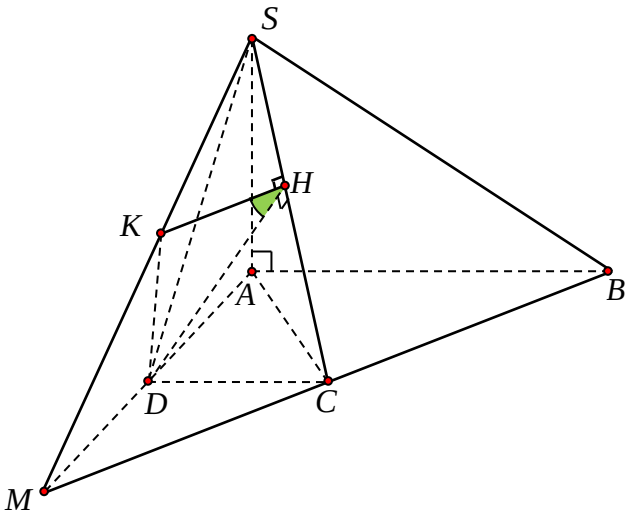
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $90°$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $M = BC \cap AD$. Khi đó: $\left((SBC),(SCD)\right) = \left((SCM),(SCD)\right)$

Gọi H là hình chiếu của D lên SC, kẻ $HK // MC$ $(K \in SM)$ ta có:

$\left((SCM),(SCD)\right) = KHD = \alpha$

Xét ΔSCD vuông tại D ta có: $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{DS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$HC = \dfrac{DC^2}{SC} = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}$.

Do $HK // MC$ mà $\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{3}{4}$ nên $HK = \dfrac{3}{4}a\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$; $KM = \dfrac{1}{4}SM = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Mặt khác ta có: $KDM = DSA$ mà $\sin KMD = \sin DSA = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $KDM = KMD$.

Do đó: $KD = KM = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét tam giác KDH ta có: $\cos\alpha = \dfrac{HD^2 + HK^2 - KD^2}{2HK.HD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

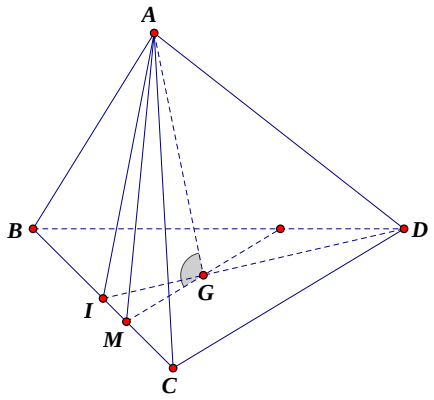
Mức độ 4

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $BAC = 60°$; $BAD = 90°$; $DAC = 120°$. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD, trong đó G là trọng tâm tam giác BCD.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



* ΔABC đều $\Rightarrow BC = 1$.

* ΔACD cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos 120°} = \sqrt{3}$.

* ΔABD vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.

* ΔBCD có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD, cắt BC tại M.

Ta có $MG // CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC, xét ΔBDI vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC}=\frac{MG}{CD}=\frac{IG}{ID}=\frac{1}{3}\Rightarrow IM=\frac{1}{3}.IC=\frac{1}{3}.\frac{BC}{2}=\frac{1}{6}$; $MG=\frac{1}{3}.CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG=\frac{1}{3}.ID=\frac{1}{2}$.

Xét ΔAIM vuông tại I có $AM=\sqrt{AI^2+IM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

$$\cos AID=\frac{AI^2+ID^2-AD^2}{2AI.ID}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$AG=\sqrt{AI^2+IG^2-2AI.IG.\cos AID}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét ΔAMG có

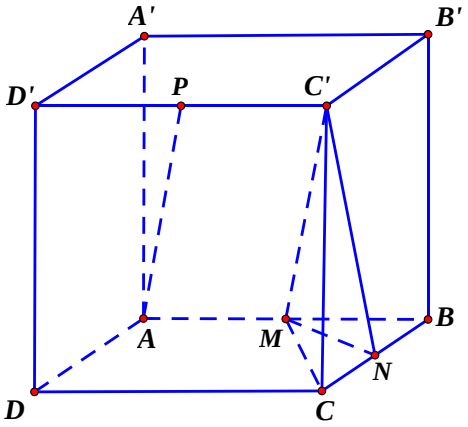
$$\cos\left(AG,MG\right)=\left|\cos AGM\right|=\left|\frac{AG^2+GM^2-AM^2}{2.AG.GM}\right|=\left|\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. $60°$. **B.** $90°$ **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên $AP//MC'\Rightarrow\left(MN,AP\right)=\left(MN,MC'\right)=NMC'$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a.

Xét tam giác $C'CM$ vuông tại C có $C'M=\sqrt{C'C^2+MC^2}=\sqrt{C'C^2+BC^2+MB^2}=\frac{3a}{2}$.

Xét tam giác $C'CN$ vuông tại C có $C'N=\sqrt{C'C^2+CN^2}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Mà $MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác $C'CM$ có $\cos NMC'=\dfrac{MC'^2+MN^2-C'N^2}{2MC'.MN}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

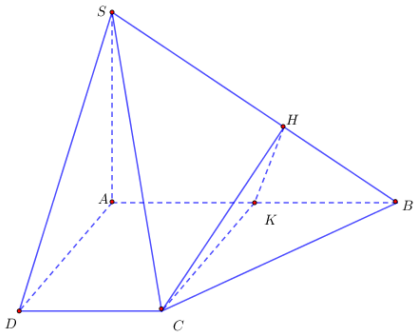
$\Rightarrow NMC'=45^\circ\Rightarrow\left(MN,AP\right)=45^\circ$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Cho biết $AB=2AD=2DC=2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBA\right)$ và $\left(SBC\right)$.

A. $\arccos\left(\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm của AB và H là hình chiếu của C lên SB.

Ta có $\begin{cases}CK\perp AB\\CK\perp SA\end{cases}\Rightarrow CK\perp SB$. Do đó $\begin{cases}SB\perp CH\\SB\perp CK\end{cases}\Rightarrow HK\perp SB$.

Ta có $\begin{cases}\left(SAB\right)\cap\left(SBC\right)=SB\\CH\perp SB\\HK\perp SB\end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBA\right)$ và $\left(SBC\right)$ là góc CHK.

Ta có $\begin{cases}AC=a\sqrt{2}\\BC=a\sqrt{2}\\KB=a\end{cases}$ suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Ta có $\begin{cases}CB\perp AC\\CB\perp SA\end{cases}\Rightarrow CB\perp SC$ nên $\dfrac{1}{CH^2}=\dfrac{1}{CB^2}+\dfrac{1}{CS^2}\Rightarrow CH=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Mặt khác $CK=AD=a$.

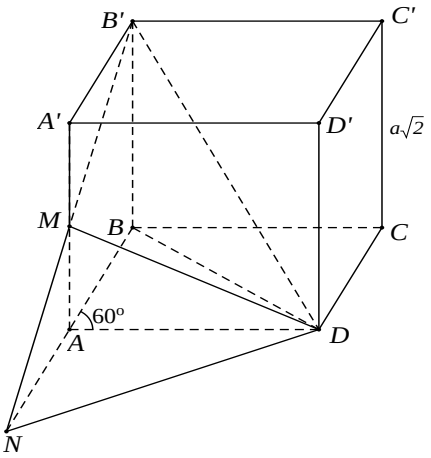
Xét tam giác CHK vuông tại K có $\sin CHK=\dfrac{CK}{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CHK=60^\circ$.

Câu 4. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $BAD = 60°$, $AA' = a\sqrt{2}$. M là trung điểm của AA'. Gọi φ của góc giữa hai mặt phẳng $(B'MD)$ và $(ABCD)$. Khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $N = B'M \cap BA$, khi đó $(B'MD) \cap (ABCD) = DN$.

Vì $ABCD$ là hình thoi có $BAD = 60°$ nên tam giác ABD đều cạnh a.

AM là đường trung bình của tam giác NBB' nên $AN = AB = a$, suy ra ΔADN cân tại A, $DAN = 180° - BAD = 120°$. Do đó $ADN = 30°$. Suy ra $NDB = 60° + 30° = 90°$ hay $BD \perp DN$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có $B'D \perp DN$, do đó góc giữa mặt phẳng $(B'MD)$ và $(ABCD)$ là góc giữa $B'D$ và BD là $B'DB$.

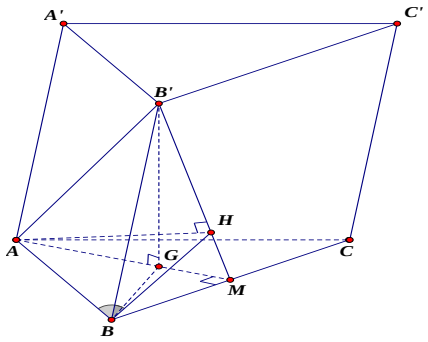
Xét tam giác $B'DB$ vuông tại B, $\cos B'DB = \frac{BD}{B'D} = \frac{BD}{\sqrt{BD^2 + BB'^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Cạnh bên hợp với (ABC) góc $60°$. Sin của góc giữa AB và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{3}{2\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $B'G \perp (ABC)$ nên BG là hình chiếu của BB' lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow (BB',(ABC)) = (BB',BG) = B'BG = 60°$.

Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu của A lên $B'M$, ta có

$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp B'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AB'M) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp B'M$ nên $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó HB là hình chiếu của AB lên mặt phẳng $(BCC'B')$.

$\Rightarrow (AB,(BCC'B')) = (AB,HB) = ABH$.

Xét tam giác ABH vuông tại H có $\sin ABH = \dfrac{AH}{AB}$.

$B'G = BG.\tan 60° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{3}.\sqrt{3} = a$.

$B'M = \sqrt{B'G^2 + GM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Ta có $\Delta AHM \sim \Delta B'GM \Rightarrow AH = \dfrac{AM.B'G}{B'M} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{39}}{6}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

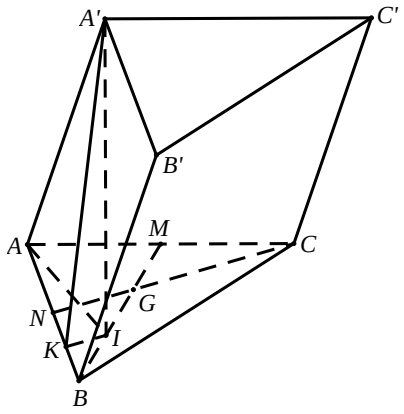
Vậy $\sin ABH = \dfrac{\dfrac{3a}{\sqrt{13}}}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn BG (với G là trọng tâm tam giác ABC). Tính cosin của góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{95}}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{165}}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{134}}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{126}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. Gọi I là trung điểm của BG.

Qua I kẻ đường thẳng song song với CN cắt AB tại K thì $IK \perp AB$ (do $CN \perp AB$) (1).

Vì $A'I \perp (ABC)$ nên $A'I \perp AB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AB \perp (A'KI)$. Do đó $\varphi = A'KI$.

Vì I là trung điểm BG nên suy ra $IK = \frac{1}{2}GN = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}CN = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4\sqrt{3}}$.

Trong tam giác vuông AIM ta có $AI^2 = AM^2 + MI^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}$.

Trong tam giác vuông $A'AI$ ta có $A'I^2 = A'A^2 - AI^2 = (2a)^2 - \frac{7a^2}{12} = \frac{41a^2}{12}$.

Trong tam giác vuông $A'KI$ ta có $A'K^2 = A'I^2 + KI^2 = \frac{41a^2}{12} + \left(\frac{a}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{165a^2}{48}$.

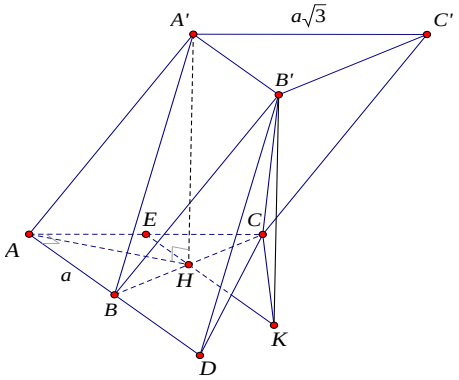
Suy ra $A'K = \frac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}$. Từ đó ta có $\cos\varphi = \frac{KI}{A'K} = \frac{\frac{a}{4\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{165}}{4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{165}}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AC; D và K là các điểm thỏa $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{A'B'}$.

Ta có $B'K\perp(ABC)$ và $B'D//A'B\Rightarrow(A'B,B'C)=(B'D,B'C)=DB'C$.

Ta tính được $BC=2a\Rightarrow BH=a$; $B'D=A'B=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a.$

$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=\sqrt{3a^2+4a^2}=a\sqrt{7}$; $CK=\sqrt{CE^2+EK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}=a\sqrt{3}.$

$B'C=\sqrt{B'K^2+CK^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}.$

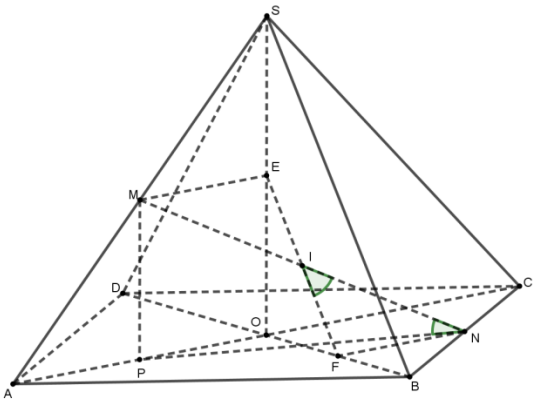
$\cos CB'D=\frac{B'D^2+B'C^2-CD^2}{2.B'D.B'C}=\frac{4a^2+6a^2-7a^2}{2.2a.a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{8}.$

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $MNP=60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP.CN.\cos 45^\circ = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP = NP.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO = 2MP = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\frac{1}{2}OA$).

Gọi I là giao điểm của MN và EF , khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là NIF .

$$\cos NIF = \frac{IK}{IN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{4}{a\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$, cạnh SC vuông góc với đáy và $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Giá trị lượng giác cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $SC \perp (ABCD) \Rightarrow SC \perp BD$.

Từ $\begin{cases} BD \perp SC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Kẻ $CK \perp SO$, từ $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CK$. Như vậy $CK \perp (SBD) \Rightarrow CK \perp SD$.

Kẻ $CH \perp SD$, do $CK \perp SD$ nên suy ra $SD \perp (CHK)$.

Mặt khác $(CHK) \cap (SBD) = HK$ và $(CHK) \cap (SCD) = CK$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng CHK .

Trong tam giác SCD vuông tại C , ta có:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và góc A bằng $60°$ nên $CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SCO vuông tại C, ta có:

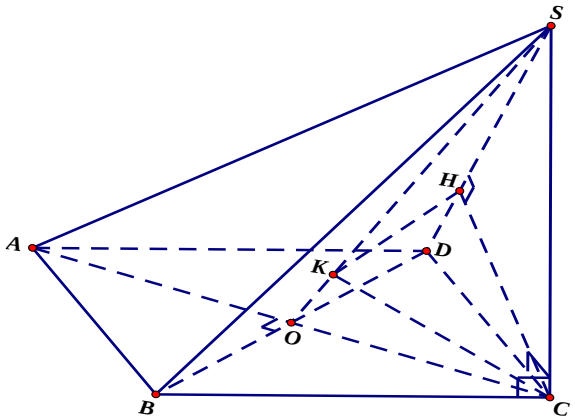
$$\frac{1}{CK^2}=\frac{1}{CO^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow CK=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Xét tam giác CHK vuông tại K, ta có

$$HK=\sqrt{CH^2-CK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{5}-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{10}}.$$

$$\cos CHK=\frac{HK}{CH}=\frac{a}{\sqrt{10}}:\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy, cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

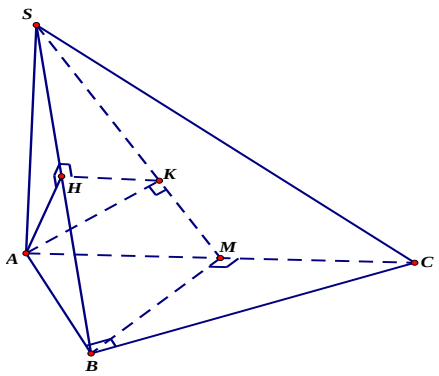


Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côtang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH\perp SB$ và $AK\perp SM$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $BC=a$ cùng với $SA\perp(ABC)$ nên suy ra $BM\perp(SAC)$ và $BM=AM=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $BM\perp AK$.

Từ $BM\perp AK$ và $AK\perp SM$ suy ra $AK\perp(SBM)\Rightarrow AK\perp SB$.

Từ $AH\perp SB$ và $AK\perp SB$ ta có $(AHK)\perp SB$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng hoặc bù với góc AHK.

Ta có:

$$AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$AK=\frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Từ $(AHK)\perp SB$ ta có $HK\perp SB$ nên $\Delta SHK\sim\Delta SMB$, do đó $\dfrac{HK}{MB}=\dfrac{SK}{SB}$.

Mặt khác

$$SK.SM=SA^2\Rightarrow SK=\frac{SA^2}{SM}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{3a\sqrt{14}}{7};$$

$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=2a$;

Nên $\dfrac{HK}{MB}=\dfrac{SK}{SB}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}\Rightarrow HK=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}.MB=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Trong tam giác AHK ta có :

$$\cos AHK=\frac{AH^2+HK^2-AK^2}{2.AH.HK}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{14}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

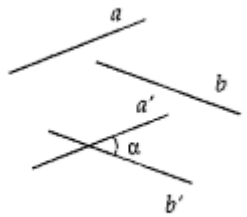
Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) là α với $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Bởi Vậy : $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

DẠNG TOÁN 26: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Góc giữa hai đường thẳng



1. Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b là góc nhỏ nhất trong bốn góc mà a và b cắt nhau tạo nên.

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Chú ý: góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn (hoặc vuông).

2. Phương pháp

Phương pháp 1: Đưa về góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau rồi sử dụng kiến thức hình học phẳng để tính góc đó (hệ thức lượng trong tam giác , định lí sin, định lí cosin…).

Phương pháp 2: Sử dụng tích vô hướng: nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vecto chỉ phương (hoặc vecto pháp tuyến) của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}.$$

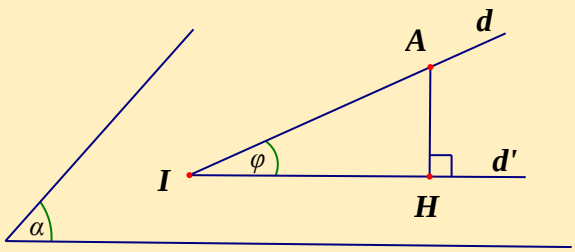
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Định nghĩa: Góc của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là góc tạo bởi d và hình chiếu vuông góc d của lên (α).

Phương pháp tính góc của d và (α):

Trường hợp 1: Nếu $\left[\begin{array}{l} d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(d,(\alpha)\right) = 0^0$

Trường hợp 2: Nếu đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) nhau tại một điểm



- Tìm giao điểm I của d và mặt phẳng (α).
- Chọn A trên d, vẽ $AH \perp (\alpha)$ thì góc của d và mặt phẳng (α) là AIH.
- Dùng tỉ số lượng giác hoặc hệ thức lượng trong tam giác tính được góc này.

3. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Định nghĩa

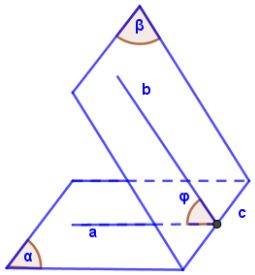
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

2. phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

❖ **Phương pháp 1:** Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\left((\alpha),(\beta)\right) = \left(a,b\right)$. Tính góc $\left(a,b\right)$.

❖ **Phương pháp 2:**

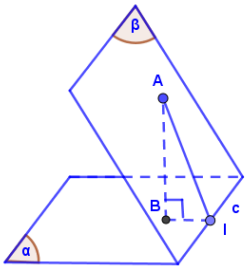


➢ Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).

➢ Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\big((\alpha),(\beta)\big)=(a,b)$.

Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a$, $(\beta)\cap(\gamma)=b$. Suy ra $\big((\alpha),(\beta)\big)=(a,b)$.

❖ **Phương pháp 3:** (trường hợp đặc biệt)



➢ Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $\big(A\in(\alpha),B\in(\beta)\big)$ mà $AB\perp(\beta)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại H. Khi đó $\big((\alpha),(\beta)\big)=AHB$.

4. Sử dụng phương pháp tọa độ hóa trong không gian

a) Giả sử hai đường thẳng a,b có hai vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u},\vec{v}$. Khi đó

$$\cos(a,b)=\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

b) Giả sử đường thẳng a có hai vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và mp(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$. Khi đó

$$\sin\big(a,(P)\big)=\cos(\vec{u},\vec{n})=\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}$$

c) Giả sử hai mp(P) và mp(Q) có lần lượt hai vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1},\vec{n_2}$. Khi đó

$$\cos\big((P),(Q)\big)=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

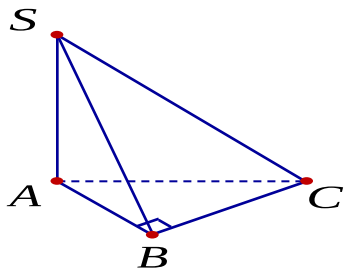
- Xác định và tính góc giữa hai đường thẳng
- Xác định và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- Xác định góc giữa hai mặt phẳng.

• Tổng hợp góc liên quan đến khoảng cách, thể tích, diện tích.

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng .

2. HƯỚNG GIẢI:

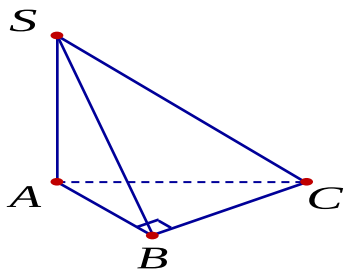
B1: Xác định hình chiếu của SB trên mp(ABC).

B2: Tính góc giữa SB và hình chiếu của nó trên mp(ABC).

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B



Vì SA vuông góc với (ABC) nên góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng góc SBA.

Do tam giác ABC vuông cân ở B nên $AB=CB=a\sqrt{2}$.

Tam giác ABC vuông ở A nên $\tan SBA=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan SBA=1 \Leftrightarrow SBA=45°$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB. **B.** Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB.

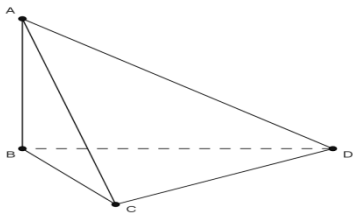
C. Góc giữa AC và (ABD) là góc CBA. **D.** Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$.

Do đó $(AC,(BCD)) = ACB$.



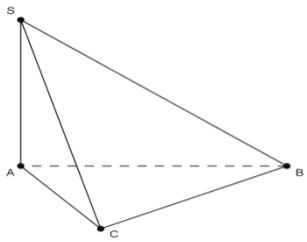
Câu 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SA,(ABC)) = 90°$.



Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là.

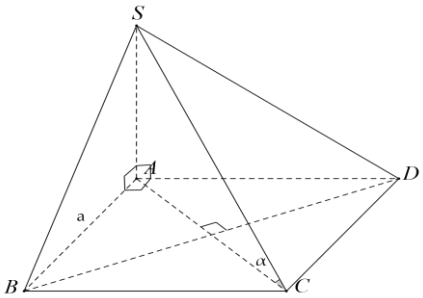
A. SCA. **B.** SBA. **C.** SDA. **D.** ABC.

Lời giải

Chọn A

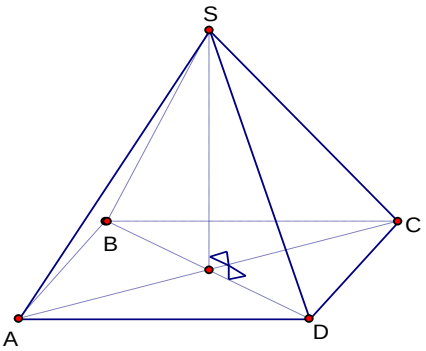
Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

$\Rightarrow (SC;(ABCD)) = SCA$



Câu 4. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là.

A. SCB. **B.** SCD. **C.** SCO. **D.** ACB.



Lời giải

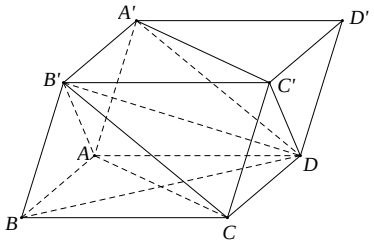
Chọn C

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp OC$ .Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc SCO

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. BDB'. **B.** $AB'C$. **C.** $DB'B$. **D.** $DA'C'$.

Lời giải



Chọn D

Ta có: $AC // A'C'$ (tính chất của hình hộp)

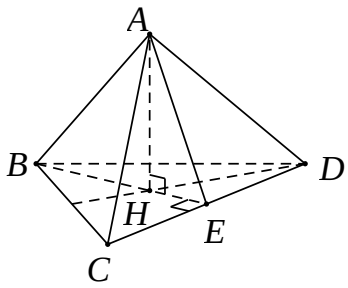
$\Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D) = DA'C'$ (do giả thiết cho $\Delta DA'C'$ nhọn).

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi E là trung điểm $CD \Rightarrow BE \perp CD$ (do ΔBCD đều).

Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

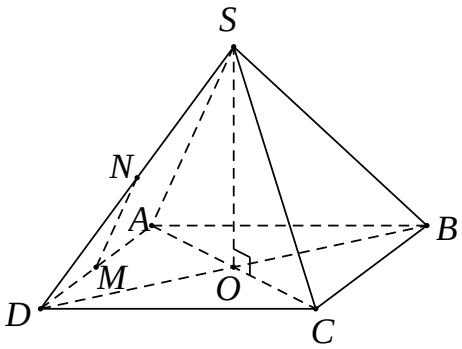
Ta có: $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow (AB, CD) = 90°$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông $ABCD$ (1).

Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$ nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết ta có: $MN // SA$ (do MN là đường trung bình của ΔSAD). $\Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC)$.

Xét ΔSAC, ta có: $\begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SC$.

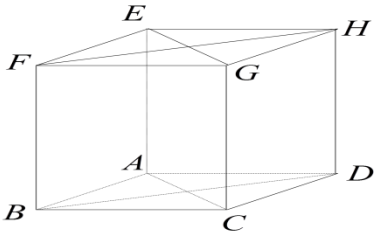
$\Rightarrow (SA, SC) = (MN, SC) = 90°$.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $EG // AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

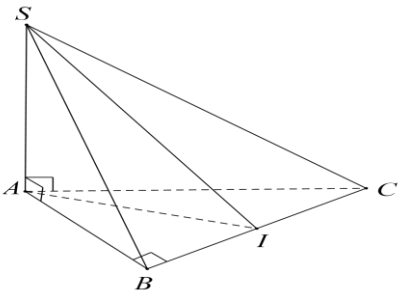
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45°$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. SBA. **B.** SCA. **C.** SCB. **D.** SIA.

Lời giải

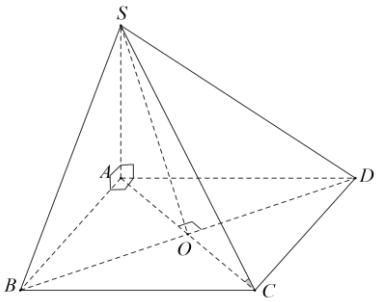
Chọn A



Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$

$$\Rightarrow \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC, AB \subset (ABC) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = SBA.$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc ABS.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc SOA.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc SDA.

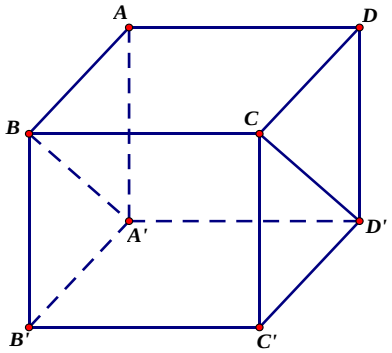
D. $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow ((SAD),(ABCD)) = SAB.$

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'D'CB)$ và $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?



A. $\alpha = 45^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 90^0$.

Lời giải

Chọn A

α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'D'CB)$ và $(ABCD)$ là $\alpha = BA'B'$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{BB'}{A'B'} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

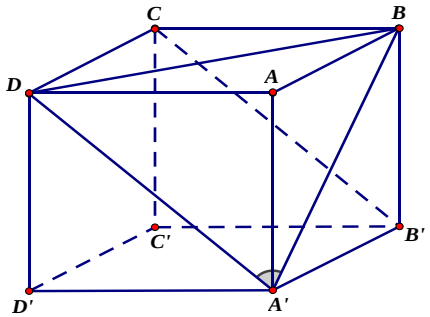
Mức độ 2

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C \,//\, A'D \Rightarrow (A'B;B'C) = (A'B;A'D) = DA'B$.

Xét $\Delta DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

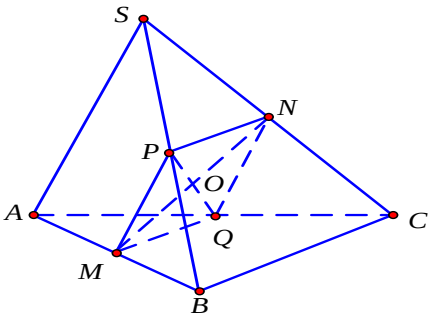
Vậy $DA'B = 60°$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = BC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, và SC, $MN = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $30°$. **B.** $150°$. **C.** $60°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AC. Khi đó MP, NQ, MQ, PN lần lượt là đường trung bình của tam giác SAB, SAC, ABC, SBC nên $MP \,//\, NQ \,//\, SA$; $PN \,//\, \text{MQ} \,//\, \text{BC}$ và $MP = NQ = \frac{1}{2}SA = a$; $PN = MQ = \frac{1}{2}BC = a$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BC là góc PMQ và tứ giác $MPNQ$ là hình thoi.

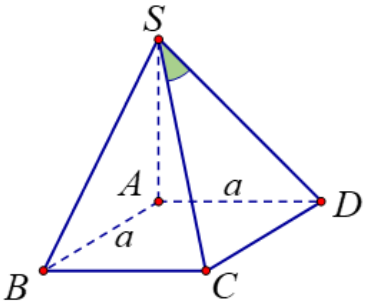
Xét hình thoi $MPNQ$: gọi O giao điểm của hai đường chéo; vì $MN = a\sqrt{3}$ nên $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; trong tam giác vuông MOQ thì $OQ = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Rightarrow PQ = a$, khi đó tam giác PMQ đều hay $PMQ = 60°$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của g**óc giữa đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAD).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $CD \perp (SAD) \Rightarrow SD$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD).

Vậy góc giữa **đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAD) là CSD.

Tam giác CSD có $D = 90°; CD = a; SD = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan CSD = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

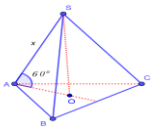
Vậy $CSD = 30°$.

Câu 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $SAO = 60°$.

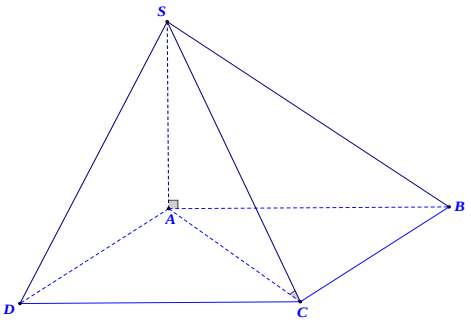
Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC;(ABCD)) = SCA$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

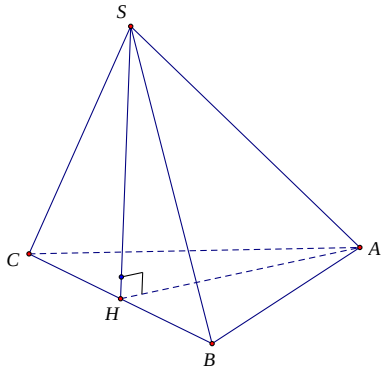
$\Rightarrow \tan SAC = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^0$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt ABC và SBC là các tam giác đều và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Theo gia thiết ta có $(ABC) \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ hay SH là đường cao của hình chóp.

Khi đó ta có $(SA,(ABC)) = (SA,AH) = SAH$.

Mặt khác theo giả thiết tam giác SBC và ABC là tam giác đều nên H là trung điểm của BC và $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông SHA ta có $\tan SAH = \dfrac{SH}{AH} = 1 \Rightarrow SAH = 45°$.

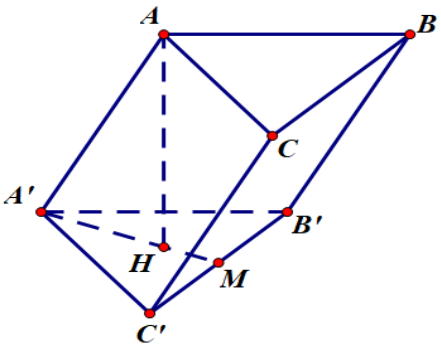
Vậy $(SA,(ABC)) = 45°$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $BB' = a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Cosin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có: $A'H = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AA' = BB' = a\sqrt{6}$.

Ta có $AH \perp (A'B'C')$

$\Rightarrow A'H$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên mặt phẳng $(A'B'C')$.

Vậy $\varphi = \widehat{AA'H}$ là góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$.

Tam giác $\Delta AA'H$ vuông tại $H \Rightarrow \cos\varphi = \frac{A'H}{AA'} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

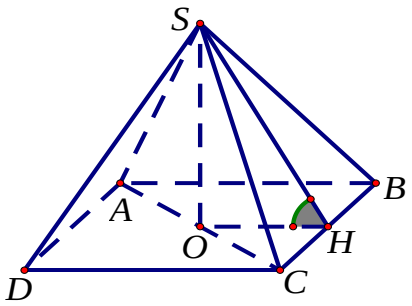
Vậy cosin của góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của AC. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của BC và góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là α.

Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$ mà $BC \perp SH$ và $BC \perp OH$ nên $SHO = \alpha$.

SH là đường cao của tam giác đều SBC cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

Xét tam giác SOH vuông tại O có: $\cos\alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

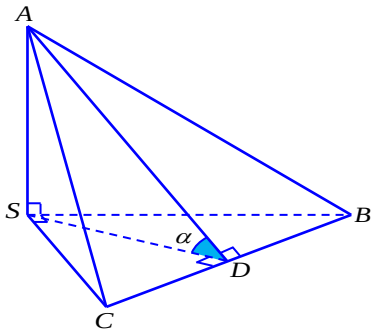
Câu 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB; SC đôi một vuông góc và $SA=SB=SC=1$. Tính $\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)?

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

❍ **Cách 1:**



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

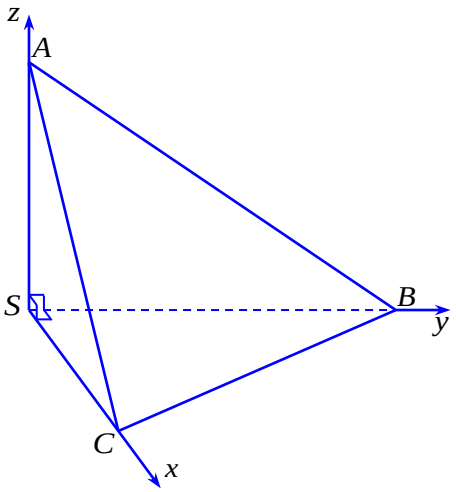
Ta có $\begin{cases}SA\perp SB\\SA\perp SC\end{cases}\Rightarrow SA\perp(SBC)\Rightarrow SA\perp BC$.

Mà $SD\perp BC$ nên $BC\perp(SAD)$.

$\Rightarrow\left((SBC),(ABC)\right)=SDA=\alpha$.

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos\alpha=\dfrac{SD}{AD}\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

❍ **Cách 2:**



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ

Ta có $S(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $(ABC): x+y+z-1=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;1;1)$.

Mặt phẳng $(SBC)\equiv Oxy: z=0$ có VTPT là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

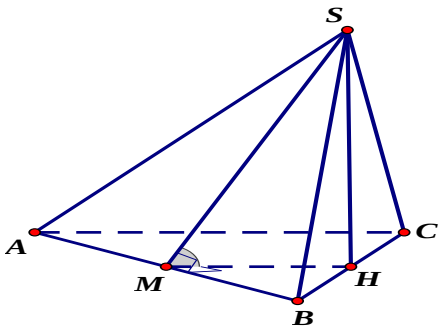
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC=a$, $AC=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ các cạnh bên $SA=SB=SC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA=SB=SC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên hình chiếu của S trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Nhận xét H là trung điểm BC.



Gọi M là trung điểm AB, nhận xét $AB\perp(SMH)$ nên góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) là góc SMH.

Xét tam giác SBH có $SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

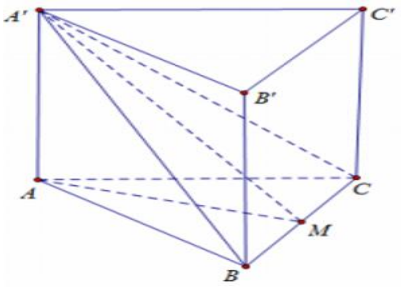
Trong tam giác SMH có $\tan SMH=\dfrac{SH}{MH}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}}=\sqrt{3}\Rightarrow SMH=\dfrac{\pi}{3}$

Câu 11. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC).

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC khi đó $AM \perp BC$

Lại có $AA' \perp BC$ suy ra $(A'MA) \perp BC \Leftrightarrow ((A'B\widehat{C}),(ABC)) = \widehat{A'MA}$

Mặt khác $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ do đó : $cos\,\widehat{A'MA} = \frac{MA}{A'M} = \frac{MA}{\sqrt{AA'^2+AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{3a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Mức độ 3

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E là trung điểm AC.

Vì $AB//ME$ nên góc giữa AB và DM là $\angle EMD$ (hoặc $180^o - \angle EMD$).

Ta có: $ME = \frac{a}{2}$, $MD = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (độ dài trung tuyến tam giác đều cạnh a).

Áp dụng hệ quả định lí cosin cho ΔEMD, ta có:

$$\cos(AB, DM) = \left|\cos(\angle EMD)\right| = \left|\frac{ME^2 + MD^2 - DE^2}{2.ME.MD}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

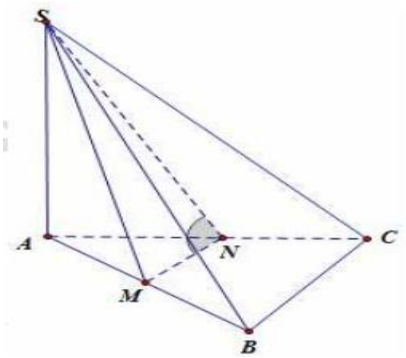
Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 2a$, $BC = 2a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Với N là trung điểm của AC, cosin góc giữa 2 đường thẳng SN và BC là:

A. $\cos(SN, BC) = 1$. **B.** $\cos(SN, BC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\cos\left(SN,BC\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\left(SN,BC\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $MN//BC$

Mặt khác $MN=\dfrac{BC}{2}=a\sqrt{3};AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4a\Rightarrow AN=2a$.

Lại có $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SBA\right)\Rightarrow SBA=\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)=60^\circ$

Do vậy $SA=AB\tan 60^\circ=2a\sqrt{3}$.

Do vậy $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=a\sqrt{13}$

Do $MN//BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow SM\perp MN$

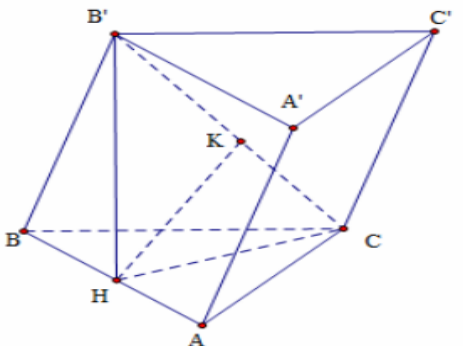
Suy ra $\cos SNM=\dfrac{MN}{SN}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+13a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\cos\left(SN,BC\right)$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và $B'C$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng $B'C$ và AA'. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi=\dfrac{1}{8}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $B'H \perp AB, CH \perp AB \Rightarrow AB \perp (B'HC)$

+) Dựng $HK \perp B'C \Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

+) Mặt khác: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{B'H^2} + \dfrac{1}{HC^2} \Rightarrow B'H = \dfrac{a}{2}$

Do $AA' // BB' \Rightarrow (B'C, AA') = (B'C, BB')$

Ta có: $BB' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}, BC = a, B'C = a$. Khi đó $\cos(\widehat{B'C, AA'}) = \left|\cos\widehat{CB'B}\right|$

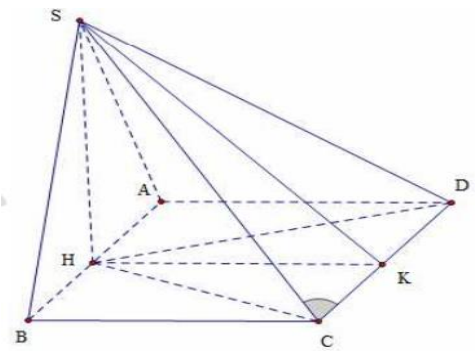
$= \left|\dfrac{B'C^2 + BB'^2 - BC^2}{2B'C.BB'}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$ và $AD = 3a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng SC và AB. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{11}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B



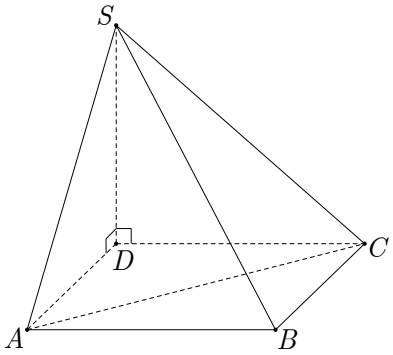
Gọi H là trung điểm của AB khi đó ta có: $SH \perp AB$. Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Ta có: $SH = \dfrac{AB}{2} = a$ (do tam giác SAB vuông tại S)

Do $AB // CD \Rightarrow (SC, AB) = (SC, CD)$

Ta có: $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{SH^2 + HB^2 + HC^2} = a\sqrt{11}; SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = a\sqrt{11}$

Khi đó $\cos SCD = \dfrac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC.CD} = \dfrac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

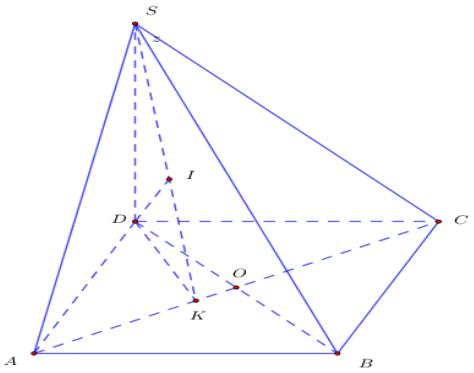
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $ABC = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy . Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\sin\left(SB;(SAC)\right) = \dfrac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB} = \dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}$.

Xét tam giác ABC ta có $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos BAC} = a\sqrt{7}$.

$$BO = \sqrt{\frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{2} - \frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{3}$ và $SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có $\dfrac{AD}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin D} \Rightarrow \sin C = \dfrac{AD.\sin D}{AC} = \dfrac{a.\sin 120°}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có $\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp DI$. Do đó $\begin{cases} DI \perp SK \\ DI \perp AC \end{cases} \Rightarrow d\left(D;(SAC)\right) = DI$.

Mặt khác $\sin C = \dfrac{DK}{DC} \Rightarrow DK = DC.\sin C = 2a.\dfrac{\sqrt{21}}{14} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI = \dfrac{SD.DK}{\sqrt{SD^2 + DK^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{21}{49}a^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

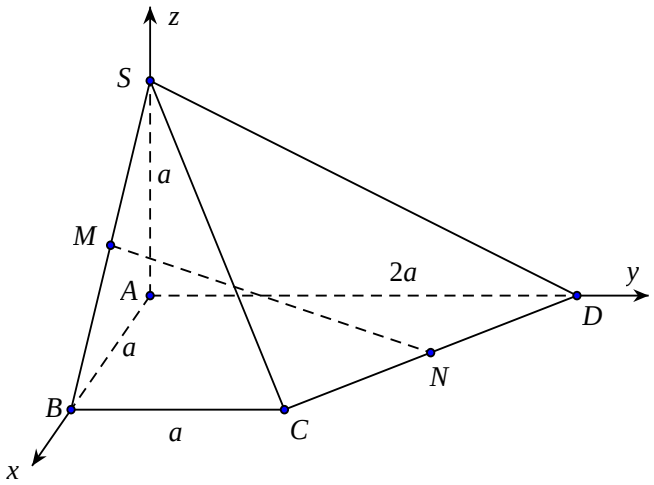
Vậy $\sin\left(SB;(SAC)\right) = \dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB} = \dfrac{DI}{SB} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.

Khi đó ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó: $M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{2};0\right)$.

Ta có: $-\dfrac{1}{a}\overrightarrow{SA} = (0;0;1) = \vec{u}$; $\dfrac{1}{a}\overrightarrow{SC} = (1;1;-1) = \vec{v}$.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) ta có $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-1;-1;0)$.

Lại có: $\dfrac{2}{a}\overrightarrow{MN} = (0;3;-1) = \vec{w}$.

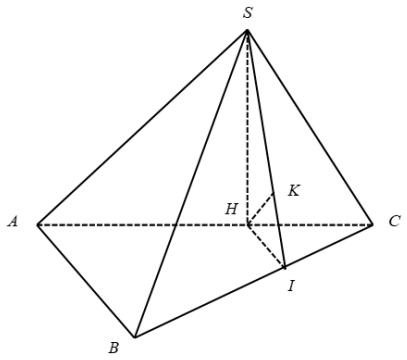
Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin\alpha=\dfrac{|\vec{n}.\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, (SAC) vuông góc với (ABC), biết $AB=SC=a, SA=BC=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi SA và (SBC). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{1}{3\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ SH vuông góc với $AC\Rightarrow SH$ vuông góc với (ABC).

Vì $SA\cap(SBC)=S$ nên $\sin\alpha=\sin\left(SA,(\text{SBC})\right)=\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{SA}$.

Lại có: $AH\cap(SBC)=C$ nên $\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{d\left(H,(SBC)\right)}=\dfrac{AC}{HC}$.

Kẻ $HI\perp BC$ và $HK\perp SI$. Ta chứng minh $HK\perp(SBC)$. Từ đó, suy ra $d\left(H,(SBC)\right)=HK$.

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$.

Vì $\Delta SAC=\Delta ABC\ (c.c.c)$ nên ΔSAC vuông tại S

$\Rightarrow\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SC^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác AHC có: $HC=\sqrt{SC^2-SH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a}{2}$.

Vì $HI\,//\,AB$ nên $\dfrac{HI}{AB}=\dfrac{HC}{AC}\Rightarrow HI=\dfrac{AB.HC}{AC}=\dfrac{a.\dfrac{a}{2}}{2a}=\dfrac{a}{4}$.

Xét tam giác vuông SHI có: $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{16}{a^2}=\dfrac{52}{3a^2}\rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{52}}$.

Từ đó, $d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{AC}{HC}.HK=4.\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{52}}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{13}}$.

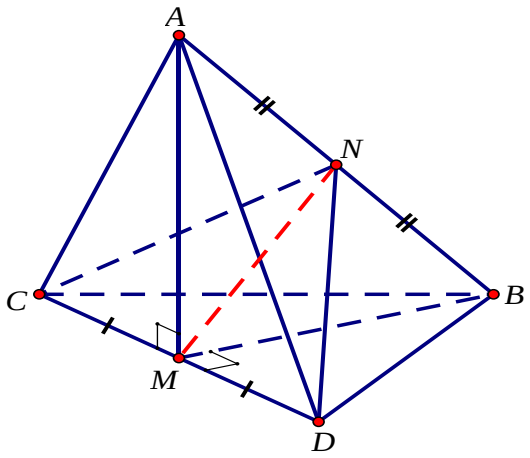
Vậy $\sin\alpha=\sin\left(SA,(\text{SBC})\right)=\dfrac{d\left(A,(SBC)\right)}{SA}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{13}.\sqrt{3}a}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Câu 8. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD, AB.

Ta có: $AC=AD=BC=BD=a$ nên ΔACD cân tại A, ΔBCD cân tại B, ΔCAB cân tại C, ΔDAB cân tại D. Suy ra $AM=BM$, $CN=DN$.

Góc giữa (ACD) và (BCD) là góc $AMB=90°$.

Tính: $BM=AM=\sqrt{AD^2-MD^2}=\sqrt{a^2-x^2}$.

Xét ΔABM vuông cân tại M có: $MN=\dfrac{AM}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2}}$ (1).

Góc giữa (ABC) và (ABD) là góc giữa CN và DN.

Khi đó $(ABC)\perp(ABD)\Leftrightarrow CN\perp DN\Leftrightarrow CND=90°$.

Xét ΔCDN vuông cân tại N có: $MN=\dfrac{CD}{2}=x$ (2).

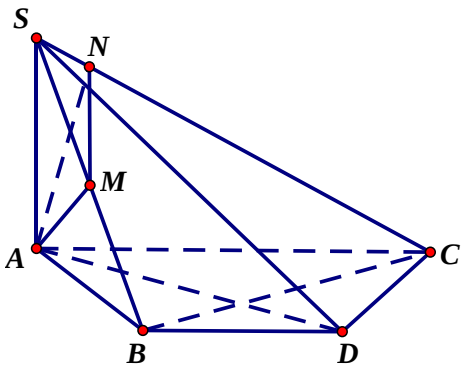
Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2}}=x\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=2BC$ và $BAC=120°$. Hình chiếu vuông góc của A lên các đoạn SB và SC lần lượt là M và N. Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $15°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $ABD = ACD = 90°$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB)$ hay $BD \perp AM$ và $AM \perp SB$ hay $AM \perp (SBD)$

$\Rightarrow AM \perp SD$. Chứng minh tương tự ta được $AN \perp SD$. Suy ra $SD \perp (AMN)$, mà $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow ((ABC),(AMN)) = (SA,SD) = DSA$. Ta có $BC = 2R\sin A = AD.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 2BC = AD\sqrt{3}$.

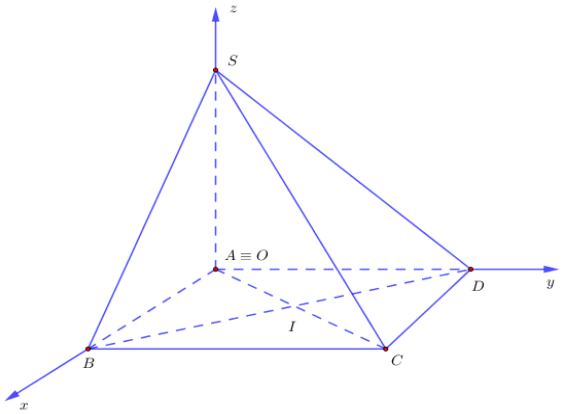
Vậy $\tan ASD = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ASD = 30°$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a.

Ta có $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ SI\perp BD\\ AI\perp BD\end{cases}\Rightarrow((SBD);(ABCD))=(SI;AI)=SIA.$

Ta có $\tan\alpha=\tan SIA=\dfrac{SA}{AI}\Leftrightarrow SA=a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Khi đó $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$; $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(-1;1;0)$.

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;0;1)$.

Suy ra $\cos((SAC);(SBC))=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow((SAC);(SBC))=60°$.

Câu 11. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=BB'=a$, $BAC=120°$. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính cos của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{12}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có ΔABC là hình chiếu của $\Delta AB'I$ trên (ABC) suy ra

$\cos((ABC),(AB'I))=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}$

Mà $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC\sin BAC=\dfrac{1}{2}a.a.\sin 120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos 120°=a^2+a^2-2a.a\cos 120°=3a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

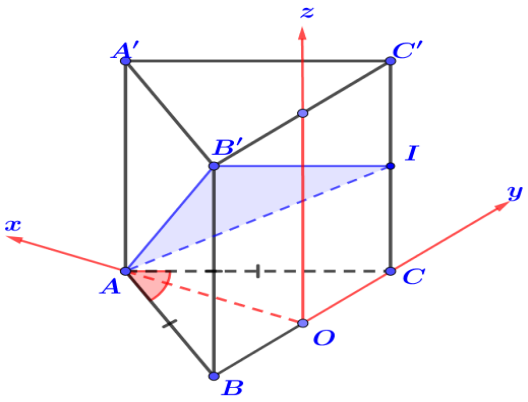
$\Rightarrow B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$

Lại có $AI=\sqrt{AC^2+CI^2}=\sqrt{(a)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$

Suy ra $\Delta AB'I$ vuông tại A nên $S_{\Delta AB'I}=\dfrac{1}{2}AI.AB'=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a^2$

Vậy $\cos((ABC),(AB'I))=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

Cách 2: Sử dụng phương pháp tọa độ



Gọi O là trung điểm BC, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2a.a\cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Tam giác AOB vuông tại O có: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục $O.xyz$ (như hình vẽ). Ta có:

$A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2}a;a\right)$, $I\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}a;\frac{a}{2}\right)$.

Mặt phẳng (ABC) có một VTPT $\vec{k} = (0;0;1)$.

$\overrightarrow{AB'} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}a;a\right)$, $\overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}a;\frac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2;-\frac{1}{4}a^2;-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = -\frac{1}{4}a^2\left(3\sqrt{3};1;2\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng $(AB'I)$ có một VTPT $\vec{n} = \left(3\sqrt{3};1;2\sqrt{3}\right)$.

$\cos\left((ABC),(AB'I)\right) = \left|\cos\left(\vec{k},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\vec{k}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

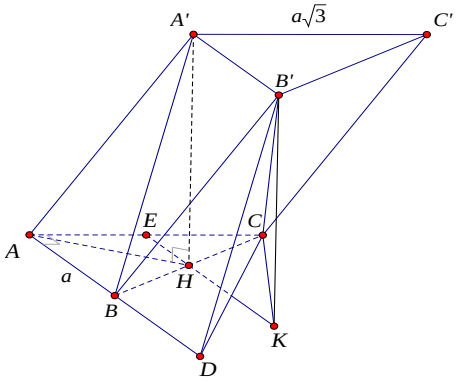
Mức độ 4

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AC; D và K là các điểm thỏa $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{A'B'}$.

Ta có $B'K\perp(ABC)$ và $B'D//A'B\Rightarrow(A'B,B'C)=(B'D,B'C)=DB'C$.

Ta tính được $BC=2a\Rightarrow BH=a$; $B'D=A'B=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a.$

$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=\sqrt{3a^2+4a^2}=a\sqrt{7}$; $CK=\sqrt{CE^2+EK^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}=a\sqrt{3}.$

$B'C=\sqrt{B'K^2+CK^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}.$

$\cos CB'D=\frac{B'D^2+B'C^2-CD^2}{2.B'D.B'C}=\frac{4a^2+6a^2-7a^2}{2.2a.a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{8}.$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD=2AB=2BC=2CD=2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin góc giữa MN và (SAC), biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{310}}{20}$. **C.** $\frac{\sqrt{310}}{20}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Gọi (α) là mp đi qua MN và song song với mp (SAD). Khi đó (α) cắt AB tại P, cắt SC tại Q, cắt AC tại K. Gọi I là giao điểm của MN và $QK\Rightarrow I\in(SAC)$.

Suy ra: P, Q, K lần lượt là trung điểm của AB, SC và AC.

Lại có: $ABCD$ là hình thang cân có $AD=2AB=2BC=2CD=2a$

$\Rightarrow AD=2a;AB=BC=CD=a\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2};S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$

Nên $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.SA=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}\Rightarrow SA=a\Rightarrow MP=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$ và $NP=\frac{3a}{2}$.

Xét tam giác MNP vuông tại P: $MN=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

MP,KQ lần lượt là đường trung bình của tam giác $\Delta SAB,\Delta SAC\Rightarrow MP//KQ//SA$

KN là đường trung bình của tam giác $\Delta ACD\Rightarrow KN=\frac{1}{2}AD=a$.

Xét tam giác AHC vuông tại H: $AC=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow KC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

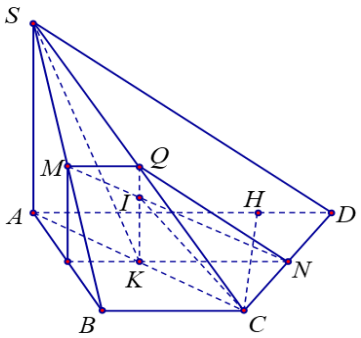
Suy ra: tam giác KNC vuông tại $C\Rightarrow C$ là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC).

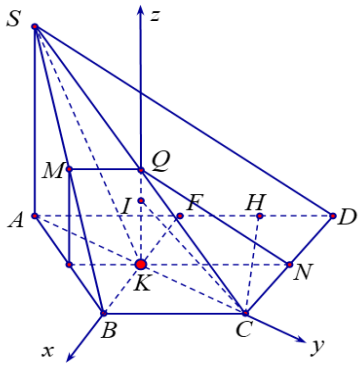
$\Rightarrow$ góc giữa MN và (SAC) là góc NIC

Khi đó: $\frac{IN}{MN}=\frac{KN}{NP}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow IN=\frac{2}{3}.MN=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{2}=\frac{a\sqrt{10}}{3}$

Xét tam giác NIC vuông tại C: $NC=\frac{a}{2};IN=\frac{a\sqrt{10}}{3}\Rightarrow IC=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{31}}{6}$

$\Rightarrow \cos NIC=\frac{IC}{IN}=\frac{a\sqrt{31}}{6}:\frac{a\sqrt{10}}{3}=\frac{\sqrt{310}}{20}.$





Cách 2. Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD=2AB=2BC=2CD=2a$

$\Rightarrow AD=2a;AB=BC=CD=a$

$\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2};S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$

nên $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.\text{SA}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}\Rightarrow SA=a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có: $K(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$, $M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{-3a}{4};\frac{3a\sqrt{3}}{4};\frac{-a}{2}\right)$. Chọn $\overrightarrow{u_1}=\left(-3;3\sqrt{3};-2\right)$cùng phương với $\overrightarrow{MN}$

Nhận xét: $\begin{cases}BK\perp SA\\BK\perp AC\end{cases}\Rightarrow BK\perp(SAC)$

$\overrightarrow{BK}=\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ là vtpt của (SAC).Chọn $\overrightarrow{n_1}=(1;0;0)$ cùng phương với $\overrightarrow{BK}$

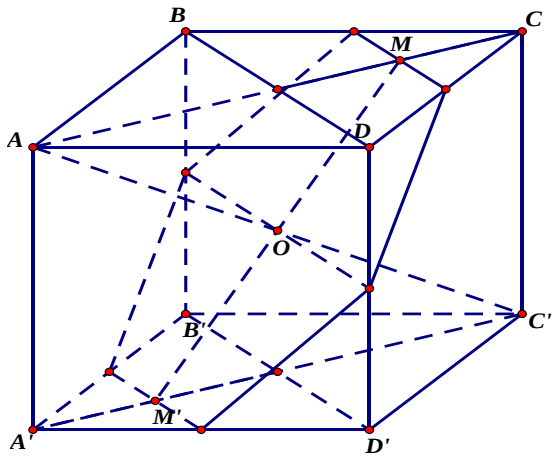
Gọi α là góc góc giữa MN và (SAC). Ta có $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{3\sqrt{10}}{20}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{310}}{20}.$

Câu 3. Một khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

A. 16 **B.** 17 **C.** 18 **D.** 19

Lời giải

Chọn D



Gọi $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lập phương lớn tạo bởi 27 khối lập phương đơn vị và O là tâm hình lập phương đó, khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3. Ta xét mặt phẳng (P) đi qua O và vuông góc với AC', cắt AC tại M, cắt $A'C'$ tại M'.

Ta có $\dfrac{AM}{AC'}=\dfrac{AO}{AC}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}}\Rightarrow AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}AC'=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.3\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\Rightarrow CM=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

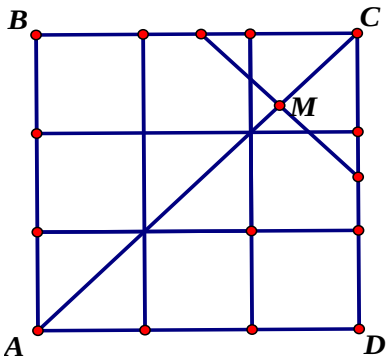
Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là mặt phẳng chia lớp 9 khối lập phương mặt trên với 9 khối lập phương ở mặt thứ 2, gọi $M_1=A_1C_1\cap MM'$.

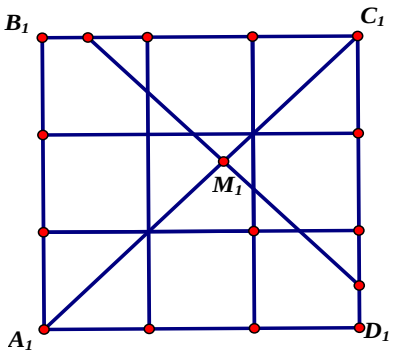
Ta có $A_1M_1=\dfrac{7}{3}CM=\dfrac{7}{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\Rightarrow C_1M_1=A_1C_1-A_1M_1=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$.

Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là mặt phẳng chia lớp 9 khối lập phương mặt thứ 2 với 9 khối lập phương ở mặt thứ 3, gọi $M_2=A_2C_2\cap MM'$.

Ta có $A_2M_2=\dfrac{5}{3}CM=\dfrac{5}{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow C_2M_2=A_2C_2-A_2M_2=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

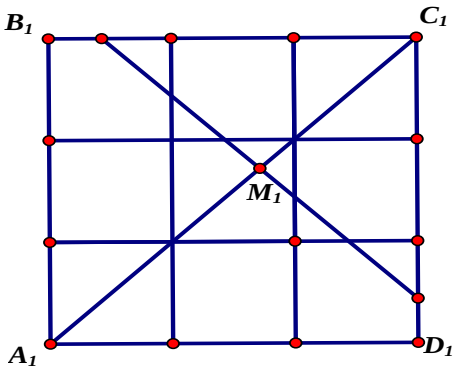
Giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh của 3 hình vuông, giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông (hình vẽ), trong các hình vuông này có 2 cặp hình vuông cùng chung một hình lập phương đơn vị, nên suy ra mặt phẳng (P) cắt ngang 6 khối lập phương mặt trên.

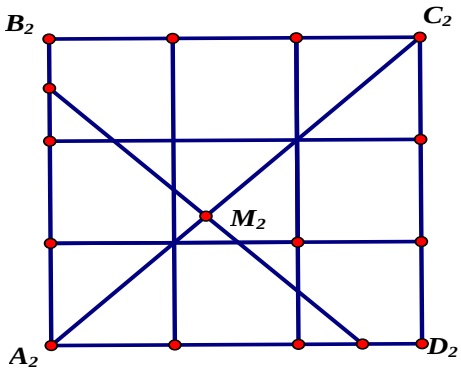




Tương tự mặt phẳng (P) cắt ngang 6 khối lập phương mặt dưới cùng.

Giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông, giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(A_2B_2C_2D_2)$ cắt các cạnh của 5 hình vuông (hình vẽ), trong đó có 3 cặp hình vuông cùng chung với một hình lập phương đơn vị, nên suy ra mặt phẳng (P) cắt ngang 7 khối lập phương mặt thứ hai.





Vậy, mặt phẳng (P) cắt ngang (không đi qua đỉnh) $6+6+7=19$ khối lập phương đơn vị.

Cách khác

Giả sử các đỉnh của khối lập phương đơn vị là $(i;j;k)$, với i, j, $k\in\{0;1;2;3\}$ và đường chéo đang xét của khối lập phương lớn nối hai đỉnh là $O(0;0;0)$ và $A(3;3;3)$. Phương trình mặt trung trực của OA là $(\alpha):x+y+z-\dfrac{9}{2}=0$. Mặt phẳng này cắt khối lập phương đơn vị khi và và chỉ khi các đầu mút $(i;j;k)$ và $(i+1;j+1;k+1)$ của đường chéo của khối lập phương đơn vị nằm về hai phía đối với (α). Do đó bài toán quy về đếm trong số 27 bộ $(i;j;k)$, với i, j, $k\in\{0;1;2\}$, có bao nhiêu bộ ba thỏa mãn:

$$\begin{cases} i+j+k-\dfrac{9}{2}<0 \\ (i+1)+(j+1)+(k+1)-\dfrac{9}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<i+j+k<\frac{9}{2}\ (1).$$

Các bộ ba không thỏa điều kiện (1), tức là $\left[\begin{array}{l} i+i+k\le\dfrac{3}{2} \\ i+i+k\ge\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$ là:

$S=\{(0;0;0);(0;0;1);(0;1;0);(1;0;0);(1;2;2);(2;1;2);(2;2;1);(2;2;2)\}$

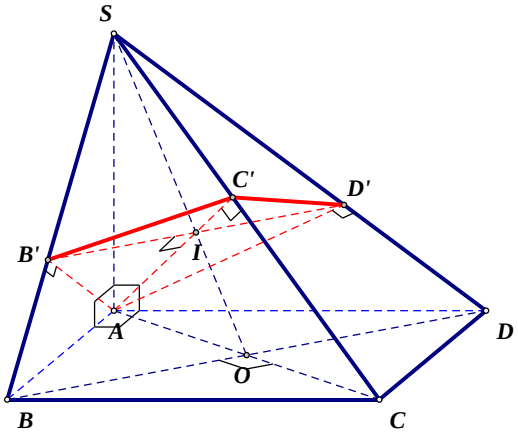
Vậy có $27-8=19$ khối lập phương đơn vị bị cắt bởi (α).

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45^0. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy $SBA=45°$. Ta có $B'D'\perp SC$ và $BD\perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD), suy ra $BD//B'D'$. Nên từ $I=SO\cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D'//BD$ cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Từ trên suy ra $B'D'\perp AC'$ và $\begin{cases}AB'\perp SC\\AB'\perp BC\end{cases}\Rightarrow AB'\perp SB$.

Suy ra $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'$. Mà $AC'=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $\frac{B'D'}{BD}=\frac{SB'}{SB}=\frac{a\sqrt{2}}{2.a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow B'D'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

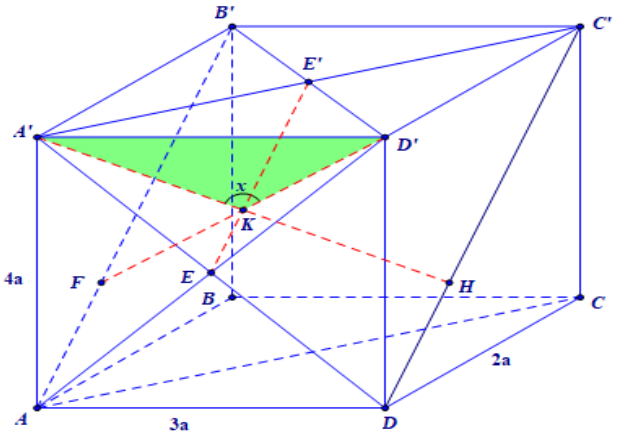
Vậy $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2a$, $AD=3a$, $AA'=4a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$. Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{29}{61}$. **B.** $\frac{27}{34}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{137}{169}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, E' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ADD'A'$, $A'B'C'D'$.

Khi đó: $EE' = (DA'C') \cap (AB'D')$.

Dựng $A'H$, $D'F$ lần lượt là đường cao của hai tam giác $DA'C'$, $AB'D'$.

Dễ thấy: $A'H, D'F, EE'$ đồng qui tại K và $\begin{cases} A'K \perp EE' \\ D'K \perp EE' \end{cases}$.

Hình chữ nhật $DD'C'C$ có: $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = 2\sqrt{5}a$.

Hình chữ nhật $ADD'A'$ có: $A'D = \sqrt{AD^2 + AA'^2} = 5a$.

Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ có: $A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{13}a$.

Suy ra: $S_{\Delta DA'C'} = \sqrt{61}a^2 \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\Delta DA'C'}}{DC'} = \dfrac{\sqrt{305}}{5}a \Rightarrow A'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $D'K = \dfrac{\sqrt{305}}{10}a$.

Trong tam giác $A'D'K$ có: $\cos x = \dfrac{A'K^2 + D'K^2 - A'D'^2}{2.A'K.D'K} = -\dfrac{29}{61}$.

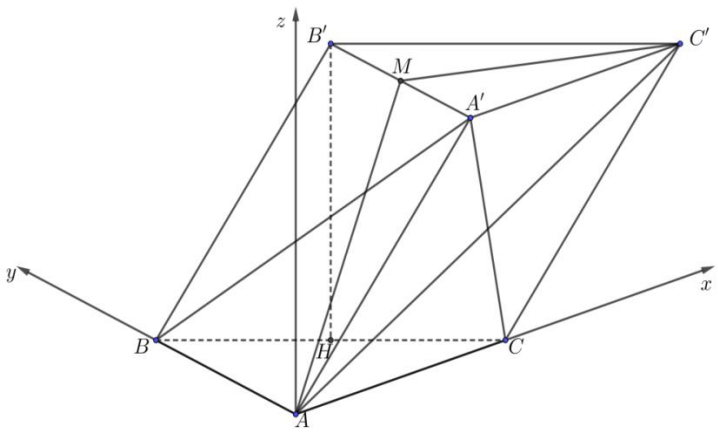
$\Rightarrow \cos\alpha = |\cos x| = \dfrac{29}{61}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC, M là trung điểm cạnh $A'B'$. Cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{11}{\sqrt{3157}}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$ **C.** $\dfrac{33}{\sqrt{3517}}$ **D.** $\dfrac{33}{\sqrt{3157}}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm BC.

Ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$

Xét tam giác $B'BH$ vuông tại H: $B'H^2=\sqrt{BB'^2-B'H^2}=3$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có A trùng với O như hình vẽ

Với $A(0;0;0)$, $B(0;3;0), C(4;0;0) \Rightarrow H\left(2;\frac{3}{2};0\right)$ là trung điểm $BC \Rightarrow B'\left(2;\frac{3}{2};3\right)$

Do $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'} \Rightarrow A'\left(2;-\frac{3}{2};3\right); C'\left(6;-\frac{3}{2};3\right) \Rightarrow M(2;0;3)$

$\overrightarrow{AM}=(2;0;3)$; $\overrightarrow{AC'}=\left(6;-\frac{3}{2};3\right)$ nên vectơ pháp tuyến (MAC') là $\vec{n}_{(MAC')}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}\right]$

$=\left(\frac{9}{2};12;-3\right)$

$\overrightarrow{A'B}=\left(-2;\frac{9}{2};-3\right)$; $\overrightarrow{A'C}=\left(2;\frac{3}{2};-3\right)$ nên vectơ pháp tuyến $(A'BC)$ là $\vec{n}_{(A'BC)}=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]$

$=(-9;-12;-12)$

Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$.

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_{(MAC')}.\vec{n}_{(A'BC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(MAC')}\right|.\left|\vec{n}_{(A'BC)}\right|}=\frac{\left|\frac{9}{2}.(-9)+12.(-12)-3.(-12)\right|}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+12^2+(-3)^2}.\sqrt{(-9)^2+(-12)^2+(-12)^2}}=\frac{33}{\sqrt{3157}}.$$

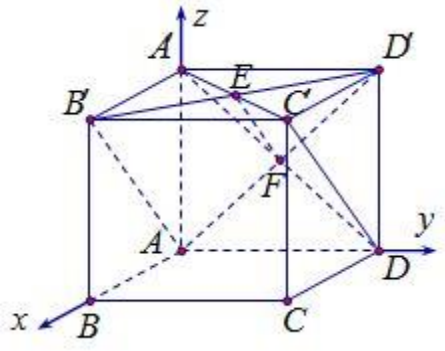
Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2$, $AD=3$; $AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α?

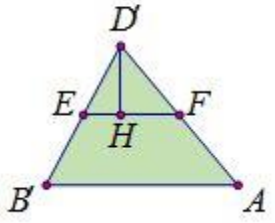
A. $45,2°$. **B.** $38,1°$. **C.** $53,4°$. **D.** $61,6°$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ có giao tuyến là EF như hình vẽ. Từ A' và D' ta kẻ 2 đoạn vuông góc lên giao tuyến EF sẽ là chung một điểm H như hình vẽ. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng cần tìm chính là góc giữa hai đường thẳng $A'H$ và $D'H$.





Tam giác DEF lần lượt có $D'E=\dfrac{D'B'}{2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $D'F=\dfrac{D'A}{2}=\dfrac{5}{2}$, $EF=\dfrac{B'A}{2}=\sqrt{5}$.

Theo hê rông ta có: $S_{DEF}=\dfrac{\sqrt{61}}{4}$. Suy ra $D'H=\dfrac{2S_{DEF}}{EF}=\dfrac{\sqrt{305}}{10}$.

Tam giác $D'A'H$ có: $\cos A'HD'=\dfrac{HA'^2+HD'^2-A'D'^2}{2HA'.HD'}=-\dfrac{29}{61}$.

Do đó $A'HD'\approx 118,4°$ hay $\left(A'H,D'H\right)\approx 180°-118,4°=61,6°$.

Cách 2: Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ như hình vẽ . Khi đó $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;3;0)$, $C(2;3;0)$, $A'(0;0;4)$, $B'(2;0;4)$, $D'(0;3;4)$, $C'(2;3;4)$.

Gọi $\vec{n_1}$ là véc tơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Có $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD'}\right]=(-12;-8;6)$.

Gọi $\vec{n_2}$ là véc tơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Có $\vec{n_2}=\left[\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{A'D}\right]=(-12;8;6)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$

$\cos\alpha=\left|\dfrac{\vec{n_1}\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}\right|=\dfrac{29}{61}$. Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6°$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Góc tạo bởi mặt bên (SAB) với đáy bằng α. Tỉ số diện tích của tam giác SAB và hình bình hành $ABCD$ bằng k. Mặt phẳng (P) đi qua AB và chia hình chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Gọi β là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt đáy. Tính $\cot\beta$ theo α và k.

A. $\cot\beta=\cot\alpha+\dfrac{\sqrt{5}+1}{4k\sin\alpha}$.

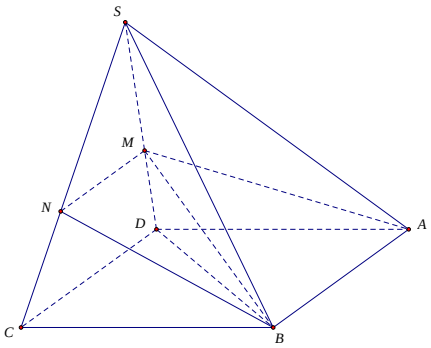
B. $\cot\beta=\tan\alpha+\dfrac{\sqrt{5}+1}{k\sin\alpha}$.

C. $\cot\beta=\cot\alpha+\dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$.

D. $\cot\beta=\tan\alpha+\dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử mặt phẳng (P) cắt SD, SC lần lượt tại M, N. Khi đó: $MN//CD$.

Đặt: $\frac{SM}{SD}=\frac{SN}{SD}=m>0$. Ta có: $\begin{cases}\frac{V_{S.MNB}}{V_{S.DCB}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SC}=m^2\\ \frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}}=\frac{SM}{SD}=m\quad(*)\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{V_{S.ABNM}}{V_{S.ABD}}=m^2+m\Leftrightarrow\frac{V_{S.ABNM}}{2V_{S.ABCD}}=m^2+m\Leftrightarrow m^2+m=1\Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (Vì $m>0$).

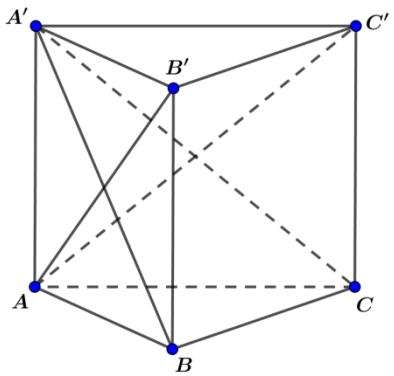
Từ $(*)$ suy ra: $V_{S.ABM}=m.V_{S.ABD}=m.(V_{S.ABM}+V_{M.ABD})\Rightarrow\frac{V_{S.ABM}}{V_{M.ABD}}=\frac{m}{1-m}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (1)$.

Mặt khác: $\frac{V_{S.ABM}}{V_{M.ABD}}=\frac{\frac{1}{3}S_{SAB}.d(M;SAB)}{\frac{1}{3}S_{ABD}.d(M;ABD)}=\frac{S_{SAB}.\sin(\alpha-\beta)}{S_{ABD}.\sin\beta}\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{S_{SAB}.\sin(\alpha-\beta)}{S_{ABD}.\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{k.S_{ABCD}\sin(\alpha-\beta)}{\frac{1}{2}S_{ABCD}.\sin\beta}$.

$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2k\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{5}}{4k}=\sin\alpha.\cot\beta-\cos\alpha\Leftrightarrow\cot\beta=\cot\alpha+\frac{1+\sqrt{5}}{4k.\sin\alpha}$.

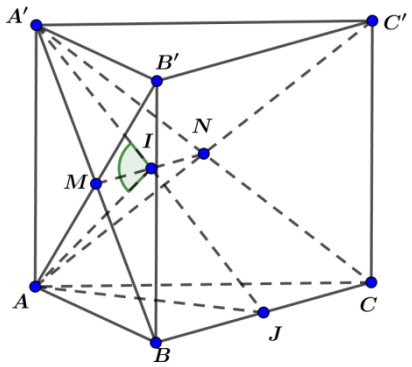
Câu 9. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$, tính $\cos\alpha$



A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử cạnh của hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài bằng a.

Gọi $M = A'B \cap AB'$ và $N = A'C \cap AC'$.

Khi đó $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$.

Kẻ $A'I \perp MN$ $(I \in MN)$ mà $AA' \perp BC$, $BC // MN \Rightarrow AA' \perp MN$. Vậy $AI \perp MN$.

Khi đó $((AB'C'),(A'BC)) = (AI, A'I) = \alpha$.

Gọi J là trung điểm BC.

$$AJ = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ A'J = \sqrt{AA'^2 + AJ^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a \Rightarrow A'I = \frac{1}{2}A'J = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Xét tam giác $\Delta A'IA$ có:

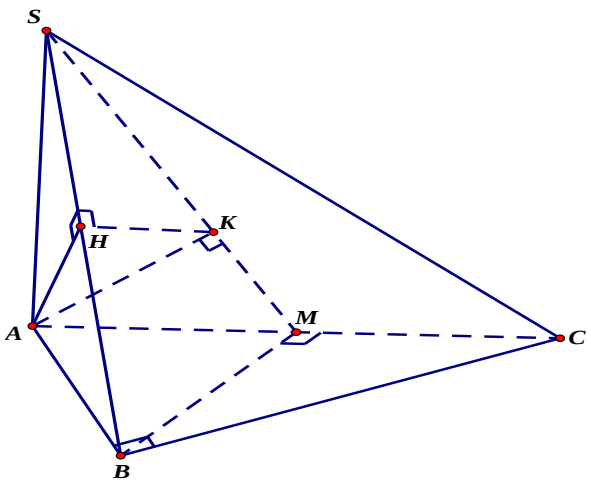
$$\cos A'IA = \frac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2.AI.A'I} = \frac{-1}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \cos(AI, A'I) = \cos\left(180^\circ - A'IA\right) = \frac{1}{7}.$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côtang góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AH \perp SB$ và $AK \perp SM$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $BC = a$ cùng với $SA \perp (ABC)$ nên suy ra $BM \perp (SAC)$ và $BM = AM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $BM \perp AK$.

Từ $BM \perp AK$ và $AK \perp SM$ suy ra $AK \perp (SBM) \Rightarrow AK \perp SB$.

Từ $AH \perp SB$ và $AK \perp SB$ ta có $(AHK) \perp SB$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng hoặc bù với góc AHK.

Ta có:

$$AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$AK = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Từ $(AHK) \perp SB$ ta có $HK \perp SB$ nên $\Delta SHK \sim \Delta SMB$, do đó $\dfrac{HK}{MB} = \dfrac{SK}{SB}$.

Mặt khác

$$SK.SM = SA^2 \Rightarrow SK = \frac{SA^2}{SM} = \frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{14}}{7};$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a;$$

Nên $\dfrac{HK}{MB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{3\sqrt{14}}{14} \Rightarrow HK = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}.MB = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Trong tam giác AHK ta có:

$$\cos AHK = \frac{AH^2 + HK^2 - AK^2}{2.AH.HK} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{14}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) là α với $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. Bởi vậy: $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

DẠNG TOÁN 27: CỰC TRỊ HÀM SỐ KHI BIẾT BBT HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ CỦA $f(x); f'(x)$

(CHƯA CÓ KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ của hàm số để tìm số điểm cực trị của hàm số.

.....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

❖ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ $-$ sang $+$ tại $x=x_0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$, giá trị cực tiểu $y=y(x_0)$.

❖ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ $+$ sang $-$ tại $x=x_0$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=x_0$, giá trị cực đại $y=y(x_0)$.

❖ Cực đại và cực tiểu của hàm số gọi chung là điểm cực trị hàm số.

.....

3. HƯỚNG GIẢI:

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta kết luận số điểm cực trị của hàm số.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

MỨC ĐỘ 1

Câu 1. Cho hàm số $f\ x$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'			0		0		
y	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

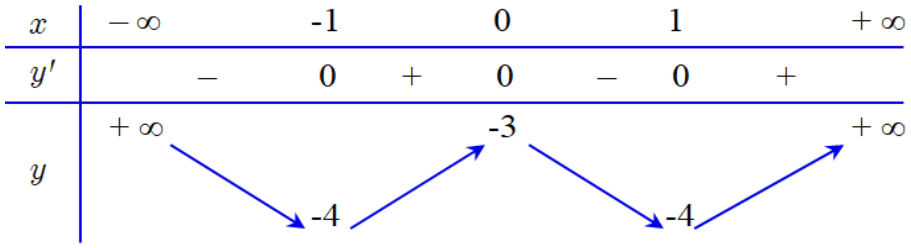
A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số có điểm cực tiểu là $x=0$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Hàm số đạt cực đại tại điểm

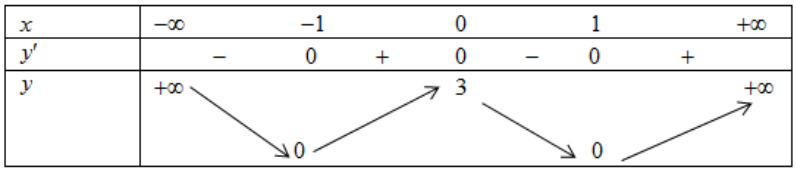
A. $x=0$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $y=-3$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=0$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3. **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

C. Hàm số có 2 điểm cực tiểu. **D.** Hàm số có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 (Đúng).

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0 (Sai vì hàm số có giá trị cực đại bằng 3).

C. Hàm số có 2 điểm cực tiểu (Đúng).

D. Hàm số có ba điểm cực trị (Đúng).

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$.

C. $x=1$ là điểm cực trị của hàm số. **D.** Hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải

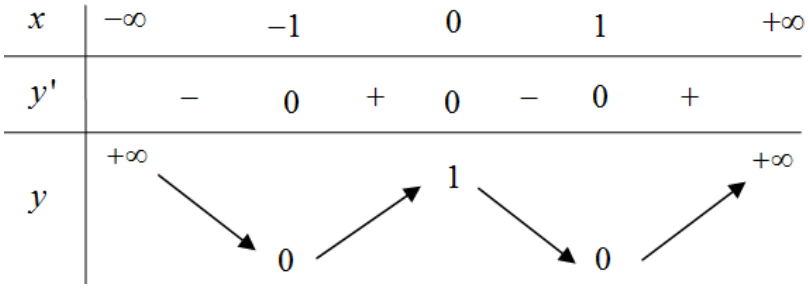
Chọn B

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↗		↘		↗	

Dựa theo BBT, ta thấy phương án B sai.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

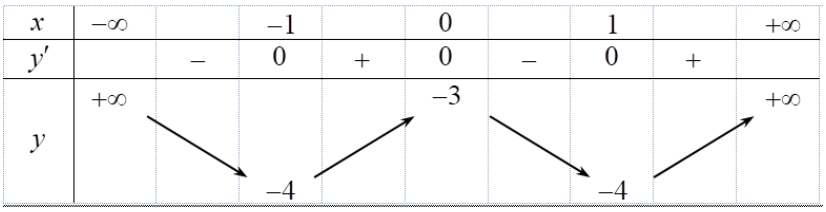
A. $y=1$. **B.** $x=0$. **C.** $y=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào BBT ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau?



Hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 bằng

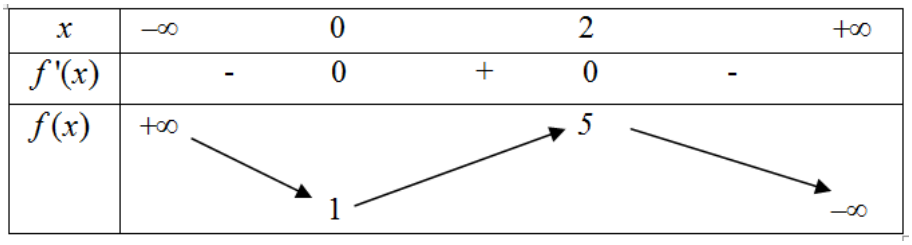
A. 0. **B.** −4. **C.** 1. **D.** −3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x_0=0$.

Câu 7. Cho hàm số có bảng biến thiên như sau



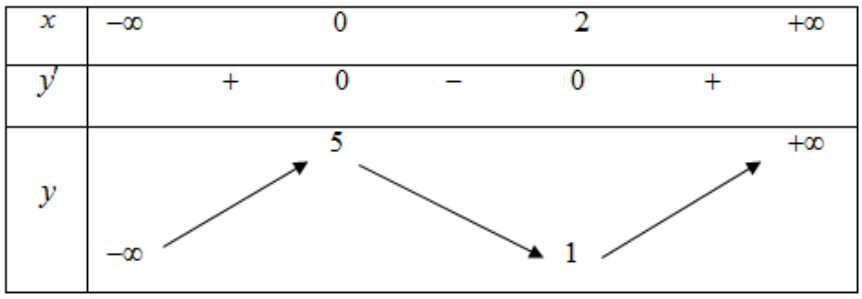
Hàm số có cực đại là

A. $y=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm số không có cực trị. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

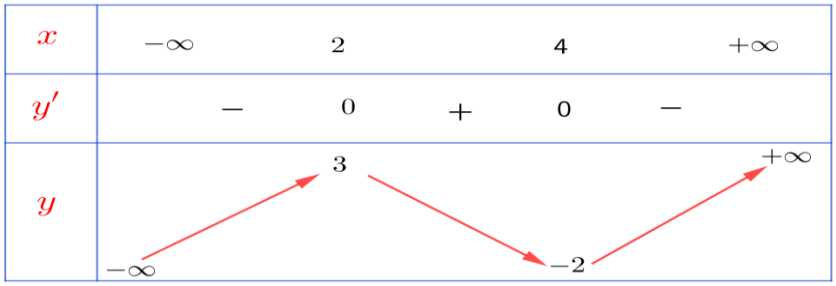
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=5$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại bằng 5 tại $x=0$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

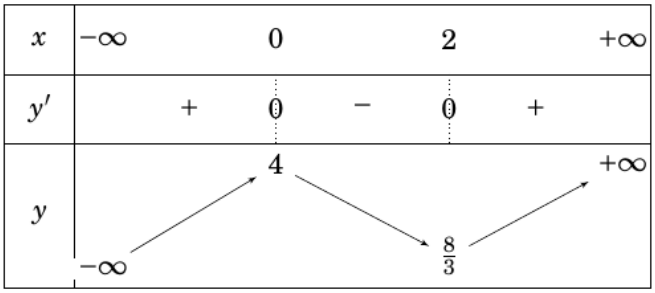
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



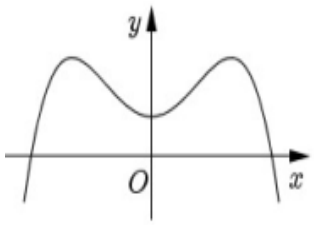
Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$, đồ thị như hình vẽ.



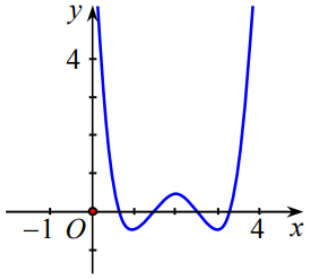
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.



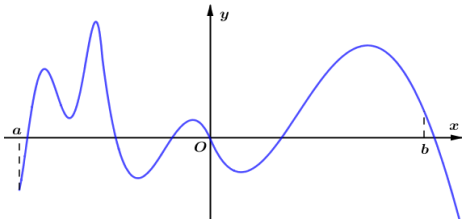
A. 1 **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại, tức là có 3 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a;b)$?

A. 4.

B. 2.

C. 7.

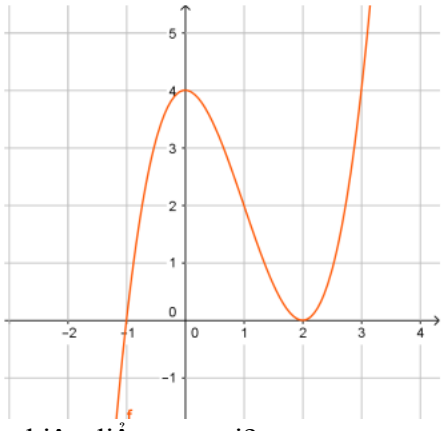
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số suy ra hàm số có 3 điểm cực tiểu trên khoảng $(a;b)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đồ thị hàm số trên có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

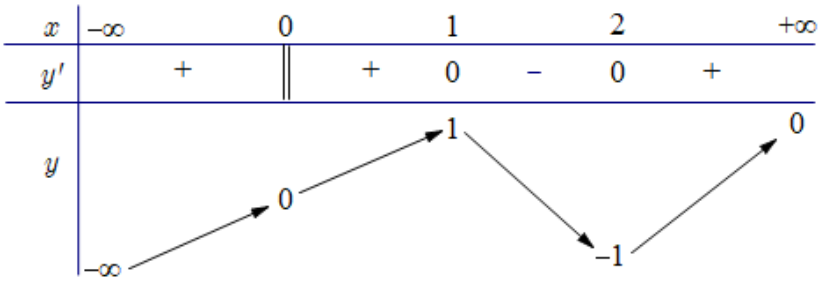
Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị trên ta thấy đồ thị hàm số có điểm cực đại có tọa độ $(0;4)$ và điểm cực tiểu có tọa độ $(2;0)$, nên đồ thị hàm số trên có 2 điểm cực trị.

MỨC ĐỘ 2

Câu 1. Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số có đúng hai cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, $x=1$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Lời giải

Chọn C

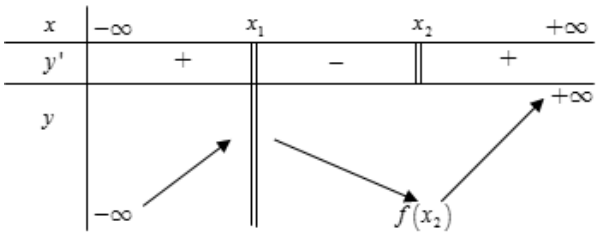
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có kết luận sau.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, $y_{CD}=1$ nên D sai.

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, $y_{CT}=-1$ nên A sai.

+Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1 và hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ nên B sai.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

D. Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Lời giải

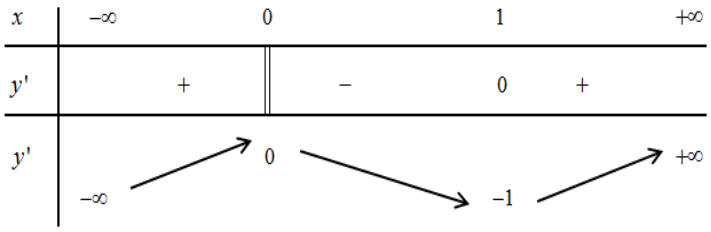
Chọn D

Tập xác định. $D=\mathbb{R}\setminus\{x_1\}$.

Vì $x_1\notin D$ nên x_1 không là điểm cực trị của hàm số.

Vì $x_2\in D$ và y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_2 nên x_2 là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ có đúng một cực trị.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy.

-Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

-Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Suy ra, hàm số $y=f(x)$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	-∞		1		2		3		4		+∞
f '(x)		−	0	+	‖	+	‖	−	0	+	

Kết luận nào sau đây đúng

A. Hàm số có 4 điểm cực trị.

B. Hàm số có 2 điểm cực đại.

C. Hàm số có 2 điểm cực trị.

D. Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu, ta có.

$f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi qua các điểm $1,3,4$. Suy ra loại phương án **A.**

$f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $1,4$ và đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm 3. Suy ra hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=-2$. **B.** Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

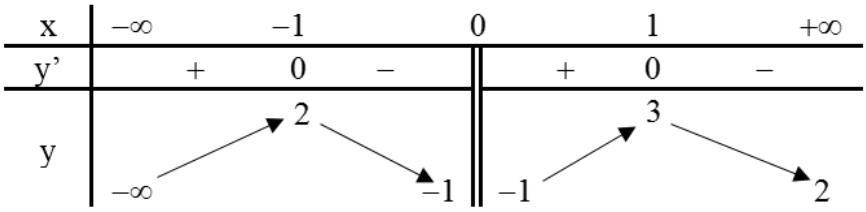
C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$. **D.** Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Lời giải

Chọn A

$f'(x)$ không đổi dấu qua $x=-2$. Suy ra, hàm số không đạt cực trị tại $x=-2$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Có một điểm. **B.** Có ba điểm. **C.** Có hai điểm. **D.** Có bốn điểm.

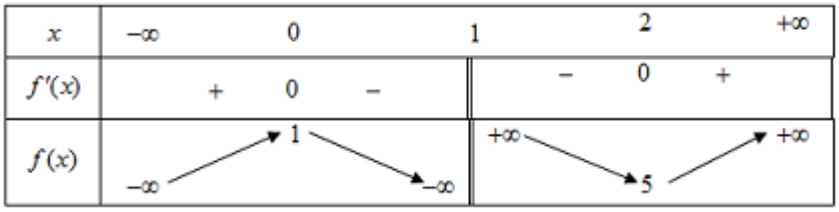
Lời giải

Chọn C

Hàm số có y' đổi dấu từ dương sang âm qua $x=\pm 1$ và $y=f(x)$ xác định tại $x=\pm 1 \Rightarrow$ hàm số có hai điểm cực đại $x=\pm 1$.

Nhận xét. tại $x=0$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương, nhưng $y=f(x)$ không xác định tại $x=0$ nên $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình dưới



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số đạt cực tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=0$.

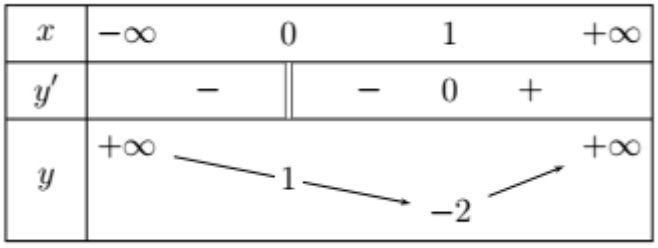
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số có đúng một điểm cực trị. **B.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2.

C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị $x=1$, **A.** đúng.

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng -2, **B.** đúng.

Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2, **C.** đúng.

y' không đổi dấu khi qua $x=0$ nên hàm số $y=f(x)$ không đạt cực đại tại $x=0$, **D.** sai.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

B. Đồ thị của hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -4.

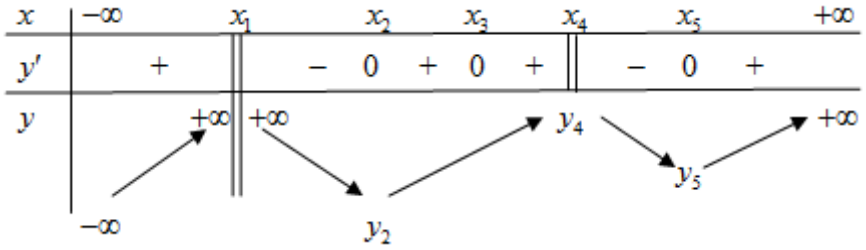
D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -3 hoặc 2.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị.

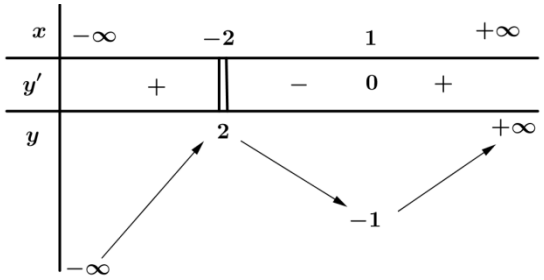


A. 5. **B.** 3. **C.** 4 **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ không đạt cực trị tại $x=-2$.

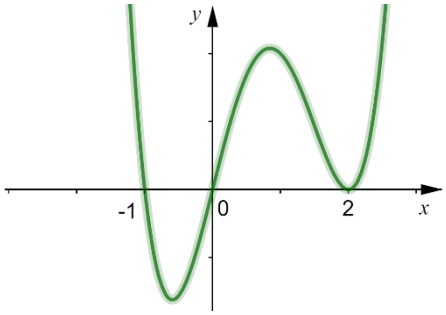
Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta chọn đáp án **B.**

MỨC ĐỘ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

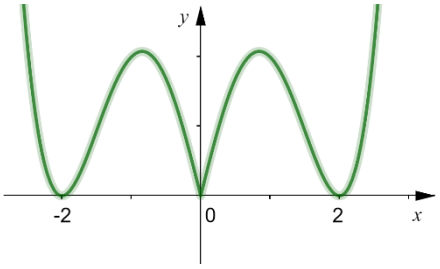
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y=f(|x|)$ được vẽ như sau.

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1)

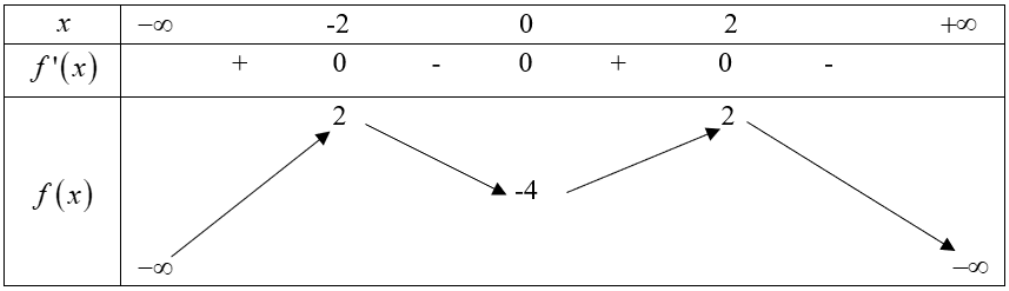
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2)

+ Khi đó $(C')=(C_1)\cup(C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

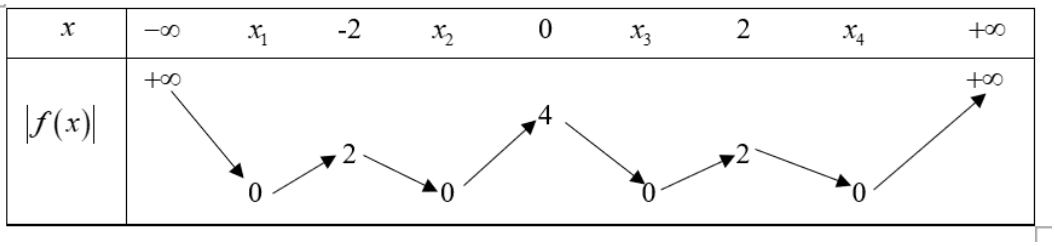
Chọn D

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần.

+ Phần đồ thị $y=f(x)$ nằm trên Ox

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y=f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.



Từ bảng biến thiên này hàm số $y=|f(x)|$ có 7 cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+2=0\\x^2-2x-1=0\\x^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Trong đó các nghiệm $-1, 1, 3$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1, 1, 3$.

Ta có $g'(0)=-2f'(0)<0$.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ bằng cách ta suy ra đồ thị hàm $y=f\left(|x|\right)$ rồi tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ sang phải 3 đơn vị.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ như sau.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗		↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị nên khi tịnh tiến đồ thị $y=f\left(|x|\right)$ sang phải 3 đơn vị ta được hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ cũng có ba điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $f\ x$ có bảng biến thiên như hình sau.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số $g\ x=2f^3\ x-6f^2\ x-1$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$g'\ x=6f^2\ x\ f'\ x-12f\ x\ f'\ x=6f\ x\ f'\ x\ \ f\ x-2$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\ f'(x)=0\\ f(x)=2\end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta thấy.

+) $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

+) $f(x)=2$ có ba nghiệm phân biệt khác với ba nghiệm trên.

+) $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=0$ và $x=3$ khác với các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 8 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta cũng thấy khi $x\to+\infty$ thì

$$\begin{cases}f(x)\to-\infty\\ f'(x)<0\\ f(x)-2\to-\infty\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0$$

Vậy ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau.

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7		x_8		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực đại.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

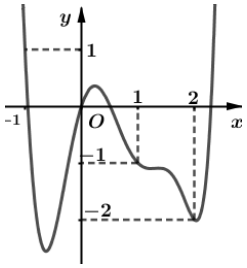
Chọn A

Ta có. $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x\ge 0\\ f(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$ nên bảng biến thiên của hàm số $y=f(|x|)$ là.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$f(0)$	↘	2	↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=f(|x|)$ có ba nhiêu điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2f(x)+x^2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

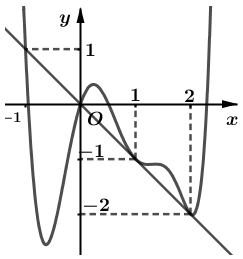
Lời giải

Chọn A

Có $g'(x)=2f'(x)+2x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x$

Nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x$



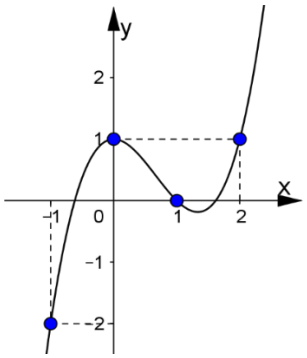
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$ có $x\in\{-1,0,1,2\}$ là các nghiệm của phương trình.

Có bảng xét dấu

x	$-\infty$ -1 0 1 2 $+\infty$
$g'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $+$ 0 $+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.

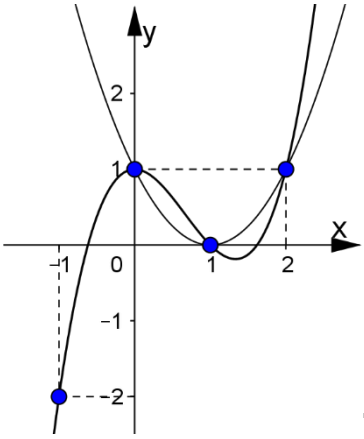


Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

Lời giải

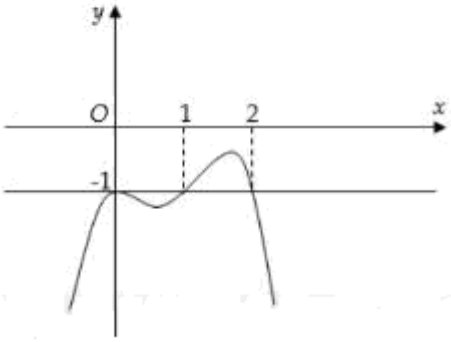
Chọn A



Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=(x-1)^2$; $g'(x)>0$ khi đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên parabol $y=(x-1)^2$ và ngược lại.

Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.

A. Không có cực tiểu. **B.** $x=0$.

C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=f'(x)+1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" qua điểm $x=1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 10. Cho $y=f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xác dấu của $y=f'(3-2x)$ như sau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=3-2x \Rightarrow x=\dfrac{3-u}{2}$

Ta có $f'(3-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{5}{2} \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=-2 \\ u=-3 \\ u=-5 \end{array}\right.$

Hơn nữa $f'(u)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2} \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<u<4 \\ u<-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘			↗			↘	

Câu 11. Cho $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xét dấu của $y=f'(\sqrt[3]{x})$ như sau

x	$-\infty$		-1		8		27		$+\infty$
$f'(\sqrt[3]{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=u^3$

$f'(\sqrt[3]{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \\ x=27 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \\ u=3 \end{array}\right.$

$f'(u)>0 \Rightarrow f'(\sqrt[3]{x})>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<8 \\ 27<x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<u^3<8 \\ 27<u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<u<2 \\ 3<u \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 cực trị

MỨC ĐỘ 4

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

Đặt $g(x)=f(x+2)+\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2019$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 1 điểm cực trị.

C. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

D. $g(5)>g(6)$ và $g(0)>g(1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=f'(x+2)+x^2-4x+3$

$f'(x+2)=0 \Leftrightarrow x \in \{-1;1;3\}$

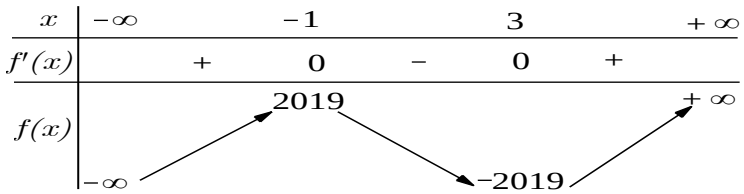
$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3.$

Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3			$+$		0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		kxđ	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta suy ra $g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2018\right)+2019\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-2018\right)+2019$

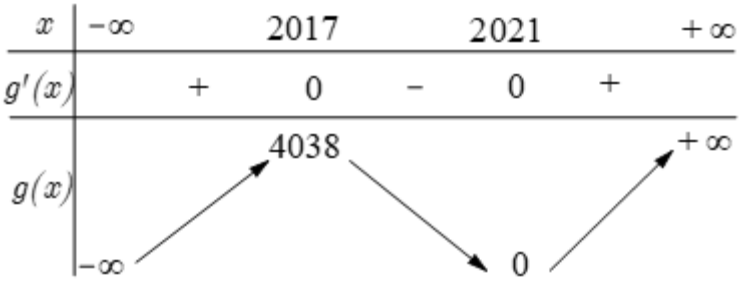
$g'\left(x\right)=\left(x-2018\right)' f'\left(x-2018\right)=f'\left(x-2018\right)$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2018=-1\\x-2018=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2017\\x=2021\end{array}\right.$

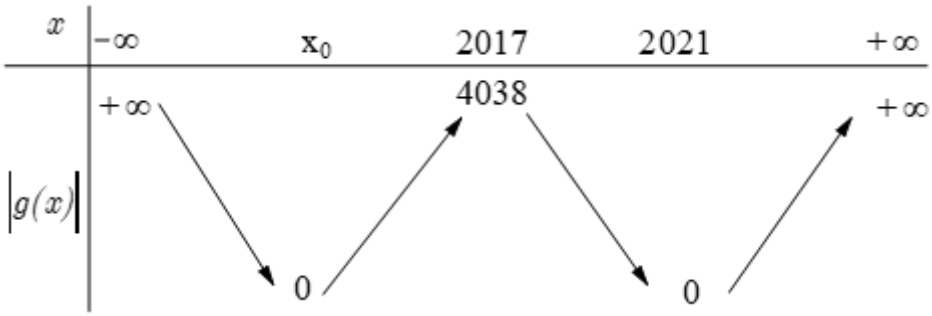
Ta có $g\left(2017\right)=f\left(2017-2018\right)+2019=4038$;

$g\left(2021\right)=f\left(2021-2018\right)+2019=0$;

Bảng biến thiên hàm $g\left(x\right)$

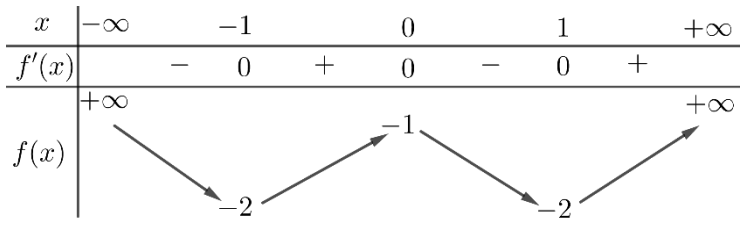


Khi đó bảng biến thiên $\left|g\left(x\right)\right|$ là



Vậy hàm số $y=\left|f\left(x-2018\right)+2019\right|$ có ba điểm cực trị.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f^{3}\left(x^{3}+3x\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có. $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right).f^2\left(x^3+3x\right)$.

Ta thấy $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2\left(x^3+3x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'\left(x^3+3x\right)$

$$f'\left(x^3+3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\x^3+3x=0\\x^3+3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\approx -0,32\\x=0\\x=x_2\approx 0,32\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

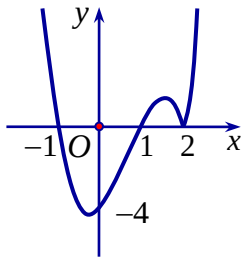
Do đó $f'\left(x^3+3x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\x^3+3x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2019}\left(x^3-1\right)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2019.f^{2018}\left(x^3-1\right).f'\left(x^3-1\right).3x^2$,

Ta có $y'=f^{2018}\left(x^3-1\right)\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $3x^2\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'\left(x^3-1\right)$.

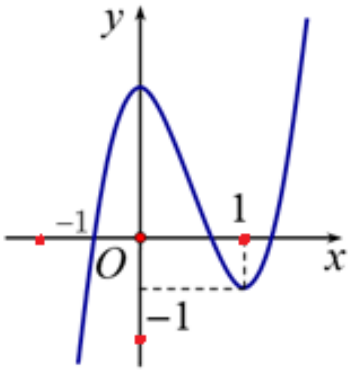
Ta có $f'\left(x^3-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1=-1\\x^3-1=1\\x^3-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{2}\\x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'\left(x^3-1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1<-1\\ \begin{cases}x^3-1>1\\ x^3-1\neq 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ \begin{cases}x>\sqrt[3]{2}\\ x\neq\sqrt[3]{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Tương tự $f'\left(x^3-1\right)<0\Leftrightarrow -1<x^3-1<1\Leftrightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}$.

Vì vậy suy ra hàm số $y=f^{2019}\left(x^3-1\right)$ có hai điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 11. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$

Ta có $y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'\left(|x+1|-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+1|-1=0\\ |x+1|-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=-2\\ x=-3\end{array}\right.$$

y' không xác định tại $x=-1$.

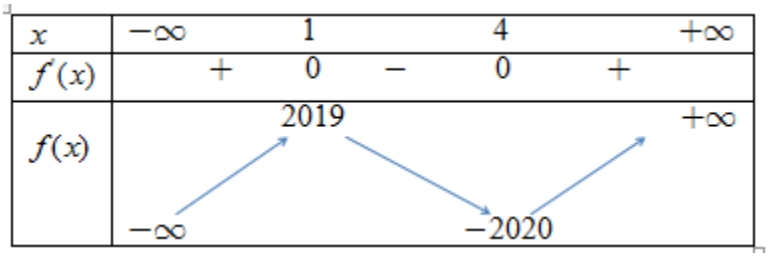
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(-1)<0$	$\nearrow$	$f(0)>0$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT của hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$ suy ra BBT của hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có 11 cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x-2019)+2020\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

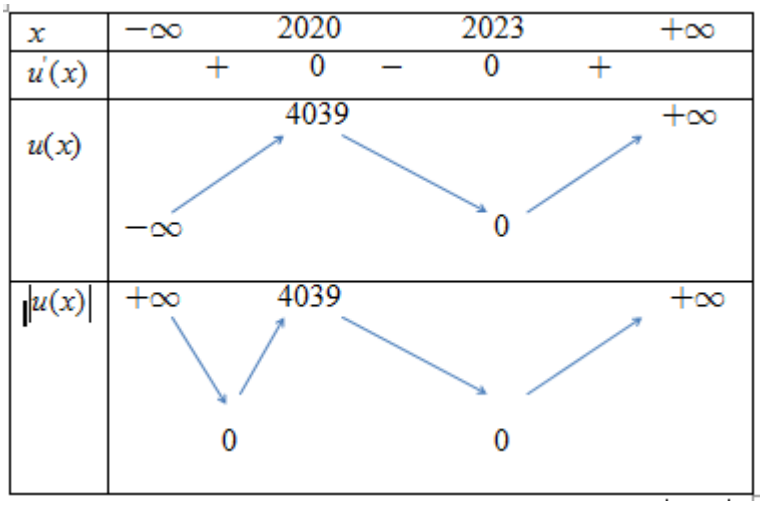
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2019)+2020$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2019 đơn vị và lên trên 2020 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$



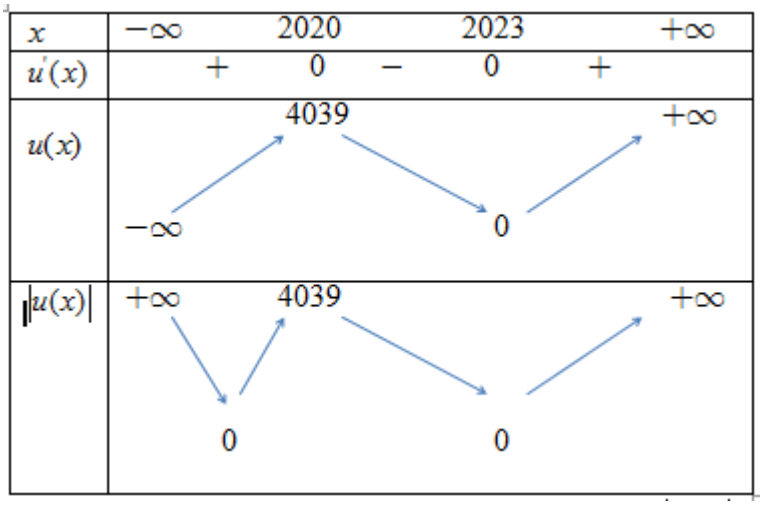
Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|u(x)\right|$ có 3 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2.

Đặt $u(x)=f(x-2019)+2020$

$$\Rightarrow u'(x)=f'(x-2019)\Rightarrow u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2020\\x=2023\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|u(x)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn B

Câu 7. Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)$, $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ f'\left(x^3\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3=0\\ x^3=a\\ x^3=b\\ x^3=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{a}\\ x=\sqrt[3]{b}\\ x=\sqrt[3]{c}\end{array}\right.$. Ta có $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)=f\left(|x|^3\right)=h(|x|)$.

BBT của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{c}$	$-\sqrt[3]{b}$	$-\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{c}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0 $+$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$	0 $-$	0 $+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là 5.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'\left(-x^4+4x^2-6\right)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'\left(-x^4+4x^2-6\right)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{cases}$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\le -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\le f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-|x|\right)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$g(x)=f\left(|x|^2-|x|\right)$

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right) \Rightarrow g(x)=h(|x|)$

Ta có $h'(x)=\left(f\left(x^2-x\right)\right)'=(2x-1).f'\left(x^2-x\right)$

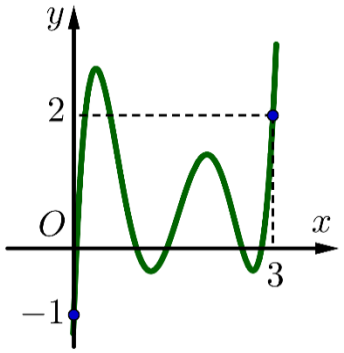
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(x^2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=-2 \\ x^2-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm số $g(x)=h(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hình bên là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi đồ thị của hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

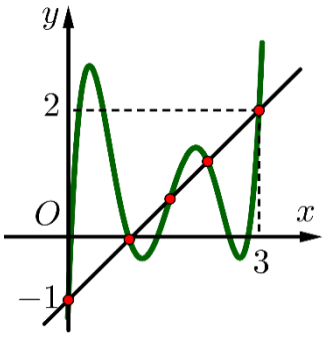


A. 9. **B.** 11. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x)=2f(x)-(x-1)^2 \Rightarrow h'(x)=2f'(x)-2(x-1)$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y=x-1$.



Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$. phương trình có 5 nghiệm bội lẻ.

Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		x_3		3		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Đồ thị hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $h(x)$ có nhiều giao điểm với trục hoành nhất, vậy đồ thị hàm số $h(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 6 điểm, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có tối đa 11 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 28: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$

2. *Định lý*

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ ta làm như sau:

$*$ Tìm các điểm $x_1; x_2;...; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

$*$ Tính $f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(a); f(b)$.

$*$ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$.

*** Nếu:**

+) $y'>0, \forall x\in[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \end{cases}$

+) $y'<0, \forall x\in[a;b] \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a) \\ \min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b) \end{cases}$

Chú ý

$*$ Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

∗ Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

∗ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

*** Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.**

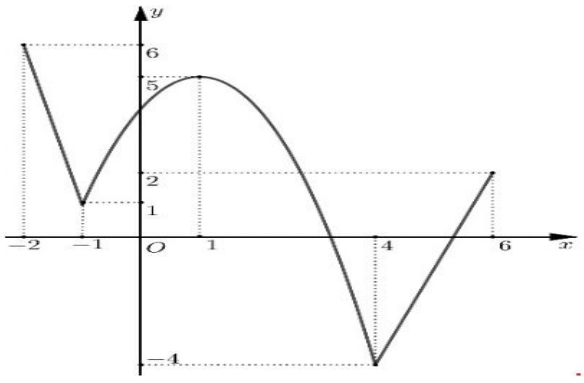
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Max-Min của hàm số đa thức trên đoạn [a,b]
- Max-Min của hàm phân thức trên đoạn [a,b]
- Max-Min của hàm số vô tỉ trên [a,b]
- Max-Min biết đồ thị, BBT
- Max-Min của hàm số đa thức trên K
- Max-Min của hàm phân thức trên K
- Max-Min của hàm số khác trên K
- Max-Min hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $2M+3m$ là



A. 1. **B.** 0. **C.** −1. **D.** 3.

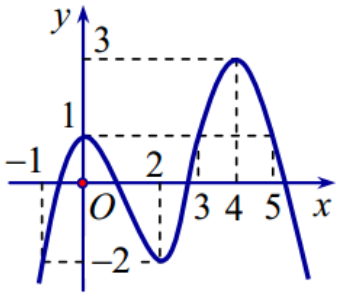
Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy: $M=6$, $m=-4$.

Vậy giá trị $2M+3m=2.6+3.(-4)=0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M-m$ bằng bao nhiêu?



A. 5. **B.** 1. **C.** −1. **D.** −5.

Lời giải

Chọn A

Lời giải

Dựa vào hình vẽ, ta có $M=3; m=-2 \Rightarrow M-m=5$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu ?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘	0	↗	2	↘	
	-2								1

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M=\underset{[-1;2]}{Max}\, f(x)=f(-1)=3$ và $m=\underset{[-1;2]}{Min}\, f(x)=f(0)=0$.

Vậy $M+m=3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\max\limits_{[0;2]} y=3$, $\min\limits_{[0;2]} y=2$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} y=11$, $\min\limits_{[0;2]} y=3$.

C. $\max\limits_{[0;2]} y=11,\ \min\limits_{[0;2]} y=2.$ **D.** $\max\limits_{[0;2]} y=11,\ \min\limits_{[0;2]} y=3.$

Lời giải

Chọn A

Hàm đã cho liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=4x^3-4x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(0;2) \\ x=1\in(0;2) \\ x=-1\notin(0;2) \end{array}\right. .$$

$y(0)=3;\ y(1)=2;\ y(2)=11.$

Vậy $\max\limits_{[0;2]} y=11,\ \min\limits_{[0;2]} y=2.$

Câu 5. Hàm số $y=\left(4-x^2\right)^2+1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ là

A. 17 **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y'=4x^3-16x$, cho $y'=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[-1;1] \\ x=2\notin[-1;1] \\ x=0\in[-1;1] \end{array}\right. .$

Khi đó: $f(-1)=10,\ f(1)=10,\ f(0)=17.$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=f(0)=17.$

Câu 6. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3;5]$. Khi đó $M-m$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\in[3;5]$ do đó:

$$M=\max_{[3;5]} f(x)=f(3)=2;\ m=\min_{[3;5]} f(x)=f(5)=\frac{3}{2}$$

Suy ra $M-m=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-5$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=-3$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=3$.

Lời giải:

Chọn C

$f(x)=x-5+\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;+\infty)$. Khi đó $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)=-3$.

Câu 8. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $D=\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right]$, $[-1;1]\subset D$

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$

Ta có $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}}<0 \ \ \forall x\in[-1;1]$.

$y(1)=1,\ y(-1)=3 \Rightarrow M=3, m=1 \Rightarrow M-m=2$.

Câu 9. Kí hiệu M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị của $\dfrac{M}{m}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = -3 \notin [0;3] \end{array}\right.$.

$y(1) = 3;\ y(0) = 4;\ y(3) = 4$.

Do đó: $M = 4$, $m = 3$.

Vậy $\dfrac{M}{m} = \dfrac{4}{3}$.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn $[-1;3]$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow f(-1) = f(3) = 2\sqrt{2}$; $f(1) = 2$.

↳ Mức độ 2

Câu 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$. Tính M, m.

A. $M = 1$, $m = -1$. **B.** $M = 2$, $m = -1$. **C.** $M = 2$, $m = -2$. **D.** $M = 1$, $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ suy ra: $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$y\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2,\ y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 1$.

Vậy: $M = 2$ và $m = -1$.

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

A. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{16}{5}$. **B.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{10}{3}$. **C.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$. **D.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4 = -\sin^2 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + 5$.

Đặt $t=\sin 2x$. Ta có $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Xét hàm số $g(t)=-t^2-\frac{1}{2}t+5$ với $t\in[-1;1]$.

$g'(t)=-2t-\frac{1}{2}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}$.

$g(-1)=\frac{9}{2}$, $g\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{16}$, $g(1)=\frac{7}{2}$.

Suy ra: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=\min\limits_{t\in[-1;1]} g(t)=\frac{7}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề **đúng**.

A. $M=m+\frac{3}{2}$. **B.** $M=m+1$. **C.** $M=\frac{3}{2}m$. **D.** $M=m+\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\sin x=t$, $(-1\le t\le 1)$ ta được $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $y=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y'=\frac{-t^2-2t}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow -t^2-2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (t/m)\\ t=-2\ (loai)\end{array}\right.$.

Vì $y(-1)=0$; $y(0)=1$; $y(1)=\frac{2}{3}$ nên

$\max\limits_{[-1;1]} y=y(0)=1\Rightarrow M=1$; $\min\limits_{[-1;1]} y=y(-1)=0\Rightarrow m=0$.

Vậy $M=m+1$.

Câu 4. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x-\cos x$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $3+\sqrt{3}$. **B.** 0. **C.** $1+\sqrt{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $-\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}\le\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x-\cos x\le\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}$.

Vậy $M+m=0$.

đại.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số là $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2$.

Câu 5. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

A. $T=[1;\ 9]$. **B.** $T=[0;4]$. **C.** $T=\left[0;\ 2\sqrt{2}\right]$. **D.** $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

Lời giải.

Chọn D

Tập xác định: $D=[1;\ 9]$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{9-x}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\9-x=x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

$f(1)=f(9)=2\sqrt{2}$; $f(5)=4$

Vậy tập giá trị là $T=\left[2\sqrt{2};\ 4\right]$.

Câu 6. Hàm số $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại duy nhất điểm x_0. Tìm x_0.

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=1$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=[0;2]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=0\Leftrightarrow x=1\in(0;2)$.

$\Rightarrow\ f(0)=f(2)=0$; $f(1)=1$.

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$.

Câu 7. Tìm x để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $x=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Chọn B

Tập xác định $D=[-2;2]$.

$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

$f(-2)=-2$; $f(2)=2$; $f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-2$.

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[0;5]$ bằng 5 khi m bằng

A. 6 . **B.** 10. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên: $D=[0;5]$.

$y'=6x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in D\\x=1\in D\end{array}\right.$.

$f(0)=m$; $f(1)=m-1$; $f(5)=175+m$

Dễ thấy $f(5)>f(0)>f(1), \forall m\in\mathbb{R}$ nên $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(1)=m-1$.

Theo đề bài, $\min\limits_{[0;5]} f(x)=5\Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$.

Câu 9. Biết hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;m]$ bằng $\dfrac{4}{7}$. Tìm m ?

A. $m=\dfrac{3}{7}$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $m=\dfrac{2}{7}$.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ trên đoạn $D=[0;m]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)>0$, $\forall x\in D$. Do hàm số liên tục trên D nên giá trị lớn nhất của hàm số là $f(m)$.

$f(m)=\dfrac{4}{7}\Leftrightarrow\dfrac{2m-3}{m+1}=\dfrac{4}{7}\Leftrightarrow 14m-21=4m+4\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 10. Hàm số $f(x)=\dfrac{mx+5}{x-m}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7 khi

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\dfrac{5}{7}$.

Lời giải:

Chọn A

Hàm số $f(x)=\dfrac{mx+5}{x-m}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ nên $m\notin[0;1]$. Do đó hàm số $f(x)=\dfrac{mx+5}{x-m}$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$.

$f'(x)=\dfrac{-m^2-5}{(x-m)^2}<0$, $\forall x\in[0;1]$. Suy ra $\min\limits_{[0;1]} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -7=\dfrac{m+5}{1-m}\Leftrightarrow m=2$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=ax^3+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $8a+d$. **B.** $d-11a$. **C.** $d-16a$. **D.** $2a+d$.

Lời giải:

Chọn C

$y'=3ax^2+c.$

$y''=6ax.$

$y''=0\Leftrightarrow x=0.$ Nên đồ thị hàm số có điểm uốn là $A(0;d)$. Do đó đồ thị hàm số nhận $A(0;d)$ làm tâm đối xứng.

Do đó từ $\min\limits_{(-\infty;0)} f(x)=f(-2)$ suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(2)\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=8a+2c+d.$

Mà $f'(-2)=0\Leftrightarrow 12a+c=0\Rightarrow c=-12a.$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} f(x)=8a-24a+d=d-16a.$

Câu 2. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1-x^2}+3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$. Hỏi điểm $A(M;m)$ thuộc đường tròn nào sau đây?

A. $(x-3)^2+(y-1)^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $x^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2=20$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[-1;1]$.

Đặt $t=\sqrt[6]{1-x^2}$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Vậy $y=f(t)=t^3+3t^4, t\in[0;1]$.

$f'=3t^2+12t^3$, $f'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{4}\\ t=0\end{array}\right.$.

$f(1)=4, f(0)=0$.

$\max\limits_{[-1;1]} y=\max\limits_{[-1;1]} f(x)=4$; $\min\limits_{[-1;1]} y=\min\limits_{[-1;1]} f(x)=0$.

Vậy điểm $A(4;0)$.

Ta có: $(4-3)^2+(0-1)^2=2 \Rightarrow A \in (C):(x-3)^2+(y-1)^2=2$.

Câu 3. Trên đoạn $[-2;2]$, hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ (với $m\neq 0$) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi

A. $m>0$. **B.** $m<0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-mx^2+m}{x^2+1}$, $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, $f(1)=\dfrac{m}{2}$, $f(-1)=-\dfrac{m}{2}$, $f(2)=\dfrac{2m}{5}$, $f(-2)=-\dfrac{2m}{5}$

Trường hợp 1: $m<0$.

x	-2		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(2)$

Do $m<0$ nên $f(1)=\dfrac{m}{2}<f(-2)=-\dfrac{2m}{5}$ suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Trường hợp 2: $m>0$.

x	-2		-1		1		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$f(-2)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$

Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{mx}{x^2+1}$ (với $m\neq 0$) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=1$ khi và chỉ khi $m<0$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M\leq 2m$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$.

$$g'(x)=4x^3-12x^2+8x;\ g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	a	↗	$a+1$	↘	a

Do $2m \ge M > 0$ nên $m > 0$ suy ra $g(x) \ne 0\ \forall x \in [0;2]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a+1<0 \\ a>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$.

Nếu $a<-1$ thì $M=-a$, $m=-a-1 \Rightarrow 2(-a-1) \ge -a \Leftrightarrow a \le -2$.

Nếu $a>0$ thì $M=a+1$, $m=a \Rightarrow 2a \ge a+1 \Leftrightarrow a \ge 1$.

Do đó $a \le -2$ hoặc $a \ge 1$, do a nguyên và thuộc đoạn $[-3;3]$ nên $a \in \{-3;-2;1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 5. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

A. 210. **B.** -195. **C.** 105. **D.** 300.

Lời giải:

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{2}x^2+30x+m-20$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có $g'(x)=x^3-19x+30$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \notin [0;2] \\ x=2 \\ x=3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$					$g(0)$	↗	$g(2)$				

$g(0)=m-20$; $g(2)=m+6$.

Để $\max\limits_{[0;2]}|g(x)| \le 20$ thì $\left\{\begin{array}{l} g(0) \le 20 \\ g(2) \le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |m-20| \le 20 \\ |m+6| \le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le m \le 14$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2;...;14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Câu 6. Biết hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Hàm số $y=f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M+m$. **B.** $2M+m$. **C.** $M+2m$. **D.** $2M+2m$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$, $x\in[0;2]$. Ta có: $g'(x)=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[0;2]$.

Bảng biến thiên:

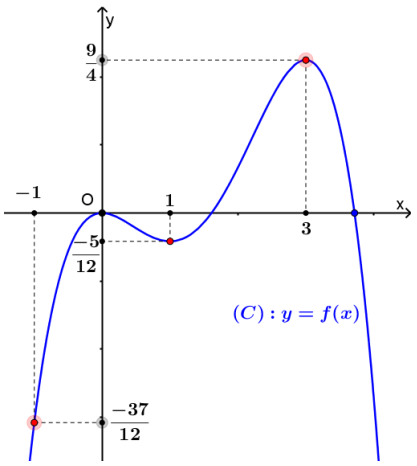
x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	2	↘	$\dfrac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0\le g(x)\le 2$.

Do đó: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi hàm số $y=f[g(x)]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ là $M+m$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y=f\left(\left|-x^3+3x^2-1\right|\right)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{-111}{16}$. **C.** $\dfrac{-45}{48}$. **D.** $\dfrac{185}{144}$.

Lời giải:

Chọn C

• Hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2-1$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$;

+ $g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

+ Vì $\begin{cases}g(-1)=3\\g(0)=-1\\g(2)=3\\g(3)=-1\end{cases}$ nên $\begin{cases}\min\limits_{[-1;3]}g(x)=-1\\\max\limits_{[-1;3]}g(x)=3\end{cases}\Rightarrow -1\le g(x)\le 3,\forall x\in[-1;3]$.

$\Rightarrow 0\le|g(x)|\le 3,\forall\in[-1;3]$.

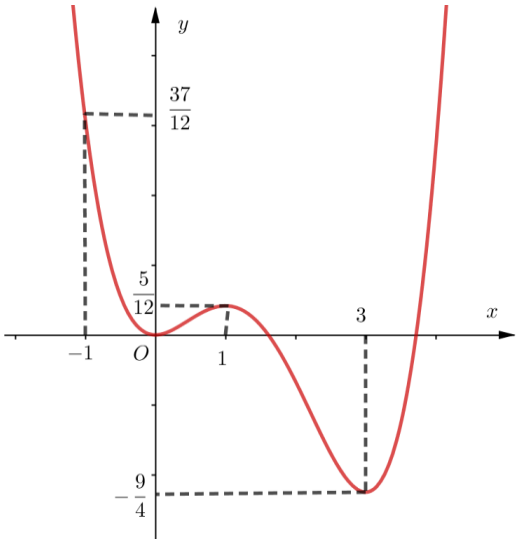
• Từ đồ thị $(C):y=f(x)$;

+ $m=\min\limits_{[-1;3]}f(|g(x)|)=\dfrac{-5}{12}$ khi $|g(x)|=1$ tại $x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=3$.

+ $M=\max\limits_{[-1;3]}f(|g(x)|)=\dfrac{9}{4}$ khi $|g(x)|=3$ tại $x=-1$ hoặc $x=2$.

• Vậy $m.M=\dfrac{-45}{48}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(|x^3-3x^2+1|)$ trên $[-1;3]$. Tính $3m+M$.

A. $3m+M=\dfrac{7}{2}$. **B.** $3m+M=-1$. **C.** $3m+M=\dfrac{-11}{3}$. **D.** $3m+M=\dfrac{-19}{3}$.

Lời giải:

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+1$ trên $[-1;3]$.

$g'(x)=3x^2-6x$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in(-1;3)\\x=2\in(-1;3)\end{array}\right.$.

$g(-1)=-3;g(0)=1;g(2)=-3;g(3)=1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]}g(x)=1;\min\limits_{[-1;3]}g(x)=-3\Rightarrow-3\le g(x)\le1,\forall x\in[-1;3]\Rightarrow0\le|g(x)|\le3,\forall x\in[-1;3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy :

Hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x^2+1\right|\right)=f\left(\left|g(x)\right|\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m=\dfrac{-9}{4}$ khi $|g(x)|=3\Leftrightarrow x=2$.

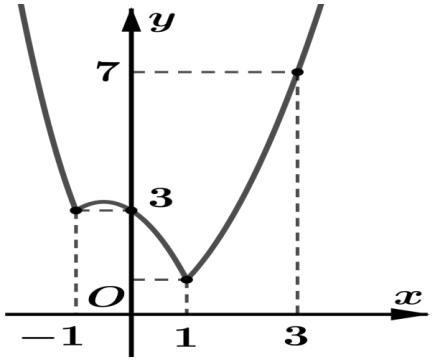
Hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x^2+1\right|\right)=f\left(\left|g(x)\right|\right)$ đạt giá trị lớn nhất là $M=\dfrac{5}{12}$ khi $|g(x)|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy $3m+M=\dfrac{-19}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục trên R và có đồ thị là hình bên và hàm số $y=g\ t\ =t^3-3t^2+5$

Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của $y=g\ \left|f\ x\ -2\right|$ trên đoạn $-1;3$. Tích $M.m$ bằng



A. 54. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn B

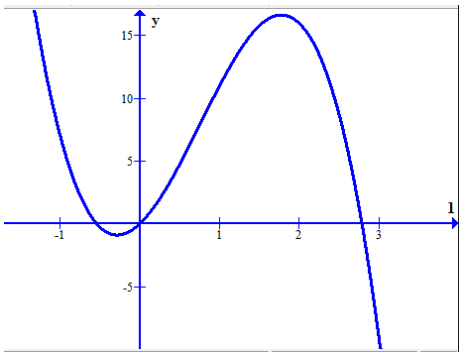
$y=g\ \left|f\ x\ -2\right|\ =\left|f\ x\ -2\right|^3-3\ f\ x\ -2\ ^2+5$.

Trên $-1;3$, ta có $1\le f\ x\ \le7\Leftrightarrow-1\le f\ x\ -2\le5\longrightarrow0\le\left|f\ x\ -2\right|\le5.$

Đặt $t=\left|f\ x\ -2\right|$ với $t\in0;5$. Khi đó $y=t^3-3t^2+5\rightarrow y'=3t^2-6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có $y\ 0\ =5;\ y\ 2\ =1;\ y\ 5\ =55.$ Suy ra $\begin{cases}M=55\\m=1\end{cases}\longrightarrow M.m=55.$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ đồng thời có đồ thị như hình vẽ .



Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)+m|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 2018?

A. 6. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $g(x)=f(x)+m \Rightarrow g'(x)=f'x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên :

x	-1		0		2		3
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$m+7$	↘	m	↗	$m+16$	↘	$m-9$

$\max\limits_{[-1;3]} g(x)=m+16$; $\min\limits_{[-1;3]}=m-9 \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=\max\{|m+16|;|m-9|\}$.

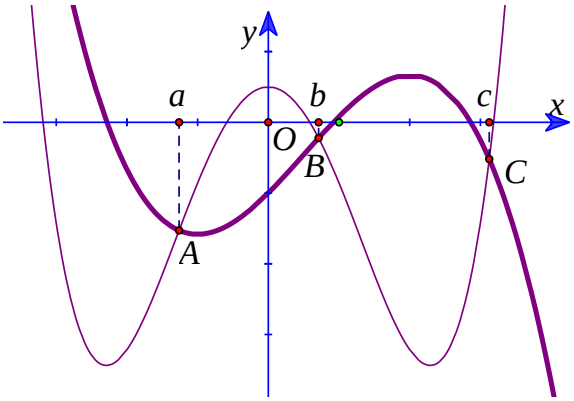
+ Nếu $|m+16|\geq|m-9| \Leftrightarrow m\geq -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=|m+16|=m+16=2018$. Suy ra $m=2002$.

+ Nếu $|m+16|\leq|m-9| \Leftrightarrow m\leq -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=|m-9|=m-9=2018$. Suy ra $m=2025$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y=g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A,B,C của $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[a;c]$?



A. $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(a)$. **B.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$. **C.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(0)$. **D.** $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(c)$.

Lời giải

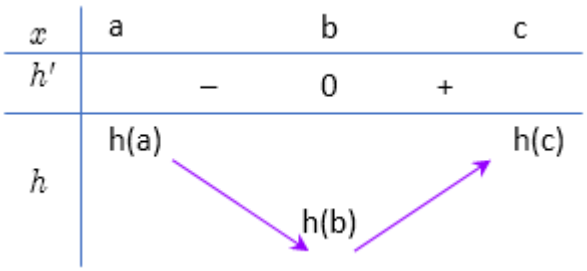
Chọn B

Ta có $h'(x)=f'(x)-g'(x)$, $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \end{array}\right.$.

Trên miền $b<x<c$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y=g'(x)$ nên $f'(x)-g'(x)>0 \Leftrightarrow h'(x)>0, \forall x \in (b;c)$.

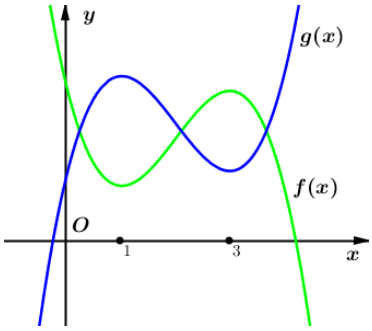
Trên miền $a<x<b$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=g'(x)$ nên $f'(x)-g'(x)<0 \Leftrightarrow h'(x)<0, \forall x \in (a;b)$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[a;c]} h(x)=h(b)$.

Câu 2. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới,



biết rằng $x=1$ và $x=3$ đều là các điểm cực trị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đồng thời $3f(1)=g(3)+1$, $2f(3)=g(1)+4$, $f(-2x+7)=g(2x-3)-1(*)$.Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ của hàm số $S(x)=f(x)g(x)-g^2(x)+f(x)-4g(x)+2$. Tính tổng $P=M-2m$.

A. 39. **B.** 107. **C.** 19. **D.** 51.

Lời giải

Chọn B

Thay lần lượt $x=2$, $x=3$ vào $(*)$ ta có

$\begin{cases} f(3)=g(1)-1 \\ f(1)=g(3)-1 \end{cases}$, mà $\begin{cases} 3f(1)=g(3)+1 \\ 2f(3)=g(1)+4 \end{cases}$ nên $f(1)=1$, $f(3)=5$, $g(1)=6, g(3)=2$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $1=f(1)\le f(x)\le f(3)=5$, $2=g(3)\le g(x)\le g(1)=6\ \forall x\in[1;3]$.

Đặt $u=f(x)$, $v=g(x)$ với $1\le u\le 5$, $2\le v\le 6$, xét

$h(u,v)=uv-v^2+u-4v+2=-v^2+(u-4)v+u+2$.

Xem $h(u,v)$ là một hàm số bậc 2 theo biến v ta có

$h'(u,v)=-2v+u-4\le -4+5-4=-3<0\ \forall v\in(2;6)\Rightarrow h(u,v)$ nghịch biến trên $[2;6]$.

Suy ra

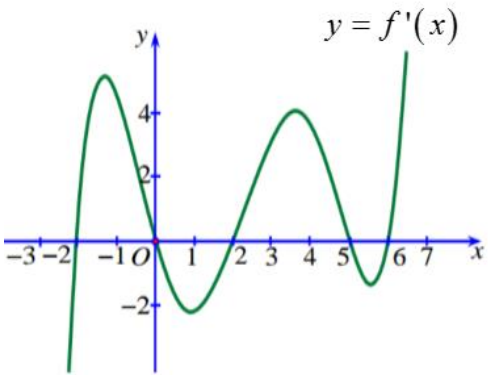
$h(u,6)\le h(u,v)\le h(u,2)\Rightarrow 7u-58\le h(u,v)\le 3u-10$

$\Rightarrow -51\le h(u,v)\le 5$ (do $1\le u\le 5$).

Từ đó $M=\max\limits_{[1;3]}S(x)=5$, dấu bằng xảy ra khi $x=3$, $m=\min\limits_{[1;3]}S(x)=-51$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Vậy $P=M-2m=107$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]}f(x), m=\min\limits_{[-2;6]}f(x)$, $T=M+m$ Hỏi mệnh đề nào dưới đây là đúng?



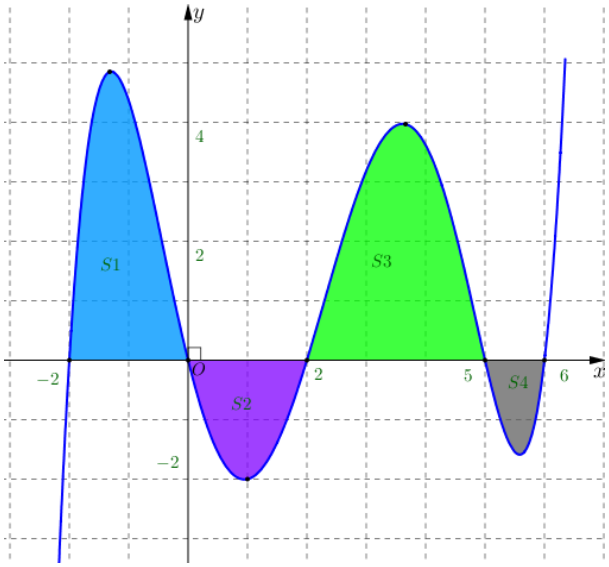
A. $T=f(5)+f(-2)$. **B.** $T=f(0)+f(2)$. **C.** $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(-2)$.

Lời giải

Chọn A

+) Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2;0;2;5;6$ nên phương trình $f'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt là $x_1=-2;x_2=0;x_3=2;x_4=5;x_5=6$. Hơn nữa $f'(x)>0,\forall x\in(-2;0)\cup(2;5)$ và ngược lại $f'(x)<0,\forall x\in(0;2)\cup(5;6)$ Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$	-2		0		2		5		6	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	
$f(x)$		$f(-2)$	↘	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$	↘	$f(6)$	



+) Gọi S_1,S_2,S_3,S_4 lần lượt là diện tích của các hình phẳng $(H_1),(H_2),(H_3),(H_4)$.

(H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),y=0,x=-2,x=0.$

(H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),y=0,x=2,x=0.$

(H_3) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),y=0,x=2,x=5.$

(H_4) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),y=0,x=5,x=6.$

Ta có

$$S_1>S_2\Leftrightarrow\int_{-2}^{0}f'(x)dx>\int_{0}^{2}-f'(x)dx\Leftrightarrow f(0)-f(-2)>f(0)-f(2)\Leftrightarrow f(-2)<f(2)\quad(1)$$

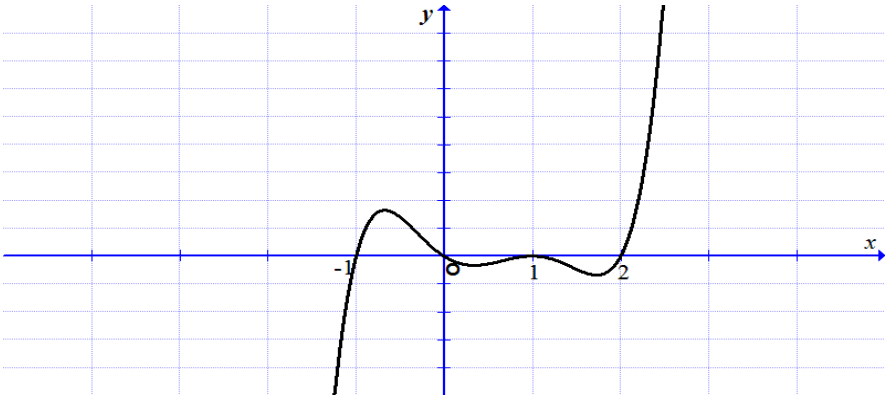
$$S_2>S_3\Leftrightarrow\int_{0}^{2}-f'(x)dx>\int_{2}^{5}f'(x)dx\Leftrightarrow f(0)-f(2)>f(5)-f(2)\Leftrightarrow f(0)<f(5)\quad(2)$$

$$S_3>S_4\Leftrightarrow\int_{2}^{5}f'(x)dx>\int_{5}^{6}-f'(x)dx\Leftrightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(6)\Leftrightarrow f(2)<f(6)\quad(3)$$

+) Từ bảng biến thiên và $(1),(2),(3)$ ta có:

$\max\limits_{[-2;6]}f(x)=f(5),\min\limits_{[-2;6]}f(x)=f(-2)$ và $T=f(5)+f(-2)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ trên đoạn $[-4;3]$ Tính giá trị của $M-m$.

A. $f(3)+f(2)$. **B.** $f(3)-f(0)$. **C.** $f(4)+f(0)$. **D.** $f(4)+f(2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Mặt khác hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f\left(|x|\right)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	-	0	+	
$y=f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘			$f(2)$	↗	$+\infty$

x	-4		-2		0		2		3
y'		-	0	+	0	-	0	+	
$y=f\left(\|x\|\right)$	$f(4)$	↘	$f(2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

Từ hình vẽ của đồ thị $y=f'(x)$ ta có

$\int_0^2\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x<\int_2^3\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$.

Suy ra:

$-\left[f(2)-f(0)\right]<f(3)-f(2)\Leftrightarrow f(3)-f(2)>0\Leftrightarrow f(0)<f(3).$

$\int_2^3\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x<\int_2^4\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$

Suy ra:

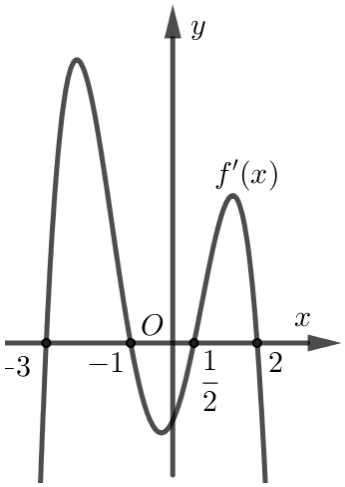
$f(3)-f(2)<f(4)-f(2)\Leftrightarrow f(3)-f(2)>0\Leftrightarrow f(3)<f(4)$

Vậy: $f(0)<f(3)<f(4).$

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ ta có: $\min\limits_{[-4;3]}f\left(|x|\right)=f(0).$

$\Rightarrow\max\limits_{[-4;3]}f\left(|x|\right)=f(-4)=f(4)=M\Rightarrow M+m=f(4)+f(2).$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+n\ (a,b,c,d,e,n\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M=\max\limits_{[-3;2]}f\left(|x|\right);m=\min\limits_{[-3;2]}f\left(|x|\right)$ và $T=M+m.$ Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T=f(-3)+f(2).$ **B.** $T=f(-3)+f(0).$ **C.** $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2).$ **D.** $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0).$

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=5a(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a<0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$

x	-3		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2)=f(2); f(-3)=f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$.

+) $f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} f'(x)dx=5a\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)dx=\frac{11125a}{128}<0$

$\Rightarrow f(-3)=f(3)<f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (1)

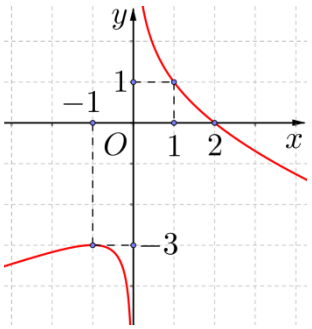
+) $f(2)-f(0)=\int\limits_{0}^{2} f'(x)dx=5a\int\limits_{0}^{2}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)dx=-23a>0$

$\Rightarrow f(-2)=f(2)>f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M=\max\limits_{[-3;2]} f(|x|)=f(-2)=f(2); m=\min\limits_{[-3;2]} f(|x|)=f(-3)$.

Vậy $T=M+m=f(-3)+f(2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng về cả hai phía như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$, biết rằng $f\left(1\right)=\dfrac{2}{5}$ và $f\left(-1\right)+f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$.

A. $\left|f\left(-1\right)\right|$. **B.** $\left|f\left(0\right)\right|$. **C.** $\left|f\left(2\right)\right|$. **D.** $\left|f\left(3\right)\right|$.

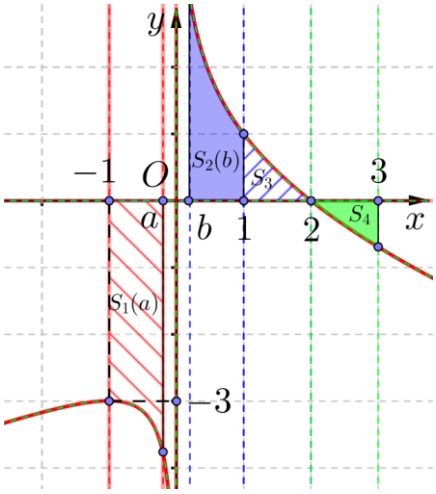
Lời giải:

Chọn B

Từ đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2$ và $f'\left(x\right)$ không xác định tại $x=0$.

Do $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên bảng biến thiên của $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$ là:

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$	$-$		‖	$+$		0		$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	↘		↗	$\frac{2}{5}$	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$
			$f(0)$						



Vì $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=f\left(0\right)$.

Gọi $S_1\left(a\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'\left(x\right)$, $y=0$, $x=-1$, $x=a$ với $a\in\left(-1;0\right)$ (Hình vẽ).

Ta có $f\left(-1\right)-f\left(0\right)=\lim\limits_{a\to 0^-}\left[f\left(-1\right)-f\left(a\right)\right]=\lim\limits_{a\to 0^-}\left(\int\limits_a^{-1}f'\left(x\right)\mathrm{d}x\right)=\lim\limits_{a\to 0^-}S_1\left(a\right)>3$

Suy ra $f\left(0\right)<f\left(-1\right)-3$ (*)

Gọi $S_2\left(b\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'\left(x\right)$, $y=0, x=b, x=1$ với $b\in\left(0;1\right)$.

Khi đó $f\left(1\right)-f\left(0\right)=\lim\limits_{b\to 0^+}\left[f\left(1\right)-f\left(b\right)\right]=\lim\limits_{b\to 0^+}\left(\int\limits_b^{1}f'\left(x\right)\mathrm{d}x\right)=\lim\limits_{b\to 0^+}S_2\left(b\right)>1$

Suy ra $f\left(0\right)<f\left(1\right)-1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2f\left(0\right)<f\left(-1\right)+f\left(1\right)-4$

$\Rightarrow 3f\left(0\right)<f\left(0\right)+f\left(-1\right)+f\left(1\right)-4=-4\Rightarrow f\left(0\right)<-\dfrac{4}{3}\Rightarrow\left|f\left(0\right)\right|>\dfrac{4}{3}$ (1)

Từ bảng biến thiên ta có $f\left(-1\right)>f\left(0\right)$.

Lại có $f(0)=-\left[f(1)+f(-1)\right]\Rightarrow\left|f(0)\right|=f(1)+f(-1)=\frac{2}{5}+f(-1)>f(-1)$

Do đó ta có $f(0)<f(-1)<\left|f(0)\right|\Rightarrow\left|f(0)\right|>\left|f(-1)\right|$ (2)

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, $y=0$, $x=1, x=2$.

Ta có $f(2)>f(1)=\frac{2}{5}>0$ và $f(2)-f(1)=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=S_3<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<f(2)<\frac{1}{2}+f(1)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$

Do đó $\left|f(0)\right|>\frac{4}{3}>\frac{9}{10}>f(2)=\left|f(2)\right|$ (3)

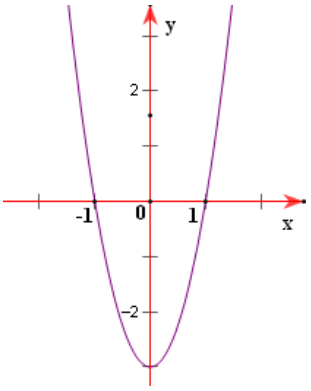
Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, $y=0$, $x=2, x=3$.

Ta có $f(2)-f(3)=\int_3^2 f'(x)\mathrm{d}x=S_4<1\Rightarrow f(3)>f(2)-1>f(1)-1=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$

Kết hợp với $f(3)<f(2)<\frac{9}{10}$ nên $\left|f(3)\right|<\frac{9}{10}$, suy ra $\left|f(3)\right|<\left|f(0)\right|$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\max\limits_{x\in[-1;3]}\left|f(x)\right|=\left|f(0)\right|$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1)=-5; f(3)=15$.



Xét hàm số $g(x)=\left|f(x)+m\right|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn A

Xét hàm số $h(x)=f(x)+m$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

Khi đó $h(1)=m-5$; $h(3)=m+15$.

Để hàm số $y=\left|h(x)\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y=h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1;3]$.

Trường hợp 1: $m+15<0\Leftrightarrow m<-15$ thì $\min\limits_{[1;3]}\left|f\left(x\right)+m\right|=\left|m+15\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-18\ \ (tm)\\ m=-12\ \ (l)\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m-5>0\Leftrightarrow m>5$ thì $\min\limits_{[1;3]}\left|f\left(x\right)+m\right|=m-5=3\Leftrightarrow m=8\ \ (tm)$.

Vậy $S=\{-18;8\}$.

Câu 8. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Xét hàm số: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$.

$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2};\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;2]\\ x=-2\notin[1;2]\end{array}\right.$.

$f'\left(x\right)>0,\forall x\in[1;2]$ nên $\max\limits_{[1;2]}y=\max\left\{\left|m+\dfrac{4}{3}\right|,\left|m+\dfrac{1}{2}\right|\right\}$

$\text{Max}\limits_{[1;2]}y=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left|m+\dfrac{4}{3}\right|=2\\ \left|m+\dfrac{4}{3}\right|>\left|m+\dfrac{1}{2}\right|\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left|m+\dfrac{1}{2}\right|=2\\ \left|m+\dfrac{1}{2}\right|>\left|m+\dfrac{4}{3}\right|\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{2}{3}\\ m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Câu 9. Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|x^2+ax+b\right|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $\max\left\{|A|,|B|\right\}\geq\dfrac{|A+B|}{2}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi $A=B$.

Ta có $\max\left\{|A|,|B|\right\}\geq\dfrac{|A-B|}{2}$ (2). Dấu "=" xảy ra khi $A=-B$.

Xét hàm số $g(x)=x^2+ax+b$, có $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-a}{2}$.

Trường hợp 1: $\dfrac{-a}{2}\notin[-1;3]\Leftrightarrow a\notin[-6;2]$. Khi đó $M=\max\left\{|1-a+b|,|9+3a+b|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có $M\geq|4+2a|>8$.

Trường hợp 2: $\dfrac{-a}{2}\in[-1;3]\Leftrightarrow a\in[-6;2]$. Khi đó $M=\max\left\{|1-a+b|,|9+3a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có $M\geq\max\left\{|5+a+b|,\left|b-\dfrac{a^2}{4}\right|\right\}$

$\Leftrightarrow M\geq\dfrac{1}{8}|20+4a+a^2|\Leftrightarrow M\geq\dfrac{1}{8}|16+(a+2)^2|$.

Suy ra $M\geq 2$.

Vậy M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là $M=2$ khi $\begin{cases}a=-2\\5+a+b=\dfrac{a^2}{4}-b\\1-a+b=9+3a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$.

Do đó $a+2b=-4$.

Câu 10. Cho hàm số $y=|2x^3-3x^2+m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[-1;3]}f(x)\leq 3$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 31. **D.** 39

Lời giải:

Chọn D

Xét $u=2x^3-3x^2+m$ có $u'=6x^2-6x;\ u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases}\min\limits_{[-1;3]}u=\min\left\{u(-1),u(3),u(0),u(1)\right\}=\min\left\{m-5,m+27,m,m-1\right\}=m-5\\\max\limits_{[-1;3]}u=\max\left\{u(-1),u(3),u(0),u(1)\right\}=\max\left\{m-5,m+27,m,m-1\right\}=m+27\end{cases}$.

- Nếu $m-5\geq 0\Leftrightarrow m\geq 5$ thì $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=m-5\leq 3\Leftrightarrow m\leq 8\Rightarrow m\in\{5;6;7;8\}$.
- Nếu $m+27\leq 0\Leftrightarrow m\leq -27$ thì $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=-(m+27)\leq 3\Leftrightarrow m\geq -30$.

$\Rightarrow m\in\{-30;-29;-28;-27\}$.

Nếu $(m-5)(m+27)<0 \Leftrightarrow -27<m<5$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=0$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-30;...;8\}$ có tất cả 39 số nguyên thỏa mãn.

DẠNG TOÁN 29: LOGARIT CÓ THAM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

✪ Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$

1. Các tính chất: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b,\ \log_a (a^{\alpha}) = \alpha$

*** Lôgarit của một tích**: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a (b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

*** Lôgarit của một thương**: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

- $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

*** Lôgarit của lũy thừa**: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α , ta có

- $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

*** Công thức đổi cơ số**: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Đặc biệt : $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

*** Lôgarit thập phân** và **Lôgarit tự nhiên :**

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết : $\log_{10} b = \log b = \lg b$

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e . Viết : $\log_e b = \ln b$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Biến đổi bằng công thức cơ bản.
- Biến đổi bằng công thức cơ bản 1 tham số.
- Biến đổi bằng công thức cơ bản nhiều tham số.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=2$. **B.** $4a+2b=1$. **C.** $4ab=1$. **D.** $2a+4b=1$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán biểu diễn các tham số trong biểu thức lôgarit.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đưa các logarit về cùng cơ số

B2: Áp dụng công thức.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

$$\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^a.3^{2b}\right)=\frac{1}{2}\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{a+2b}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a+2b=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a+4b=1$$

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I=\log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. Nên $\log_{\sqrt{a}} a=\log_{a^{\frac{1}{2}}} a=2\log_a a=2$.

Câu 2. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_a\left(a^3.a^{\frac{1}{2}}\right)$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{7}{2}$. **D.** $P=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$P=\log_a\left(a^3.a^{\frac{1}{2}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{7}{2}}\right)=\frac{7}{2}.$$

Câu 3. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $\log_{a^2} a$.

A. $\log_{a^2} a=0,5$. **B.** $\log_{a^2} a=-0,5$. **C.** $\log_{a^2} a=2$. **D.** $\log_{a^2} a=-2$.

Lời giải

Chọn A

$\log_{a^2} a = \frac{1}{2}\log_a a = \frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hai số thực dương a và b tùy ý. Giá trị của $\log\left(ab^{10}\right)$ bằng

A. $10+\log(ab)$. **B.** $10\log(ab)$. **C.** $10\log a+\log b$. **D.** $\log a+10\log b$.

Lời giải

Chọn D

Câu hỏi lí thuyết.

Câu 5. Cho $\log_a b=4$, $\log_b c=\frac{1}{2}$ thì giá trị của $\log_c a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_c a=\frac{1}{\log_a c}=\frac{1}{\log_a b.\log_b c}=\frac{1}{4.\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

Câu 6. Nếu $\log_a b=p$ thì $\log_a a^2b^4$ bằng

A. $4p+2$. **B.** $4p+2a$. **C.** a^2p^4. **D.** p^4+2a.

Lời giải

Chọn A

$\log_a a^2b^4=\log_a a^2+\log_a b^4=2+4\log_a b=2+4p$.

Câu 7. Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x+\log_4 x$.

A. $P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $P=2\sqrt{2}$. **D.** $P=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=\log_2^2 x-\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x$

$P=\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}\right)$.

A. $T=\frac{11}{4}$ **B.** $T=\frac{11}{24}$ **C.** $T=\frac{11}{6}$ **D.** $T=\frac{11}{12}$

Lời giải

Chọn C

$$T=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{27}.\sqrt[3]{9}\right)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}$$

$$=2\log_3\left(3^{\frac{3}{4}}.3^{\frac{2}{3}}\right)-1=2\log_3\left(3^{\frac{17}{12}}\right)-1=2.\frac{17}{12}-1=\frac{11}{6}$$

Câu 9. Tính: $B=\log_a\left(\frac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$

A. $\frac{173}{60}$. **B.** $\frac{177}{50}$. **C.** $\frac{173}{90}$. **D.** $\frac{173}{30}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{173}{60}}$. Vậy $B=\log_a a^{\frac{173}{60}}=\frac{173}{60}$.

Câu 10. Cho a,b là các số thực dương khác 1, thoả $\log_{a^2} b+\log_{b^2} a=1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a=\frac{1}{b}$. **B.** $a=b$. **C.** $a=\frac{1}{b^2}$. **D.** $a=b^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{a^2} b+\log_{b^2} a=1\Leftrightarrow\log_a b+\log_b a=2$

$\Leftrightarrow\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=2\Leftrightarrow\left(\log_a b-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\log_a b=1.$

Suy ra: $a=b$.

Câu 11. Đặt $2^a=3$, khi đó $\log_3\sqrt[3]{16}$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3}{4a}$. **C.** $\frac{4}{3a}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải

Ta có $2^a=3\Leftrightarrow\log_2 3=a\Rightarrow\log_3 2=\frac{1}{a}\Rightarrow\log_3\sqrt[3]{16}=\frac{4a}{3}$

Câu 12. Đặt $2^a=3$, khi đó $\log_3\sqrt[3]{16}$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3}{4a}$ **C.** $\frac{4}{3a}$ **D.** $\frac{4a}{3}$

Lời giải

Ta có: $2^a=3\Leftrightarrow a=\log_2 3$; Mặt khác $\log_3\sqrt[3]{16}=\log_3(2)^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\log_3 2=\frac{4}{3\log_2 3}=\frac{4}{3a}$

Câu 13. Cho $\log 3=a$. Giá trị của $\frac{1}{\log_{81}1000}$ bằng?

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{1}{12a}$. **D.** $12a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{1}{\log_{81}1000}=\log_{1000}81=\log_{10^3}3^4=\frac{4}{3}\log 3=\frac{4a}{3}$.

Câu 14. Cho a,b là các số thực dương và $a>1,\ a\neq b$ thỏa mãn $\log_a b=2$. Khi đó $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** -6. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Đổi về cơ số a ta có $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}=\frac{\log_a\sqrt{ab}}{\log_a\frac{a}{b}}=\frac{\frac{1}{2}(1+\log_a b)}{1-\log_a b}=\frac{\frac{1}{2}(1+2)}{1-2}=-\frac{3}{2}$.

Câu 15. Cho $\log_{ab^2}b=3$ (với $a>0,b>0,ab^2\neq 0,ab^2\neq 1$). Tính $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b^3}\right)$.

A. 5 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 14

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{ab^2}b=\frac{\log_a b}{\log_a(ab^2)}=\frac{\log_a b}{1+2\log_a b}=3\Leftrightarrow\log_a b=-\frac{3}{5}$.

Khi đó: $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b^3}\right)=\frac{\log_a\left(\frac{a}{b^3}\right)}{\log_a\sqrt{ab}}=\frac{1-3\log_a b}{\frac{1}{2}(1+\log_a b)}=14$.

Mức độ 2

Câu 16. Đặt $\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$. Khi đó $\log_{24}15$ bằng

A. $\frac{ab+1}{b}$. **B.** $\frac{a(b+1)}{3+ab}$. **C.** $\frac{b+1}{a+1}$. **D.** $\frac{ab+1}{a+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $ab=\log_2 5.\log_5 3=\log_2 3$.

- $\log_{24}15=\log_{24}3+\log_{24}5=\frac{1}{\log_3 24}+\frac{1}{\log_5 24}=\frac{1}{1+3\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 3+3\log_5 2}$

$=\frac{1}{1+\frac{3}{ab}}+\frac{1}{b+\frac{3}{a}}=\frac{ab+a}{ab+3}=\frac{a(b+1)}{ab+3}$.

Câu 17. Cho $a,b,c>0,c\neq 1$ và đặt $\log_c a=m$, $\log_c b=n$, $T=\log_{\sqrt{c}}\left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right)$. Tính T theo m,n.

A. $T=\frac{3}{2}m-\frac{3}{8}n$. **B.** $T=6n-\frac{3}{2}m$. **C.** $T=\frac{3}{2}m+\frac{3}{8}n$. **D.** $T=6m-\frac{3}{2}n$.

Lời giải

Chọn D

$$T=\log_{\sqrt{c}}\left(\frac{a^3}{\sqrt[4]{b^3}}\right)=\log_{\sqrt{c}}a^3-\log_{\sqrt{c}}\sqrt[4]{b^3}=6\log_c a-\frac{3}{2}\log_c b=6m-\frac{3}{2}n$$

Câu 18. Cho a, b là các số thực dương và $ab\neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab}a^2=3$ thì giá trị của $\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ bằng:

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}\log_{ab}\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\log_{ab}\frac{a^2}{ab}=\frac{1}{3}.\left(\log_{ab}a^2-\log_{ab}ab\right)=\frac{1}{3}.\left(\log_{ab}a^2-1\right)$

Giả thiết $\log_{ab}a^2=3$ nên $\log_{ab}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}.(3-1)=\frac{2}{3}$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức sau: $\log^2_{\frac{1}{a}}a^2+\log_{a^2}a^{\frac{1}{2}}\ (1\neq a>0)$.

A. $\frac{17}{4}$ **B.** $\frac{13}{4}$ **C.** $-\frac{11}{4}$ **D.** $-\frac{15}{4}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log^2_{\frac{1}{a}}a^2+\log_{a^2}a^{\frac{1}{2}}=\left(-2\log_a a\right)^2+\frac{1}{4}\log_a a=\frac{17}{4}$.

Câu 20. Cho a,b,c là các số thực dương $(a,b\neq 1)$ và $\log_a b=5,\log_b c=7$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{b}{c}\right)$.

A. $P=\frac{2}{7}$. **B.** $P=-15$. **C.** $P=\frac{1}{14}$. **D.** $P=-60$.

Lời giải

Chọn D

Vì $P=2\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=2(\log_a b-\log_a c)=2(5-\log_a b.\log_b c)=2(5-5.7)=-60$.

Câu 21. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{9^b}{3^a}\right)=\log_{\frac{1}{27}}\sqrt[3]{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a-2b=\frac{1}{18}$. **B.** $a+2b=\frac{1}{18}$. **C.** $2b-a=\frac{1}{18}$. **D.** $2a-b=\frac{1}{18}$.

Lời giải

Chọn A

$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{9^b}{3^a}\right)=\log_{\frac{1}{27}}\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3^2}}3^{2b-a}=\log_{3^{-3}}3^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow 2\left(2b-a\right)=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\Leftrightarrow a-2b=\frac{1}{18}$.

Câu 22. Đặt $2^a=3$, khi đó $\log_3\sqrt[3]{16}$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{3}{4a}$. **C.** $\frac{4}{3a}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^a=3\Leftrightarrow \log_2 3=a\Rightarrow \log_3 2=\frac{1}{a}\Rightarrow \log_3 \sqrt[3]{16}=\frac{4a}{3}$

Câu 23. Đặt $2^a=3$, khi đó $\log_3 \sqrt[3]{16}$ bằng

A. $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3}{4a}$ **C.** $\frac{4}{3a}$ **D.** $\frac{4a}{3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^a=3\Leftrightarrow a=\log_2 3$; Mặt khác $\log_3 \sqrt[3]{16}=\log_3 (2)^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\log_3 2=\frac{4}{3\log_2 3}=\frac{4}{3a}$

Câu 24. Cho $\log 3=a$. Giá trị của $\frac{1}{\log_{81}1000}$ bằng?

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{1}{12a}$. **D.** $12a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{1}{\log_{81}1000}=\log_{1000}81=\log_{10^3}3^4=\frac{4}{3}\log 3=\frac{4a}{3}$.

Câu 25. Cho a,b là các số thực dương và $a>1$, $a\neq b$ thỏa mãn $\log_a b=2$. Khi đó $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** -6. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đổi về cơ số a ta có $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}=\frac{\log_a\sqrt{ab}}{\log_a\frac{a}{b}}=\frac{\frac{1}{2}(1+\log_a b)}{1-\log_a b}=\frac{\frac{1}{2}(1+2)}{1-2}=-\frac{3}{2}$.

Câu 26. Cho $\log_{ab^2}b=3$ (với $a>0, b>0, ab^2\neq 0, ab^2\neq 1$). Tính $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b^3}\right)$.

A. 5 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 14

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{ab^2}b=\frac{\log_a b}{\log_a(ab^2)}=\frac{\log_a b}{1+2\log_a b}=3\Leftrightarrow \log_a b=-\frac{3}{5}$.

Khi đó: $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b^3}\right)=\frac{\log_a\left(\frac{a}{b^3}\right)}{\log_a\sqrt{ab}}=\frac{1-3\log_a b}{\frac{1}{2}(1+\log_a b)}=14$.

Câu 27. Đặt $\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$. Khi đó $\log_{24}15$ bằng

A. $\frac{ab+1}{b}$. **B.** $\frac{a(b+1)}{3+ab}$. **C.** $\frac{b+1}{a+1}$. **D.** $\frac{ab+1}{a+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $ab=\log_2 5.\log_5 3=\log_2 3$.

- $\log_{24}15=\log_{24}3+\log_{24}5=\dfrac{1}{\log_3 24}+\dfrac{1}{\log_5 24}=\dfrac{1}{1+3\log_3 2}+\dfrac{1}{\log_5 3+3\log_5 2}$

$=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{ab}}+\dfrac{1}{b+\dfrac{3}{a}}=\dfrac{ab+a}{ab+3}=\dfrac{a(b+1)}{ab+3}$.

Câu 28. Cho a là số thực dương khác 1 và $b>0$ thỏa $\log_a b=\sqrt{3}$. Tính $A=\log_{ab^2}\dfrac{a}{b^2}$ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{3}-13}{11}$. **B.** $\dfrac{13-4\sqrt{3}}{11}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A=\log_{ab^2}\dfrac{a}{b^2}=\log_{ab^2}a-\log_{ab^2}b^2$

$=\dfrac{1}{\log_a ab^2}-\dfrac{2}{\log_b ab^2}=\dfrac{1}{\log_a a+\log_a b^2}-\dfrac{2}{\log_b a+\log_b b^2}$

$=\dfrac{1}{1+2\log_a b}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_a b}+2}=\dfrac{1}{1+2\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=\dfrac{1-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}-13}{11}$.

Câu 29. Tính: $B=\log_a\left(\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)$

A. $\dfrac{173}{60}$. **B.** $\dfrac{177}{50}$. **C.** $\dfrac{173}{90}$. **D.** $\dfrac{173}{30}$.

Ta có $\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{173}{60}}$. Vậy $B=\log_a a^{\frac{173}{60}}=\dfrac{173}{60}$.

Câu 30. Cho biết $a,b,c>1$ thỏa mãn $\dfrac{2}{\log_a c^6}+\dfrac{3}{\log_b c^6}=\dfrac{1}{6}$. Tìm kết luận đúng

A. $a^2b^3=c$. **B.** $a^3b^2=c$. **C.** $a^2b^3=c^6$. **D.** $a^2b^3=c^{\frac{37}{6}}$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức đổi cơ số ta có

$\dfrac{2}{\log_a c^6}+\dfrac{3}{\log_b c^6}=2\log_{c^6}a+3\log_{c^6}b=\log_{c^6}\left(a^2b^3\right)\Rightarrow\log_{c^6}\left(a^2b^3\right)=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow a^2b^3=c$.

Mức độ 3

Câu 31. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_b a\sqrt{b}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ và $\log_b a>0$. Tính $m=\log_b a$

A. $m=\dfrac{13}{3}$. **B.** $m=\dfrac{13}{6}$. **C.** $m=\dfrac{7}{6}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_b a\sqrt{b}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\Leftrightarrow\log_b a+\frac{1}{2}=\frac{\log_b\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}}{\log_b\frac{\sqrt{a}}{b}}\Leftrightarrow\log_b a+\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{3}\log_b a-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log_b a-1}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\log_b a\right)^2-\frac{13}{12}\log_b a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_b a=0\\ \log_b a=\frac{13}{6}\end{array}\right.\Rightarrow\log_b a=\frac{13}{6}$ vì $\log_b a>0$.

Câu 32. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}a+2\log_{\frac{1}{4}}\frac{4}{b}=0$.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $ab=4$. **B.** $a^2b=16$. **C.** $ab^2=16$. **D.** $ab=8$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết: $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}a+2\log_{\frac{1}{4}}\frac{4}{b}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2\frac{4}{b}=0\Leftrightarrow\log_2\sqrt{a}=\log_2\frac{4}{b}$

$\Leftrightarrow\sqrt{a}=\frac{4}{b}\Leftrightarrow ab^2=16$

Câu 33. Cho a là số thực dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a c+\log_b c=\log_a 2020.\log_b c$.Mệnh đề nào dưới đây đúng?.

A. $abc=2020$. **B.** $ac=2020$. **C.** $bc=2020$. **D.** $ab=2020$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a c+\log_b c=\log_a 2020.\log_b c$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=\frac{\log_c 2020}{\log_c a}.\frac{1}{\log_c b}$ (công thức đổi cơ số)

$\Leftrightarrow\log_c a+\log_c b=\log_c 2020$

$\Leftrightarrow\log_c ab=\log_c 2020\Leftrightarrow ab=2020$.

Câu 34. Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_b\sqrt{c}=x^2+1$ và $\log_{a^2}\sqrt{b^3}=\log_{\sqrt[3]{c}}a=x$. Tính $S=x^2\left(x^2+1\right)$.

A. $S=\frac{8}{9}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{9}{8}$. **D.** $S=\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_b\sqrt{c}=x^2+1\Leftrightarrow\log_b c=2\left(x^2+1\right)$,

$\log_{a^2}\sqrt{b^3}=x\Leftrightarrow\frac{3}{4}\log_a b=x\Leftrightarrow\log_a b=\frac{4}{3}x$,

$$\log_{\sqrt[3]{c}} a = x \Leftrightarrow 3.\log_c a = x \Leftrightarrow \log_c a = \frac{x}{3}.$$

Khi đó: $\log_a b.\log_b c.\log_c a = \frac{4}{3}x.2\left(x^2+1\right).\frac{x}{3} = \frac{8}{9}x^2\left(x^2+1\right)$

Mà: $\log_a b.\log_b c.\log_c a = \log_a b.\frac{\log_a c}{\log_a b}.\frac{1}{\log_c a} = 1,$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}x^2\left(x^2+1\right)=1 \Leftrightarrow S = x^2\left(x^2+1\right) = \frac{9}{8}.$$

Câu 35. Đặt $\log_3 5 = a$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_{15} 75 = \frac{a+1}{2a+1}$. **B.** $\log_{15} 75 = \frac{2a+1}{a+1}$. **C.** $\log_{15} 75 = \frac{2a-1}{a+1}$. **D.** $\log_{15} 75 = \frac{2a+1}{a-1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{15} 75 = \log_{15} 5^2 + \log_{15} 3 = 2\log_{15} 5 + \log_{15} 3 = \frac{2}{\log_5 5 + \log_5 3} + \frac{1}{\log_3 5 + \log_3 3} = \frac{2}{1+a^{-1}} + \frac{1}{a+1}$$

Thu gọn ta có $\log_{15} 75 = \frac{2a+1}{a+1}$.

Câu 36. Cho $a = \log_2 m$ với $0 < m \neq 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m = \frac{3+a}{a}$. **B.** $\log_m 8m = (3-a)a$. **C.** $\log_m 8m = \frac{3-a}{a}$. **D.** $\log_m 8m = (3+a)a$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_m 8m = \log_m m + \log_m 8 = 1 + \log_m 2^3 = 1 + 3\log_m 2 = 1 + \frac{3}{a} = \frac{3+a}{a}.$$

Câu 37. Gọi c là cạnh huyền, a, b là hai cạnh góc vuông của môt tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **B.** $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a > 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

C. $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a < 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ **D.** $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \log_{b+c} a.\log_{c-b} a$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow a = (b-c)(b+c)$

$$\Leftrightarrow \log_a (c-b) + \log_a (c+b) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} = 2$$

$\Leftrightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ (đpcm).

Chọn A.

Câu 38. Cho các số dương a, b thỏa mãn $4a^2 - 9b^2 = 13ab$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. **B.** $\frac{1}{4}\log(2a+3b) = 3\log a + 2\log b$.

C. $\log\sqrt{2a+3b} = \log\sqrt{a} + 2\log\sqrt{b}$. **D.** $\log\left(\frac{2a+3b}{4}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4a^2 + 9b^2 = 13ab \Leftrightarrow (2a+3b)^2 = 25ab \Rightarrow 2b+3b = 5\sqrt{ab}$.

Lấy logarit thập phân $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)=\log\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\left(\log a+\log b\right)$.

Câu 39. Giả sử p, q là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}\left(p+q\right)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$?

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}\left(p+q\right)\Rightarrow p=16^t$, $q=20^t$, $p+q=25^t$. Suy ra :

$$16^t+20^t=25^t\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^{2t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{t}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ \left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vì $\left(\frac{4}{5}\right)^{t}>0$ nên $\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta được $\frac{p}{q}=\frac{16^t}{20^t}=\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 40. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4\left(2x+2y\right)$. Tính $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_6 x=\log_9 y=\log_4\left(2x+2y\right)=t$, suy ra $x=6^t$, $y=9^t$ và $2x+2y=4^t$.

Có phương trình: $2.6^t+2.9^t=4^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{t}-2=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=1+\sqrt{3}$.

Mà $\frac{x}{y}=\frac{6^t}{9^t}=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}$ nên $\frac{x}{y}=1+\sqrt{3}$.

Câu 41. Cho các số $a,b>0$ thỏa mãn $\log_3 a=\log_6 b=\log_2\left(a+b\right)$. Giá trị $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ bằng

A. 18. **B.** 45. **C.** 27. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_3 a=\log_6 b=\log_2(a+b)\Rightarrow\begin{cases}a=3^t\\ b=6^t\\ a+b=2^t\end{cases}\Rightarrow 3^t+6^t=2^t\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t+3^t=1\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^t+3^t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t)=\left(\frac{3}{2}\right)^t.\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3^t.\ln 3>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $(1)\Leftrightarrow f(t)=f(-1)\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=45.$

Câu 42. Nếu $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$ thì $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)=k\Rightarrow\begin{cases}a=4^k\\ b=6^k\\ a+b=9^k\end{cases}$.

Do đó: $4^k+6^k=9^k\Leftrightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^k+\left(\frac{6}{9}\right)^k=1\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}+\left(\frac{2}{3}\right)^k=1$ (*)

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^k\ (t>0)$, lúc đó phương trình (*) trở thành: $t^2+t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (l)\end{array}\right.$.

Do đó: $\frac{a}{b}=\frac{4^k}{6^k}=\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 43. Với các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$. **B.** $\frac{1}{2}(1+\log_2 a+\log_2 b)$.

C. $1+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$. **D.** $2+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^2+b^2=6ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=6ab+2ab\Leftrightarrow(a+b)^2=8ab\ (*)$.

Do $a,b>0\Rightarrow\begin{cases}ab>0\\ a+b>0\end{cases}$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$ ta được:

$\log_2(a+b)^2=\log_2(8ab)\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)=3+\log_2 a+\log_2 b$

$\Leftrightarrow \log_2(a+b)=\frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$.

Mức độ 4

Câu 44. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2\frac{1-xy}{x+y}=2xy+x+y-3$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+\frac{5}{4}y$ là $\frac{a}{b}$, trong đó $a,b\in Z^*$ $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a-b$ là

A. 5 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\log_2\frac{1-xy}{x+y}=2xy+x+y-3\Leftrightarrow \log_2(1-xy)-\log_2(x+y)=(x+y)+2(xy-1)-1$

$\Leftrightarrow \log_2 2(1-xy)+2(1-xy)=\log_2(x+y)+(x+y)$

Xét hàm số : $f(t)=t+\log_2 t$, $t>0$.

Ta có: $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 2}>0\ \forall t>0$. Vậy hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2(1-xy)=x+y\Leftrightarrow y=\frac{2-x}{1+2x}$. Khi đó: $x+\frac{5}{4}y=x+\frac{5(2-x)}{4(1+2x)}$.

Vì $x,y>0\Rightarrow 0<x<2$

Xét hàm số: $f(x)=x+\frac{5(2-x)}{4(1+2x)}$, $x\in(0;2)$ .Ta có: $f'(x)=1-\frac{25}{4(1+2x)^2}$;

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4(1+2x)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{4}\ (t/m)\\ x=\frac{-7}{4}\ (ktm)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{3}{4}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{11}{8}$	↗	

Vậy: $x+\frac{5}{4}y$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{11}{8}$. Ta có $\begin{cases}a=11\\ b=8\end{cases}\Rightarrow a-b=3$

Câu 45. Cho a,b,c là ba số thực dương, $a>1$ và thỏa mãn $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0$ .Số bộ (a,b,c) thỏa mãn điều kiện đã cho là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B

Ta có: $b^3c^3+\frac{bc}{4}-b^2c^2=bc\left(b^2c^2-bc+\frac{1}{4}\right)=bc\left(bc-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0 \Rightarrow b^3c^3+\frac{bc}{4}\geq b^2c^2$

$\Rightarrow \log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}\geq \log_a^2(bc)+\log_a b^4c^4+4+\sqrt{4-c^2}$

$=\left(\log_a(bc)+2\right)^2+\sqrt{4-c^2}\geq 0$

Nên $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a(bc)=-2\\ 4-c^2=0\\ bc=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\frac{1}{4}\\ c=2\end{cases}$.

Có 1 bộ số (a,b,c) thỏa mãn bài toán.

Câu 46. Cho các số thực dương x,y khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x\ x-y\ =\log_y\ x+y\end{cases}$.

Giá trị của x^2+xy-y^2 bằng

A.0. **B.**3. **C.**1. **D.**2.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x>y$.

Ta có

$\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x\ x-y\ =\log_y\ x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_x y=\frac{1}{\log_x y}\\ \log_x\ x-y\ =\log_y\ x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{x}\\ x=y\end{array}\right.\\ \log_x\ x-y\ =\log_{x^{-1}}\ x+y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ \log_x\ x-y\ +\log_x\ x+y\ =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ \log_x\ x^2-y^2\ =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=1\\ x^2-y^2=1\end{cases} \Rightarrow x^2+xy-y^2=2$.

Câu 47. Cho a , b là các số thực và hàm số $f(x)=a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x.\cos(2018x)+6$. Biết $f\left(2018^{\ln 2019}\right)=10$. Tính $P=f\left(-2019^{\ln 2018}\right)$

A. $P=4$ **B.** $P=2$ **C.** $P=-2$ **D.** $P=10$

Lời giải

Chọn B

• Xét $g(x)=f(x)-6=a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x.\cos(2018x)$.

Suy ra: $f(x)=g(x)+6$.

Ta có $\sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq -x+x=0$.

Do đó tập xác định của hàm số $y=g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$$\begin{aligned}g(-x)&=a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+b\sin(-x).\cos(-2018x)\\&=a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}-b\sin(x).\cos(2018x)\\&=-a\log^{2019}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-b\sin(x).\cos(2018x)=-g(x)\end{aligned}$$

Vậy hàm số $y=g(x)$ là hàm lẻ.

• Ta có: $2018^{\ln 2019}=2019^{\ln 2018}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}P=f\left(-2019^{\ln 2018}\right)&=f\left(-2018^{\ln 2019}\right)\\&=g\left(-2018^{\ln 2019}\right)+6\\&=\left[-g\left(2018^{\ln 2019}\right)\right]+6\\&=-\left[f\left(2018^{\ln 2019}\right)-6\right]+6\\&=12-f\left(2018^{\ln 2019}\right)\\&=2\end{aligned}$$

Câu 48. Cho a, b, c là ba số thực dương, $a>1$ và thỏa mãn $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0$. Số bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn điều kiện đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $4-c^2\geq 0\Leftrightarrow -2\leq c\leq 2$, kết hợp giả thiết ta có $0<c\leq 2$.

Do $a>1$ nên ta có $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\frac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}$

$\geq \log_a^2(bc)+\log_a\left(2\sqrt{b^3c^3.\frac{bc}{4}}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=\log_a^2(bc)+4\log_a(bc)+4+\sqrt{4-c^2}$

$=\left(\log_a(bc)+2\right)^2+\sqrt{4-c^2}\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a(bc)+2=0\\ \sqrt{4-c^2}=0\\ b^3c^3=\dfrac{bc}{4}\\ a>1\\ b>0\\ 0<c\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=\dfrac{1}{a^2}\\ c=2\\ bc=\dfrac{1}{2}\\ a>1\\ b>0\\ 0<c\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=2\end{cases}$.

Vậy có duy nhất một bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 49. Cho a,b là các số dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\le b<a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+4.\left(\log_b a-1\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\log_b a}}+4.\left(\log_b a-1\right)$

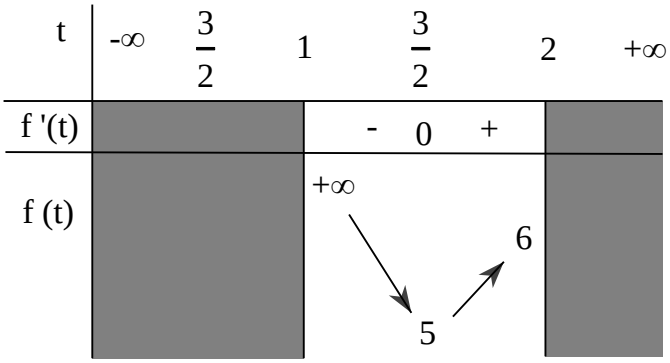
Đặt $t=\log_b a$. Vì $\sqrt{a}\le b<a\Rightarrow\log_b\left(\sqrt{a}\right)\le 1\le\log_b a\Leftrightarrow\dfrac{t}{2}<1<t\Leftrightarrow 1<t<2$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{t}}+4(t-1)=\dfrac{t}{t-1}+4(t-1)$ với $t\in(1;2)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t-1}+4(t-1)$ với $t\in(1;2)$.

$f'(t)=\dfrac{-1}{(t-1)^2}+4,\ f'(t)=0\Leftrightarrow(t-1)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}(tm)\\ t=\dfrac{1}{2}(l)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 5.

Câu 50. Cho các số thực a, b thay đổi, thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1.$ Khi biểu thức $P = \log_{3a} b + \log_b\left(a^4 - 9a^2 + 81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. $3+9^{\sqrt{2}}$ **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$ **C.** $2+9\sqrt{2}$ **D.** $3+3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Do $a^4 - 9a^2 + 81 \geq 9a^2 \Leftrightarrow \left(a^2 - 9\right)^2 \geq 0$ đúng $\forall a > \frac{1}{3}$; Dấu bằng xảy ra khi $a = 3$

Suy ra $P \geq \log_{3a} b + \log_b (3a)^2 = \log_{3a} b + 2\log_b 3a \geq 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 3 \\ \log_{3a} b = 2\log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy, khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}.$

Câu 51. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y^x\left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) \geq \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \geq y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} \geq \frac{y}{\ln y + e^y}$ (*) (vì $y = e^x + \ln x$ có

$y' = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1$ nên $y \geq y(1) = e > 0$)

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{t}{\ln t+e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t)=\dfrac{\ln t+e^t-1-te^t}{(\ln t+e^t)^2}$. Với hàm số

$g(t)=\ln t+e^t-1-te^t$ có $g'(t)=(\ln t+e^t-1-te^t)'=\dfrac{1}{t}-te^t<0,\forall t>1$

Nên $g(t)<g(1)=-1\Rightarrow f'(t)<0;\forall t>1$

$\Rightarrow y=f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x)\ge f(y)\Rightarrow y\ge x>1$

Khi đó $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}\ge\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{2}\log_x y.\dfrac{1}{\log_x y}}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\dfrac{1}{2}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow(\log_x y)^2=2\Leftrightarrow y=x^{\sqrt{2}}$

Vậy: $P_{\min}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Để $\dfrac{1-y}{x+3xy}>0$ mà từ giả thiết $x,y>0$ suy ra $1-y>0\Leftrightarrow y<1$. Vậy ĐKXĐ: $x>0;0<y<1$.

Ta có: $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4\Leftrightarrow\dfrac{1-y}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-4}\Leftrightarrow\dfrac{3(1-y)}{x+3xy}=3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{3(1-y)}{x+3xy}=\dfrac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}}\Leftrightarrow(3-3y).3^{3-3y}=(3xy+x).3^{3xy+x}$(*)

Xét $f(t)=t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=3^t+t.3^t.\ln 3>0$ với $\forall t>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y)=f(3xy+x)$ với $3-3y>0,3xy+x>0$ nên $3-3y=3xy+x\Leftrightarrow y=\dfrac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P=x+y=x+\dfrac{3-x}{3(x+1)}=(x+1)+\left(\dfrac{3-x}{3(x+1)}+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}$

$P=(x+1)+\dfrac{4}{3(x+1)}-\dfrac{4}{3}\ge 2\sqrt{(x+1).\dfrac{4}{3(x+1)}}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\dfrac{4}{3(x+1)}\\ y=\dfrac{3-x}{3(x+1)}\\ x>0;0<y<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}\end{cases}$.

Câu 53. Cho a,b,c là ba số thực dương, $a>1$ và thỏa mãn $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0$. Số bộ (a,b,c) thỏa mãn điều kiện đã cho là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn B

Ta có: $b^3c^3+\dfrac{bc}{4}-b^2c^2=bc\left(b^2c^2-bc+\dfrac{1}{4}\right)=bc\left(bc-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\ge b^2c^2$

$\Rightarrow\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}\ge\log_a^2(bc)+\log_a b^4c^4+4+\sqrt{4-c^2}$

$=\left(\log_a(bc)+2\right)^2+\sqrt{4-c^2}\ge 0$

Nên $\log_a^2(bc)+\log_a\left(b^3c^3+\dfrac{bc}{4}\right)^2+4+\sqrt{4-c^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a(bc)=-2\\ 4-c^2=0\\ bc=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=2\end{cases}$.

Có 1 bộ số (a,b,c) thỏa mãn bài toán.

Câu 54. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+1)\ln x+(y+1)\ln y$.

A. $P_{\max}=10$. **B.** $P_{\max}=0$. **C.** $P_{\max}=1$. **D.** $P_{\max}=\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}.2^{\ln 2}\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)}=2^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow\ln(x+y)=\log\left(2^{\ln 10}\right)\Leftrightarrow\ln(x+y)=\ln 10.\log 2\Leftrightarrow e^{\ln(x+y)}=e^{\ln 10.\log 2}$

$\Leftrightarrow x+y=10^{\log 2}\Leftrightarrow x+y=2$.

Do đó $P=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-\ln(2-x)-\dfrac{3-x}{2-x}=\ln\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{2-2x}{x(2-x)}$.

$f''(x)=-\dfrac{1}{(2-x)^2}.\dfrac{2-x}{x}-\dfrac{2x^2-4x+4}{\left(2x-x^2\right)^2}<0,\forall x\in(0;2)$

Do đó $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;2)$

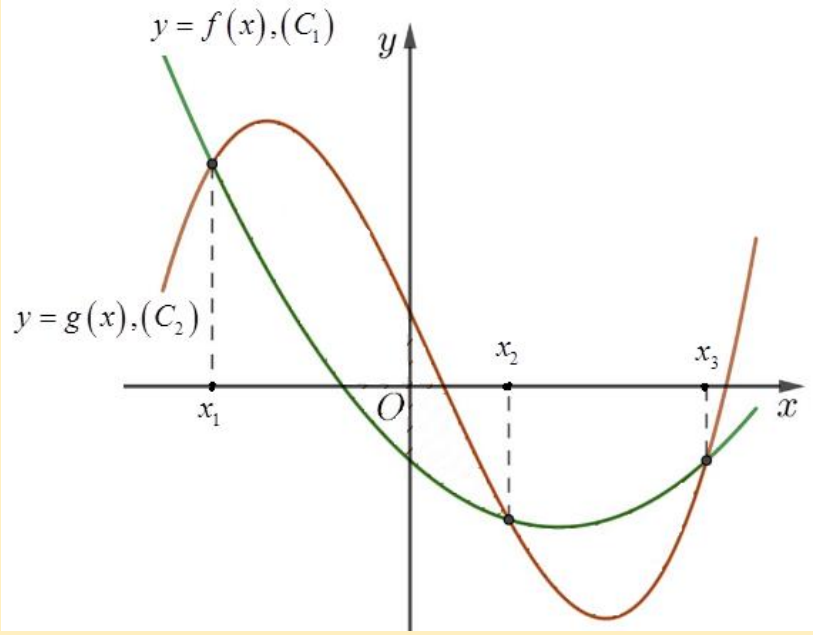
Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x)=0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x)=f(1)=0$.

DẠNG TOÁN 30: SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cho 2 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2).



Để tìm tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta làm như sau:

B1) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2): $\boxed{f(x)=g(x)}$ (*).

B2) Giải phương trình (*) tìm x, từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

B3) Tọa độ giao điểm của 2 đồ thị là $(x;y)$ đã tìm ở **B1**.

Chú ý:

1. Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của (C_1) và (C_2).

2. Nếu phương trình (*) *vô nghiệm* thì (C_1) *không cắt* (C_2).

3. Nếu phương trình (*) *có nghiệm bội chẵn* x_0 (tức có dạng $(x-x_0)^{2n}.h(x)=0, n\in\mathbb{Z}^+$) thì (C_1) *tiếp xúc với* (C_2) tại điểm có hoành độ x_0.

4. Nếu phương trình (*) *có k nghiệm đơn* thì (C_1) *cắt* (C_2) tại *k* điểm phân biệt.

5. Theo hình vẽ trên thì (C_1) *cắt* (C_2) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 nên phương trình $f(x)=g(x)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 và ngược lại.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Lý thuyết về đường tiệm cận.
- Nhận dạng bảng biến thiên, nhận dạng hàm số.

- Tìm đường tiệm cận (biết BBT, đồ thị).
- Tìm đường tiệm cận (biết y).
- Đếm số tiệm cận (Biết BBT, đồ thị).
- Đếm số tiệm cận (biết y).
- Biện luận số đường tiệm cận.
- Tiệm cận thỏa mãn điều kiện.
- Tổng hợp tiệm cận với diện tích, góc, khoảng cách.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định phương trình Ox là: $y=0$.

B2: Giải phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x+1=0$.

B3: Giải phương trình tìm được ba nghiệm phân biệt nên có ba giao điểm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 1,53 \\ x\approx 0,34 \\ x\approx -1,87 \end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Cho hàm số $y=x^4-4x^2$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-4x^2=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Vậy có ba giao điểm.

Câu 2. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+4$ và trục hoành.

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4-4x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=2+\sqrt{6}>0(TM)\\x^2=2-\sqrt{6}<0(KTM)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2+\sqrt{6}}\\x=-\sqrt{2+\sqrt{6}}\end{array}\right.$$

Vậy có hai giao điểm.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=x^4-10x^2+9$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4-10x^2+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm3\end{array}\right.$$

Vậy có bốn giao điểm.

Câu 4. Đồ thị hàm số $y=x^4+5x^2+6$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4+5x^2+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=-2<0(KTM)\\x^2=-3<0(KTM)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình vô nghiệm nên không có giao điểm.

Câu 5. Đường thẳng $y=3x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+2$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

A. 9. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-x^2+x+2=3x+2\Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=2\\x=-1\Rightarrow y=-1\\x=2\Rightarrow y=8\end{array}\right.$$

Vậy tổng tung độ các giao điểm là $2-1+8=9$.

Câu 6. Tọa độ giao điểm M của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x-1}$ với trục hoành là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+5}{x-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\2x+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x=-\dfrac{5}{2}(TMĐK)\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$$

Vậy $M\left(-\dfrac{5}{2};0\right)$.

Câu 7. Đường thẳng $y=2x-2$ có bao nhiêu điểm chung với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-x-6}{x+3}$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d:y=2x-2$ và đồ thị $(C):y=\dfrac{x^2-x-6}{x+3}$

$$\frac{x^2-x-6}{x+3}=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -3\\x^2-x-6=(2x-2)(x+3)\end{cases}(1)$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $x\neq -3$)

Suy ra d và (C) có hai điểm chung.

Câu 8. Tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+3}$ và $y=x+1$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải:

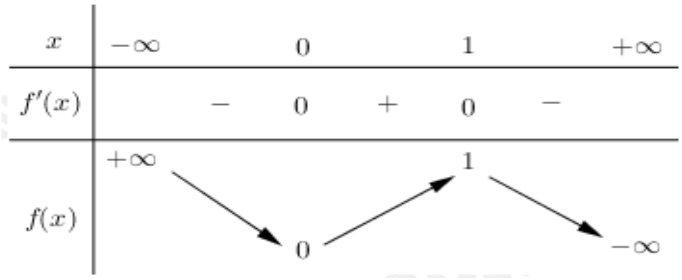
Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x+8}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\geq 0\\ x+8=(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ x+8=x^2+4x+4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ x^2+3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ \left[\begin{array}{l}x=1(n)\\ x=-4(l)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Phương trình này có một nghiệm nên hai đồ thị có một giao điểm.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $2f(x)-1=0$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

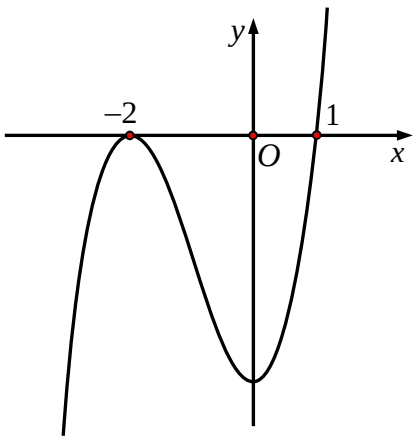
Lời giải:

Chọn A

Ta có $2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt nên phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x)=3$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $2f\left(x\right)=3\Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}$.

Dựa đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại một điểm nên phương trình đã cho có một nghiệm.

↳ Mức độ 2

Câu 1. Đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 32.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+3}{x-1}=x\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=-1\\x=3\Rightarrow y=3\end{array}\right.$.

Khi đó $A\left(-1;-1\right)$, $B\left(3;3\right)$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(4;4\right)\Rightarrow AB=4\sqrt{2}$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-m+3=0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $-1\le m<3$. **B.** $-1<m\le 3$. **C.** $-1\le m\le 3$. **D.** $-1<m<3$.

Lời giải:

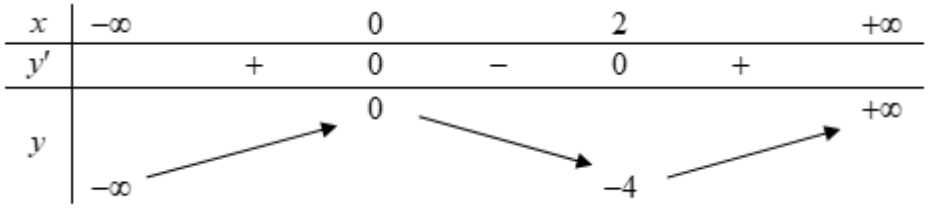
Chọn D

Ta có $x^3-3x^2-m+3=0\Leftrightarrow x^3-3x^2=m-3$.

Phương trình này có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $d:\ y=m-3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2$ tại ba điểm phân biệt.

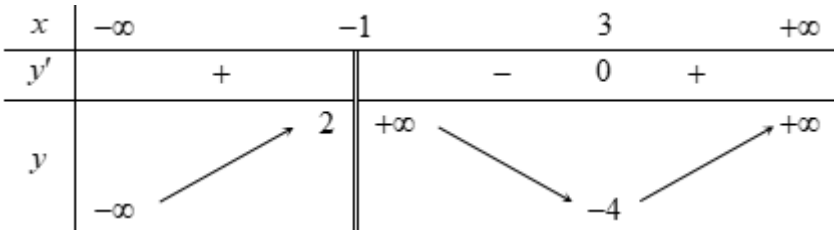
Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-6x$, $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<m-3<0 \Leftrightarrow -1<m<3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau



Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)-2m=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt

A. $-2\le m<1$. **B.** $-2<m<1$. **C.** $-2\le m\le 1$. **D.** $-2<m\le 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)-2m=0\Leftrightarrow f(x)=2m$.

Số nghiệm phương trình $f(x)=2m$ là số giao điểm của hai đường $y=f(x)$ và $y=2m$.

Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-4<2m<2\Leftrightarrow -2<m<1$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=4-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3$ tại bốn điểm phân biệt?

A. $m>17$. **B.** $-\frac{13}{4}<m<\frac{3}{4}$. **C.** $1<m<17$. **D.** $-13<m<3$.

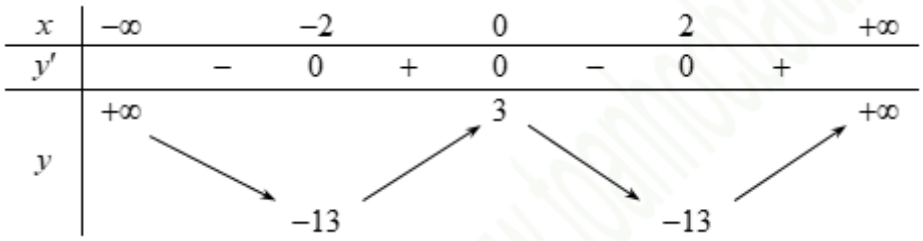
Lời giải

Chọn C

Xét $y=x^4-8x^2+3$.

Có $y'=4x^3-16x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên trên, để để đường thẳng $y=4-m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3$ tại bốn điểm phân biệt thì $-13<4-m<3\Leftrightarrow 1<m<17$.

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3-6x^2+2m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. 17. **B.** 31. **C.** 33. **D.** 15.

Lời giải.

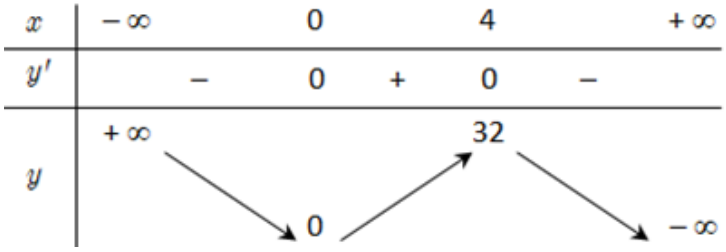
Chọn D

Ta có $x^3-6x^2+2m=0\Leftrightarrow 2m=-x^3+6x^2\ (*)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét $y=-x^3+6x^2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+12x$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi $0<2m<32$ $\Leftrightarrow 0<m<16$.

Vì m nguyên nên $m\in\{1;2;3;...;15\}$

Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 6. Tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8x^2+3m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt là

A. $0<m<\frac{16}{3}$. **B.** $-16<m<0$. **C.** $0\le m\le\frac{16}{3}$. **D.** $-16\le m\le 0$.

Lời giải

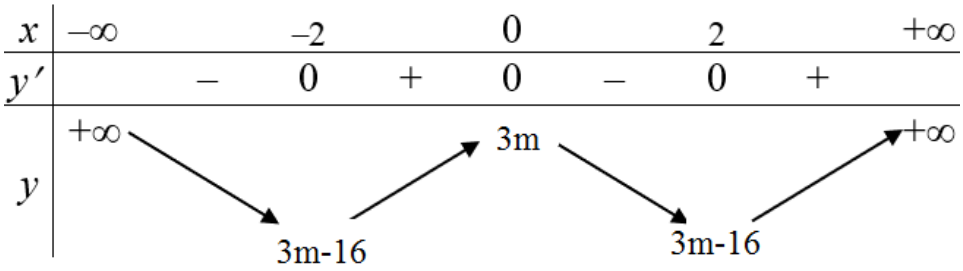
Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4-8x^2+3m=0$.

Xét hàm số $y=x^4-8x^2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

BBT:



Dựa vào BBT, ta thấy đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m - 16 < 0 < 3m \Leftrightarrow 0 < m < \frac{16}{3}$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

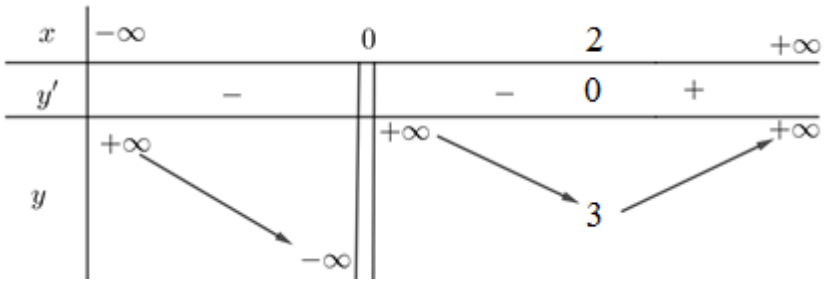
Chọn B

Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ cắt trục Ox tại điểm $A(2;0)$.

Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ cắt trục Oy tại điểm $B(0;-2)$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.|2|.|-2| = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2|f(4x-3)| - 7 = 0$ là.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

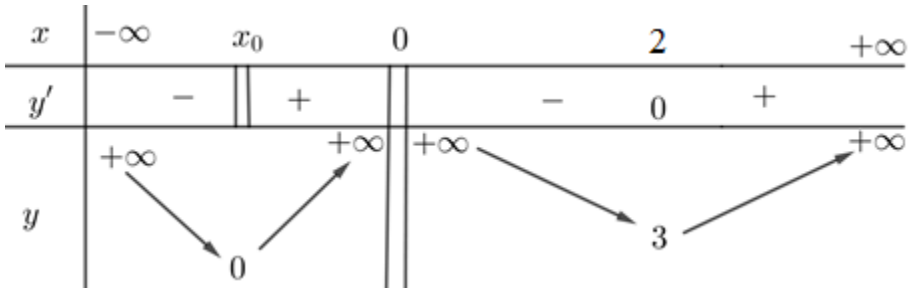
Lời giải.

Chọn A

Đặt $t = 4x - 3$, ta có phương trình trở thành $|f(t)| = \frac{7}{2}$. Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x = \frac{t+3}{4}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)| = \frac{7}{2}$ bằng số nghiệm x của phương trình

$2\left|f\left(4x-3\right)\right|-7=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Suy ra phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\dfrac{7}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $2\left|f\left(4x-3\right)\right|-7=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3+\left(m+2\right)x^2+\left(m^2-m-3\right)x-m^2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành:

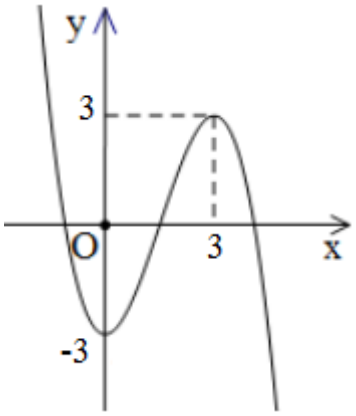
$x^3+\left(m+2\right)x^2+\left(m^2-m-3\right)x-m^2=0\ \ (1)$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left[x^2+\left(m+3\right)x+m^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\g\left(x\right)=x^2+\left(m+3\right)x+m^2=0\ \ (2)\end{array}\right.$

Để đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\left\{\begin{array}{l}\Delta_g>0\\g\left(1\right)\neq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3m^2+6m+9>0\\m^2+m+4\neq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-1<m<3\\\forall m\in\mathbb{R}\end{array}\right.\Leftrightarrow-1<m<3$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{0;1;2\right\}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f\left(x\right)=2$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt lớn hơn 3.

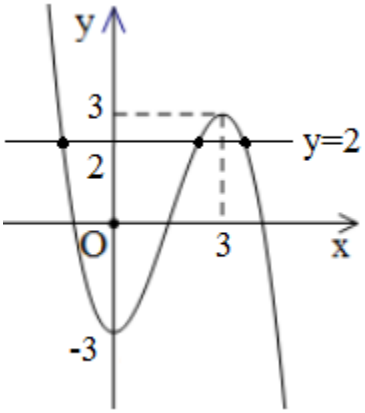


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

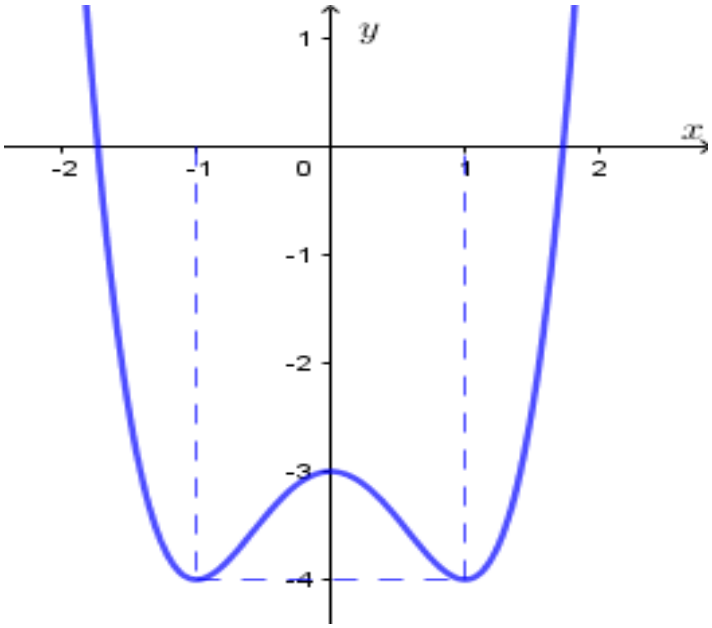
Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt trong đó có đúng một điểm có hoành độ lớn hơn 3.



Vậy phương trình $f(x)=2$ có đúng một nghiệm thực phân biệt lớn hơn 3.

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m+1-2|f(x)|=0$ có sáu nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính a^2+b^2.



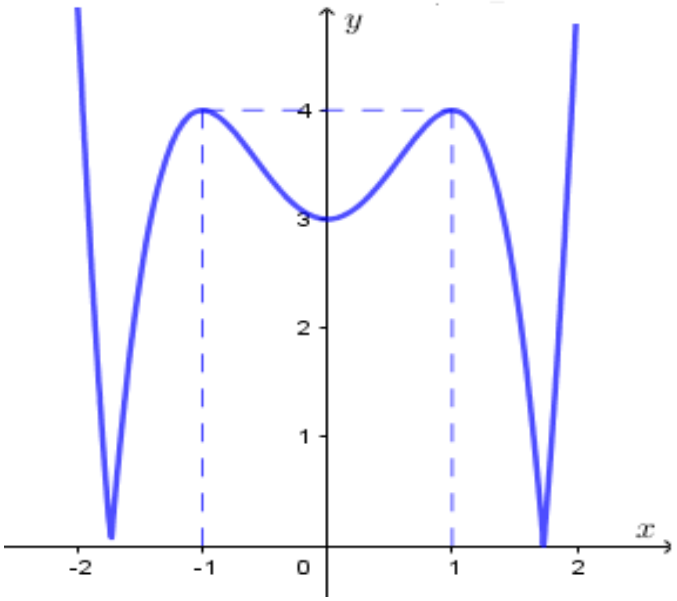
A. 12. **B.** 25. **C.** 74. **D.** 7.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $m+1-2\left|f\left(x\right)\right|=0\Leftrightarrow\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{m+1}{2}$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có được bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm trên trục hoành, lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành qua trục hoành.



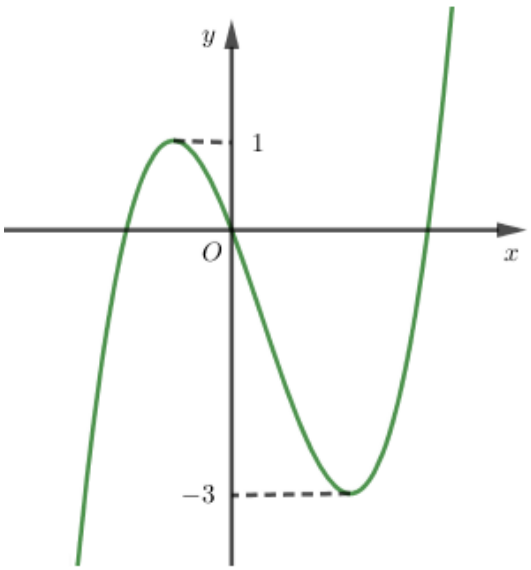
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=\dfrac{m+1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, phương trình có sáu nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $3<\dfrac{m+1}{2}<4\Leftrightarrow5<m<7$.

Suy ra $m\in\left(5;7\right)$ nên $a=5,b=7$.

Vậy $a^2+b^2=74$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x+2020)=1$.



A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2f(x+2020)=1 \Leftrightarrow f(x+2020)=\frac{1}{2}$.

Đồ thị hàm số $y=f(x+2020)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2020 đơn vị, mà đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ có phương nằm ngang nên số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x+2020)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}$.

Hay số nghiệm của phương trình $f(x+2020)=\frac{1}{2}$ cũng là số nghiệm của phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$. Theo hình vẽ ta suy ra số nghiệm là 3.

Câu 3. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{4x-m^2}{x-1}$ tại đúng một điểm. Tìm tích các phần tử của S.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{4x-m^2}{x-1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x^2-4x+m^2-1=0(*)\end{cases}$.

Để đường thẳng cắt đồ thị tại đúng một điểm thì pt (*) có nghiệm kép $x\neq 1$ hoặc pt $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=1$.

TH1: Pt $(*)$ có nghiệm kép $x\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=0\\ -\frac{b}{2a}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5-m^2=0\\ 2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$.

TH2: Pt $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ 1^2-4.1+m^2-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5-m^2>0\\ 1^2-4.1+m^2-1=0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}\\ m=\pm 2\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm 2$.

$\Rightarrow S=\left\{\sqrt{5};-\sqrt{5};2;-2\right\}$.

Vậy tích các phần tử của S là: $\sqrt{5}.\left(-\sqrt{5}\right).2.(-2)=20$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^2-2x+4$ có đồ thị (P) và đường thẳng d: $y=2mx-m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+2(m+1)x_2\leq 3m^2+16$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2-2(m+1)x+m^2+4=0\ (1)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thì pt (1) có $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow(m+1)^2-\left(m^2+4\right)>0\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}\ (2)$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1x_2=m^2+4\end{cases}$

Từ yêu cầu ta có $x_1^2+2(m+1)x_2\leq 3m^2+16\Leftrightarrow x_1^2+(x_1+x_2)x_2\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_1x_2\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-x_1x_2\leq 3m^2+16$

$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - m^2 - 4 \le 3m^2 + 16$

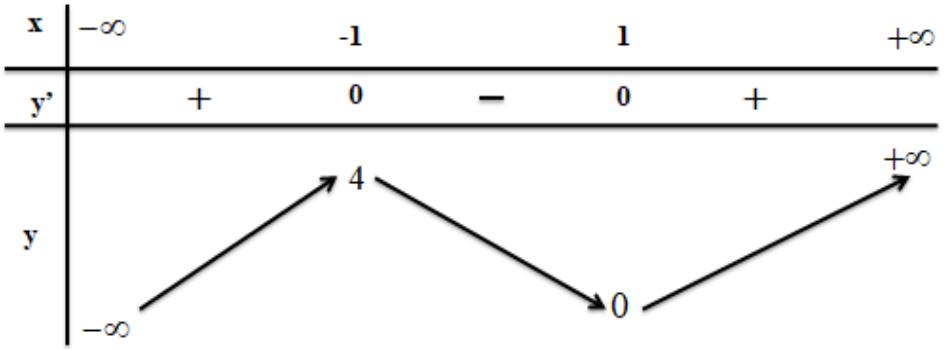
$\Leftrightarrow 8m \le 16$

$\Leftrightarrow m \le 2$

So sánh với điều kiện (2) suy ra $\frac{3}{2} < m \le 2$ do m nguyên nên $m = 2$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ có bảng biến thiên sau:



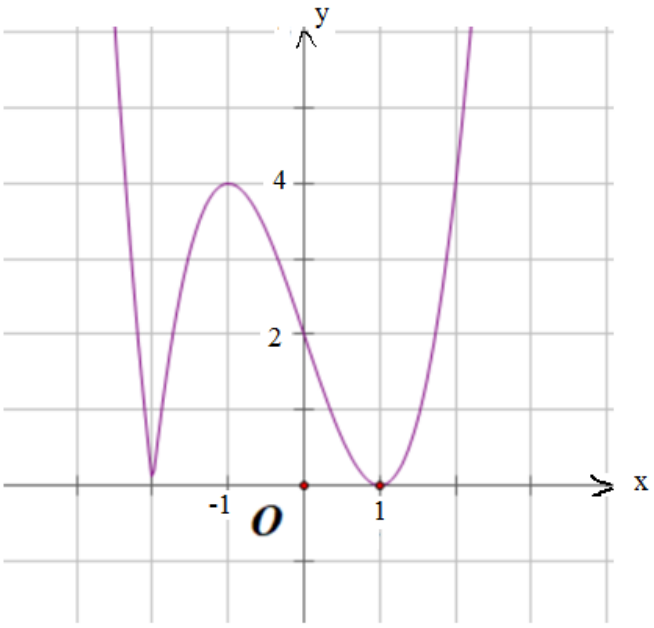
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng một nghiệm thực dương.

A. $m > 2$. **B.** $0 < m < 4$. **C.** $2 < m < 4$. **D.** $m > 0$.

Lời giải:

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình dưới đây



Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt trong đó có đúng một nghiệm thực dương khi và chỉ khi $2 < m < 4$.

Câu 6. Phương trình $|x|^3 - 3x^2 - m^2 = 0$ (với m là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt?

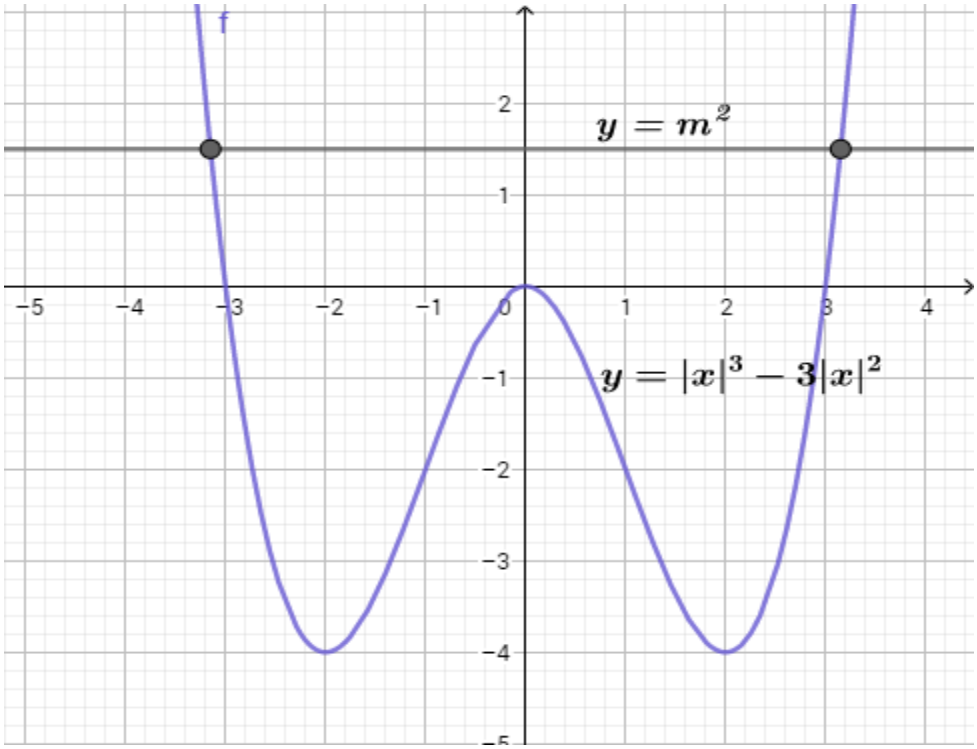
A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $|x|^3-3|x|^2=m^2$.

Số nghiệm phân biệt của phương trình bằng số điểm chung của hai đồ thị $y=|x|^3-3|x|^2$ và $y=m^2$.



Dựa vào đồ thị ta thấy số nghiệm phân biệt nhiều nhất là 3 (khi $m=0$).

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2+m\left(\sqrt{4-x^2}+1\right)-7$ có điểm chung với trục hoành.

A. $0\le m\le 3$. **B.** $-1\le m\le \dfrac{7}{3}$. **C.** $2\le m\le 3$. **D.** $2\le m\le \dfrac{7}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Tập xác định của hàm số $D=[-2;\ 2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2+m\left(\sqrt{4-x^2}+1\right)-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2}+1} \text{ với } x\in[-2;\ 2] \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}$, thì $t\in[0;\ 2]$. Ta có

$$m=\frac{t^2+3}{t+1} \text{ với } t\in[0;\ 2]. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t+1}$ với $t\in[0;\ 2]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$.

Cho $f'(t)=0\Rightarrow t=1$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\dfrac{7}{3}$

Phương trình (1) có nghiệm khi phương trình (2) có nghiệm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $2\le m\le 3$.

Câu 8. Biết phương trình $\tan^2 x+\cot^2 x+m(\tan x+\cot x)+3=0$ có nghiệm thực khi $m\le a$ hoặc $m\ge b$. Tính $S=ab$.

A. $S=\dfrac{25}{4}$. **B.** $S=\dfrac{25}{2}$. **C.** $S=-\dfrac{25}{4}$. **D.** $S=-\dfrac{25}{2}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có:

$\tan^2 x+\cot^2 x+m(\tan x+\cot x)+3=0$

$\Leftrightarrow(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x+m(\tan x+\cot x)+3=0$

$\Leftrightarrow(\tan x+\cot x)^2+m(\tan x+\cot x)+1=0$.

Đặt $t=\tan x+\cot x$, đk $|t|\ge 2$.

Phương trình trở thành $t^2+mt+1=0\Leftrightarrow -m=\dfrac{t^2+1}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$ với $|t|\ge 2$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}>0$ với mọi t thỏa $|t|\ge 2$.

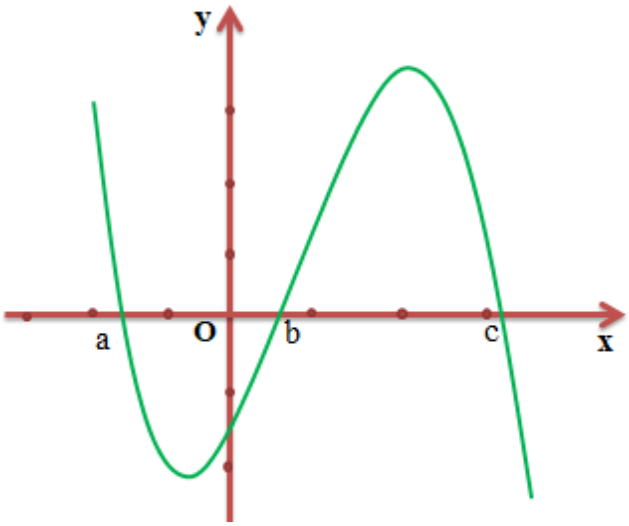
Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$				$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-5}{2}$		$\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi $m\le\dfrac{-5}{2}$ hoặc $m\ge\dfrac{5}{2}$.

Vậy $a=\dfrac{-5}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$. Suy ra $ab=\dfrac{-25}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $y=f'(x)$ trục Ox tại ba điểm lần lượt có hoành độ là a, b, c như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(c)+f(a)-2f(b)>0$.
B. $[f(b)-f(a)].[f(b)-f(c)]<0$.
C. $f(a)>f(b)>f(c)$.
D. $f(c)>f(b)>f(a)$.

Lời giải:

Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $f'x$ ta lập được bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\begin{cases} f\ a > f\ b \\ f\ c > f\ b \end{cases}$ nên

$f(c)+f(a)>2f(b)\Leftrightarrow f(c)+f(a)-2f(b)>0$.

Câu 10. Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm khi m thuộc $[a;b]$ với a, b $\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T=(a+2)\sqrt{2}+b$ là

A. $T=3\sqrt{2}+2$.
B. $T=6$.
C. $T=8$.
D. $T=0$.

Lời giải:

Chọn B

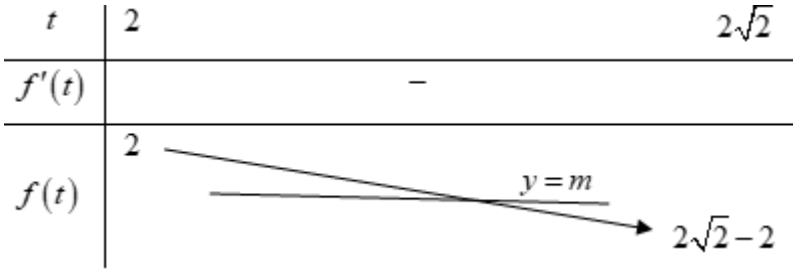
Điều kiện: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}, t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{4-x^2}\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

Phương trình đã cho thành $t-\dfrac{t^2-4}{2}=m \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+2t+4}{2}=m$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+2t+4}{2}$, với $t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$ ta có $f'(t)=1-t<0,\ \forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$.

Bảng biến thiên:



Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi đồ thị $y=f(t)$ cắt đường thẳng $y=m$.

Dựa vào BBT ta thấy $2\sqrt{2}-2\le m\le 2$.

Khi đó $\begin{cases}a=2\sqrt{2}-2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow T=(a+2)\sqrt{2}+b=6$.

Câu 11. Tìm m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm thực?

A. $-2\le m\le 4$. **B.** $\sqrt{2}-1\le m\le 1$. **C.** $\sqrt{2}-2\le m\le 0$. **D.** $-1\le m\le 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\in[-1;1]$.

Ta có $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ (1)

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Suy ra $2\sqrt{1-x^4}=2-t^2$.

Khi đó (1) trở thành phương trình: $m(t+2)=2-t^2+t\Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$, $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$ có $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} f(t)=f(0)=1$;

$\min\limits_{[0;\sqrt{2}]} f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow\sqrt{2}-1\le m\le 1$.

Mức độ 4

Câu 1. Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A. $m\ge\sqrt{3}+1$. **B.** $m<3$. **C.** $m>\sqrt{3}+1$. **D.** $m>3$.

Lời giải:

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2\ge 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2(2-m)t+m^2-2m-2=0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành khi và chỉ khi (1) vô nghiệm khi và chỉ khi (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2m+6<0\\ \begin{cases}-2m+6\ge 0\\ 2(2-m)<0\\ m^2-2m-2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ \begin{cases}m\le 3\\ m>2\\ \left[\begin{array}{l}m>1+\sqrt{3}\\ m<1-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\ 1+\sqrt{3}<m\le 3\end{array}\right. \Leftrightarrow m>1+\sqrt{3}.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-x^2(2m+3)+x(6m+7)-4m-3$ và đường thẳng $d: y=x+1$. Tìm các giá trị thực m để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số đã cho tại 3 điểm phân biệt $A(1;2)$, B, C sao cho diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{5}$, với O là gốc tọa độ.

A. $\{-2;4\}$. **B.** $\{2;4\}$. **C.** $\{-2;3\}$. **D.** $\{-2;5\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-(2m+3)x^2+(6m+7)x-4m-3=x+1$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2-(2m+2)x+4m+4\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ g(x)=x^2-(2m+2)x+4m+4=0\end{array}\right.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=x^2-2(m+1)x+4(m+1)=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\ne 0\\ \Delta'>0\\ g(1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-4(m+1)>0\\ 2m+3\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m-3>0\\ m\ne -\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>3\end{array}\right.\\ m\ne -\dfrac{3}{2}\end{cases} (*)$$

Với $x=1\Rightarrow y=2: A(1;2)$ nên x_B, x_C là nghiệm của phương trình $x^2-(2m+2)x+4m+4=0$.

Diện tích tam giác OBC là $S=\dfrac{1}{2}BC.\mathrm{d}(O,BC)$

Phương trình đường thẳng BC là: $x-y+1=0$. Do đó:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$$

$$(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=40 \Leftrightarrow (x_B-x_C)^2=20$$

$$\Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=20$$

$\Leftrightarrow (2m+2)^2-4(4m+4)=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện (*).

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C), đường thẳng d có phương trình $y=2x+m$. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O, (với O là gốc tọa độ).

A. $m=-5$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm : $2x+m=\dfrac{x+1}{x-1}$, (ĐK: $x\neq 1$)

$\Leftrightarrow (2x+m)(x-1)=x+1 \Leftrightarrow g(x)=2x^2+(m-3)x-m-1=0$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A,B \Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\neq 0 \\ (m-3)^2-4.2.(-m-1)>0 \\ 2+m-3-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m+17>0 \\ -2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi $O(0;0)$, $A(x_A;2x_A+m)$, $B(x_B;2x_B+m)$. Khi đó x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$ nên theo định lý Viet: $\begin{cases} x_A+x_B=\dfrac{3-m}{2} \\ x_Ax_B=\dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(x_A;2x_A+m), \overrightarrow{OB}(x_B;2x_B+m)$.

Tam giác OAB vuông tại O

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

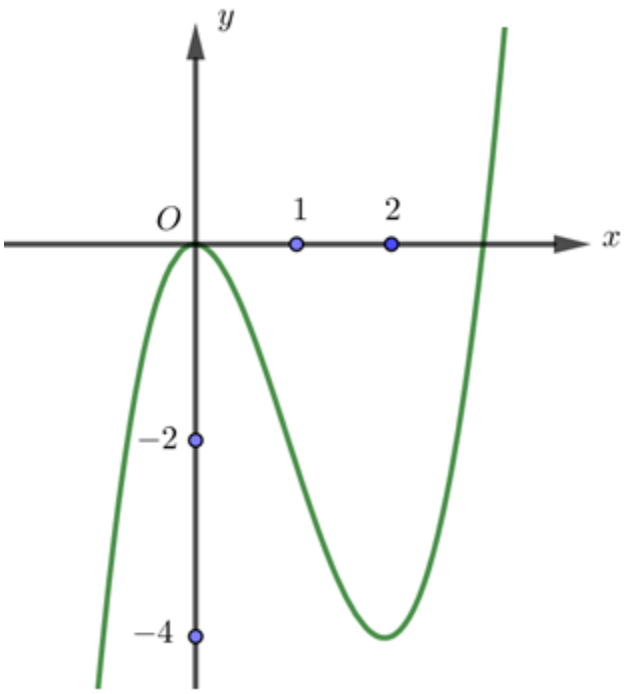
$\Leftrightarrow x_Ax_B+(2x_A+m)(2x_B+m)=0$

$\Leftrightarrow 5x_Ax_B+2m(x_A+x_B)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(\dfrac{-m-1}{2}\right)+2m\left(\dfrac{3-m}{2}\right)+m^2=0$

$\Leftrightarrow m=5$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình $\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)^3-6\sqrt{2+x-x^2}=m$ có nghiệm thực.



A. $-9 \le m \le 6\sqrt{6}-9$.

B. $3\sqrt{3}-9 \le m \le 6\sqrt{6}-9$.

C. $5 \le m \le 3\sqrt{6}-9$.

D. $5 \le m \le 6\sqrt{6}-9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)^3-6\sqrt{2+x-x^2}=m \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)^3-3\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)^2=m-9$$

Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}$ $\left(\sqrt{3} \le t \le \sqrt{6}\right)$

Ta được phương trình $t^3-3t^2=m-9$

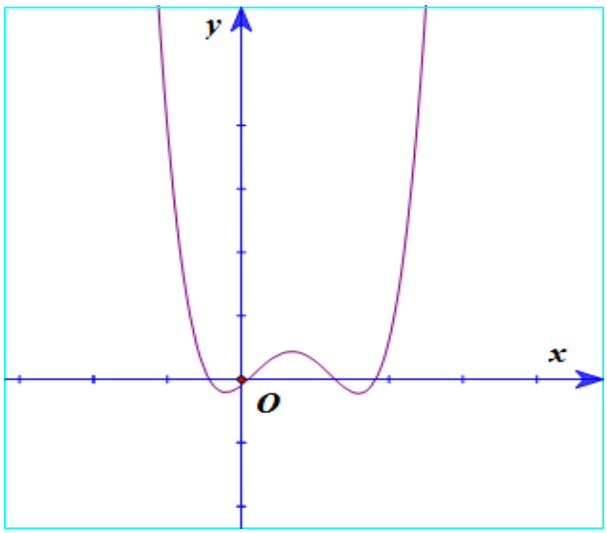
Phương trình $\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}\right)^3-6\sqrt{2+x-x^2}=m$ có nghiệm thực khi phương trình $t^3-3t^2=m-9$ có nghiệm $t \in \left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ có đồ thị như hình vẽ ở đề bài.

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $t^3-3t^2=m-9$ có nghiệm $t \in \left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$ khi:

$$-4 \le m-9 \le f\left(\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow 5 \le m \le 6\sqrt{6}-9.$$

Câu 5. Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4 : $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau:



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn A

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox bằng số nghiệm của phương trình: $\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x)$.

Giả sử đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R};a\neq 0,b\neq 0)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4.

Đặt $A=x-x_1;B=x-x_2;C=x-x_3;D=x-x_4$ ta có:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=a.ABCD$.

TH1: Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0$. Do đó $x=x_i$, $i=1,2,3,4$ không phải nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

TH2: Nếu $x\neq x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì ta viết lại

$$f'(x)=a\left[BCD+ACD+ABD+ABC\right]=f(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right).$$

$$f''(x)=f'(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)-f(x)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

$$=f(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

Suy ra, $f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$.

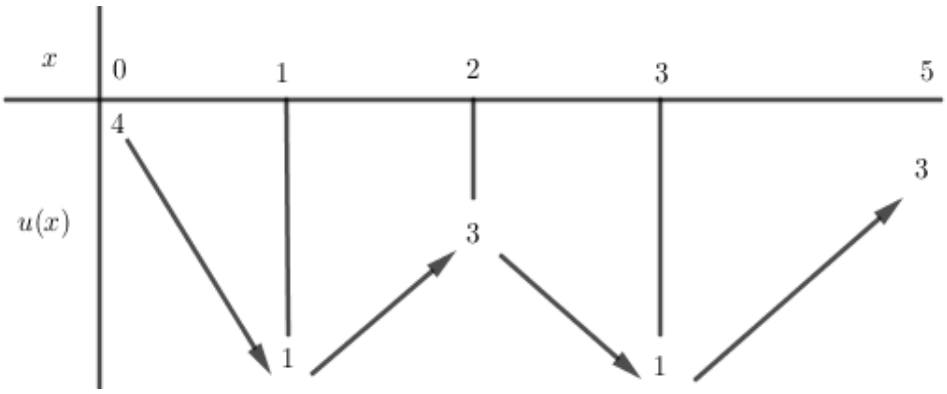
Khi đó $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)>0$

$\forall x\neq x_i\,(i=1,2,3,4)$.

Từ đó suy ra phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ không cắt trục hoành.

Câu 6. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$?



A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

Theo bảng biến thiên ta có trên $[0;5]$ thì $1\le u(x)\le 4\ \ (1)$,

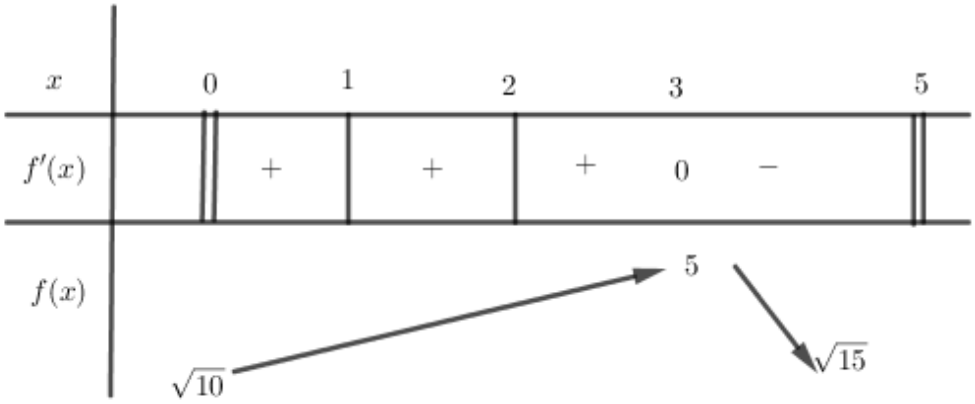
Ta có $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m.u(x)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{u(x)}=m$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}$ trên $[0;5]$

Ta có $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{10-2x}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}\sqrt{10-2x}=2\sqrt{x}\Leftrightarrow 3(10-2x)=4x\Leftrightarrow x=3$

.

Bảng biến thiên



Do đó ta có trên $[0;5]$ thì $\sqrt{10} \le f(x) \le 5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \max f(x) = f(3) = 5 \\ \min u(x) = u(3) = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} \min f(x) = f(0) = \sqrt{10} \\ \max u(x) = u(0) = 4 \end{cases}$

Do đó $\frac{\sqrt{10}}{4} \le \frac{f(x)}{u(x)} \le 5$ với mọi $x \in [0;5]$.

Để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$ $\Leftrightarrow$ phương trình $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \le m \le 5$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 5 giá trị m nguyên thỏa đề.

Câu 7. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;2020]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải:

Chọn A

Xét phương trình $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2\cos x) = m(\sin x + 3\cos x)$ (1) trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x,\ \cos x,\ \tan x > 0$ nên chia cả hai vế của (1) cho $\cos x$, ta được:

$3\sqrt{\tan x + 1}(\tan x + 2) = m(\tan x + 3)$ (2).

Đặt $t = \sqrt{\tan x + 1}$, $(t > 1)$ thì (2) trở thành: $3t(t^2+1) = m(t^2+2) \Leftrightarrow \frac{3t^3+3t}{t^2+2} = m$ (3)

Theo đề bài, (1) có đúng một nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow (3)$ có đúng một nghiệm $t > 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{3t^3+3t}{t^2+2}$, $t \in (1;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{3t^4+15t^2+6}{(t^2+2)^2} > 0$, $\forall t > 1$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Với mỗi giá trị $t>1$ tương ứng có một nghiệm x thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

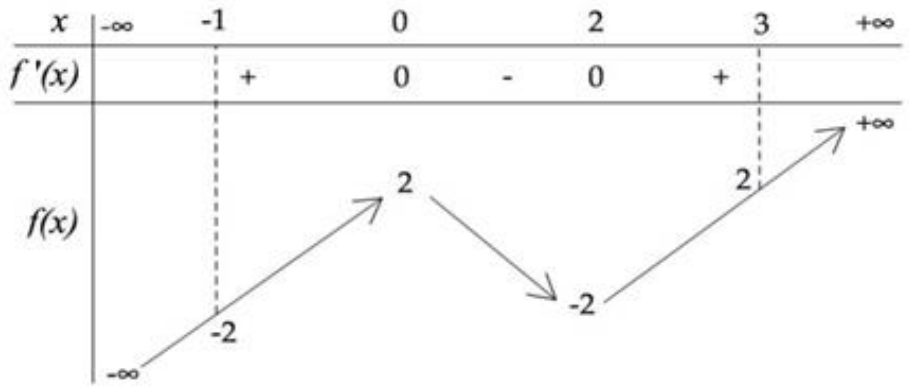
Từ bảng biến thiên, (3) có đúng một nghiệm $t>1$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại đúng một điểm có hoành độ lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m>2$, mà m là số nguyên thuộc đoạn $[0;2020]$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm thực?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $t=2\sin x+1$ suy ra $t\in[-1;3]$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

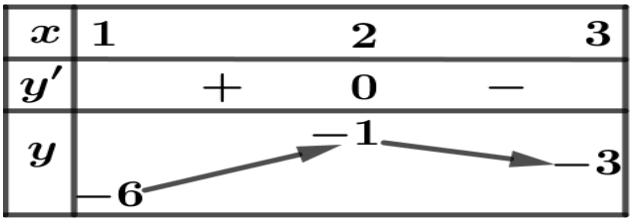
Phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có nghiệm t thuộc $[-1;3]$.

$\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;3]} f(t)\le f(m)\le \max\limits_{[-1;3]} f(t)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-2\le f(m)\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Suy ra có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục trên đoạn $1;3$ và có bảng biến thiên như sau



Tổng các giá trị $m\in\mathbb{Z}$ sao cho phương trình $f\ x-1=\frac{m}{x^2-6x+12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $2;4$ bằng

A. -75. **B.** -72. **C.** -294. **D.** -297.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}\Leftrightarrow m=\left(x^2-6x+12\right).f\left(x-1\right),\forall x\in\left[2;4\right]$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\left(x^2-6x+12\right).f\left(x-1\right),\forall x\in\left[2;4\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=\left(2x-6\right).f\left(x-1\right)+\left(x^2-6x+12\right).f'\left(x-1\right)$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1) $2\le x<3\Rightarrow\begin{cases}2x-6<0\\f\left(x-1\right)<0\\x^2-6x+12>0\\f'\left(x-1\right)>0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)>0.$

TH2) $3<x\le4\Rightarrow\begin{cases}2x-6>0\\f\left(x-1\right)<0\\x^2-6x+12>0\\f'\left(x-1\right)<0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)<0.$

TH3) $x=3\Rightarrow g'\left(x\right)=0$

Bảng biến thiên

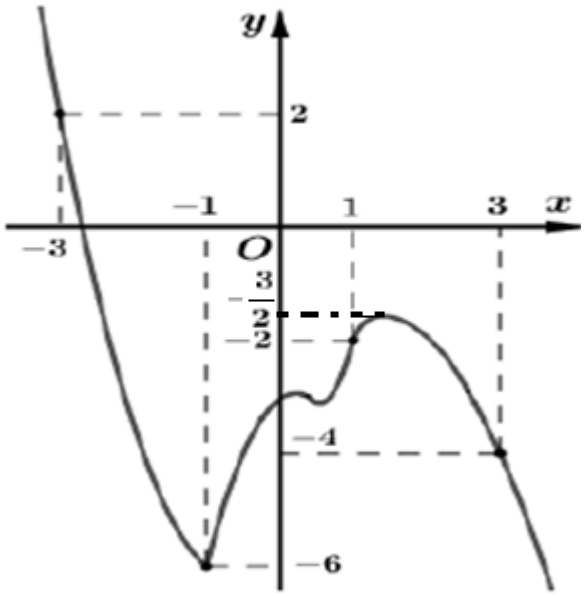
x	2		3		4
g'		$+$	0	$-$	
g	-24	↗	-3	↘	-12

Dựa vào BBT, suy ra cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[2;4\right]$ khi và chỉ khi $-12\le m<-3$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-12;-11;...;-4\right\}$

Tổng các giá trị của m là $S=-12-11-10-...-4=-72$ (áp dụng công thức tổng của cấp số cộng).

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm?



A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{2}{3}$.

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}, x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t'=-4.\frac{6-18x}{2\sqrt{6x-9x^2}}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Vì $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$ nên $t\in[-1;3]$.

Phương trình trở thành: $2f(t)=m-3\Leftrightarrow f(t)=\frac{m-3}{2}, t\in[-1;3]. (*)$

Phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\frac{m-3}{2}$

có nghiệm $t\in[-1;3]\Leftrightarrow -6\le\frac{m-3}{2}\le-\frac{3}{2}\Leftrightarrow -12\le m-3\le -3\Leftrightarrow -9\le m\le 0$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-9;-8;-7;..;0\}\Rightarrow$ có 10 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

DẠNG TOÁN 31: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

+ Nếu $a>1,\ b>0$ thì bất phương trình $a^x>b\Leftrightarrow x>\log_a b.$

+ Nếu $0<a<1,\ b>0$ thì bất phương trình $a^x>b\Leftrightarrow x<\log_a b.$

+ Nếu $a>1$ thì bất phương trình $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x).$

+ Nếu $0<a<1$ thì bất phương trình $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x).$

(Tương tự với các bất phương trình $a^x<b$; $a^x\ge b$; $a^x\le b$; $a^{f(x)}<a^{g(x)}$; $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}$; $a^{f(x)}\le a^{g(x)}$).

+ Để giải bất phương trình mũ ta sử dụng các phương pháp.

+ Biến đổi đưa về bất phương trình cơ bản.

+ Đặt ẩn phụ.

+ Logarit hóa.

+ Hàm số.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Dạng bpt mũ cơ bản.
- PP đưa về cùng cơ số
- PP đặt ẩn phụ
- PP logarit hóa
- Phương pháp phân tích thành tích
- Phương pháp hàm số, đánh giá
- Bài toán bpt nghiệm đúng với mọi x thuộc K
- Bài toán bpt có nghiệm, vô nghiệm trên K

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán giải bất phương trình mũ.

……

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt $t = 3^x > 0$.

B2: Giải bất phương trình bậc hai theo t.

B3: Trả lại phép đặt để tìm x.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$ ta được: $t^2 + 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ t > 1 \end{array}\right. \Rightarrow t > 1.$

Với $t > 1 \Leftrightarrow 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (0; +\infty)$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x}$ là.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty; 1]$. **C.** $[3; +\infty)$. **D.** $[1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-4} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{1-2x} \Leftrightarrow 3x - 4 \ge 1 - 2x \Leftrightarrow x \ge 1.$

Câu 2. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$ là

A. $x = \frac{2}{3}$. **B.** $x > \frac{2}{3}$. **C.** $x \ne \frac{2}{3}$. **D.** $x \le \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x} \Leftrightarrow 9x^2 - 17x + 11 \le 7 - 5x \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \le 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Câu 3. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(1-x) < \log_3(2x+3)$ là

A. $S = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. **B.** $S = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **C.** $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$. **D.** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 1 - x < 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1.$

Câu 4. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x-9)>\log_{\frac{1}{2}}(x+10)$.

A. 6. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện của bất phương trình là $x>\frac{9}{4}$.

Khi đó bất phương trình đã cho thành $4x-9<x+10\Leftrightarrow x<\frac{19}{3}$. (Do $a=\frac{1}{2}<1$).

So điều kiện ta được $\frac{9}{4}<x<\frac{19}{3}$.

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{3,4,5,6\}$.

Câu 5. Tập nghiệm S của bất phương trình $4^{x+\frac{1}{2}}-5.2^x+2\le 0$.

A. $S=\{-1;1\}$. **B.** $S=[-1;1]$. **C.** $S=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **D.** $S=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{x+\frac{1}{2}}-5.2^x+2\le 0 \Leftrightarrow 2.2^{2x}-5.2^x+2\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le 2^x\le 2\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=[-1;1]$.

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_6[x(5-x)]<1$ là:

A. $(0;2)\cup(3;5)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;5)\setminus\{2;3\}$. **D.** $(0;3)\cup(3;5)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x(5-x)>0\Leftrightarrow 0<x<5$

Ta có: $\log_6[x(5-x)]<1\Leftrightarrow x(5-x)<6\Leftrightarrow -x^2+5x-6<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\x>3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có $x\in(0;2)\cup(3;5)$

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{2x-5}$ thì:

A. $[2;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right).\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=1$ nên: $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{-1}$

$\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{2x-5}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{-x+1} \geq \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{2x-5} \Leftrightarrow -x+1 \geq 2x-5 \Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(1;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Câu 9. Giải bất phương trình: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x}$ ta được nghiệm là

A. $x \geq 1$. **B.** $x < 1$. **C.** $x \leq 1$. **D.** $x > 1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{-2+x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 2x-1 \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1.$

Câu 10. Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có tập nghiệm là.

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;2)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -1$

$\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+7) > \log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{x+7} > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x+7 > (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -3 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;2)$.

↳ Mức độ 2

Câu 1. Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125}$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Nghiệm nguyên dương của bất phương trình là: $1; 2; 3$.

Câu 2. Cho $f(x) = x.\mathrm{e}^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x} - 3x.\mathrm{e}^{-3x} = (1-3x)\mathrm{e}^{-3x}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-3x)\mathrm{e}^{-3x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 3. Biết $S = [a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x - 10.3^x + 3 \leq 0$. Tìm $T = b-a$.

A. $T = \frac{8}{3}$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = \frac{10}{3}$. **D.** $T = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3.9^x - 10.3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2 - 10.3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-1;1]$, do vậy $T = 1-(-1) = 2$.

Câu 4. Tập nghiệm của của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ là.

A. $S = \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $S = \left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $S = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $S = \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0$ điều kiện $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{x} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x}-1<0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x}<0$

Mặt khác $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$.

Câu 5. Có bao nhiêu nghiệm nguyên âm lớn hơn -2021 của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2}$ là.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(2-\sqrt{3}\right)^x\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}$.

Nên $\left(2-\sqrt{3}\right)^x>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+2}\Leftrightarrow -x>x+2\Leftrightarrow x<-1.$

Mà $x\in\mathbb{Z}, x>-2021$ nên có $x\in\mathbb{Z}, -2021<x<-1$. Vậy có $-1-(-2021)-1=2019$ nghiệm nguyên.

Câu 6. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log^2_3\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)<2$

A. $x=3$ **B.** $S=\left(\frac{1}{3};2\right)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $S=\left(\frac{1}{3};5\right)$

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x-\frac{2x^2}{3}>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{3}{2}$.

BPT $\Leftrightarrow \log^2_3\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)-\log_3\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)-2<0$

$$\Leftrightarrow -1<\log_3\left(x-\frac{2x^2}{3}\right)<2\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{2x^2}{3}>\frac{1}{3}\\ x-\frac{2x^2}{3}<9\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<1.$$

Câu 7. Biết tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}\left[\log_3(x-2)\right]>0$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x-2>0\\ \log_3(x-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ x-2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$

$\log_{\frac{\pi}{6}}\left[\log_3(x-2)\right]>0\Leftrightarrow\log_3(x-2)<1\Leftrightarrow x-2<3\Leftrightarrow x<5$

So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình $S=(3;5)$. Do đó: $b-a=5-3=2$.

Câu 8. Cho $f(x)=\frac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x)=5^x+4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ là

A. $x<0$. **B.** $x>1$. **C.** $0<x<1$. **D.** $x>0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}.5^{2x+1}.(2x+1)'.\ln 5=5^{2x+1}.\ln 5$.

Và: $g'(x)=5^x.\ln 5+4\ln 5=(5^x+4)\ln 5$.

Do đó: $f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 5^{2x+1}.\ln 5>(5^x+4)\ln 5\Leftrightarrow 5^{2x+1}>5^x+4\Leftrightarrow 5.5^{2x}-5^x-4>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^x<-\frac{4}{5}(VN)\\5^x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow 5^x>1\Leftrightarrow x>0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>0$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là:

A. $T=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **B.** $T=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **D.** $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

$16^x-5.4^x+4\ge 0$ trở thành $t^2-5.t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\0<t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x\ge 4\\0<4^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x>3^{x+1}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. **C.** $(-\infty;\log_2 3]$. **D.** $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn. B.

Cách 1: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow x>\log_2\left(3^{x+1}\right)\Leftrightarrow x>(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x(1-\log_2 3)>\log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3}>\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x>3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>3\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}3$.

Mức độ 3

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;\sqrt{10})$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49.7^x+28.2^x\le 351.\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}}+28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}}\le 351$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}}+28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}}\le 351$. Đặt $t=\sqrt{\frac{7^x}{2^x}},t>0$ thì bpt trở thành $49t+\frac{28}{t}\le 351$

$\Leftrightarrow \frac{4}{49}\le t\le \frac{7}{2}\Rightarrow \frac{4}{49}\le \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}\le \frac{7}{2}\Leftrightarrow -4\le x\le 2$, khi đó $S=[-4;2]$.

Giá trị $b-2a=10\in(\sqrt{7};4\sqrt{10})$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{x}{x+2}}>36.3^{2-x}$ là

A. $\left[\begin{array}{l}-3<x<2\\ x>4\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}-\log_2 6<x<-2\\ x>4\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}-4<x<-2\\ x>1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}-\log_3 18<x<-2\\ x>4\end{array}\right.$.

Lời giải.

Chọn D

Điều kiện: $x\ne -2$.

$8^{\frac{x}{x+2}}>36.3^{2-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}}>3^{4-x}\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2}\log_3 2>4-x$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{\log_3 2}{x+2}+1\right)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-4>0\\ \begin{cases}x-4<0\\ \frac{\log_3 2}{x+2}+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\ \begin{cases}x<4\\ \frac{\log_3 2+2+x}{x+2}<0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\ \begin{cases}x<4\\ \frac{\log_3 18+x}{x+2}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\ \begin{cases}x<4\\ -\log_3 18<x<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\ -\log_3 18<x<-2\end{array}\right.$.

Câu 3. Bất phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x>2\sqrt{2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2019;2020]$.

A. 4036. **B.** 4037. **C.** 2020. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1$. Vậy đặt $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^x$, điều kiện $t>0$. Suy ra $\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\frac{1}{t}$

Bất phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{t}+t-2\sqrt{2}>0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1>0\ \ (t>0)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t>\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x>\sqrt{2}+1\Leftrightarrow x>1 \\ t<\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x<\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x<\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}\Leftrightarrow x<-1 \end{array}\right.$$

Vì $x\in\mathbb{Z}, x\in\left[-2019;2020\right]$ nên $x\in\mathbb{Z}, x\in\left[-2019;-1\right)\cup\left(1;2020\right]$.

Ta có: $\left[-2019;-1\right)$ có $-1-\left(2019\right)=2018$ số nguyên.

$\left(1;2020\right]$ có $2020-1=2019$ số nguyên.

Vậy nên $2018+2019=4037$.

Câu 4. Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $4^x-2020m.2^{x-1}+3-1010m\le 0$ có nghiệm là

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2^x, t>0$.

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2-1010mt+3-1010m\le 0$

$\Leftrightarrow 1010m\ge\frac{t^2+3}{t+1}$ (do $t>0$).

Xét $f\left(t\right)=\frac{t^2+3}{t+1}$, ta có $f'\left(t\right)=\frac{t^2+2t-3}{\left(t+1\right)^2}$

$f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.\overset{t>0}{\Rightarrow}t=1$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Để bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1010m\ge\min\limits_{t>0}f\left(t\right)=2\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{505}$.

Vậy $m=1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. Tìm m để bất phương trình $4^x+2^x+4\le 3^m\left(2^x+1\right)$ có nghiệm.

A. $m\le 1$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2^x, t>0$.

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2+t+4\le 3^m(t+1)$

$3^m \ge \dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ (do $t>0$).

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \overset{t>0}{\Rightarrow} t=1$

t	0		1	$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$
$f(t)$	‖ 4	$\searrow$	3	$\nearrow +\infty$

Để bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 3^m \ge \min\limits_{t>0} f(t)=3 \Leftrightarrow m\ge 1$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_2 5)$.

A. $m\ge 4$. **B.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $m<4$. **D.** $m<2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2^x=t$. Vì $x<\log_2 5 \Rightarrow 0<2^x<2^{\log_2 5} \Rightarrow 0<t<5$.

Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}\le m$, $\forall t\in(0;5)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$ với $t\in(0;5)$.

Có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}$.

$f'(t)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}=0 \Rightarrow \sqrt{t+3}=\sqrt{5-t} \Rightarrow t+3=5-t \Rightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{3}{2}$		5
f'	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	‖ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m\ge 4$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m\le 3$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $-1\le m\le 4$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x+4(m-1).2^x+m-1>0\Leftrightarrow m\left(4^x+4.2^x+1\right)>1+4.2^x$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{1+4.2^x}{4^x+4.2^x+1}$

Đặt $2^x=t$ (Điều kiện $t>0$). Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì bất phương trình $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t>0$.

Đặt $f(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{4t^2+2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2}<0,\forall t>0$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ $\forall t>0$ khi và chỉ khi $m\ge f(0)=1$.

Câu 8. Biết a là số thực dương bất kì để bất phương trình $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a\in\left(10^3;10^4\right]$. **B.** $a\in\left(10^2;10^3\right]$. **C.** $a\in\left(0;10^2\right]$. **D.** $\left(10^4;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $a^x\ge 9x+1$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì nó phải đúng với $x=1\Rightarrow a>10$.

Do $a>1$ nên hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$; Đồ thị hàm số $y=a^x$ có bề lõm quay lên trên. (hay hàm số là hàm số lõm trên $\mathbb{R}$)

Do hai đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=9x+1$ luôn đi qua điểm $A(0;1)$ nên bất phương trình $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi đường thẳng $y=9x+1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;1)\Leftrightarrow y'(0)=9$, với $y'=a^x\ln a\Leftrightarrow\ln a=9\Leftrightarrow a=\mathrm{e}^9$.

Vậy $a\in\left(10^3;10^4\right]$.

Câu 9. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $\ln x+\ln y\ge\ln\left(x^2+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A. $P=6$. **B.** $P=2+3\sqrt{2}$. **C.** $P=3+2\sqrt{2}$. **D.** $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln x+\ln y\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow \ln xy\ge \ln\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y\left(x-1\right)\ge x^2>0$

Mà $x>0$, $y>0$ nên $x>1$ và $y\ge \dfrac{x^2}{x-1}$. Suy ra $x+y\ge \dfrac{x^2}{x-1}+x$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-1}+x=2x+1+\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$.

Ta có: $f'\left(x\right)=2-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (Do $x>1$) $\Rightarrow f\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3+2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	1		$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P=3+2\sqrt{2}$.

Chú ý: Ta có tìm min của $f\left(x\right)$ như sau:

$$f\left(x\right)=2x+1+\frac{1}{x-1}=2\left(x-1\right)+\frac{1}{x-1}+3\ge 2\sqrt{2\left(x-1\right)\frac{1}{x-1}}+3=2\sqrt{2}+3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\left(x-1\right)=\dfrac{1}{x-1}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+\left(m-1\right).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m\le 3$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $-1\le m\le 4$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x+4\left(m-1\right).2^x+m-1>0\Leftrightarrow m\left(4^x+4.2^x+1\right)>1+4.2^x$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{1+4.2^x}{4^x+4.2^x+1}$

Đặt $2^x = t$ (Điều kiện $t > 0$). Khi đó $m > \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m > \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t > 0$.

Đặt $f(t) = \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1} \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{4t^2+2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2} < 0, \forall t > 0$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó $m > \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ $\forall t > 0$ khi và chỉ khi $m \geq f(0) = 1$.

Mức độ 4

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[-3;1)$. **D.** $[-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq -3$

Chia hai vế của bất phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được:

$$2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+3}-2x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-x-5} < 1$$

$$\Leftrightarrow 4.2^{2\left(\sqrt{x+3}-x-3\right)} + 15.2^{\sqrt{x+3}-x-3} - 4 < 0$$

Đặt $t = 2^{\sqrt{x+3}-x-3}, (t > 0)$

Bất phương trình trở thành: $4t^2 + 15t - 4 < 0 \xleftrightarrow{t>0} t < \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+3}-x-3} < \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - x - 3 < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy nghiệm của bất phuowng trình là $(1;+\infty)$.

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2^x - 2\right)^2 < \left(2^x + 2\right)\left(1 - \sqrt{2^x - 1}\right)^2$ là

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $[0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $2^x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{2^x-1},\ (t\ge 0)\Rightarrow 2^x=t^2+1$

Bất phương trình có dạng: $\left(t^2+1-2\right)^2<\left(t^2+1+2\right)(1-t)^2$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+1-2\right)^2<\left(t^2+1+2\right)(1-t)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(t^2-1\right)^2<\left(t^2+3\right)(1-t)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(t^2-1\right)^2-\left(t^2+3\right)(t-1)^2<0$$
$$\Leftrightarrow(t-1)^2\left[(t+1)^2-\left(t^2+3\right)\right]<0$$
$$\Leftrightarrow(t-1)^2(2t-2)<0$$
$$\Leftrightarrow(t-1)^3<0\Leftrightarrow t<1\Leftrightarrow\sqrt{2^x-1}<1\Leftrightarrow 2^x<2\Leftrightarrow x<1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình: $[0;1)$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $x^{\log_2 x}+x^{5\log_x 2-\log_2 x}-18<0$ có dạng $S=(a;b)\cup(c;d),\ b<c$. Giá trị $T=4a-2b+c+d$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$

Phương trình: $x^{\log_2 x}+x^{5\log_x 2-\log_2 x}-18<0$

$$\Leftrightarrow x^{\log_2 x}+\frac{\left(x^{\log_x 2}\right)^5}{x^{\log_2 x}}-18<0$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_2 x}+\frac{32}{x^{\log_2 x}}-18<0$$

Đặt $t=x^{\log_2 x},\ (t>0)$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$t+\frac{32}{t}-18<0\Leftrightarrow t^2-18t+32<0\Leftrightarrow 2<t<16\Leftrightarrow 2<x^{\log_2 x}<16$$

$$\Leftrightarrow\log_2 2<\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 16\Leftrightarrow 1<\left(\log_2 x\right)^2<4$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<\log_2 x<4\\-2<\log_2 x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(2;4)$.

Vậy $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=2;d=4\Rightarrow T=4a-2b+c+d=6.$

Câu 4. Bất phương trình $\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^x+2\left(5+2\sqrt{6}\right)^x-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x<1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[-2019;2020]$.

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4039. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)^x=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3\right]^x=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x\right]^3$

$\left(5+2\sqrt{6}\right)^x=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\right]^x=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x\right]^2$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x.\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^x=1$

Do đó, đặt $t=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x,(t>0)\Rightarrow\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^3+2t^2-2\frac{1}{t}<1\Leftrightarrow t^4+2t^3-t-2<0\Leftrightarrow(t-1)(t+2)\left(t^2+t+1\right)<0\Leftrightarrow-2<t<1$.

Kết hợp với điều kiện $t>0$, ta được:

$0<t<1\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x<1\Leftrightarrow x<0$.

Để $x\in\mathbb{Z},x\in[-2019;2020]$ nên $x\in\mathbb{Z},x\in[-2019;0)$. Vậy có 2019 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+\sqrt{x+1}-1}+2\le2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$ có dạng $S=[a;b]$. Giá trị $T=10a-b$ là

A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện $x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge1$.

Bất phương trình tương đương. $2^{x^2}.2^{\sqrt{x+1}-1}-2^{x^2}-2.2^{\sqrt{x-1}-1}+2\le0$

Đặt $\begin{cases}u=2^{\sqrt{x-1}-1}\\v=2^{x^2}\end{cases},(u>0,v\ge2)$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$uv-v-2u+2\le0\Leftrightarrow(u-1)(v-2)\le0\xleftrightarrow{v\ge2}\left[\begin{array}{l}v=2\\u-1\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=2\\u\le1\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2^{x^2}=2\\2^{\sqrt{x-1}-1}\le1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\\sqrt{x-1}-1\le0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x\le2\end{array}\right.$.

Vậy kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình: $S=[1;2]=[a;b]$.

Nên $T=10a-b=8$.

Câu 6. Trong tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5)\geq 1$, có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5)\geq 1 \Leftrightarrow 2x+2y+5\geq x^2+y^2+3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\leq 4$ (1).

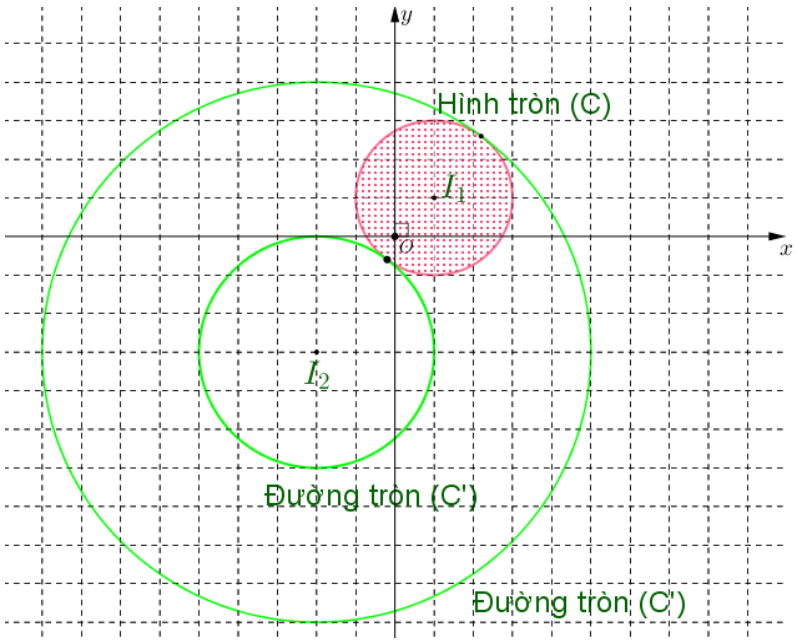
(1) là hình tròn (C) tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=2$.

Mặt khác $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=m(2)$.

Với $m=0$, $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$. Ta thấy $(x;y)=(-2;-3)$ không thỏa mãn bất phương trình (1).

Với $m<0$, không tồn tại cặp $(x;y)$ thỏa mãn (2).

Với $m>0$ thì phương trình (2) là phương trình đường tròn (C') tâm $I_2(-2;-3)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.



Tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ (1) và (2) khi và chỉ khi (C) và (C') có một điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow$ hình tròn (C) và đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với nhau, hoặc hình

tròn (C) nằm trong (C') và tiếp xúc trong với nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = R_2 - R_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 = \sqrt{m} + 2 \\ 5 = \sqrt{m} - 2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = 49 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Cho bất phương trình $m.3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m \geq \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m \geq -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$m.3^{x+1} + (3m+2).(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$

$\Leftrightarrow 3m + (3m+2).\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$

Đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$

Khi $x < 0$ thì $0 < t < 1$

BPT trở thành $3m + \dfrac{3m+2}{t} + t > 0,\ \forall t \in (0;1)$.

$\Leftrightarrow 3m > \dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t \in (0;1)$

Xét $f(t) = \dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t \in (0;1)$

$f'(t) = \dfrac{-t^2-2t+2}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3} - 1$

x	0		$\sqrt{3}-1$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$	↘	$\dfrac{-3}{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 3m > \dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m<0$. **B.** $m\ge\frac{100}{841}$. **C.** $m\le\frac{1}{4}$. **D.** $m\le\frac{100}{841}$.

Lời giải

Chọn D

$m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow m-(1-2m).\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}+m.\left(\frac{5}{2}\right)^{2.(x^2-2x-1)}\le 0\ \ (1)$

Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}$, Xét $u(x)=x^2-2x-1,\ \forall x\left[\frac{1}{2};2\right]$.

$u'(x)=2x-2;\ u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$u\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4};\ u(1)=-2;u(2)=-1\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-2,\ \max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-1.$

$\Rightarrow\frac{4}{25}\le t\le\frac{2}{5}$

$(1)\Leftrightarrow m-(1-2m).t+m.t^2\le 0$

$\Leftrightarrow mt^2-(1-2m)t+m\le 0$

$\Leftrightarrow m(t^2+2t+1)\le t$

$\Leftrightarrow m\le\frac{t}{t^2+2t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{t^2+2t+1},t\in\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]$

$f'(t)=\frac{-t^2+1}{(t^2+2t+1)};\ f'(t)=0\Leftrightarrow -t^2+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\t=1\ \ (l)\end{array}\right.$

$f\left(\frac{4}{25}\right)=\frac{100}{841};\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{10}{49}.$

$\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]}f(t)=\frac{100}{841}.$

Vậy $m\le\frac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Câu 9. Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 35. **B.** 36. **C.** 34. **D.** 33.

Lời giải

Chọn C

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x+5+m>0\\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-x^2-6x-5\\ 6x^2+8x+9>m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\max\limits_{(1;3)} f(x)\\ m<\min\limits_{(1;3)} g(x)\end{cases}$, với $f(x)=-x^2-6x-5;\ g(x)=6x^2+8x+9$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

+ $f'(x)=-2x-6<0,\forall x\in(1;3)\Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow\max\limits_{(1;3)} f(x)=f(1)=-12$

+ $g'(x)=12x+8>0,\forall x\in(1;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow\min\limits_{(1;3)} g(x)=g(1)=23$

Khi đó $-12<m<23$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-11;-10;...;22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $x^2+2y^2>1$. Đặt $\sqrt{2}y=z$. Suy ra $\Leftrightarrow x^2+z^2>1\ (1)$

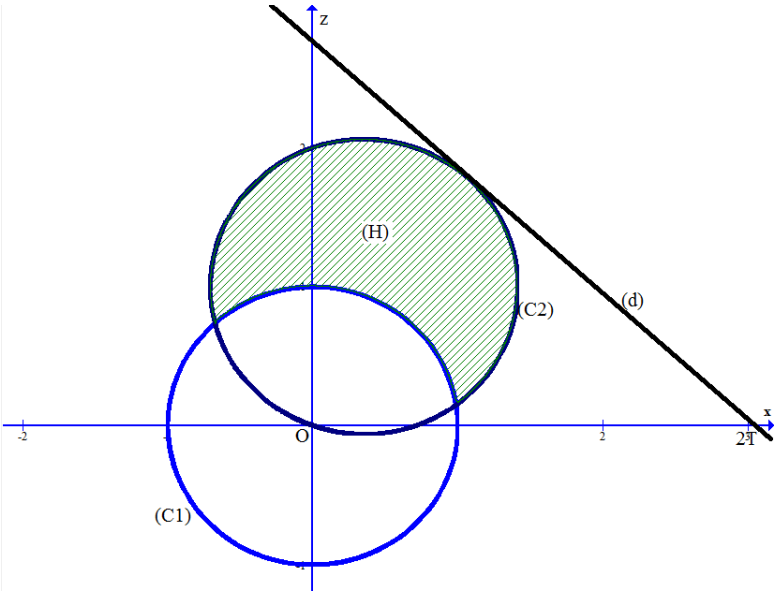
$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1$

$\Leftrightarrow 2x+y\geq x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow 2x+\frac{z}{\sqrt{2}}\geq x^2+z^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leq\frac{9}{8}\ (2)$

Tập hợp các điểm $M(x;z)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(C_1): x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(C_2): (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$.



Hệ $\begin{cases} T=2x+\frac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\le\frac{9}{8} \\ x^2+z^2>1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d: 2x+\frac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ có điểm chung với miền (H).

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng $d: 2x+\frac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ tiếp xúc với đường tròn (C_2)

$\Leftrightarrow d(I;d)=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ với $I\left(1;\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn (C_2).

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2+\frac{1}{4}-T\right|}{\sqrt{4+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T-\frac{9}{4}\right|=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T=0 \ (l) \\ T=\frac{9}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $0<x^2+2y^2<1$.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2 \Leftrightarrow T=2x+y<1 \text{ (loại).}$$

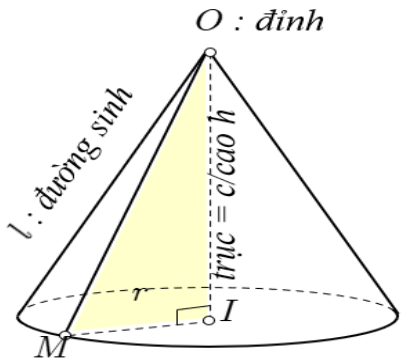
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là $\max T=\frac{9}{2}$.

DẠNG TOÁN 32: MẶT NÓN – MẶT TRỤ - MẶT CẦU

PHẦN I

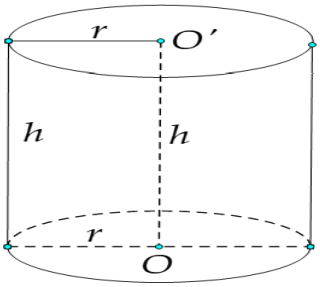
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

***1. Khối nón**: Được tạo thành khi xoay tam giác vuông quanh cạnh góc vuông*



- *Diện tích xung quanh:* $S_{\text{xq nón}} = \pi rl.$
- *Diện tích toàn phần:* $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi rl + \pi r^2.$
- *Thể tích khối nón:* $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$
- *Mối liên hệ:* $l^2 = h^2 + r^2.$

***2. Khối trụ:** Được tạo thành khi quay hình chữ nhật xung quanh cạnh.*



- *Diện tích xung quanh:* $S_{\text{xq}} = 2\pi rh.$
- *Diện tích toàn phần:* $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$
- *Thể tích của khối trụ:* $V_{\text{tru}} = S_{\text{đáy}}.h = \pi r^2 h.$

***3. Khối cầu:** Diện tích và thể tích mặt cầu:* $S = 4\pi R^2$ *và* $V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tính diện tích xung quanh hình nón, hình trụ.
- Tính diện tích toàn phần hình nón, hình trụ.
- Tính thể tích khối nón, khối trụ và khối cầu.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $5\pi a^2$ **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$ **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$ **D.** $10\pi a^2$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính diện tích xung quanh của hình nón có chiều cao h và bán kính r.

2. HƯỚNG GIẢI:

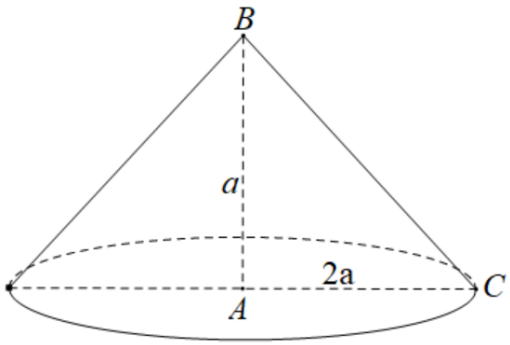
B1: Tính độ dài đường sinh.

B2: Thế vào công thức tính diện tích xung quanh hình nón $Sxq = \pi rl$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C



Ta có: $l=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}.$

Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq}=\pi rl=\pi.2a.a\sqrt{5}=2\pi a^2\sqrt{5}.$

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh $l=5$ và bán kính $r=3$ bằng:

A. 8π. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 15π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh $l=5$ và bán kính $r=3$ là:

$S_{xq}=\pi rl=\pi.3.5=15\pi.$

Câu 2. Diện tích toàn phần của hình nón có độ dài đường sinh $l=5$ và bán kính $r=3$ bằng:

A. 15π. **B.** 24. **C.** 24π. **D.** 15π.

Lời giải

Chọn C

Diện tích toàn phần của hình nón có độ dài đường sinh $l=5$ và bán kính $r=3$ là:

$S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\pi.3.5+\pi.3^2=24\pi.$

Câu 3. Thể tích khối nón có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ bằng:

A. 8π. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 15π.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối nón có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ là:

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.3^2.5=15\pi.$

Câu 4. Một hình nón có diện tích xung quanh bằng 40π và bán kính đáy $r=5$ thì có độ dài đường sinh bằng:

A. 8π. **B.** 8. **C.** 4π. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính r là: $S_{xq}=\pi rl$

Từ đó suy ra độ dài đường sinh $l=\dfrac{S_{xq}}{\pi r}=\dfrac{40\pi}{\pi.5}=8.$

Câu 5. Một hình nón có diện tích xung quanh bằng 40π và độ dài đường sinh $l=5$ thì có bán kính bằng:

A. 8π. **B.** 8. **C.** 4π. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính r là: $S_{xq}=\pi rl$

Từ đó suy ra bán kính $r=\dfrac{S_{xq}}{\pi l}=\dfrac{40\pi}{\pi.5}=8.$

Câu 6. Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ bằng:

A. 30π. **B.** 15. **C.** 30. **D.** 15π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ là:

$S_{xq}=2\pi rh=2.\pi.3.5=30\pi.$

Câu 7. Diện tích toàn phần của hình trụ có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ bằng:

A. 48π. **B.** 48. **C.** 39. **D.** 39π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích toàn phần của hình trụ có chiều cao $h=5$ và bán kính $r=3$ là:

$S_{tp}=2\pi rh+2\pi r^2=2.\pi.3.5+2.\pi.3^2=48\pi.$

Câu 8. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 40π và bán kính $r=5$ thì có chiều cao bằng:

A. 8π. **B.** 4. **C.** 4π. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h và bán kính r là: $S_{xq}=2\pi rh$

Từ đó suy ra chiều cao $h=\dfrac{S_{xq}}{2\pi r}=\dfrac{40\pi}{2.\pi.5}=4.$

Câu 9. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 20π và chiều cao $h=5$ thì có bán kính bằng:

A. 2π. **B.** 2. **C.** 4π. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h và bán kính r là: $S_{xq}=2\pi rh$

Từ đó suy ra bán kính $r=\dfrac{S_{xq}}{2\pi h}=\dfrac{20\pi}{2.\pi.5}=2.$

Câu 10. Diện tích mặt cầu có bán kính $r=5$ bằng:

A. 20π. **B.** 100π. **C.** 10π. **D.** 25π.

Lời giải

Chọn B

Diện tích mặt cầu có bán kính $r=5$ là: $S=4\pi r^2=4.\pi.5^2=100\pi.$

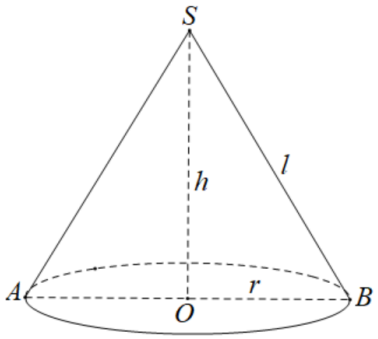
Mức độ 2

Câu 1. Một hình nón có đường cao $h=4$ và bán kính đáy $r=5$. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $5\pi\sqrt{41}$. **B.** 15π. **C.** $4\pi\sqrt{41}$. **D.** 20π.

Lời giải

Chọn A



Hình nón có đường sinh $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}.$

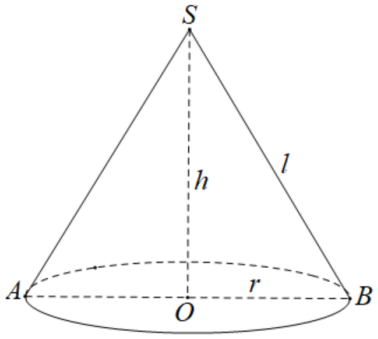
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl=5\pi\sqrt{41}.$

Câu 2. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Thể tích của khối nón là:

A. 12π. **B.** 20π. **C.** 36π. **D.** 60π.

Lời giải

Chọn A



Ta có diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=15\pi\Rightarrow\pi rl=15\pi\Leftrightarrow 3.l=15\Leftrightarrow l=5.$

Chiều cao của khối nón là $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$

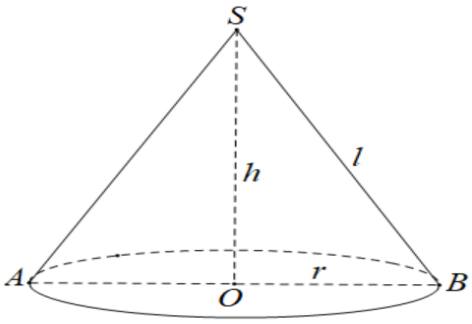
Thể tích của khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.3^2.4=12\pi.$

Câu 3. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: ΔSAB vuông cân tại S và $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

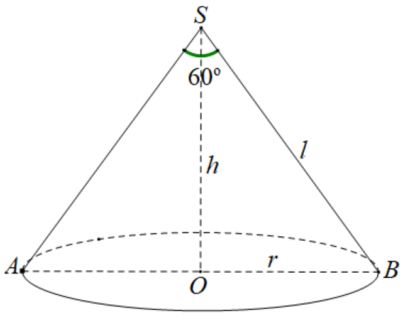
Vậy thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}.\pi.OB^2.SO = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 4. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích của khối nón là

A. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \pi a^3$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $V = 3\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: ΔSAB là tam giác đều nên ta có $l = AB = 2r,\ h = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$

Mà $S_{xq} = \pi rl = 6\pi a^2 \Leftrightarrow 2\pi r^2 = 6\pi a^2 \Leftrightarrow r = a\sqrt{3} \Rightarrow h = 3a.$

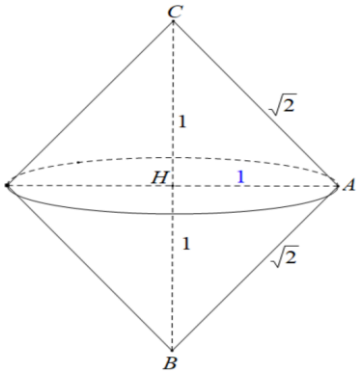
Thể tích của khối nón đã cho là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3\pi a^3.$

Câu 5. Tam giác ABC vuông cân đỉnh A có cạnh huyền là 2. Quay tam giác ABC quanh trục BC thì được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$. **B.** $\frac{4}{3}\pi$. **C.** $\frac{2}{3}\pi$. **D.** $\frac{1}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AB = AC = \sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB thì $AH \perp BC$ và $AH = 1$.

Quay tam giác ABC quanh trục BC thì được khối tròn xoay có thể tích là:

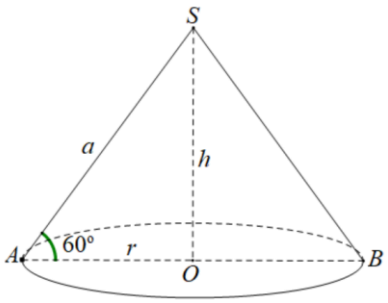
$V = 2.\frac{1}{3}HB.\pi AH^2 = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 6. Cho khối nón đỉnh S có độ dài đường sinh là a, góc giữa đường sinh và mặt đáy là $60°$. Thể tích khối nón là

A. $V = \frac{3\pi a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \frac{\pi a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\cos 60° = \frac{r}{a} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}$ và $\sin 60° = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

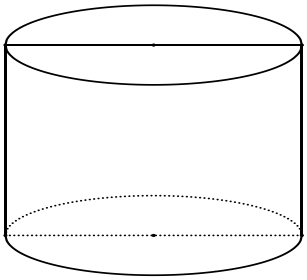
Câu 7. Cho khối trụ có diện tích xung quanh bằng 80π và khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

Thể tích của khối trụ là

A. 160π. **B.** 400π. **C.** 40π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn A



Ta có: khoảng cách giữa hai đáy bằng 10 nên $h = l = 10.$

$S_{xq} = 2\pi rl = 80\pi \Rightarrow 2.r.10 = 80 \Leftrightarrow r = 4.$

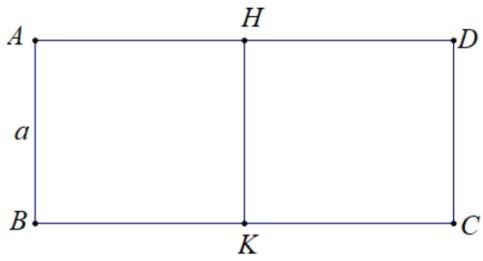
Vậy thể tích của khối trụ bằng $V = \pi r^2 h = \pi.4^2.10 = 160\pi.$

Câu 8. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 8\pi$. **B.** $S_{tp} = 8a^2\pi$. **C.** $S_{tp} = 4a^2\pi$. **D.** $S_{tp} = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C



Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có đường cao là $h = AB = a$, bán kính đường tròn đáy là $r = BK = \frac{1}{2}BC = a$.

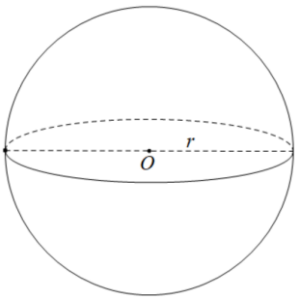
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 4\pi a^2$.

Câu 9. Một mặt cầu có chu vi đường tròn lớn bằng 4π. Diện tích mặt cầu đó là

A. $S = 16\pi$. **B.** $S = 64\pi$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 32\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính mặt cầu.

Chu vi đường tròn lớn là $4\pi \Rightarrow 2\pi r = 4\pi \Leftrightarrow r = 2.$

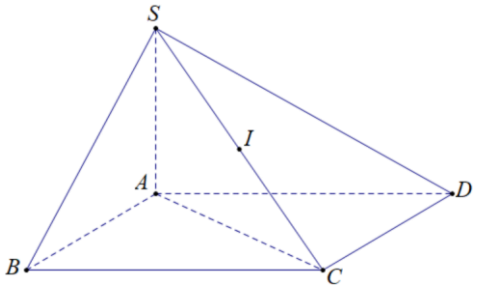
Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi r^2 = 16\pi.$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a\sqrt{3}$ và $AD=a$. Đường thẳng SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$ bằng

A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{5}}{24}$. **C.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{25}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{5}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy các tam giác SAC, SBC, SDC là tam giác vuông (SC là cạnh huyền).

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có tâm là trung điểm của SC và bán kính là

$$r=\frac{SC}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AC^2}}{2}=\frac{\sqrt{SA^2+AB^2+AD^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+3a^2+a^2}}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$.

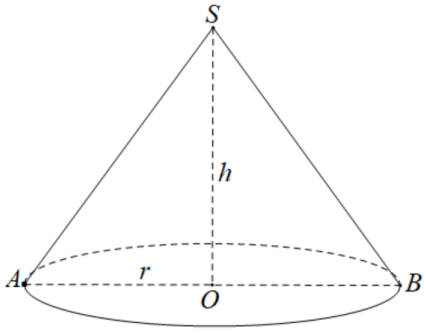
Mức độ 3

Câu 1. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích của khối nón là.

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=3\pi a^3$. **D.** $V=\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO.$

Ta có: $ASB=60°\Rightarrow ASO=30°\Rightarrow \tan 30°=\frac{OA}{SO}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow SO=OA\sqrt{3}.$

Lại có $S_{xq}=\pi Rl=\pi.OA.SA=\pi.OA\sqrt{OA^2+SO^2}=6\pi a^2.$

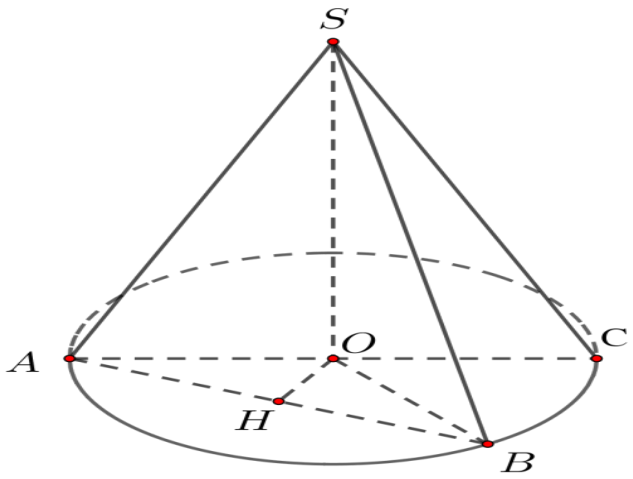
$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2+3OA^2}=6a^2\Rightarrow 2OA^2=6a^2\Rightarrow OA=a\sqrt{3}\Rightarrow SO=3a\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi.3a^2.3a=3\pi a^3.$

Câu 2. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO=30°$, $SAB=60°$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S_{xq}=2\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $OH=a$. Đặt $OA=x\ \ (x>0)$ thì $OA=SA.\cos 30°\Rightarrow SA=\frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Do góc $SAB=60°$ nên tam giác SAB đều $\Rightarrow AB=SA=\frac{2x}{\sqrt{3}}\Rightarrow AH=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Do $OA^2=AH^2+OH^2\Leftrightarrow x^2=\frac{x^2}{3}+a^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2}a^2\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ (Do $x>0$).

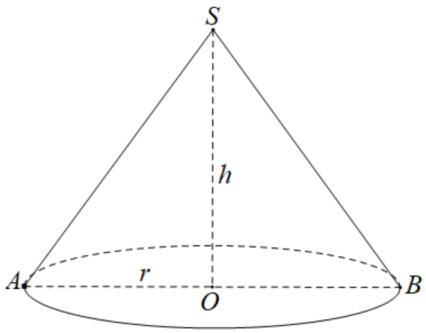
Vậy $OA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SA=a\sqrt{2}$ nên diện tích xung quanh là $S_{xq}=\pi.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2}=\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hình nón có đường sinh tạo với đáy góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của hình nón cắt hình nón được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Thể tích của khối nón là

A. $V=3\pi$. **B.** $V=3\sqrt{3}\pi$. **C.** $V=9\sqrt{3}\pi$. **D.** $V=9\pi$.

Lời giải

Chọn A



Góc giữa đường sinh tạo với đáy là $SAO = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{h}{r} \Leftrightarrow h = \sqrt{3}r \quad (1)$

Mặt khác: $\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} SO.AB = r.h \\ S_{ABC} = \dfrac{SA+SB+AB}{2} = l + r = \sqrt{h^2 + r^2} + r \end{cases} \Rightarrow r.h = \sqrt{h^2 + r^2} + r \quad (2)$

Thế (1) vào (2) ta được: $\sqrt{3}r^2 = 3r \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \quad (loai) \\ r = \sqrt{3} \ (nhan) \end{array}\right.$. Suy ra: $h = 3$.

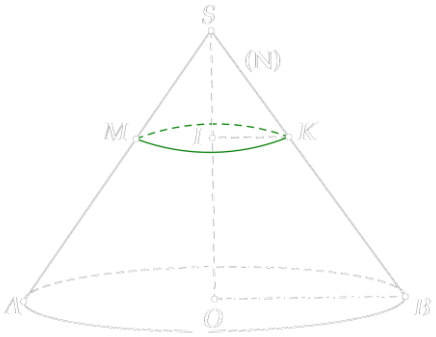
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 3\pi$.

Câu 4. Cho một hình nón đỉnh S có chiều cao bằng $8\,\text{cm}$, bán kính đáy bằng $6\,\text{cm}$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa đáy được một hình nón (N) đỉnh S có đường sinh bằng $4\,\text{cm}$. Tính thể tích của khối nón (N).

A. $V = \dfrac{768}{125}\pi\,\text{cm}^3$ **B.** $V = \dfrac{786}{125}\pi\,\text{cm}^3$ **C.** $V = \dfrac{2304}{125}\pi\,\text{cm}^3$ **D.** $V = \dfrac{2358}{125}\pi\,\text{cm}^3$

Lời giải

Chọn A



Đường sinh của hình nón lớn là: $l = SB = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{cm}$.

Gọi l_2, r_2, h_2 lần lượt là đường sinh, bán kính đáy và chiều cao của hình nón (N).

$l_2 = SK = 4\,\text{cm}$

Ta có: ΔSOB và ΔSIK đồng dạng nên: $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IK}{OB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h}=\frac{r_2}{r}=\frac{l_2}{l}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} h_2=\frac{2}{5}h=\frac{16}{5} \\ r_2=\frac{2}{5}.r=\frac{12}{5} \end{array}\right. .$$

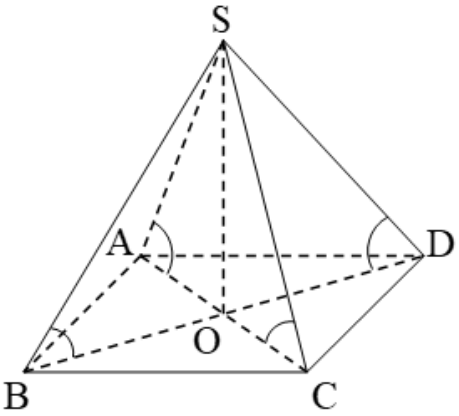
Thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)}=\frac{1}{3}.\pi.r_2^2.h_2=\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{12}{5}\right)^2.\frac{16}{5}=\frac{768}{125}\pi \text{ cm}^3$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng $45°$. Diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ là.

A. $2\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **C.** $4\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$. Khi đó $SO\perp(ABCD)$ và trong ΔSOA vuông tại O có

$SAO=45^\circ, \text{OA}=\frac{AC}{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$. Suy ra $SA=\frac{OA}{\cos 45^\circ}=2a$.

Vậy diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ là

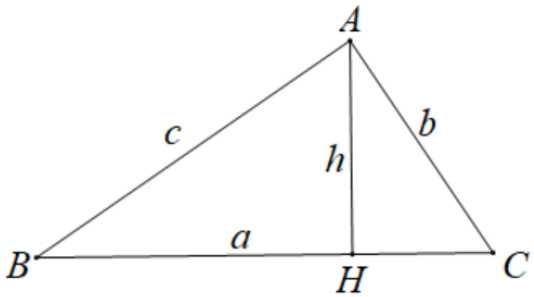
$S_{xq}=\pi\text{rl}=\pi.OA.SA=\pi.a\sqrt{2}.2a=2\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC=a, AC=b, AB=c, b<c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quanh cạnh AC, quanh cạnh AB, ta được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_b>S_c>S_a$. **B.** $S_b>S_a>S_c$. **C.** $S_c>S_a>S_b$. **D.** $S_a>S_c>S_b$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A của tam giác, đặt $AH=h$

Ta có $S_a=\pi.BA.AH+\pi.CA.AH=\pi h(c+b)$

$S_b=\pi.BC.BA+\pi.BA^2=\pi c(a+c)$

$S_c=\pi.CB.CA+\pi.CA^2=\pi b(a+b)$

Do $b<c$ nên hiển nhiên $S_c<S_b$.

Do $c<a, h<b$ nên hiển nhiên $S_a<S_c$.

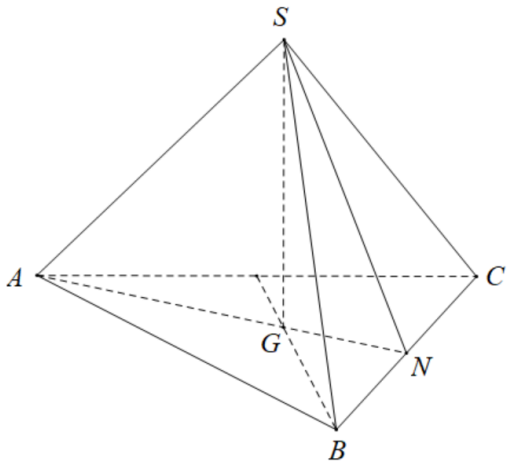
Vậy $S_a<S_c<S_b$..

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có:

Bán kính đường tròn đáy $r=AG=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Đường sinh $l=SA=\sqrt{SG^2+AG^2}=\sqrt{\left(GN\tan 60°\right)^2+AG^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{7}{12}}a$.

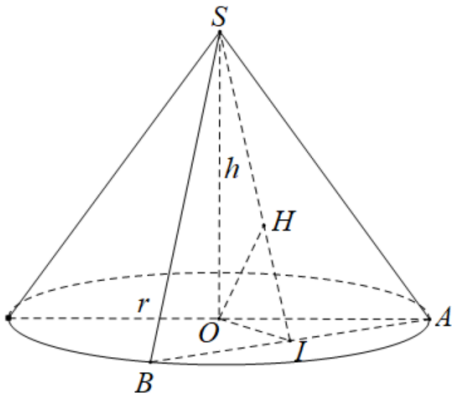
Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi rl=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 8. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30°$, $SAB=60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB, dựng $OH \perp SI$. Ta có $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $SAB = 60°$ nên tam giác SAB đều. Suy ra $SA = SB = AB$.

Mặt khác $SAO = 30° \Rightarrow SO = SA.\sin 30° = \dfrac{1}{2}SA$ và $OA = SA.\cos 30° = \dfrac{SA.\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOI ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA^2 - AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)SA^2} + \frac{1}{\left(\frac{SA.\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}SA\right)^2}$$

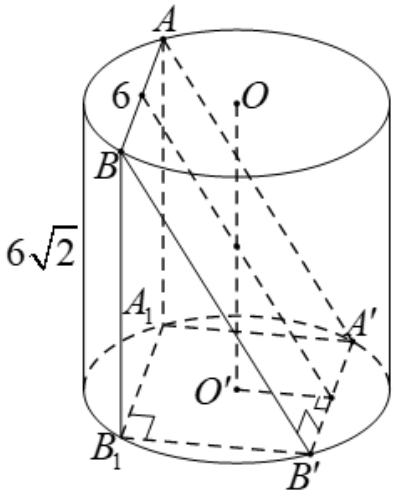
$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{6}{SA^2} \Leftrightarrow SA = OH.\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{6} = a\sqrt{2}.$$

Câu 9. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. $5\,cm$ **B.** $3\sqrt{2}\,cm$ **C.** $4\,cm$ **D.** $5\sqrt{2}\,cm$

Lời giải

Chọn C



Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).

Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10(cm)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6(cm)$,

$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}(cm)$

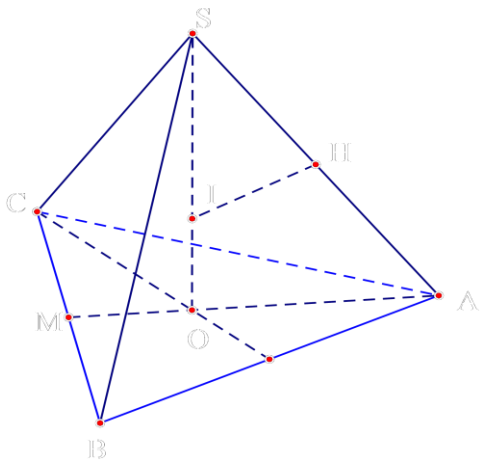
Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2r = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow r = 4(cm)$.

Câu 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy có độ dài bằng a, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của SA. Trong mặt phẳng (SAO) kẻ đường thẳng qua H và vuông góc với SA cắt SO tại I. Khi đó $IS = IA = IB = IC$.

Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$

Do $\Delta SHI \backsim \Delta SOA$ ta có: $\frac{SI}{SA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SH.SA}{SO} = \frac{3\sqrt{6}a}{8}$.

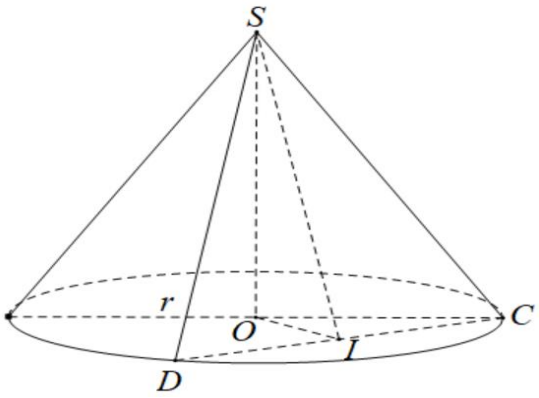
Mức độ 4

Câu 1. Một hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là 1 tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác là

A. $S_{\max} = 8a^2$ **B.** $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$ **C.** $S_{\max} = 4a^2$ **D.** $S_{\max} = 16a^2$

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện của hình chóp là ΔSCD.

Vì ΔSOB vuông tại O, có $OB = r = 2a\sqrt{3}$, $OSB = 60^o$ nên $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60^o} = 4a$.

Khi đó, $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}SC.SD.\sin CSD \le \dfrac{1}{2}SC.SD = 8a^2$ (vì $\sin CSD \le 1$).

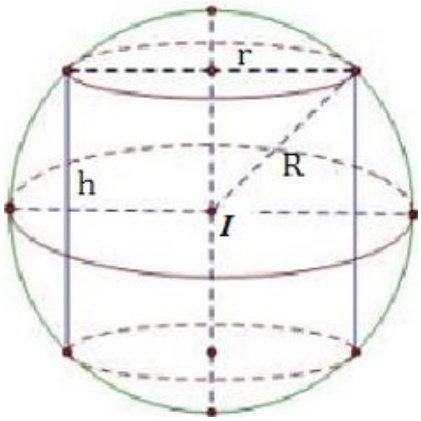
Vậy Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là $8a^2$ khi $CSD = 90^o$.

Câu 2. Một khối cầu (S) có tâm I bán kính R không đổi. Một khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nhưng nội tiếp trong khối cầu. Tính chiều cao h theo R để thể tích khối trụ lớn nhất

A. $h = \sqrt{2}R$. **B.** $h = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$. **C.** $h = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}$. **D.** $h = \dfrac{\sqrt{3}R}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$. Thể tích hình trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)$.

Đặt $f(h) = \pi R^2 h - \dfrac{\pi}{4}h^3$.

$f'(h) = \pi R^2 - \dfrac{3}{4}\pi h^2 \ \ (0 < h < 2R)$.

Ta có bảng biến thiên:

h	0		$\frac{2R\sqrt{3}}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	0	↗	$\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	↘	0

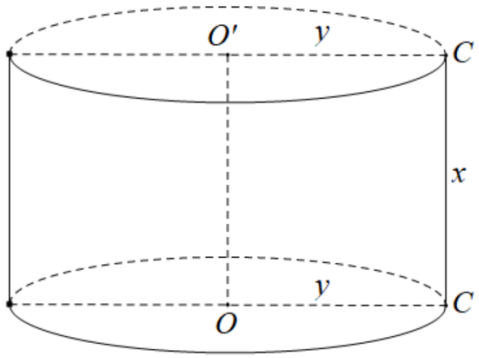
Ta thấy thể tích khối trụ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ khi $h=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Câu 3. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. 64π cm^3. **B.** 16π cm^3. **C.** 8π cm^3. **D.** 32π cm^3.

Lời giải

Chọn C



Thể tích khối trụ: $V=\pi y^2x=\pi.x.y.y\le\pi\left(\frac{x+y+y}{3}\right)^3=\pi\left(\frac{x+2y}{3}\right)^3=\pi\left(\frac{6}{3}\right)^3=8\pi$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=2$.

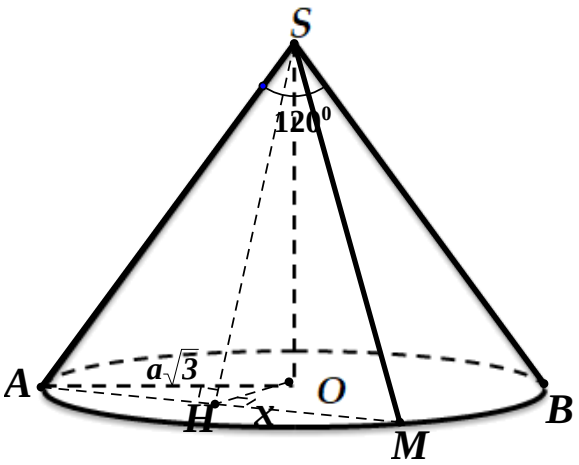
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V=8\pi$ cm^3.

Câu 4. Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R=a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $2\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM = x \ \left(0 < x \le 2a\sqrt{3}\right)$

Gọi H là trung điểm của $AM \Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

Vì $ASB = 120° \Rightarrow ASO = 60° \Rightarrow \begin{cases} SA = \dfrac{AO}{\sin 60°} = 2a \\ OA = \dfrac{AO}{\tan 60°} = a \end{cases}$.

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2} AM.SH = \frac{1}{2} x.\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Ta có: $S' = \frac{1}{2}\left[\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}}\right] = \frac{16a^2 - 2x^2}{8\sqrt{4a^2 - \frac{x^2}{4}}} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$.

x	0	$2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{3}$
S'		$+$ 0 $-$	
S	0	$\nearrow$ $2a^2$ $\searrow$	$\sqrt{3}a^2$

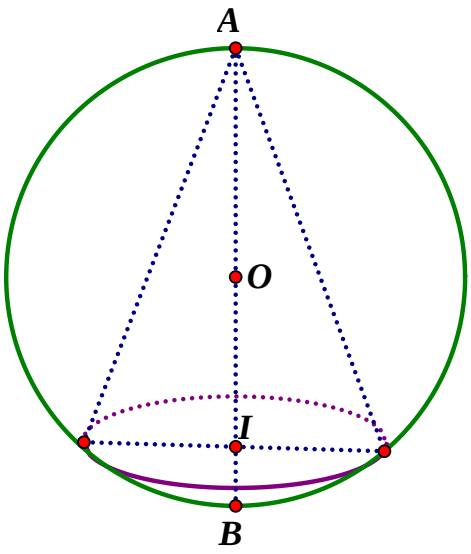
Vậy: $S_{\max} = 2a^2$.

Câu 5. Cho mặt cầu đường kính $AB = 2R$. Mặt phẳng (P) vuông góc AB tại I (I thuộc đoạn AB), cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Tính $h = AI$ theo R để hình nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất?

A. $h = R$. **B.** $h = \dfrac{R}{3}$. **C.** $h = \dfrac{4R}{3}$. **D.** $h = \dfrac{2R}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm AB, M là điểm bất kì trên đường tròn (C).

Ta có $IM=\sqrt{OM^2-OI^2}=\sqrt{R^2-(h-R)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$.

Thể tích hình nón: $V=\frac{1}{3}.AI.S_{(C)}=\frac{1}{3}.h.\pi.\left(2Rh-h^2\right)$.

Đặt $f(h)=\frac{\pi}{3}\left(2Rh^2-h^3\right)$. (R là tham số). Tập xác định $D=[0;2R]$.

$f'(h)=\frac{\pi}{3}\left(4Rh-3h^2\right)$; $f'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{4R}{3}$.

$f(0)=0$; $f(R)=\frac{\pi}{3}.R^3$; $f\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{32\pi}{81}R^3$. Vậy hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất khi $h=\frac{4R}{3}$

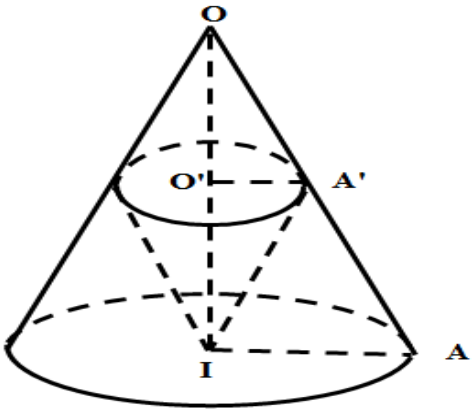
Hay thể tích hình nón lớn nhất đạt khi $h=\frac{4R}{3}$.

Câu 6. Cho hình nón đỉnh *O*, chiều cao là *h*. Một khối nón khác có đỉnh là tâm của đáy và có đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh *O* đã cho. Tính chiều cao *x* của khối nón này để thể tích của nó lớn nhất, biết $0<x<h$.

A. $x=\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **B.** $x=\frac{h}{3}$. **C.** $x=\frac{2h}{3}$. **D.** $h\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi bán kính đường tròn đáy của hình nón đỉnh O là $IA=R$

Đường cao của hình nón tâm I là $IO'=x$.

Xét tam giác OIA có $O'A'//IA \Rightarrow \dfrac{OO'}{OI}=\dfrac{O'A'}{IA} \Leftrightarrow \dfrac{h-x}{h}=\dfrac{O'A'}{R} \Leftrightarrow O'A'=\dfrac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón đỉnh I là $V=\dfrac{1}{3}.O'I.\pi\left(O'A'\right)^2=\dfrac{\pi R^2}{3h^2}.x(h-x)^2$.

Xét hàm $y=x(h-x)^2$ với $0<x<h$.

$y'=(h-x)^2-2x(h-x)=(h-x)(h-3x)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=h & \text{(loai)} \\ x=\dfrac{h}{3} & \text{(nhan)} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{h}{3}$		h
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Thể tích khối nón đỉnh I lớn nhất $\Leftrightarrow y=x(h-x)^2_{\max} \Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$.

Câu 7. Ông A dự định làm một cái bể nuôi cá có dạng hình trụ (không có nắp) với dung tích $200(\text{dm}^3)$. Tính bán kính r của đáy hình trụ để ông A sử dụng nguyên liệu ít tốn kém nhất.

A. $r=31,69(\text{cm})$. **B.** $r=39,93(\text{cm})$. **C.** $r=42,57(\text{cm})$. **D.** $r=57,58(\text{cm})$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy r và độ dài đường sinh $l=h$.

Dung tích của bể cá: $V=\pi r^2 h \Leftrightarrow \pi r^2 h=200 \Leftrightarrow h=\dfrac{200}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của bể cá: $S_{tp}=\pi r^2+\pi rl=\pi r^2+\dfrac{200}{r}$.

Để sử dụng nguyên liệu ít tốn kém nhất thì diện tích toàn phần của bể cá phải nhỏ nhất.

Ta có $S_{tp}=\pi r^2+\dfrac{200}{r}=\pi r^2+\dfrac{100}{r}+\dfrac{100}{r}\ge 3\sqrt[3]{\pi r^2.\dfrac{100}{r}.\dfrac{100}{r}}=3\sqrt[3]{10^4\pi}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\pi r^2=\dfrac{100}{r}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}\approx 3{,}169(\text{dm})=31{,}69(\text{cm})$.

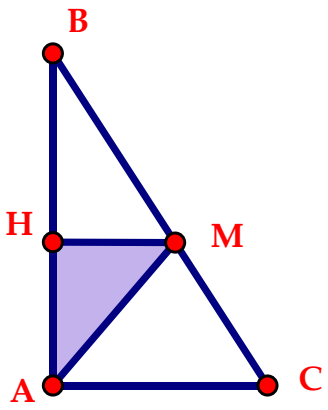
Vậy để ông A sử dụng nguyên liệu ít tốn kém nhất thì bán kính của đáy hình trụ $r=31{,}69(\text{cm})$.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=6cm, AC=3cm$. Gọi M điểm di động trên cạnh BC sao cho MH vuông góc với AB tại H. Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, tính thể tích lớn nhất của hình nón được tạo thành:

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AH=x(cm)$, $0<x<6$. Khi đó: $BH=6-x(cm)$.

Xét tam giác BHM vuông tại H, ta có:

$\tan HBM=\dfrac{HM}{BH}\Rightarrow HM=BH.\tan HBM=(6-x).\tan HBM$.

Mà $\tan HBM=\tan ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $HM=(6-x).\dfrac{1}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo thành khi tam giác AHM quay quanh cạnh AH là:

$V=\dfrac{1}{3}.AH.\pi.HM^2=\dfrac{\pi}{3}.x.\dfrac{1}{4}.(6-x)^2=\dfrac{\pi}{12}\left(x^3-12x^2+36x\right).(1)$.

Xét hàm số: $f(x)=x^3-12x^2+36x$ với $0<x<6$, ta có:

$f'(x)=3x^2-24x+36$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-24x+36=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=6\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^3-12x^2+36x$ với $0<x<6$:

x	0		2		6
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$		↗	32	↘	

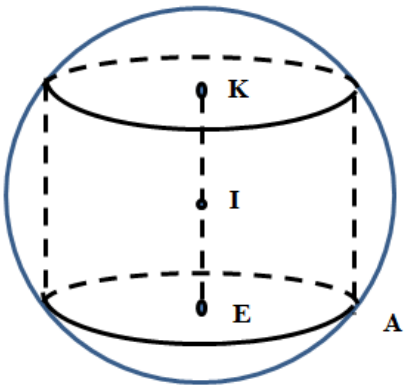
Từ (1) và bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của khối nón tạo thành là : $V=\frac{\pi}{12}.32=\frac{8\pi}{3}$.

Câu 9. Cho mặt cầu tâm O, bán kính R. Hình trụ (H) có bán kính đáy là r nội tiếp mặt cầu. Thể tích khối trụ được tạo nên bởi (H) có thể tích lớn nhất khi r bằng

A. $r=\sqrt{3}R$. **B.** $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$. **C.** $r=\sqrt{6}R$. **D.** $r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Lời giải

Chọn D



Hình trụ nội tiếp trong mặt cầu có tâm đáy là E, có bán kính $EA=r\ (0<r<R)$, đường cao $KE=2EI$.

Xét tam giác vuông IEA có $IE=\sqrt{IA^2-EA^2}=\sqrt{R^2-r^2}$.

Thể tích của khối trụ là: $V=h.\pi r^2=2IE.\pi r^2=2\pi r^2.\sqrt{R^2-r^2}$.

Xét hàm số $y=r^2.\sqrt{R^2-r^2}$ với $(0<r<R)$

Có $y'=2r.\sqrt{R^2-r^2}+r^2.\frac{-2r}{2\sqrt{R^2-r^2}}=2r.\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{2rR^2-3r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2rR^2-3r^3=0\Leftrightarrow r\left(2R^2-3r^2\right)=0\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Bảng biến thiên

r	0		$\frac{\sqrt{6}}{3}R$		R
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $\Leftrightarrow y \ge y\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right) \Rightarrow y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$

Vậy thể tích hình trụ lớn nhất $\Leftrightarrow y_{\max} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Câu 10. Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000cm^3$. Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng:

A. $r = 10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}cm$. **B.** $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}cm$. **C.** $r = 10\sqrt{\frac{5}{\pi}}cm$. **D.** $r = \sqrt{\frac{500}{\pi}}cm$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $r(r>0)$ là bán kính đáy của lon sữa.

Khi đó $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số: $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r>0)$

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 (r>0)$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $S(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}cm$.

DẠNG TOÁN 32: DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN

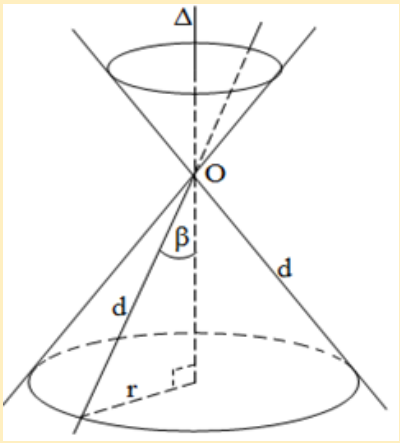
PHẦN II

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Mặt nón tròn xoay

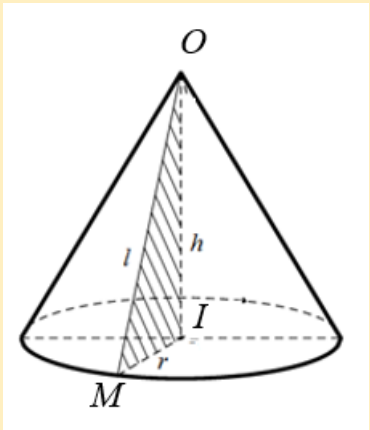
✪ **Định nghĩa:**

• Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và cắt nhau tạo thành góc (β) với $0° < \beta < 90°$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O. Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh của hình nón.



2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay.

✪ **Hình nón tròn xoay:** Cho tam giác OIM vuông tại O. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thanh một hình được gọi là hình nón tròn xoay, gọi tắt là hình nón.



Hình tròn tâm I sinh bởi các điểm thuộc cạnh IM khi IM quay quanh trục OI được gọi là mặt đáy của hình nón, điểm O được gọi là đỉnh của hình nón. Độ dài đoạn OI được gọi là chiều cao của hình nón. Độ dài đoạn OM được gọi là độ dài đường sinh của hình nón. Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh trục OI được gọi là mặt xung quanh của hình nón đó.

✪ **Khối nón tròn xoay :** là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn quay kể cả hình nón đó.

3. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay.

Hình nón có độ dài đường sinh là l, bán kính đáy bằng r có diện tích xung quanh được tính theo công thức: $S_{xq} = \pi rl$.

4. Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay.

Hình nón có độ dài đường sinh là l, bán kính đáy bằng r có diện tích toàn phần được tính theo công thức: $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

5. Thể tích khối nón.

Khối nón có chiều cao h, bán kính đáy bằng r có thể tích được tính theo công thức: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

6. Các công thức cần nhớ

+ Chu vi đường tròn có bán kính r: $C = 2\pi r$

+ Diện tích hình tròn bán kính r: $S = \pi r^2$.

+ Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón: $h^2 + r^2 = l^2$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình nón.
- Bài toán thiết diện.
- Sự tạo thành hình nón.
- Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp.
- Bài toán thực tế.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = 2a$. Khi quay tam giác ABC xung quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ACB tạo thành một hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $5\pi a^2$. **B.** $\sqrt{5}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{5}\pi a^2$. **D.** $10\pi a^2$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính diện tích xung quanh của hình nón

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm bán kính đường tròn đáy.

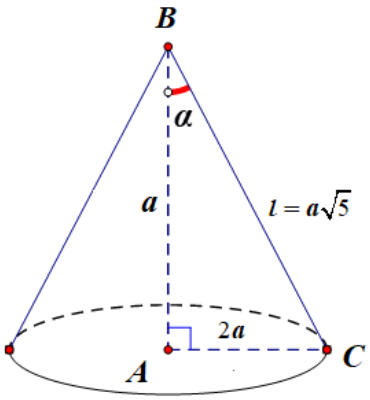
B2: Tìm đường sinh của hình nón

B3: Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh hình nón

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABC vuông tại A: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a.$

Hình nón tạo thành có bán kính đáy $r=AC=2a$, đường sinh $l=BC=\sqrt{5}a$ nên có diện tích xung quanh là $S_{xq}=\pi rl=2\sqrt{5}\pi a^2.$

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1: Hình nón (N) có chiều cao h, độ dài đường sinh l và bán kính đáy bằng r. Ký hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh của (N). Công thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{xq}=\pi rh.$ **B.** $S_{xq}=2\pi rl.$ **C.** $S_{xq}=2\pi r^2h.$ **D.** $S_{xq}=\pi rl.$

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho hình nón (N) có chiều cao *h*, độ dài đường sinh *l*, bán kính đáy *r*. Ký hiệu S_{tp} là diện tích toàn phần của (N). Công thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{tp}=\pi rl.$ **B.** $S_{tp}=\pi rl+2\pi r.$ **C.** $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2.$ **D.** $S_{tp}=2\pi rl+\pi r^2.$

Lời giải

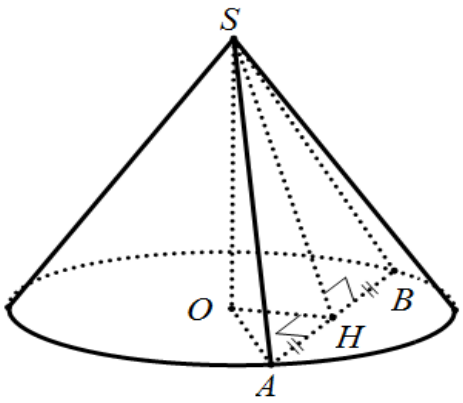
Chọn C

Câu 3: Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng đi qua trục của hình nón, cắt đường tròn đáy của hình nón tại hai điểm là hình gì?

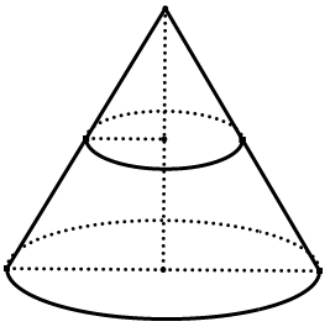
A. Hình tròn. **B.** Hình vuông. **C.** Hình tam giác. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn C



Câu 4: Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón như trong hình vẽ cho dưới đây là đường gì?

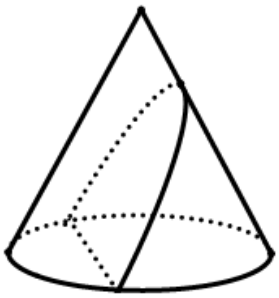


A. Đường tròn. **B.** Đường Elip. **C.** Đường Parabol. **D.** Đường Hypebol.

Lời giải

Chọn A

Câu 5: Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón là đường gì?



A. Đường tròn. **B.** Đường Elip. **C.** Đường Parabol. **D.** Đường Hypebol.

Lời giải

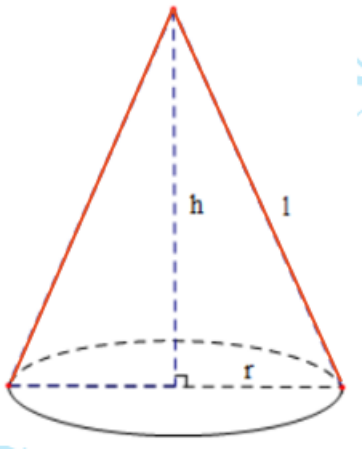
Chọn C

Câu 6: Gọi r; h; l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của một khối nón. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $l^2 = h^2 + r^2$. **B.** $h^2 = l^2 + r^2$. **C.** $r^2 = h^2 + l^2$. **D.** $l = h + r$.

Lời giải

Chọn A



Từ hình vẽ, ta có: $l^2 = h^2 + r^2$.

Câu 7: Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$.

A. $S_{xq} = 15\pi$. **B.** $S_{xq} = 24\pi$. **C.** $S_{xq} = 30\pi$. **D.** $S_{xq} = 15\pi$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l là

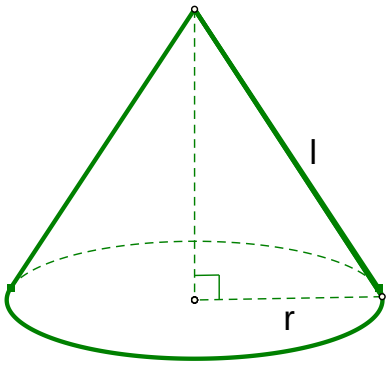
$S_{xq} = \pi rl = \pi.3.5 = 15\pi$ (đvdt).

Câu 8: Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đó bằng

A. $4\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy $r = a$ và độ dài đường sinh $l = 2a$ là

$S_{xq} = \pi rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$ (đvdt).

Câu 9: Cho hình nón tròn xoay có bán kính đường tròn đáy r, chiều cao h và đường sinh l. Gọi V là thể tích khối nón; S_{xq}, S_{tp} là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón. Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $h^2 = r^2 + l^2$. **B.** $S_{xq} = \pi rl$. **C.** $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$. **D.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Lời giải

Chọn A

$l^2 = r^2 + h^2$.

Câu 10: Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 30\ (\text{cm})$, bán kính đáy $r = 40\ (\text{cm})$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón.

A. $l = 50\ (\text{cm})$. **B.** $l = 50\sqrt{2}\ (\text{cm})$. **C.** $l = 40\ (\text{cm})$. **D.** $l = 52\ (\text{cm})$.

Lời giải

Chọn A

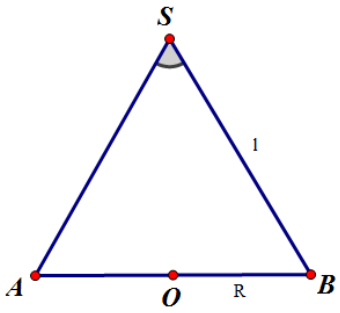
Ta có: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ (\text{cm})$.

Câu 11: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đường tròn đáy. Góc ở đỉnh của hình nón bằng

A. $60°$. **B.** $150°$. **C.** $120°$. **D.** $30°$.

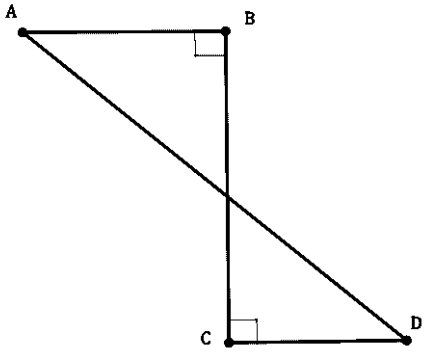
Lời giải

Chọn A



Hình nón có $l = 2R$ nên thiết diện qua trục là tam giác đều. Vậy góc ở đỉnh của hình nón là $60°$.

Câu 12: Hình $ABCD$ khi quay quanh BC thì tạo ra:



A. Một hình trụ. **B.** Một hình nón. **C.** Một hình nón cụt. **D.** Hai hình nón.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là giao điểm của BC và AD Khi quay hình $ABCD$ quanh BC tức là tam giác vuông OBA quanh OB và tam giác vuông OCD quanh OC. Mỗi hình quay sẽ tạo ra một hình nón nên hình tạo ra sẽ tạo ra hai hình nón.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì hình tròn xoay được tạo thành là.

A. hình cầu. **B.** hình trụ. **C.** hình nón. **D.** hình nón.

Lời giải

Chọn D

Hình tròn xoay được tạo thành là hình nón.

Câu 14: Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón bằng

A. $24\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $40\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B

$S_{xq}=\pi rl; l^2=(3a)^2+(4a)^2=(5a)^2\Rightarrow l=5a\Rightarrow S_{xq}=20\pi a^2.$

Câu 15: Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq}=2\pi a^2$. **B.** $S_{xq}=\sqrt{3}\pi a^2$. **C.** $S_{xq}=\pi a^2$. **D.** $S_{xq}=2a^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường sinh: $l=\sqrt{h^2+r^2}=2a$. Diện tích xung quanh là $S_{xq}=\pi rl=2\pi a^2$.

↳ Mức độ 2

Câu 1: Hình nón có chiều cao bằng đường kính đáy. Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính đáy là r thì $h=2r\Rightarrow l=r\sqrt{5}$.

Diện tích xung quanh $S_{xq}=\pi rl=\pi r^2\sqrt{5}$ và diện tích toàn phần $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2=\pi r^2\left(1+\sqrt{5}\right)$.

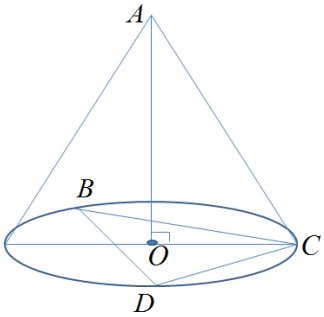
Vậy tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón là: $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Câu 2: Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a, có diện tích xung quanh là

A. $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình nón ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ cạnh a như hình vẽ trên. Ta có:

+) Bán kính đáy $R = OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

+) Độ dài đường sinh $l = AC = a$.

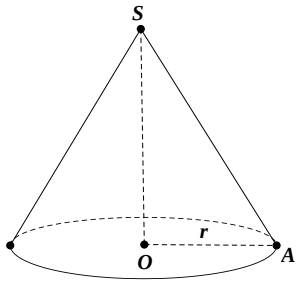
Vậy diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi Rl = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}a = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Cho hình nón có đường cao bằng bán kính đáy và bằng $15\ (\text{cm})$. Diện tích xung quanh của mặt nón đã cho là

A. $450\pi\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$. **B.** $225\pi\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$. **C.** $325\pi\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$. **D.** $1125\pi\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $h = r = 15 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 15\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của mặt nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.15.15\sqrt{2} = 225\pi\sqrt{2}\ (\text{cm}^2)$.

Câu 4: Cho hình nón có chiều cao bằng $8\ (\text{cm})$, bán kính đáy bằng $6\ (\text{cm})$. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $116\pi\ (\text{cm}^2)$. **B.** $84\pi\ (\text{cm}^2)$. **C.** $96\pi\ (\text{cm}^2)$. **D.** $132\pi\ (\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn C

Độ dài đường sinh của hình nón $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ (\text{cm})$.

Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi.6.10 + \pi.6^2 = 96\pi^2\ (\text{cm}^2)$.

Câu 5: Một hình nón với bán kính đáy $r = 3a$ và chiều cao $h = 4a$, diện tích xung quanh của nó bằng

A. $36\pi a^2$. **B.** $12\pi a^2$. **C.** $30\pi a^2$. **D.** $15\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường sinh: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$.

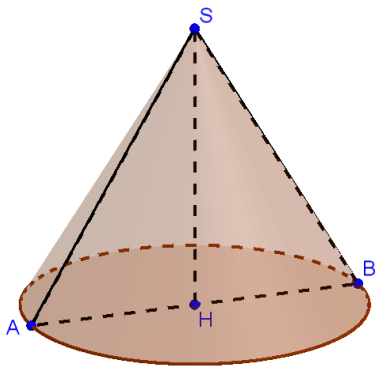
Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq}=\pi rl=\pi.3a.5a=15\pi a^2$ (đvdt).

Câu 6: Cho hình nón có bán kính đáy là R chiều cao là $\frac{4R}{3}$ góc ở đỉnh là 2α. Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. **C.** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{24}{25}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H và S lần lượt là tâm của đường tròn đáy và đỉnh của hình nón đã cho. Mặt phẳng chứa trục cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Ta có ΔSAB cân tại S và $ASB=2\alpha$ suy ra $ASH=\alpha$.

ΔSAH vuông tại H nên $SA=\sqrt{AH^2+SH^2}=\frac{5R}{3}$.

$\sin\alpha=\frac{AH}{SA}=\frac{3}{5}$.

Câu 7: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đường tròn đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nó đã cho là

A. $5a$. **B.** $3\sqrt{2}a$. **C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}r=a\\S_{xq}=\pi rl=5\pi a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=a\\l=5a\end{cases}$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón đã cho là $l=5a$.

Câu 8: Cho hình nón tròn xoay có bán kính đáy bằng $6a$, đường sinh bằng $12a$, với $a>0$. Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay đã cho bằng

A. $180\pi a^2$. **B.** $144\pi a^2$. **C.** $216\pi a^2$. **D.** $108\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S_{tp}=S_{xq}+S_d=\pi.6a.12a+\pi.(6a)^2=108\pi a^2$.

Câu 9: Một khối nón có bán kính đáy $r=a$ và thể tích bằng πa^3. Chiều cao h của khối nón là

A. $h=2a$. **B.** $h=a$. **C.** $h=4a$. **D.** $h=3a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

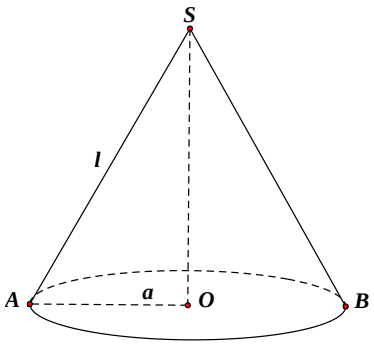
Suy ra $\frac{1}{3}\pi a^2 h=\pi a^3 \Leftrightarrow h=3a$.

Câu 10: Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và diện tích toàn phần bằng $3\pi a^2$. Độ dài đường sinh l của hình nón bằng

A. $l=4a$. **B.** $l=a\sqrt{3}$. **C.** $l=2a$. **D.** $l=a$.

Lời giải

Chọn C



$S_{tp}=\pi Rl+\pi R^2=\pi al+\pi a^2$.

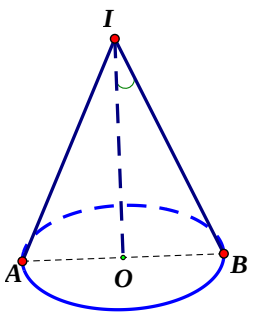
Theo giả thiết $S_{tp}=\pi al+\pi a^2=3\pi a^2 \Leftrightarrow l=2a$.

Câu 11: Cho hình nón (N) có diện tích toàn phần gấp 3 lần diện tích đáy. Tính góc ở đỉnh của (N).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



Xét hình nón (N) như hình vẽ:

Diện tích toàn phần của nón là: $S_{tp}=S_{xq}+S_d=\pi rl+\pi r^2$.

Diện tích đáy của nón là: $S_d=\pi r^2$.

Từ giả thiết ta có: $\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2 \Leftrightarrow l=2r$

Đặt $\alpha = BIO$. Ta có: $\sin\alpha=\dfrac{OB}{IB}=\dfrac{r}{l}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30°$.

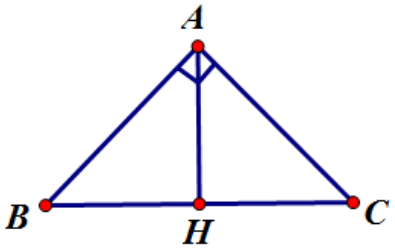
Vậy góc ở đỉnh của nón là: $2\alpha=60°$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao $AH=4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AH.

A. $S_{xq}=4\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq}=16\sqrt{2}\pi$. **C.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. **D.** $S_{xq}=32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại A có đường cao $AH=4\Rightarrow AH$ là đường trung tuyến và $AH=\dfrac{1}{2}BC=HB=4.$

Hình nón nhận được có đường cao $AH=4$, bán kính đáy $HB=4\Rightarrow AB=4\sqrt{2}$ là đường sinh.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón tạo thành là: $S_{xq}=\pi.BH.AB=\pi.4.4\sqrt{2}=16\sqrt{2}\pi$.

Câu 13: Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r=5$. **B.** $r=5\sqrt{\pi}$. **C.** $r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{xq}=2\pi rh=50\pi\Leftrightarrow rh=25$.

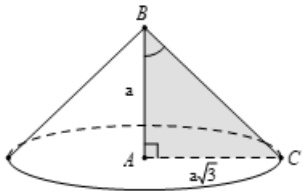
Lại có $h=2r\Rightarrow 2r^2=25\Leftrightarrow r^2=\dfrac{25}{2}\Rightarrow r=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $AC=\sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=a$. **B.** $l=\sqrt{2}a$. **C.** $l=\sqrt{3}a$. **D.** $l=2a$.

Lời giải

Chọn D



Độ dài đường sinh l bằng độ dài cạnh BC của tam giác vuông ABC.

Theo định lý Pytago thì $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $l = 2a.$

Câu 15: Cho hình nón có độ dài đường sinh gấp đôi chiều cao và bán kính đáy bằng $\sqrt{3}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{3}\pi$. **B.** $\left(3+2\sqrt{3}\right)\pi$. **C.** $2\sqrt{3}\pi$. **D.** $\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Gọi chiều cao của hình nón là $h = a$, $a > 0$ $\Rightarrow$ độ dài đường sinh của hình nón là $l = 2a$.

Theo bài ra ta có: $r^2 = 3 = l^2 - h^2 \Leftrightarrow 4a^2 - a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $h = 1$, $l = 2$.

Khi đó $S_{xq} = \pi rl = \pi.\sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}\pi$.

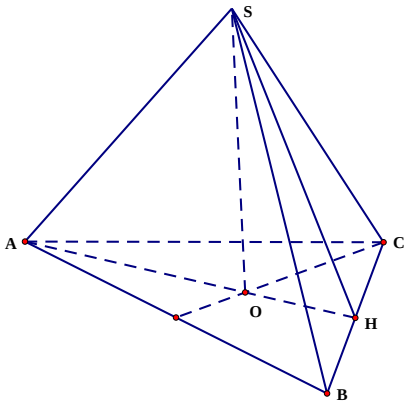
Mức độ 3

Câu 1: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của tam giác ABC, khi đó $SO \perp (ABC)$.

Hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA, bán kính đường tròn đáy là OA.

Gọi H là trung điểm BC thì $\left((SBC),(ABC)\right)=SHO=60°$.

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$OA=\frac{2}{3}AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SOH vuông tại O và có $SHO=60°$ nên $SO=OH.\tan 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

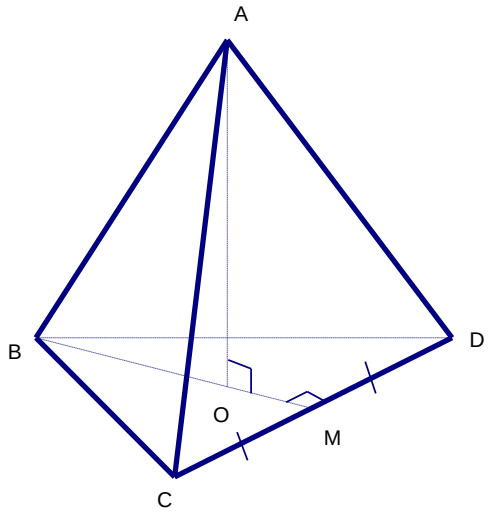
Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.OA.SA=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{6}=\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $8\sqrt{2}\pi$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **D.** $8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi M là trung điểm CD.

Lấy điểm O trên BM sao cho $\frac{BO}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow O$ là trọng tâm, là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD và $AO\perp(BCD)$ (vì tứ diện $ABCD$ đều).

BM là trung tuyến của tam giác đều $BCD\Rightarrow BM=\frac{4\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BO=\frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔABO ta có: $AO^2 = AB^2 - BO^2 = 4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{32}{3} \Rightarrow AO = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Đường tròn nội tiếp tam giác BCD có bán kính $r = OM = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

+ Hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và có chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$ nên bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $h = AO = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

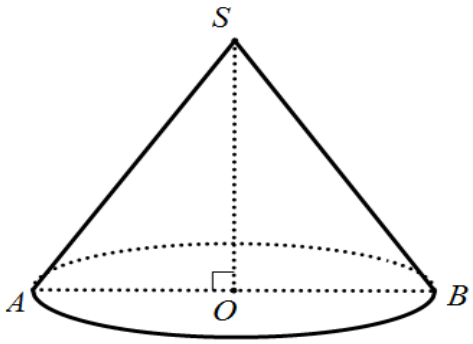
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi rh = 2\pi.\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 3: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}a^3$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng đi qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S.

$SO = h$, $OB = r$.

Do thiết diện là một tam giác vuông cân nên ta có: $h = r = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

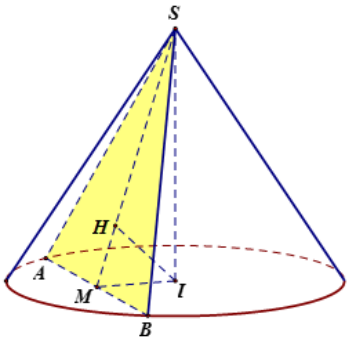
Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$.

Câu 4: Cho hình nón tròn xoay có đỉnh S, chiều cao bằng $20a$, đáy là hình tròn tâm I bán kính bằng $25a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Mặt phẳng (P) đi qua S và cách tâm I một khoảng bằng $12a$. Diện tích thiết diện đã cho bằng

A. $500a^2$. **B.** $150a^2$. **C.** $50a^2$. **D.** $1000a^2$.

Lời giải

Chọn A



Theo đề và hình vẽ ta có

$SI = 20a$, $R = IA = IB = 25a$, $IH = d\left(I,(P)\right) = 12a$.

Tính IM: $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IM^2} + \dfrac{1}{IS^2} \Rightarrow IM = 15a$.

Tính AB: $AB = 2MB = 2\sqrt{IB^2 - IM^2} = 40a$.

Tính SM: $SM = \dfrac{IS.IM}{IH} = 25a$.

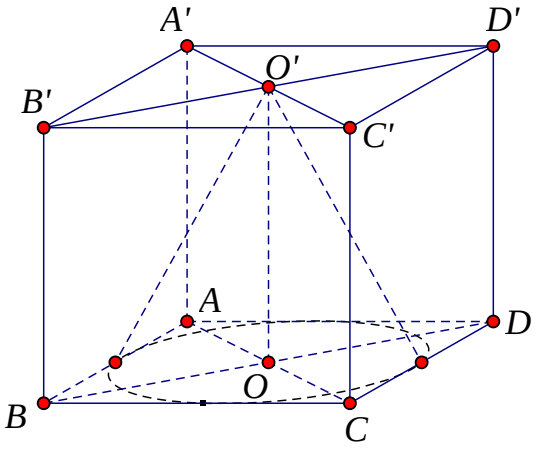
Vậy: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}SM.AB = \dfrac{1}{2}25a.40a = 500a^2$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và đỉnh là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq} = \dfrac{9\sqrt{5}\pi}{4}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{9\sqrt{5}\pi}{2}$. **C.** $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq} = 8\sqrt{5}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Hình nón có bán kính là $r = \dfrac{3}{2}$, chiều cao $h = 3$. Suy ra đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ $= \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

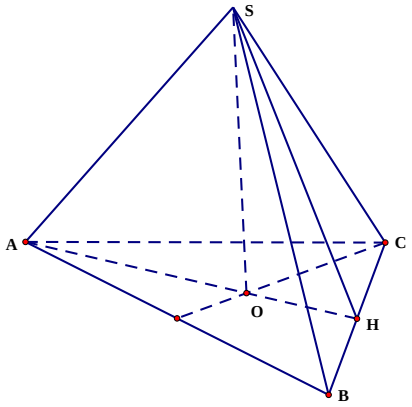
Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq}=\pi rl=\pi.\frac{3}{2}.\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{9\sqrt{5}\pi}{4}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$. **C.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của tam giác ABC, khi đó $SO\perp(ABC)$.

Hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA, bán kính đường tròn đáy là OA.

Gọi H là trung điểm BC thì $\left((SBC),(ABC)\right)=SHO=60°$.

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên $OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$OA=\frac{2}{3}AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SOH vuông tại O và có $SHO=60°$ nên $SO=OH.\tan 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

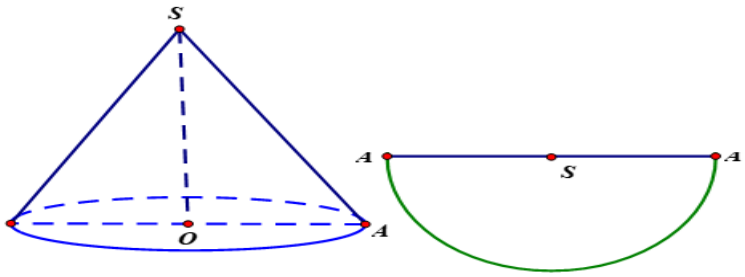
Diện tích xung quanh hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.OA.SA=\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{6}=\frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Câu 7: Cắt mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay (N) dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được một nửa hình tròn có bán kính R. Chiều cao của hình nón (N) là

A. $h=\frac{R}{2}$. **B.** $h=R\sqrt{3}$. **C.** $h=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h=R$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra ta có hình nón như hình vẽ.

Gọi R_1 là bán kính đáy hình nón và l, h lần lượt là đường sinh và chiều cao của hình nón.

Cắt mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay (N) dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được một nửa hình tròn có bán kính $R = SA$. Khi đó $l = R$.

Khi đó chu vi của nửa đường tròn là $C_1 = \dfrac{2\pi R}{2} = \pi R$ chính là chu vi đáy của hình nón.

Ta có chu vi đáy của hình nón là $C = 2\pi R_1 = \pi R \Leftrightarrow R_1 = \dfrac{R}{2}$.

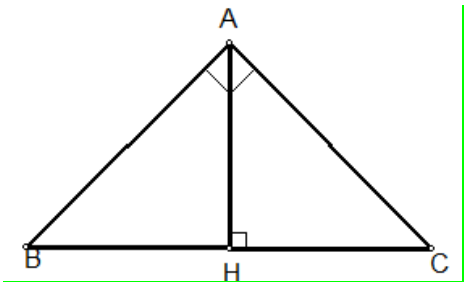
Xét ΔSOA vuông tại O có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - R_1^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

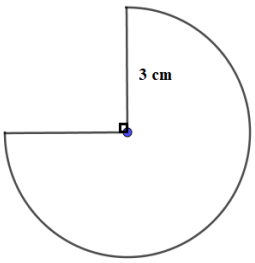


Bán kính đáy của hình nón là $r = HB = AB.\cos 45° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Độ dài đường sinh của hình nón: $l = AB = AC = a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Trải mặt xung quanh của một hình nón lên một mặt phẳng ta được hình quạt (xem hình bên dưới) là phần của hình tròn có bán kính bằng $3\ (\text{cm})$. Bán kính đáy r của hình nón ban đầu gần nhất với số nào dưới đây.



A. $2,23$. **B.** $2,24$. **C.** $2,25$. **D.** $2,26$.

Lời giải

Chọn C

Phần hình quạt (như hình trên) có chu vi là: $\frac{3}{4}.2\pi.3=\frac{9\pi}{2}\ (\text{cm})$.

Và chu vi hình quạt này chính là chu vi của đường tròn đáy của hình nón nên ta có $2\pi r=\frac{9\pi}{2}$

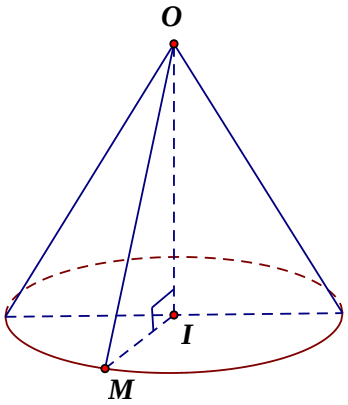
$\Leftrightarrow r=\frac{9}{4}\ (\text{cm})$.

Câu 10: Trong không gian cho tam giác OIM vuông tại I, góc $IOM=45°$ và cạnh $IM=a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quay S_{xq} của hình nón tròn xoay đó theo a.

A. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $S_{xq}=\pi a^2$. **C.** $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: bán kính đáy $r=IM=a$, $IOM=45°\Rightarrow l=OM=a\sqrt{2}$.

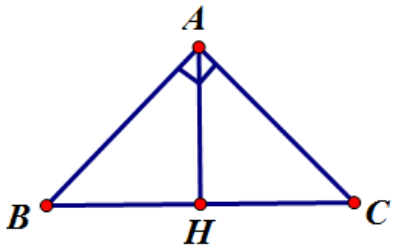
Vậy $S_{xq}=\pi rl=\pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao $AH=4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AH.

A. $S_{xq}=4\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq}=16\sqrt{2}\pi$. **C.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. **D.** $S_{xq}=32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại A có đường cao $AH = 4 \Rightarrow AH$ là đường trung tuyến và $AH = \frac{1}{2}BC = HB = 4.$

Hình nón nhận được có đường cao $AH = 4$, bán kính đáy $HB = 4 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$ là đường sinh.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón tạo thành là: $S_{xq} = \pi.BH.AB = \pi.4.4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$.

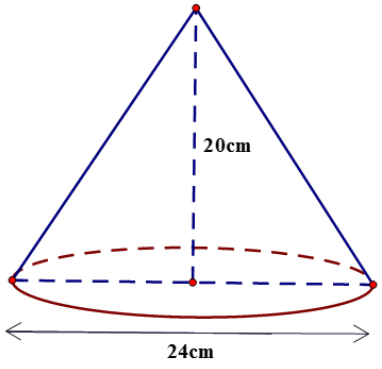
Câu 12: Để làm một chiếc nón lá có độ cao $20(\text{cm})$, người thợ làm nón dùng 14 vành tròn, trong đó vành lớn nhất có đường kính $24(\text{cm})$ và dùng lá cọ để lợp kín từ đỉnh cho đến vành lớn nhất. Tính diện tích bề mặt cần phải lợp lá cọ.



A. $48\sqrt{34}\pi(\text{cm}^2)$. **B.** $192\pi(\text{cm}^2)$. **C.** $96\sqrt{34}\pi(\text{cm}^2)$. **D.** $384\pi(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích bề mặt cần phải lợp lá cọ chính là diện tích xung quanh của nón.

Theo đề: Nón cần làm là một hình nón có độ dài đường cao $h = 20(\text{cm})$, bán kính đường tròn đáy bằng $12(\text{cm})$.

Do đó độ dài đường sinh của nón là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{20^2 + 12^2} = 4\sqrt{34}(\text{cm})$.

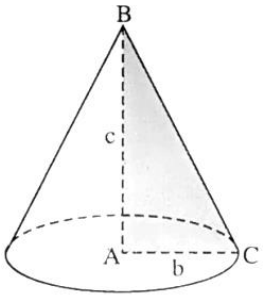
Vậy diện tích bề mặt cần phải lợp lá cọ là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.12.4\sqrt{34}=48\sqrt{34}\pi\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=c$, $AC=b$. Quay tam giác ABC xung quanh đường thẳng chứa cạnh AB ta được một hình nón có thể tích bằng

A. $\frac{1}{3}\pi bc^2$. **B.** $\frac{1}{3}bc^2$. **C.** $\frac{1}{3}b^2c$. **D.** $\frac{1}{3}\pi b^2c$.

Lời giải

Chọn D



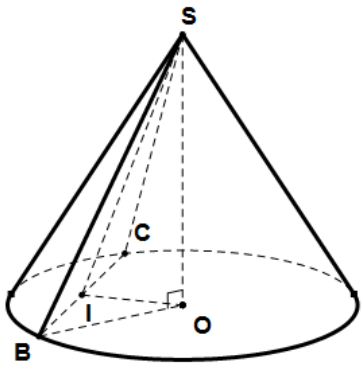
$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi b^2c$.

Câu 14: Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân, suy ra $r=SO=a\sqrt{2}$.

Ta có góc giữa mặt phẳng (SBC) tạo với đáy bằng góc $SIO=60°$.

Trong tam giác SIO vuông tại O có $SI=\frac{SO}{\sin SIO}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $OI=SI.\cos SIO=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Mà $BC = 2\sqrt{r^2 - OI^2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$.

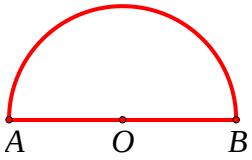
Diện tích tam giác SBC là $S = \dfrac{1}{2}SI.BC = \dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

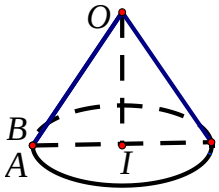
Câu 15: Cho nửa hình tròn tâm O, đường kính AB. Người ta ghép hai bán kính OA, OB lại tạo thành mặt xung quanh của hình nón. Tính góc ở đỉnh của hình nón đó.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C





Gọi R, r lần lượt là bán kính của nửa hình tròn tâm O và hình nón.

Hình nón có đường sinh $l = OA = R$ và chu vi đường tròn đáy bằng nửa chu vi hình tròn tâm O, đường kính AB. Do đó $2\pi r = \pi R \Leftrightarrow r = \dfrac{R}{2}$.

Gọi I là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Xét ΔOAI vuông tại I có : $\sin AOI = \dfrac{AI}{OA} = \dfrac{\frac{R}{2}}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AOI = 30°$.

Do đó góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$.

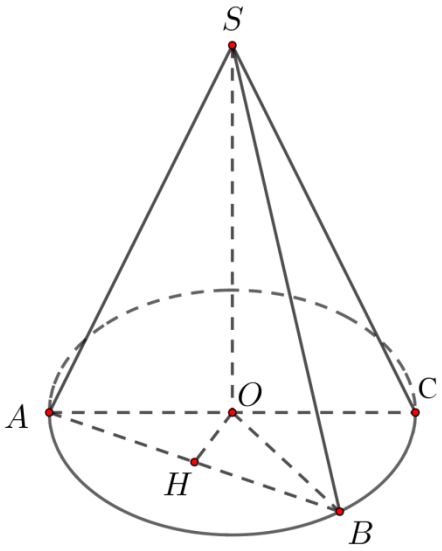
Mức độ 4

Câu 1: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $SAO = 30°$, $SAB = 60°$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S_{xq} = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $OH = a$. Đặt $OA = x$ thì $OA = SA.\cos 30° \Rightarrow SA = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$.

Do góc $SAB = 60°$ nên tam giác SAB đều $\Rightarrow AB = SA = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Do $AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3} + a^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

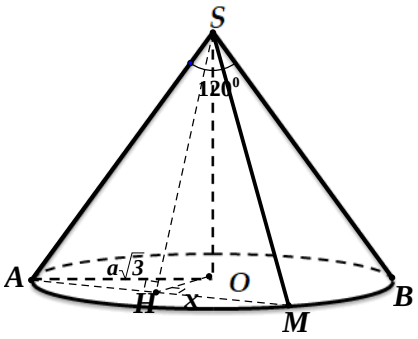
Vậy $OA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $SA = a\sqrt{2}$ nên diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 2: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $2\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM = x$ $\left(0 < x \le 2a\sqrt{3}\right)$.

Gọi H là trung điểm của $AM \Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

Vì $ASB = 120^\circ \Rightarrow ASO = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} SA = \dfrac{AO}{\sin 60^\circ} = 2a \\ OA = \dfrac{AO}{\tan 60^\circ} = a \end{cases}$.

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}$.

$S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2} AM.SH = \dfrac{1}{2} x.\sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}$.

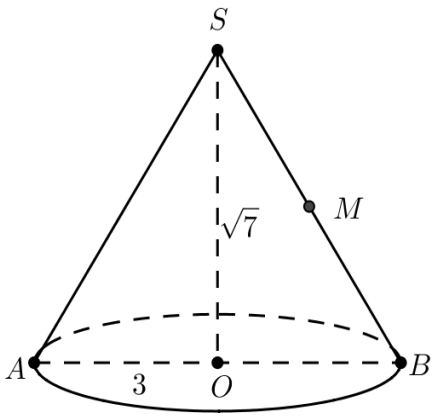
Ta có: $S' = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{x^2}{4\sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}}\right] = \dfrac{16a^2 - 2x^2}{8\sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}}$; $S' = 0 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$2a\sqrt{2}$		$2a\sqrt{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	$2a^2$	↘	$\sqrt{3}.a^2$

$\Rightarrow S_{\max} = 2a^2$.

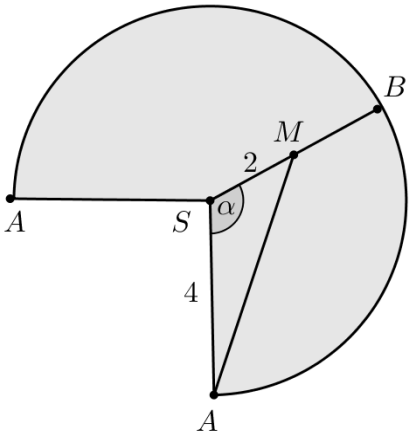
Câu 3: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3, chiều cao bằng $\sqrt{7}$, một con kiến bò trên bề mặt xung quanh của hình nón từ điểm A đến trung điểm M của SB *(như hình vẽ)*. Độ dài ngắn nhất mà con kiến đi gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 5. **B.** $5,5$. **C.** 6. **D.** $6,5$.

Lời giải

Chọn B



+) Trải phẳng mặt xung quanh của hình nón theo đường SA ta được hình quạt *(hình vẽ trên).*

Ta có $SA = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + 3^2} = 4$.

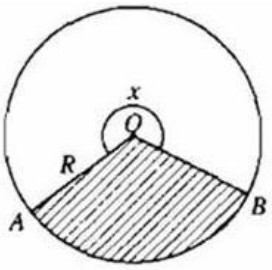
Độ dài cung AB bằng nửa chu vi đường tròn đáy. Do đó $l_{AB} = 3\pi \Rightarrow \alpha = \frac{l_{AB}}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

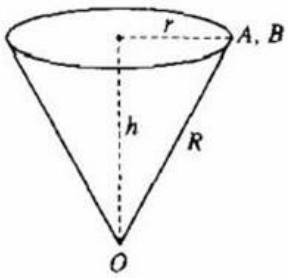
+ Áp dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác SAM có:

$AM^2 = 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\cos\frac{3\pi}{4} = 20 + 8\sqrt{2} \Rightarrow AM \approx 5,6$.

+ Độ dài ngắn nhất mà con kiến đi được bằng độ dài đoạn thẳng AM sau khi trải phẳng như hình trên. Do đó độ dài ngắn nhất con kiến đi được gần bằng $5,6$.

Câu 4: Cắt bỏ hình quạt tròn OAB từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng hình nón như hình vẽ dưới đây:





Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu ($0 < x < 2\pi$). Thể tích lớn nhất của hình nón bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$. **B.** $\frac{2}{27}\pi R^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi R^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn A

Chu vi của đáy của nón là $C = 2\pi R.\frac{x}{2\pi} = Rx$.

Bán kính của đáy nón là $r = \frac{Rx}{2\pi}$.

Chiều cao của nón là $h=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

Thể tích của nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$, với $0<x<2\pi$.

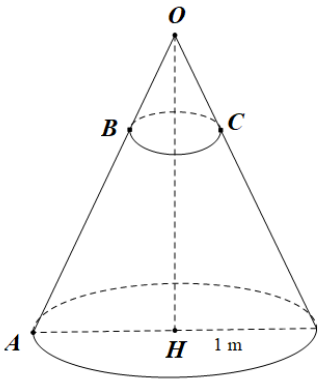
Ta có $f'(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}.\frac{x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$; $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$	↘	

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra $V_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$.

Câu 5: Một cây thông hình nón bán kính đáy là $R=1\text{m}$, chiều cao $h=2\text{m}$. Cần trang trí đèn led từ vị trí điểm A quấn hai vòng quanh thân cây lên đến điểm B, $\left(OB=\frac{1}{4}OA\right)$, sau đó kéo tiếp sợi dây đèn led từ điểm B đến O và từ O về C. Độ dài ngắn nhất của dây đèn led thuộc khoảng nào sau đây?

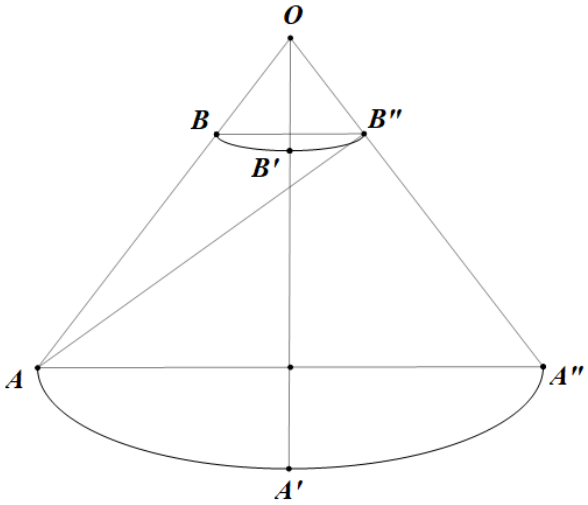


A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

+) Trải hai lần phẳng xung quanh hình nón trên một mặt phẳng ta được hình quạt như hình vẽ.



+) Ta có $OA=\sqrt{h^2+R^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$; $OB=OB''=\frac{1}{4}OA''=\frac{1}{4}OA=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Cung AA'' có độ dài $l=2.2\pi.R=4\pi$.

Suy ra góc AOA'' có số đo là: $\frac{l}{OA}=\frac{4\pi}{\sqrt{5}}$.

$$AB''=\sqrt{OA^2+OB''^2-2.OA.OB''.\cos AOB''}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2-2.\sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}}{4}.\cos\frac{4\pi}{\sqrt{5}}}\approx 1.83\ (\text{m}).$$

+) Do đó độ dài ngắn nhất của sợi dây đèn led là:

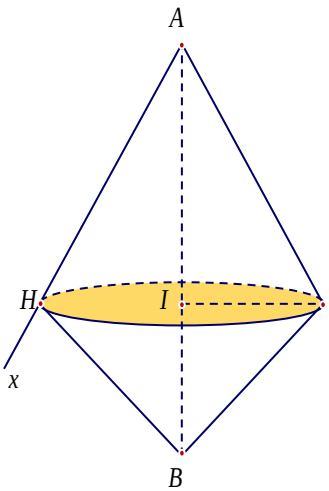
$$l=AB''+OB+OC\approx 1,68+\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\approx 2,95\ (\text{m}).$$

Câu 6: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\pi a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác AHB vuông tại H, ta có $AH=\sqrt{AB^2-HB^2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác AHB vuông tại H và $HI \perp AB$ tại I, ta có $HI = \dfrac{AH.HB}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón và trong đó:

Hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là $S_1 = \pi.HI.AH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$;

Hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là $S_2 = \pi.HI.BH = \pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$.

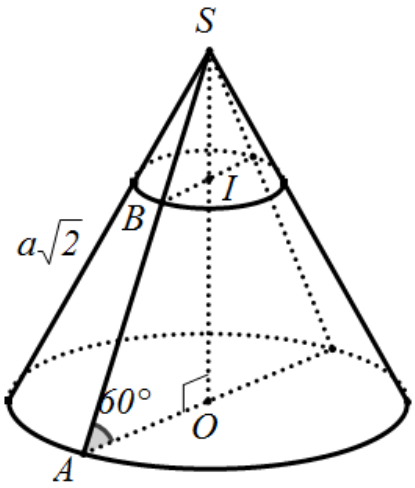
$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{3\pi a^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}$.

Câu 7: Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi I là một điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho tỉ số $\dfrac{SI}{OI} = \dfrac{1}{3}$. Khi đó, diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là:

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2}{18}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2}{36}$.

Lời giải

Chọn C



+Gọi A là một điểm thuộc đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là một hình tròn có bán kính như hình vẽ. Gọi diện tích này là S_{td}. Theo giả thiết ta có đường sinh $SA = a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là $SAO = 60^0$. Trong tam giác vuông SAO có $OA = SA\cos 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+Ta có $\Delta SIB \backsim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IB}{OA} \Rightarrow IB = \dfrac{SI}{SO}.OA = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$

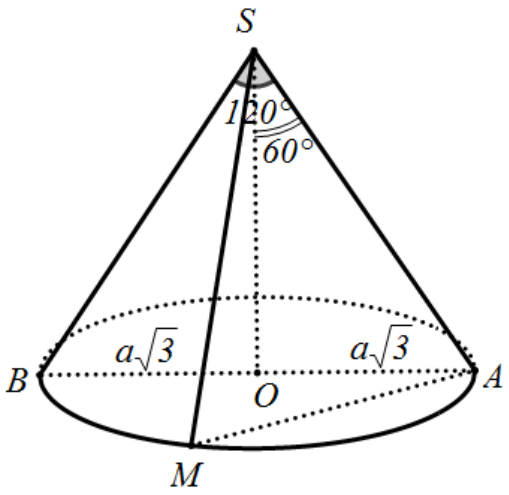
$\Rightarrow S_{td} = \pi IB^2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{18}$.

Câu 8: Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết điện đó là bao nhiêu?

A. $S_{\max} = a^2\sqrt{2}$. **B.** $S_{\max} = 2a^2$. **C.** $S_{\max} = 4a^2$. **D.** $S_{\max} = \frac{9a^2}{8}$.

Lời giải

Chọn B



+Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM. Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R = OA = a\sqrt{3}\,\text{cm}$, $ASB = 120^0$ nên $ASO = 60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có: $\sin 60^0 = \frac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \frac{OA}{\sin 60^0} = 2a$.

+Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA.SM.\sin ASM = \frac{1}{2}2a.2a.\sin ASM = 2a^2 \sin ASM$

Do $0 < \sin ASM \le 1$ nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin ASM = 1 \Rightarrow ASM = 90^0$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $ASB = 120^0 > 90^0$ nên tồn tại tam giác ASM thỏa mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là: $S_{\max} = 2a^2$ (đvtt).

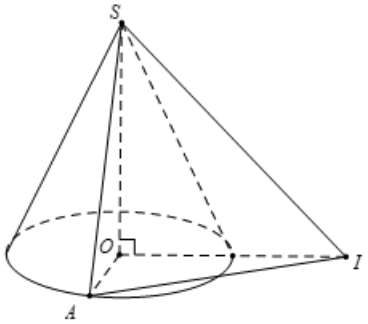
Câu 9: Cho hình nón đỉnh S với đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $OI = R\sqrt{3}$. Giả sử A là điểm nằm trên đường tròn $(O;R)$ sao cho $OA \perp OI$. Biết rằng tam giác SAI vuông cân tại S. Khi đó, diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón bằng

A. $S_{xq} = \pi R^2\sqrt{2}$. **B.** $S_{xq} = 2\pi R^2$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi R^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $S_{xq} = \pi R^2$.

Lời giải

Chọn A



+ Xét tam giác AOI vuông tại O, có:

$IA^2 = OA^2 + OI^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 \Rightarrow IA = 2R$

+ Do tam giác SAI vuông cân tại S nên ta có:

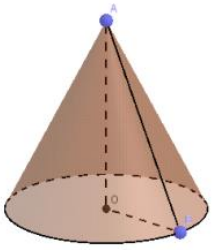
$IA = SA\sqrt{2} \Rightarrow SA = \dfrac{IA}{\sqrt{2}} = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.

+ Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có:

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R$.

+ Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi R.R\sqrt{2} = \pi R^2\sqrt{2}$ (đvdt).

Câu 10: Một cây thông Noel có dạnh hình nón với chiều dài đường sinh bằng $60cm$ và bán kính đáy $r = 10cm$. Một chú kiến bắt đầu xuất phát từ một đỉnh nằm trên mặt đáy hình nón và có dự định bò một vòng quanh cây thông sau đó quay trở lại vị trí xuất phát ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà chú kiến có thể đi được là bao nhiêu?



A. 45. **B.** 63. **C.** 125. **D.** 60.

Lời giải

Chọn D

Ta "cắt" hình nón theo cạnh AE và trải hình nón ra được một hình quạt như hình vẽ. Ta chú ý rằng đường sinh của hình nón bằng bán kính quạt nên $R = 60cm$. Gọi r là bán kính đáy nón và α và α là góc của cung tròn quạt. Khi đó chu vi của của cung tròn quạt là:

$$C = 2\pi R\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) = 2\pi r \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{R} = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy hình quạt của ta là một phần sáu hình tròn và tam giác AEE' là tam giác đều. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi được chính bằng độ dài $EE' = 60cm$

Câu 11: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **B.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **C.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **D.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của cốc: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=27\Rightarrow r^2h=\frac{81}{\pi}\Rightarrow h=\frac{81}{\pi}.\frac{1}{r^2}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$S_{xq}=2\pi rl=2\pi r\sqrt{r^2+h^2}=2\pi r\sqrt{r^2+\frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}}=2\pi\sqrt{r^4+\frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}.$$

$$=2\pi\sqrt{r^4+\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}+\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}\geq 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}.$$

$=2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}}$ (theo BĐT Cauchy).

S_{xq} nhỏ nhất $\Leftrightarrow r^4=\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}\Leftrightarrow r^6=\frac{3^8}{2\pi^2}\Leftrightarrow r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

DẠNG TOÁN 33: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

PHẦN I

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Công thức tính tích phân: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

* *Nhận xét*: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

2. Tính chất của tích phân: Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K; $a,b,c \in K$. Khi đó ta có:

- $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k.\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$.
- Nếu $f(x)\geq 0, \forall x\in[a;b]$ thì : $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0 \ \ \forall x\in[a;b]$.
- Nếu $\forall x\in[a;b]$: $f(x)\geq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- Nếu $\forall x\in[a;b]$ Nếu $M \leq f(x) \leq N$ thì $M(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq N(b-a)$.

3. Phương pháp đổi biến số:

a) Đổi biến số dạng 1:

- *Bước 1:* Đặt $x = u(t)$. Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$
- *Bước 2:* Đổi cận: $\begin{vmatrix} x=b \\ x=a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t=\beta \\ t=\alpha \end{vmatrix}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta)-G(\alpha)$.

b) Đổi biến số dạng 2:

- *Bước 1:* Đặt $u = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$.
- *Bước 2:* Đổi cận : $\begin{vmatrix} x=b \\ x=a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u=u(b) \\ u=u(a) \end{vmatrix}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo u

Vậy: $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u$.

4. Phương pháp tích phân từng phần: Cho hai hàm số u và v là các hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \ \ (*)$.

Phương pháp chung

- *Bước 1:* Viết $f(x)\mathrm{d}x$ dưới dạng $u\mathrm{d}v = uv' \mathrm{d}x$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $\mathrm{d}v = v'(x)\mathrm{d}x$.
- *Bước 2:* Tính $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$ và $v = \int \mathrm{d}v = \int v'(x)\mathrm{d}x$.
- *Bước 3:* Tính $\int_a^b vu'(x)\mathrm{d}x$ và $uv\Big|_a^b$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Hàm đa thức
- Hàm phân thức (chỉ biến đổi, không đặt)
- Hàm lượng giác (Chỉ cần biến đổi, không đặt)
- Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối
- Thể hiện quy tắc đổi biến (cho sẵn phép đặt t)
- Đổi biến t không qua biến đổi (dt có sẵn)
- Đổi biến t sau khi biến đổi (dt bị ẩn)
- Đổi biến bằng phương pháp lượng giác hóa
- Kết hợp biến đổi, đổi biến, từng phần
- Kỹ thuật riêng của hàm phân thức (có đặt)
- Kỹ thuật riêng của hàm lượng giác (có đặt)

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Xét $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **B.** $2\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính tích phân bằng phương pháp đổi biến.

2. HƯỚNG GIẢI: Để tính tích phân: $I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ ta thực hiện các bước:

B1: Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$.

B2: Thực hiện phép đổi cận: Với $x = a$ thì $t = u(a)$; Với $x = b$ thì $t = u(b)$. (Nhớ: **đổi biến phải đổi cận**).

B3: Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\mathrm{d}t$ đơn giản và dễ tính hơn.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \left(x^2\right)'\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$

Đổi cận: Với $x = 0$ thì $u = 0^2 = 0$,

Với $x = 2$ thì $u = 2^2 = 4$.

Suy ra $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^4 e^u \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}\left(4x^3-ax-5\right)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=-\dfrac{5a}{2}-30$. **B.** $I=\dfrac{3a}{2}-30$. **C.** $I=-\dfrac{5a}{2}+22$. **D.** $I=\dfrac{3a}{2}+22$.

Lời giải

Chọn B

Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}\left(4x^3-ax-5\right)\mathrm{d}x=\left(x^4-\dfrac{ax^2}{2}-5x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(1-\dfrac{a}{2}-5\right)-\left(16-\dfrac{4a}{2}+10\right)=\dfrac{3a}{2}-30$.

Câu 2. $\int\limits_{1}^{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln 5$. **B.** $\ln 5$. **C.** $-\dfrac{2}{15}$. **D.** $\ln\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_{1}^{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|\Big|_{1}^{3}=\dfrac{1}{2}\left(\ln 5-\ln 1\right)=\dfrac{1}{2}\ln 5$.

Câu 3. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b\sqrt{3}}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T=a-3b$.

A. $T=1$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=-8$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{b\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Vậy $T=a-3b=2-3=-1$.

Câu 4. Khi đổi biến $t=\ln x$, tích phân $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ trở thành tích phân nào?

A. $I=\int\limits_{0}^{1}t\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}t\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\ln x\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận:

x	1	e
$t=\ln x$	0	1

$I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}t\mathrm{d}t$.

Câu 5. Tích phân $\int\limits_{0}^{3}\dfrac{e^x\mathrm{d}x}{e^x+3}$ có giá trị bằng

A. $\ln\dfrac{e^3+3}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{e^3+3}{4}$. **C.** $\ln 4\left(e^3+3\right)$. **D.** $\ln\left(e^3-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^3 \frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x+3}=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}\left(e^x\right)}{e^x+3}=\ln\left|e^x+3\right|\Big|_0^3=\ln\left(e^3+3\right)-\ln(1+3)=\ln\frac{e^3+3}{4}.$$

Câu 6. Tích phân $I=\int_0^{2020} 2^{-x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1-2^{-2020}}{\ln 2}$. **B.** $\dfrac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. **C.** $1-2^{-2020}$. **D.** $2^{2020}-1$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_0^{2020} 2^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{2020} 2^{-x}\mathrm{d}(-x)=-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_0^{2020}=\frac{1-2^{-2020}}{\ln 2}.$$

Câu 7. Tích phân $I=\int_1^2 (2x-1)\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\ln\dfrac{1}{2}$. **B.** $2\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** $2\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $2\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt : $\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x\Rightarrow v=x^2-x \end{cases}$.

Khi đó : $I=\left(x^2-x\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x=2\ln 2-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Giá trị tích phân $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}(x+2)^{\frac{-1}{2}}\Big|_{-1}^2$. **B.** $\dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^2$. **C.** $\dfrac{3}{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^2$. **D.** $-2(x+2)^{\frac{-1}{2}}\Big|_{-1}^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^2$.

Câu 9. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} x\cos 2x\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $I=\dfrac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=x\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$. **D.** $I=x\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

Khi đó: $I = \int\limits_0^{\pi} x\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$.

Câu 10. Tích phân $I = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\left(\ln|x| - \dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2$. **B.** $\left(\ln|x| + \dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2$. **C.** $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)\Big|_1^2$. **D.** $\left(\dfrac{1}{x} - \ln|x|\right)\Big|_1^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x| + \dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2$

Mức độ 2

Câu 1. Biết rằng $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{b} \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = 2$ với $b \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $b \in \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $b \in \left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $b \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{b} \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{3x-1}}{3}\Big|_{\frac{1}{3}}^{b} = \dfrac{\mathrm{e}^{3b-1}-1}{3} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3b-1} = 7 \Leftrightarrow b = \dfrac{1+\ln 7}{3} \approx 0{,}982$.

Vậy $b \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 2. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$ bằng

A. $\ln 6$. **B.** 0. **C.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **D.** $\ln\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \int\limits_0^2 \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x+1| - \ln|x+2|\right)\Big|_0^2 = \left(\ln 3 - \ln 4\right) - \left(\ln 1 - \ln 2\right)$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{2x+3}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $I = 2 - \dfrac{3}{\mathrm{e}}$. **B.** $I = 5 - \dfrac{3}{\mathrm{e}}$. **C.** $I = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1$. **D.** $I = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn B

$I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{2x+3}{x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(2\ln|x|-\frac{3}{x}\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=2-\frac{3}{\mathrm{e}}+3=5-\frac{3}{\mathrm{e}}$.

Câu 4. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}-\frac{\sqrt{b}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a-b^2+c$.

A. 5. **B.** 17. **C.** -1. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

$\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}.\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{a}-\frac{\sqrt{b}}{c}$.

Suy ra $a=4;b=3;c=4$.

Vậy $a-b^2+c=-1$.

Câu 5. Biết $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I\in\left(0;\frac{1}{5}\right)$. **B.** $I<0$. **C.** $I\in\left(\frac{1}{5};1\right)$. **D.** $I\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(3x+\frac{\pi}{24}\right).\sin\left(x-\frac{5\pi}{24}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 6. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t=x^2+1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^9\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **B.** $\Rightarrow I=2\int\limits_1^9\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **D.** $I=2\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{2}$
$t=x^2+1$	1	9

$\Rightarrow I=\int\limits_1^9\sqrt{t}\dfrac{\mathrm{d}t}{2}=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^9\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Câu 7. Tính $I=\int\limits_1^6\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=4\int\limits_1^6\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int\limits_2^3\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **C.** $I=\int\limits_1^6\dfrac{2\left(u^2-3\right)}{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I=4\int\limits_2^3\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+3}$, $u\ge 0$ nên $u^2=x+3\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\\ x=u^2-3\end{cases}$.

Đổi cận:

x	1	6
$u=\sqrt{x+3}$	2	3

Khi đó $I=\int\limits_1^6\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\dfrac{2\left(u^2-3\right)}{u}2u\mathrm{d}u=4\int\limits_2^3\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$.

Câu 8. Khi đổi biến $x=2\tan t$, tích phân $I=\int\limits_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$ trở thành tích phân nào?

A. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$ **C.** $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$ **D.** $I=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x=2\tan t,\ t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=2\left(\tan^2 t+1\right)\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

$x=2\tan t$	0	2
t	0	$\dfrac{\pi}{4}$

.

Khi đó : $I=\int\limits_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\left(\tan^2+1\right)}{\left(2\tan t\right)^2+4}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$.

Câu 9. Biết rằng $\int\limits_{-2}^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\mathrm{d}x=a\pi+b$ với a,b là các số hữu tỉ. Khi đó $a-2b$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\dfrac{x}{2}=\sin t\Leftrightarrow x=2\sin t\ \left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.

$\Rightarrow dx = 2\cos t dt$

Đổi cận:

$x = 2\sin t$	-2	2
t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi = a\pi + b.$$

Suy ra $a = 1; b = 0$.

Vậy $a - 2b = 1$.

Câu 10. Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** -3. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Bảng xét dấu hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ trên $[0;2]$:

x	0		1		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0

Suy ra $I = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx = \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx - \int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) = 1.$$

Mức độ 3

Câu 1. Giá trị của tích phân $I = \int_{-2}^{1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} dx$ bằng

A. $\frac{15}{2} + 12\ln 2$. **B.** $\frac{15}{2} - 12\ln 2$. **C.** $\frac{3}{2} - 6\ln 2$. **D.** $6\ln 2 + \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_{-2}^{1} \frac{(x-3)x(x+1)}{(x-2)(x-3)} dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^2 + x}{x - 2} dx = \int_{-2}^{1} \left(x + 3 + \frac{6}{x-2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 3x + 6\ln\left|x - 2\right|\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{7}{2} - (-4 + 6\ln 4) = \frac{15}{2} - 12\ln 2.$$

Câu 2. Có bao nhiêu số thực a thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ sao cho $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 1$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_a^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\left(2a+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2a+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ a=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z}).$

Vì $a\in(-\pi;\pi)$ nên

- $-\pi<\frac{\pi}{12}+k\pi<\pi \Leftrightarrow -\frac{13}{12}<k<\frac{11}{12}(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow k\in\{-1;0\} \Rightarrow a\in\left\{-\frac{11\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right\}.$
- $-\pi<-\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi \Leftrightarrow -\frac{3}{4}<k<\frac{5}{4}(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow k\in\{0;1\} \Rightarrow a\in\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}.$

Do đó, có 4 số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Cho $I=\int_0^1 x^3\left(2-x^2\right)^{2020}\mathrm{d}x$ và đặt $u=2-x^2$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $I=\frac{1}{2}\int_2^1\left(u^{2021}-2u^{2020}\right)\mathrm{d}u$. **B.** $I=-\frac{1}{2}\int_1^2(2-u)u^{2020}\mathrm{d}u$.

C. $I=\frac{1}{2}\int_1^2\left(2u^{2020}-u^{2021}\right)\mathrm{d}u$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2(2-u)u^{2020}\mathrm{d}u$

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=2-x^2 \Leftrightarrow x^2=2-u$.

$\Rightarrow \mathrm{d}u=-2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{2}$.

Đổi cận:

x	0	1
$t=2-x^2$	2	1

$\Rightarrow I=\int_0^1 x^3\left(2-x^2\right)^{2020}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)^{2020}x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_2^1(2-u)u^{2020}\mathrm{d}u$

$=\frac{1}{2}\int_1^2(2-u)u^{2020}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^2\left(2u^{2020}-u^{2021}\right)\mathrm{d}u$.

Câu 4. Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\cos^3 x\mathrm{d}x$ và $u=\sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=u^6\left(\frac{1}{6}-\frac{u^2}{8}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$. **B.** $I=u^8\left(\frac{1}{6}-\frac{u^2}{8}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$. **C.** $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u^6}{6}-\frac{u^8}{8}\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(u^7-u^5\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{6}$
$t=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\cos^3 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\cos^2 x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}u^5\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(u^5-u^7\right)\mathrm{d}u=\left(\frac{u^6}{6}-\frac{u^8}{8}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=u^6\left(\frac{1}{6}-\frac{u^2}{8}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$.

Câu 5. Biết tích phân $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=5\ (a>0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $5a>\frac{\pi}{4}$. **B.** $2a<\frac{\pi}{5}$. **C.** $a-\frac{\pi}{2}>0$. **D.** $a+\frac{\pi}{5}>\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x=a\tan t\ \left(t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}x=a\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

$x=a\tan t$	0	a
t	0	$\frac{\pi}{4}$

.

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t}{a^2\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\mathrm{d}t=\frac{t}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$.

Để $I=\frac{\pi}{4a}=5\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{20}$. Vậy mệnh đề: $2a<\frac{\pi}{5}$ là mệnh đề đúng.

Câu 6. Biết rằng tích phân $I=\int_{-3}^{1}\left|e^x-e\right|\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^b+c.\mathrm{e}$ trong đó a,b,c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b-c$ bằng

A. 7. **B.** 1. **C.** -7. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$ trên $[-3;1]$.

$f'(x)=e^x-1$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$ trên $[-3;1]$:

x	-3		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}$	$\searrow$	$1-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0

Nhận xét: $\forall x \in [-3;1],\ f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \le 0$.

Suy ra $I = \int_{-3}^{1} \left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right| \mathrm{d}x = -\int_{-3}^{1} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) \mathrm{d}x = \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x\right)\Big|_{-3}^{1} = -\left(\mathrm{e}^{-3} + 3\mathrm{e}\right) = a.\mathrm{e}^b + c.\mathrm{e}$.

Hay $a = -1; b = -3; c = -3$.

Vậy $a + b - c = -1$.

Câu 7. Biết $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x+1}{x^2 + x\ln x} \mathrm{d}x = \ln\left(a\mathrm{e} + b\right)$, với a, b là các nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x+1}{x^2 + x\ln x} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \ln x} \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}(x + \ln x)}{x + \ln x} = \ln\left|x + \ln x\right|\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e} + 1)$.

Vậy $a = 1,\ b = 1$ nên $T = a^2 - ab + b^2 = 1$.

Câu 8. Biết $\int_1^{\mathrm{e}} \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{a} + \frac{b}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên; $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $a + b + c$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int_1^{\mathrm{e}} \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \mathrm{d}x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}\mathrm{e}^2$.

$I = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \ \mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \ln x \ \mathrm{d}x$.

Tính $I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \ \mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I_1 = \frac{x^2}{2}.\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Tính $I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \ln x \ \mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0;\ x = e \Rightarrow t = 1$.

$I_2 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Do đó $I=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{e^2}{a}+\frac{b}{c}\Rightarrow a=4;\ b=3;\ c=4$.

Vậy $a+b+c=11$.

Câu 9. Cho $I=\int_{-2}^{3}\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** –6. **C.** 12. **D.** –4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int_{-2}^{3}\frac{x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{3}\left(1+\frac{6x-4}{x^2-3x+2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{3}\left(1-\frac{2}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(x-2\ln|x-1|+8\ln|x-2|\right)\Big|_{-2}^{0}=0+8\ln 2-(-2-2\ln 3+8\ln 4)$

$=2-8\ln 2+2\ln 3=a+b\ln 2+c\ln 3$.

Suy ra $a=2;b=-8;c=2$.

Vậy $a+b+c=-4$.

Câu 10. Biết $I=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}+3}=a\ln b-b\ln a$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=a-b$.

A. $P=5$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=6$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}+3}=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}$.

Đặt: $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	$\ln 2$
t	1	2

Khi đó $I=\int_{1}^{2}\frac{1}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right|\Big|_{1}^{2}=\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{2}{3}=\ln\frac{9}{8}=2\ln 3-3\ln 2$.

Suy ra $a=2$, $b=3$. Vậy, $P=a-b=-1$.

Mức độ 4

Câu 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để tích phân $I=\int_{0}^{m}|3x-2|\mathrm{d}x=\frac{173}{6}$?

A. 7. **B.** 1. **C.** –7. **D.** –1.

Lời giải

Chọn D

Bảng xét dấu hàm số $f(x)=3x-2$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	

+ TH1: $m\le 0$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{m}\left|3x-2\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{m}^{0}\left|3x-2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{m}^{0}\left(3x-2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{m}^{0}=-\frac{3m^2}{2}+2m<0$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

+ TH2: $0<m\le\frac{2}{3}\Rightarrow I=-\int\limits_{0}^{m}\left(3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{0}^{m}=-\frac{3m^2}{2}+2m$.

Ta có: $I=-\frac{3m^2}{2}+2m=\frac{173}{6}\Leftrightarrow-\frac{3m^2}{2}+2m-\frac{173}{6}=0$ (vô nghiệm).

+ TH3: $m>\frac{2}{3}\Rightarrow I=-\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}}\left(3x-2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{m}\left(3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{0}^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{3x^2}{2}-2x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{m}$

$=-\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3m^2}{2}-2m+\frac{2}{3}\right)=\frac{3m^2}{2}-2m+\frac{4}{3}$.

Ta có: $I=\frac{3m^2}{2}-2m+\frac{4}{3}=\frac{173}{6}\Leftrightarrow\frac{3m^2}{2}-2m-\frac{55}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\\m=-\frac{11}{3}\notin\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\end{array}\right.$.

Vậy chỉ có một giá trị duy nhất $m=5$ thỏa điều kiện bài toán.

Câu 2. Cho $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{5\sin x+7-\cos x\left(5+2\sin x\right)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{b}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Biểu thức $S=abc$ bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 48.

Lời giải

Chọn C

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{5\sin x+7-\cos x\left(5+2\sin x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x+\cos x\right)}{1-\sin 2x+5\left(\sin x-\cos x\right)+6}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2+5\left(\sin x-\cos x\right)+6}\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=\sin x-\cos x\Rightarrow\mathrm{d}t=\left(\cos x+\sin x\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-1\\x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+5x+6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+2}{t+3}\right|\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{4}{3}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{b}{c}$.

Suy ra: $a=2;b=4;c=3$. Vậy $S=abc=2.4.3=24$.

Câu 3. Cho $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{b}+1}{2}$, với a, b là các số nguyên $(b>0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}=1$. **B.** $\frac{a}{b}=2$. **C.** $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{b}=-1$.

Lời giải

Chọn B

Xét thêm tích phân liên kết là $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

Ta có $I+J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}x=x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$ (1)

Xét tích phân $I-J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

Với tích phân trên ta đặt: $t=\sin x+\cos x\to\mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\to t=1\\ x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $I-J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\frac{-\mathrm{d}t}{t}=-\ln|t|\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=-\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (2).

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}I+J=\frac{\pi}{3}\\ I-J=-\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}\to\begin{cases}I=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ J=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$.

Vậy $I=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{b}+1}{2}\Rightarrow a=6;b=3$. Hay $\frac{a}{b}=2$.

Câu 4. Cho $I=\int\limits_0^1\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$, với a, b là các số nguyên $(b>0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}=1$. **B.** $\frac{a}{b}=2$. **C.** $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{b}=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$.

Đặt: $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\end{cases}$.

Suy ra: $F(x)=\int\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\dfrac{1}{t-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{t+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$.

$F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+1-x\sqrt{2}}{x^2+1+x\sqrt{2}}\right|+C$.

Suy ra: $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+1-x\sqrt{2}}{x^2+1+x\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$.

Câu 5. Biết $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}-2}\dfrac{3x-1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\ln 2-\dfrac{c\pi}{d}$, trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $\dfrac{ac}{bd}$ ta được kết quả.

A. $\dfrac{1}{14}$. **B.** $\dfrac{8}{7}$. **C.** $\dfrac{7}{8}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}-2}\dfrac{3x-1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}-2}\dfrac{3x-1}{(x+2)^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+2=\tan t\Leftrightarrow x=\tan t-2\ \left(t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

$x=\tan t-2$	-1	$\sqrt{3}-2$
t	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$

.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{3(\tan t-2)-1}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(3(\tan t-2)-1\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(3\tan t-7)\mathrm{d}t$

$=3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan t\mathrm{d}t-7\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t=3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t-7t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{d}(\cos t)}{\cos t}-\dfrac{7\pi}{12}=-3\ln|\cos t|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\dfrac{7\pi}{12}$

$=-3\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{3}{2}\ln 2-\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{a}{b}\ln 2-\dfrac{c\pi}{d}$.

Suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2};\dfrac{c}{d}=\dfrac{7}{12}$. Vậy $\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{a}{b}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{8}$.

Câu 6. Biết $\int\limits_1^2(x+1)^2e^{x-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Chọn B

◆ Ta có: $I=\int\limits_1^2{{{\left(x+1 \right)}^2}{e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}=\int\limits_1^2{\left({{x}^2}+2x+1 \right){e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}=\int\limits_1^2{\left({{x}^2}+1 \right){e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}+\int\limits_1^2{2x.{e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}$.

◆ Xét $I_1=\int\limits_1^2{\left({{x}^2}+1 \right){e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}=\int\limits_1^2{{{x}^2}{e^{x-\frac{1}{x}}}.\frac{{{x}^2}+1}{{{x}^2}}\text{d}x}=\int\limits_1^2{{{x}^2}{e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}\left(x-\frac{1}{x} \right)}=\int\limits_1^2{{{x}^2}\text{d}\left({e^{x-\frac{1}{x}}} \right)}$.

Đặt $\left\{ \begin{aligned} & u={{x}^2} \\ & \text{d}v=\text{d}\left({e^{x-\frac{1}{x}}} \right) \end{aligned} \right.\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \text{d}u=2x\text{d}x \\ & v={e^{x-\frac{1}{x}}} \end{aligned} \right.$.

$\Rightarrow I_1=\int\limits_1^2{{{x}^2}\text{d}\left({e^{x-\frac{1}{x}}} \right)}={{x}^2}{e^{x-\frac{1}{x}}}\left| \begin{aligned} & 2 \\ & 1 \end{aligned} \right.-\int\limits_1^2{2x{e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}$.

$\Rightarrow I_1+\int\limits_1^2{2x{e^{x-\frac{1}{x}}}\text{d}x}={{x}^2}{e^{x-\frac{1}{x}}}\left| \begin{aligned} & 2 \\ & 1 \end{aligned} \right.=4.{e^{\frac{3}{2}}}-1$.

◆ Vậy $I=4{e^{\frac{3}{2}}}-1$ suy ra $m=1,n=1,p=3,q=2$.

Do đó: $T=m+n+p+q=10$.

Câu 7. Biết n là số tự nhiên sao cho $\int\limits_{-2}^0{{{\left({{x}^2}+1 \right)}^n}x\text{d}x}=-1302$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi }{2}}{\sin x{{\cos }^n}x\text{d}x}$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$-1302=\int\limits_{-2}^0{{{\left({{x}^2}+1 \right)}^n}x\text{d}x}=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0{{{\left({{x}^2}+1 \right)}^n}\text{d}\left({{x}^2}+1 \right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{{{\left({{x}^2}+1 \right)}^{n+1}}}{n+1} \right)\left| \begin{aligned} & 0 \\ & -2 \end{aligned} \right.=\frac{1-{{5}^{n+1}}}{2\left(n+1 \right)}$

$\Leftrightarrow 2604=\frac{{{5}^{n+1}}-1}{n+1}\ (*)$.

Nhận xét: với $n=5$: $\frac{{{5}^{n+1}}-1}{n+1}=\frac{{{5}^6}-1}{7}=2604$. Suy ra $n=5$ là một nghiệm của $(*)$.

Xét hàm số $f\left(n \right)=\frac{{{5}^{n+1}}-1}{n+1}$.

$f'\left(n \right)=\frac{{{5}^{n+1}}\ln 5\left(n+1 \right)-\left({{5}^{n+1}}-1 \right)}{{{\left(n+1 \right)}^2}}=\frac{{{5}^{n+1}}\left(\left(n+1 \right)\ln 5-1 \right)+1}{{{\left(n+1 \right)}^2}}>0\ \ \forall n\in \mathbb{N}$.

Vậy $(*)$ chỉ có duy nhất một nghiệm là $n=5$.

Khi đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi }{2}}{\sin x{{\cos }^5}x\text{d}x}=-\int\limits_0^{\frac{\pi }{2}}{{{\cos }^5}x\text{d}\left(\cos x \right)}=-\left(\frac{{{\cos }^6}x}{6} \right)\left| \begin{aligned} & \frac{\pi }{2} \\ & 0 \end{aligned} \right.=\frac{1}{6}$.

Câu 8. Tích phân $I=\int\limits_{-3}^3{\frac{{{x}^{2020}}}{{{\text{e}}^x}+1}\text{d}x}$ có giá trị là

A. 0. **B.** $\dfrac{3^{2021}}{2021}$. **C.** $\dfrac{3^{2020}}{2020}$. **D.** $\dfrac{3^{2019}}{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=-3;\ x=-3\Rightarrow t=3$

Khi đó: $I=\displaystyle\int_{3}^{-3}\frac{(-t)^{2020}}{\mathrm{e}^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{3}^{-3}\frac{-t^{2020}.\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-3}^{3}\frac{t^{2020}.\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-3}^{3}\frac{x^{2020}.\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{x^{2020}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}\frac{x^{2020}.\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x=\int_{-3}^{3}x^{2020}\mathrm{d}x=\frac{x^{2021}}{2021}\Big|_{-3}^{3}=\frac{3^{2021}-(-3)^{2021}}{2021}=\frac{2.3^{2021}}{2021}$.

$\Rightarrow I=\dfrac{3^{2021}}{2021}$.

Câu 9. Cho $I=\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}$. Biết $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính $T=\dfrac{a}{b}-c$.

A. $-\dfrac{10}{3}$. **B.** $-\dfrac{26}{3}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I=\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Đổi cận:

x	2	3
t	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+2$

$I=\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+2}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2}}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{\sqrt{3}+2}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)$

$=-2\left(2-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)=-2\left(2-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4=\sqrt{48}-\sqrt{8}-4$.

$I=\sqrt{48}-\sqrt{8}-4=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c\Rightarrow a=48;b=8;c=4$.

Vậy $T=\dfrac{a}{b}-c=2$.

Câu 10. Biết $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi^{2}}{9}}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi+\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên, $c\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3a+b=4c$. **B.** $3a+b=10c$. **C.** $6a+b=7c$. **D.** $3a+b=5c$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi^2}{9} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{9}} \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t.2t\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t.\sin t\mathrm{d}t \Leftrightarrow \dfrac{I}{2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t.\sin t\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u=t \\ \mathrm{d}v=\sin t\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}t \\ v=-\cos t \end{cases}$.

$\dfrac{I}{2}=-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t\mathrm{d}t=-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{27}-\pi}{6}$.

$\Leftrightarrow I=\dfrac{\sqrt{27}-\pi}{3}=\dfrac{a\pi+\sqrt{b}}{c}$.

Suy ra $a=-1; b=27; c=3$.

Vậy $6a+b=7c$.

DẠNG TOÁN 33: NHẬN DẠNG NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN KHI ĐỔI BIẾN SỐ.

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1.Đổi biến số loại 1:Bài toán : Tính tích phân $I=\int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải: Đặt $t=u(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=u'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=a\Rightarrow t=u(a) \\ x=b\Rightarrow t=u(b) \end{cases}$. Khi đó $I=\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)\mathrm{d}t.$

Dấu hiệu nhận biết :

	Dấu hiệu	Có thể đặt
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$
4	Có $\frac{1}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$
5	Có e^x	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x
6	Có $\sin x$	$t=\cos x$
7	Có $\cos x$	$t=\sin x$
8	Có $\frac{1}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$
9	Có $\frac{1}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$

2.Phương pháp đổi biến số loại 2: Đặt $x=u(t)$ **(Đổi biến qua lượng giác).**

Bài toán: Tính $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải : Đặt $x=u(t)\Rightarrow \mathrm{d}x=u'(t)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=a\Rightarrow u=\alpha$; $x=b\Rightarrow u=\beta$.

Suy ra $I=\int_a^b f\left[u(t)\right]u'(t)\mathrm{d}t$.

Dấu hiệu	Đặt

❶ Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì	đặt $x=\lvert a\rvert\sin t \rightarrow \begin{cases} dx=d(a\sin t)=a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\lvert a\rvert\cos t \end{cases}$
❷ Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{a^2+x^2}$ thì	đặt $x=\lvert a\rvert\tan t \rightarrow \begin{cases} dx=d(a\tan t)=\dfrac{a dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t} \end{cases}$
❸ Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì	đặt $x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t} \rightarrow \begin{cases} dx=\dfrac{-a\cos t dt}{\sin^2 t} \\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \end{cases}$
❹ Nếu hàm $f(x)$ có chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ thì	đặt $x=a\cos 2t \rightarrow \begin{cases} dx=d(a\cos 2t)=-2a\sin 2t dt \\ \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}=\sqrt{\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \end{cases}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

☞ Hàm phân thức (chỉ biến đổi, không đặt)

☞ Hàm lượng giác (Chỉ cần biến đổi, không đặt)

☞ Thể hiện quy tắc đổi biến (cho sẵn phép đặt t)

☞ Đổi biến t không qua biến đổi (dt có sẵn)

☞ Đổi biến t sau khu biến đổi (dt bị ẩn)

☞ Đổi biến bằng phương pháp lượng giác hóa

☞ Kết hợp biến đổi, đổi biến, từng phần

☞ Kỹ thuật riêng của hàm phân thức (có đặt)

☞ Kỹ thuật riêng của hàm lượng giác (có đặt)

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Xét $\int_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u du$. **B.** $2\int_0^4 e^u du$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Nhận dạng nguyên hàm- tích phân khi đổi biến.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính vi phân 2 vế $du = 2xdx \Leftrightarrow xdx = \dfrac{du}{2}$.

B2:Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 0;\ x = 2 \Rightarrow u = 4$.

B3: Thay cận và biến mới vào tích phân.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{du}{2}$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 0;\ x = 2 \Rightarrow u = 4$.

Ta có $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx = \int\limits_0^4 e^u \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 e^u du$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. $\int \dfrac{1}{2x+3}dx$ bằng

A. $\ln|2x+3|+C$.

B. $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

C. $-\dfrac{2}{(2x+3)^2}+C$.

D. $2\ln|2x+3|+C$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C$ nên $\int \dfrac{1}{2x+3}dx = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$.

B. $e^{3x}+C$.

C. $3e^{3x-1}+C$.

D. $3e^{3x}+C$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C$ nên $\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x}+C$.

Câu 3. Hàm số $f(x) = \sin(\pi - x)$ có nguyên hàm bằng

A. $\cos(\pi-x)+C$. **B.** $-\cos(\pi-x)+C$. **C.** $\frac{1}{\pi}\cos(\pi-x)+C$. **D.** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi-x)+C$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\int \sin\ ax+b\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos\ ax+b\ +C$ nên

$\int \sin\ -x+\pi\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{-1}\cos\ -x+\pi\ +C=\cos\ \pi-x\ +C$.

Câu 4. $\int(x+2)^4\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $4(x+2)^3+C$. **B.** $(x+2)^5+C$. **C.** $\frac{1}{5}(x+2)^5+C$. **D.** $\frac{1}{10}(x+2)^5+C$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\int\ ax+b\ ^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}.\frac{ax+b\ ^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ nên $\int\ x+2\ ^4\mathrm{d}x=\frac{x+2\ ^5}{5}+C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{2x}$ bằng

A. $\frac{1}{2}.3^{2x}+C$. **B.** $2.3^{2x}\ln 3+C$. **C.** $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$. **D.** $\frac{1}{2}.3^{2x}\ln 3+C$.

Lời giải:

Chọn C

Vì $\int \mathrm{a}^{mx+n}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a}+C$ nên $\int 3^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{3^{2x}}{\ln 3}+C$.

Câu 6. Biết $\int f\ x\ \mathrm{d}x=F\ x\ +C$. Nguyên hàm của hàm số $f\ 3x$ bằng

A. $\frac{1}{3}F(3x)+C$. **B.** $3F(x)+C$. **C.** $3F(3x)+C$. **D.** $F(3x)+C$.

Lời giải:

Chọn A

Nếu $\int f\ x\ \mathrm{d}x=F\ x\ +C$ thì $\int f\ ax+b\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a}.F\ ax+b\ +C$ hay

$\int f\ 3x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}.F\ 3x\ +C$.

Câu 7. Biết $\int f\ x\ \mathrm{d}x = F\ x\ + C$. Nguyên hàm của hàm số $f\ 5-x$ bằng

A. $\frac{1}{5}F\left(5-x\right)+C$. **B.** $-F\left(x\right)+C$. **C.** $F\left(5-x\right)+C$. **D.** $-F\left(5-x\right)+C$.

Lời giải:

Chọn D

Nếu $\int f\ x\ \mathrm{d}x = F\ x\ + C$ thì $\int f\ ax+b\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}.F\ ax+b\ + C$ hay

$\int \mathrm{f}\ 5-x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{-1}.F\ 5-x\ + C = -F\ 5-x\ + C$.

Câu 8. Biết $\int f\ x\ \mathrm{d}x = F\ x\ + C$. Nguyên hàm của hàm số $f\left(\frac{x}{2}+3\right)$ bằng

A. $2.F\left(\frac{x}{2}+3\right)+C$. **B.** $F\left(\frac{x}{2}+3\right)+C$. **C.** $\frac{1}{2}F\left(\frac{x}{2}+3\right)+C$. **D.** $3.F\left(\frac{x}{2}+3\right)+C$.

Lời giải:

Chọn A

Nếu $\int f\ x\ \mathrm{d}x = F\ x\ + C$ thì $\int f\ ax+b\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}.F\ ax+b\ + C$ hay

$\int f\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = 2.F\left(\frac{x}{2}+3\right)+C$.

Câu 9. Biết $F\ x\ $ là một nguyên hàm của hàm số $f\ x\ = \frac{1}{2x-1}$ và $F\ 1\ = 2$ .Khi đó $F\ x\ $ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|$. **B.** $2\ln\left|2x-1\right|+2$. **C.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+2$. **D.** $\ln\left|2x-1\right|+2$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $\int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C$.

Ta có $F\ 1\ = \frac{1}{2}\ln 1+C = 2 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F\ x\ = \frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+2$.

Câu 10. Biết $F\ x\ $ là một nguyên hàm của hàm số $f\ x\ = 2x+5$ và $F\ 1\ = 1$ .Khi đó $F\ x\ $ bằng

A. x^2+5x+5. **B.** x^2+5. **C.** x^2+5x+2. **D.** x^2+5x-5.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $\int 2x+5\ \mathrm{d}x = x^2+5x+C$.

Ta có $F\ 1\ = 6+C = 1 \Leftrightarrow C = -5$.

Vậy $F\ x\ = x^2+5x-5$.

Mức độ 2

Câu 1. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_2^4 f\ x\ \mathrm{d}x = 4$ .Khi đó $\int_1^2 f\ 2x\ \mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận : $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $\int_1^2 f\ 2x\ \mathrm{d}x = \int_2^4 f\ t\ \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \dfrac{1}{2}\int_2^4 f\ x\ \mathrm{d}x = 2$.

Câu 2. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f\ x\ \mathrm{d}x = -3$ .Khi đó $\int_0^1 f\ 2-x\ \mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** –3. **D.** 1.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $t = 2-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $\int_0^1 f\ 2-x\ \mathrm{d}x = -\int_2^1 f\ t\ \mathrm{d}t = \int_1^2 f\ x\ \mathrm{d}x = -3$.

Câu 3. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f\ x\ \mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}$ .Khi đó $\int_0^3 f\left(\dfrac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{15}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\frac{x}{3}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{3}\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=3\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0;x=3\Rightarrow t=1$.

Khi đó $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x=3\int_0^1 f\ t\ \mathrm{d}t=3\int_0^1 f\ x\ \mathrm{d}x=\frac{15}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^6 f\ x\ \mathrm{d}x=15$ .Khi đó $\int_1^2 f\ 5x-4\ \mathrm{d}x$ bằng

A. 3 . **B.** 45 . **C.** 15. **D.** 71.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=5x-4\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow t=1;x=2\Rightarrow t=6$.

Khi đó $\int_1^2 f\ 5x-4\ \mathrm{d}x=\int_1^6 f\ t\ \frac{\mathrm{d}t}{5}=\frac{1}{5}\int_0^6 f\ x\ \mathrm{d}x=3$.

Câu 5. Với cách đặt $u=\sin x$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x.\cos x.\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **B.** $3\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{3}\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$. **D.** $\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Chọn D

Đặt $u=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=0;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x.\cos x.\mathrm{d}x=\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$.

Câu 6. Nếu đặt $u=\sqrt{x^2+3}$ thì $\int_1^2 x\sqrt{x^2+3}.\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int_2^{\sqrt{7}} u^2.\mathrm{d}u$. **B.** $\int_2^{\sqrt{7}} u.\mathrm{d}u$. **C.** $\int_1^2 u^2.\mathrm{d}u$. **D.** $\int_2^{\sqrt{7}} u^{\frac{2}{3}}.\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow u^2=x^2+3\Rightarrow 2udu=2xdx\Rightarrow udu=xdx$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow u=2; x=2\Rightarrow u=\sqrt{7}$.

Khi đó $\int_1^2 x\sqrt{x^2+3}.dx=\int_2^{\sqrt{7}} u.u.du=\int_2^{\sqrt{7}} u^2.du$.

Câu 7. Nếu đặt $u=x^2-x+1$ thì $\int_0^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1}.dx$ bằng

A. $\int_1^7 du$. **B.** $\int_0^3 \frac{du}{u}$. **C.** $\int_1^7 udu$. **D.** $\int_1^7 \frac{du}{u}$.

Lời giải.

Chọn D

Đặt $u=x^2-x+1\Rightarrow du=(2x-1)\,dx$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=1; x=3\Rightarrow u=7$.

Khi đó $\int_0^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1}.dx=\int_1^7 \frac{du}{u}$.

Câu 8. Nếu đặt $x=\sin t$ thì $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx$ bằng

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.dt$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.dt$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t.dt$. **D.** $\int_0^1 \cos t.dt$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t.dt$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.dt$.

Câu 9. Nếu đặt $x=2\sin t$ thì $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}.dx$ bằng

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos t}.dt$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t}.dt$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2.dt$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2.\cos t.dt$.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}.\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}.2.\cos t.\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2.\mathrm{d}t$.

Câu 10. Xét $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ .Nếu đặt $u=\ln x$ thì $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int u\mathrm{d}u$. **B.** $\int \mathrm{d}u$. **C.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$. **D.** $\int u^2\mathrm{d}u$.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}u$.

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f\ x\ \mathrm{d}x=2$ .Khi đó $\int\limits_1^3 f\ |2x-4|\ \mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $|2x-4|=\begin{cases}2x-4 & khi\ \ x\geq 2\\ -2x+4 & khi\ \ x<2\end{cases}$.

Dp đó $\int\limits_1^3 f\ |2x-4|\ \mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f\ 4-2x\ \mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f\ 2x-4\ \mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_1^2 f\ 4-2x\ \mathrm{d}x$. Đặt $t=4-2x\Rightarrow dt=-2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_1^2 f\ 4-2x\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_2^0 f\ t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\ x\ \mathrm{d}x=1.$

Xét $\int_2^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x-4\Rightarrow dt=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận : $x=2\Rightarrow t=0;x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó $\int_2^3 f\left(2x-4\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1.$

Vậy $\int_1^3 f\left(\left|2x-4\right|\right)\mathrm{d}x=1+1=2.$

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-6$ và $\int_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=5$.Khi đó $\int_0^2 f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** $-\frac{11}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left|3x-1\right|=\begin{cases}3x-1 & khi \quad x\geq\frac{1}{3}\\ -3x+1 & khi \quad x<\frac{1}{3}\end{cases}$.

Do đó $\int_0^2 f\left(\left|3x-1\right|\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^2 f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-3x\Rightarrow dt=-3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}dt$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=1;x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^{\frac{1}{3}} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_1^0 f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2.$

Xét $\int_{\frac{1}{3}}^2 f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=3x-1\Rightarrow dt=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{3}dt$.

Đổi cận : $x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=0;x=2\Rightarrow t=5$.

Khi đó $\int_{\frac{1}{3}}^{2} f\ 3x-1\ \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{0}^{5} f\ t\ dt=\frac{1}{3}\int_{0}^{5} f\ x\ \mathrm{d}x=\frac{5}{3}$.

Vậy $\int_{0}^{2} f\ |3x-1|\ \mathrm{d}x=-2+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}$.

Câu 3. Nếu đặt $u=e^x+1$ thì $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$ bằng

A. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u+1}$. **B.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ u-1}$. **C.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$. **D.** $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ u-1}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=e^x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{e^x\ e^x+1}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ u-1}$.

Câu 4. Xét $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}.\mathrm{d}x$ .Nếu đặt $u=\sqrt{e^x-1}$ thì $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}.\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int_{0}^{1} u.\mathrm{d}u$. **B.** $\int_{0}^{1}\sqrt{u}.\mathrm{d}u$. **C.** $\int_{0}^{1}\frac{u}{u^2+1}.\mathrm{d}u$. **D.** $\int_{0}^{1}\frac{1}{u}.\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow u^2=\mathrm{e}^x-1\Rightarrow 2u\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow u=0; x=\ln 2\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}.\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{u}{u^2+1}.\mathrm{d}u$.

Câu 5. Nếu đặt $u=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ thì nguyên hàm của hàm số $f\ x\ =\frac{1}{x\sqrt{x+1}-\ x+1\ \sqrt{x}}$ theo u bằng

A. $-\int \frac{2}{u^2}.\mathrm{d}u$. **B.** $\int \frac{1}{u^2}.\mathrm{d}u$. **C.** $\int \frac{2}{u^2}.\mathrm{d}u$. **D.** $-\int \frac{2}{u}.\mathrm{d}u$.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $u=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}u=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}-\ x+1\ \sqrt{x}}.\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}\ \sqrt{x}-\sqrt{x+1}}.\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}\ \sqrt{x}-\sqrt{x+1}^{\ 2}}.\mathrm{d}x=\int\frac{2}{u^2}.\mathrm{d}u$.

Câu 6. Biết $I=\int\limits_0^1\frac{x}{4-x^2}.\mathrm{d}x=a\ln\frac{\sqrt{b}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ .Khi đó giá trị biểu thức $P=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $x=2\sin t,t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{dx}=2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0;x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1\frac{x}{4-x^2}.\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin t}{4-4\sin^2 t}.2\cos t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t$.

Đặt $u=\cos t,\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin t\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $t=0\Rightarrow u=1;t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=-\int\limits_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $a=-1,b=3,c=2$ .Vậy $P=a+b+c=4$.

Câu 7. Biết $I=\int\limits_1^4 e^{\sqrt{x}}.\mathrm{d}x=a.e^b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ .Khi đó giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=1\Rightarrow t=1;x=4\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^2 e^t.t\mathrm{d}t$.

Chọn $\begin{cases}u=t\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v=e^t\mathrm{d}t\Rightarrow v=e^t\end{cases}$ .Khi đó $I=2\int_1^2 e^t t\mathrm{d}t=2te^t\Big|_1^2-2\int_1^2 e^t\mathrm{d}t=4e^2-2e-2e^t\Big|_1^2=2e^2$.

Do đó $a=2,b=2$ .Vậy $P=a^2+b^2=8$.

Câu 8. Xét $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sin 2x$ thì $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$. **B.** $\frac{1}{2}+\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$. **C.** $\frac{1}{2}-2\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$. **D.** $\frac{1}{2}-\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\left(1-2\sin^2 2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.\sin^2 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x.\sin^2 2x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$.

Vậy $I=\frac{1}{2}-\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$.

Câu 9. Biết $I=\int_2^5 \frac{x}{3-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=a\ln 2-b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$ .Khi đó giá trị biểu thức $P=a^2-6b$ bằng

A. 3499. **B.** 3398. **C.** 2994. **D.** 799.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t=3-\sqrt{x-1}\Rightarrow \left(3-t\right)^2=x-1\Rightarrow -2\left(3-t\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=2\Rightarrow t=2;x=5\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int_2^5 \frac{x}{3-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=-2\int_2^1 \frac{\left(3-t\right)^2+1}{t}\left(3-t\right)\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(-t^2+9t-28+\frac{30}{t}\right)\mathrm{d}t$

$= 60\ln 2 - \frac{101}{3}$.

Do đó $a = 60, b = \frac{101}{3}$ .Vậy $P = 3398$.

Câu 10. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = a.e + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ .Khi đó giá trị biểu thức $P = a^3 + b^3$ bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^1 e^t\mathrm{d}t = e - 1$.

Do đó $a = 1; b = -1$ .Vậy $P = a^3 + b^3 = 0$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số $y = f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\ 1-x\ + x.f\ x^2\ = x^5 - x^3 + x^2 + 2x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ .Khi đó $\int_0^1 f\ x\ \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{51}{8}$. **B.** $\frac{17}{6}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $\frac{17}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 f\ 1-x\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x.f\ x^2\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^5 - x^3 + x^2 + 2x + 3\ \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f\ 1-x\ \mathrm{d}x + \int_0^1 x.f\ x^2\ \mathrm{d}x = \frac{17}{4}$.

Xét $\int_0^1 f\ 1-x\ \mathrm{d}x$.Đặt $t = 1-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $\int_0^1 f\ 1-x\ \mathrm{d}x = -\int_1^0 f\ t\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f\ x\ .\mathrm{d}x$.

Xét $\int_0^1 x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $\int_0^1 x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{4}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}$.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f\left(3x\right)+x.f\left(x^2+2\right)=5x^5+18x^3+45x^2+11x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 96. **B.** 64. **C.** 192. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $f\left(3x\right)+x.f\left(x^2+2\right)=5x^5+18x^3+45x^2+11x+1\ \ (1)$.

Thay x bởi $-x$ vào (1) ta có : $f\left(-3x\right)-x.f\left(x^2+2\right)=-5x^5-18x^3-45x^2-11x+1\left(2\right)$.

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được :

$f\left(3x\right)+f\left(-3x\right)=90x^2+2\Leftrightarrow\int_{-1}^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 f\left(-3x\right)\mathrm{d}x=64$.

Xét $\int_{-1}^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=-1\Rightarrow t=-3; x=1\Rightarrow t=3$.

Khi đó $\int_{-1}^1 f\left(3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Tương tự ta có $\int_{-1}^1 f\left(-3x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $\frac{1}{3}\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=64\Leftrightarrow\int_{-3}^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=96$.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f\left(x^3-x\right)+x.f\left(2x^2\right)=-x^9-5x^7-3x^5+10x^3-5x-2,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-6}^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. −24. **B.** −48. **C.** 258. **D.** −282.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $f\left(x^3-x\right)+x.f\left(2x^2\right)=-x^9-5x^7-3x^5+10x^3-5x-2\ \ (1)$.

Thay x bởi $-x$ vào (1) ta có: $f\left(-x^3+x\right)-x.f\left(2x^2\right)=x^9+5x^7+3x^5-10x^3+5x-2\ \ (2)$.

Cộng (1) và (2) vế với vế ta được :

$$f\left(x^3-x\right)+f\left(-x^3+x\right)=-4.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-1\ f\left(x^3-x\right)+3x^2-1\ f\left(-x^3+x\right)=-4\ 3x^2-1\ .$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f\left(x^3-x\right)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2} f\left(-x^3+x\right)\mathrm{d}x=-48\ .$$

Xét $\int_{-2}^{2} 3x^2-1\ f\left(x^3-x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $t=x^3-x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(3x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=-2\Rightarrow t=-6; x=2\Rightarrow t=6$.

Khi đó $\int_{-2}^{2} 3x^2-1\ f\left(x^3-x\right)\mathrm{d}x=\int_{-6}^{6} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Tương tự ta có $\int_{-2}^{2} 3x^2-1\ f\left(-x^3+x\right)\mathrm{d}x=\int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-48\Leftrightarrow \int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-24$.

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $f\left(x\right)+f\left(3-x\right)=2x^2-11x+18$. Khi đó $\int_{-6}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 90 . **B.** 45 . **C.** $\frac{45}{2}$. **D.** $\frac{45}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)+f\left(3-x\right)=2x^2-11x+18\Leftrightarrow \int_{0}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f\left(3-x\right)\mathrm{d}x=\frac{45}{2}$.

Xét $\int_{0}^{3} f\left(3-x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $t=3-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=3; x=3\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_0^3 f\ 3-x\ \mathrm{d}x=-\int_3^0 f\ t\ \mathrm{d}t=\int_0^3 f\ x\ \mathrm{d}x$.

Do đó $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{45}{2}\Leftrightarrow\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{45}{4}$.

Câu 5. Cho $f\ x$ là hàm số chẵn liên tục trên $-3;3$ và $\int_0^3 f\ x\ \mathrm{d}x=15$.Khi đó $\int_{-3}^3 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 30. **C.** $\frac{15}{2}$. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f\ x$ là hàm số chẵn nên $f\ -x\ =f\ x$ và $\int_{-3}^3 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-3}^0 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^3 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-3}^0 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=-3\Rightarrow t=3; x=0\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_{-3}^0 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int_3^0 \frac{f\ -t}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_0^3 \frac{3^t.f\ t}{1+3^t}\mathrm{d}t=\int_0^3 \frac{3^x.f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{-3}^3 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^3 \frac{3^x.f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_0^3 \frac{f\ x}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^3 f\ x\ \mathrm{d}x=15$.

Câu 6. Cho $f\ x$ là hàm số chẵn liên tục trên $-1;1$ và $\int_{-1}^1 f\ x\ \mathrm{d}x=-\frac{64}{15}$.Khi đó $\int_{-1}^1 \frac{f\ x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{64}{15}$. **B.** $-\frac{32}{15}$. **C.** $-\frac{16}{15}$. **D.** $-\frac{128}{15}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $f\ x$ là hàm số chẵn nên $f\ -x\ =f\ x$ và $\int_{-1}^1 f\ x\ \mathrm{d}x=2\int_0^1 f\ x\ \mathrm{d}x=-\frac{64}{15}$

$\int_{-1}^1 \frac{f\ x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{f\ x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f\ x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-1}^{0}\frac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=-1\Rightarrow t=1; x=0\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int_{-1}^{0}\frac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=-\int_{1}^{0}\frac{f\left(-t\right)}{e^{-2t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\frac{e^{2t}f\left(t\right)}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}.f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_{-1}^{1}\frac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}.f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{32}{15}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$, $f\left(x\right)>-1,\forall x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$ và $f'\left(x\right)=3x.\left[f\left(x\right)+1\right]^{3}$ .Khi đó $f\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. 3. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $-\frac{1}{32}$. **D.** 16.

Lời giải:

Chọn A

Ta có : $f'\left(x\right)=3x.\left[f\left(x\right)+1\right]^{3}\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)+1\right]^{3}}=3x\Leftrightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)+1\right]^{3}}\mathrm{d}x=\int 3x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=f\left(x\right)+1\Rightarrow \mathrm{d}t=f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\frac{f'\left(x\right)}{\left[f\left(x\right)+1\right]^{3}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^{3}}=-\frac{1}{2t^{2}}=-\frac{1}{2\left[f\left(x\right)+1\right]^{2}}+C'$.

Khi đó $-\frac{1}{2\left[f\left(x\right)+1\right]^{2}}=\frac{3}{2}x^{2}+C$.

Mà $f\left(0\right)=1$ nên $C=-\frac{1}{8}$.

Vậy $f\left(\frac{1}{4}\right)=3$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1; f\left(2\right)=4$ .Khi đó $I=\int_{0}^{2}f'\left(x\right).e^{2f\left(x\right)}\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $t=f\ x\ \Rightarrow \mathrm{d}t=f'\ x\ \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=f\ 0\ =1; x=2\Rightarrow t=f\ 2\ =4$.

Khi đó $I=\int_0^2 f'\ x\ .e^{2f\ x}\mathrm{d}x=\int_1^4 e^{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^2\ e^6-1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\ x$ liên tục trên $-9;0$ thỏa mãn $f\ 0\ =\frac{2\sqrt{e}}{e-1}, f\ x\ >0,\forall x\in -9;0$ và $f'\ x\ =2.f\ x\ .\sqrt{f^2\ x\ +1}$ .Khi đó $f\ -1$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{e}}{e^5-1}$. **B.** $\frac{2e^2}{e^5-1}$. **C.** $\frac{2e^2\sqrt{e}}{e^5-1}$. **D.** $\frac{e^2\sqrt{e}}{e^5-1}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $f'\ x\ =2.f\ x\ .\sqrt{f^2\ x\ +1}\Leftrightarrow\frac{f'\ x}{f\ x\ \sqrt{f^2\ x\ +1}}=2\Leftrightarrow\int\frac{f'\ x}{f\ x\ \sqrt{f^2\ x\ +1}}\mathrm{d}x=\int 2\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{f^2\ x\ +1}\Rightarrow t^2=f^2\ x\ +1\Rightarrow t\mathrm{d}t=f\ x\ .f'\ x\ \mathrm{d}x$.

Ta có $\int\frac{f'\ x}{f\ x\ .\sqrt{f^2\ x\ +1}}\mathrm{d}x=\int\frac{f\ x\ .f'\ x}{f^2\ x\ .\sqrt{f^2\ x\ +1}}\mathrm{d}x=\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2-1\ t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{f^2\ x\ +1}-1}{\sqrt{f^2\ x\ +1}+1}\right|+C' .$$

Khi đó $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{f^2\ x\ +1}-1}{\sqrt{f^2\ x\ +1}+1}\right|=2x+C$.

Mà $f\ 0\ =\frac{2\sqrt{e}}{e-1}$ nên $C=-\frac{1}{2}$.

Vậy $f\ -1\ =\frac{2e^2\sqrt{e}}{e^5-1}$.

Câu 10. Cho $F\ x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2+\cos x}.\sin x$ và $F\ 0\ =-2\sqrt{3}$ .Biết $\int_0^{\pi}\frac{F\ x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x=a\pi+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$ .Khi đó a^2+b^2 bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{\pi^2}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải:

Chọn D

Xét $\int \sqrt{2+\cos x}.\sin x.dx$.Đặt $t=\sqrt{2+\cos x} \Rightarrow t^2=2+\cos x \Rightarrow 2tdt=-\sin x.dx$.

Ta có $\int \sqrt{2+\cos x}.\sin x.dx=-2\int t^2.dt=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\sqrt{2+\cos x}^3+C$.

Mà $F(0)=-2\sqrt{3}$ nên $C=0$ .Do đó $F(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{2+\cos x}^3$.

Vậy $\int_0^{\pi}\frac{F(x)}{\sqrt{2+\cos x}}dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{2+\cos x}^3}{\sqrt{2+\cos x}}dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2+\cos x)\,dx=-\frac{4\pi}{3}$.

Do đó $a=-\frac{4}{3};b=0$ .Vậy $a^2+b^2=\frac{16}{9}$.

DẠNG TOÁN 34: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN (TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG)

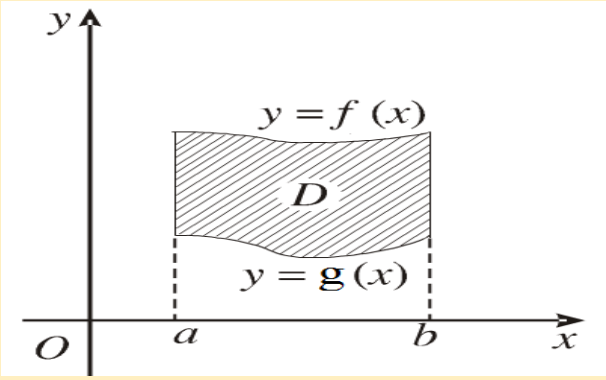
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ: Tính diện tích hình phẳng

✪ Dạng 1 : Biết cận tích phân

Cho miền D giới hạn bởi đồ thị hai hàm $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a, x=b, (a<b)$.

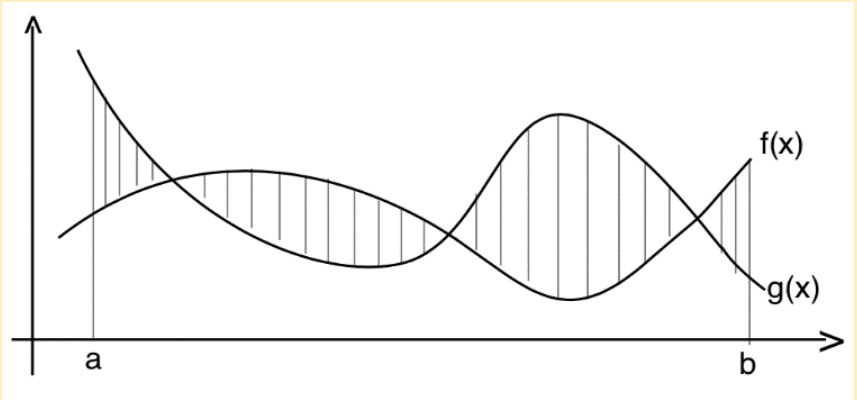
Khi đó diện tích miền D là : $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.

- ***TH 1:*** Nếu $f(x)-g(x)=0$ ***vô nghiệm*** trên $(a;b)$ thì $S=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$

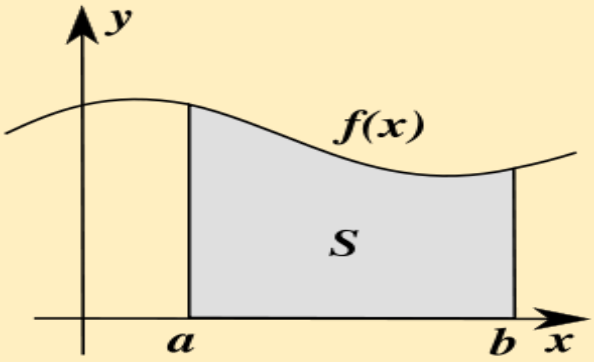


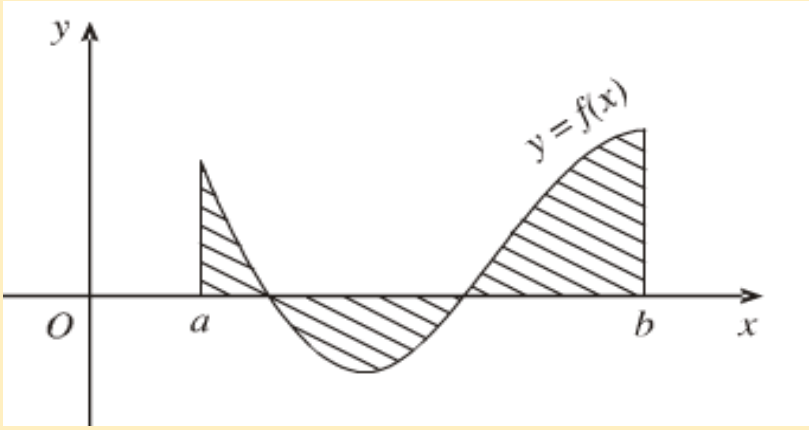
- ***TH 2:*** Nếu $f(x)-g(x)=0$ ***có nghiệm*** $a<x_1<x_2<...<x_n<b$ thì :

$$S=\left|\int_a^{x_1}[f(x)-g(x)]dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-g(x)]dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}[f(x)-g(x)]dx\right|$$



- ***Chú ý:*** Nếu $g(x)=0$ (trục Ox) thì $S=\int_a^b |f(x)|dx$.





✪ Dạng 2: Chưa biết cận tích phân

Cho miền D giới hạn bởi đồ thị hai hàm $y=f(x), y=g(x)$.

+ Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$ tìm nghiệm $x_1<x_2<...<x_n$.

+ Tính $S=\left|\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-g(x)]dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}[f(x)-g(x)]dx\right|+...+\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n}[f(x)-g(x)]dx\right|$

Chú ý: Nếu biết một cận thì ta tìm cận còn lại.

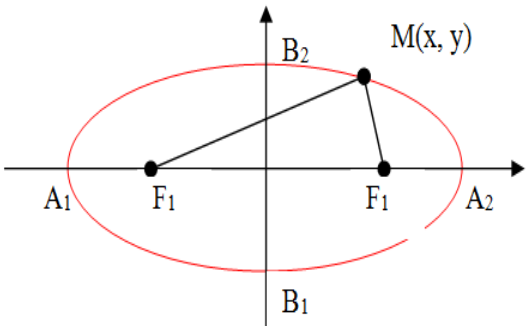
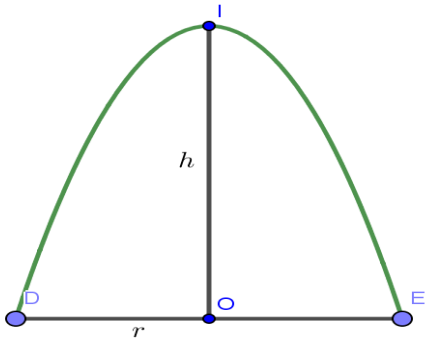
✪ Dạng 3: Miền cần tính giới hạn bởi 3 đồ thị

+ Tìm giao điểm từng cặp đồ thị.

+ Vẽ đồ thị xác định miền D.

+ Chia miền D để tính diện tích từng phần rồi cộng lại.

DIỆN TÍCH CÁC HÌNH ĐẶC BIỆT:

Hình elip	Hình parabol
	
Cho elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, khi đó diện tích elip là : $S=\pi ab$	Diện tích parabol có chiều cao h và bán kính đáy r là: $S=\frac{4}{3}r.h$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Câu hỏi lý thuyết về ứng dụng hình học của tích phân.
- Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ.
- Diện tích hình phẳng y=f(x), Ox.
- Diện tích hình phẳng y=f(x), y=g(x).
- Diện tích hình phẳng y=f(x), y=g(x), y=h(x).
- Diện tích hình phẳng dựa vào đồ thị.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2, y=-1, x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int_0^1\left(2x^2+1\right)dx$.

B. $S=\int_0^1\left(2x^2-1\right)dx$.

C. $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)^2dx$.

D. $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)dx$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định các đường giới hạn của hình phẳng $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$

$y=f_1(x)=2x^2$, $y=f_2(x)=-1$, $x=a=0$ và $x=b=1$

B2: Đưa ra công thức tính diện tích hình phẳng

$$S=\int_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx \Rightarrow S=\int_0^1\left|2x^2-(-1)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x$$

B3: Phân tích để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Diện tích của hình phẳng là $S=\int_0^1\left|2x^2-(-1)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x$

Vì $2x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\int_0^1\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1: Với hàm $f(x)$ tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}$, $a<b$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Ta có $S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$

Câu 2: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=\mathrm{e}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_1^{\mathrm{e}}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$.

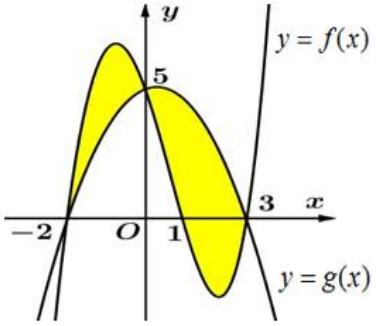
Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int_1^{\mathrm{e}}\left|\dfrac{\ln x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$.

Vì $\forall x\in[1;\mathrm{e}],\ \ln x\geq 0\Rightarrow\dfrac{\ln x}{x^2}\geq 0\Rightarrow S=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Câu 3: Diện tích phần hình phẳng tô màu trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-2}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]dx$.

C. $\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]dx+\int_{0}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

Lời giải

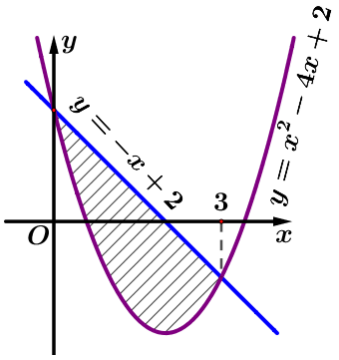
Chọn C

Từ đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ ta có diện tích phần hình phẳng tô màu trong hình vẽ là: $S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|dx$

$$=\int_{-2}^{0}\left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_{0}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

Câu 4: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



A. $\int_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{0}^{3}\left(-x^2+3x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{0}^{3}\left(x^2-4x+2\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{3}\left(-x+2\right)\mathrm{d}x$.

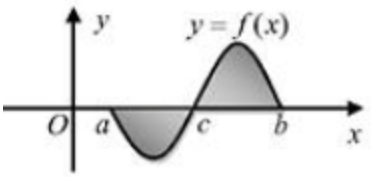
D. $\int_{0}^{3}\left(-x+2\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left(x^2-4x+2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{0}^{3}\left[\left(-x+2\right)-\left(x^2-4x+2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\left(-x^2+3x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 5: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng ?



A. $S=\int_a^b f(x)dx$.

B. $S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

D. $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức tính diện tích hình phẳng ta được $S=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$.

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y=x^3-3x$, $y=x$. Tính S.

A. $S=4$.

B. $S=8$.

C. $S=2$.

D. $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-3x=x \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|=4+4=8$.

Câu 7: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0, x=0, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 3^x dx$.

B. $S=\pi\int_0^2 3^{2x}dx$.

C. $S=\pi\int_0^2 3^x dx$.

D. $S=\int_0^2 3^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S=\int_0^2 3^x dx$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=1$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

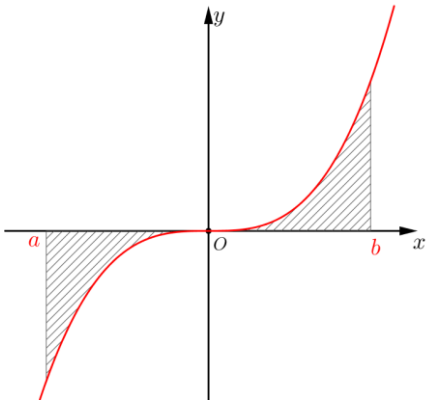
Lời giải

Chọn B

Giải phương trình: $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$

Khi đó: $S=\int_{-1}^{1}\left|x^3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D=\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_D=\int_{a}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

Vì $f(x)\le 0,\forall x\in[a;0]$, $f(x)\ge 0,\forall x\in[0;b]$ nên:

$S_D=\int_{a}^{0}\left(-f(x)\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S=\int_{1}^{2}\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{1}^{2}\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Mức độ 2

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^3+11x-6$ và $y=6x^2$ là

A. 52.

B. 14.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

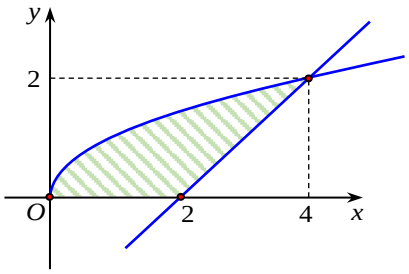
Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là : $x^3+11x-6=6x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Diện tích của hình phẳng là : $S=\left|\int_1^2\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx\right|+\left|\int_2^3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx\right|$

$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Big|_1^2\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Big|_2^3\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x-2$ trong hình sau



A. $S=\frac{7}{3}$. **B.** $S=\frac{10}{3}$. **C.** $S=\frac{11}{3}$. **D.** $S=\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$S=\int_0^4\left|\sqrt{x}-(x-2)\right|dx=\int_0^4\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_2^4=\frac{10}{3}$.

Câu 3: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{937}{12}$. **B.** $S=\frac{343}{12}$. **C.** $S=\frac{793}{4}$. **D.** $S=\frac{397}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x(x^2-x-12)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \\ x=4 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^4\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^0\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int_0^4\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{4}\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=2\ln 2-1$. **B.** $S=\ln 2+1$. **C.** $S=\ln 2-1$. **D.** $S=2\ln 2+1$.

Lời giải

Chọn A

$(H): y=\dfrac{x-1}{x+1}$, (H) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại $A(1;0)$, $B(0;-1)$.

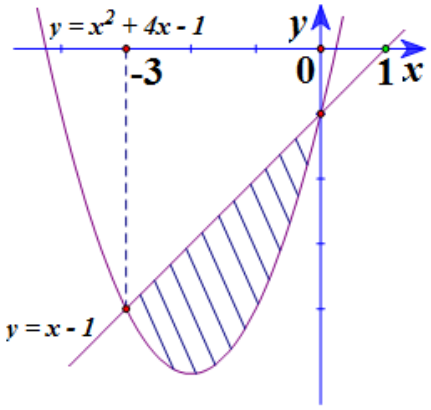
Gọi (K) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x-1}{x+1}, y=0, x=0$

Suy ra $S=\displaystyle\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{dx}=\left|\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{dx}\right|$ (do $\dfrac{x-1}{x+1}$ không đổi dấu với $x\in(0;1)$)

$$=\left|\left(x-2\ln|1+x|\right)\Big|_0^4\right|=2\ln 2-1.$$

Vậy $S=2\ln 2-1$.

Câu 5: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(x^2+3x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(-x^2-3x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(-x^2-5x+2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{-3}^{0}\left(x^2+5x-2\right)\mathrm{d}x$.

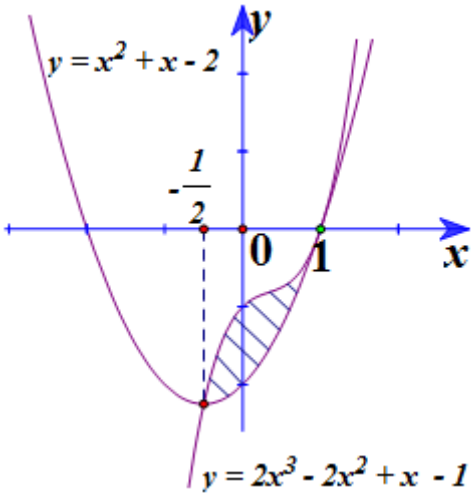
Lời giải

Chọn B.

Ta thấy: $\forall x \in [-3;0]: x-1 \geq x^2+4x-1$ nên

$$S=\int_{-3}^{0}\left[(x-1)-\left(x^2+4x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\left(-x^2-3x\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 6: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-2x^3+3x^2-1\right)\mathrm{d}x.$

B. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(2x^3-x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x.$

C. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(2x^3-3x^2+1\right)\mathrm{d}x.$

D. $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left(-2x^3+x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x.$

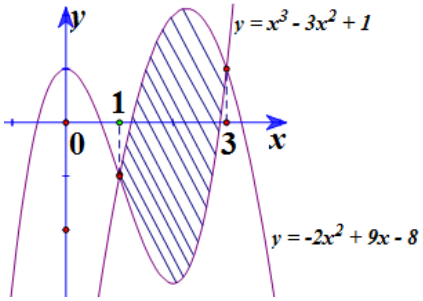
Lời giải

Chọn C.

Ta thấy: $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]: 2x^3-2x^2+x-1 \geq x^2+x-2$ nên

$$S=\int_{1}^{3}\left[\left(2x^3-2x^2+x-1\right)-\left(x^2+x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\left(2x^3-3x^2+1\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 7: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_1^3 \left(x^3-5x^2+9x-7\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_1^3 \left(-x^3+5x^2-9x+7\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_1^3 \left(-x^3+x^2+9x-9\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_1^3 \left(x^3-x^2-9x+9\right)\mathrm{d}x$.

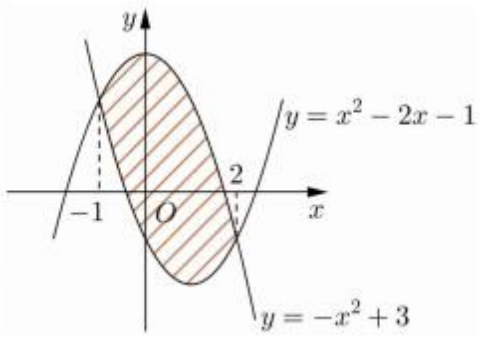
Lời giải

Chọn C

Ta thấy: $\forall x\in[1;3]: -2x^2+9x-8\ge x^3-3x^2+1$ nên

$$S=\int_1^3\left[\left(-2x^2+9x-8\right)-\left(x^3-3x^2+1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^3\left(-x^3+x^2+9x-9\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 8: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 \left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

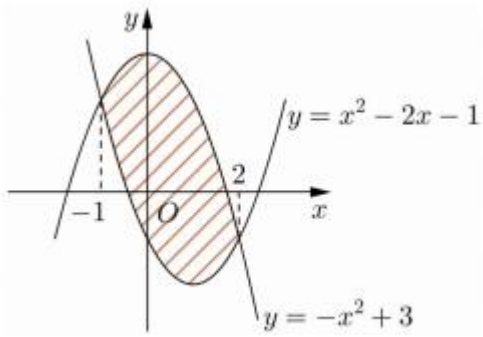
B. $\int_{-1}^2 \left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^2 \left(2x-2\right)\mathrm{d}x$

D. $\int_{-1}^2 \left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn D



Từ đồ thị hai hàm số $y=-x^2+3$ và $y=x^2-2x-1$ ta có $-x^2+3\ge x^2-2x-1,\ \forall x\in[-1;2]$.

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S=\int_{-1}^2\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^2\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x\ .$$

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox.

Xét phương trình $4x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_0^4\left|4x-x^2\right|dx=\left|\int_0^4(4x-x^2)dx\right|=\left|(2x^2-\frac{x^3}{3})\right|_0^4=\frac{32}{3}$.

Câu 10: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{2x}$, trục Ox,Oy và đường thẳng $x=2$. Tính S hình phẳng trên.

A. e^4-1. **B.** $\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$. **C.** $\frac{1}{2}e^4$. **D.** $\frac{1}{2}\left(e^4+1\right)$.

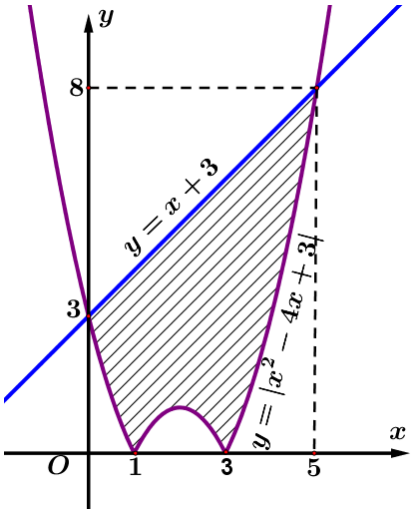
Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_0^2 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\ e^4-1$.

Mức độ 3

Câu 1: Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên ?



A. $\frac{109}{6}$. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{61}{12}$. **D.** $\frac{61}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng: $S=\int_0^5\left[(x+3)-\left|x^2-4x+3\right|\right]\mathrm{d}x=$

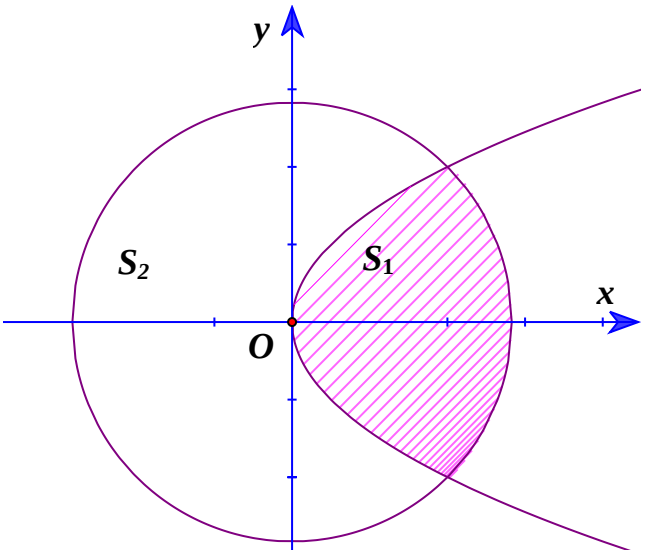
$=\int_0^1\left[(x+3)-\left(x^2-4x+3\right)\right]\mathrm{d}x+\int_1^3\left[(x+3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right]\mathrm{d}x+\int_3^5\left[(x+3)-\left(x^2-4x+3\right)\right]\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left(-x^2+5x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(x^2-3x+6\right)\mathrm{d}x+\int_3^5\left(-x^2+5x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+6x\right)\Big|_1^3+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Big|_3^5.$

$=\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}$

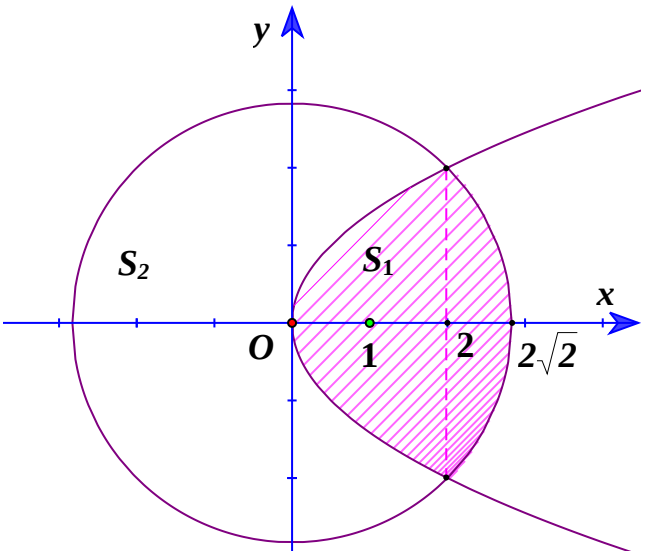
Câu 2: Biết rằng parabol $(P):y^2=2x$ chia đường tròn $(C):x^2+y^2=8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (như hình vẽ). Khi đó $S_2-S_1=a\pi-\frac{b}{c}$ với a,b,c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.



A. $S=13$. **B.** $S=16$. **C.** $S=15$. **D.** $S=14$.

Lời giải

Chọn C



Xét hệ $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8=0 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \vee x=2 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y^2=4 \end{cases}$.

$S_1=2\int_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x+2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$

$I_1=2\int_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x=\left(2.\sqrt{2}.\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^2=\frac{16}{3}$.

$I_2=2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sqrt{2}\cos t \Rightarrow \mathrm{d}x=-2\sqrt{2}\sin t\mathrm{d}t$

$x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=0$.

$I_2=2\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{8-8\cos^2 t}\left(-2\sqrt{2}\sin t\mathrm{d}t\right)=16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=8\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\pi-4$.

$\Rightarrow S_1=I_1+I_2=2\pi+\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow S_2=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow S_2-S_1=4\pi-\frac{8}{3}$.

Vậy $a=4$, $=8$, $c=3 \Rightarrow S=a+b+c=15$.

Câu 3: Tìm số thực dương a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích đạt giá trị lớn nhất.

A. 2. **B.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 hàm số là: $\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$

$\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ x=-2a \end{array}\right.$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số là:

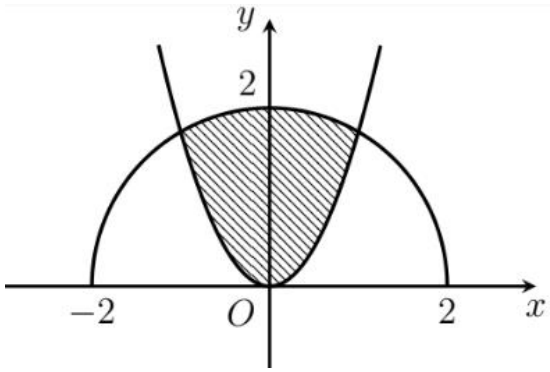
$S=\left|\int_{-2a}^{-a} \frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}dx\right|=\left|\frac{1}{1+a^6}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right)\Big|_{-2a}^{-a}\right|$

$=\left|\frac{1}{1+a^6}\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{3}{2}a^3-2a^3+\frac{8}{3}a^3-6a^3+4a^3\right)\right|$

$= \dfrac{|a^3|}{6(1+a^6)} \overset{Cauchy}{\leq} \dfrac{|a^3|}{12|a^3|} = \dfrac{1}{12}$. Dấu $"="\Leftrightarrow a^6=1\Leftrightarrow a=1$, vì $a>0$.

Vậy diện tích S đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{12}$, khi $a=1$.

Câu 4: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và nửa đường tròn tâm (H) bán kính bằng 2 nằm phía trên trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Diện tích của (H) được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $S=\int_0^1\left[\sqrt{2-x^2}-\sqrt{3}x^2\right]dx$.

B. $S=2.\int_0^1\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right]dx$.

C. $S=\int_0^1\left[\sqrt{3}x^2-\sqrt{4-x^2}\right]dx$.

D. $S=\int_0^1\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right]dx$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường tròn tâm O bán kính bằng 2 là: $x^2+y^2=4$.

$\Rightarrow$ Phương trình nửa đường tròn nằm phía trên trục hoành là: $y=\sqrt{4-x^2}$ với $x\in[-2;2]$.

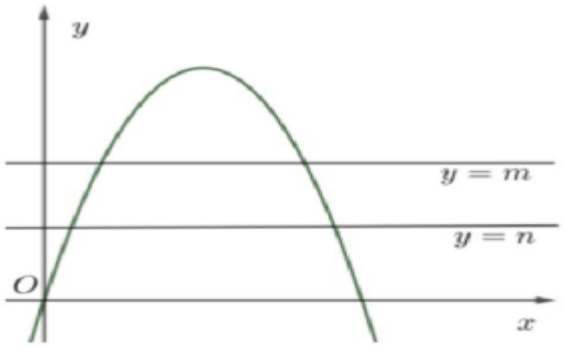
Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số là:

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2\Leftrightarrow 4-x^2=3x^4\Leftrightarrow 3x^4+x^2-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \quad (TM)\\ x^2=\dfrac{-4}{3}\,(\text{L})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Diện tích hình phẳng (H) là: $S=\int_{-1}^1\left|\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right|dx=2.\int_0^1\left[\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right]dx.$

(Vì trục Oy chia hình (H) thành 2 nửa bằng nhau, có diện tích bằng nhau và trên $[-1;1]$, đồ thị của nửa đường tròn nằm phía trên parabol.

Câu 5: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m$ và $y=n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau(tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức $T=(4-m)^3+(4-n)^3$ bằng



A. $T=\frac{320}{9}$. **B.** $T=\frac{512}{15}$. **C.** $T=405$. **D.** $T=\frac{75}{2}$.

Lời giải

Chọn A

***) Chứng minh công thức tính nhanh diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ cắt trục hoành tại 2 điểm x_1, x_2 và trục hoành ($x_1<x_2$)**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ và trục hoành là

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|ax^2+bx+c\right|dx$$

Không mất tính tổng quát, sử a<0. Vì đồ thị hàm số đã cắt trục hoành tại hai điểm

phân biệt x_1, x_2 nên $ax^2+bx+c\geq 0,\ \forall x\in[x_1;x_2]$. Do đó,

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(ax^2+bx+c)dx=\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{a}{3}(x_2^3-x_1^3)+\frac{b}{2}(x_2^2-x_1^2)+c(x_2-x_1)$$

$$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{3}(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)+\frac{b}{2}(x_2+x_1)+c\right]=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{a}{3}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{-b}{a}\right)+c\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{-b^2+4ac}{6a}\right]=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left[\frac{b^2-4ac}{6a}\right]=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}.$$ Vậy $\boxed{S=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}\text{ hay }S^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}}$

***) Vận dụng công thức tính nhanh vào giải bài tập:**

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ và trục hoành

Ta có $S=\frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}=\frac{16\sqrt{16}}{6}=\frac{32}{3}$

+) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ (P) và $y=m$

Tịnh tiến (P) xuống dưới m đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-m$

Khi đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-m$ và trục Ox

$S_1^2 = \dfrac{\Delta_1^3}{36a_1^4} = \dfrac{(16-4m)^3}{36} \Leftrightarrow (4-m)^3 = \dfrac{36S_1^2}{4^3}$ (1)

+) Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x$ (P) và $y=n$

Tịnh tiến (P) xuống n đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-n$

Khi đó S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-n$ và trục Ox

$S_2^2 = \dfrac{\Delta_2^3}{36a_2^4} = \dfrac{(16-4n)^3}{36} \Leftrightarrow (4-n)^3 = \dfrac{36S_2^2}{4^3}$ (2)

Theo bài ra ta có $S_1 = \dfrac{S}{3} = \dfrac{32}{9}$; $S = \dfrac{2S}{3} = \dfrac{64}{9}$

Từ (1) và (2) ta có $T = \dfrac{36(S_1^2+S_2^2)}{4^3} = \dfrac{9}{16}.\dfrac{5120}{81} = \dfrac{320}{9}$.

Câu 6: Cho Parabol $(P): y=x^2+1$ và đường thẳng $d: y=mx+2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $\left(-\sqrt{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2-mx-1=0$ (1).

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi a, b $(a<b)$ là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$S = \int_a^b \left|x^2-mx-1\right|dx = \left|\int_a^b \left(x^2-mx-1\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}-x\right)\right|_a^b$$

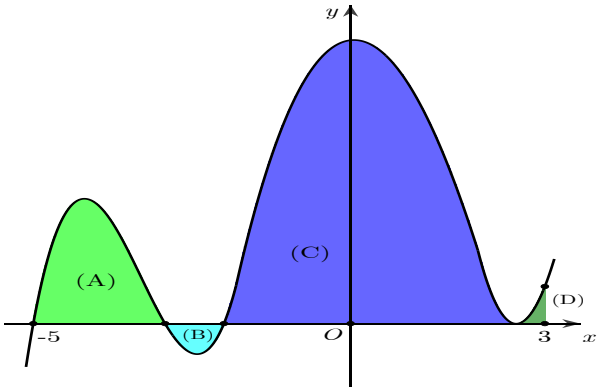
$$= \left|\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{m(b^2-a^2)}{2}-(b-a)\right| = |b-a|.\left|\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

$$= \sqrt{(b+a)^2-4ab}.\left|\frac{(b+a)^2-ab}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

Mà $a+b=m$, $ab=-1$ nên $S = \sqrt{m^2+4}.\left(\dfrac{m^2}{6}+\dfrac{2}{3}\right) \geq \dfrac{4}{3}$.

Do đó $\min S = \dfrac{4}{3}$ khi $m=0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6, 3, 12, 2. Tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21

Lời giải

Chọn A

Tính $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]\mathrm{d}x=2\int_{-3}^{1}f(2x+1)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{1}\mathrm{d}x$

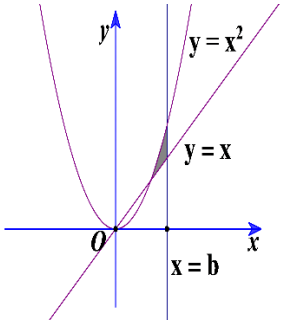
$=2\int_{-3}^{1}f(2x+1)\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2}=\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x+4$

Mà $\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành

Suy ra $\int_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=6+3+12+2=23.$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]\mathrm{d}x=23+4=27.$

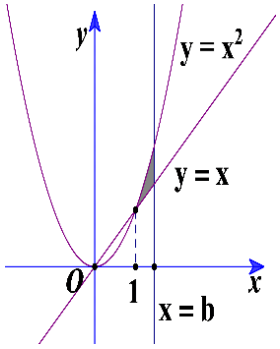
Câu 8: Cho $b>0$ và $\int_{0}^{b}x\mathrm{d}x=\int_{0}^{b}x^2\mathrm{d}x$. Diện tích của phần tô màu của hình bên dưới là



A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



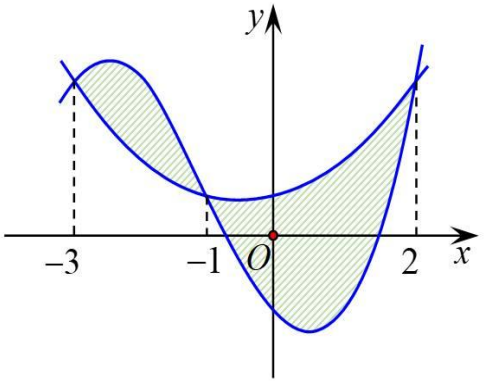
Vì $\int_0^b x\mathrm{d}x = \int_0^b x^2\mathrm{d}x$ nên $\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^b \Leftrightarrow \frac{b^2}{2} = \frac{b^3}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{3}{2} \end{array}\right.$, do $b>0$ nên ta loại $b=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2$ và $y=x$ là $x^2=x \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Diện tích phần tô đậm bị giới hạn bởi đường cong $y=x^2$ và đường thẳng $y=x$ trên đoạn $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ là $\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

Vậy diện tích phần tô đen bằng $\frac{1}{6}$.

Câu 9: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **C.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$

Lời giải

Chọn C

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2)(x+1)=0$

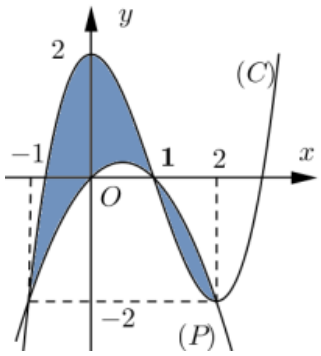
$\Leftrightarrow a\left(x^2+4x+3\right)(x-2)=0 \Leftrightarrow a(x^3+2x^2-5x-6)=0$

Đồng nhất hệ số với phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ ta có: $\frac{a}{1}=\frac{-\frac{3}{2}}{-6}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6)$

Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$.

Câu 10: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số bậc ba và đồ thị hàm số bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2, y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$

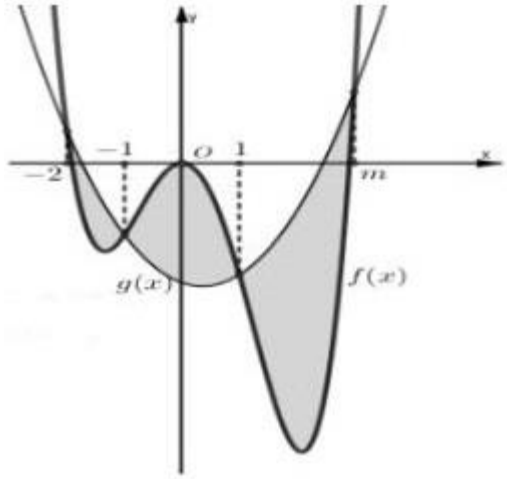
Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1; x=1; x=2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx\Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2)=0$.

Với $x=0$ ta được $2a=2\rightarrow a=1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

Mức độ 4

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $a\neq 0$ và $g(x)=px^2+qx-3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới . Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua gốc tọa độ và cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ và m. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)-g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ (phần được tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của hình (H) bằng



A. $\frac{1553}{120}$. **B.** $\frac{1553}{240}$. **C.** $\frac{1553}{60}$. **D.** $\frac{1553}{30}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=f(x)-g(x)=ax^4+bx^3+(c-p)x^2+(d-q)x+(e+3)$.

$h'(x)=4ax^3+3bx^2+2(c-p)x+(d-q)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow h(x)=0\Leftrightarrow ax^4+bx^3+(c-p)x^2+(d-q)x+(e+3)=0$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua gốc tọa độ và cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ và m nên $f(0)=h(-2)=h(-1)=h(1)=h(m)=0$ khi đó:

$$\begin{cases} e=0 \\ 16a-8b+4(c-p)-2(d-q)=-3 \\ a-b+(c-p)-(d-q)=-3 \ (2) \\ a+b+(c-p)+(d-q)=-3 \ (3) \\ am^4+bm^3+(c-p)m^2+(d-q)m+(e+3)=0 \ (4) \end{cases}$$

Mặt khác, tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)-g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$ nên $h'(-2)=-32a+12b-4(c-p)+(d-q)=-\frac{15}{2}$ (5)

Từ $(1);(2);(3);(5)$ ta được $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c-p=-\frac{7}{2} \\ d-q=\frac{1}{2} \end{cases}$

Thay vào $(4):\ \frac{1}{2}m^4-\frac{1}{2}m^3-\frac{7}{2}m^2+\frac{1}{2}m+3=0\Leftrightarrow (m-3)(m-1)(m+1)(m+2)=0$

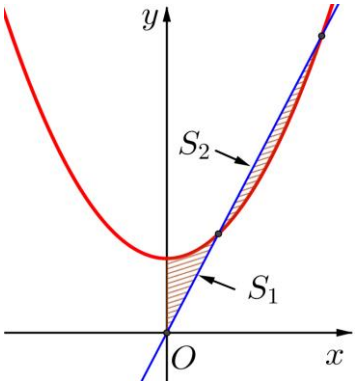
$\Leftrightarrow m=3$ (vì theo hình vẽ $m>1$)

Ngoài ra, ta có $h(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_{-2}^{3}|h(x)|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}|h(x)|\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}|h(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|h(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\left|-\frac{113}{120}\right|+\left|\frac{58}{15}\right|+\left|-\frac{122}{15}\right|=\frac{1553}{120}$$

Câu 2: Cho parabol $f(x)=x^2+2m$ (với m là số thực dương) và đường thẳng $g(x)=2x$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai phần gạch chéo như hình vẽ. Để $S_1=2S_2$ thì số thực dương m nằm trong khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **D.** $\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là:
$x^2+2m=2x\Leftrightarrow (x-1)^2=1-2m\ (*)$

Để có các phần gạch chéo như hình vẽ thì parabol và đường thẳng phải cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1-2m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Khi đó $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là $x_1=1-\sqrt{1-2m}$, $x_2=1+\sqrt{1-2m}$.

Vì $0<m<\frac{1}{2}$ nên $0<x_1<x_2$.

Suy ra $S_1=\int_0^{x_1}\left(x^2-2x+2m\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2mx\right)\Big|_0^{x_1}=\frac{x_1^3}{3}-x_1^2+2mx_1$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{1-2m}\right)^3}{3}-\left(1-\sqrt{1-2m}\right)^2+2m\left(1-\sqrt{1-2m}\right).$$

$$S_2=\int_{x_1}^{x_2}\left(2x-x^2-2m\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}-2mx\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=\left(x_2^2-x_1^2\right)-\frac{1}{3}\left(x_2^3-x_1^3\right)-2m\left(x_2-x_1\right)$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(\left(x_1+x_2\right)-\frac{1}{3}\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right]-2m\right)$$

$$=2\sqrt{1-2m}\left(2-\frac{1}{3}\left[2^2-2m\right]-2m\right)=\frac{4(1-2m)\sqrt{1-2m}}{3}$$

Vì $S_1=2S_2$ nên $\frac{\left(1-\sqrt{1-2m}\right)^3}{3}-\left(1-\sqrt{1-2m}\right)^2+2m\left(1-\sqrt{1-2m}\right)=\frac{8(1-2m)\sqrt{1-2m}}{3}$ $(**)$

Dùng CASIO dò nghiệm $m>0$ ta được $m\approx 0,41$.

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1): $y=\frac{2}{3}x^3-3mx^2-2m^3$ và (C_2): $y=-\frac{x^3}{3}+mx^2-5m^2x$. Gọi N, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của S khi $m\in[1;3]$. Tính $N-n$.

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$\cdot\frac{2}{3}x^3-3mx^2-2m^3=-\frac{x^3}{3}+mx^2-5m^2x\Leftrightarrow x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-m\right)^2\left(x-2m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=2m\end{array}\right.$$

Do $m\in[1;3]$ nên $m<2m$ và $\left(x-m\right)^2\left(x-2m\right)\le 0,\ \forall x\in[m;2m]$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1) và (C_2) là:

$$S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|\mathrm{d}x=-\int_m^{2m}\left(x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right)\mathrm{d}x$$

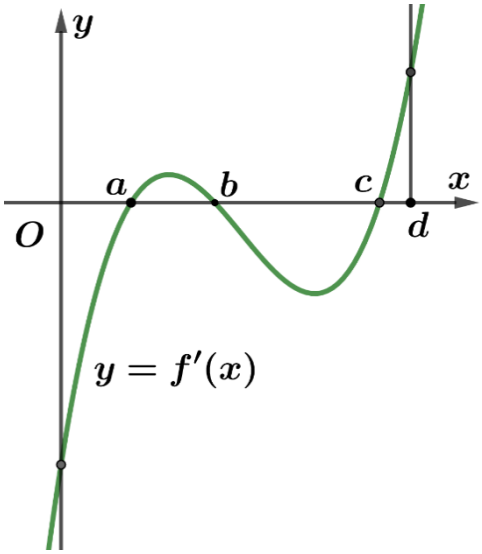
$$=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4mx^3}{3}+\frac{5m^2x^2}{2}-2m^3x\right)\Big|_m^{2m}=\frac{m^4}{12}$$

Vì hàm số: $y=\dfrac{m^4}{12}$ đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $N=\max\limits_{[1;3]} y=y(3)=\dfrac{27}{4}$,

$n=\min\limits_{[1;3]} y=y(1)=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $N-n=\dfrac{27}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{20}{3}$

Câu 4: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0<a<b<c<d$ và hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $M+m=f(b)+f(a)$.

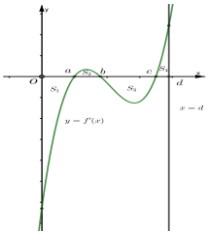
B. $M+m=f(0)+f(a)$.

C. $M+m=f(0)+f(c)$.

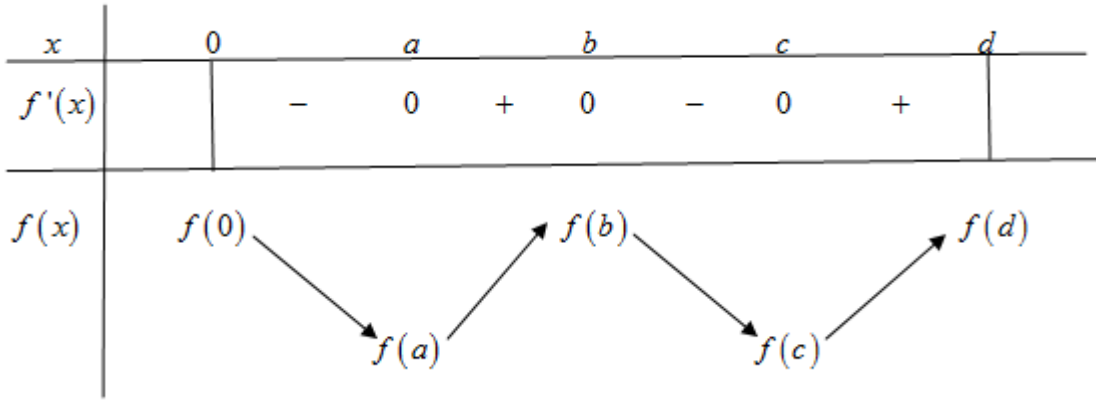
D. $M+m=f(d)+f(c)$.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$



Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\{f(0),\ f(b),\ f(d)\}$, $m=\min\{f(a),\ f(c)\}$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=a.$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b.$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=b,\ x=c.$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=c,\ x=d.$

Dựa vào hình vẽ ta có

$$S_1>S_2\Leftrightarrow\int_a^0 f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(0)-f(a)>f(b)-f(a)\Leftrightarrow f(0)>f(b).$$

$$S_3>S_4\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_c^d f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(b)-f(c)>f(d)-f(c)\Leftrightarrow f(b)>f(d).$$

Suy ra $M=f(0).$

$$S_3>S_2\Leftrightarrow\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(b)-f(c)>f(b)-f(a)\Leftrightarrow f(c)<f(a).$$

Suy ra $m=f(c).$

Vậy $M+m=f(0)+f(c).$

Câu 5: Cho $(P):y=x^2+2$ và đường thẳng $d:y=mx+3$ với $m\in\mathbb{R}$. Giả sử đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A và B. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường thẳng d và (P). Khi S nhỏ nhất thì giá trị biểu thức $P=(x_A.y_A)^2+(x_B.y_B)^2$ bằng

A. 82. **B.** 18. **C.** 10. **D.** 40.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2=mx+3\Leftrightarrow x^2-mx-1=0\ (1)$ có $\Delta=m^2+4$.

Cách 1:

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường thẳng d và (P) là:

$$S=\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^3}{6a^2}=\frac{\left(\sqrt{m^2+4}\right)^3}{6}\geq\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3},\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Cách 2:

Vì $\Delta=m^2+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ với $x_2-x_1=\sqrt{\Delta}$, $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=-1$. Đồng thời $x^2-mx-1<0,\ \forall x\in[x_1;x_2]$.

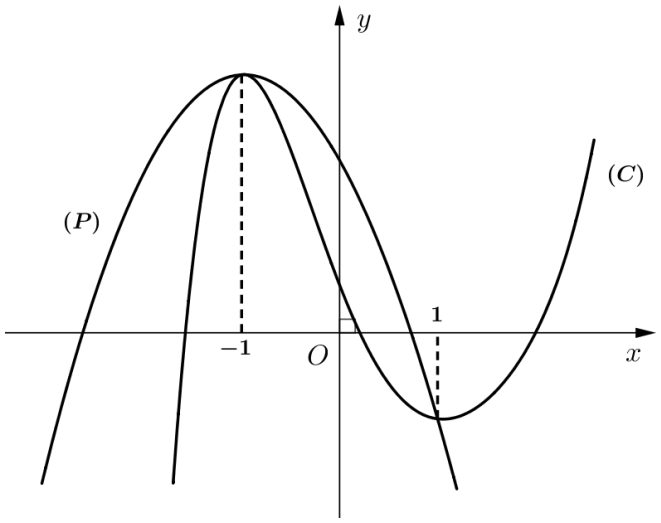
Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường thẳng d và (P) là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|x^2-mx-1\right|\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}-x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}=-(x_2-x_1)\left[\frac{(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{3}-\frac{m(x_1+x_2)}{2}-1\right]$$

$$=-\sqrt{\Delta}\left(\frac{m^2+1}{3}-\frac{m.m}{2}-1\right)=\frac{1}{6}\sqrt{m^2+4}\left(m^2+4\right)\geq\frac{4}{3},\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Suy ra $S_{\min}=\frac{4}{3}$, đạt được khi và chỉ khi $m=0$. Khi đó: $\begin{cases}A(1;3)\\B(-1;3)\end{cases}\Rightarrow P=(1.3)^2+(-1.3)^2=18$

Câu 6: Cho hai hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p(m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3+ax^2+bx+c=mx^2+nx+p \Leftrightarrow x^3+(a-m)x^2+(b-n)x+(c-p)=0(*).$$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt nhau tại điểm có hoành độ $x=1$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm $x=-1$ (bội 2) và $x=1$ (nghiệm đơn).

Khi đó, $(*)\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)=0$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) là:

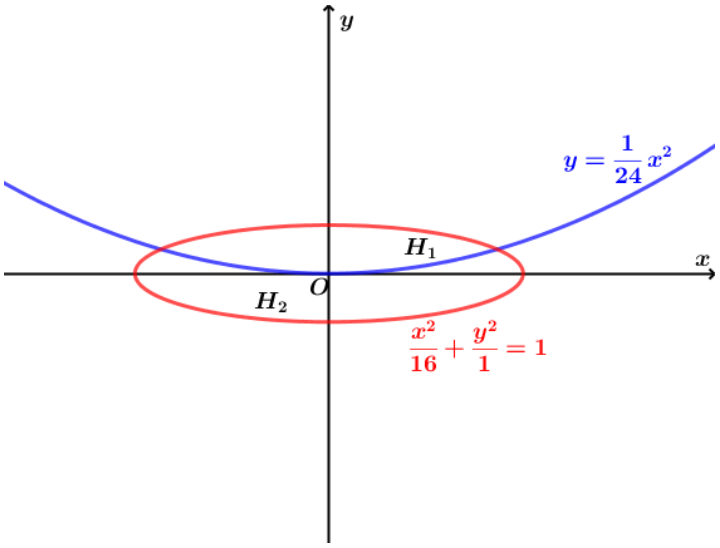
$$S=\int_{-1}^{1}\left|(x+1)^2(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x+1)^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\in(1;2).$$

Câu 7: Biết $(P):y=\frac{1}{24}x^2$ chia $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$ thành hai hình (H_1) và (H_2) lần lượt có diện tích là S_1 và S_2 $(S_1<S_2)$. Gọi $T=\frac{S_2}{S_1}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $T\le 3$. **B.** $3<T<16$. **C.** $16\le T<1980$. **D.** $T>1980$.

Lời giải

Chọn A



+ $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$ nên ta có $\begin{cases}a^2=16\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$.

$\Rightarrow$ Diện tích của elip là: $S=\pi ab=4\pi$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (E) là $\frac{x^2}{16}+\frac{\left(\frac{1}{24}x^2\right)^2}{1}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{12}\\x=-\sqrt{12}\end{array}\right.$.

+ Ta có $S_1 = 2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}-\frac{x^2}{24}\right)dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{12}}\sqrt{16-x^2}dx}_{I} - \frac{1}{36}x^3\Big|_0^{\sqrt{12}} = I - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

* Tính $I = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{12}}\sqrt{16-x^2}dx$.

• Đặt $x = 4\sin t, t \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

$\Rightarrow dx = 4\cos t.dt$

• Đổi cận $\begin{vmatrix} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{12} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$.

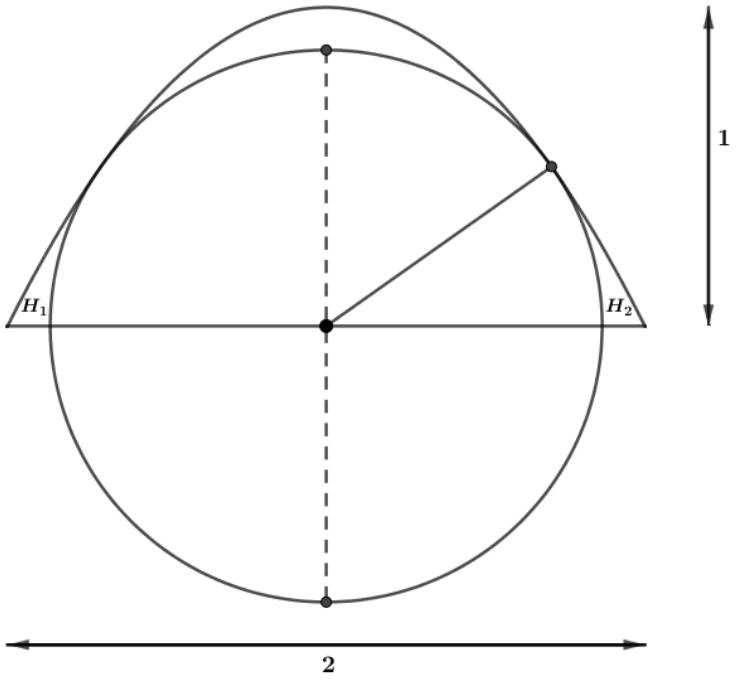
$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{12}}\sqrt{16-x^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt$

$= 4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = I - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.

+ Ta có $S_2 = S - S_1 = 4\pi - \frac{4\pi+\sqrt{3}}{3} = \frac{8\pi-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow T = \frac{S_2}{S_1} = \frac{8\pi-\sqrt{3}}{4\pi+\sqrt{3}} \simeq 1{,}64 \le 3$.

Câu 8: Cho một parabol tiếp xúc với một đường tròn với các số liệu được cho như hình vẽ bên dưới. Gọi H_1 và H_2 là hai phần hình phẳng lần lượt có diện tích là S_1, S_2 như hình vẽ. Giá trị $T = S_1 + S_2$ nằm trong khoảng

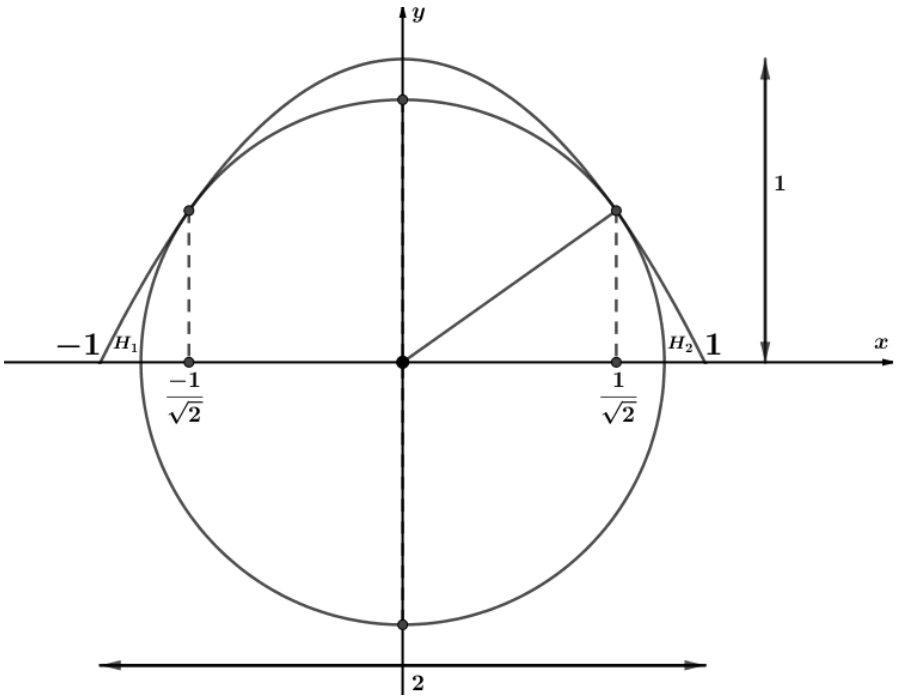
A. $(0{,}038;0{,}043)$. **B.** $(0{,}044;0{,}055)$. **C.** $(0{,}056;0{,}086)$. **D.** $(0{,}031;0{,}037)$.



Lời giải

Chọn B

+ Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



+ Phương trình parabol (P) là $y=1-x^2$.

+ Phương trình đường tròn (C) là $x^2+y^2=R^2 \quad (R>0)$.

+ Tọa độ giao điểm của (C) và (P)) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y+1-R^2=0 \ (1) \\ y=1-x^2 \end{cases}$$

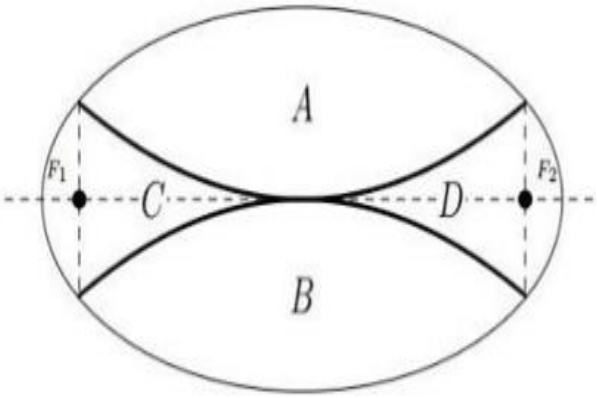
+ Để parabol (P) và đường tròn (C) tiếp xúc nhau thì phương trình (1) có nghiệm kép, do đó $\Delta=1-4\left(1-R^2\right)=0 \Leftrightarrow R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

+ Khi đó hoành độ tiếp điểm là $x^2=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

+ Diện tích cần tính là $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\left(1-x^2\right)-\sqrt{R^2-x^2}\right]\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\pi R^2\approx 0,0468$.

Câu 9: Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng hình elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua các trục của elip như hình vẽ dưới. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là $8m$ và $4m$. F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ

lần lượt là 250.000 đồng và 150.000 đồng. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).



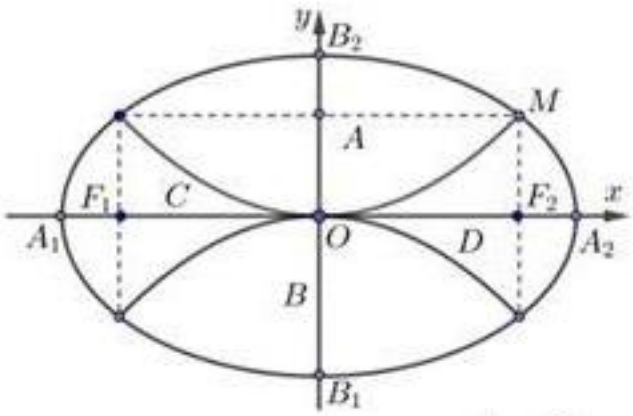
A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.

Lời giải

Chọn C

Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các phần A, B, C, D. Theo giả thiết ta có $S_A = S_B, S_C = S_D$.

Chọn hệ trục như hình vẽ.



Khi đó elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, (0<b<a)$. Theo bài ra ta có:

$2a=8 \Leftrightarrow a=4, 2b=4 \Leftrightarrow b=2$ suy ra phương trình của elip là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(1)$.

$c=2\sqrt{3} \Rightarrow F_2(2\sqrt{3};0)$.

Gọi (P) là parabol nằm ở phía trên trục Ox, cắt (E) tại điểm M có hoành độ $x_M=2\sqrt{3}$, khi đó $M \in (E) \Rightarrow M(2\sqrt{3};1)$.

Theo giả thiết parabol (P) có dạng: $y=mx^2$. Do $M \in (P) \Rightarrow 1=12m \Leftrightarrow m=\frac{1}{12}$.

Từ $(1) \Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-\frac{x^2}{16} \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích của phần A là:

$S_A=\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}-\frac{1}{12}x^2\right)dx=\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\right)dx-\frac{1}{12}\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}x^2dx$ hay $S_A=I_1-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ với

$I_1=\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $x=4\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Đổi cận $x=-2\sqrt{3}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}$, $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó ta có:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t=8\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Từ đó tìm được $S_A=\frac{8\pi+2\sqrt{3}}{3}$.

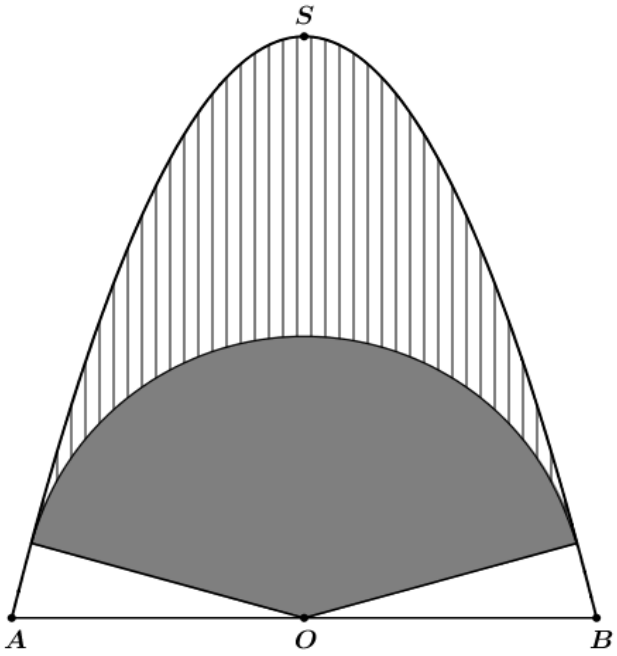
Diện tích của (E) là $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Diện tích của phần C là $S_C=S_D=\frac{S_E-2S_A}{2}=\frac{4\pi-2\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền cần sử dụng để hoàn thành khu vườn là:

$(2S_A).250.000+(2S_C).150.000\approx 5676367,372$.

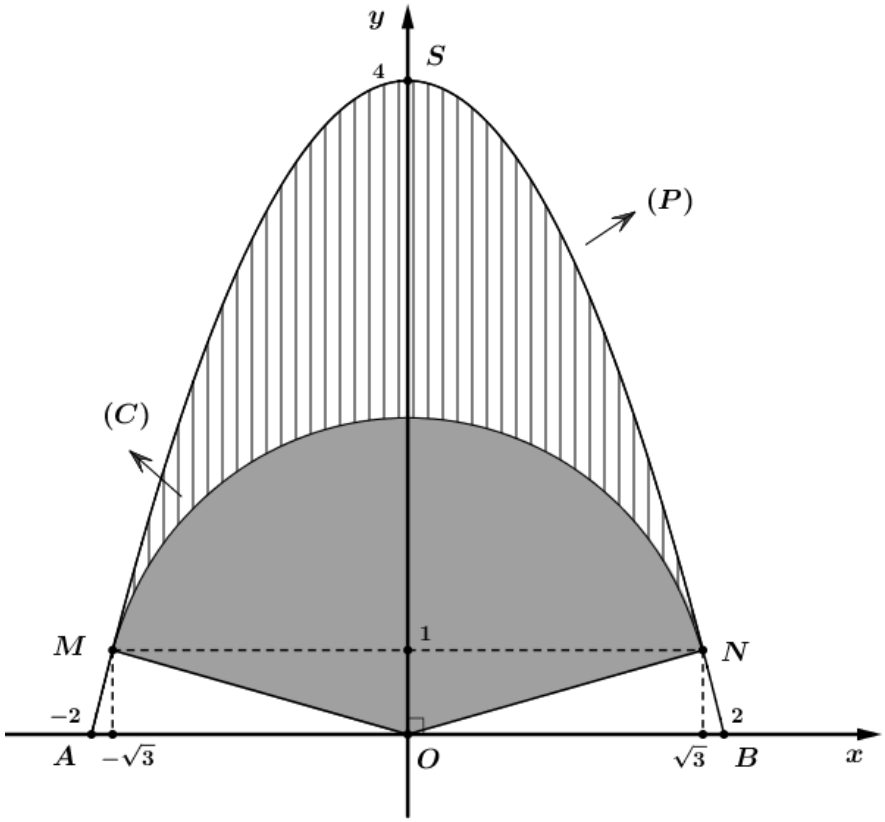
Câu 10: Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng paranol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS=AB=4$ m, O là trung điểm của AB. Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc 140000 đồng/ m^2, phần giữa là hình quạt tâm O, bán kính 2 m được tô đậm 150000 đồng/ m^2, phần còn lại 160000 đồng/ m^2. Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?



A. 1.597.000 đồng. **B.** 1.625.000 đồng. **C.** 1.575.000 đồng. **D.** 1.600.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi parabol (P) có phương trình: $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. Khi đó (P) đi qua các điểm $S(0,4)$, $A(-2;0)$ và $B(2;0)$.

Suy ra ta có $\begin{cases} c=4 \\ 4a-2b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$. Vậy parabol (P): $y=-x^2+4$.

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $OA=2$.

Khi đó phương trình (C) là: $x^2+y^2=4$. Suy ra phương trình nửa đường tròn (phần nằm phía trên trục hoành) là $y=\sqrt{4-x^2}$.

Gọi M, N là giao điểm của (C) và (P) (khác A, B).

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) ta có:

$$\sqrt{4-x^2}=-x^2+4 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4\geq 0 \\ \sqrt{4-x^2}=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x^2}=0 \\ \sqrt{4-x^2}=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Suy ra điểm $M\left(-\sqrt{3};1\right)$ và điểm $N\left(\sqrt{3};1\right)$.

Phương trình đường thẳng ON là: $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

Chi phí sơn phần kẻ sọc là: $T_1=\left[2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-x^2+4-\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x\right].140000$ (đồng).

Chi phí sơn phần hình quạt là: $T_2=\left[2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\right)\mathrm{d}x\right].150000$ (đồng).

Chi phí sơn phần còn lại là: $T_3 = \left[2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} x\mathrm{d}x + 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \left(-x^2+4\right)\mathrm{d}x \right].160000$ (đồng).

Vậy tổng chi phí sơn là: $T = T_1 + T_2 + T_3 \approx 1575349,5$ (đồng).

DẠNG TOÁN 35: SỐ PHỨC

1. Các kiến thức cơ bản về số phức

- Tập hợp số phức: $\mathbb{C}$
- Số phức (*dạng đại số*) : $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2=-1$).
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b=0)$.
- z là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0 $(a=0)$.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

◆ **Hai số phức bằng nhau**

Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$.

Khi đó $z_1=z_2\Leftrightarrow a+b.i=c+d.i\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$ (phần thực bằng nhau, phần ảo bằng nhau)

2. Các phép toán về số phức

◆ **Phép cộng hai số phức**

Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$.

Khi đó $z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức**

$z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$\text{k.z}=\text{k.(a}+\text{bi)}=\text{ka}+\text{kbi}$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

◆ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

- $|z.z'|=|z||z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$
- $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$
- $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Số phức liên hợp:** Số phức liên hợp của $z=a+bi$ là $\overline{z}=a-bi$.

- $\overline{\overline{z}}=z;\ \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'};\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'};\ \overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'};\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}};\ z.\overline{z}=a^2+b^2$

3. Tổng *n* số hạng đầu tiên của cấp số nhân:

Cho cấp số nhân có công bội q, số hạng đầu u_1.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\left(q \neq 1\right)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Thực hiện các phép toán.
- Tìm phần thực,phần ảo.
- Số phức liên hợp .
- Tính mô đun của số phức.
- Phương trình bậc nhất theo z (và liên hợp của z).
- Hỏi tổng hợp về các khác niệm.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020 Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = -1 + i$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ là

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán xác định phần ảo của một số phức.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

+ Số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ có phần thực là a và phần ảo là b.

+ Cho hai số phức $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ và $z' = c + di\left(c, d \in \mathbb{R}\right)$, khi đó:

$zz' = \left(a + bi\right)\left(c + di\right) = \left(ac - bd\right) + \left(ad + bc\right)i$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính tích của hai số phức $z_1 z_2$.

B2: Xác định phần ảo của số phức $z_1 z_2$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1 z_2 = \left(3 - i\right)\left(-1 + i\right) = \left(-3 + 1\right) + \left(3 + 1\right)i = -2 + 4i$.

Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ là 4.

Bài tập tương tự và phát triển 1:

Mức độ 1

Câu 1. Cho hai số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 5i$. Số phức $z = z_1 + z_2$ có phần thực là

A. 2. **B.** -2. **C.** $2i$. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn B

$z = z_1 + z_2 = 2 + 3i - 4 - 5i = -2 - 2i$.

Vậy phần thực của số phức là -2.

Câu 2. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

A. $z = 3 + 2i$. **B.** $\bar{z} = 3 - 2i$. **C.** $\bar{z} = 2 + 3i$. **D.** $\bar{z} = -2 + 3i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Câu 3. Phần ảo của số phức $z = -7 + 6i$ bằng

A. -6. **B.** $6i$. **C.** 6. **D.** $-6i$.

Lời giải

Chọn C

Cho số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó phần thực của số phức z là a và phần ảo của số phức z là b.

Ta có $z = -7 + 6i$. Do đó phần ảo của số phức z là 6.

Câu 4. Môđun của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

A. $\sqrt{29}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 29.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z| = |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z = -4 + 5i$ có tọa độ là

A. $(-4;5)$. **B.** $(-4;-5)$. **C.** $(4;-5)$. **D.** $(5;-4)$.

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z = -4 + 5i$ có tọa độ là $(-4;5)$.

Câu 6. Số phức $z = 3 - 2\text{i}$ có tổng của phần thực và phần ảo là

A. -2. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2i.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức, phần ảo của số phức là -2, phần thực là 3 nên tổng của phần thực và phần ảo là -1.

Câu 7. Cho số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tìm phần ảo số phức liên hợp của số phức $w=z_1+z_2$ là?

A. $2i$. **B.** 2. **C.** $-2i$. **D.** 2.

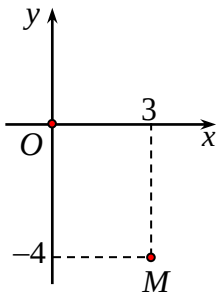
Lời giải

Chọn D

Vì: $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$ nên $w=z_1+z_2 \Leftrightarrow w=(1+2)+(1-3)i=3-2i \Leftrightarrow \overline{w}=3+2i$.

phần ảo số phức liên hợp của số phức $w=z_1+z_2$ là 2.

Câu 8. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4. **D.** Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải

Chọn C

Nhắc lại: *Trên mặt phẳng phức, số phức $z=x+yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.*

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x=3$ và tung độ $y=-4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 9. Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=3z_1-2z_2$ là

A. 1 **B.** 11 **C.** 12 **D.** $12i$

Lời giải

Chọn C

Ta có $w=3z_1-2z_2=3(1+2i)-2(2-3i)=-1+12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=2$. **B.** $b=-2$. **C.** $b=-3$. **D.** $b=3$.

Lời giải

Chọn D

$z=z_1-z_2=(1-3i)-(-2-5i)=3+2i$. Vậy phần ảo của z là: 2.

Mức độ 2

Câu 1. Số phức $z=\dfrac{4-3i}{i}$ có phần thực là

A. 3. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$z=\dfrac{4-3i}{i}=-3-4i$. Vậy phần thực của z là -3.

Câu 2. Cho hai số phức $z_1=2-4i$ và $z_2=1-3i$. Phần ảo của số phức $z_1+i\overline{z_2}$ bằng

A. 5. **B.** $3i$. **C.** $-5i$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_2=1-3i\Rightarrow\overline{z_2}=1+3i\Rightarrow i\overline{z_2}=i(1+3i)=3i^2+i=-3+i$

Suy ra $z_1+i\overline{z_2}=2-4i+(-3+i)=-1-3i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1+i\overline{z_2}$ là -3.

Câu 3. Cho số phức $z=2-5i$. Số phức z^{-1} có phần thực là

A. 7. **B.** $-\dfrac{5}{29}$. **C.** $\dfrac{2}{29}$. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{2-5i}=\frac{2+5i}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{2+5i}{29}=\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i.$$

Số phức z^{-1} có phần thực là $\dfrac{2}{29}$.

Câu 4. Cho số phức $z=a+bi\ (ab\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R})$. Tìm phần thực của số phức $w=\dfrac{1}{z^2}$.

A. $-\dfrac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)^2}$. **B.** $\dfrac{a^2+b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$. **C.** $\dfrac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$. **D.** $\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$.

Lời giải

Chọn D

$$w=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(a+bi)^2}=\frac{1}{a^2-b^2+2abi}=\frac{a^2-b^2-2abi}{\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2}.$$

Phần thực của w là $\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$.

Câu 5. Cho số phức $z=5-3i$. Phần thực của số phức $w=1+\overline{z}+\overline{z}^{\,2}$ bằng

A. 22. **B.** -22. **C.** 33. **D.** -33.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=5-3i\Rightarrow \overline{z}=5+3i\Rightarrow \overline{z}^{\,2}=5+3i^{\,2}=25+30i+9i^2=16+30i$.

Suy ra $w=1+\overline{z}+\overline{z}^{\,2}=1+5+3i+16+30i=22+33i$.

Vậy phần thực của số phức $w=1+\overline{z}+\overline{z}^{\,2}$ bằng 22.

Câu 6. Số phức z thỏa mãn $z+2\overline{z}=12-2i$ có

A. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $2i$. **B.** Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng 2.

C. Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng -2. **D.** Phần thực bằng 4 và phần ảo bằng $-2i$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z+2\overline{z}=12-2i\Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=12-2i$

$\Leftrightarrow 3a-bi=12-2i\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$.

Câu 7. Cho số phức z biết $\overline{z}=2-i+\dfrac{i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z^2 là

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}i$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overline{z}=2-i+\dfrac{i}{1+i}=2-i+\dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-i+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Suy ra $z=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}i\Rightarrow z^2=6+\dfrac{5}{2}i$.

Vậy phần ảo của số phức z^2 là $\dfrac{5}{2}$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $z+2.\overline{z}=6-3i$. Tìm phần ảo b của số phức z.

A. $b=3$. **B.** $b=-3$. **C.** $b=3i$. **D.** $b=2$.

Lời giải

ChọnA

Đặt $z=a+bi\quad a;\ b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết, ta có $a+bi+2\ a-bi\ =6-3i\Leftrightarrow 3a-bi=6-3i\Leftrightarrow\begin{cases}3a=6\\-b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$.

Vậy phần ảo b của số phức z là 3.

Câu 9. Cho hai số phức: $z_1=2+3i$, $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức $w=2z_1z_2$ bằng

A. 7. **B.** -5. **C.** -2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$w=2z_1z_2=-10-2i.$

Phần ảo của số phức là -2

Câu 10. Tìm phần ảo của số phức $z=(1-i)^2+(1+i)^2$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=(1-i)^2+(1+i)^2=-2i+2i=0$.

Phần thực của số phức là 0.

Câu 11. Cho số phức $z=5-3i$. Phần thực của số phức $w=1+\bar{z}+\bar{z}^2$ bằng

A. 22. **B.** -22. **C.** 33. **D.** -33.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=5-3i\Rightarrow\bar{z}=5+3i\Rightarrow\bar{z}^2=5+3i^2=25+30i+9i^2=16+30i$.

Suy ra $w=1+\bar{z}+\bar{z}^2=1+5+3i+16+30i=22+33i$.

Vậy phần thực của số phức $w=1+\bar{z}+\bar{z}^2$ bằng 22.

Câu 12. Cho hai số phức $z_1=4-3i+1-i^3$ và $z_2=7+i$. Phần thực của số phức $w=2\overline{z_1z_2}$ bằng

A. 9. **B.** 2. **C.** 18. **D.** -74.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1=4-3i+1-3i+3i^2-i^3=4-3i+1-3i-3+i=2-5i$.

Suy ra $\bar{z}_1.z_2=2+5i\ \ 7+i=9+37i\Rightarrow\overline{z_1.z_2}=9-37i.$

Do đó $w=2\ 9-37i=18-74i$.

Vậy phần thực của số phức $w=2\overline{z_1z_2}$ bằng 18.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $1+2i\ z=5\ 1+i^2$. Tổng bình phương phần thực và phần ảo của số phức $w=\bar{z}+iz$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

ChọnD

Ta có $1+2i\ z=5\ 1+i\ ^2 \Leftrightarrow z=\dfrac{5\ 1+i\ ^2}{1+2i}=\dfrac{10i}{1+2i}=\dfrac{10i\ 1-2i}{5}=4+2i.$

Suy ra $w=\bar{z}+iz=\ 4-2i\ +i\ 4+2i\ =2+2i$.

Vậy số phức w có phần thực bằng 2, phần ảo bằng 2. Suy ra $2^2+2^2=8$.

Mức độ 3

Câu 1. Số phức $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}-1$. **B.** $2^{1009}+1$. **C.** $1-2^{1009}$. **D.** $-\left(2^{1009}+1\right)$

Lời giải

Chọn D

Có $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}=(1+i).\dfrac{(1+i)^{2018}-1}{i}=(1-i)\left[(1+i)^{2018}-1\right]$

Do $(1+i)^{2018}=\left[(1+i)^2\right]^{1009}=(2i)^{1009}=2^{1009}.\left(i^2\right)^{504}.i=2^{1009}i$

Suy ra $z=(1-i).\left(2^{1009}i-1\right)=\left(2^{1009}-1\right)+\left(1+2^{1009}\right)i$. Vậy phần ảo của số phức z là $2^{1009}+1$.

Câu 2. Cho số phức $z=(m+1-2i)(2m+3+i)$ với m là tham số .Tổng các giá trị của m để z có phần thực bằng 5.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\dfrac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$z=(m+1-2i)(2m+3+i)\Leftrightarrow z=2m^2+5m+5+(-3m-5)i$.

Ta có phần thực của số phức z là $2m^2+5m+5$

Để z có phần thực bằng 5 thì $2m^2+5m+5=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị của m là $-\dfrac{5}{2}$.

Câu 3. Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

+ Ta có $(z+2i)(\bar{z}+2)=(x+yi+2i)(x-yi+2)=[x+(y+2)i][(x+2)-yi]$

$=x(x+2)+y(y+2)+[(x+2)(y+2)-xy]i$.

+ $(z+2i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x+2)+y(y+2)=0\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2$.

+ Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$.

Câu 4. Môđun của số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ và $17(z+\bar{z})-5z.\bar{z}=0$ bằng

A. $\sqrt{53}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi(a;b\in R)$

Ta có $\begin{cases}|z-1|=5\\17(z+\bar{z})-5z.\bar{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=25\\17.2a-5(a^2+b^2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2+b^2)-2a-24=0\\17.2a-5(a^2+b^2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5[(a^2+b^2)-2a-24]=0\\17.2a-5(a^2+b^2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}34a+5(-2a-24)=0\\5(a^2+b^2)=17.2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\a^2+b^2=34\end{cases}$

Suy ra $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{34}$.

Câu 5. Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\bar{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có

$(z-4i)(\bar{z}+2)=[x+(y-4)i][(x+2)-yi]=x(x+2)+y(y-4)+(x+2)(y-4)i-xyi$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $x(x+2)+y(y-4)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1;2), R=\sqrt{5}$.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $2+i\ z+\dfrac{2\ 1+2i}{1+i}=7+8i$. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $w=z+1+i$. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 25. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2+i\ z+\dfrac{2\ 1+2i}{1+i}=7+8i\Leftrightarrow 2+i\ z=7+8i-\dfrac{2\ 1+2i}{1+i}$.

$\Leftrightarrow 2+i\ z=4+7i\Leftrightarrow z=\dfrac{4+7i}{2+i}=\dfrac{4+7i\ \ 2-i}{2+i\ \ 2-i}=3+2i$.

Suy ra $w=z+1+i=4+3i\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\longrightarrow P=16+9=25.$

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $z+2.\overline{z}=6-3i$. Tìm phần ảo b của số phức z.

A. $b=3$. **B.** $b=-3$. **C.** $b=3i$. **D.** $b=2$.

Lời giải

ChọnA

Đặt $z=a+bi\ \ a;\ b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Theo giả thiết, ta có $a+bi+2\ a-bi\ =6-3i\Leftrightarrow 3a-bi=6-3i\Leftrightarrow\begin{cases}3a=6\\-b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$.

Vậy phần ảo b của số phức z là 3.

Câu 8. Cho số phức $z=a+bi\ \ a;\ b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $iz=2\ \overline{z}-1-i$. Tính $S=ab$.

A. $S=-4$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-2$.

Lời giải

ChọnA

Đặt $z=a+bi\ \ a;\ b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $iz=2\ \overline{z}-1-i\ \Leftrightarrow i\ a+bi\ =2\ a-bi-1-i\ \Leftrightarrow -b+ai=2a-2+\ -2b-2\ i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-b=2a-2\\a=-2b-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=2\\a+2b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}\longrightarrow S=ab=-4.$

Câu 9. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=10\ z+\overline{z}$ và z có phần ảo bằng ba lần phần thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ChọnC

Đặt $z=a+bi\ \ a;\ b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Từ $z.\overline{z}=10\ z+\overline{z}\longrightarrow a+bi\ \ a-bi\ =10\left[\ a+bi\ +\ a-bi\ \right]\Leftrightarrow a^2+b^2=20a.$ 1

Hơn nữa, số phức z có phần ảo bằng ba lần phần thực nên $b=3a$. 2

Từ 1 và 2 , ta có $\begin{cases}a^2+b^2=20a\\b=3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$.

Vậy có 2 số phức cần tìm là: $z=2+6i$ và $z=0$.

Câu 10. Cho số phức $z=a+bi \quad a;\ b\in\mathbb{R}$ thỏa $1+i\ z+2\overline{z}=3+2i.$ Tính $P=a+b.$

A. $P=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=-1.$ **D.** $P=-\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

ChọnC

Đặt $z=a+bi \quad a;\ b\in\mathbb{R}$, suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Từ $1+i\ z+2\overline{z}=3+2i\longrightarrow 1+i\ \ a+bi\ +2\ a-bi\ =3+2i$

$$\Leftrightarrow\ a-b\ i+\ 3a-b\ =3+2i\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\3a-b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\longrightarrow P=a+b=-1.$$

Mức độ 4

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{16}$ và $\dfrac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H)

A. $S=32(6-\pi).$ **B.** $S=16(4-\pi).$ **C.** $256.$ **D.** $64\pi.$

Lời giải

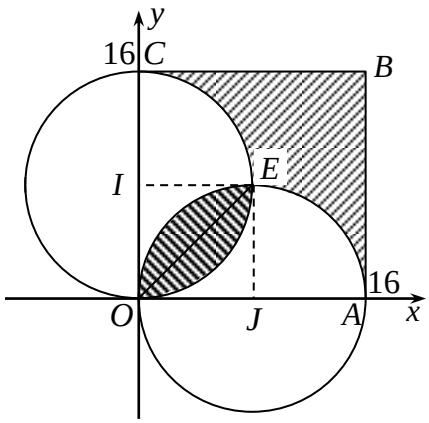
Chọn A

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R}).$

Ta có: $\dfrac{z}{16}=\dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{16}i;\ \dfrac{16}{\overline{z}}=\dfrac{16}{x-yi}=\dfrac{16x}{x^2+y^2}+\dfrac{16y}{x^2+y^2}i.$

Vì $\dfrac{z}{16}$ và $\dfrac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$ nên $\begin{cases}0\le\dfrac{x}{16}\le 1\\0\le\dfrac{y}{16}\le 1\\0\le\dfrac{16x}{x^2+y^2}\le 1\\0\le\dfrac{16y}{x^2+y^2}\le 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 16\\0\le y\le 16\\0\le 16x\le x^2+y^2\\0\le 16y\le x^2+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 16\\0\le y\le 16\\(x-8)^2+y^2\ge 64\\x^2+(y-8)^2\ge 64\end{cases}.$$



Suy ra (H) là phần mặt phẳng giới hạn bởi hình vuông cạnh 16 và hai hình tròn (C_1) có tâm $I_1(8;0)$, bán kính $R_1=8$ và (C_2) có tâm $I_2(0;8)$, bán kính $R_2=8$.

Gọi S' là diện tích của đường tròn (C_2).

Diện tích phần giao nhau của hai đường tròn là: $S_1=2\left(\frac{1}{4}S'-S_{OEJ}\right)=2\left(\frac{1}{4}.\pi.8^2-\frac{1}{2}.8.8\right)$.

Vậy diện tích S của hình (H) là:

$$S=16^2-\pi.8^2+2.\left(\frac{1}{4}.\pi.8^2-\frac{1}{2}.8.8\right)=256-64\pi+32\pi-64=192-32\pi=32(6-\pi).$$

Câu 2. Cho số phức $z=a+bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z|z|+2z+i=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b^2$.

A. $T=4\sqrt{3}-2$. **B.** $T=3+2\sqrt{2}$. **C.** $T=3-2\sqrt{2}$. **D.** $T=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải

ChọnC

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có $z|z|+2z+i=0\Leftrightarrow(a+bi)|a+bi|+2(a+bi)+i=0$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2+b^2}+2a+b\sqrt{a^2+b^2}i+2bi+i=0\Leftrightarrow a\sqrt{a^2+b^2}+2a+b\sqrt{a^2+b^2}i+2bi+i=0$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a^2+b^2}+2a+\left(b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a\sqrt{a^2+b^2}+2a=0\\ b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(\sqrt{a^2+b^2}+2\right)=0\\ b\sqrt{a^2+b^2}+2b+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b\sqrt{b^2}+2b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ |b|=-\dfrac{2b+1}{b}\cdot\end{cases}$

$|b|=-\frac{2b+1}{b}\Leftrightarrow\begin{cases}|b|=-\dfrac{2b+1}{b}\\ -\dfrac{2b+1}{b}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|b|=-\dfrac{2b+1}{b}\\ -\dfrac{1}{2}\le b<0\end{cases}\Leftrightarrow b=1-\sqrt{2}$.

Suy ra $T=a+b^2=3-2\sqrt{2}$.

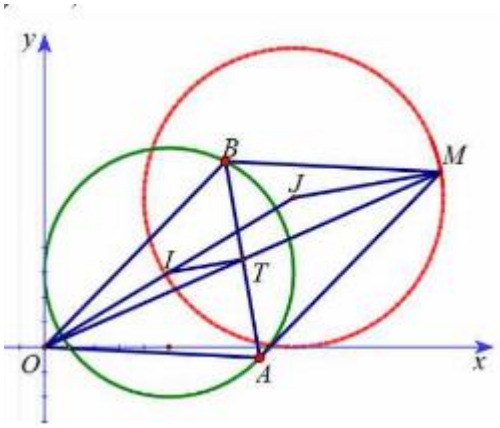
Câu 3. Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$. **D.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A, B, M lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C):(x-5)^2+(y-3)^2=25$ và $AB=|z_1-z_2|=8$.

(C) có tâm $I(5;3)$ và bán kính $R=5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT=\sqrt{IA^2-TA^2}=3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10;6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM=2IT=6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2+(y-6)^2=36$

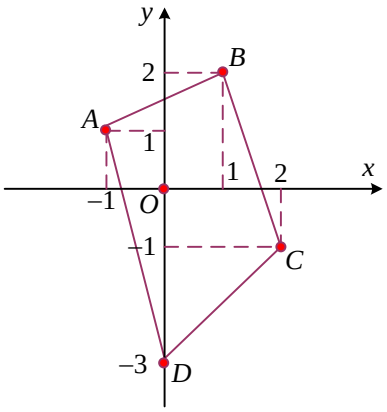
Câu 4: Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1=-1+i$, $z_2=1+2i$, $z_3=2-i$, $z_4=-3i$. Gọi S là diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S.

A. $S=\frac{17}{2}$. **B.** $S=\frac{19}{2}$. **C.** $S=\frac{23}{2}$. **D.** $S=\frac{21}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1=-1+i\Rightarrow A(-1;1)$, $z_2=1+2i\Rightarrow B(1;2)$, $z_3=2-i\Rightarrow C(2;-1)$, $z_4=-3i\Rightarrow D(0;-3)$



$\overrightarrow{AC}=(3;-2)\Rightarrow AC=\sqrt{13}$, $\vec{n}=(2;3)$ là véc tơ pháp tuyến của AC, phương trình AC:

$2(x+1)+3(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$.

Khoảng cách từ B đến AC là:

$$d(B;AC)=\frac{|2+3.2-1|}{\sqrt{13}}=\frac{7}{\sqrt{13}}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}d(B;AC).AC=\frac{1}{2}.\sqrt{13}.\frac{7}{\sqrt{13}}=\frac{7}{2}.$$

Khoảng cách từ D đến AC là:

$$d(D;AC)=\frac{|0-9-1|}{\sqrt{13}}=\frac{10}{\sqrt{13}}\Rightarrow S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}.d(D;AC).AC=\frac{1}{2}.\frac{10}{\sqrt{13}}.\sqrt{13}=5.$$

Vậy $S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\frac{7}{2}+5=\frac{17}{2}$.

Câu 5: Cho số phức z có phần thực và phần ảo là các số dương thỏa mãn $z+(1-i)^5.\bar{z}-\frac{\left(\overline{2-i}\right)^3}{i^6}=3+20i$. Khi đó môđun của số phức $w=1+z+z^2+z^3$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 25. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\overline{2-i}\right)^3=(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=2+11i.$

$(1-i)^5=(1-i).\left[(1-i)^2\right]^2=(1-i).(-2i)^2=-4+4i.$

Gọi $z=x+yi$

Khi đó $z+(1-i)^5.\bar{z}-\frac{\left(\overline{2-i}\right)^3}{i^6}=3+20i$

$\Leftrightarrow x+yi+(-4+4i).(x-yi)=1+9i$

$\Leftrightarrow (x-4x+4y)+(4x+5y)i=1+9i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4x+4y=1 \\ 4x+5y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow z=1+i$

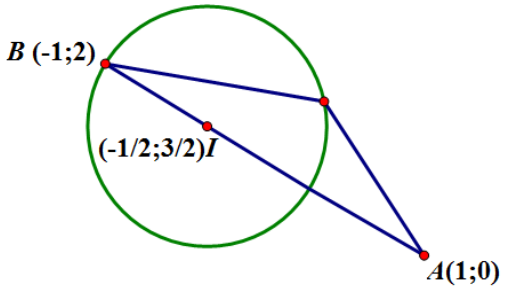
Suy ra $w=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3=5i \Rightarrow |w|=5$.

Câu 6: Cho $|2z+1-3i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z-1|+3.|z+1-2i|$?

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 4

Lời giải

Chọn A



Ta có: $M(z)\in\left(I;\frac{\sqrt{2}}{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Gọi $A(1;0), B(-1;2)$. Chú ý I, A, B thẳng hàng đồng thời ta có $IA=3IB$. Ta tìm max $MA+3MB$.

Ta có: $MA^2+3MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2+3MB^2=4MI^2+IA^2+3IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}\right)$

$\Rightarrow MA^2+3MB^2=4MI^2+IA^2+3IB^2=8$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxky ta có:

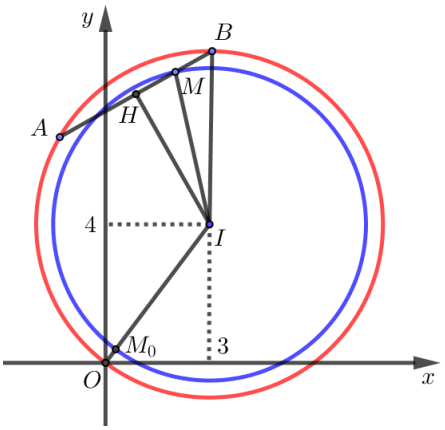
$MA+3MB\le\sqrt{\left(MA^2+3MB^2\right)(1+3)}=4\sqrt{2}$.) Chọn đáp án**A.**

Câu 7: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C



- Giả sử $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2. Suy ra $AB=|z_1-z_2|=4$.

- Ta có $(z-6)(8+\bar{z}i)=[(x-6)+yi].[(8-y)-xi]=(8x+6y-48)-(x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

- Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB. Ta tính được $HI^2=R^2-HB^2=21$; $IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\sqrt{22}$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{22}$.

- Ta có $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|4\overrightarrow{OM}|=4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min}=OM_0=|OI-r|=5-\sqrt{22}$.

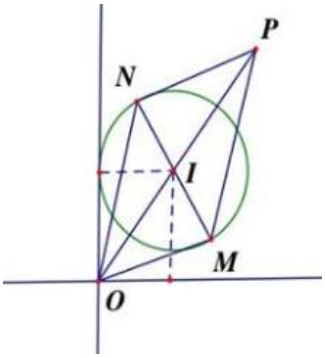
- Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=4OM_0=20-4\sqrt{22}$.

Câu 8: Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz+\sqrt{2}-i|=1$ và $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



- Ta có $\left|iz+\sqrt{2}-i\right|=1\Leftrightarrow\left|i\right|\left|z-i\sqrt{2}-1\right|=1\Leftrightarrow\left|z-1-i\sqrt{2}\right|=1.$

- Điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I\left(1;\sqrt{2}\right)$, $R=1$.

- Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 nên $MN=2$ là đường kính.

- Dựng hình bình hành $OMPN$ ta có $z_1+z_2=OP=2\sqrt{3}$.

- Ta có $\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right)^2\le 2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)=\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_1+z_2\right|^2=16\Rightarrow\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\le 4.$

- Dấu bằng xảy ra khi $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|\Leftrightarrow MN\perp OI$ ($OMPN$ là hình thoi).

Câu 9: Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $\dfrac{z^2-z+4}{z^2+z+4}$ là số thực và $\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=4$.

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 6

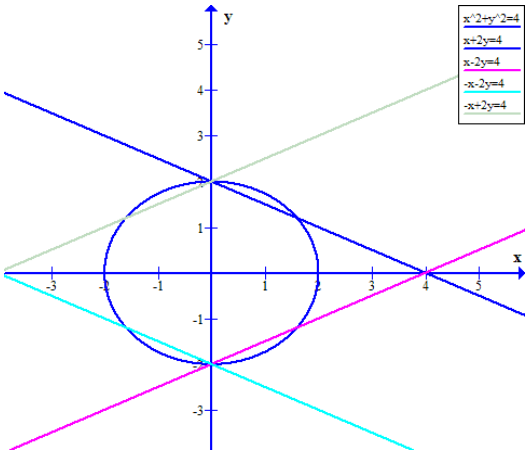
Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in R$.

Nếu $y=0\Rightarrow\left|x\right|=4\Rightarrow x=\pm 4$.

Nếu $y\neq 0$



Vì $\dfrac{z^2-z+4}{z^2+z+4}$ là số thực nên đặt $\dfrac{z^2-z+4}{z^2+z+4}=k\Leftrightarrow\left(k-1\right)z^2+\left(k+1\right)z+4\left(k-1\right)=0.$

Ta có $\left|z\right|^2=z_1.z_2=\dfrac{c}{a}=4\Leftrightarrow x^2+y^2=4.$

Vì $\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=4\Leftrightarrow\left|x\right|+2\left|y\right|=4$.

Biểu diễn đường tròn $(C):x^2+y^2=4$ và đường thẳng $\left|x\right|+2\left|y\right|=4$ trên cùng hệ trục Oxy.

Nhận thấy chúng cắt nhau tại 6 điểm. Vậy có tất cả 8 số phức thoả ycbt.

Câu 10: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(1+2i)\left|z\right|=\frac{z}{w}+2+3i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\left|w+2+3i\right|$.

A. $4\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(1+2i)\left|z\right|=\frac{z}{w}+2+3i\Leftrightarrow\left(\left|z\right|-2\right)+\left(2\left|z\right|-3\right)i=\frac{z}{w}$

Lấy modul hai vế: $\sqrt{\left(\left|z\right|-2\right)^2+\left(2\left|z\right|-3\right)^2}=\frac{\left|z\right|}{\left|w\right|}$

đặt $t=\left|z\right|$ điều kiện $t>0$. Khi đó phương trình trở thành: $\sqrt{(t-2)^2+(2t-3)^2}=\frac{t}{\left|w\right|}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left|w\right|}=\frac{\sqrt{(t-2)^2+(2t-3)^2}}{t}=\sqrt{\frac{5t^2-16t+13}{t^2}}=\sqrt{5-\frac{16}{t}+\frac{13}{t^2}}=\sqrt{\frac{1}{13}+13\left(\frac{8}{13}-\frac{1}{t}\right)^2}\geq\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow\left|w\right|\leq\sqrt{13}$.

Khi đó $T=\left|w+2+3i\right|\leq\left|w\right|+\left|2+3i\right|\leq\sqrt{13}+\sqrt{13}=2\sqrt{13}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\left|w\right|=\sqrt{13}\\\left|z\right|=\frac{13}{8}\end{cases}$.

Bài tập tương tự và phát triển 2:

Nhận biết

Câu 1. Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=1-i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** 1. **D.** i.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1+z_2=\ 3+2i\ +\ 1-i\ =4+i$.

Suy ra phần thực của z_1+z_2 bằng 4.

Câu 2. Cho hai số phức $z_1=3+i$ và $z_2=1-4i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. $-11i$. **B.** -11. **C.** 7. **D.** i.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z_1z_2=\ 3+i\ \ 1-4i\ =7-11i$.

Suy ra phần ảo của z_1z_2 bằng -11.

Câu 3. Cho hai số phức $z_1=3+i$ và $z_2=1-4i$. Phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$ bằng

A. $\frac{1}{17}$. **B.** $\frac{13}{17}i$. **C.** $-\frac{1}{17}$. **D.** $\frac{13}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+i}{1-4i}=-\frac{1}{17}+\frac{13}{17}i$.

Suy ra phần ảo của $\frac{z_1}{z_2}$ bằng $\frac{13}{17}$.

Câu 4. Cho hai số phức $z_1=5+2i$ và $z_2=3+4i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. 2. **B.** $2i$. **C.** -2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1-z_2=\ 5+2i\ -\ 3+4i\ =2-2i$.

Suy ra phần thực của z_1-z_2 bằng 2.

Câu 5. Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=1-i$. Phần thực của số phức $z_1+\overline{z}_2$ bằng

A. 1. **B.** $4i$. **C.** 4. **D.** i.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+\overline{z}_2=\ 3+2i\ +\ 1+i\ =4+3i$.

Suy ra phần thực của $z_1+\overline{z}_2$ bằng 4.

Câu 6. Cho hai số phức $z_1=1+5i$ và $z_2=3-i$. Phần thực của số phức $z_1-\overline{z}_2$ bằng

A. -2. **B.** $4i$. **C.** 2. **D.** i.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1+\overline{z}_2=\ 1+5i\ -\ 3+i\ =-2+4i$.

Suy ra phần thực của $z_1-\overline{z}_2$ bằng -2.

Câu 7. Cho hai số phức $z_1=-3+5i$ và $z_2=2-4i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}_1+z_2$ bằng

A. -1. **B.** -9. **C.** 9. **D.** $-9i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overline{z}_1+z_2=\ -3-5i\ +\ 2-4i\ =-1-9i$.

Suy ra phần ảo của $\overline{z}_1+z_2$ bằng -9.

Câu 8. Cho hai số phức $z_1=5-2i$ và $z_2=-2+3i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}_1+z_2$ bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $5i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z}_1+z_2=\ 5+2i\ +\ -2+3i\ =3+5i$.

Suy ra phần ảo của $\overline{z}_1+z_2$ bằng 5.

Câu 9. Cho hai số phức $z_1=5-2i$ và $z_2=-2+3i$.Tổng phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}_1+z_2$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $5i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overline{z}_1+z_2=\ 5+2i\ +\ -2+3i\ =3+5i$.

Suy ra tổng phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}_1+z_2$ bằng 8.

Câu 10. Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=5+7i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}_1-\overline{z}_2$ bằng

A. $-2+5i$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\bar{z}_1-\bar{z}_2=\ 3-2i\ -\ 5-7i\ =-2+5i$.

Suy ra tổng phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}_1-\bar{z}_2$ bằng 3.

Thông hiểu

Câu 1. Cho các số phức $z=1+2i,\ w=2+i.$ Số phức $u=z.\bar{w}$ có

A. Phần thực là 4 và phần ảo là 3.
B. Phần thực là 0 và phần ảo là 3.
C. Phần thực là 0 và phần ảo là $3i$.
D. Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u=(1+2i)(2-i)=4+3i$. Vậy số phức u có phần thực là 4 và phần ảo là 3.

Câu 2. Cho hai số phức $z_1=1+2i;z_2=2-3i$. Xác định phần ảo của số phức z_1-2z_2

A. 3 .
B. -3.
C. 5.
D. -8.

Lời giải

Chọn B

$z_1-2z_2=1+2i-2(2-3i)=-3+5i$

Do đó phần ảo là 5, chon C

Câu 3. Cho hai số phức $z_1=3-4i;z_2=4-i.$ Số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ có phần thực bằng

A. $-\dfrac{13}{17}$
B. $\dfrac{16}{17}$
C. $-\dfrac{4}{5}$i
D. $\dfrac{9}{25}$

Lời giải

Chọn B

$z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3-4i}{4-i}=\dfrac{(3-4i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\dfrac{16}{17}-\dfrac{13}{17}i$

Phần thực là $\dfrac{16}{17}$.

Câu 4. Cho hai số phức $z_1=-1+3i,\ z_2=-3-2i$. Môđun của của số phức z_1-z_2

A. 7
B. 29
C. $\sqrt{29}$
D. $\sqrt{7}$

Lời giải

Chọn B

$z_1 - z_2 = 1 + 3i - (-3 - 2i) = 2 + 5i \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Câu 5. Cho $z_1 = 3 + i, z_2 = 2 - i$ Tính $|z_1 + z_1 z_2|$

A. 5 **B.** 20 **C.** $\sqrt{10}$ **D.** 10

Lời giải

Chọn B

$z_1 + z_1 z_2 = 3 + i + (3 + i)(2 - i) = 10 = 10 + 0i \Rightarrow |z_1 + z_1 z_2| = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$

Câu 6. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. 2. **B.** $-i$. **C.** -1. **D.** i.

Lời giải

Chọn C

Theo Vi-et ta có: $z_1 + z_2 = -1$.

Suy ra phần thực của $z_1 + z_2$ bằng -1.

Câu 7. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng

A. 2. **B.** $-i$. **C.** 0. **D.** i.

Lời giải

Chọn C

Theo Vi-et ta có: $z_1 z_2 = 2$.

Suy ra phần ảo của $z_1 z_2$ bằng 0.

Câu 8. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Biểu thức $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $6i$. **C.** -6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Theo Vi-et ta có: $z_1 + z_2 = -2; z_1 z_2 = 5$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = -6$.

Câu 9. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$. Biểu thức $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $-\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo Vi-et ta có: $z_1+z_2=-2; z_1z_2=5$.

Suy ra $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1.z_2}=-\frac{2}{5}$.

Câu 10. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. $10i$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Giải phương trình ta có: $z_1=-1+2i; z_2=-1-2i$.

Suy ra $|z_1|^2=|z_2|^2=5$. Vậy $|z_1|^2+|z_2|^2$=10.

Vận dụng

Câu 1. Cho số phức $z=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\bar{z}$ là

A. -2. **B.** $-5i$. **C.** -5. **D.** i.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w=(1+i)(2-3i)-(2-i)\overline{(2-3i)}=-2-5i$.

Vậy phần ảo của số phức w là -5.

Câu 2. Cho số phức thỏa mãn $(z-5i+2)(i+2)=10$. Phần thực của số phức $\bar{z}$ là

A. 2. **B.** $-3i$. **C.** -3. **D.** $3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$(z-5i+2)(i+2)=10\Leftrightarrow z-5i+2=\frac{10}{i+2}\Leftrightarrow z=4-2i+5i-2\Leftrightarrow z=2+3i\Rightarrow\bar{z}=2-3i$$

Vậy số phức $\bar{z}$ có phần thực bằng 2.

Câu 3. Phần thực của số phức $z=\frac{(1+3i)^2+3+4i}{1+2i}$ là

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$z=\frac{(1+3i)^2+3+4i}{1+2i}=\frac{(-8+6i)+3+4i}{1+2i}=\frac{-5+10i}{1+2i}=\frac{(-5+10i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{15+20i}{5}=3+4i.$$

Vậy số phức $z=\frac{(1+3i)^2+3+4i}{1+2i}$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4.

Câu 4. Phần ảo của số phức z thỏa mãn $z+2\overline{z}=12-2i$ là

A. 4. **B.** $4i$. **C.** $2i$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z+2\overline{z}=12-2i\Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=12-2i\Leftrightarrow 3a-bi=12-2i\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$.

Vậy phần ảo là 2.

Câu 5. Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Phần ảo của z là

A. -2. **B.** 5. **C.** $2i$. **D.** $5i$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$, ta có:

$(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2\Leftrightarrow(2-3i)(a+bi)+(4+i)(a-bi)=8-6i\Leftrightarrow 3a+2b-(a+b)i=4-3i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b=4\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5\end{cases}\Rightarrow z=-2+5i.$

Vậy phần ảo là 5.

Câu 6. Cho số phức z có $|z|=m;\ (m>0)$. Với $z\neq m;$ tìm phần thực của số phức $\frac{1}{m-z}$.

A. m. **B.** $\frac{1}{m}$. **C.** $\frac{1}{4m}$. **D.** $\frac{1}{2m}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\mathrm{Re}(z)$ là phần thực của số phức z.

Ta xét: $\frac{1}{m-z}+\overline{\left(\frac{1}{m-z}\right)}=\frac{1}{m-z}+\frac{1}{m-\overline{z}}=\frac{m-\overline{z}+m-z}{(m-z)(m-\overline{z})}=\frac{2m-z-\overline{z}}{m^2+z.\overline{z}-mz-m\overline{z}}$

$=\frac{2m-z-\overline{z}}{2m^2-mz-m\overline{z}}=\frac{2m-z-\overline{z}}{m(2m-z-\overline{z})}=\frac{1}{m}\Rightarrow\mathrm{Re}\left(\frac{1}{m-z}\right)=\frac{1}{2m}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)(a+bi)=4+i-(2-i)^2$.

$\Leftrightarrow 3a-2b+(2a+3b)i=4+i-3+4i \Leftrightarrow 3a-2b+(2a+3b)i=1+5i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}3a-2b=1\\2a+3b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases} \Rightarrow a-b=0$. Vậy hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là 0.

Câu 8. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$.

Tính môđun của số phức z_1.

A. $|z_1|=\sqrt{5}$. **B.** $|z_1|=3$. **C.** $|z_1|=2$. **D.** $|z_1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z_1=a+bi\Rightarrow z_2=a-bi;\ (a\in\mathbb{R};\ b\in\mathbb{R})$. Không mất tính tổng quát ta gọi $b\geq 0$.

Do $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}\Rightarrow|2bi|=2\sqrt{3}\Rightarrow b=\sqrt{3}$.

Do z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau nên $z_1.z_2\in\mathbb{R}$, mà $\frac{z_1}{z_2^2}=\frac{z_1^3}{(z_1z_2)^2}\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1^3\in\mathbb{R}$.

Ta có: $z_1^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3a^2b-b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\3a^2=b^2\end{array}\right.\Rightarrow a^2=1$.

Vậy $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

Câu 9. Gọi M là điểm biểu diễn cho số phức $z_1=a+(a^2-2a+2)i$ (với a là số thực thay đổi) và N là điểm biểu diễn cho số phức z_2 biết $|z_2-2-i|=|z_2-6+i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $N(x;y)$ ta có:

$|z_2-2-i|=|z_2-6+i| \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=(x-6)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow 2x-y-8=0$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng $(\Delta): 2x-y-8=0$.

$$MN \geq d(M,\Delta)=\frac{\left|2a-\left(a^2-2a+2\right)-8\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|a^2-4a+10\right|}{\sqrt{5}}=\frac{(a-2)^2+6}{\sqrt{5}} \geq \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=2$.

Vậy $\min MN=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm $A(4;3)$ và M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn hệ thức $|(2+i)|z|z-(1-2i)z|=|1+3i|$. Giá trị nhỏ nhất của đoạn AM bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|(2+i)|z|z-(1-2i)z|=|1+3i| \Leftrightarrow |z|.|(2+i)|z|-(1-2i)|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow |z|.|(2|z|-1)+i(|z|+2)|=\sqrt{10} \Leftrightarrow |z|^2.\left[(2|z|-1)^2+(|z|+2)^2\right]=10$

$\Leftrightarrow 5.|z|^4+5|z|^2-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\|z|=-2\ (L)\end{array}\right. \Leftrightarrow |z|=1.$

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R=1$.

Vậy $AM_{\min}=|OA-R|=|5-1|=4$.

Vận dụng cao

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $2z-\bar{z}=m+3(m-1)i$ với m là tham số thực. Để tích của phần thực và phần ảo của z là nhỏ nhất thì m bằng

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ suy ra $2z-\bar{z}=2(a+bi)-(a-bi)=a+3bi$.

$2z-\bar{z}=m+3(m-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} a=m \\ b=m-1 \end{cases} \Rightarrow ab=m(m-1)=m^2-m=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$

Vậy khi $m=\frac{1}{2}$ thì tích của phần thực và phần ảo của z là nhỏ nhất.

Câu 2. Cho số phức $z\neq 1$ thỏa mãn $z^3=1$. Biểu thức $\left(1-z+z^{2018}\right)\left(1+z-z^{2018}\right)$ bằng

A. 4. **B.** $-3i$. **C.** -3. **D.** $3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z^3=1\Rightarrow z^{2018}=\left(z^3\right)^{672}.z^2=z^2$.

$z^3=1\Leftrightarrow (z-1)\left(z^2+z+1\right)=0$, mà $z\neq 1$ nên $z^2+z+1=0$.

Do đó, $\left(1-z+z^{2018}\right)\left(1+z-z^{2018}\right)=\left(1-z+z^2\right)\left(1+z-z^2\right)$

$=\left(1+z+z^2-2z\right)\left(1+z+z^2-2z^2\right)$

$=-2z.\left(-2z^2\right)=4z^3=4.$

Câu 3. Cho số phức z thỏa mãn $iz+m-i=0$ (với m là tham số thực). Để phần thực , phần ảo của số phức z là độ dài các cạnh của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là 2 thì m bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $iz+m-i=0\Leftrightarrow z=\frac{-m+i}{i}\Leftrightarrow z=mi+1\Leftrightarrow z=1+mi$.

Do đó số phức z có phần thực là $x=1$ và phần ảo là $y=m$.

Để phần thực, phần ảo của số phức z là độ dài các cạnh của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là 2 thì $\begin{cases} m>0 \\ m^2+1^2=2^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m=\pm\sqrt{3} \end{cases}\Leftrightarrow m=\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn $4z-7=i(1+3z)$. Hỏi có bao nghiêu số nguyên dương m không vượt quá 2020 để phần ảo của số phức z^m luôn khác 0.

A. 506. **B.** 405. **C.** 504. **D.** 505.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4z-7=i(1+3z)\Leftrightarrow (4-3i)z=7+i\Leftrightarrow z=\frac{7+i}{4-3i}\Leftrightarrow z=\frac{7+i}{4-3i}\Leftrightarrow z=1+i\Rightarrow z^m=(1+i)^m$

Nhận thấy : $(1+i)^2=2i;(1+i)^3=-2+2i;(1+i)^4=(1+i)^3(1+i)=(-2+2i)(1+i)=-4$

Do đó: $(1+i)^{4k}=(-4)^k;$

$(1+i)^{4k+1}=(-4)^k(1+i);$ trong đó $k\in\mathbb{N}^*$.

$(1+i)^{4k+2}=(-4)^k(1+i)^2=(-4)^k.2i;$

$(1+i)^{4k+3}=(-4)^k(1+i)^3=(-4)^k(-2+2i)$

Suy ra phần ảo của số phức z^m bằng $0\Leftrightarrow m$ chia hết cho 4.

Mà m là số nguyên dương không vượt quá 2020 nên $m\in\{4;8;12;13;16;....;2016;2020\}\Rightarrow$ có 505 số

Câu 5. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z_1=a+bi$, (a, $b\in\mathbb{R}$); $z_2=c+di$, (c, $d\in\mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z_1|=2\\|z_2|=2\\|z_1+2z_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\c^2+d^2=4\\(a+2c)^2+(b+2d)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4 & (1)\\c^2+d^2=4 & (2)\\a^2+b^2+4(c^2+d^2)+4(ac+bd)=16 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=-1$ (4).

Ta có $|2z_1-z_2|=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}=\sqrt{4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)}$ (5).

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$.

Câu 6. Cho hai số phức z và w khác 0 thoả mãn $|z+3w|=5|w|$ và $|z-2wi|=|z-2w-2wi|$. Phần thực của số phức $\frac{z}{w}$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\frac{z}{w}=a+bi$, với $a,b\in R$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z+3w}{w}\right|=5\\ \left|\dfrac{z-2wi}{w}\right|=\left|\dfrac{z-2w-2wi}{w}\right|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z}{w}+3\right|=5\\ \left|\dfrac{z}{w}-2i\right|=\left|\dfrac{z}{w}-2-2i\right|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)^2+b^2=25\\ a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)^2+b^2=25\\ 4a-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\pm3\end{cases}.$$

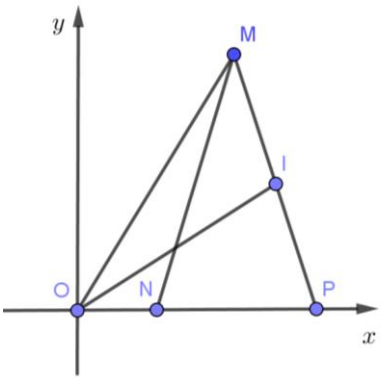
Vậy phần thực của số phức $\dfrac{z}{w}$ bằng 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=1\\ 2a+3b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a-b=0.$

Câu 7. Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1|=6$, $|z_2|=2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $MON=60°$. Tính $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|$.

A. $T=18$ **B.** $T=24\sqrt{3}$ **C.** $T=36\sqrt{2}$ **D.** $T=36\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1^2-\left(3iz_2\right)^2\right|=\left|z_1-3iz_2\right|.\left|z_1+3iz_2\right|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$.

Khi đó ta có $\left|z_1-3iz_2\right|.\left|z_1+3iz_2\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\right|.\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{PM}\right|.\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2PM.OI$.

Do $MON=60°$ và $OM=OP=6$ nên ΔMOP đều suy ra $PM=6$ và $OI=6.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

Vậy $T=2PM.OI=2.6.3\sqrt{3}=36\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{i-a}{1-a(a-2i)}\Leftrightarrow\frac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a-i}{a^2-2ai+i^2}\Leftrightarrow\frac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a-i}{(a-i)^2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a-i}\Leftrightarrow z=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}i\Rightarrow M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}};\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn $(C):x^2+y^2=1$ bán kính $R=1$. Vì $I(-3;4)$ nằm ngoài (C) nên để khoảng cách d giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ nhỏ nhất thì $d_{\min}=IO-R=5-1=4$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1+i|$. Giá trị của tổng $S=M+m$ là

A. $S=\frac{2\sqrt{29}+3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. **C.** $S=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. **D.** $S=\frac{\sqrt{73}+5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Dùng bất đẳng thức mincopxki, như sau:

Giả sử $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, khi đó ta có: $\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}=6\sqrt{2}$ (1).

Từ đó ta có: $\sqrt{(a+2)^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-7)^2}\geq\sqrt{(a-1+4-a)^2+(b-1+7-b)^2}=6\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(a+2)(7-b)=(4-a)(b-1)\\a\in[-2;4];b\in[1;7]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+3\\a\in[-2;4]\end{cases}$.

Biểu thức $P=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{2a^2+6a+17},a\in D=[-2;4]$.

Khảo sát hàm số từ đó tìm được $m=\frac{5\sqrt{2}}{2},M=\sqrt{73}$.

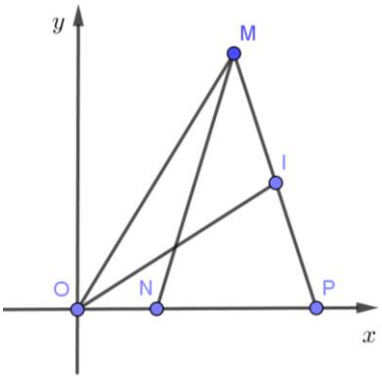
Vậy $M+m=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\sqrt{73}=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 10. Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1|=6$, $|z_2|=2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2. Biết $MON=60°$. Tính $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|$.

A. $T=18$ **B.** $T=24\sqrt{3}$ **C.** $T=36\sqrt{2}$ **D.** $T=36\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1^2-\left(3iz_2\right)^2\right|=\left|z_1-3iz_2\right|.\left|z_1+3iz_2\right|$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$.

Khi đó ta có $\left|z_1-3iz_2\right|.\left|z_1+3iz_2\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\right|.\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{PM}\right|.\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2PM.OI$.

Do $MON=60°$ và $OM=OP=6$ nên ΔMOP đều suy ra $PM=6$ và $OI=6.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

Vậy $T=2PM.OI=2.6.3\sqrt{3}=36\sqrt{3}$.

DẠNG TOÁN 36: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA SỐ PHỨC

PHẦN I:

I. LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

+ Một số phức là một biểu thức dạng $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$,
i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z=a+bi$
+ Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}=\{a+bi/a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\}$.
+ Chú ý: - Khi phần ảo ..là số thực.
- Khi phần thực $a=0\Leftrightarrow z=bi\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.
+ Hai số phức bằng nhau: $a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
+ Hai số phức $z_1=a+bi;\ z_2=-a-bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là $a-bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$. Rõ ràng $\overline{\overline{z}}=z$

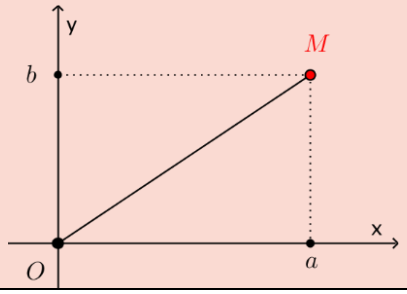
3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a;b)$.

4. MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

Môđun của số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Như vậy, môđun của số phức z là $|z|$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ đến gốc tọa độ O của mặt phẳng phức $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z.\overline{z}}$.



5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ với $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$
+ Tổng hai số phức: $z+z'=a+a'+(b+b')i$
+ Hiệu hai số phức: $z-z'=a-a'+(b-b')i$.
+ Số đối của số phức $z=a+bi$ là $-z=-a-bi$.
+ Nếu $\vec{u},\overrightarrow{u'}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z,z' thì
$\vec{u}+\overrightarrow{u'}$ biểu diễn số phức $z+z'$.

$\vec{u}-\vec{u'}$ biểu diễn số phức $z-z'$.

+ Nhân hai số phức: $z.z'=(a+bi)(a'+b'i)=(a.a'-b.b')+(a.b'+a'.b)i$.

+ Số phức nghịch đảo: $z^{-1}=\dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$

Nếu $z\neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z\neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\dfrac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

+ Chú ý: $i^{4k}=1;\ i^{4k+1}=i;\ i^{4k+2}=-1;\ i^{4k+3}=-i\ \ (k\in\mathbb{Z})$

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

a) Phương pháp giải:

Cho phương trình bậc 2: $Az^2+Bz+C=0$ (1) trong đó A,B,C là những số thực, $A\neq 0$

Xét biệt thức $\boxed{\Delta=B^2-4AC}$

+ Nếu $\Delta>0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm thực phân biệt $\boxed{z_1=\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A};\quad z_2=\dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}}$

+ Nếu $\Delta=0$ thì phương trình (1) có nghiệm thực kép $\boxed{z_1=z_2=\dfrac{-B}{2A}}$

+ Nếu $\Delta<0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phức phân biệt $\boxed{z_1=\dfrac{-B+i\sqrt{|\Delta|}}{2A};\quad z_2=\dfrac{-B-i\sqrt{|\Delta|}}{2A}}$

CHÚ Ý:

+ Mọi phương trình bậc n: $A_0z^n+A_1z^{n-1}+...+A_{n-1}z+A_n=0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

+ Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực:

Cho phương trình bậc 2 : $Az^2+Bz+C=0\ \ (A,B,C\in\mathbb{R};A\neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức).

Ta có: $\begin{cases}S=z_1+z_2=\dfrac{-B}{A}\\ P=z_1z_2=\dfrac{C}{A}\end{cases}$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tìm nghiệm phức của phương trình bậc hai

☞ Câu hỏi về mối liên hệ giữa 2 nghiệm phương trình

☞ Tìm nghiệm phức của phương trình bậc cao

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Phân tích hướng giải

1. Dạng toán: Đây là dạng tính toán các biểu thức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai trên tập số phức

2. Kiến thức cần nhớ:

+ **Mô đun của số phức:**

Mô đun của số phức $z=a+b.i\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

3. Hướng giải

+ Bấm máy tính giải phương trình bậc hai tìm nghiệm

+ Dựa vào yêu cầu của đề bài tính toán các biểu thức liên quan đến nghiệm tìm được.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1-2i\\z=1+2i\end{array}\right.$.

Theo đề z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0=1-2i$.

+ Khi đó: $|z_0+i|=|1-2i+i|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Phương trình bậc hai nào dưới đây nhận hai số phức $2-3i$ và $2+3i$ làm nghiệm?

A. $z^2+4z+13=0$ **B.** $z^2+4z+3=0$ **C.** $z^2-4z+13=0$ **D.** $z^2-4z+3=0$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}S=4\\P=13\end{cases}$ nên phương trình cần tìm $z^2-Sz+P=0\Leftrightarrow z^2-4z+13=0$.

Câu 2. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$ trên tập số phức $\mathbb{C}$.

A. $1+2i,1-2i$. **B.** $1+i,1-i$ **C.** $-1+2i,-1-2i$ **D.** $-1+i,-1-i$

Lời giải:

Chọn C

$\Delta'=1^2-5=-4=4i^2$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phức: $\left[\begin{array}{l}z_1=-1-2i\\z_2=-1+2i\end{array}\right.$.

Câu 3. Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-z+1=0$ là:

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **B.** $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **C.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **D.** $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\Delta=1^2-4=-3=3i^2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy nghiệm phức có phần ảo dương là $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 4. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính iz_0.

A. $iz_0=3-i$. **B.** $iz_0=-3i+1$. **C.** $iz_0=-3-i$. **D.** $iz_0=3i-1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2+2z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1+3i\\z=-1-3i\end{array}\right.\Rightarrow z_0=-1+3i\Rightarrow iz_0=-3-i$.

Câu 5. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng.

A. 10. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $6-8i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2-i=z_1\\z=2+i=z_2\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|^2+|z_2|^2=5+5=10.$$

Câu 6. Gọi z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$. Giá trị của biểu thức $\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có : $z^2-2z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1+\sqrt{2}i\\z_2=1-\sqrt{2}i\end{array}\right.\Rightarrow\left|z_1^2\right|+\left|z_2^2\right|=|z_1|^2+|z_2|^2=3+3=6.$

Câu 7. Gọi z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2+2z+5=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $|z_1|+|z_2|=5$. **B.** $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$. **C.** $|z_1|+|z_2|=10$. **D.** $|z_1|+|z_2|=\sqrt{5}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có : $z^2+2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-1+2i\\z_2=-1-2i\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|+|z_2|=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$

Câu 8. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-10z+29=0$. Tìm số phức liên hợp của số phức z_0.

A. $\overline{z_0}=5-2i$. **B.** $\overline{z_0}=2+5i$. **C.** $\overline{z_0}=5+2i$. **D.** $\overline{z_0}=2-5i$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có : $z^2-10z+29=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=5+2i\\z=5-2i\end{array}\right.\Rightarrow z_0=5-2i\Rightarrow\overline{z_0}=5+2i.$

Câu 9. Cho phương trình $z^2-2z+2=0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình đã cho không có nghiệm nào là số ảo.

B. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức.

C. Phương trình đã cho không có nghiệm phức.

D. Phương trình đã cho không có nghiệm thực.

Lời giải:

Chọn C

$z^2-2z+2=0\Leftrightarrow(z-1)^2=i^2\Leftrightarrow z=1\pm i$.

Câu 10. Trên tập hợp số phức $\mathbb{C}$, cho phương trình $az^2+bz+c=0\ (a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0)$.

Chọn khẳng định **sai:**

A. Phương trình luôn có nghiệm.

B. Tổng hai nghiệm bằng $-\frac{b}{a}$.

C. Tích hai nghiệm bằng $\frac{c}{a}$.

D. $\Delta=b^2-4ac<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Lời giải:

Chọn D

- Trên tập hợp số phức $\mathbb{C}$, phương trình bậc hai luôn có nghiệm $\Rightarrow$ A đúng.
- Tổng hai nghiệm $z_1+z_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow$ B đúng.
- Tích hai nghiệm $z_1.z_2=\frac{c}{a}\Rightarrow$ C đúng.
- $\Delta=b^2-4ac<0\Rightarrow$ Phương trình bậc hai có nghiệm phức $\Rightarrow$ D sai.

Mức độ 2

Câu 1. Gọi z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2+2\sqrt{2}z+8=0$.Giá trị của $A=z_1^2z_2+z_2^2z_1$ bằng

A. $-16\sqrt{2}$. **B.** $16\sqrt{2}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $-8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2+2\sqrt{2}z+8=0$ nên $\begin{cases}z_1+z_2=2\sqrt{2}\\z_1z_2=8\end{cases}$.

Do đó $A=z_1^2z_2+z_2^2z_1=z_1z_2(z_1+z_2)=8.2\sqrt{2}=16\sqrt{2}..$

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $P=(z_1-z_2)\overline{z_2}-4z_1$. bằng:

A. -10. **B.** 10. **C.** -5. **D.** -15.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=2+i\\z_2=2-i\end{array}\right.$.

Vậy $P=(z_1-z_2)\overline{z_2}-4z_1.=(2+i-2(2-i))(2+i)-4(2+i)=-15.$.

Câu 3. Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+4=0$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{z_1^2}{z_2}+\dfrac{z_2^2}{z_1}$.

A. 4 **B.** -4 **C.** 8 **D.** $-\dfrac{11}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2-2z+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1+\sqrt{3}i\\z_2=1-\sqrt{3}i\end{array}\right.$.

Suy ra: $P=\dfrac{z_1^2}{z_2}+\dfrac{z_2^2}{z_1}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{1-\sqrt{3}i}+\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}{1+\sqrt{3}i}=-4..$

Câu 4. Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của biểu thức $P=z_1^4+z_2^4$.

A. 14. **B.** -7. **C.** -14. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1+2i\\z_2=1-2i\end{array}\right.$.

Nên $P=z_1^4+z_2^4=(1+2i)^4+(1-2i)^4=-14.\ z^2-2z+5=0$

Câu 5. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn số phức $\dfrac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức?

A. $P(3;2)$. **B.** $N(-1;2)$. **C.** $Q(3;-2)$. **D.** $P(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$z^2-2z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1-2i\\z_2=1+2i\end{array}\right.$.

Suy ra $\dfrac{7-4i}{z_1}=\dfrac{7-4i}{1-2i}=3+2i$.

Điểm biểu diễn là $P(3;2)$.

Câu 6. Gọi z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $iz^3-2z^2+(1-i)z+i=0$. Biết z_1 là số thuần ảo. Đặt $P=|z_2-z_3|$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $4<P<5.$ **B.** $2<P<3.$ **C.** $3<P<4.$ **D.** $1<P<2.$

Lời giải

Chọn B

$iz^3-2z^2+(1-i)z+i=0\Leftrightarrow(z+i)(iz^2-z+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-i\\iz^2-z+1=0\,(1)\end{array}\right.$.

Vì z_1 là số thuần ảo nên z_2,z_3 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có: $(z_2-z_3)^2=(z_2+z_3)^2-4z_2z_3=1-4i\Rightarrow\left|(z_2-z_3)^2\right|=|1-4i|=\sqrt{17}\Rightarrow P=|z_2-z_3|=\sqrt[4]{17}$.

Câu 7. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4+z^2-6=0$. Tính $S=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$..

A. $S=2\sqrt{3}$ **B.** $S=2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ **C.** $S=2\sqrt{2}$ **D.** $S=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^4+z^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=2\\z^2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\pm\sqrt{2}\\z=\pm i\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình, ta có:

$S=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Câu 8. Cho a, b là các số thực thỏa phương trình $z^2+az+b=0$ có nghiệm $z=3-2i$, tính $S=a+b$.

A. $S=19$. **B.** $S=-7$. **C.** $S=7$. **D.** $S=-19$.

Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $z^2+az+b=0$ có nghiệm $z=3-2i$ nên $(3-2i)^2+a(3-2i)+b=0$

$\Leftrightarrow5-12i+3a-2ai+b=0\Leftrightarrow(3a+b+5)-(2a+12)i=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3a+b=-5\\2a=-12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-6\\b=13\end{array}\right.$.

Vậy $S=a+b=-6+13=7$.

Câu 9. Cho z là nghiệm phức của phương trình $x^2+x+1=0$. Tính $P=z^4+2z^3-z$.

A. $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2i$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Vì z là nghiệm phức của phương trình $x^2+x+1=0$ nên $z^2+z+1=0$.

Do đó: $P=z^4+2z^3-z=z^2\left(z^2+z+1\right)+z^3-z^2-z=z^3-z^2-z$

$=z\left(z^2+z+1\right)-2z^2-2z=-2\left(z^2+z+1\right)+2=2$.

Câu 10. Cho z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Số phức liên hợp của số phức z_1+2z_2 là?

A. $-3+2i$. **B.** $3-2i$. **C.** $2+i$. **D.** $2-i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z^2+2z+5=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z_1=-1+2i\\z_2=-1-2i\end{array}\right.$ (Vì z_1 có phần ảo dương)

Suy ra: $z_1+2z_2=-1+2\text{i}+2(-1-2\text{i})=-3-2\text{i}$.

Vậy: Số phức liên hợp của số phức z_1+2z_2 là $-3+2\text{i}$.

Mức độ 3

Câu 1. Gọi A, B, C là các điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3-6z^2+12z-7=0$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S=3\sqrt{3}$. **B.** $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng MTCT ta có phương trình $z^3-6z^2+12z-7=0$ có 3 nghiệm $z_1=1$; $z_2=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Suy ra: $A(1;0)$, $B\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$; $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$; $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $\sqrt{3}$. Vậy $S_{ABC}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1=w+3i$; $z_2=w+9i$; $z_3=2w-4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P=|a+b+c|$.

A. $P=36$. **B.** $P=208$. **C.** $P=136$. **D.** $P=84$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $w=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $z_1+z_2+z_3=-a\Rightarrow 4w+4+12i=-a\Leftrightarrow (4x+4+a)+(12+4y)i=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+4+a=0\\12+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+4=-a\\y=-3\end{cases}$.

Từ đó $w=x-3i\Rightarrow z_1=x$; $z_2=x+6i$; $z_3=2x-4-6i$.

Vì phương trình bậc ba $z^3+az^2+bz+c=0$ có một nghiệm thực nên hai nghiệm phức còn lại phải là hai số phức liên hợp, suy ra $x=2x-4\Leftrightarrow x=4$.

Như vậy $z_1=4$; $z_2=4+6i$; $z_3=4-6i$.

Do đó $\begin{cases}z_1+z_2+z_3=-a\\z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-\\z_1z_2z_3=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12=-a\\84=b\\208=-c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-12\\b=84\\c=-208\end{cases}$.

Vậy $P=|a+b+c|=|-12+84+(-208)|=136$.

Câu 3. Cho phương trình $z^4-2z^3+6z^2-8z+9=0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1, z_2, z_3, z_4.

Tính giá trị của biểu thức $T=\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)$.

A. $T=2i$. **B.** $T=1$. **C.** $T=-2i$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(z)=z^4-2z^3+6z^2-8z+9 \Rightarrow f(z)=0$.

Ta có $z^2+4=z^2-4i^2=(z+2i)(z-2i)$

$\Rightarrow T=\left[(z_1+2i)(z_2+2i)(z_3+2i)(z_4+2i)\right].\left[(z_1-2i)(z_2-2i)(z_3-2i)(z_4-2i)\right]$

$=\left[f(-2i).f(2i)\right]^4=1$.

Câu 4. Biết z_1, $z_2=5-4i$ và z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3+bz^2+cz+d=0$ $(b,c,d\in\mathbb{R})$, trong đó z_3 là nghiệm có phần ảo dương. Phần ảo của số phức $w=z_1+3z_2+2z_3$ bằng

A. -12. **B.** -8. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $z^3+bz^2+cz+d=0$ với b, c, $d\in\mathbb{R}$ có ba nghiệm z_1, $z_2=5-4i$ và z_3, trong đó z_3 là nghiệm có phần ảo dương nên $z_1\in\mathbb{R}$ và $z_3=\overline{z}_2=5+4i$.

Suy ra: $w=z_1+3z_2+2z_3=z_1+25-4i$.

Do đó phần ảo của số phức $w=z_1+3z_2+2z_3$ bằng -4.

Câu 5. Biết phương trình $z^4-3z^3+4z^2-3z+1=0$ có 3 nghiệm phức z_1, z_2, z_3. Tính $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

A. $T=3$. **B.** $T=4$. **C.** $T=1$. **D.** $T=2$.

Lời giải

Chọn A.

$z^4-3z^3+4z^2-3z+1=0 \Leftrightarrow z^2-3z+4-\frac{3}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+4=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+2=0$ Đặt $t=z+\frac{1}{z}$

$pt \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Ta có: $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$z+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow z=1$

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|+|1|=3$.

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2+bz+c=0$, $\left(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0,b^2-4ac<0\right)$. Đặt $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{c}{2a}$. **B.** $P=\dfrac{c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{4c}{a}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2+bz+c=0$ nên $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Do đó $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1-z_2=\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{a}$

Suy ra $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=\left(\dfrac{-b}{a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{a^2}=\dfrac{4c}{a}$.

Câu 7. Cho phương trình $\left(z^2-4z\right)^2-3\left(z^2-4z\right)-40=0$ gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình đã cho. Giá trị của biểu thức $P=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$ bằng:

A. $P=4$. **B.** $P=42$. **C.** $P=16$. **D.** $P=24$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=z^2-4z$ ta có $w^2-3w-40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}w=8\\w=-5\end{array}\right.$

Với $w=8\Rightarrow z^2-4z=8\Leftrightarrow z=2\pm2\sqrt{3}\Rightarrow|z_1|^2+|z_2|^2=\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=32$

Với $w=-5\Rightarrow z^2-4z=-5\Leftrightarrow(z-2)^2=i^2\Leftrightarrow z=2\pm i\Rightarrow|z_3|^2+|z_4|^2=5+5=10$.

Vậy $P=10+32=42$.

Câu 8. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-z+\dfrac{2019}{4}=0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z-z_1|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_2|$ là

A. $\sqrt{2018}-1$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2019}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2018}-1}{2}$. **D.** $\sqrt{2019}-1$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $z^2-z+\dfrac{2019}{4}=0$

Ta có: $\Delta=-2018<0\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l}z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2018}}{2}i\\z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2018}}{2}i\end{array}\right.$.

Khi đó: $z_1-z_2=i\sqrt{2018}$

$|z-z_2|=|(z-z_1)+(z_1-z_2)|\geq|z_1-z_2|-|z-z_1|\Leftrightarrow P\geq\sqrt{2018}-1$.

Vậy $P_{\min}=\sqrt{2018}-1$.

Câu 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0$; $z_1 + z_2 \neq 0$ và $\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2}$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_1 = x.z_2$ và $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |x|$

Từ giả thiết $\frac{1}{z_1+z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{1}{x.z_2+z_2} = \frac{1}{x.z_2} + \frac{2}{z_2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2(x+1)} = \frac{1}{z_2}\left(\frac{1}{x}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \Rightarrow |x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 10. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $(z_1 - 1)^{2020} + (z_2 - 1)^{2020}$ bằng

A. $-2^{1010}i$. **B.** $2^{1009}i$. **C.** -2^{1011}. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i = z_1 \\ z = 2 - i = z_2 \end{array}\right.$$

$$(z_1 - 1)^{2020} + (z_2 - 1)^{2020} = (1+i)^{2020} + (1-i)^{2020} = (1 + 2i + i^2)^{1010} + (1 - 2i + i^2)^{1010}$$

$$= (2i)^{1010} + (-2i)^{1010} = (2i)^{1010} + (2i)^{1010} = -2^{1011}.$$

Mức độ 4

Câu 1. Cho số phức $z = 1 + i$. Biết rằng tồn tại các số phức $z_1 = a + 5i, z_2 = b$ (trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b > 1$) thỏa mãn $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính $b - a$.

A. $b - a = 5\sqrt{3}$. **B.** $b - a = 2\sqrt{3}$. **C.** $b - a = 4\sqrt{3}$. **D.** $b - a = 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{3}|z - z_1| = \sqrt{3}|z - z_2| = |z_1 - z_2|$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + 4^2 = (b-1)^2 + 1 \\ (b-a)^2 + 25 = 3\left[(1-a)^2 + 16\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2 - (1-a)^2 = 15 \\ (b-1)^2 + 2(b-1)(1-a) + (1-a)^2 = 3(1-a)^2 + \frac{23}{15}\left[(b-1)^2 - (1-a)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2-(1-a)^2=15 \\ 8(b-1)^2-2(b-1)(1-a)+7(1-a)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2-(1-a)^2=15 \\ \left[\begin{array}{l} b-1=\frac{1}{4}(1-a) \\ b-1=\frac{7}{2}(1-a) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{7\sqrt{3}}{3}+1 \end{cases} \Rightarrow b-a=3\sqrt{3}.$$

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2020}+10iz^{2019}+10iz-11=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|z|\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ **B.** $|z|\in(1;2)$ **C.** $|z|\in[0;1)$ **D.** $|z|\in[2;3)$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$.

$11z^{2020}+10iz^{2019}+10iz-11=0$

$\Leftrightarrow z^{2019}=\frac{11-10iz}{11z+10i}\Rightarrow |z|^{2019}=\left|\frac{11-10iz}{11z+10i}\right|$

$\Leftrightarrow |z|^{2019}=\frac{\sqrt{100\left(x^2+y^2\right)+121+220y}}{\sqrt{121\left(x^2+y^2\right)+100+220y}}$

TH1: $|z|<1\Leftrightarrow x^2+y^2<1$

$\Rightarrow 100\left(x^2+y^2\right)+121+220y>121\left(x^2+y^2\right)+100+220y$

$\Rightarrow |z|>1(\text{sai})$

TH2: $|z|>1\Leftrightarrow x^2+y^2>1$

$\Rightarrow 100\left(x^2+y^2\right)+121+220y<121\left(x^2+y^2\right)+100+220y$

$\Rightarrow |z|<1(\text{sai})$

TH2: $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Thay vào thấy đúng.

Vậy $|z|=1$.

Câu 3. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2+bz+c=0$ với $b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $w+3$ và $2w-15i+9$ với w là một số phức. Tính $S=b^2-2c$

A. $S=-32$. **B.** $S=1608$. **C.** $S=1144$. **D.** $S=-64$.

Lời giải

Chọn A

Từ đề bài suy ra $\begin{cases} (w+3)^2+b(w+3)+c=0 \\ (2w-15i+9)^2+b(2w-15i+9)+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2w-15i+9)(w+3)=c \\ 2w-15i+9+w+3=-b \end{cases}$

Giả sử $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó $w+3=x+3+yi$, $2w-15i+9=2x+9+(2y-15)i$.

Theo đề ta có $\begin{cases} (2w-15i+9)(w+3)=c \\ 2w-15i+9+w+3=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+9+(2y-15)i)(x+3+yi)=c \\ (2x+9+(2y-15)i)+(x+3+yi)=-b \end{cases}$.

Vì $b,c\in\mathbb{R}$ nên $\begin{cases}(x+3)(2y-15)+y(2x+9)=0\\2y-15+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\y=5\end{cases}$.

Suy ra $w=-6+5i$, do đó $\begin{cases}(2w-15i+9)(w+3)=c\\2w-15i+9+w+3=-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=34\\b=-6\end{cases}$.

$S=b^2-2c=-32$

Câu 4. Xác định tất cả các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức z thỏa mãn $|z|=2$.

A. $m=-3$. **B.** $m=-3,\ m=9$.

C. $m=1,\ m=9$. **D.** $m=-3,\ m=1,\ m=9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\Delta'=m,\ P=1-m.$

Trường hợp 1: $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực: $z=1+\sqrt{m}$ hoặc $z=1-\sqrt{m}$.

+ Với $z=1+\sqrt{m}$. Suy ra: $1+\sqrt{m}=2\Leftrightarrow m=1$ (nhận).

+ Với $z=1-\sqrt{m}$. Suy ra: $\left|1-\sqrt{m}\right|=2\Leftrightarrow m=9$ (nhận).

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<0.$

Vì đây là phương trình hệ số thực có $\Delta'<0$ nên phương trình có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau. Do đó:

$|z|=2\Leftrightarrow z.\overline{z}=4\Leftrightarrow P=4\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$ (nhận).

Vậy $m\in\{-3;1;9\}$.

Câu 5. Số nghiệm phức của phương trình $\overline{z}+\dfrac{25}{z}=8-6i$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và a,b không đồng thời bằng 0.

Khi đó $\overline{z}=a-bi;\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

Ta có $\overline{z}+\dfrac{25}{z}=8-6i\Leftrightarrow a-bi+\dfrac{25(a-bi)}{a^2+b^2}=8-6i\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(a^2+b^2+25\right)=8\left(a^2+b^2\right)\ (1)\\b\left(a^2+b^2+25\right)=6\left(a^2+b^2\right)\ (2)\end{cases}$

Lấy (1) chia (2) theo vế ta được: $b=\dfrac{3}{4}a$, thế vào (1) suy ra $a=0$ hoặc $a=4$

Với $a=0\Rightarrow b=0$ (loại)

Với $a=4\Rightarrow b=3$ ta có số phức $z=4+3i.$

Câu 6. Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4+m)z^2+4m=0$. Tìm tất cả các giá trị của m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=\pm 3$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $z^4+(4+m)z^2+4m=0\Leftrightarrow\left(z^2+4\right)\left(z^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm 2i\\ z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.,m\le 0$

hoặc $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_{12}=\pm 2i\\ z_{3,4}=\pm i\sqrt{m}\end{array}\right.,m>0$

Khi đó $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{-m}\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$

Hoặc $\begin{cases}6=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=4+2\sqrt{m}\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$

Kết hợp lại $m=\pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Tìm các số thực a,b,c để phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm nghiệm và cũng nhận $z=2$ làm nghiệm.

A. $a=-4,b=6,c=-4$. **B.** $a=-4,b=5,c=-4$.

C. $a=-3,b=4,c=-2$. **D.** $a=-1,b=0,c=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=1+i$ thì $(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$

$z=2$ thì $8+4a+2b+c=0$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}b+c-2=0 & (1)\\ 2a+b+2=0 & (2)\\ 4a+2b+c+8=0 & (3)\end{cases}$

Từ $(1)\Rightarrow c=2-b$

Từ $(2)\Rightarrow b=-2-2a\Rightarrow c=2-(-2-2a)=4+2a$

Thay vào (3) ta được: $4a+2(-2-2a)+4+2a+8=0\Rightarrow a=4$

Vậy $a=-4\Rightarrow b=6;c=-4$

Câu 8. Phương trình $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=1$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2=1,(1)\\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2=-1,(2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{z+1}{z-1}=1\\ \frac{z+1}{z-1}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z+1=z-1\\ z+1=-z+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}i=-i\\ z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow z=0$$

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{z+1}{z-1}=i\\ \frac{z+1}{z}=-i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z+1=iz+1\\ z+1=-iz-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

DẠNG TOÁN 36: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Phương trình bậc hai với hệ số thực

✪ Định nghĩa:

• Phương trình bậc hai với hệ số thực ẩn z hoặc x có dạng: $az^2+cz+c=0$ hoặc $ax^2+bx+c=0$ với $a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$.

✪ Cách giải:

• Lập biểu thức $\Delta=b^2-4ac$ $\left(\Delta'=(b')^2-ac,\ b'=\dfrac{b}{2}\right)$.

- Nếu $\Delta=0\left(\Delta'=0\right)$ thì phương trình có nghiệm kép $z=-\dfrac{b}{2a}\left(z=-\dfrac{b'}{a}\right)$.

- Nếu $\Delta>0\left(\Delta'>0\right)$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\left(z_{1,2}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$.

- Nếu $\Delta<0\left(\Delta'<0\right)$ thì phương trình có hai nghiệm phức phân biệt $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\left(z_{1,2}=\dfrac{-b'\pm i\sqrt{|\Delta'|}}{a}\right)$

Chú ý:

- Nếu $\Delta<0\left(\Delta'<0\right)$ thì phương trình có 2 nghiệm phức là z và $\overline{z}$.

- $|z|=|\overline{z}|$

- Định lý viét : $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a};\ z_1.z_2=\dfrac{c}{a}$.

- Hai số phức z_1, z_2 có $z_1+z_2=S;\ z_1.z_2=P$ thì z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-Sz+P=0$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Giải phương trình bậc hai với hệ số thực.

• Tìm môđun của số phức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực.

• Điểm biểu diễn nghiệm của phương trình bậc hai.

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm môđun của số phức liên quan đến nghiệm phức của phương trình bậc hai với hệ số thực.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Giải phương trình bậc hai tìm nghiệm z_0.

B2: Tính môđun của số phức z_0+i.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta'=1-1.5=-4<0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là: $z_{1,2}=1\pm 2i \Rightarrow z_0=1-2i$

$z_0+i=1-2i+i=1-i \Rightarrow |z_0+i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 1

Câu 1. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^2-2z+5=0$ có các nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=2-i \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} z=2i \\ z=-2i \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z=1-2i \\ z=1+2i \end{array}\right.$.

Lời giải:

Chọn D

Bấm MT $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1-2i \\ z=1+2i \end{array}\right.$.

Câu 2. Trong tập hợp $\mathbb{C}$, cho phương trình $z^2-3z+13=0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình không có nghiệm thực. **B.** Phương trình không có nghiệm thuần ảo.

C. Phương trình không có nghiệm phức. **D.** Phương trình có 2 nghiệm phức.

Lời giải:

Chọn C

Ta có $z^2-3z+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3+i\\z=3-i\end{array}\right.$. Vậy phương án C là sai.

Câu 3. Trên tập số phức cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\,(*)$ (a, b, c là các hệ số thực) và biệt thức $\Delta=b^2-4ac$. Xét các mệnh đề:

(I): "Nếu $\Delta<0$ thì phương trình (*) vô nghiệm.".

(II): "Nếu $\Delta>0$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt.".

(III): "Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt là $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.".

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề (I) sai vì trên tập số phức mọi phương trình bậc hai đều có 2 nghiệm.

Mệnh đề (II) đúng vì nếu $\Delta>0$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Mệnh đề (III) sai vì nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép thực $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Câu 4. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, cho phương trình $az^2+bz+c=0\ (a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0)$. Chọn khẳng định **sai**:

A. Tổng hai nghiệm bằng $-\dfrac{b}{a}$. **B.** Phương trình luôn có nghiệm.

C. Tích hai nghiệm bằng $\dfrac{c}{a}$. **D.** $\Delta=b^2-4ac<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Lời giải

Chọn D

+ Trên tập số phức $\mathbb{C}$, phương trình bậc hai luôn có nghiệm $\Rightarrow$ Phương án B đúng.

+ Tổng hai nghiệm $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}\Rightarrow$ Phương án A đúng.

+ Tích hai nghiệm $z_1.z_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow$ Phương án C đúng.

+ $\Delta=b^2-4ac<0\Rightarrow$ Phương trình bậc hai có nghiệm phức $\Rightarrow$ Phương án D sai.

Câu 5. Trên tập số phức, cho phương trình: $az^2+bz+c=0\ (a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$. Chọn kết luận **sai**.

A. Phương trình luôn có nghiệm.

B. Nếu $b=0$ thì phương trình có hai nghiệm mà tổng bằng 0.

C. Nếu $\Delta=b^2-4ac<0$ thì phương trình có hai nghiệm mà môđun bằng nhau.

D. Phương trình luôn có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau.

Lời giải

Chọn D

+ Trên tập số phức, cho phương trình: $az^2+bz+c=0$ với biệt thức $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta>0$ phương trình có hai nghiệm thực là $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\Delta<0$ phương trình có hai nghiệm phức là $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

$\Delta=0$ phương trình có nghiệm kép là $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.

Từ đó suy ra :

Phương án A: Đúng.

Phương án B: Đúng vì khi $b=0$ thì phương trình chắc chắn có hai nghiệm mà tổng bằng 0.

Phương án C: Đúng vì $\Delta=b^2-4ac<0$ thì hai nghiệm có mô đun bằng nhau.

Phương án D: Sai vì nếu $\Delta>0$ phương trình có hai nghiệm thực nên không chắc đã liên hợp.

Câu 6. Cho z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-8z+20=0$, gọi M_1 là điểm biểu diễn của số phức z_1 trên mặt phẳng tọa độ. Tìm tọa độ của M_1.

A. $M_1(8;-4)$. **B.** $M_1(4;-2)$. **C.** $M_1(-8;-4)$. **D.** $M_1(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2-8z+20=0$ có hai nghiệm phân biệt là $z=4-2i$ và $z=4+2i$.

Vì z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_1=4-2i$. Vậy điểm biểu diễn của z_1 là $M_1(4;-2)$.

Câu 7. Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\sqrt{5}$. **B.** $P=2\sqrt{5}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=10$.

Lời giải

Chọn B

$z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=2+i\\z_2=2-i\end{array}\right.$ nên $P=|2+i|+|2-i|=2\sqrt{5}$.

Câu 8. Phương trình nào sau đây có nghiệm thuần ảo ?

A. $z^2+4=0$. **B.** $z^2-4=0$. **C.** $z^2+3z+8=0$. **D.** $2z^2-z+5=0$.

Lời giải

Chọn A

• Xét đáp án A: $z^2+4=0\Leftrightarrow z^2=-4\Leftrightarrow z^2=4i^2\Leftrightarrow z=\pm 2i$.

• Xét đáp án B: $z^2-4=0\Leftrightarrow z=\pm 2$.

• Xét đáp án C: $z^2+3z+8=0\Leftrightarrow z_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{23}}{2}i$.

• Xét đáp án D: $2z^2-z+5=0\Leftrightarrow z_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{39}}{4}i$.

Câu 9. Hai số phức $z_1=2-3i$ và $z_2=2+3i$ là các nghiệm phức của phương trình nào sau đây?

A. $z^2-4z+13=0$. **B.** $z^2+4z+13=0$. **C.** $z^2+13z+4=0$. **D.** $z^2-4z+9=0$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $S=z_1+z_2=4; P=z_1.z_2=13$. Suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-4z+13=0$.

Câu 10. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2+4z+10=0$. Tìm $w=z_0 i$

A. $w=\sqrt{6}-2i$. **B.** $w=-\sqrt{6}-2i$. **C.** $w=-\sqrt{6}+2i$. **D.** $w=\sqrt{6}+2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2+4z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-2+\sqrt{6}i\\z=-2-\sqrt{6}i\end{array}\right.\Rightarrow z_0=-2-\sqrt{6}i$.

Khi đó $w=z_0 i=\left(-2-\sqrt{6}i\right)i=\sqrt{6}-2i$

Mức độ 2

Câu 1. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+3=0$. Tính $P=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $P=6$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=10$.

Lời giải

Chọn A

$z^2+2z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+\sqrt{2}i \\ z_2=-1-\sqrt{2}i \end{array}\right.$ nên $P=\left|-1+\sqrt{2}i\right|^2+\left|-1-\sqrt{2}i\right|^2=6$.

Câu 2. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+10=0$, số phức z_2 có phần ảo âm. Tìm số phức $w=2z_1+z_2$.

A. $w=3+3i$. **B.** $w=3$. **C.** $w=3-3i$. **D.** $w=3i$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $z^2-2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1+3i \\ z_2=1-3i \end{array}\right.$. Khi đó $w=2(1+3i)+1-3i=3+3i$

Câu 3. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-4z+29=0$. Tìm môđun của số phức $w=z_0(1+i)$.

A. $|w|=\sqrt{58}$. **B.** $|w|=\sqrt{40}$. **C.** $|w|=\sqrt{29}$. **D.** $|w|=5\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2-4z+29=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+5i \\ z=2-5i \end{array}\right. \Rightarrow z_0=2-5i$.

Khi đó $w=z_0(1+i)=(2-5i)(1+i)=7-3i \Rightarrow |w|=\sqrt{7^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$.

Câu 4. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+10=0$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $w=z_0 i^{2019}$.

A. $M(-1;3)$. **B.** $N(-1;3i)$. **C.** $P(1;-3)$. **D.** $Q(1;-3i)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+i \\ z=3-i \end{array}\right. \Rightarrow z_0=3+i$.

Khi đó $w=z_0 i^{2019}=z_0.\left(i^2\right)^{1009} i=-(3+i)i=1-3i \Rightarrow P(1;-3)$.

Câu 5. Gọi z_1 và $z_2=4+2i$ là hai nghiệm của phương trình $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$. Tính $T=|z_1|+3|z_2|$.

A. $T=6$. **B.** $T=4\sqrt{5}$. **C.** $T=2\sqrt{5}$. **D.** $T=8\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp.

Do đó $z_1=4-2i$. Khi đó $|z_1|=|z_2|=2\sqrt{5}\Rightarrow T=|z_1|+3|z_2|=8\sqrt{5}$.

Câu 6. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-6z+34=0$; Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2 trên mặt phẳng phức. Độ dài đoạn thẳng MN

A. $\sqrt{2}$. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $\Delta'=9-34=-25<0$ nên phương trình $z^2-4z+20=0$ có hai nghiệm phức phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} z_1=3-5i \\ z_2=3+5i \end{array}\right.$$

Suy ra: $M(3;-5), N(3;5)$. Vậy $MN=\sqrt{(3-3)^2+(5+5)^2}=10$.

Câu 7. Phương trình $z^2+bz+c=0$, $(a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm phức là $z=1-2i$. Tổng hai số b và c bằng?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(1-2i)^2+b(1-2i)+c=0\Leftrightarrow -3-4i+b-2bi+c=0\Leftrightarrow\begin{cases} b+c-3=0 \\ -2b-4=0 \end{cases}\Rightarrow b+c=3$.

Câu 8. Kí hiệu z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+6z+18=0$. Tìm số phức $w=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+z_1z_2$.

A. $w=18$. **B.** $w=3$. **C.** $w=3-3i$. **D.** $w=3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\begin{cases} z_1+z_2=-6 \\ z_1.z_2=18 \end{cases}$.

Khi đó : $w=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+z_1z_2=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1^2.z_2^2}+z_1z_2=\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2}{z_1^2.z_2^2}+z_1z_2=\frac{(-6)^2-2.18}{18^2}+18=18$.

Vậy $w=18$.

Câu 9. Tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $z^2-2(m-1)z+5=0$ nhận $z_1=2-i$ là một nghiệm?

A. $(-10;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-5;3)$. **D.** $\left(2;\frac{10}{3}\right)$.

Lời giải.

Chọn D

Phương trình có một nghiệm $z_1=2-i$ suy ra phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là liên hợp của nhau. Theo định lý viét ta có $z_1+z_2=4=2(m-1)\Rightarrow m=3$

Câu 10. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+2=0$ $(z\in\mathbb{C})$. Tính giá trị của biểu thức $P=2|z_1+z_2|+|z_1-z_2|$.

A. $P=2\sqrt{2}+2$. **B.** $P=\sqrt{2}+4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn C

$$z^2-2z+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1+i\\z=1-i\end{array}\right.\Rightarrow P=2|2|+|2i|=4+2=6.$$

Mức độ 3

Câu 1. Cho số phức w và hai số thực b, c. Biết rằng $3w-5$ và $2w+i$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$. Tìm phần thực của số phức w..

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $w=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$ thì $\begin{cases}3w-5=3x-5+3yi\\2w+i=2x+(2y+1)i\end{cases}$

Do $3w-5$ và $2w+i$ là hai nghiệm của $z^2+bz+c=0$.

Suy ra hai số phức đó là liện hợp của nhau do đó

$3x-5+3yi=2x-(2y+1)i\Leftrightarrow\begin{cases}3x-5=2x\\3y=-2y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-\frac{1}{5}\end{cases}$. Vậy $w=5-\frac{1}{5}i$

Do đó phần thực của w là 5.

Câu 2. Cho số phức w và biết $z_1=2w+i$ và $z_2=3w+1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0, b,c\in\mathbb{R}$. Tìm phần ảo của số phức $5i^3w$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $w=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$. $\begin{cases}z_1=2w+i=2x+(2y+1)i\\ z_2=3w+1=3x+1+3yi\end{cases}$

Do $z_1=2w+i$ và $z_2=3w+1$ là hai nghiệm của $z^2+bz+c=0$.

Suy ra hai số phức đó là liện hợp của nhau do đó

$2x+(2y+1)i=3x+1-3yi\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1=2x\\ 2y+1=-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$. Vậy $w=-1-\dfrac{1}{5}i$

Do đó $5i^3w=-5w=-5i\left(-1-\dfrac{1}{5}i\right)=-1+5i$ có phần ảo bằng 5.

Câu 3. Cho số phức w và hai số thực m, n. Biết rằng $2w-3$ và $w+i$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+mz+n=0$. Tổng $S=m+n$ là

A. 81. **B.** 6. **C.** $\dfrac{139}{9}$. **D.** $\dfrac{85}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $w=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$. $\begin{cases}2w-3=2x-3+2yi\\ w+i=x+(y+1)i\end{cases}$

Do $3w-5$ và $2w+i$ là hai nghiệm của $z^2+bz+c=0$.

Suy ra hai số phức đó là liện hợp của nhau. Do đó

$2x-3+2yi=x-(y+1)i\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3=x\\ 2y=-y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Vậy $\begin{cases}z_1=2w-3=2.3-3-\dfrac{2}{3}i=3-\dfrac{2}{3}i\\ z_2=w+i=3+\dfrac{2}{3}i\end{cases}$

Theo định lý viét suy ra $\begin{cases}z_1+z_2=6=m\\ z_1.z_2=\dfrac{85}{9}=n\end{cases}\Rightarrow S=m+n=\dfrac{139}{9}$.

Câu 4. Cho m là số thực, biết phương trình $z^2+mz+5=0$ có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

A. $2\sqrt{5}$ **B.** 4 **C.** 3 **D.** $\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta=m^2-20$

Phương trình có hai nghiệm phức thì $\Delta<0\Leftrightarrow-2\sqrt{5}<m<2\sqrt{5}$.

Khi đó pt có hai nghiệm là: $z_1=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$ và $z_2=-\dfrac{m}{2}-\dfrac{\sqrt{20-m^2}}{2}i$

Theo đề $\frac{\sqrt{20-m^2}}{2}=1\Leftrightarrow m=\pm 4$ (t/m).

Khi đó phương trình trở thành $z^2\pm 4z+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-2+i \\ z_2=-2-i \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} z_1=2+i \\ z_2=2-i \end{array}\right.$

Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$.

Câu 5. Trong tập các số phức, cho phương trình $z^2-2(m-3)z+m=0,\ m\in\mathbb{R}\ (1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta'=m^2-7m+9\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$ thì (1) phải có nghiệm phức.

Suy ra $\Delta'<0\Leftrightarrow\frac{7-\sqrt{13}}{2}<m<\frac{7+\sqrt{13}}{2}$. vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2;3;4;5\}$.

Câu 6. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình $z^2-mz+m^2+3m-4=0$ có hai nghiệm phức có mô-đun bằng 6.

A. 8. **B.** -3. **C.** -8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Theo Vi-et, ta có $z_1.z_2=m^2+3m-4$.

Vì $|z_1|=|z_2|=6\ \Leftrightarrow|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|=36\ \Leftrightarrow m^2+3m-4=36\ \Leftrightarrow m^2+3m-40=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m_1=5 \\ m_2=-8 \end{array}\right.$. Suy ra $m_1+m_2=-3$.

Câu 7. Gọi z_1,z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$ biết $z_1=2-i$. Tính môđun của số phức $w=bz_1+cz_2$.

A. $|w|=9$. **B.** $|w|=9\sqrt{2}$. **C.** $|w|=\sqrt{85}$. **D.** $|w|=85$.

Lời giải

Chọn C

$z_1=2-i$ là nghiệm $\Rightarrow(2-i)^2+b(2-i)+c=0\Leftrightarrow 3-4i+2b+c-bi=0$.

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2b+c+3=0 \\ b=-4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} c=5 \\ b=-4 \end{array}\right.\Rightarrow z_2=2+i\Rightarrow w=-4(2-i)+5(2+i)=2+9i$. Vậy $|w|=\sqrt{85}$.

Câu 8. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2+z+2=0$. Số phức $w=\left[(i-z_1)(i-z_2)\right]^{2019}$ là

A. $-2^{1009}+2^{1009}i$. **B.** $2^{1009}+2^{1009}i$. **C.** $-2^{1009}-2^{1009}i$. **D.** $2^{1009}-2^{1009}i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2+z+2=0$ nên $\begin{cases} z_1+z_2=-1 \\ z_1z_2=2 \end{cases}$.

Ta có $\left[(i-z_1)(i-z_2)\right]^{2019}=\left[z_1z_2-i(z_1+z_2)+i^2\right]^{2019}=(2+i-1)^{2019}=(1+i)^{2019}$.

$=\left[(1+i)^2\right]^{1009}(1+i)=(2i)^{1009}(1+i)=2^{1009}\left(i^4\right)^{252}i(1+i)=2^{1009}(-1+i)=-2^{1009}+2^{1009}i$.

Câu 9. Biết $z_0=2-i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Môđun của số phức $w=a+bi$ là

A. $|w|=\sqrt{41}$ **B.** $|w|=3\sqrt{5}$ **C.** $|w|=2\sqrt{41}$ **D.** $|w|=8$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_0=2-i$ là một nghiệm của phương trình $\Rightarrow \overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình .

Theo định lý viet có $\begin{cases} z_0+\overline{z_0}=-a \\ z_0.\overline{z_0}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow w=-4+5i \Rightarrow |w|=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

Câu 10. Cho số phức w, biết rằng $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực. Tính $T=|z_1|+|z_2|$.

A. $T=2\sqrt{13}$. **B.** $T=4\sqrt{13}$. **C.** $T=\dfrac{2\sqrt{85}}{3}$. **D.** $T=\dfrac{2\sqrt{97}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $w=x+yi \ (x;y\in\mathbb{R})$.

Vì $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực nên $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai số phức liên hợp. Suy ra

$$w+2i=\overline{2w-3}=2\overline{w}-3.$$

Do đó ta có

$$(x+yi)+2i=2(x-yi)-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-3 \\ y+2=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow w=3-\frac{2}{3}i.$$

Khi đó $z_1 = 3+\frac{4}{3}i$ và $z_2 = 3-\frac{4}{3}i \Rightarrow T = |z_1|+|z_2| = \frac{2\sqrt{97}}{3}$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = \sqrt{5}$, gọi z_0 là số phức có modun nhỏ nhất. Biết z_0 là một nghiệm của phương trình bậc hai $x^2+mx+n=0\,(*)$. Tính $T = m+n$.

A. 3. **B.** 5. **C.** -2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |a+bi-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(a-2)+(b-4)i| = \sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2 = 5$.

Ta có: $|z-(2+4i)| = \sqrt{5} \Rightarrow$ Tập hợp các số phức là đường tròn (C) tâm $I(2;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z. Ta có: $|z| = |z-0| = OM$.

OM nhỏ nhất $\Rightarrow I,O,M$ thẳng hàng.

Ta có: $(IM): y = 2x$.

M là giao điểm của IM và $(C) \Rightarrow M(1;2) \vee M(3;6) \Rightarrow z = 1+2i \vee z = 3+6i$.

Ta có: $|1+2i| = \sqrt{5}$, $|3+6i| = 3\sqrt{5}$. Vậy $z_0 = 1+2i$; Do $z_0 = 1+2i$ là một nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\bar{z}_0$ cũng là một nghiệm . Theo định lý viét ta có

$$\begin{cases} z_0+\bar{z}_0 = -m \\ z_0.\bar{z}_0 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow m+n = 3.$$

Câu 2. Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z}-1+2i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Hệ thức nào sao đây đúng?

A. $a-b=0$. **B.** $a+4b=4$. **C.** $a+4b=5$. **D.** $a-4b=-1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ suy ra $\bar{z} = x-yi$.

Theo giả thiết ta có $x^2+y^2 = (x-1)^2+(2-y)^2 \Leftrightarrow -2x-4y+5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}-2y$.

Khi đó $|z|^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2} - 2y\right)^2 + y^2 = 5(y-1)^2 + \frac{5}{4} \ge \frac{5}{4}$.

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ khi $\begin{cases} x = \frac{5}{2} - 2y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.

Suy ra số phức có mô đun nhỏ nhất là $z = \frac{1}{2} + i$. Do $z = \frac{1}{2} + i$ là một nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\bar{z}$ cũng là một nghiệm . Theo định lý viét ta có $\begin{cases} z + \bar{z} = -a \\ z.\bar{z} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a + 4b = 4.$

Khi đó tổng $a + 4b = 4$.

Câu 3. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Số phức z có môđun nhỏ nhất là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $b = 2a$. **B.** $a = 2b$. **C.** $a - b = -12$. **D.** $a + b = 12$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in R)$. Từ giả thiết suy ra: $y = -x + 4$.

Vậy $|z| = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \ge 2\sqrt{2}$. Do đó $|z|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow z = 2 + 2i$; Do $z = 2 + 2i$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow \bar{z} = 2 - 2i$ cũng là nghiệm của phương trình. Do đó theo định lý viét ta có $\begin{cases} z + \bar{z} = -a \\ z.\bar{z} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$.

Câu 4. Tìm tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2 + 3z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = 2$.

A. 0 **B.** 2. **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

+) Trường hợp $z_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 2 \\ z_0 = -2 \end{array}\right.$.

Nếu $z_0 = 2$ thì $a^2 - 2a + 10 = 0$ không có nghiệm thực a.

Nếu $z_0 = -2$ thì $a^2 - 2a - 2 = 0$ luôn có nghiệm thực a và theo định lý Vi-ét tổng hai nghiệm thực này là $2 \ (1)$.

+) Trường hợp phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức $z_0\notin\mathbb{R}$ thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm phức của phương trình.

Vì $|z_0|=2$ nên $z_0.\overline{z}_0=|z_0|^2=4$.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_0.\overline{z}_0=\dfrac{a^2-2a}{1}=a^2-2a\Rightarrow a^2-2a=4\Leftrightarrow a^2-2a-4=0\ (*)$.

Phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm thực phân biệt, theo định lý Vi-ét ta có tổng các giá trị của số thực a bằng $2\ (2)$.

+) Từ (1) và (2) suy ra tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$ là 4.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên sao cho phương trình $z^2+2(m-1)z+m^2+m-11=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=3$.

A. 0 **B.** 2. **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

+) Trường hợp $z_0\in\mathbb{R}$. Khi đó $|z_0|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0=3\\z_0=-3\end{array}\right.$.

Nếu $z_0=3$ thì $9+6(m-1)+m^2+m-11=0\Leftrightarrow m^2+7m-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-8\end{array}\right.\ (1)$.

Nếu $z_0=-3$ thì $9-6(m-1)+m^2+m-11=0\Leftrightarrow m^2-5m+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=4\end{array}\right.\ (2)$.

+) Trường hợp phương trình $z^2+2(m-1)z+m^2+m-11=0$ có nghiệm phức $z_0\notin\mathbb{R}$ thì $\overline{z}_0$ cũng là nghiệm phức của phương trình.

Vì $|z_0|=3$ nên $z_0.\overline{z}_0=|z_0|^2=9$.

Theo định lý Vi-ét ta có $z_0.\overline{z}_0=\dfrac{m^2+m-11}{1}=m^2+m-11\Rightarrow m^2+m-11=9\ \Leftrightarrow m^2+m-20=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-5\\m=4\end{array}\right.\ (3)$. Vậy có $m\in\{-8-5;1;4\}$

Câu 6. Cho a là số thực, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng $120°$, tính tổng các giá trị của a.

A. -6. **B.** 6. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$. Do đó, ta phải có: $\Delta=a^2-12a+16<0 \Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};\,6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_2=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

Tam giác OMN cân nên $MON=120^\circ \Rightarrow \dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos 120^\circ$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2-6a+7=0 \;\; a=3\pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 6.

Câu 7. Cho a là số thực, phương trình $z^2-2(a+2)z+3-2a=0$ có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN là tam giác vuông, tính tổng các giá trị của a.

A. -6. **B.** -5. **C.** -10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2-2(a+2)z+3-2a=0$. Do đó, ta phải có: $\Delta'=a^2+6a+1<0 \Leftrightarrow a\in\left(-3+2\sqrt{2};\,3+2\sqrt{2}\right)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z_1=a+2-\sqrt{-a^2-6a-1}i \\ z_2=a+2+\sqrt{-a^2-6a-1}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM}=\left(a+2;-\sqrt{-a^2-6a-1}\right) \\ \overrightarrow{ON}=\left(a+2;\sqrt{-a^2-6a-1}\right) \end{cases}$.

Tam giác OMN cân nên $MON=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0 \Leftrightarrow (a+2)^2+a^2+6a+1=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+10a+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{-5+\sqrt{15}}{2} \\ a=\dfrac{-5-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là -5.

Câu 8. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 - z + \frac{2019}{4} = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z - z_1| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_2|$ là

A. $\sqrt{2019} - 1$. **B.** $\frac{\sqrt{2019} - 1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2019} + 1}{2}$. **D.** $\sqrt{2019} + 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $z^2 - z + \frac{2019}{4} = 0$

Ta có: $\Delta = -2019 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2019}}{2} i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2019}}{2} i \end{array}\right.$.

Khi đó: $z_1 - z_2 = i\sqrt{2019}$

$|z - z_2| = |(z - z_1) + (z_1 - z_2)| \geq |z_1 - z_2| - |z - z_1| \Leftrightarrow P \geq \sqrt{2019} - 1$.

Vậy $P_{\min} = \sqrt{2019} - 1$.

Câu 9. Trong tập hợp các số phức, gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$, với z_2 có thành phần ảo dương. Cho số phức z thoả mãn $|z + z_1| + |z - 4 - 7i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z - z_2|$. Tổng $M + m$ là

A. $2 + \sqrt{61}$. **B.** $\sqrt{2 + \sqrt{61}}$. **C.** $\sqrt{2} + \sqrt{61}$. **D.** $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{61}}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$

Ta có: $\Delta' = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_1 = -1 - i \\ z_2 = -1 + i \end{array}\right.$.

Khi đó: $\left\{\begin{array}{l} |z + z_1| = |z - 1 - i| \\ |z - z_2| = |z + 1 - i| \end{array}\right.$; Đặt $w = z + 1 - i = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$3\sqrt{5} = |z + z_1| + |z - 4 - 7i| = |z - 1 - i| + |z - 4 - 7i| = |(z + 1 - i) - 2| + |(z + 1 - i) - 5 - 6i|$
$= |w - 2| + |w - 5 - 6i|$;

Đặt $M(x; y), A(2; 0), B(5; 6)$. Ta có $3\sqrt{5} = |w - 2| + |w - 5 - 6i| = MA + MB \geq AB = 3\sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi $M(x; y)$ thuộc đoạn $AB \Leftrightarrow y = 2x - 4,\ 2 \leq x \leq 5$.

$|w|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(2x-4)^2}=\sqrt{5x^2-16x+16}=g(x);\left(-\frac{b}{2a}=\frac{8}{5}\notin[2;8]\right)$ Từ đó suy ra

$m=\min\limits_{[2;5]}|w|=g(2)=2;\ M=\max\limits_{[2;5]}|w|=g(5)=\sqrt{61}$.

Vậy $M+m=\sqrt{61}+2$.

Câu 10. Cho các số phức $z_1\neq 0,\ z_2\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{2}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow\frac{2z_2+z_1}{z_1z_2}=\frac{1}{z_1+z_2}\Leftrightarrow(2z_2+z_1)(z_1+z_2)-z_1z_2=0$$

$$\Leftrightarrow 2z_1z_2+2z_2^2+z_1^2+z_1z_2-z_1z_2=0\Leftrightarrow 2z_1z_2+2z_2^2+z_1^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+2\frac{z_1}{z_2}+2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{z_1}{z_2}=-1-i\\ \frac{z_1}{z_2}=-1+i\end{array}\right.\Rightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2};\ \left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{1}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow P=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

DẠNG TOÁN 37: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG OXYZ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Vecto chỉ phương của đường thẳng

✪ Định nghĩa:

• Vecto $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ

✪ Nhận xét:

+ Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{BA}$.

+Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ, do đó một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

+ Nếu $\vec{u},\vec{v}$ là cặp vecto không cũng phương, có giá vuông góc với Δ thì $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ

2. Phương trình đường thẳng.

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ có phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và

Phương trình chính tắc $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}\ (abc \neq 0)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Viết phương trình tham số của đường thẳng khi biết tọa độ 1 điểm thuộc đường thẳng và vecto chỉ phương.

• Viết phương trình chính tắc của đường thẳng khi biết tọa độ 1 điểm thuộc đường thẳng và vecto chỉ phương.

• Viết phương trình chính tắc của đường thẳng khi biết phương trình tham số của đường thẳng đó.

• Viết phương trình tham số của đường thẳng khi biết phương trình chính tắc của đường thẳng đó

• Viết phương trình tham số (chính tắc) của đường thẳng khi biết tọa độ 2 điểm thuộc đường thẳng.

• Viết phương trình tham số (chính tắc) của đường thẳng qua 1 điểm và vuông góc với 1 mặt phẳng cho trước.

• Viết phương trình tham số (chính tắc) của đường thẳng qua 1 điểm và song song với 2 mặt phẳng cho trước.

• Viết phương trình tham số (chính tắc) của đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng cho trước.

• Viết phương trình tham số (chính tắc) của đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng.

• …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $3x+y-z-7=0$. **B.** $x+4y-2z+6=0$. **C.** $x+4y-2z-6=0$. **D.** $3x+y-z+7=0$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán viết phương trình mặt phẳng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ khi biết điểm đi qua và một vectơ pháp tuyến.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-2)$

B2: Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm, vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_\Delta}$

B3: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_\Delta}$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-2)$.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên chọn một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;4;-2)$ có phương trình là $1(x-2)+4(y-1)-2(z-0)=0$ hay $x+4y-2z-6=0$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng đi qua điểm $A(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-2)$ có phương trình là $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng chứa trục Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Trục Oy qua $O(0;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$ nên có phương trình $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Khi đó phương trình chính tắc của d là:

A. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

B. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$.

D. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{1}$.

Lời giải

Chọn C.

$d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ đi qua điểm $M(1;-3;4)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;-1)$ làm vtcp.

Vậy $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oz có phương trình là

A. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng Oz nhận $\vec{k}(0;0;1)$ làm véc tơ chỉ phương và đi qua điểm $M(0;0;1)$ nên có phương trình là: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} (t \in R)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình::

A. $\frac{x-3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-2}$. **B.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-2}$. **C.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}$. **D.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}$.

Lời giải:

Chọn D.

Đường thẳng đi qua điểm $A(3;0;-4)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(5;1;-2)$ có phương trình

$\frac{x-3}{5}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{-2}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn D.

Vì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$ nên Δ cũng nhận vectơ $\frac{1}{2}\vec{a}=(2;-3;1)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Câu 7. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;5;-7)$ là:

A. $\begin{cases} x=4+3t \\ y=5-t \\ z=-7+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-5-t \\ z=7+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+4t \\ y=-1+5t \\ z=2-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=1+5t \\ z=-2-7t \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn C.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=-3t\end{cases},\ (t\in\mathbb{R})$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng (d)?

A. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

B. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

C. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$.

D. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Lời giải:

Chọn A.

$(d):\begin{cases}qua\ M(3;-1;0)\\vtcp\ \vec{u}=(-1;2;-3)\end{cases}$.

Phương trình chính tắc của $(d):\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;3;-2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;3;1)$. Phương trình của d là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

B. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$.

D. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải:

Chọn B.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=t\\y=1\\z=1\end{cases}$.

Lời giải:

Chọn B

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{i}=(1;0;0)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;4;-1)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+1}{4}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$.

D. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có AB qua $A(1;2;3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;2;-4)\Rightarrow AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=2;4;6$. Phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình của đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases}x=-5-2t\\y=-10-4t\\z=-15-6t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=2+t\\y=4+2t\\z=6+3t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+6t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3+2t\\y=6+4t\\z=12+6t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Dễ kiểm tra được điểm $M(1;2;3)$ không thuộc đường thẳng có phương trình ở đáp án D.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z-5=0$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A và song song với mặt phẳng (P)?

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

B. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

C. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.

D. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Chọn D.

Vì d đi qua điểm $A(3;-2;1)$ nên loại B, **C.**

$d\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{u_d}=0$ nên loại A vì $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_d}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+3z+1=0$. Đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$.

B. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Do đường thẳng Δ cần tìm vuông góc với mặt phẳng (P) nên véctơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;3)$ cũng là véctơ chỉ phương của Δ. Mặt khác Δ đi qua điểm $M(1;1;2)$ nên phương trình chính tắc của Δ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x-2y+3z+4=0$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{u}_d=\vec{n}_P=(1;-2;3)$

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+3t \end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;3)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-2)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng nào trong các đường thẳng sau:

A. $(d): \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $(d): \begin{cases} x=t \\ y=-5t \\ z=2-2t \end{cases}$. **C.** $(d): \begin{cases} x=-t \\ y=5t \\ z=1+2t \end{cases}$. **D.** $(d): \begin{cases} x=1+t \\ y=5+t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$(P): x+y-2z+4=0$

Cả 4 đường thẳng trên đều có véctơ chỉ phương vuông góc với véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nên các đường thẳng đó hoặc song song, hoặc chứa trong mặt phẳng (P).

Lấy một điểm bất kì trên mỗi đường thẳng thay vào phương trình mặt phẳng (P), ta thấy chỉ có đáp án B là đúng.

Câu 7. Cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+1=0$, $(Q): 2x-y+2z-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q) là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-3}{2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{-6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(P): 2x+2y+z+1=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(2;2;1)$.

$(Q): 2x-y+2z-1=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(2;-1;2)$.

Đường thẳng d có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

Do đường thẳng d song song với (P) và (Q) nên $\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}\\ \overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(5;-2;-6)$.

Mặt khác đường thẳng d đi qua $A(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(5;-2;-6)$ nên phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-6}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;4;-1)$, $B(2;4;3)$, $C(2;2;-1)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC là

A. $\begin{cases}x=1\\ y=4+t\\ z=-1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\ y=4+t\\ z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\ y=4+t\\ z=-1-2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\ y=4-t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC. Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;-2;-4)$.

Do Δ song song với BC nên một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta=(0;1;2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1\\ y=4+t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$ và $(\beta): x+y-z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=2-t\\ y=t\\ z-2-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\ y=t\\ z=-2+2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;-3;1)$.

Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(1;1;-1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]=(2;2;4)$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;2)\Rightarrow$ loại **A.**

+ Đáp án **B** tọa độ điểm đi qua là $(2;0;2)$ không thỏa mãn phương trình $(\alpha)\Rightarrow$ loại đáp án **B.**

+ Đáp án **C** tọa độ điểm đi qua là $(-2;0;2)$ thỏa mãn phương trình (α) và (β) $\Rightarrow$ đáp án đúng **C**.

+ Đáp án **D** tọa độ điểm đi qua là $(2;0;-2)$ không thỏa mãn phương trình (β) $\Rightarrow$ loại đáp án **D.**

Câu 10. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$.

B. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

D. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi: $\Delta\cap d_1=M(1+t';3-t';2+2t')$, $\Delta\cap d_2=N(-3t;t;-1-3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-3t-1-t';t-3+t';-3-3t-2t')$.

d_1,d_2 lần lượt có 2 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2),\overrightarrow{u_2}=(-3;1;-3)$.

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6t'-10t=4\\10t'+19t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\t=-1\end{cases}$

$\Rightarrow M(2;2;4),N(3;-1;2),\overrightarrow{MN}=(1;-3;-2)$

Vậy phương trình $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-2z-12=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

A. $d':\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$

B. $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$

.C. $d':\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

D. $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lờigiải

Chọn B

Ta có : $d//(P)$ nên $d'//d$. Do đó $\vec{u}_{d'}=\vec{u}_d=(3;-4;1)$.

$M(-1;3;-1)\in d$. M' là hình chiếu vuông góc của M trên (P) .

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) .

Khi đó đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+t\\z=-1-2t\end{cases}$.

Tọa độ điểm M' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3+t\\z=-1-2t\\2x+y-2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}$.

Phương trình đường thẳng d' là $d':\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1;0;1)$ và vuông góc với hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=-4+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-2t\\y=-3+2t\\z=4-t\end{cases}$ là:

A. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$. **C.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-1}{4}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt nhận $\overrightarrow{u_1}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(-2;2;-1)$ làm véctơ chỉ phương.

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 nên véctơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;3;4)$.

Phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-2z=0$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{4}$. Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{2}$.

C. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Lời giải

Chọn A

$$d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow d_1:\begin{cases}x=-1-t\\y=6+2t\\z=t\end{cases}\Rightarrow M\in d_1\Leftrightarrow M\left(-1-t;6+2t;t\right)$$

$$d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}\Leftrightarrow d_2:\begin{cases}x=1-3t'\\y=2-t'\\z=-4+4t'\end{cases}\Rightarrow N\in d_2\Leftrightarrow N\left(1-3t';2-t';-4+4t'\right)$$

$\overrightarrow{MN}=\left(2+t-3t';-4-2t-t';-4-t+4t'\right)$

$(P):3x+y-2z=0$ có VTPT $\vec{n}(3;1;-2)$

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$$\overrightarrow{MN}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}2+t-3t'=3k\\-4-2t-t'=k\\-4-t+4t'=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t'=1\\k=-1\end{cases}\Rightarrow M\left(1;2;-2\right)\Rightarrow d:\begin{cases}x=1+3s\\y=2+s\\z=-2-2s\end{cases};s\in\mathbb{R}$$

Chọn $s=-1\Rightarrow A(-2;1;0)\in d\Rightarrow d:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P) có phương trình là:

A. $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-2}{-13}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-2}{5}$. **C.** $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-7}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vtcp của đường thẳng d là $\vec{u}=2;-1;3$.

Vtpt của mặt phẳng P là $\overrightarrow{n_P}=1;1;1$

Gọi Q là mặt phẳng chứa d và vuông góc với P . Khi đó

$\begin{cases}\overrightarrow{n_Q}\perp\vec{u}\\\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=\left[\vec{u};\overrightarrow{n_P}\right]=-4;1;3$.Điểm $M\ -2;-1;0\ \in d\Rightarrow M\in Q$.

Phương trình mặt phẳng $Q:-4\ x+2\ +\ y+1\ +3z=0\Leftrightarrow 4x-y-3z+7=0$

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên (P) là $d'=P\cap Q$.

Khi đó vtcp của d' là $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=-2;7;-5$. Điểm $N\ 0;1;2\ \in P\cap Q$ suy ra chọn phương án **B**

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;-2)$. Gọi đường thẳng cần tìm là Δ.

Gọi $M(a;0;0)$ là điểm thuộc trục Ox mà đường thẳng Δ đi qua, suy ra $\overrightarrow{MA}=(1-a;2;3)$ là một véc tơ chỉ phương của Δ. Vì đường thẳng Δ vuông góc với d nên:

$\overrightarrow{MA}\perp\vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow (1-a).2+2.1+3.(-2)=0 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow M(-1;0;0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1;0;0)$, nhận $\overrightarrow{MA}=(2;2;3)$ làm một véc tơ chỉ phương suy ra Δ có phương trình $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Cách 2:

+ Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với d nên (P) nhận vectơ chỉ phương của d $\vec{u}_d=(2;1;-2)$ làm một vetơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P): $2(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+2=0$.

+ Tọa độ giao điểm M của trục Ox và mặt phẳng (P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \\ 2x+y-2z+2=0 \end{cases} \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(-1;0;0).$$

+ Đường thẳng cần tìm đi qua hai điểm A, M nên nhận vectơ $\overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)=-(2;2;3)$ làm vectơ chỉ phương, có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là:

A. $\Delta: \begin{cases} x=5t \\ y=-1+t \\ z=4+5t \end{cases}$. **B.** $\Delta: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$. **C.** $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$. **D.** $\Delta: \begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=4+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy : $A \in (P)$. Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;-2)$, đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$

Vì đường thẳng Δ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) nên đường thẳng Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{u}_d, \vec{n}\right]=(-5;0;-5)$ nên chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;0;1)$.

Khi đó, phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;1;-1)$, $B(-2;3;1)$ và $C(0;-1;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;2;2) \Rightarrow AB=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4) \Rightarrow AC=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

$BC=\sqrt{4+16+4}=2\sqrt{6}$

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng d qua $G(0;1;1)$

có véctơ chỉ phương $\vec{u}=\dfrac{1}{12}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=(1;1;1)$ hay, $d: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$ nên chọn B.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\ 2;1;0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{1}$.

B. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$.

D. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $N\ 1+2t;-1+t;-t$ là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng d.

Lúc đó đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MN}=\ 2t-1;t-2;-t$ làm vectơ chỉ phương.

Mặt khác Δ vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $2\ 2t-1\ +t-2+t=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}$.

Với $t=\dfrac{2}{3}$ đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ hoặc $\vec{u}=\ 1;-4;-2$ làm vtcp.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 9. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ cắt đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Do $d\cap d_1=B\Rightarrow B(2m;m;m+2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2m-1;m-2;m-1)$

d song song với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow 1.(2m-1)+1.(m-2)-(m-1)=0\Leftrightarrow m=1$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)\Rightarrow$phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN.

A. $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

B. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

D. $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $N=\Delta\cap d\Rightarrow N(-2+2t;1+t;1-t)$.

A là trung điểm của $MN\Rightarrow M(4-2t;5-t;3+t)$.

Mà $M\in(P)$ nên tọa độ M thỏa phương trình (P), ta được:

$2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow N(-6;-1;3), M(8;7;1)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NM}=(7;4;-1)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ: $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

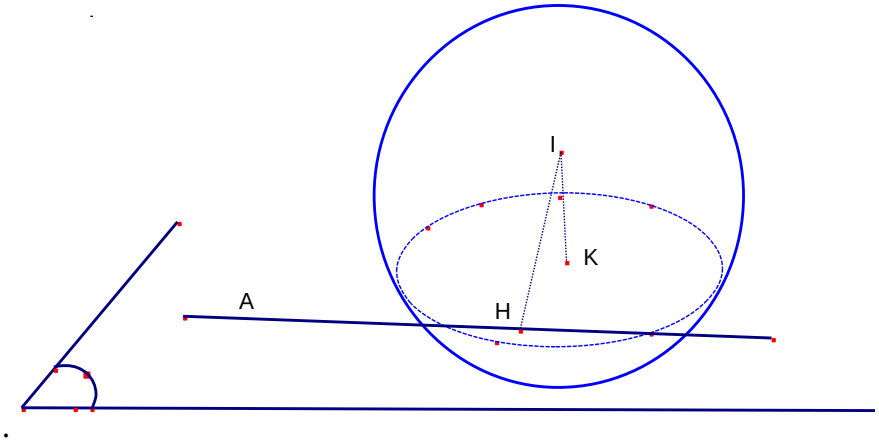
C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ bán kính $R=10$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là.

Phương trình tham số đường thẳng IK: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó, IH nhỏ nhất khi H trùng với K.

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất. Khi đó, đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

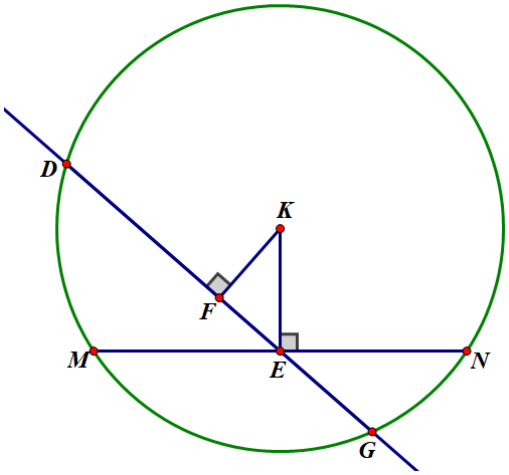
Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình Δ là

A. $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 1+9t \\ z = 3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2-5t \\ y = 1+3t \\ z = 3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1+3t \\ z = 3-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Giả sử K là hình chiếu của I lên (P), ta có: $IK=d_{I/(P)}=\frac{|2.3+2.2-5-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$.

Do đó $IK<R$ nên (S) và (P) cắt nhau và giao tuyến của chúng là đường tròn tâm K.

Lại có $IE=\sqrt{(2-3)^2+(1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow IE<R$, nên E nằm trong mặt cầu (S). Mà $E\in(P)$ nên E nằm trong đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

Giả sử Δ cắt (S) tại D và G, F là hình chiếu của K lên Δ. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với EK, nằm trên (P), cắt (S) tại M và N. Ta có $KF\le KE\Rightarrow DG\ge MN$ (theo tính chất mối quan hệ giữa dây cung và khoảng cách từ dây cung tới tâm).

Mà MN không đổi nên DG nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\equiv F$. Khi đó $\Delta\perp KE$, ngoài ra $IK\perp(P)\Rightarrow\Delta\perp IK$, do đó $\Delta\perp(IKE)\Rightarrow\Delta\perp IE$.

Vậy $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right]=(5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;0)$.

Vì Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$. Chọn C.

Cách 2:

Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Thay tọa độ điểm E vào vế trái của phương trình (S) ta được : $1^2+1^2+2^2=6<36$. Do đó E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi M,N là giao điểm của Δ và mặt cầu (S) . Khi đó ta có:

$MN = 2\sqrt{R^2 - (d(I,\Delta))^2}$, với R,I lần lượt là bán kính và tâm của mặt cầu (S).

Do đó MN nhỏ nhất khi $d(I,\Delta)$ lớn nhất.

Ta lại có: $d(I,\Delta) \le IE$, với IE cố định.

Do đó: $\max d(I,\Delta) = \text{IE}$. Khi đó: $\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE} = (-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P} = (2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right] = (5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1;0)$.

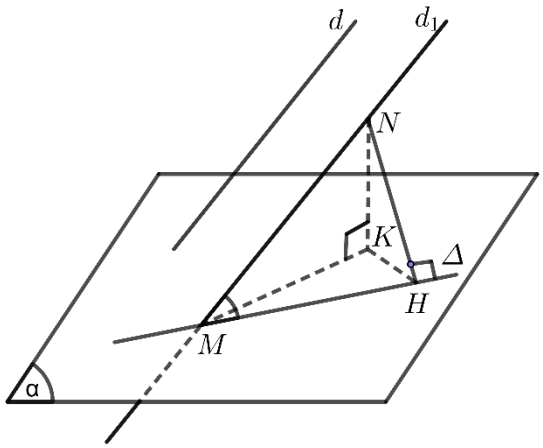
Ngoài ra Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$. Chọn C.

Câu 3. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4+3t \\ z = -3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 8+5t' \\ y = -3-4t' \\ z = 2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 1-t' \\ z = 3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1+5t' \\ y = 1-4t' \\ z = 3+2t' \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy: $M \in (\alpha)$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n} = 0.1+3.1+(-2).(-1) = 5 \ne 0$ nên d cắt (α).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 // d$, suy ra d_1 có phương trình: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1+3t \\ z = 1-2t \end{cases}$.

Lấy $N(3;4;-1)\in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $(d,\Delta)=NMH$ và $\sin NMH=\dfrac{NH}{MN}\geq\dfrac{NK}{MN}$.

Do vậy (d,Δ) nhỏ nhất khi $K\equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases}x=3+t\\y=4+t\\z=-1-t\end{cases}$.

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$$(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}.$$ Suy ra $K\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$.

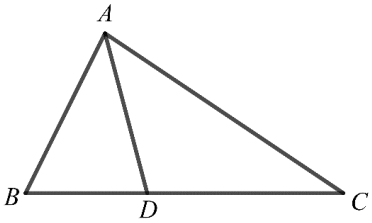
Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}(5;-4;1)\Rightarrow$ Chọn **B**

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0)$, $B(3;0;2)$, $C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

A. $\begin{cases}x=2\\y=1+t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$.

Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

Khi đó: $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DB=\dfrac{1}{2}DC\Rightarrow\overrightarrow{DB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*) (vì D nằm giữa B và C).

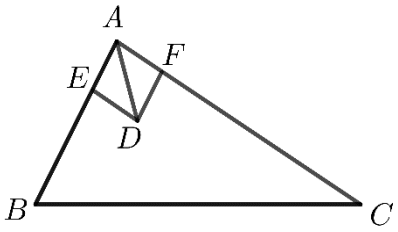
Gọi $D(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{DB}=(3-x;-y;2-z)$, $\overrightarrow{DC}=(4-x;3-y;-4-z)$.

Thay vào (*) ta được hệ phương trình $\begin{cases}3-x=-\frac{1}{2}(4-x)\\-y=-\frac{1}{2}(3-y)\\2-z=-\frac{1}{2}(-4-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\y=1\\z=0\end{cases}$. Vậy $D\left(\frac{10}{3};1;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

Đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Cách 2:



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{6}$.

Lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $AE=1$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $AF=1$. Khi đó $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Dựng hình bình hành $AEDF$, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};0;0\right)$.

Vì $AE=AF=1$ nên hình bình hành $AEDF$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AD}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Nhận xét:

Đường phân giác trong của góc BAC có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}$.

Cách 3:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $I=(3;2;-2)$ và $AI=\sqrt{6}$.

Dựng hình bình hành $ABKI$, ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}=(2;0;0)$.

Vì $AB=AI=\sqrt{6}$ nên hình bình hành $ABKI$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AK}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1,d_2.

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta viết phương trình tham số của $d_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}), d_2:\begin{cases}x=1-2s\\y=-4s\\z=3+2s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$.

Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có $\begin{cases}t=1-2s\\1-t=-4s\\1+2t=3+2s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\s=0\end{cases}$ suy ra $I(1;0;3)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lấy $A(0;1;1)\in d_1\Rightarrow IA=\sqrt{6}$. Gọi $B(1-2s;-4s;3+2s)\in d_2$ sao cho $IB=\sqrt{6}$.

Ta có $IB=\sqrt{6}\Leftrightarrow 4s^2+16s^2+4s^2=6\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}B(0;-2;4)\\B(2;2;2)\end{array}\right.$.

Với $B(0;-2;4)$ ta có $\overrightarrow{IA}(-1;1;-2), \overrightarrow{IB}(-1;-2;1)\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-3<0\Rightarrow AIB$ là góc tù

Theo yêu cầu bài toán ta viết phương trình của đường phân giác của góc AIB với $B(0;-2;4)$ (không cần xét trường hợp kia) .

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, khi đó phương trình đường phân giác cần tìm là phương trình đường thẳng đi qua hai điêm $I(1;0;3)$ và $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, chọn $\vec{u}=-2\overrightarrow{IM}\Rightarrow\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương của đường phân giác. Vậy đường phân giác đi qua điểm $I(1;0;3)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Nhận xét: Có thể tìm vectơ chỉ phương của đường phân giác như sau:

Ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2); \overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$ lần lượt là véctơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Vì $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=-6<0$ nên góc giữa hai vectơ đó là góc tù.

Xét $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2);\overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{u_1}\right|=\sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{u_2}\right|=2\sqrt{6}$.

Đặt $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; $\vec{b}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\overrightarrow{u_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ nên có thể chọn $\vec{u}=(2;1;1)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2;2;-3)$ và $N(-4;2;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nhận vecto $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P):2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|$, $|b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng:

A. 15. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2;2;-3)$ và song song với mặt phẳng (P).

Suy ra $(Q):2x+y+z-3=0$.

Do Δ // (P) nên $\Delta\subset(Q)$.

$d(N,\Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow\Delta$ đi qua N', với N' là hình chiếu của N lên (Q).

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc (P), $d:\begin{cases}x=-4+2t\\y=2+t\\z=1+t\end{cases}$.

Ta có $N'\in d\Rightarrow N'(-4+2t;2+t;1+t)$; $N'\in(Q)\Rightarrow t=\frac{4}{3}\Rightarrow N'\left(-\frac{4}{3};\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right)$.

$\vec{u}=(a;b;c)$ cùng phương $\overrightarrow{MN'}=\left(-\frac{10}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Do $|a|$, $|b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u}=(-5;2;8)$.

Vậy $|a|+|b|+|c|=15$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. **C.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M=d\cap\Delta_1\Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(-1;2;2)$

$\cos\left(d;\Delta_2\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f\left(t\right)=f\left(0\right)=0\Leftrightarrow t=0$

Do đó $\min\left[\cos\left(\Delta,d\right)\right]=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(2;2-1\right)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;2;3\right)$ và vecto chỉ phương $\vec{u}=\left(0;-7;-1\right)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là :

A. $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t\\z=2+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-4+5t\\y=-10+12t\\z=-2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=2-2t\\z=3-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+6t\\y=2+11t\\z=3+8t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có vtcp của d: $\overrightarrow{u_1}=\left(1;1;0\right)$; VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(0;-7;-1\right)$.

Góc giữa 2 vecto chỉ phương là : $\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_\Delta}\right)=\dfrac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_\Delta}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}<0$. Nên ta chọn vtcp của d là :

$\vec{u}=\left(-1;-1;0\right)$ ngược hướng với vtcp $\overrightarrow{u_1}$

Chuẩn hóa để tìm vtcp của đường phân giác: $\vec{m}=\dfrac{1}{\left|\vec{u}\right|}.\vec{u}+\dfrac{1}{\left|\vec{\Delta}\right|}.\vec{\Delta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-1;\dfrac{-12}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$

Chọn $\vec{w}=\left(5;12;1\right)$ là vtcp của đường phân giác tạm gọi là d'. **Loại C và D**

Dễ thấy d và Δ và d' cùng đi qua điểm $A\left(1;2;3\right)$. $\Rightarrow d':\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z-3}{1}$

Thay điểm $\left(-4;-10;2\right)$ ở đáp án A vào thấy thỏa mãn. **Chọn A**

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+4t\\z=1\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;1;1\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(-2;1;2\right)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

A. $\begin{cases}x=1+27t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=11-10t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-18+19t\\y=-6+7t\\z=-11-10t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+17t\\z=1+10t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$A = d \cap \Delta$

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+1t \\ z = 1+2t \end{cases}$.

Chọn điểm $B(-1;2;3) \in \Delta, AB = 3$.

Gọi $C \in d$ thỏa mãn $AC = AB \Rightarrow C\left(\frac{14}{5};\frac{17}{5};1\right)$ hoặc $C\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5};1\right)$

Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5};1\right)$ thỏa mãn BAC là góc nhọn.

Trung điểm của BC là $I\left(-\frac{9}{10};\frac{3}{10};2\right)$.Đường phân giác cần tìm là AI có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (19;7;-10)$ có phương trình là $\begin{cases} x = 1+19t \\ y = 1+7t \\ z = 1-10t \end{cases}$. Tọa độ điểm của đáp án B thuộc AI.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

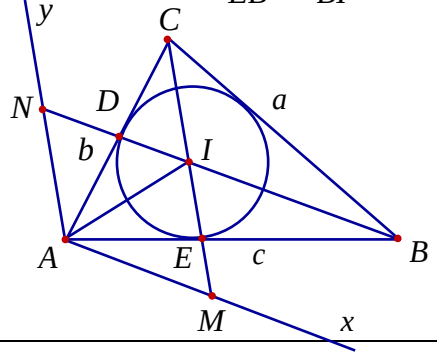
Xét bài toán: Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a.\vec{IA}+b.\vec{IB}+c.\vec{IC}=\vec{0}$.

Chứng minh. Gọi D và E lần lượt là chân các đường phân giác của ΔABC kẻ từ B và C. Dựng tia Ax song song BD cắt CE tại M. Dựng tia Ay song song CE cắt BD tại N.

Ta có: $\vec{AI} = \vec{AM} + \vec{AN}$. Mặt khác $\Delta EAM \# \Delta EBI$, suy ra $\frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BI}$.

Hơn nữa, $\frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Do đó $\frac{AM}{BI} = \frac{b}{a} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{b}{a}\vec{IB}$.



Tương tự: $\overrightarrow{AN}=\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a}\overrightarrow{IB}+\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Áp dụng bài toán trên cho ΔOAB, ta được $AB.\overrightarrow{IO}+OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}=\vec{0}\ (*)$.

Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$;

$\overrightarrow{IO}=(-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IA}=(2-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{IB}=\left(\frac{-8}{3}-a;\frac{4}{3}-b;\frac{8}{3}-c\right)$.

Từ $(*)$ ta có $\begin{cases}-5a+4(2-a)+3\left(-\frac{8}{3}-a\right)=0\\-5b+4(2-b)+3\left(\frac{4}{3}-b\right)=0\\-5c+4(1-c)+3\left(\frac{8}{3}-c\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\c=1\end{cases}$.

Do đó $I(0;1;1)$.

Mặt khác, ta có: $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-8;8)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}=(1;-2;2)$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

Nhận xét: Điểm $K(-1;3-1)\in d$ nên phương trình đường thẳng d viết lại $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

DẠNG TOÁN 38: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

◆ Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và $C(x_C;y_C;z_C)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB , $I\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC, $G\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$.

◆ Nếu $\vec{u}=(x;y;z)\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

◆ $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ cùng phương với $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)\left(\vec{v}\neq\vec{0}\right)$ khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=kx_2\\ y_1=ky_2\\ z_1=kz_2\end{cases}$.

◆ Nếu 2 vecto $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương và $\begin{cases}\vec{a}\perp\vec{u}\\ \vec{a}\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow\vec{a}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]$.

◆ Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{BA}$.

◆ Nếu $\vec{u}$ là một vecto chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}\ (k\neq0)$ cũng là một vecto chỉ phương của Δ , do đó một đường thẳng có vô số vecto chỉ phương.

◆ Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì vecto chỉ phương của đường thẳng này cũng là vecto chỉ phương của đường thẳng kia.

◆ Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) thì vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$ của đường thẳng Δ chính là vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$ của mặt phẳng (α) , tức $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}$.

◆ Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có một vecto chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ có phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$ và

phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\ (abc\neq 0)$.

◆ Điểm M thuộc đường thẳng Δ có PTTS $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ thì $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

◆ Cho hai mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'):A'x+B'y+C'z+D'=0$

Với điều kiện $A:B:C\neq A':B':C'$. Điều kiện trên chứng tỏ hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi d là đường thẳng giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm những điểm $M(x;y;z)$ vừa thuộc (α) vừa thuộc (α') , nên tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$. Khi đó $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]$ với $\vec{n}=(A,B,C)$ và $\overrightarrow{n'}=(A',B',C')$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

◆ Một vectơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Ox là $\vec{i}=(1;0;0)$.

◆ Một vectơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oy là $\vec{j}=(0;1;0)$.

◆ Một vectơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oz là $\vec{k}=(0;0;1)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

☞PTĐT qua 1 điểm, dễ tìm VTCP (không dùng t.c.h)

☞PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho 2 mp)

☞PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho 2 đt)

☞PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho đt+mp)

☞PTĐT qua 1 điểm, cắt d_1 , có liên hệ với d_2.

☞PTĐT qua 1 điểm, cắt d , có liên hệ với mp (P).

☞PTĐT qua 1 điểm, cắt d_1 lẫn d_2

☞PTĐT qua 1 điểm, vừa cắt – vừa vuông góc với d

☞PTĐT qua 1 điểm, vuông góc với d , thỏa ĐK khoảng cách

☞PTĐT qua 1 điểm, thỏa ĐK khác

☞PTĐT cắt 2 đường thẳng d_1,d_2, thỏa ĐK khác

☞PTĐT nằm trong (P), vừa cắt vừa vuông góc với d

☞PTĐT thỏa ĐK đối xứng

☞PT giao tuyến của 2 mặt phẳng

☞PT đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán viết phương trình đường thẳng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ khi biết điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

*** Trong không gian *Oxyz*:**

Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$ có phương trình tham số $\Delta:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ và phương trình chính tắc $\Delta:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\ (abc\neq 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{BA}$.

Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}\ (k\neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ, do đó một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ và suy ra $\overrightarrow{MN}=2\vec{u}$, với $\vec{u}=(1;1;-1)$.

B2: Chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm M và N.

B3: Viết phương trình đường thẳng MN đi qua $M(1;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=2\vec{u}$, với $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Ta chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm M và N.

Đường thẳng MN đi qua $M(1;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$ có phương trình tham số là

$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Bài tập tương tự và phát triển 1:

Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $E(1;2;3)$ va có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=5+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3+5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-3t \\ z=3+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3+5t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}=(1;-3;5)$

Suy ra vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a}=(1;-3;5)$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;2;3)$ và có VTCP $\vec{a}=(1;-3;5)$ có PTTS: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3+5t \end{cases}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;2;2), B(0;-1;2), C(4;0;-2)$, đường thẳng đi qua C và song song với AB có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=-2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-1 \\ z=-2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=4+t \\ y=t \\ z=-2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng song song với AB, nên $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;-3;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\vec{u}$ với $\vec{u}=(1;-1;0)$.

Ta chọn $\vec{u}=(1;-1;0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Đường thẳng Δ đi qua $C(4;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;-1;0)$ có PTTS: $\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=-2 \end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;7;-4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+2y+5z-4=0$ có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{-4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+4}{5}$.

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-4}{5}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;-2;3)$.

Vì $\Delta\perp(\alpha)\Rightarrow$ vectơ chỉ phương của Δ: $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(1;-2;3)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;7;-4)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;5)$ có PTCT: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+4}{5}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$. Đường thẳng d đi qua $N(3;0;-5)$ song song với đường thẳng Δ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=2\\z=-3-5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-t\\y=2t\\z=-5-3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3-t\\y=2t\\z=-5+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-t\\y=-2t\\z=-5-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;-3)$.

Vì d song song với Δ nên vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;2;-3)$.

Đường thẳng d đi qua $N(3;-5;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;2;-3)$ có PTTS: $\begin{cases}x=3-t\\y=2t\\z=-5-3t\end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(1;2;3),B(3;-2;3),C(-1;0;-3),D(1;1;0)$, đường thẳng Δ đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với CD có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=2+2t\\y=t\\z=3+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1\\z=3+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2-2t\\y=t\\z=3+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+2t\\y=t\\z=3-3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\begin{cases}x_I=\frac{1+3}{2}=2\\y_I=\frac{2-2}{2}=0\\z_I=\frac{3+3}{2}=3\end{cases}$. Vậy $I(2;0;3)$.

Vì Δ song song với CD, nên $\overrightarrow{CD}$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Ta có: $\overrightarrow{CD}=(2;1;3)$.

Ta chọn $\vec{u}=\overrightarrow{CD}=(2;1;3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Đường thẳng Δ đi qua $I(2;0;3)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;1;3)$ có PTTS: $\begin{cases}x=2+2t\\y=t\\z=3+3t\end{cases}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;-3;-4)$ và song song đường thẳng chứa trục Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=2+2020t\\y=-3\\z=-4\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=-4+2020t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2\\y=-3+2020t\\z=-4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=-3\\z=-4-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, một vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục Oy là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Chọn $\vec{u}=2020\vec{j}=(0;2020;0)$ làm một vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục Oy.

Vì đường thẳng Δ song song đường thẳng chứa trục $Oy \Rightarrow$ một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u}=2020\vec{j}=(0;2020;0)$

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;-3;-4)$ và có VTCP $\vec{u}=(0;2020;0)$ có PTTS: $\begin{cases}x=2\\y=-3+2020t\\z=-4\end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=2-3t\end{cases}$. Đường thẳng d đi qua $B(1;0;-2)$ song song với đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;-3)$.

Vì d song song với Δ nên vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d đi qua $B(1;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;-2;-3)$ có PTCT: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1), B(-1;1;0), C(1;3;2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=1+t\\z=1\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm của BC thì $M\begin{cases} x_M=\dfrac{-1+1}{2}=0 \\ y_M=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ z_M=\dfrac{0+2}{2}=1 \end{cases}\Rightarrow M(0;2;1)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$

Ta có đường thẳng AM nhận $\vec{u}=\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$ làm một vectơ chỉ phương.

Ta có đường thẳng AM đi qua $A(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$ làm một vectơ chỉ phương có PTTS: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và song song đường thẳng chứa trục Ox có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3+t \\ z=2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-3+t \\ z=2+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, một vectơ chỉ phương của đường thẳng chứa trục Ox là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vì đường thẳng Δ song song đường thẳng chứa trục $Ox\Rightarrow$ một VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\vec{i}=(1;0;0)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-3;2)$ và có VTCP $\vec{i}=(1;0;0)$ có PTTS: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;-2), B(2;-3;-4), C(3;0;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng OG có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{3}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-3}$. **C.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$. **D.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tam tam giác $ABC\Rightarrow G\begin{cases} x_G=\dfrac{1+2+3}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{0-3+0}{3}=-1 \\ z_G=\dfrac{-2-4-3}{3}=-3 \end{cases}$. Vậy $G(2;-1;-3)$.

Ta có: $\overrightarrow{OG}=(2;-1;-3)$.

Ta có đường thẳng OG đi qua $O(0;0;0)$ nhận $\vec{u}=\overrightarrow{OG}=(2;-1;-3)$ làm một vectơ chỉ phương có PTCT: $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$.

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3;4;-7)$ và song song với 2 mặt phẳng $(\alpha): x-y+z-2=0$ và $(\beta): 2x+y+z-1=0$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+7}{3}$. **B.** $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+7}{3}$.

C. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-7}$. **D.** $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+7}{-3}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(2;1;1)$.

Vì $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ không cùng phương.

Vì Δ song song với mặt phẳng (α) và (β) nên Δ có một VTCP $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-2;1;3)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(3;4;-7)$ và có VTCP $\vec{u}=(-2;1;3)$ có PTCT: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+7}{3}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $B(0;4;-5)$ và vuông góc với 2 đường thẳng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;0)$ và $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;-2)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=4-2t\\y=-4t\\z=-5+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-4t\\y=4-2t\\z=-5+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-4\\y=-2+4t\\z=1-5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-5+t\\y=4-2t\\z=-4t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Vì Δ vuông góc với 2 đường thẳng có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;0)$ và $\overrightarrow{u_2}=(-1;1;-2)$, suy ra một VTCP của Δ là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(-4;-2;1)$

Đường thẳng Δ đi qua $B(0;4;-5)$ và có VTCP $\vec{u}=(-4;-2;1)$ có PTTS: $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+7}{3}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, gọi P_1,P_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $P(6;7;8)$ lên trục Oy và mặt phẳng (Oxz). Đường thẳng Δ đi qua $C(7;2;-1)$ và song song với đường thẳng P_1P_2 có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-6}{7}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-8}{-1}$. **B.** $\frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{8}$.

C. $\frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{8}$. **D.** $\frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{-8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

P_1 là hình chiếu vuông góc của điểm $P(6;7;8)$ lên trục $Oy \Rightarrow P_1(0;7;0)$.

P_2 là hình chiếu vuông góc của điểm $P(6;7;8)$ lên mặt phẳng $(Oxz) \Rightarrow P_2(6;0;8)$.

Chọn một vectơ chỉ phương của đường thẳng P_1P_2 là $\overrightarrow{P_1P_2}=(6;-7;8)$.

Vì Δ song song với đường thẳng P_1P_2, suy ra Δ có một VTCP là $\vec{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=(6;-7;8)$.

Đường thẳng Δ đi qua $C(7;2;-1)$ và có VTCP $\vec{u}=(6;-7;8)$ có PTCT: $\frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{8}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, gọi T_1, T_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $T(4;5;6)$ lên các trục Oy và trục Oz. Đường thẳng Δ đi qua $D(-4;3;-8)$ và song song với đường thẳng T_1T_2 có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=-4t \\ y=-5-3t \\ z=6-8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4 \\ y=3-5t \\ z=-8+6t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-4 \\ y=3-5t \\ z=-8+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-4 \\ y=3-5t \\ z=-8+6t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

T_1 là hình chiếu vuông góc của điểm $T(4;5;6)$ lên trục $Oy \Rightarrow T_1(0;5;0)$.

T_2 là hình chiếu vuông góc của điểm $T(4;5;6)$ lên trục $Oz \Rightarrow T_2(0;0;6)$.

Chọn một vectơ chỉ phương của đường thẳng T_1T_2 là $\overrightarrow{T_1T_2}=(0;-5;6)$.

Vì Δ song song với đường thẳng T_1T_2, suy ra Δ có một VTCP là $\vec{u}=\overrightarrow{T_1T_2}=(0;-5;6)$.

Đường thẳng Δ đi qua $D(-4;3;-8)$ và có VTCP $\vec{u}=(0;-5;6)$ có PTTS: $\begin{cases} x=-4 \\ y=3-5t \\ z=-8+6t \end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;2), B(2;-1;5), C(3;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là

A. $\frac{x-14}{2}=\frac{y-9}{\frac{4}{3}}=\frac{z-7}{2}$. **B.** $\frac{x-2}{15}=\frac{y-3}{9}=\frac{z-2}{7}$.

C. $\frac{x-2}{15}=\frac{y+\frac{4}{3}}{9}=\frac{z-2}{7}$. **D.** $\frac{x-2}{15}=\frac{y-\frac{4}{3}}{9}=\frac{z-2}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Vì G là trọng tam tam giác $ABC \Rightarrow G\begin{cases} x_G = \dfrac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{3-1+2}{3} = \dfrac{4}{3} \\ z_G = \dfrac{2+5-1}{3} = 2 \end{cases}$. Vậy $G\left(2;\dfrac{4}{3};2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-4;3), \overrightarrow{AC} = (2;-1;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (15;9;7)$.

Vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C, nên ta chọn một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (15;9;7)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua $G\left(2;\dfrac{4}{3};2\right)$ và nhận $\overrightarrow{u_\Delta} = (15;9;7)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-2}{15} = \dfrac{y-\dfrac{4}{3}}{9} = \dfrac{z-2}{7}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $E(1;2;1)$, song song với mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0$ và vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1-t \\ z = 2+5t \end{cases}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 4+t \\ y = -7-2t \\ z = -3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = 2-7t \\ z = 1-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-7t \\ z = 1-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+7t \\ z = 1+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1;1;-1)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;5)$.

Vì Δ song song với mặt phẳng (α) và vuông góc với đường thẳng d nên Δ có một VTCP $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{u_d}\right] = (-4;7;3)$

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;2;1)$ và có VTCP $\vec{u} = (-4;7;3)$ có PTTS: $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-7t \\ z = 1-3t \end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha): x+2y+z-1=0$ và $(\beta): x-y-z+2=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-2t \\ z = 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1-2t \\ z = 3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \\ z = 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (β) có một VTPT là $\overrightarrow{n_\beta}=(1;-1;-1)$

Khi đó $\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-1;2;-3)$

Vì đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha):x+2y+z-1=0$ và

$(\beta):x-y-z+2=0$ nên Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;3)$.

Tọa độ $M(x;y;z)\in\Delta$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-y-z+2=0\end{cases}$.

Trong hệ trên, cho $x=-1$ ta được $\begin{cases}2y+z=2\\y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-1;1;0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1;1;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;3)$ có PTTS: $\begin{cases}x=-1+t\\y=1-2t\\z=3t\end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-4;0),B(3;0;0)$. Viết phương trình đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB, biết Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y+z+1=0$.

A. $\begin{cases}x=-4+t\\y=4-2t\\z=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-t\\z=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{AB}=(4;4;0)$

Gọi $\vec{u}$ là một VTCP của Δ, theo đề $\Delta\perp AB$ và $\Delta\perp(\alpha)$

nên $\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-4;4;0)=-4(1;-1;0)$.

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó $I\begin{cases}x_I=\dfrac{-1+3}{2}=1\\y_I=\dfrac{-4}{2}=-2\\z_I=\dfrac{0+0}{2}=0\end{cases}$. Vậy $I(1;-2;0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $I(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;-1;0)$ có PTTS: $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-t\\z=0\end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;0)$ cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có PTTS: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$.

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}=(2;1;-1)$.

Gọi $N=d\cap\Delta\Rightarrow N(1+2t;-1+t;-t)$

Ta có $\overrightarrow{MN}=(2t;t-2;-t)$ là một VTCP của Δ

Vì $\Delta\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(1+2t)-2+t+t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-4;-2)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(2;1;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-4;-2)$ có PTCT: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{-2}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1),B(2;3;-1),C(-2;1;1)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=3\\y=-1+2t\\z=5\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3t\\y=2+t\\z=5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3t\\y=2-3t\\z=5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3t\\y=2-t\\z=5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;0),\overrightarrow{BC}=(-4;-2;2),\overrightarrow{AC}=(-3;1;2)$.

Suy ra $AB=\sqrt{10},BC=\sqrt{24},AC=\sqrt{14}$. Nhận xét $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A.

Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của $BC\Rightarrow I(0;2;0)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(6;-2;10)$. Vì Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}=\dfrac{1}{2}(6;-2;10)=(3;-1;5)$.

Đường thẳng Δ đi qua $I(0;2;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(3;-1;5)$ có PTTS: $\begin{cases}x=3t\\y=2-t\\z=5t\end{cases}$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P):x-y-z-1=0$. Đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.
B. $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{5}$.
C. $\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$.
D. $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{-5}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có PTTS: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=2+3t\end{cases}$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)$.

Gọi $B=d\cap\Delta\Rightarrow B(-1+2t;1+t;2+3t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2t-2;t;3t+4)$ là một VTCP của Δ.

Vì $\Delta//(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 2t-2-t-3t-4=0\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-8;-3;-5)$.

Chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}=(8;3;5)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(8;3;5)$ có PTCT: $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$

Đường thẳng Δ đi qua $A(-1;1;2)$ cắt d_1 và vuông góc với d_2 có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=-1+t\\z=2t\end{cases}$.
B. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.
C. $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$.
D. $\begin{cases}x=-1-3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có PTTS: $\begin{cases}x=2+3t\\y=-3+2t\\z=1+t\end{cases}$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP là $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

Gọi $B=d_1\cap\Delta\Rightarrow B(2+3t;-3+2t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3+3t;-4+2t;-1+t)$ là một VTCP của Δ.

Vì $\Delta\perp d_2\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow 3+3t+3(-4+2t)-2(-1+t)=0$

$\Leftrightarrow t=1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(6;-2;0)$.

Chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}=(3;-1;0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(-1;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(3;-1;0)$ có PTTS: $\begin{cases}x=-1+3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases}x=62\\y=-25\\z=61-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=62t\\y=25t\\z=-2+61t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$.

Đường thẳng d có PTTS: $\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}$. Gọi $A=d\cap(P)\Rightarrow A(12+4t;9+3t;1+t)$

Vì $A\in(P)\Rightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow A(0;0;-2)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $B(12;9;1)$. Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

có PTTS là $\begin{cases}x=12+3t\\y=9+5t\\z=1-t\end{cases}$ và $H\in BH\Rightarrow H(12+5t;9+3t;1-t)$.

Vì $H\in(P)\Rightarrow 3(12+3t)+5(9+5t)-(1-t)-2=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{78}{35}\Rightarrow H\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right)$. Chọn một VTCP của đường thẳng d' là $\vec{u'}=(62;-25;61)$

Đường thẳng d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có VTCP $\vec{u'}=(62;-25;61)$ có PTTS: $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-6}{-4}=\dfrac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0;5;3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1;1;0)$ thuộc đường thẳng AC. Phương trình tham số của đường thẳng AC là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc $A, (d): \begin{cases} x=t \\ y=6-4t \\ z=6-3t \end{cases}$.

Gọi D là điểm đối xứng với M qua (d). Khi đó $D \in AC \Rightarrow$ đường thẳng AC có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{ND}$.

* Ta xác định điểm D. Gọi K là giao điểm của MD với (d).

Ta có $K(t;6-4t;6-3t)$; $\overrightarrow{MK}=(t;1-4t;3-3t)$.

Vì $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{u_d}$, với $\overrightarrow{u_d}=(1;-4;-3)$ nên $t-4(1-4t)-3(3-3t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow K\left(\frac{1}{2};4;\frac{9}{2}\right)$, mà K là trung điểm của MD nên $\begin{cases} x_D=2x_K-x_M \\ y_D=2y_K-y_M \\ z_D=2z_K-z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=1 \\ y_D=3 \\ z_D=6 \end{cases}$ hay $D(1;3;6)$.

Một vectơ chỉ phương của AC là $\overrightarrow{ND}=(0;2;6)=2(0;1;3)=2\vec{u}$, với $\vec{u}=(0;1;3)$.

Đường thẳng AC đi qua $N(1;1;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(0;1;3)$. có PTTS: $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=3t \end{cases}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-5y-z=0$ và 2 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases}$; $d_2: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$. Đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$. **B.** $\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x+3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{3}$. **D.** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d_2 có PTTS: $\begin{cases} x=2s \\ y=1-s \\ z=-s \end{cases}$

Gọi $A=d_1 \cap \Delta \Rightarrow A(1+t;-1+t;3-t)$ mà $A \in (P) \Rightarrow 2(1+t)-5(-1+t)-(3-t)=0 \Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $A(3;1;1)$.

Gọi $B = d_2 \cap \Delta \Rightarrow B2s(1+t;1-s;-s)$ mà $B \in (P) \Rightarrow 2(2s)-5(1-s)-(-s)=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$.

Suy ra $B\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}(4;1;3)=\frac{1}{2}\overrightarrow{u_\Delta}$.

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(4;1;3)$

Đường thẳng Δ đi qua $A(3;1;1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(4;1;3)$ có PTCT: $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(P):3x+y+z=0$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=4+t \\ y=-5t \\ z=-7-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=5t \\ z=-3-7t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-5t \\ z=-3-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-4t \\ y=-5t \\ z=-3-7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có PTTS: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=-3+2t \end{cases}$.

Đường thẳng d có một VTCP: $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;2)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(3;1;1)$.

Gọi $M = d \cap (\alpha) \Rightarrow M(1+t;-2t;-3+2t)$, mà

$M \in (P) \Rightarrow 3(1+t)-2t-4+2t=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(1;0;-3)$

Gọi $\vec{u}$ là một VTCP của Δ, theo đề $\Delta \perp d$ và $\Delta \perp (\alpha)$

nên $\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_d} \\ \vec{u} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{u_d}\right]=(4;-5;-7)..$

Chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}=(4;-5;-7)$

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;0;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=(4;-5;-7)$ có PTTS: $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-5t \\ z=3-7t \end{cases}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P):7x+y-4z=0$, cắt hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ và $d_2:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=3 \end{cases}$ có phương trình chính tắc là

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{4}.$ **B.** $\Delta:\begin{cases}x=2-7t\\y=-t\\z=-1+4t\end{cases}.$

C. $\Delta:\dfrac{x+2}{-7}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}.$ **D.** $\Delta:\dfrac{x+7}{-5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-4}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(7;1;4)$

d_1 có phương trình tham số: $d_1:\begin{cases}x=2m\\y=1-2m\\z=-2+m\end{cases}$

Giả sử Δ cắt d_1 tại $A\Rightarrow A(2m;1-2m;-2+m)$

Giả sử Δ cắt d_2 tại $B\Rightarrow B(-1+2t;1+t;3)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2t-1-2m;t+m;5-m)$

Vì đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}$

Tức là $\dfrac{2t-1-2m}{7}=\dfrac{t+m}{1}=\dfrac{5-m}{-4}=k\Leftrightarrow\begin{cases}2t-1-2m=7k\\t+m=k\\5-m=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\m=1\\k=-1\end{cases}.$

Suy ra $A(2;0;-1),B(-5;-1;3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-7;-1;4).$

Vậy đường thẳng Δ đi qua $A(2;0;-1)$ và nhận $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-7;-1;4)$ làm một vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\Delta:\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{4}.$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-2+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của MN có phương trình tham số là

A. $\Delta:\begin{cases}x=-6-7t\\y=-1+4t\\z=3+t\end{cases}.$ **B.** $\Delta:\begin{cases}x=-6-7t\\y=-1-4t\\z=3+t\end{cases}.$

C. $\Delta:\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}.$ **D.** $\Delta:\dfrac{x+6}{-7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{1}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có Δ cắt d tại $M\Rightarrow M(-2+2t;1+t;1-t)$.

Vì A là trung điểm của MN nên $N:\begin{cases}x_N=2x_A-x_M=4-2t\\y_N=2y_A-y_M=5-t\\z_N=2z_A-z_M=t+3\end{cases}$ hay $N(4-2t;5-t;t+3)$.

Vì Δ cắt (P) tại $N\Rightarrow N\in(P)\Rightarrow 2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2.$

Do đó $M(-6;-1;3)$ và $\overrightarrow{AM}=(-7;-4;1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua $M(-6;-1;3)$ và nhận $\vec{u}=\overrightarrow{AM}=(-7;-4;1)$ làm một vectơ chỉ

phương có phương trình tham số là $\Delta:\begin{cases}x=-6-7t\\y=-1-4t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(0;-1;2)$ đồng thời cắt hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\y=4-t\\z=2+4t\end{cases}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=4+t\\y=-5t\\z=-7-3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=5t\\z=-3-7t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=9t\\y=-1-9t\\z=2-16t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-4t\\y=-5t\\z=-3-7t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d_1 có PTTS: $\begin{cases}x=1+s\\y=-2-s\\z=3+2s\end{cases}$

Gọi $A=d_1\cap\Delta\Rightarrow A(1+s;-2-s;3+2s)$ và $B=d_2\cap\Delta\Rightarrow B(-1+2t;4-t;2+4t)$

$\overrightarrow{MA}=(s+1;-s-1;2s+1);\overrightarrow{MB}=(2t-1;-t+5;4t)$

Ta có Δ đi qua điểm M cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B nên 3 điểm M,A,B thẳng hàng

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}s+1=k(2t-1)\\-s-1=k(-t+5)\\2s+1=4kt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=\dfrac{7}{2}\\k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{MB}=(-9;9;-16)\\t=-4\end{cases}$$

Chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}=(9;-9;16)$

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;-1;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(9;-9;16)$ có PTTS: $\begin{cases}x=9t\\y=-1-9t\\z=2-16t\end{cases}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=4+3t\\y=1-t\\z=-5-2t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Đường vuông góc chung Δ của 2 đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình chính tắc là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$.

D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d_2 có PTTS: $\begin{cases}x=2+s\\y=-3+3s\\z=s\end{cases}$

Gọi $M=d_1\cap\Delta\Rightarrow M\left(4+3t;1-t;-5-2t\right)$ và $N=d_2\cap\Delta\Rightarrow N\left(2+s;-3+3s;s\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(-2-3t+s;t+3s-4;2t+s+5\right)$, suy ra $\overrightarrow{MN}$ là một VTCP của Δ

Vì Δ là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2s-t-3=0\\s-8t-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\t=-1\end{cases}$$

Suy ra $M\left(1;2;-3\right),N\left(3;0;1\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(2;-2;4\right)=2\left(1;-1;2\right)=2\overrightarrow{u_\Delta}$.

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(1;-1;2\right)$

Đường thẳng Δ đi qua $M\left(1;2;-3\right)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(1;-1;2\right)$ có PTCT: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$.

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung Δ của 2 đường thẳng d_1 và d_2 cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B. Diện tích S của tam giác OAB bằng

A. $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $S=\sqrt{6}$.

C. $S=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $S=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d_1 có PTTS: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=-2+t\end{cases}$ và $\overrightarrow{u_1}=\left(2;-1;1\right)$ là một VTCP của d_1.

Đường thẳng d_2 có PTTS: $\begin{cases}x=-1+s\\y=1+7s\\z=3-s\end{cases}$ và $\overrightarrow{u_2}=\left(1;7;-1\right)$ là một VTCP của d_2.

Gọi $A=d_1\cap\Delta\Rightarrow A(1+2t;-t;-2+t)$ và $B=d_2\cap\Delta\Rightarrow B(-1+s;1+7s;3-s)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2-2t+s;1+t+7s;5-t-s)$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của Δ

Vì Δ là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6t-6s=0\\ 6t+52s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\ s=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;0;-2)\\ B(-1;1;3)\end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{OA}=(1;0;-2);\overrightarrow{OB}=(-1;1;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(2;-1;1)$.

Vậy $S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0),B(0;2;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến đường thẳng Δ là lớn nhất. Hỏi điểm nào sau đây nằm trên Δ?

A. $E(-1;-2;0)$. **B.** $F(1;-1;0)$. **C.** $G(-1;-1;-1)$. **D.** $H(5;-7;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng qua ba điểm A,B,C là

$(ABC):\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1\Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Nhận xét $D(1;1;1)\in(ABC)$. Gọi A',B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên Δ.

Suy ra $d(A,\Delta)+d(B,\Delta)+d(C,\Delta)=AA'+BB'+CC'\le AD+BD+CD$. Dấu bằng xảy ra khi $A'\equiv B'\equiv C'\equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ điểm A,B,C đến Δ lớn nhất khi Δ là đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Phương trình tham số của đường thẳng d là $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+3t\\ z=1+t\end{cases}$. Nhận thấy $E(-1;-2;0)\in\Delta$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-t\end{cases}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$. .

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng $(P):x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại 2 điểm A,B sao cho AB ngắn nhất có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=-1+6t\\ y=\frac{5}{2}\\ z=1-\frac{9t}{2}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=6+t\\ y=\frac{5}{2}\\ z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=6-t\\ y=\frac{5}{2}\\ z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=6-t\\ y=\frac{5}{2}\\ z=-\frac{9}{2}-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$.

Đường thẳng d_2 có PTTS: $\begin{cases}x=1+s\\y=-2+3s\\z=2-2s\end{cases}$

Gọi $A=d_1\cap\Delta\Rightarrow A(1+2t;t;-2-t)$ và $B=d_2\cap\Delta\Rightarrow B(1+s;-2+3s;2-2s)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(s-2t;3s-t-2;-2s+t+4)$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của Δ

Vì $\Delta//(P)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow s=t-1$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-t-1;2t-5;6-t)$.

$$AB=\sqrt{(-t-1)^2+(2t-5)+(6-t)^2}=\sqrt{6t^2-30t+62}=\sqrt{6\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\ge\frac{7\sqrt{2}}{2},\forall t\in\mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right),\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{7}{2};0;\frac{7}{2}\right)$

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;0;1)$

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;0;1)$ có PTTS: $\begin{cases}x=6-t\\y=\frac{5}{2}\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A nằm trên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm A,B. Để AB có độ dài lớn nhất thì phương trình của Δ là

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{-3}$.

B. $\frac{x+3}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

D. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}=(2;-2;1)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Do $d(I,(\alpha))=\frac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R$ nên Δ luôn cắt (S) tại 2 điểm A,B.

Khi đó $AB=2\sqrt{R^2-\left[d(I,\Delta)\right]^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I,\Delta)$ nhỏ nhất.

$d(I,\Delta)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=IH$, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α).

Đường thẳng IH đi qua $I(2;3;5)$ và vuông góc với (α) có PTTS: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Vì $H\in(\alpha)\Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$. Chọn một VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;6)$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;6)$ có PTCT: $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$, điểm $A(2;2;4)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-2=0$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ là lớn nhất có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}$.

B. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{1}$.

D. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$.

Tọa độ giao điểm B của d và (P) là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3} \\ x+y+z-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}\Rightarrow B(1;0;1)$. Ta có Δ đi qua B.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ. Ta có $d(A,\Delta)=AH\le AB$ nên $d(A,\Delta)$ đạt giá trị lớn nhất bằng AB.

Khi đó đường thẳng Δ qua B và có một VTCP là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;2;-1)$.

Chọn một VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;1)$.

Đường thẳng Δ đi qua $B(1;0;1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;1)$ có PTCT: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Thay tọa độ $B(1;0;1)$ vào 4 phương án, ta thấy phương án **B** thỏa mãn.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;0)$ và mặt phẳng $(P):x-2y-2z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P), M là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P), N là điểm thuộc d sao cho diện tích tam giác IMN nhỏ nhất. Tọa độ điểm N là

A. $N\left(2;-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $N\left(2;\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **C.** $N\left(2;-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **D.** $N\left(2;\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d' có PTTS là $d':\begin{cases}x=1+s\\y=-2s\\z=-2s\end{cases}$.

Tọa độ M là giao điểm của d' và (P)

$\Rightarrow (1+s)-2(-2s)-2(-2s)+1=0\Leftrightarrow s=-\frac{2}{9}\Rightarrow M\left(\frac{7}{9};\frac{4}{9};\frac{4}{9}\right)$.

Vậy $IM=\sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2}=\frac{2}{3}$.

Gọi H là hình chiếu của N lên d' thì $S_{MNI}=\frac{1}{2}IM.NH=\frac{1}{3}NH$.

Do đó, diện tích tam giác MNI nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài NH nhỏ nhất.

N là điểm thuộc d nên tọa độ N có dạng $N(2;t;1+t)\Rightarrow \overrightarrow{IN}=(1;t;t+1)$.

Đường thẳng d' có VTCP $\overrightarrow{u'}=(1;-2;-2)$. Ta có $\left[\overrightarrow{IN},\overrightarrow{u'}\right]=(2;t+3;-t-2)$

Mà $NH=d(N,d')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IN},\overrightarrow{u'}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u'}\right|}=\frac{\sqrt{2^2+(t+3)^2+(-t-2)^2}}{3}=\frac{\sqrt{2t^2+10t+17}}{3}$

$=\frac{\sqrt{2\left(t+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}}{3}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy NH nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi và chỉ khi $t=-\frac{5}{2}\Rightarrow N\left(2;-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng d đi qua $A(-1;0;-1)$ và cắt $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa d và $d_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có PTTS: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2-t\end{cases}$

Gọi $M = d_1 \cap d \Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t+2;t+2;-t-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d

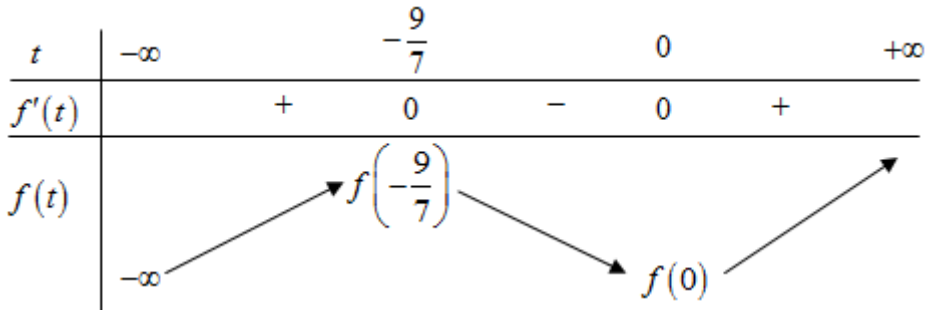
d_2 có một VTCP là $\overrightarrow{u_2} = (-1;2;2)$.

$$\cos(d,d_2) = \frac{|(-1).(2t+2)+2(t+2)+2(-t-1)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}.\sqrt{(2t+2)^2+(t+2)^2+(-1-t)^2}} = \frac{2|t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2+14t+9}, \forall t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = \frac{14t^2+18t}{(6t^2+14t+9)^2} = 0 \Leftrightarrow 14t^2+18t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{9}{7} \\ t = 0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



ta suy ra được $\min\limits_{\mathbb{R}} f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Do đó $\min\left[\cos(d,d_2)\right] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;2;-1)$

Chọn một VTCP của d là $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$

Đường thẳng d đi qua $A(-1;0;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$ có PTCT: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8=0$. Đường thẳng d thay đổi đi qua M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác OAB.

A. $S_{\max} = 2\sqrt{7}$. **B.** $S_{\max} = 3\sqrt{7}$. **C.** $S_{\max} = 2\sqrt{2}$. **D.** $S_{\max} = \sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vì $OM = 1 < R \Rightarrow M$ nằm bên trong mặt cầu.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ O xuống AB. Đặt $OH = x$ với $0 < x \le 1$.

Suy ra $HA = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{8-x^2}$.

Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}OH.2HA = \frac{1}{2}2x\sqrt{8-x^2} = x\sqrt{8-x^2}$.

Xét hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$

Ta có $f'(x)=\sqrt{8-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}=\dfrac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}>0,\forall x\in(0;1]\Rightarrow \max\limits_{(0;1]} f(x)=f(1)=\sqrt{7}$.

Vậy $S_{\max}=\sqrt{7}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, gọi đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$ sao cho góc giữa d và $\Delta:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ là lớn nhất. Phương trình chính tắc của đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-7}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{7}$.

D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Δ có một VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-2;2)$.

d có một VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$.

(P) có một VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1)$

Vì $d//(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 2a-b-c=0\Leftrightarrow c=2a-b$.

$$\cos(d,\Delta)=\frac{|a-2b+2c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}$, ta có $\cos(d,\Delta)=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}=\dfrac{25t^2-40t+16}{5t^2-4t+2},\forall t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{100t^2-60t-16}{(5t^2-4t+2)^2}=0\Leftrightarrow 100t^2-60t-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{1}{5}\\ t=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{1}{5}\right)$	↘	$f\left(\frac{4}{5}\right)$	↗	

ta suy ra được $\max\limits_{\mathbb{R}} f(t)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $\max\left[\cos(d,\Delta)\right]=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{a}{b}=-\frac{1}{5}$.

Chọn $a=1\Rightarrow b=-5,c=7$.

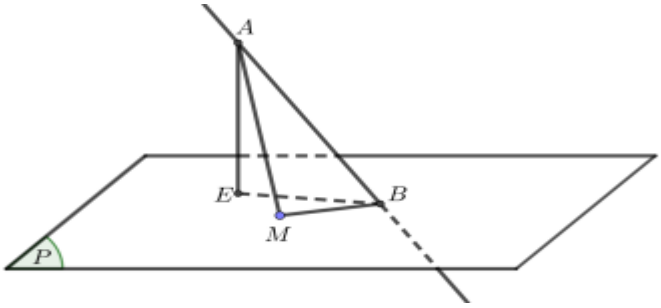
Đường thẳng d đi qua $A(1;-1;2)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;-5;7)$ có PTCT: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+4y-4z+5=0$ và cắt mặt phẳng (P) tại B. Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới một góc vuông và MB có độ dài lớn nhất. Tính độ dài MB.

A. $MB=\sqrt{5}$. **B.** $MB=\sqrt{51}$. **C.** $MB=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $MB=\sqrt{41}$.

Lời giải

Chọn A



Đường thẳng d đi qua $A(1;2;-3)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{n_Q}=(3;4-4)$ có PTTS $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\\z=-3-4t\end{cases}$

Ta có $MB^2=AB^2-MA^2$. Do đó $MN_{\max}\Leftrightarrow MA_{\min}$.

Gọi E là hình chiếu của A lên (P). Ta có $AM\geq AE$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv E$.

Khi đó $MA_{\min}=AE$ và MB qua B nhận $\overrightarrow{BE}$ làm VTCP.

Ta có $B\in d\Rightarrow B(1+3t;2+4t;-3-4t)$

mà $B\in(P)\Rightarrow 2(1+3t)+2(2+4t)-(-3-4t)+9=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow B(-2;-2;1)$.

Đường thẳng AE qua $A(1;2;-3)$ và nhận $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$ làm VTCP có PTTS $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$

Suy ra $E(1+2t;2+2t;-3-t)$.

mà $E\in(P)\Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow E(-3;-2;-1)$.

Khi đó $MB=BE=\sqrt{(-3-(-2))^2+(-2-(-2))^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$.

DẠNG TOÁN 38: LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG (Oxyz)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Phương trình đường thẳng:

• Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ với $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$ làm vecto chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình tham số là : $\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t; \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=z_0+a_2t \end{cases}$

• Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ sao cho $a_1a_2a_3\neq 0$ làm vecto chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình chính tắc là : $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$

2. Góc:

a. Góc giữa hai đường thẳng:

Δ_1 có vecto chỉ phương $\vec{a_1}$

Δ_2 có vecto chỉ phương $\vec{a_2}$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có: $\boxed{\cos\varphi=\frac{\left|\vec{a_1}.\vec{a_2}\right|}{\left|\vec{a_1}\right|.\left|\vec{a_2}\right|}}$

b. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Δ có vecto chỉ phương $\vec{a_\Delta}$

(α) có vecto chỉ phương $\vec{n_\alpha}$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và (α). Ta có: $\boxed{\sin\varphi=\frac{\left|\vec{a_\Delta}.\vec{n_\alpha}\right|}{\left|\vec{a_\Delta}\right|.\left|\vec{n_\alpha}\right|}}$

3. Khoảng cách:

a. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

Δ đi qua điểm M_0 và có vecto chỉ phương $\vec{a_\Delta}$

$$\boxed{d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{a_\Delta},\overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{a_\Delta}\right|}}$$

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Δ_1 đi qua điểm M và có vecto chỉ phương $\vec{a_1}$

Δ_2 đi qua điểm N và có vecto chỉ phương $\vec{a_2}$

$$\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\vec{a_1},\vec{a_2}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{a_1},\vec{a_2}\right]\right|}}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- PT đường thẳng trong $Oxyz$ (Lập PTĐT qua hai điểm)
- PTĐT qua 1 điểm, dễ tìm VTCP (không dùng t.c.h)
- PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho 2 mp)
- PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho 2 đt)
- PTĐT qua 1 điểm, VTCP tìm bằng t.c.h (cho đt+mp)
- PTĐT qua 1 điểm, cắt d1, có liên hệ với d2
- PTĐT qua 1 điểm, cắt d, có liên hệ với mp (P)
- PTĐT qua 1 điểm, cắt d1 lẫn d2
- PTĐT qua 1 điểm, vừa cắt – vừa vuông góc với d
- PTĐT qua 1 điểm, vuông góc với d, thỏa ĐK khoảng cách
- PTĐT qua 1 điểm, thỏa ĐK khác
- PTĐT cắt 2 đường thẳng d1,d2, thỏa ĐK khác
- PTĐT nằm trong (P), vừa cắt vừa vuông góc với d
- PTĐT thỏa ĐK đối xứng
- PT giao tuyến của 2 mặt phẳng
- PT đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán viết phương trình đường thẳng trong hệ trục toạ độ $Oxyz$ khi biết điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ và suy ra $\overrightarrow{MN}=2\vec{u}$, với $\vec{u}=(1;1;-1)$.

B2: Chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm M và N.

B3: Viết phương trình đường thẳng MN đi qua $M(1;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=2\vec{u}$, với $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Ta chọn $\vec{u}=(1;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm M và N.

Đường thẳng MN đi qua $M(1;0;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-1)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}.$$

Bài tập tương tự và phát triển 2:

Mức độ 1

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(1,4-2)$. Đường thẳng AB có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=1\\ y=2-2t\\ z=3+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\ y=2+2t\\ z=3-5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\ y=2+3t\\ z=5-3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\ y=4+2t\\ z=2-5t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;2;-5)\Rightarrow \vec{u}=(0;2-5)$

Đường thẳng AB qua $A(1;2;3)$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(0;2-5)$ là:

$$\begin{cases}x=1\\ y=2+2t\\ z=3-5t\end{cases}$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d qua $A(2;3;-4)$ và có véctơ chỉ phương $u=(1;3;4)$ có phương trình chính tắc là ?

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{4}$. **B.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-4}{4}$.

C. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{4}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình chính tắc đường thẳng d qua $A(2;3;-4)$ và có véctơ chỉ phương $u=(1;3;4)$ là:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{4}$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ qua $M(-1;3;4)$ vuông góc với mặt phẳng $(P): x+2y+3z+4=0$ có phương trình tham số là ?

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=4+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t \\ z=4+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-t \\ y=3+2t \\ z=4-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P = (1;2;3)$

Phương trình tham số đường thẳng d qua $M(-1;3;4)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ là:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \\ z=4+3t \end{cases}$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d qua điểm $A(-1;2;3)$ và song song với $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{5}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \\ z=-3+5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=3+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=5+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$d // \Delta \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta = (2;4;5)$

Phương trình tham số đường thẳng d qua điểm $A(-1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;4;5)$

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases}$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;1;2), B(1;-3;4); C(3;1;2)$, viết phương trình chính tắc đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi M là trung điểm BC, khi đó $M(2;-1;3)$

Đường thẳng AM có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(2;-2;1)=\vec{u}$

Phương trình chính tắc đường thẳng AM qua $A(0;1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-2;1)$ là: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(3;3;3)$

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=-2+t\\z=3+t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3+t\\y=3+2t\\z=3+3t\end{cases}$.

Lời giải:

Chọn C

Véctơ $(1;1;1)$ cùng phương với $\vec{u}=(3;3;3)$ nên cũng là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d suy ra phương trình tham số đường thẳng qua $A(1;2;3)$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;1;1)$ là

$$\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=z$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là?

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+2t\\z=t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=2+t\\y=2+3t\\z=1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1-2t\\y=3-2t\\z=t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3+2t\\z=-t\end{cases}$.

Lời giải:

Chọn A

Đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=z$ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$ và qua điểm $M(1;3;0)$

Phương trình tham số đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=3+2t\\z=t\end{cases}$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình tham số : $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=3+3t\end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là ?

A. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+4}{5}$.

B. $\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+5}{4}$.

C. $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+5}{-4}$.

D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Lời giải:

Chọn D

Đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;3)$ và qua điểm $M(-1;0;3)$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

Câu 9. Trong không gian$Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng PQ với $P(1;2;3)$ và $Q(2;4;6)$

A. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-6}{3}$.

B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{3}$.

C. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.

D. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+6}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

Đường thẳng PQ có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{PQ}=(1;2;3)=\vec{u}$

Phương trình chính tắc đường thẳng PQ qua $Q(2;4;6)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ là

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{3}$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;2;3), B(2;3;4), C(1;-2;0)$. Viết phương trình tham số đường thẳng CD

A. $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1+-2t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3+3t \\ y=-1+t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn D

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \vec{u}_{CD}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=(-3;-1;-1)$

$\vec{u}=(3;1;1)=-\vec{u}_{CD}$ nên cũng là một véctơ chỉ phương của CD

Phương trình tham số đường thẳng CD qua $C(1;-2;0)$ và có véctơ chỉnh phương $\vec{u}=(3;1;1)$

là: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=t \end{cases}$

Mức độ 2

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng d qua $M(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):x+2y+3z=0$ và $(Q):-x+2y-3=0$

A. $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-3t \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-6t \\ y=2-3t \\ z=3+4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3-6t \\ y=2-3t \\ z=3+4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-6t \\ y=2-3t \\ z=3-4t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_P=(1;2;3)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_Q=(-1;2;0)$.

$\begin{cases} d//(P) \\ d//(Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d=\left[\vec{n}_P;\vec{n}_Q\right]=(-6;-3;4)$

Phương trình tham số đường thẳng d qua $M(1;2;3)$ có VTCP $\vec{u}=(-6;-3;4)$ là:

$$\begin{cases} x=1-6t \\ y=2-3t \\ z=3+4t \end{cases}$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+2y+3z=0$ và $(Q):-x+2y-3=0$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} x=-6-6t \\ y=3-3t \\ z=4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=\frac{6}{5}-6t \\ y=-\frac{3}{5}-3t \\ z=4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-\frac{6}{5}-2t \\ y=\frac{3}{5}-t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-\frac{6}{5}-6t \\ y=\frac{3}{5}-3t \\ z=4t \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn D

Gọi $(P)\cap(Q)=d$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_P=(1;2;3)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_{(Q)}=(-1;2;0)$.

$\begin{cases} d//(P) \\ d//(Q) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{u}_d\subset\vec{n}_P \\ \vec{u}_d\subset\vec{n}_Q \end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P;\vec{n}_Q\right]=(-6;-3;4)$ Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+2y-3=0 \end{cases}$

Chọn $z=0$, hệ trở thành : $\begin{cases} x+2y=0 \\ -x+3y-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}$

Suy ra $A\left(-\frac{6}{5};\frac{3}{5};0\right)$ thuộc hai mặt phẳng (P) và (Q) hay $A\in d$

Phương trình tham số đường thẳng d là: $\begin{cases} x=-\frac{6}{5}-6t \\ y=\frac{3}{5}-3t \\ z=4t \end{cases}$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+3=0$. Phương trình tham số đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ và song song với mặt phẳng (P) là?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+6t \\ y=2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-6t \\ y=2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}_\Delta=(1;2;3)$

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}_P=(1;-2;0)$

Ta có: $\begin{cases} d\perp\Delta \\ d//(P) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta \\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_P \end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_P]=(6;3;-4)$

Phương trình tham số đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ và có VTCP $\vec{u}=(6;3;-4)$ là:

$$\begin{cases} x=1+6t \\ y=2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-3y+5z-4=0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;1;-3)$, song song với (P) và vuông góc với trục tung là

A. $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1 \\ y=-3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1 \\ y=-3-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2-5t \\ y=1-t \\ y=-3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1 \\ y=-3+2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Oy có vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-3;5)$

Δ đi qua điểm $A(-2;1;-3)$, và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\vec{j},\overrightarrow{n_P}\right]=(5;0;-2)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1 \\ y=-3-2t \end{cases}$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3t \end{cases}$, $\Delta_2:\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=1+3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số đường thẳng d qua gốc toạ độ O đồng thời vuông góc cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn D

Đường thẳng Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1=(2;1;3)$

Đường thẳng Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2=(1;-1;3)$

$$\begin{cases} d\perp\Delta_1 \\ d\perp\Delta_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{u}_d\perp\vec{u}_1 \\ \vec{u}_d\perp\vec{u}_2 \end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]=(6;-3;-3).$$

Vécto $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}_d=(2;-1;-1)$ cũng là VTCP của d

Phương trình tham số đường thẳng d qua $O(0;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(2;-1;-1)$ là:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2:\begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \end{cases}$. Phương trình đường thẳng nằm trong $(\alpha):x+2y-3z-2=0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x+3}{-5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$..

C. $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x+8}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-4}$..

Lời giải

Chọn A

Gọi d là đường thẳng cần tìm

- Gọi $A=d_1\cap(\alpha)$

  $A\in d_1\Rightarrow A(2-a;1+3a;1+2a)$

  $A\in(\alpha)\Rightarrow a=-1\Rightarrow A(3;-2;-1)$
- Gọi $B=d_2\cap(\alpha)$

  $B\in d_2\Rightarrow B(1-3b;-2+b;-1-b)$

  $B\in(\alpha)\Rightarrow b=1\Rightarrow B(-2;-1;-2)$
- d đi qua điểm $A(3;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-5;1;-1)$

Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

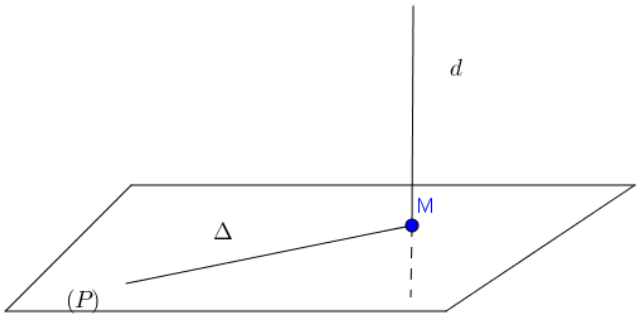
Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt thẳng $(P):3x+4y-z-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc đường thẳng d

A. $x-1=\dfrac{y}{-1}=z+2$ **B.** $x=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$

C. $x=y-1=\dfrac{z+2}{-1}$ **D.** $x-1=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$

Lời giải.

Chọn B



Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}_P=(3;4;-1)$.

Đường thẳng d có một VTCP $\vec{u}_d=(4;3;1)$.

Ta có: $\begin{cases}\Delta\supset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_P\\ \vec{u}_\Delta\perp\vec{u}_d\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_\Delta=[\vec{n}_P;\vec{u}_d]=(7;-7;-7)$

Ta chọn $\vec{u}_\Delta=(1;-1;-1)$

Theo hình vẽ, đường thẳng Δ đi qua M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

$M\in d\Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$

$M\in(P)\Rightarrow 3(12+4t)+4(9+3t)-(1+t)-2=0$

$\Leftrightarrow t=-3$

Do đó $M(0;0;-2)$

Phương trình đường thẳng Δ qua $M(0;0;-2)$ và có một VTCP $\vec{u}_\Delta=(1;-1;-1)$ là:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-1}$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-3z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d nằm trong (P), cắt và vuông góc đường thẳng Δ là:

A. $\begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=-2+3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn A

Gọi $M=\Delta\cap(P)$

$M\in\Delta\Rightarrow M(-2+t;2+t;-t)$

$M\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(-3;1;1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-3)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;1;-1)$

Có $\left.\begin{array}{l} d\subset(P)\Rightarrow \overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P} \\ d\perp\Delta\Rightarrow \overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{a_\Delta} \end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{a_\Delta}\right]=(1;-2;-1)$

d đi qua điểm $M(-3;1;1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_d}$

Vậy phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(-4;-2;4)$, cắt và vuông góc với d là:

A. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{4}$. **B.** $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$.

C. $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$. **D.** $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $B=\Delta\cap d$

$B\in d\Rightarrow B(-3+2t;1-t;-1+4t)$

$\overrightarrow{AB}=(1+2t;3-t;-5+4t)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(2;-1;4)$

$\Delta\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{a_d}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_d}=0$

$\Leftrightarrow t=1$

Δ đi qua điểm $A(-4;-2;4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(3;2;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ vuông góc với d_1 và cắt d_2 là:

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+3}{-5}$.

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{5}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+5}{-3}$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi $B=\Delta\cap d_2$

$B\in d_2\Rightarrow B(1-t;1+2t;-1+t)$

$\overrightarrow{AB}=(-t;2t-1;t-4)$

d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}=(2;-1;1)$

$\Delta\perp d_1\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{a_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_1}=0$

$\Leftrightarrow t=-1$

Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;-3;-5)$

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$.

Mức độ 3

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$. Hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-2}{1}$ có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=3+2t\\y=0\\z=1-4t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-1-2t\\y=0\\z=5-4t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3-2t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải:

Chọn C

Giao điểm của d và mặt phẳng (Oxz) là : $M_0(5;0;5)$.

Trên $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$ chọn M bất kỳ không trùng với $M_0(5;0;5)$; ví dụ: $M(1;-2;3)$. Gọi A là hình chiếu song song của M lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

+/ Lập phương trình d' đi qua M và song song hoặc trùng với $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

+/ Điểm A chính là giao điểm của d' và (Oxz)

+/ Ta tìm được $A(3;0;1)$

Hình chiếu song song của $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=3+t\end{cases}$ lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-2}{1}$ là đường thẳng đi qua $M_0(5;0;5)$ và $A(3;0;1)$.

Vậy phương trình là: $\begin{cases}x=3+t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-62t\\y=25t\\z=2-61t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A=d\cap(P)$

$A\in d\Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A\in(P)\Rightarrow a=-3\Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

$BH:\begin{cases}x=12+3t\\y=9+5t\\z=1-t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H(12+3t;9+5t;1-t)$

$H\in(P)\Rightarrow t=-\frac{78}{35}\Rightarrow H\left(\frac{186}{35};-\frac{15}{7};\frac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{186}{35};-\frac{15}{7};\frac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}}=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d:\begin{cases}x=3\\y=-1+t\\z=4+t\end{cases}$ và cắt hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ là:

A. $\begin{cases}x=-2\\y=-3-t.\\z=-3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2\\y=3-t.\\z=3-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-2\\y=-3+t.\\z=-3+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2\\y=-3+t.\\z=3+t\end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=\Delta\cap\Delta_1, B=\Delta\cap\Delta_2$

$A\in\Delta_1\Rightarrow A(-1+3a;2+a;1+2a)$

$B\in\Delta_2\Rightarrow B(1+b;2b;-1+3b)$

$\overrightarrow{AB}=(-3a+b+2;-a+2b-2;-2a+3b-2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(0;1;1)$

$\Delta//d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a_d}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+2=0\\-a+2b-2=k\\-2a+3b-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b=-2\\-a+2b-k=2\\-2a+3b-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\k=-1\end{cases}$

Ta có $A(2;3;3);B(2;2;2)$

Δ đi qua điểm $A(2;3;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;-1;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2\\y=3-t\\z=3-t\end{cases}$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P):7x+y-4z=0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-4}$.

B. $\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{1}$.

C. $\dfrac{x+2}{-7}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$.

D. $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=d\cap d_1, B=d\cap d_2$

$A\in d_1\Rightarrow A(2a;1-a;-2+a)$

$B\in d_2\Rightarrow B(-1+2b;1+b;3)$

$\overrightarrow{AB}=(-2a+2b-1;a+b;-a+5)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(7;1;-4)$

$d\perp(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-1=7k\\a+b=k\\-a+5=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-7k=1\\a+b-k=0\\-a+4k=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\k=-1\end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_P}=(7;1-4)$

Vậy phương trình của d là $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-4}$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2;2;1)$ cắt trục tung tại B sao cho $OB=2OA$.

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+6}{-8}=\dfrac{z}{-1}$.

B. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-6}{4}=\dfrac{z}{-1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{4}=\frac{z}{-1}$ và $\frac{x}{2}=\frac{y+6}{-8}=\frac{z}{-1}$. **D.** $\frac{x+3}{-5}=\frac{y+6}{-9}=\frac{z-2}{3}$.

Lời giải:

Chọn C

$B\in Oy\Rightarrow B(0;b;0)$

$OB=2OA\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=6\\b=-6\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B(0;6;0),\ \overrightarrow{AB}=(2;4;-1)\\B(0;-6;0),\ \overrightarrow{AB}=(2;-8;-1)\end{array}\right.$

Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{4}=\frac{z}{-1}$ và $\frac{x}{2}=\frac{y+6}{-8}=\frac{z}{-1}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $B(1;1;2)$ cắt đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{1}$ tại C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

A. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ và $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{78}=\frac{z-2}{-109}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y-6}{4}=\frac{z}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{78}=\frac{z-2}{-109}$.

Lời giải:

Chọn A

$C\in d\Rightarrow C(2+t;3-2t;-1+t)$

$\overrightarrow{OC}=(2+t;3-2t;-1+t)$

$\overrightarrow{OB}=(1;1;2)$

$\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=(5t-7;t+5;1-3t)$

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(3;-2;-1)\\t=\frac{-4}{35}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\left(\frac{31}{35};\frac{78}{35};-\frac{109}{35}\right)\end{array}\right.$

Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{BC}$

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ và $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{78}=\frac{z-2}{-109}$.

Câu 7. Trong Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=3\\z=-2+t\end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=2-5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=3-2t \\ z=1-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=3 \\ z=1-t \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=d\cap d_1, B=d\cap d_2$

$A\in d_1 \Rightarrow A(2+a;1-a;2-a)$

$B\in d_2 \Rightarrow B(b;3;-2+b)$

$\overrightarrow{AB}=(-a+b-2;a+2;a+b-4)$

d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}=(1;-1;-1)$

d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(1;0;1)$

$\begin{cases} d\perp d_1 \\ d\perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{AB}\perp \overrightarrow{a_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow A(2;1;2); B(3;3;1)$

d đi qua điểm $A(2;1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$

Vậy phương trình của d là $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$, mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=29$ và $A(1;-2;1)$. Đường thẳng Δ cắt d và (S) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{-10}$.

B. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{11}=\dfrac{z-1}{-10}$.

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{-10}$.

D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{11}=\dfrac{z-1}{-10}$.

Lời giải:

Chọn D

$M\in d \Rightarrow M(2+t;1+2t;1-t)$

A là trung điểm $MN \Rightarrow N(-t;-5-2t;1+t)$

$$N \in (S) \Rightarrow 6t^2+14t-20=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-4;-10;2)=-2(2;5;-1) \\ t=-\dfrac{10}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{22}{3};-\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{2}{3}(7;11;-10) \end{array}\right.$$

Δ đi qua điểm $A(1;-2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{MN}$

Vậy phương trình của Δ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+2}{11}=\dfrac{z-1}{-10}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất có phương trình là.

A. $\dfrac{x-2}{26}=\dfrac{y+1}{11}=\dfrac{z-3}{-2}$.

B. $\dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$..

C. $\dfrac{x-3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z+1}{-2}$.

D. $\dfrac{x+2}{26}=\dfrac{y-1}{11}=\dfrac{z+3}{-2}$..

Lời giải:

Chọn B

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi mặt phẳng (Q) qua $A(-3;0;1)$ và song song với (P). Khi đó: $(Q): x-2y+2z+1=0$

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của B lên $\Delta, (Q)$. Ta có $d(B,\Delta)=BK \geq BH$. Do đó AH là đường thẳng cần tìm.

(Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;2)$

BH qua B và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_Q}=(1;-2;2)$

$$BH: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$$

$H \in BH \Rightarrow H(1+t;-1-2t;3+2t)$

$H \in (P) \Rightarrow t=-\dfrac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$

Δ đi qua điểm $A(-3;0;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{1}{9}(26;11;-2)$

Vậy phương trình của Δ là $\Delta: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng bằng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là.

A. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ và $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

B. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$.

C. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

D. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$ và $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Lời giải:

Chọn D

Gọi $M=d\cap(P)$

$M\in d\Rightarrow M(3+2t;-2+t;-1-t)$

$M\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(1;-3;0)$

(P) có vecttơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

d có vecttơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(2;1;-1)$

Δ có vecttơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{a_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y+z-11=0\\ x+y+z+2=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}$

Giải hệ ta tìm được hai điểm $N(5;-2;-5)$ và $N(-3;-4;5)$

Với $N(5;-2;-5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$

Với $N(-3;-4;5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$

Câu 11 . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$..

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-7}$..

Lời giải:

Chọn B

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;-2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1)$

Vì $d//(P)$ nên $\overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{a_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 2a-b-c=0\Leftrightarrow c=2a-b$

$$\cos(\Delta,d)=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta,d)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$, ta suy ra được: $\max f(t)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max\left[\cos(\Delta,d)\right]=\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{a}{b}=-\frac{1}{5}$

Chọn $a=1\Rightarrow b=-5,c=7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$

Câu 12 . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P):x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=-1-15t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t.\\z=1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t.\\z=1-15t\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=1\end{cases}$ và $\begin{cases}x=3+7t\\y=-1-8t.\\z=1-15t\end{cases}$

Lời giải:

Chọn D

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$

$d\subset(P)\Rightarrow\overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow b=a+c;\ (1)$

$(\Delta,d)=45^0\Leftrightarrow\cos(\Delta,d)=\cos 45^0$

$$\Leftrightarrow\frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+2b+2c)^2=9(a^2+b^2+c^2);\ (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $14c^2+30ac=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\15a+7c=0\end{array}\right.$

Với $c=0$, chọn $a=b=1$, phương trình đường thẳng d là $\left\{\begin{array}{l}x=3+t\\y=-1-t\\z=1\end{array}\right.$

Với $15a+7c=0$, chọn $a=7\Rightarrow c=-15;b=-8$, phương trình đường thẳng d là $\left\{\begin{array}{l}x=3+7t\\y=-1-8t\\z=1-15t\end{array}\right.$

Câu 13 . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$, mặt phẳng $(P):2x-y-z+5=0$ và $M(1;-1;0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M, cắt d và tạo với (P) một góc 30^0. Phương trình đường thẳng Δ là.

A. $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$ và $\frac{x+4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+5}{5}$.

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$ và $\frac{x-1}{23}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$ và $\frac{x-4}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{5}$.

D. $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$ và $\frac{x-4}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{5}$.

Lời giải:

Chọn B

Gọi $N=\Delta\cap d$

$N\in d\Rightarrow N(2+2t;t;-2+t)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN}=(1+2t;1+t;-2+t)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1)$

$$\sin\left[d,(P)\right]=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(1;1-2)\\ t=\frac{9}{5}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{23}{5};\frac{14}{5};-\frac{1}{5}\right)\end{array}\right.$$

Δ đi qua điểm $M(1;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{MN}$

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$ và $\frac{x-1}{23}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{-1}$

Mức độ 4

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1;1;0),B(3;-1;4)$ Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

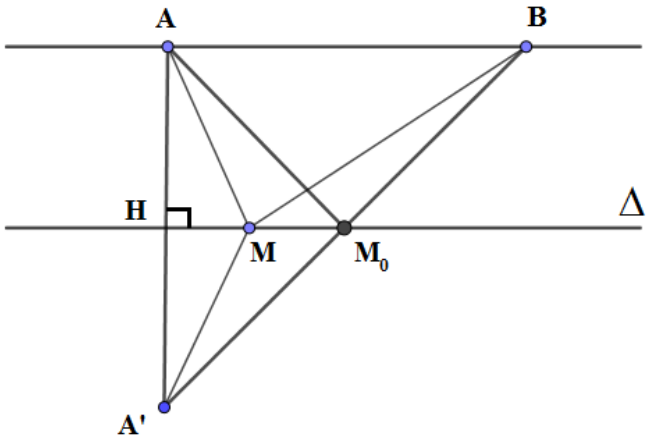
A. $M(-1;1;-2)$. **B.** $M(1;-1;2)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;-2;4)$ cùng phương với $\vec{u}=(1;-1;2)$ và $A(1;1;0)\notin\Delta$ (do $\frac{1+1}{1}\neq\frac{1-1}{-1}$)

$\Rightarrow AB//\Delta\Rightarrow AB$ và Δ đồng phẳng



Xét mặt phẳng chứa AB và Δ:

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ; (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với Δ

Khi đó, giao điểm H của Δ với (α) là trung điểm của AA'.

(α) có phương trình $x-y+2z=0$

Giả sử $H(-1+t;1-t;-2+2t),H\in(\alpha)\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(0;0;0)$.

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1;-1;0)$

Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B\Rightarrow (MA+MB)_{\min}=A'B$ khi và chỉ khi $M\equiv M_o$ là giao điểm của $A'B$ và Δ.

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;-1;0)$, có phương trình $\begin{cases}x=-1+t'\\y=-1\\z=t'\end{cases}$

Mà $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=-2+2t\end{cases}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases}-1+t=-1+t'\\1-t=-1\\-2+2t=t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=2\\t=2\end{cases}$

$\Rightarrow M_o(1;-1;2)$

Vậy, để $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M(1;-1;2)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1):x^2+y^2+z^2=25;(S_2):x^2+y^2+(z-1)^2=4.$ Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u_1}=(1;1;\sqrt{3})$. **B.** $\vec{u_3}=(1;1;0)$. **C.** $\vec{u_2}=(1;1;\sqrt{6})$. **D.** $\vec{u_4}=(1;1;-\sqrt{3})$.

Lời giải

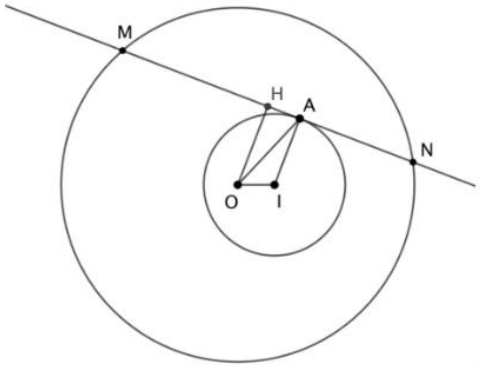
Chọn B

Hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có tâm lần lượt là là gốc toạ độ O, điểm I(0;0;1) và bán kính lần lượt là $R_1=5;R_2=2$.

Gọi A là tiếp điểm của d và (S_2), ta có IA = R2 = 2.

Vì d cắt (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8 nên

$$d(O;d)=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3.$$



Vì $d \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u}_d = (1;1;x)$, ta có:

$OI + IA \geq OA \geq d(O,d) \rightarrow 1+2 \geq \text{OA} \geq 3 \Rightarrow O, I, A$ thẳng hàng.

$\overrightarrow{OA} = \dfrac{OA}{OI}\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OI} = (0;0;3) \Rightarrow A(0;0;3).$

Do đó $d(O;d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OA}, \vec{u}_d\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}} = 3 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \vec{u}_d = (1;1;0).$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+3}{3}$.

C. $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{11} = \dfrac{z+3}{-10}$.

D. $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R = 10$.

$d(I,(\alpha)) = \dfrac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H;r)$, H là hình chiếu của I lên (α).

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2;-2;1)$.

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \end{cases}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH}=(1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 4. Trong không gian *Oxyz*, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;2;0)$ và $M(-1;3;4)$. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với AB đồng thời cách M một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d có dạng $\vec{u}(2;a;b)$. Tính tổng $a+b$.

A. 1 **B.** 2 **C.** –2. **D.** –1.

Lời giải

Chọn D

*** Cách 1.**

$\overrightarrow{AB}=(0;0;-3)$.

$\overrightarrow{u_d}=(2;a;b)$.

* $d\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow b=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(2;a;0)$

* $\overrightarrow{BM}=(-2;1;4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{u_d}\right]=(-4a;8;-2a-2)$

$\Rightarrow d=d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$

$=\sqrt{\dfrac{16a^2+64+(2a+2)^2}{4+a^2}}=\sqrt{\dfrac{20a^2+8a+68}{a^2+4}}$

$=2.\sqrt{\dfrac{5a^2+2a+17}{a^2+4}}=2\sqrt{f(a)}$

Xét $f(a)=\dfrac{5a^2+2a+17}{a^2+4}$

$f'(a)=\dfrac{-2a^2+6a+8}{(a^2+4)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=4\end{array}\right.$

Vì hàm $f(a)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(a)$ có GTNN $=\{f(-1),f(4)\}$

$f(-1)=4,\ f(4)=5,25$.

Vậy $d_{\min} \Leftrightarrow f(a)$ đạt GTNN $\Leftrightarrow a=-1$

$\Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow C$

*** Cách 2.**

$d \perp AB$ nên d nằm trong mặt phẳng (P) qua B và vuông góc $\overrightarrow{AB}=(0;0;-3)$

Có phương trình: $0(x-1)+0(y-2)-3(z-0)=0$

hay $(P): z=0 \Rightarrow (P)$ trùng (xOy)

Khoảng cách từ $M(-1;3;4)$ đến (P) nhỏ nhất khi và chỉ khi (d) đi qua H là hình chiếu của $M(-1;3;4)$ xuống $(xOy) \Rightarrow H(-1;3;0)$

Vậy (d) có vtcp là $\overrightarrow{BH}=(-2;1;0)$

Gt cho (d) có vtcp dạng $\vec{u}(2;a;b) // -(2;-1;0)$

$\Rightarrow a=-1,\ b=0 \Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow C$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2;2;-3)$ và $N(-4;2;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, nhận vecto $\vec{u}=(a;b;c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P): 2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|$, $|b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng:

A. 15. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 14.

Lời giải:

Chọn A

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2;2;-3)$ và song song với mặt phẳng (P).

Suy ra $(Q): 2x+y+z-3=0$.

Do $\Delta // (P)$ nên $\Delta \subset (Q)$.

$d(N,\Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \Delta$ đi qua N', với N' là hình chiếu của N lên (Q).

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc (P), $d: \begin{cases} x=-4+2t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Ta có $N' \in d \Rightarrow N'(-4+2t;2+t;1+t)$; $N' \in (Q) \Rightarrow t=\frac{4}{3} \Rightarrow N'\left(-\frac{4}{3};\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right)$.

$\vec{u}=(a;b;c)$ cùng phương $\overrightarrow{MN'}=\left(-\frac{10}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$.

Do $|a|$, $|b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u}=(-5;2;8)$.

Vậy $|a|+|b|+|c|=15$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=2+t\\z=-1-2t\end{cases}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$. Gọi d là đường thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2, $M(a;b;c)$ thuộc d, $N(4;4;1)$. Khi độ dài MN ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng?

A. 5. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn B

Gọi $P(2+t;2+t;-1-2t)\in d_1$ và $Q(2+4t';2-3t';2-t')$.

Ta có: $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(4;-3;-1)$ và $\overrightarrow{PQ}=(4t'-t;-3t'-t;-t'+2t+3)$.

Khi đó: $\begin{cases}\vec{a}.\overrightarrow{PQ}=0\\\vec{b}.\overrightarrow{PQ}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t'-t-3t'-t-2(-t'+2t+3)=0\\4(4t'-t)-3(-3t'-t)-1(-t'+2t+3)=0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}3t'-6t=6\\26t'-3t=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=0\\t=-1\end{cases}$.

Suy ra $P(1;1;1)$ và $Q(2;2;2)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(1;1;1)$.

Nên $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

Gọi $M(1+t;1+t;1+t)$ nên $\overrightarrow{NM}=(t-3;t-3;t)$.

Do đó: $NM=\sqrt{(t-3)^2+(t-3)^2+t^2}=\sqrt{3t^2-12t+18}=\sqrt{3(t-2)^2+6}\ge\sqrt{6}$.

Đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi $t=2$.

Suy ra $M(3;3;3)\Rightarrow a+b+c=9$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$.. **B.** $\left(-\dfrac{1}{5};4;0\right)$.. **C.** $(4;6;0)$.. **D.** $\left(\dfrac{12}{5};-3;0\right)$..

Lời giải:

Chọn A

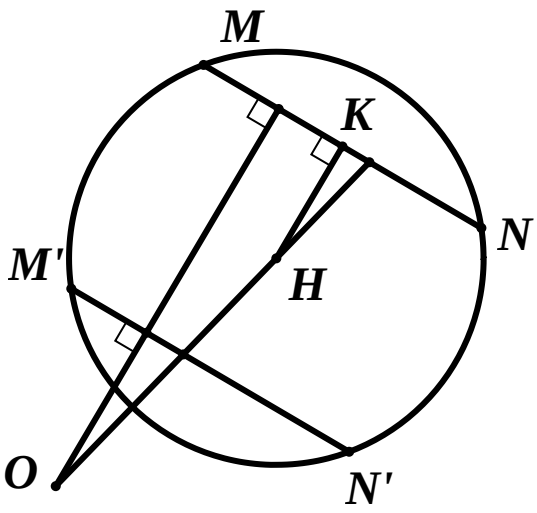
Mặt cầu (S) có tâm $I(3;4;4)$, bán kính $R=5$. Gọi r_C là bán kính đường tròn (C).

Gọi H là tâm đường tròn $(C) \Rightarrow H(3;4;0), IH \perp (Oxy)$, $d(I,(Oxy))=4$.

$r_C=\sqrt{5^2-4^2}=3$, $OH=5 \Rightarrow O$ nằm ngoài đường tròn (C), $d(A,(Oxy))=9$

$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d(A,(Oxy)).S_{OMN}=3S_{OMN}=3.\frac{1}{2}d(O,MN).MN=3\sqrt{5}.d(O,MN)$

Suy ra $V_{max} \Leftrightarrow d(O,MN)_{max}$



Mà $d(O,MN) \le OH+HK=5+\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=7$. (Với K là trung điểm MN)

Dấu bằng xảy ra khi $OH \perp MN$. Khi đó MN có 1 véc tơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{OH};\vec{k}\right]=(4;-3;0), \left(\overrightarrow{OH}=(3;4;0), \vec{k}=(0;0;1)\right)$ và đi qua trung điểm K của MN.

$\overrightarrow{OK}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow K\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$

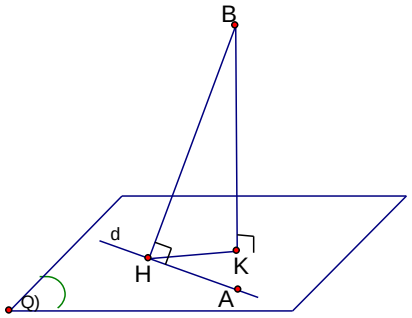
Phương trình đường thẳng $MN: \begin{cases} x=\frac{21}{5}+4t \\ y=\frac{28}{5}-3t \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{1}{5}} (5;5;0)$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Đường thẳng (d) đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d nhỏ nhất. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;b;c)$. Khi đó $\frac{b}{c}$ bằng

A. $\frac{b}{c}=11$. **B.** $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{b}{c}=-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{b}{c}=-\frac{11}{2}$.

Lời giải:

Chọn D



Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $A(-3;0;1)$ và song song với (P) $\Rightarrow \overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y+2z+1=0$.

Vì đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) nên $d\subset(Q)$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B lên đường thẳng d và mặt phẳng (Q).

Khi đó $d\left(B,(d)\right)=BH\geq BK$. Suy ra $d\left(B,d\right)_{\min}=BK\Leftrightarrow H\equiv K$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và vuông góc với mặt phẳng $(Q)\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$

Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$. Lấy $H(1+t;-1-2t;3+2t)\in\Delta$.

Vì $H\in(Q)$ nên $(1+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)+1=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{10}{9}$.

Suy ra $H\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{11}{9};\dfrac{7}{9}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{26}{9};\dfrac{11}{9};-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{26}{9}\left(1;\dfrac{11}{26};-\dfrac{2}{26}\right)$.

Suy ra một vec tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_d}=\left(1;\dfrac{11}{26};-\dfrac{2}{26}\right)\Rightarrow b=\dfrac{11}{26},c=-\dfrac{2}{26}$.

Vậy $\dfrac{b}{c}=-\dfrac{11}{2}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giac trong góc C là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(2;1;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;1)$. **C.** $\vec{u}=(0;1;-1)$. **D.** $\vec{u}=(1;-1;0)$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi d_1 và d_2 lần lượt là phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong góc C.

$\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=3-t\\y=3+2t\\z=2-t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+2t'\\y=4-t'\\z=2-t'\end{cases}$

Gọi M là trung điểm $AC\Rightarrow M\in d_1\Rightarrow M\left(3-t;3+2t;2-t\right)$.

Vì $C\in d_2\Rightarrow C\left(2+2t';4-t';2-t'\right)$. Mà vì M là trung điểm AC

$\Rightarrow\begin{cases}2+2t'=2(3-t)-2\\4-t'=2(3+2t)-3\\2-t'=2(2-t)-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+2t'=4-2t\\4-t'=3+4t\\2-t'=1-2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=1\end{cases}$.

$\Rightarrow M\left(3;3;2\right)$ và $C\left(4;3;1\right)$.

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d_2.

$\Rightarrow\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_{d_2}}=\left(2;-1;-1\right)\Rightarrow\left(P\right):2.(x-2)-(y-3)-(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y-z+2=0$.

Gọi N là điểm đối xứng với A qua $d_2\Rightarrow N\in\left(BC\right)$ và $N\in\left(P\right)$.

Gọi I là trung điểm của AN $\Rightarrow I=d_2\cap\left(P\right)\Rightarrow I=\left(2;4;2\right)\Rightarrow N\left(2;5;1\right)$.

Dễ thấy $N\in d_2$ khi $t=1.\Rightarrow N\equiv B$. Vậy $\begin{cases}A(2;3;3)\\B(2;5;1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(0;1;-1\right).$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1,d_2.

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-3}{4}$. **B.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$. **C.** $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$

Lời giải:

Chọn D

Ta viết phương trình tham số của $d_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right),d_2:\begin{cases}x=1-2s\\y=-4s\\z=3+2s\end{cases}\left(s\in\mathbb{R}\right)$.

Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có $\begin{cases}t=1-2s\\1-t=-4s\\1+2t=3+2s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\s=0\end{cases}$ suy ra $I\left(1;0;3\right)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lấy $A\left(0;1;1\right)\in d_1\Rightarrow IA=\sqrt{6}$. Gọi $B\left(1-2s;-4s;3+2s\right)\in d_2$ sao cho $IB=\sqrt{6}$.

Ta có $IB=\sqrt{6}\Leftrightarrow 4s^2+16s^2+4s^2=6\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} B(0;-2;4) \\ B(2;2;2) \end{array}\right.$.

Với $B(0;-2;4)$ ta có $\overrightarrow{IA}(-1;1;-2), \overrightarrow{IB}(-1;-2;1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -3 < 0 \Rightarrow AIB$ là góc tù

Theo yêu cầu bài toán ta viết phương trình của đường phân giác của góc AIB với $B(0;-2;4)$ (không cần xét trường hợp kia) .

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, khi đó phương trình đường phân giác cần tìm là phương trình đường thẳng đi qua hai điêm $I(1;0;3)$ và $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, chọn $\vec{u} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \vec{u} = (2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương của đường phân giác. Vậy đường phân giác đi qua điểm $I(1;0;3)$ và nhận $\vec{u} = (2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Nhận xét: Có thể tìm vectơ chỉ phương của đường phân giác như sau:

Ta có $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;2); \overrightarrow{u_2} = (2;4;-2)$ lần lượt là véctơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1 và d_2. Vì $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = -6 < 0$ nên góc giữa hai vectơ đó là góc tù.

Xét $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;2); \overrightarrow{u_2} = (2;4;-2)$.

Ta có $\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{u_2}\right| = 2\sqrt{6}$.

Đặt $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; $\vec{b} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\overrightarrow{u_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ nên có thể chọn $\vec{u} = (2;1;1)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác.

DẠNG TOÁN 39: TỔ HỢP – XÁC SUẤT(XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Qui tắc đếm :

✪ **Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

✪ **Quy tắc nhân:** Một công việc được hoành thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

2. Hoán vị, Chính hợp, tổ hợp.

✪ **Hoán vị :**

+ *Định nghĩa*: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một ***hoán vị của n phần tử*** đó.

+ Số các hoán vị

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có: $P_n=n!(n\ge 1)$

✪ **Chỉnh hợp :**

+ *Định nghĩa*: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Kết quả của việc lấy k phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

+Số các chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1\le k\le n)$. Ta có: $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}(1\le k\le n)$

✪ **Tổ hợp :**

+ *Định nghĩa*: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Mỗi tập hợp con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

+ Số các tổ hợp:

Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử $(0\le k\le n)$. Ta có: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\ (0\le k\le n)$.

3. Tính xác xuất :

✪ **Tính xác suất bằng định nghĩa :** Công thức tính xác suất của biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

✪ **Tính xác suất bằng công thức :**

+ Quy tắc cộng xác suất :

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

* Nếu các biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ xung khắc nhau thì $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$

+ Công thức tính xác suất biến cố đối: Xác suất của biến cố $\overline{A}$ của biến cố A là: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

+ Quy tắc nhân xác suất :

* Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$P(AB) = P(A).P(B)$

* Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ là độc lập thì

$P(A_1, A_2, A_3, ..., A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k)$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Mô tả không gian mẫu, biến cố
- Mối liên hệ giữa các biến cố
- Tính xác suất bằng định nghĩa
- Tính xác suất bằng công thức cộng xác suất
- Tính xác suất bằng công thức nhân xác suất
- Toán tổng hợp về hai công thức xác suất
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi vào hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính xác suất của biến cố.

2. HƯỚNG GIẢI: Do học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B nên ta xếp chỗ cho học sinh lớp C trước. Lưu ý: Nếu học sinh lớp C ngồi đầu dãy thì chỉ cần 1 học sinh lớp B ngồi bên cạnh, còn nếu học sinh lớp C không ngồi đầu dãy thì ở cả 2 bên học sinh này đều phải là học sinh lớp **B.**

B1: Xét TH1: học sinh lớp C ngồi đầu dãy. Sử dụng quy tắc nhân để tính số cách xếp các học sinh còn lại vào dãy ghế.

B2: Xét TH2: học sinh lớp C không ngồi đầu dãy. Sử dụng quy tắc nhân để tính số cách xếp các học sinh còn lại vào dãy ghế.

B3: Sử dụng quy tắc cộng để tính số cách xếp chỗ cho 6 học sinh thỏa mãn để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp **B.**

B4: Sử dụng quy tắc tính xác suất để tính xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp **B.**

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Số cách xếp 6 học sinh vào ngồi ở dãy ghế là: $6!$ cách.

Do học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B nên ta xếp chỗ cho học sinh lớp C trước.

TH1: học sinh lớp C ngồi ở vị trí đầu dãy ghế: Có 2 cách.

+ Chọn 1 học sinh lớp B trong 2 học sinh lớp B xếp cạnh học sinh lớp C: Có 2 cách.

+ Xếp 3 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B còn lại vào 4 ghế trống: Có $4!$ cách.

Vậy có $2.2.4! = 96$ (cách).

TH2: học sinh lớp C không ngồi ở vị trí đầu dãy. Vì học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B nên ta xếp 2 học sinh lớp B ngồi 2 bên của học sinh lớp C: Có 2 cách.

Coi 3 học sinh này là 1 nhóm cố định.

+ Xếp 3 học sinh lớp A và nhóm học sinh nói trên vào 6 ghế trống: Có $4!$ cách.

Vậy có $2.4! = 48$ (cách).

Số cách xếp chỗ cho 6 học sinh thỏa mãn để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B là:
$96 + 48 = 144$ (cách).

Suy ra xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B là: $\frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 3

Câu 1. Một hộp đựng thẻ được đánh số từ 1, 2, 3,…, 8. Rút ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một thẻ và nhân số ghi trên hai thẻ với nhau, xác suất để tích nhận được là số chẵn là

A. $\frac{3}{14}$. **B.** $\frac{25}{36}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{11}{14}$.

Lời Giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 8 \times 7 = 56$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "tích nhận được là số lẻ".

$n(\overline{A}) = 4 \times 3 = 12$.

$\Rightarrow n(A) = 56 - 12 = 44$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A : $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{44}{56}=\dfrac{11}{14}$.

Câu 2. Một hộp đựng thẻ được đánh số từ 1, 2, 3,…, 9. Rút ngẫu nhiên hai lần, mỗi lần một thẻ và nhân số ghi trên hai thẻ với nhau, xác suất để tích nhận được là số chẵn là:

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{25}{36}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{18}$.

Lời Giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=9\times 8=72$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "tích nhận được là số lẻ".

$n(\overline{A})=5\times 4=20$.

$\Rightarrow n(A)=72-20=52$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{52}{72}=\dfrac{13}{18}$.

Câu 3. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Rút ngẫu nhiên một số thuộc tập S. Tính xác suất để rút được số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

A. $\dfrac{2}{7}$ **B.** $\dfrac{11}{64}$ **C.** $\dfrac{3}{16}$ **D.** $\dfrac{3}{32}$

Chọn C

Từ 8 số đã cho có thể lập được : số có3 chữ số.

Số cần chọn có dạng $\overline{abc}$ trong đó $a\le b\le c$.

TH1: $a<b<c$. Chọn ra 3 số thuộc tập $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ ta được 1 số thỏa mãn.

Do đó có $C_7^3=35$ số.

TH2: $a=b<c$ có C_7^2 số thỏa mãn.

TH3: $a<b=c$ có C_7^2 số thỏa mãn.

TH4: $a=b=c$ có C_7^1 số thỏa mãn.

Vậy có: $C_7^3+2C_7^2+C_7^1=84$ số thỏa mãn chữ số đứng sau luôn lớn hơn bằng chữ số đứng trước.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{84}{448}=\dfrac{3}{16}$.

Câu 4. Đội thanh niên tình nguyện của một trường THPT gồm 15 HS, trong đó có 4 HS khối 12, 5 HS khối 11 và 6 HS khối 10. Chọn ngẫu nhiên 6 HS đi thực hiện nhiệm vụ. Tính xác suất để 6 HS được chọn có đủ 3 khối.

A. $\dfrac{4248}{5005}$. **B.** $\dfrac{757}{5005}$. **C.** $\dfrac{151}{1001}$. **D.** $\dfrac{850}{1001}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{15}^{6}=5005$.

Gọi A là biến cố: "6 HS được chọn có đủ 3 khối".

Xét các trường hợp của biến cố $\overline{A}$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 10 và 11: $C_{11}^{6}-C_{6}^{6}$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 10 và 12: $C_{10}^{6}-C_{6}^{6}$

+ Số cách chọn được 6 HS bao gồm cả khối 11 và 12: C_{9}^{6}

+ Số cách chọn được 6 HS khối 10: C_{6}^{6}

Vậy $n(\overline{A})=C_{11}^{6}+C_{10}^{6}+C_{9}^{6}-C_{6}^{6}=755\Rightarrow n(A)=5005-755=4250$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{4250}{5005}=\dfrac{850}{1001}$.

Câu 5. Từ một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 8 quả màu đỏ, 3 quả màu xanh và 1 quả màu vàng, lấy ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu bằng:

A. $\dfrac{23}{44}$. **B.** $\dfrac{21}{44}$. **C.** $\dfrac{139}{220}$. **D.** $\dfrac{81}{220}$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{12}^{3}=220$

Gọi A là biến cố: "Lấy được 3 quả cầu có đúng hai màu".

- Trường hợp 1: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu đỏ có: $C_{8}^{2}=28$ cách

- Trường hợp 2: Lấy 1 quả màu vàng và 2 quả màu xanh có: $C_{3}^{2}=3$ cách

- Trường hợp 3: Lấy 1 quả màu đỏ và 2 quả màu xanh có: $C_{8}^{1}.C_{3}^{2}=24$ cách

- Trường hợp 4: Lấy 1 quả màu xanh và 2 quả màu đỏ có: $C_{3}^{1}.C_{8}^{2}=84$ cách

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A)=28+3+24+84=139$ cách

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{139}{220}$

Câu 6. Một trường có 50 em học sinh giỏi trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất trong 3 em ấy không có cặp anh em sinh đôi.

A. $\frac{9}{1225}$. **B.** $\frac{1216}{1225}$. **C.** $\frac{12}{1225}$. **D.** $\frac{1213}{1225}$.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn ra 3 học sinh mà không có điều kiện gì là C_{50}^{3} cách $\Rightarrow |\Omega|=C_{50}^{3}$.
Ta sẽ loại trừ các trường hợp có 1 cặp anh em sinh đôi. Đầu tiên ta chọn 1 cặp sinh đôi có 4 cách chọn. Sau đó chọn 1 học sinh còn lại từ 48học sinh, có 48 cách chọn.
Vậy số cách chọn 3 em học sinh thỏa yêu cầu đề bài là: $C_{50}^{3}-4.48=19408$.
Vậy xác suất cần tìm là $P=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{19408}{C_{50}^{3}}=\frac{1213}{1225}$.

Câu 7. Một hộp kín có 5 bút bi màu xanh khác nhau và 10 bút bi màu đỏ khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 bút bi. Xác suất để lấy được 1 bút bi xanh và 2 bút bi đỏ là

A. $\frac{200}{273}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{45}{91}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=C_{15}^3$.

Gọi A là biến cố lấy được 1 bút bi xanh và 2 bút bi đỏ $\Rightarrow n(A)=C_5^1.C_{10}^2$.

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{C_5^1.C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}$

Câu 8. Xếp ngẫu nhiên bốn bạn nam và năm bạn nữ ngồi vào chín ghế kê theo hàng ngang. Xác suất để có được năm bạn nữ ngồi cạnh nhau bằng:

A. $\frac{5}{21}$ **B.** $\frac{1}{2520}$. **C.** $\frac{5}{126}$. **D.** $\frac{5}{18}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega)=9!=362880$

Gọi biến cố A: "Xếp năm bạn nữ ngồi cạnh nhau" $\Rightarrow n(A)=C_5^1\times 5!\times 4!=14400$

Khi đó: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{14400}{362880}=\frac{5}{126}$

Câu 9. Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;6\}$. Tính xác suất biến cố chọn được số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ tập A, sao cho tổng 3 chữ số bằng 9.

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{7}{20}$. **C.** $\frac{9}{20}$. **D.** $\frac{3}{20}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là biến cố: " số tự nhiên 3 chữ số khác nhau, có tổng 3 chữ số bằng 9 ."
- Số số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có thể lập được là: $A_6^3=120$.
$\Rightarrow$ Không gian mẫu: $|\Omega|=120$.
- Ta có $1+2+6=9;1+3+5=9;2+3+4=9$.
$\Rightarrow$ Số số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có tổng bằng 9 là: $3!+3!+3!=18$.
$\Rightarrow n(A)=18$.

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{|\Omega|}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$.

Câu 10. Gọi A là tập hợp các số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp A. Tính xác suất để số đó chia hết cho 5.

A. $\frac{9}{41}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{10}{41}$ **D.** $\frac{9}{50}$

Lời giải

Chọn A

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số có dạng $\overline{abc}$

Vì $\overline{abc}$ là số tự nhiên chẵn nên $c \in \{0,2,4,6,8\}$

TH1: $c=0$. Ta có $A_9^2 = 72$ số tự nhiên chẵn

TH2: $c=2,4,6,8$. Ta có $4\left(A_9^2 - A_8^1\right) = 256$ số tự nhiên chẵn.

Vậy, số phần tử trong tập hợp A là: 328 số tự nhiên chẵn, suy ra $|\Omega| = 328$

Gọi X là biến cố số lấy ngẫu nhiên ra từ A chia hết cho 5, suy ra $|\Omega_A| = 72$

Vậy, xác suất xảy ra biến cố A là $P_A = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{72}{328} = \frac{9}{41}$

Câu 11. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng:

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{40}{81}$. **C.** $\frac{16}{81}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời Giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 9\times 9\times 8 = 648$.

Gọi A là biến cố: "tổng các chữ số là số lẻ ".

Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}\ (a,b,c \in \mathbb{N})$.

Th1: ba chữ số a,b,c đều lẻ có $5\times 4\times 3 = 60$ số.

Th 2: hai chữ số chẵn một chữ số lẻ có:

- a chẵn, b chẵn, c lẻ có $4\times 4\times 5 = 80$ số.
- a chẵn, b lẻ, c chẵn có $4\times 5\times 4 = 80$ số.
- a lẻ, b chẵn, c chẵn có $5\times 5\times 4 = 100$ số.

$\Rightarrow n(A) = 60+80+80+100 = 320$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{320}{648} = \frac{40}{81}$.

Câu 12. Cho tập hợp $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{3}{25}$. **C.** $\frac{22}{25}$. **D.** $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của tập $n(S)=A_5^3+A_5^4+P_5=300$

Các bộ số có tổng 10: $\{(2,3,5);(1,4,5);(1,2,3,4)\}$

$n(B)=2P_3+P_4=36\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{36}{300}=\frac{3}{25}$

Câu 13. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tích các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{49}{54}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{98}{135}$.

Lời Giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=9\times9\times8=648$.

Gọi $\overline{A}$ là biến cố: "Số được chọn có tích các chữ số là lẻ"

$n(\overline{A})=5\times4\times3=60$.

$\Rightarrow n(A)=648-60=588$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{588}{648}=\frac{49}{54}$.

Câu 14. Một tập thể có 14 người trong đó có hai bạn tên A và B. Người ta cần chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tính số cách chọn sao cho trong tổ phải có 1 tổ trưởng và 5 tổ viên hơn nữa A hoặc B phải có mặt nhưng không đồng thời có mặt cả hai người trong tổ.

A. 11088. **B.** 9504. **C.** 15048. **D.** 3003

Lời giải

Chọn B

Chọn nhóm 6 bạn bất kỳ ta có C_{14}^6 cách.

Chọn nhóm 6 bạn trong đó có cả A và B, có C_{12}^4 cách.

Chọn nhóm 6 bạn trong đó không có hai bạn A và B, có C_{12}^6 cách.

Suy ra số cách chọn 6 bạn có mặt A hoặc B. nhưng không đồng thời có mặt cả hai người trong tổ là: $C_{14}^6-C_{12}^4-C_{12}^6=1584$ cách.

Chọn 1 tổ trưởng từ nhóm 6 bạn này, có 6 cách.

Vậy có $1584.6=9504$ cách chọn thỏa yêu cầu đề.

Câu 15. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là $0,4$ (không có hòa). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn $0,95$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Gọi n là số trận An chơi. Gọi A là biến cố " An thắng ít nhất 1 trận trong loạt chơi n trận"
$\overline{A}$ là biến cố " An thua cả n trận" $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.6)^n$

Ta tìm số nguyên dương n thỏa $P(A)\geq 0.95 \Leftrightarrow 0.05\geq (0.6)^n$

Vậy n nhỏ nhất bằng 6. An chơi tối thiểu 6 trận.

Câu 16. Một tổ có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Chia tổ thành 3 nhóm mỗi nhóm 4 người để làm 3 nhiệm vụ khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên nhóm nào cũng có nữ.

A. $\frac{16}{55}$. **B.** $\frac{8}{55}$. **C.** $\frac{292}{1080}$. **D.** $\frac{292}{34650}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu $C_{12}^4.C_8^4.1=34650$.

Chỉ có 3 nữ và chia mỗi nhóm có đúng 1 nữ và 3 nam.Nhóm 1 có $C_3^1.C_9^3=252$ cách.

Lúc đó còn lại 2 nữ, 6 nam, nhóm thứ 2 có $C_2^1.C_6^3=40$ cách chọn.

Cuối cùng còn 4 người là một nhóm: có 1 cách.

Theo quy tắc nhân thì có: $252.40.1=10080$ cách. Vậy xác suất cần tìm là $P=\frac{10080}{34650}=\frac{16}{55}$.

Câu 17. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số

A. $\frac{8}{33}$. **B.** $\frac{14}{33}$. **C.** $\frac{29}{66}$. **D.** $\frac{37}{66}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{12}^2=66$.

Gọi A là biến cố " 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4.4=16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).
- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3.4=12$ cách.
- Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3.3=9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=16+12+9=37$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{37}{66}$.

Câu 18. Một nhóm gồm 3 học sinh lớp 10, 3 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngồi vào một hàng có 9 ghế, mỗi em ngồi 1 ghế. Xác suất để 3 học sinh lớp 10 không ngồi 3 ghế liền nhau.

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{12}$. **C.** $\dfrac{7}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử không gian mẫu là số hoán vị của 9 phần tử : $n(\Omega)=9!$

Gọi A là biến cố " 3 học sinh lớp 10 ngồi 3 ghế liền nhau"

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố " 3 học sinh lớp 10 ngồi 3 ghế không liền nhau"

Xem 3 học sinh lớp 10 như một khối đoàn kết, xếp khối này với 6 học sinh còn lại (lớp 11 và lớp 12) ta có $7!$ cách xếp, sau đó hoán đổi vị trí 3 học sinh lớp 10 cho nhau ta lại có $3!$ cách xếp. Vậy số biến cố thuận lợi $n(A)=7!.3!$

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{12}$.

Vậy xác suất cần tìm $P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{11}{12}$.

Câu 19. Đề kiểm tra 15 phút có 10 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó có một phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 1,0 điểm. Một thí sinh làm cả 10 câu, mỗi câu chọn một phương án. Tính xác suất để thí sinh đó đạt từ 8,0 điểm trở lên.

A. $\dfrac{436}{4^{10}}$. **B.** $\dfrac{463}{4^{10}}$. **C.** $\dfrac{436}{10^4}$. **D.** $\dfrac{463}{10^4}$.

Lời giải

Chọn A

Thí sinh làm cả 10 câu, mỗi câu có 4 cách chọn một phương án nên ta có 4^{10} cách để hoàn thành bài kiểm tra $\Rightarrow n(\Omega)=4^{10}$.

Gọi A là biến cố thí sinh đó đạt từ 8,0 điểm trở lên.

Trường hợp 1: Thí sinh làm sai 2 câu, có $C_{10}^2.3^2$ cách.

Trường hợp 2: Thí sinh làm sai 1 câu, có $C_{10}^1.3$ cách.

Trường hợp 3: Thí sinh làm đúng cả 10 câu, có 1 cách.

$\Rightarrow n(A)=C_{10}^2.3^2+C_{10}^1.3+1=436$

Vậy xác suất để thí sinh đạt từ 8,0 điểm trở lên là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{436}{4^{10}}$.

Câu 20. Cho đa giác đều 20 cạnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều. Xác suất để 3 đỉnh lấy được là 3 đỉnh của một tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều bằng

A. $\dfrac{3}{38}$. **B.** $\dfrac{7}{114}$. **C.** $\dfrac{7}{57}$. **D.** $\dfrac{5}{114}$.

Lời giải

Chọn C

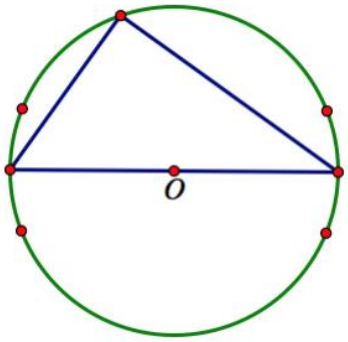
Đa giác đều nội tiếp một đường tròn tâm O. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh có C_{20}^3 cách.

Để 3 đỉnh là 3 đỉnh một tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều thực hiện theo các bước:

Lấy một đường kính qua tâm đường tròn có 10 cách ta được 2 đỉnh.

Chọn đỉnh còn lại trong $20-2-4=14$ đỉnh (loại đi 2 đỉnh thuộc đường kính và 4 đỉnh gần ngay đường kính đó) cách.

Vậy có tất cả $10\times 14=140$ tam giác thoả mãn.



Xác suất cần tính bằng $\dfrac{140}{C_{20}^3}=\dfrac{7}{57}$.

Mức độ 4

Câu 1. Từ một hộp có 4 bút bi màu xanh, 5 bút bi màu đen và 6 bút bi màu đỏ, chọn ngẫu nhiên 5 bút. Xác suất để 5 bút được chọn chỉ có đúng hai màu là

A. $\dfrac{118}{429}$. **B.** $\dfrac{460}{1001}$. **C.** $\dfrac{119}{429}$. **D.** $\dfrac{272}{1001}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: " 5 bút được chọn có đúng hai màu".

Ta có $n(\Omega)=C_{15}^5$.

Vì 5 bút được chọn có đúng hai màu nên có 3 trường hợp:

TH1: Có đúng hai màu xanh và đen:

- Chọn 5 bút trong hai màu xanh, đen (có 9 bút), có C_9^5 cách chọn.

- Trong C_9^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và không có cách chọn nào để cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu xanh và đen bằng $C_9^5 - C_5^5$.

TH2: Có đúng hai màu đen và đỏ:

- Chọn 5 bút trong hai màu đen, đỏ (có 11 bút), có C_{11}^5 cách chọn.

- Trong C_{11}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và đen bằng $C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5$.

TH3: Có đúng hai màu đỏ và xanh:

- Chọn 5 bút trong hai màu đỏ, xanh (có 10 bút), có C_{10}^5 cách chọn.

- Trong C_{10}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ và không có cách chọn cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và xanh bằng $C_{10}^5 - C_6^5$.

Vậy $P(A) = \dfrac{\left(C_9^5 - C_5^5\right) + \left(C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5\right) + \left(C_{10}^5 - C_6^5\right)}{C_{15}^5} = \dfrac{118}{429}$.

Câu 2. Từ một hộp có 4 bút bi màu xanh, 5 bút bi màu đen và 6 bút bi màu đỏ, chọn ngẫu nhiên 5 bút. Xác suất để 5 bút được chọn chỉ có đúng hai màu là

A. $\dfrac{118}{429}$. **B.** $\dfrac{460}{1001}$. **C.** $\dfrac{119}{429}$. **D.** $\dfrac{272}{1001}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: " 5 bút được chọn có đúng hai màu".

Ta có $n(\Omega) = C_{15}^5$.

Vì 5 bút được chọn có đúng hai màu nên có 3 trường hợp:

TH1: Có đúng hai màu xanh và đen:

- Chọn 5 bút trong hai màu xanh, đen (có 9 bút), có C_9^5 cách chọn.

- Trong C_9^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và không có cách chọn nào để cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu xanh và đen bằng $C_9^5 - C_5^5$.

TH2: Có đúng hai màu đen và đỏ:

- Chọn 5 bút trong hai màu đen, đỏ (có 11 bút), có C_{11}^5 cách chọn.

- Trong C_{11}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_5^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đen và C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và đen bằng $C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5$.

TH3: Có đúng hai màu đỏ và xanh:

- Chọn 5 bút trong hai màu đỏ, xanh (có 10 bút), có C_{10}^5 cách chọn.

- Trong C_{10}^5 cách chọn 5 bút trên, có C_6^5 cách chọn cả 5 bút đều màu đỏ và không có cách chọn cả 5 bút đều màu xanh.

Số cách chọn 5 bút có đúng hai màu đỏ và xanh bằng $C_{10}^5 - C_6^5$.

Vậy $P(A) = \dfrac{\left(C_9^5 - C_5^5\right) + \left(C_{11}^5 - C_5^5 - C_6^5\right) + \left(C_{10}^5 - C_6^5\right)}{C_{15}^5} = \dfrac{118}{429}$.

Câu 3. Một túi đựng 10 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi đó. Xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{1}{3}$.

B. $\dfrac{2C_3^3 + C_4^3 + C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3}$.

C. $\dfrac{2C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3}$.

D. $\dfrac{2C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3}$.

Lời giải

Chọn B

Số cách rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi có 10 thẻ là: C_{10}^3 cách.

Trong các số từ 1 đến 10 có ba số chia hết cho 3, bốn số chia cho 3 dư 1, ba số chia cho 3 dư 2.

Để tổng các số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 thì ba thẻ đó phải có số được ghi thỏa mãn:

- Ba số đều chia hết cho 3.

- Ba số đều chia cho 3 dư 1.

- Ba số đều chia cho 3 dư 2.

- Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, một số chia cho 3 dư 2.

Do đó số cách rút để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 là $C_3^3 + C_4^3 + C_3^3 + C_3^1 C_4^1 C_3^1$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{2C_3^3 + C_4^3 + C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3}$.

Câu 4. Có 60 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 50. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3.

A. $\frac{11}{171}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{9}{89}$. **D.** $\frac{409}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử không gian mẫu: $|\Omega| = C_{50}^3 = 19600$.

Gọi A là tập các thẻ đánh số a sao cho $1 \le a \le 50$ và a chia hết cho 3. $A = \{3;6;...;48\} \Rightarrow |A| = 16$

Gọi B là tập các thẻ đánh số b sao cho $1 \le b \le 50$ và b chia 3 dư 1. $B = \{1;4;...;49\} \Rightarrow |B| = 17$

Gọi C là tập các thẻ đánh số c sao cho $1 \le c \le 50$ và c chia 3 dư 2. $C = \{2;5;...;59\} \Rightarrow |C| = 17$

.

Với D là biến cố: "Rút ngẫu nhiên 3 thẻ được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tổng các số ghi trên thẻ chia hết cho 3". Ta có 4 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Rút 3 thẻ từ A: Có C_{16}^3 (*cách*).

Trường hợp 2: Rút 3 thẻ từ B: Có C_{17}^3 (*cách*).

Trường hợp 3: Rút 3 thẻ từ C: Có C_{17}^3 (*cách*).

Trường hợp 4: Rút mỗi tập 1 thẻ: Có $16.17.17 = 4624$ (*cách*).

Suy ra $|D| = 2.C_{17}^3 + C_{16}^3 + 4624 = 6544$.

Vậy xác suất cần tìm $P = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6544}{19600} = \frac{409}{1225}$.

Câu 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có năm chữ số khác nhau đôi một. Xác suất để số được chọn có ba chữ số chẵn và hai chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau?

A. $\frac{2}{75}$. **B.** $\frac{8}{147}$ **C.** $\frac{85}{567}$. **D.** $\frac{58}{567}$.

Lời Giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.A_9^4$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn có ba chữ số chẵn và hai chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau".

Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn, có A_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ và xếp chúng kề nhau, có 4! Cách xếp sao cho 2 chữ số lẻ đứng kề nhau. Suy ra có $C_5^3.A_5^2.4!$ cách xếp thoả mãn (kể cả chữ số 0 đứng đầu).

Ta tính số các số thoả mãn đề mà có số chữ số 0 đứng đầu, ta xét 4 chữ số cuối: Có C_4^2 cách chọn 2 chữ số trong 4 chữ số chẵn, có C_5^2 cách chọn 2 chữ số lẻ, coi 2 chữ số lẻ là một nhóm ta có số các số là $C_4^2.C_5^2.2!.3!$.

Suy ra số các số thoả mãn đề bài là: $n(A) = C_5^3.A_5^2.4! - C_4^2.C_5^2.2!.3! = 4080$.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4080}{9.A_9^4} = \frac{85}{567}$.

Câu 6. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

A. $\frac{13}{27}$ **B.** $\frac{14}{27}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{365}{729}$

Lời giải

Chọn A

Gọi A là tập tất cả các số nguyên dương đầu tiên, $A=\{1;\ 2;\ 3;.....;\ 26;\ 27\}$

Chọn hai số khác nhau từ A có: $n(\Omega)=C_{27}^{2}=351$. Tổng hai số là số chẵn khi cả hai số đó đều chẵn hoặc đều lẻ. Do đó:

Chọn hai số chẵn khác nhau từ tập A có: $C_{13}^{2}=78$

Chọn hai số lẻ khác nhau từ tập A có: $C_{14}^{2}=91$

Số cách chọn là: $78+91=169$

Xác suất cần tìm là: $P=\frac{169}{351}=\frac{13}{27}$

Câu 7. Cho tập hợp $A=\{1;2;...;100\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A. Xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng bằng:

A. $\frac{1}{132}$. **B.** $\frac{1}{66}$. **C.** $\frac{1}{33}$. **D.** $\frac{1}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử từ tập $A\Rightarrow$ Không gian mẫu là $|\Omega|=C_{100}^{3}$.

Gọi biến cố A:"Ba phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng".

Cách 1. Giả sử 3 phần tử đó là $x;x+d;x+2d$ với $x,d\in\mathbb{N}^{*}$.

Với $x=1$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{99}{2}\Rightarrow d\in\{1;2;...;49\}\Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=2$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{98}{2}\Rightarrow d\in\{1;2;...;49\}\Rightarrow$ có 49 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=3$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{97}{2}\Rightarrow d\in\{1;2;...;48\}\Rightarrow$ có 48 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=97$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{3}{2}\Rightarrow d\in\{1\}\Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=98$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le 1\Rightarrow d\in\{1\}\Rightarrow$ có 1 bộ ba số thỏa mãn.

Với $x=99$ thì ta có $x+2d\le 100\Leftrightarrow d\le\frac{1}{2}\Rightarrow d\in\varnothing\Rightarrow$ không có bộ ba số thỏa mãn.

Do đó ta thấy có tất cả $2\left(49+48+47+...+2+1\right)=2.\dfrac{49\left(49+1\right)}{2}=2450$ bộ ba số thỏa mãn.

Cách 2. Giả sử 3 phần tử đó là $a;b;c$ với $a,b,c\in A$.

Trong tập A có 50 số lẻ, 50 số chẵn.

Do a,b,c lập thành một CSC nên $a+c=2b$ là một số chẵn.

Do đó hai số a,c cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Đồng thời ứng với 1 cách chọn hai số a,c thì xác định được duy nhất 1 số b.

Tổng số bộ ba số a,b,c là $C_{50}^2+C_{50}^2=2450$ (bộ ba).

Vậy xác suất của biến cố A là $P=\dfrac{2450}{C_{100}^3}=\dfrac{1}{66}$.

Câu 8. Cho tập hợp $S=\left\{1;2;3;4;.....;17\right\}$ gồm 17 số . Chọn ngẫu nhiên một tập con có ba phần tử của tập S. Tính xác suất để tập hợp được chọn có tổng các phần tử chia hết cho 3.

A. $\dfrac{27}{34}$. **B.** $\dfrac{23}{68}$. **C.** $\dfrac{9}{34}$. **D.** $\dfrac{9}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Tập hợp các số từ tập S chia hết cho 3 là $\left\{3;6;9;12;15\right\}$.

Tập hợp các số từ tập S chia cho 3 dư 1 là $\left\{1;4;7;10;13;16\right\}$.

Tập hợp các số từ tập S chia cho 3 dư 2 là $\left\{2;5;8;11;14;17\right\}$.

*) TH1: Ba số lấy từ tập S đều chia hết cho 3: Có C_5^3 cách chọn.

*) TH2: Ba số lấy từ tập S đều chia 3 dư 1: Có C_6^3 cách chọn.

*) TH3: Ba số lấy từ tập S đều chia 3 dư 2: Có C_6^3 cách chọn.

*) TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2: Có $C_5^1.C_6^1.C_6^1$ cách chọn.

Vậy số phần tử của biến cố A: " Chọn được ba số có tổng chia hết cho 3" là :

$$n\left(A\right)=C_5^3+C_6^3+C_6^3+C_5^1.C_6^1.C_6^1=230.$$

Số phần tử không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_{17}^3$.

Xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{230}{C_{17}^3}=\dfrac{23}{68}$.

Câu 9. Gọi M là tập tất cả các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau và có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập M. Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn, đồng thời thỏa mãn $a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6$.

A. $\dfrac{35}{34020}$ **B.** $\dfrac{37}{34020}$. **C.** $\dfrac{37}{3402}$. **D.** $\dfrac{74}{34020}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố "chọn ra được một số tự nhiên chẵn từ tập M đồng thời thỏa mãn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$". Khi đó: $n(M) = 9.A_9^5$ (số có sáu chữ số đôi một khác nhau thì a_1 có chín cách chọn, $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên có A_9^5).

TH1: $a_6 = 0$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_9^5 cách chọn.

TH2: $a_6 = 2$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_7^5 cách chọn.

TH3: $a_6 = 4$ thì $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ có C_5^5 cách chọn.

$\Rightarrow n(A) = C_9^5 + C_7^5 + C_5^5 = 148$

Do đó $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{148}{9.A_9^5} = \dfrac{37}{34020}$.

Câu 10. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số lẻ bằng

A. $\dfrac{41}{81}$. **B.** $\dfrac{40}{81}$. **C.** $\dfrac{41}{648}$. **D.** $\dfrac{16}{81}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 9.9.8 = 648$

A: "Số được chọn có tổng các chữ số là số lẻ"

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số lẻ

Số cách chọn ra và sắp xếp ba chữ số lẻ là A_5^3.

Trường hợp 2: Số được chọn gồm có 2 chữ số chẵn và 1 chữ số lẻ.

Số cách chọn ra và sắp xếp 2 chữ số là số chẵn và 1 chữ số là số lẻ là $C_5^2.C_5^1.3!$

Số cách chọn ra và sắp xếp 2 chữ số là số chẵn và 1 chữ số lẻ có số 0 đứng đầu là $C_4^1.C_5^1.2!$

Vậy nên số số thỏa biến cố A là: $C_5^2.C_5^1.3! - C_4^1.C_5^1.2! = 260$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 60 + 260 = 320$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{320}{648} = \dfrac{40}{81}$.

Câu 11. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) được lập từ các chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$. Chọn ngẫu nhiên một số $\overline{abc}$ từ S. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn $a \le b \le c$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{11}{60}$. **C.** $\frac{13}{60}$. **D.** $\frac{9}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.10^2=900$.

Gọi biến cố A:"Chọn được một số thỏa mãn $a\le b\le c$".

Vì $a\le b\le c$ mà $a\neq 0$ nên trong các chữ số sẽ không có số 0.

Trường hợp 1: Số được chọn có 3 chữ số giống nhau có 9 số.

Trường hợp 2: Số được chọn tạo bởi hai chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 2 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^2.

Mỗi bộ 2 chữ số được chọn tạo ra 2 số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $2.C_9^2$ số thỏa mãn.

Trường hợp 3: Số được chọn tạo bởi ba chữ số khác nhau.

Số cách chọn ra 3 chữ số khác nhau từ 9 chữ số trên là: C_9^3.

Mỗi bộ 3 chữ số được chọn chỉ tạo ra một số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có C_9^3 số thỏa mãn.

Vậy $n(A)=9+2.C_9^2+C_9^3=165$

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{165}{900}=\frac{11}{60}$.

Câu 12. Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập hợp X. Gọi A là biến cố lấy được số có đúng hai chữ số 1, có đúng hai chữ số 2, bốn chữ số còn lại đôi một khác nhau, đồng thời các chữ số giống nhau không đứng liền kề nhau. Xác suất của biến cố A bằng

A. $\frac{176400}{9^8}$. **B.** $\frac{151200}{9^8}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{201600}{9^8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $n(\Omega)=9^8$.

TH1: Xếp bất kỳ

Xếp hai chữ số 1, hai chữ số 2 bất kỳ và 4 chữ số còn lại: Có $C_8^2.C_6^2.A_7^4=352.800$ (cách).

TH2: Số các cách xếp sao cho không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Xếp hai chữ số 1 đứng liền nhau: $7.C_6^2.A_7^4$ cách.

Xếp hai chữ số 2 đứng liền nhau: $7.C_6^2.A_7^4$ cách.

Số các cách xếp thuộc cả hai trường hợp trên:

+ Coi hai chữ số 1 đứng liền nhau là nhóm X, hai chữ số 2 đứng liền nhau là nhóm Y

+ Xếp X, Y và 4 số còn lại có: $C_7^4.6!$ (cách)

Vậy số cách xếp không thỏa mãn yêu cầu là: $2.7.C_6^2.\mathrm{A}_7^4 - C_7^4.6! = 151200$ (cách)

Vậy $n(A) = 352.800 - 151.200 = 201.600 \Rightarrow p(A) = \dfrac{201600}{9^8}$

Câu 13. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, gọi S là tập hợp các số có 8 chữ số đôi một khác nhau lập từ tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, xác suất để số được chọn có tổng 4 chữa số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối bằng

A. $\dfrac{3}{35}$. **B.** $\dfrac{4}{35}$. **C.** $\dfrac{12}{245}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Tổng các chữ số của tập S là $T = \dfrac{7.8}{2} = 28$

Ta chia tập S thành hai tập B, C mỗi tập 4 phần tử sao cho tổng các phần tử của B, C đều bằng 14 và $B \cap C = \varnothing$

Suy ra:

B	C
$\{0;1;6;7\}$	$\{2;3;4;5\}$
$\{0;2;5;7\}$	$\{1;3;4;6\}$
$\{0;3;4;7\}$	$\{1;2;5;6\}$
$\{0;3;5;6\}$	$\{1;2;4;7\}$

Số các số có 8 chữ số lập từ tập S là $7.7!$

Gọi $\overline{a_1a_2....a_8}$ là số có 8 chữ số thỏa mãn đề bài.

TH1 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy từ các chữ số từ tập C khi đó có: $4.4!.4!$ số thỏa mãn.

TH2 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ lấy từ các chữ số từ tập B khi đó có: $4.3.3!.4!$ số thỏa mãn.

Vậy có $4.4!.4! + 4.3!.4! = 4.4!(3! + 4!)$ số

Xác suất để số được chọn có tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối là

$$P = \frac{4.4!(3.3! + 4!)}{7.7!} = \frac{4}{35}$$

Câu 14. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{25}{81}$. **C.** $\frac{10}{27}$. **D.** $\frac{25}{1944}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có không gian mẫu $n(\Omega)=9A_9^5=136080$.

Gọi biến cố A: "Số được chọn có mặt chữ số 0 và 1".

Số cần tìm có dạng là: $\overline{abcdef}$ $(a\neq 0)$.

- **Trường hợp 1:** $a=1$.
  Khi đó số 0 có 5 cách chọn vị trí.
  Các chữ số còn lại có A_8^4 cách chọn.
  Vậy có $5.A_8^4=8400$ số.
- **Trường hợp 2:** $a\neq 1$.
  Khi đó số 1 có 5 cách chọn vị trí.
  Số 0 có 4 cách chọn vị trí.
  Các chữ số còn lại có A_8^4 cách chọn.
  Vậy có $5.4.A_8^4=33600$.

Do đó $n(A)=8400+33600=42000$.

Xác suất để số được chọn có mặt chữ số 0 và 1 là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{42000}{136080}=\frac{25}{81}$.

Câu 15. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9. Tính xác suất để chọn được số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102.

A. $\frac{83}{120}$. **B.** $\frac{119}{180}$. **C.** $\frac{31}{45}$. **D.** $\frac{119}{200}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$.

Ta có $n(\Omega)=6.6.5.4=720$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn số lớn hơn số 2019 và bé hơn số 9102".

Tính $n(A)$:

TH1: $a=2$, $b=0$, $c\geq 3$, d tuỳ ý khác a,b,c suy ra có $1.1.4.4=16$ số.

TH2: $a=2, b>0$ có $1.5.5.4=100$ số.

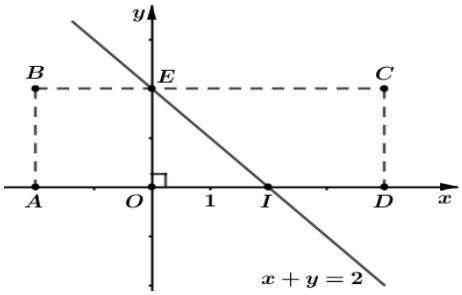
TH3: $a\in\{3;4;8\}$, $b;c;d$ khác nhau và khác a, có $3.6.5.4=360$ số.

TH4: $a=9; b=0$, $c;d$ khác nhau và khác $a;b$ có $1.1.5.4=20$ số.

Suy ra $n(A)=16+360+100+20=496$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{31}{45}$.

Câu 16. Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A\ -2;0$, $B\ -2;2$, $C\ 4;2$, $D\ 4;0$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M\ x;y$ mà $x+y<2$.



A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{8}{21}$.

Lời giải

Chọn B

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7.3=21$ điểm vì

$$\begin{cases} x\in\ -2;-1;0;1;2;3;4 \\ y\in\ 0;1;2 \end{cases}.$$

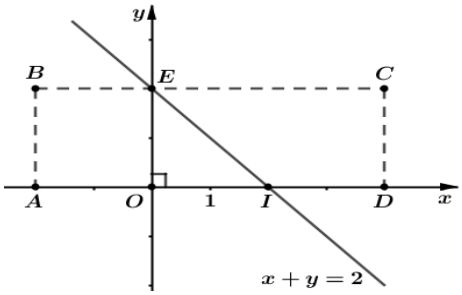
Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M\ x,y$ có $x+y<2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang $BEIA$. Để $M\ x,y$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x\in\ -2;-1;0;1;2 \\ y\in\ 0;1;2 \end{cases}$.

- Nếu $x\in\ -2;-1$ thì $y\in\ 0;1;2\ \Rightarrow$ có $2.3=6$ điểm.
- Nếu $x=0$ thì $y\in\ 0;1\ \Rightarrow$ có 2 điểm.
- Nếu $x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow$ có 1 điểm.

$\longrightarrow$ có tất cả $6+2+1=9$ điểm thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính $P=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$.

Câu 17. Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A\ -2;0$, $B\ -2;2$, $C\ 4;2$, $D\ 4;0$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M\ x;y$ mà $x+y<2.$



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{8}{21}$.

Lời giải

Chọn B

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7.3=21$ điểm vì

$$\begin{cases} x\in\ -2;-1;0;1;2;3;4 \\ y\in\ 0;1;2 \end{cases}.$$

Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M\ x,y$ có $x+y<2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang $BEIA$. Để $M\ x,y$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x\in\ -2;-1;0;1;2 \\ y\in\ 0;1;2 \end{cases}$.

- Nếu $x\in\ -2;-1$ thì $y\in\ 0;1;2\ \Rightarrow$ có $2.3=6$ điểm.
- Nếu $x=0$ thì $y\in\ 0;1\ \Rightarrow$ có 2 điểm.
- Nếu $x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow$ có 1 điểm.

$\longrightarrow$ có tất cả $6+2+1=9$ điểm thỏa mãn.

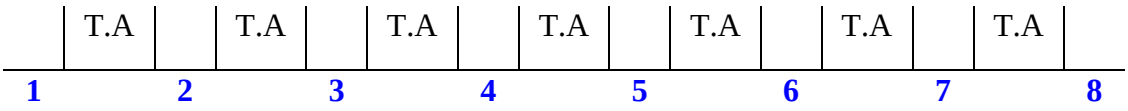
Vậy xác suất cần tính $P=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

Câu 18. Có 3 quyển sách Văn học khác nhau, 4 quyển sách Toán học khác nhau và 7 quyển sách Tiếng Anh khác nhau được xếp lên một kệ ngang. Tính xác suất để hai cuốn sách cùng môn không ở cạnh nhau

A. $\frac{19}{12012}$. **B.** $\frac{19}{1012}$. **C.** $\frac{19}{1202}$. **D.** $\frac{5}{8008}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi Ω là biến cố "xếp 14 quyển sách lên kệ sách một cách tùy ý" $\Rightarrow n(\Omega)=14!$.

A là biến cố "xếp 14 cuốn sách lên kệ sách sao cho hai cuốn sách cùng môn không ở cạnh nhau".

- Xếp 7 quyển sách Tiếng Anh vào kệ có $7!$ cách.

- 7 quyển sách Tiếng Anh tạo ra 8 chỗ trống (gồm 6 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống trước sau).

Đánh số từ 1 đến 8, từ trái sang phải cho các chỗ trống. Khi đó ta xét các trường hợp:

TH1: Xếp sách Văn hoặc Toán vào vị trí từ 1 đến 7 có $7!$ cách.

TH2: Xếp sách Văn hoặc Toán vào vị trí từ 2 đến 8 có $7!$ cách.

TH3: Xếp 1 cặp sách Văn – Toán chung vào ngăn 2, các ngăn 3, 4, 5, 6, 7 xếp tùy ý số sách còn lại. Ta có:

+ Số cách chọn 1 cặp sách Văn – Toán: 3.4 cách.

+ Vị trí 2 cuốn sách trong cặp sách: $2!$ cách.

+ Xếp các sách còn lại vào các ngăn 3, 4, 5, 6, 7 có $5!$ cách.

Vậy ta có số cách xếp 1 cặp sách Văn – Toán chung vào ngăn 2, các ngăn 3, 4, 5, 6, 7 xếp tùy ý số sách còn lại là $3.4.2!.5!$ cách.

Tương tự cho xếp cặp sách Văn – Toán lần lượt vào các ngăn 3, 4, 5, 6, 7.

Số trường hợp thuận lợi của biến cố là $n(A)=7!(2.7!+3.4.2.6.5!)$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{19}{12012}$.

Câu 19. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích của ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung), tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

A. $\dfrac{82}{216}$. **B.** $\dfrac{60}{216}$. **C.** $\dfrac{90}{216}$. **D.** $\dfrac{83}{216}$.

Lời giải

Chọn D

Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất nên không gian mẫu có số phần tử $n(\Omega)=6^3=216$.

Gọi A là biến cố tích 3 số chấm ở 3 lần gieo liên tiếp không chia hết cho 6.

Gọi x, y, z là số chấm trên từng lần gieo theo thứ tự.

Để thoả điều kiện không chia hết cho 6 thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Cả 3 lần gieo đều không xuất hiện mặt 3 và 6: $4^3 = 64$ khả năng.

Trường hợp 2: Cả 3 lần gieo xuất hiện mặt 3 ít nhất một lần, và những lần gieo còn lại không xuất hiện mặt chẵn.

Cả 3 lần đều ra mặt 3 chấm: $x = y = z = 3$ có 1 cách chọn.

Chỉ 2 lần ra mặt 3 chấm, lần còn lại nhận các giá trị: 1 và 5 có: $2.3 = 6$ cách.

Chỉ một lần ra mặt 3 chấm: $3.2^2 = 12$ cách.

Trường hợp 2 có $12 + 6 + 1 = 19$.

Do đó $n(A) = 64 + 19 = 83$. Suy ra $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{83}{216}$.

Câu 20. Gọi S là tập các số có 7 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số chọn được có các chữ số 3,4,5 đứng liền nhau và các chữ số 6,9 đứng liền nhau.

A. $\dfrac{1}{135}$. **B.** $\dfrac{3}{700}$. **C.** $\dfrac{1}{210}$. **D.** $\dfrac{1}{630}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau $\Omega = 9.9.8.7.6.5.4$.

Gọi A là biến cố số chọn được thỏa mãn yêu cầu đề bài

Số thỏa mãn yêu cầu đề bài bắt buộc phải có 5 chữ số 3,4,5,6,9 nên cần chọn thêm 2 chữ số từ 5 số còn lại (0,1,2,7,8)

Số cách chọn ra 2 trong 5 chữ số C_5^2 (1)

Theo đề ta "buộc" 3 chữ số 3,4,5 lại và xem như 1 phần tử có 3! cách, tương tự cũng buộc 2 chữ số 6 và 9 lại và xem như một phần tử có 2! cách (2)

Sau đó hoán vị 4 phần tử gồm 2 phần tử đã chọn ở (1) và 2 phần tử đã chọn ở (2) có 4! Cách

Tổng cộng có $C_5^2.3!.2!.4!$ số

Nhưng trong cách tính trên vẫn còn số có dạng $\overline{Oabcdef}$ tức là có số 0 đứng đầu

Ta tính số phần tử của trường hợp này tương tự như cách làm trên đối với số có 6 chữ số và chắc chắc số 0 đứng đầu, ta có $C_4^1.3!.2!.3!$

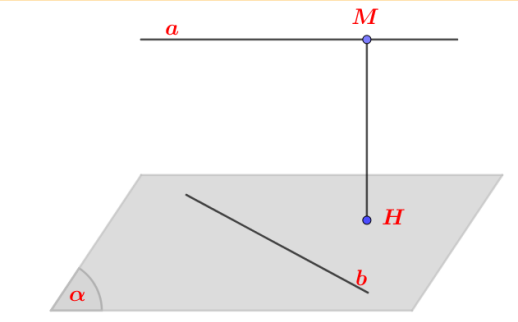
Vậy $\Omega_A = C_5^2.3!.2!.4! - C_4^1.3!.2!.3!$

Xác xuất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{\Omega_A}{\Omega} = \dfrac{C_5^2.3!.2!.4! - C_4^1.3!.2!.3!}{9.9.8.7.6.5.4} = \dfrac{1}{210}$

DẠNG TOÁN 40: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Muốn tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b ta dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a. Chọn một điểm M thích hợp trên a và tính khoảng cách từ M đến (α).

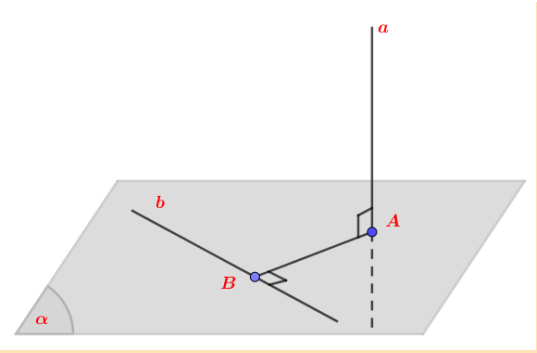


$$d(a,b)=d(M,(\alpha)).$$

Để dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: **(Sử dụng trong trường hợp $a\perp b$)**

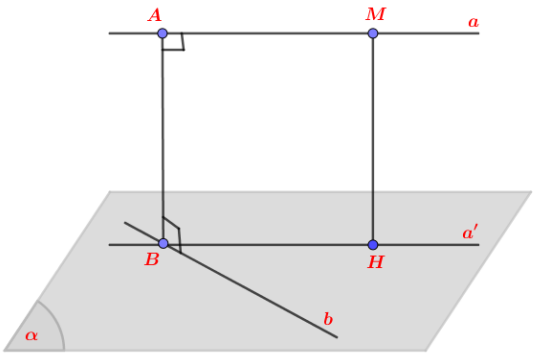
- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a tại A.
- Dựng $AB\perp b$ tại b.



AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2:

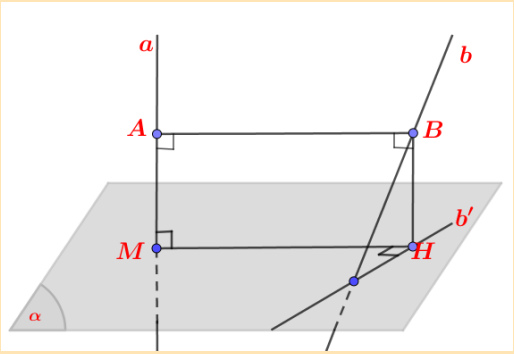
- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.
- Chọn điểm M thích hợp trên a, dựng $MH\perp(\alpha)$ tại H.
- Qua H, dựng đường thẳng $a'//a$, cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại A.



AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 3:

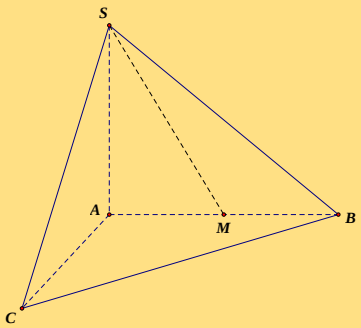
- Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M.
- Dựng hình chiếu b' của b lên (α).
- Dựng hình chiếu vuông góc H khác của M lên b'.
- Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.
- Qua B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại A.



AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2a$, $AC=4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$ (minh họa như hình vẽ bên). Gọi M là trung điểm AB.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Tứ diện vuông: Tứ diện $SABC$ được gọi là tứ diện vuông nếu tứ diện đó có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). Khi đó:

+ H là trực tâm tam giác ABC.

+ $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}$.

Đường thẳng song song với mặt phẳng: Cho đường thẳng $a\subset(P)$.

Nếu $a//b\subset(P)\Rightarrow a//(P)$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Gọi N là trung điểm AC. Chứng minh $BC//(SMN)$.

Suy ra $d(BC;SM)=d(BC;(SMN))=d(B;(SMN))$.

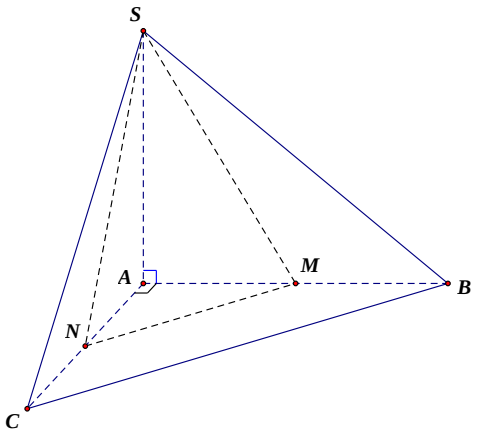
B2: Nhận xét $d(B;(SMN))=d(A;(SMN))=h$ là độ dài đường cao của tứ diện $A.SMN$ xuất phát từ đỉnh A.

B3: Sử dụng tính chất của tứ diện vuông để tính h.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm AC. Khi đó: $AN=\frac{AC}{2}=2a$; $AM=\frac{AB}{2}=a$.

Ta có: $MN//BC\Rightarrow BC//(SMN)$.

Suy ra: $d(BC;SM)=d(BC;(SMN))=d(B;(SMN))=d(A;(SMN))$.

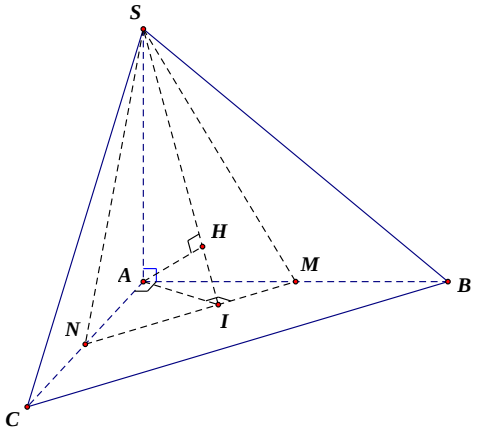
(Do đường thẳng AB cắt mặt phẳng (SMN) tại điểm M là trung điểm AB).

Tứ diện $A.SMN$ vuông tại A có $h=d\left(A;(SMN)\right)$ suy ra:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{4a^2} \text{ hay } h=\frac{2a}{3}.$$

Vậy $d\left(BC;SM\right)=d\left(A;(SMN)\right)=h=\frac{2a}{3}$.

Lưu ý: Ta có thể tính $d\left(A;(SMN)\right)$ như sau:



Gọi I,H lần lượt là hình chiếu của điểm A trên MN,SI.

$$\begin{cases} MN\perp AI \\ MN\perp SA \end{cases}\Rightarrow MN\perp(SAI)\Rightarrow MN\perp AH.$$

$$\begin{cases} AH\perp SI \\ AH\perp MN \end{cases}\Rightarrow AH\perp(SMN)\Rightarrow d\left(AH;(SMN)\right)=AH.$$

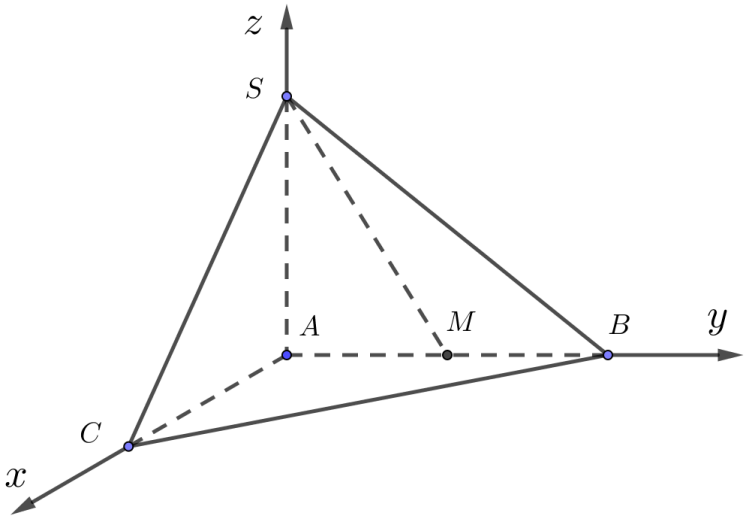
ΔAMN vuông tại $A\Rightarrow \frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(2a)^2}=\frac{5}{4a^2}$.

ΔSAI vuông tại $A\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a}{3}$.

Vậy $d\left(BC;SM\right)=d\left(A;(SMN)\right)=AH=\frac{2a}{3}$.

Cách khác :

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O\equiv A$, cho $a=1$.



Ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(4;0;0)$, $S(0;0;1)$, $M(0;1;0)$.

$d(SM,BC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{BC}\right]\overrightarrow{SB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\dfrac{2}{3}$. Vậy $d(SM,BC)=\dfrac{2}{3}a$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cho điểm M và một đường thẳng Δ. Trong mặt phẳng (M,Δ) gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ. Khi đó khoảng cách MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến Δ.

Ký hiệu: $d(M,\Delta)=MH$.

3. HƯỚNG GIẢI:

Qua M kẻ $MH\perp\Delta$. Khoảng cách từ M đến Δ bằng MH.

Công thức sử dụng: Cho ΔMAB vuông tại M, đường cao MH.

- $\dfrac{1}{MH^2}=\dfrac{1}{MA^2}+\dfrac{1}{MB^2}$.
- $MH=\dfrac{MA.MB}{AB}\left(MH=\dfrac{2S_{\Delta MAB}}{AB}\right)$.

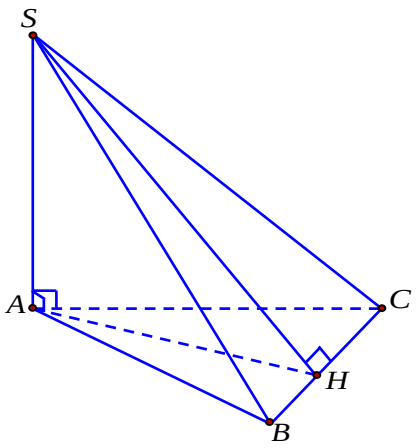
BÀI TẬP MẪU

Cho hình chóp $S.ABC$ với SA vuông góc với (ABC) và $SA=a$. Diện tích $S_{\Delta ABC}=a^2$, $BC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ S đến BC bằng bao nhiêu?

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Trong mp (SBC) kẻ $SH \perp BC$.

Theo đầu bài ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta lại có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC \Rightarrow AH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2.a^2}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}.a$.

Ta có $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$. Vậy $d(S, BC) = SH = a\sqrt{3}$.

DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Khoảng cách từ một điểm đến đến một mặt phẳng (α): $d(\mathrm{O};(\alpha)) = OH$ trong đó H là hình chiếu của O trên (α)

Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) và $M; N \in \Delta$ thì $d(M;(\alpha)) = d(\mathrm{N};(\alpha))$

Nếu đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (α) tại điểm I và $M; N \in \Delta$ ($M; N$ không trùng với I) thì

$$\frac{d(M;(\alpha))}{d(\mathrm{N};(\alpha))} = \frac{MI}{NI}$$

Đặc biệt:

Nếu M là trung điểm của NI thì: $d(M;(\alpha)) = \frac{1}{2} d(N;(\alpha))$

Nếu I là trung điểm của MN thì: $d(M;(\alpha)) = d(N;(\alpha))$

3. HƯỚNG GIẢI:

Xác định hình chiếu H của O trên (α) và tính OH

- Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α)
- Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α)
- Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(\mathrm{O};(\alpha)) = OH$.

Lưu ý

Tính chất của tứ diện vuông

Giả sử $OABC$ là tứ diện vuông tại O $(OA \perp OB; OB \perp OC; OC \perp OA)$ và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

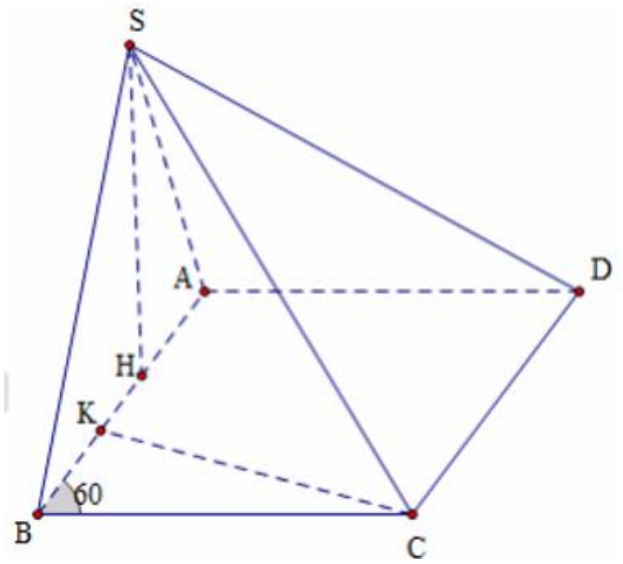
BÀI TẬP MẪU

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}, ABC = 60°$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng $SH \perp AB$,

do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Dựng $CK \perp AB$, có $CK \perp SH \Rightarrow CK \perp (SAB)$

Do $CD // AB \Rightarrow d(D,(SAB)) = d(C,(SAB)) = CK = BC \sin 60° = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

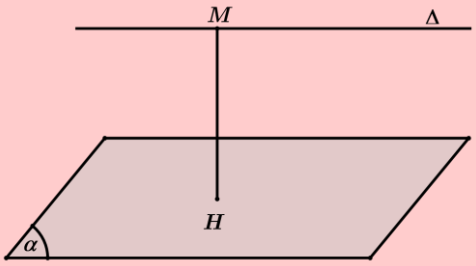
DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

2.1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song:

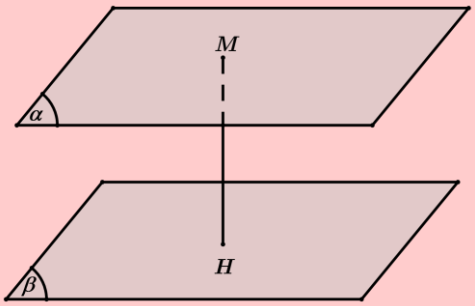
Cho đường thẳng Δ song song mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên đường thẳng Δ đến mặt phẳng (α).



$$d\left(\Delta,(\alpha)\right)=d\left(M,(\alpha)\right),\forall M\in\Delta$$

2.2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm M bất kì trên mặt phẳng (α) đến mặt phẳng (β).



$$d\left((\alpha),(\beta)\right)=d\left(M,(\beta)\right),\forall M\in(\alpha)$$

3. HƯỚNG GIẢI:

Đưa về dạng toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

BÀI TẬP MẪU

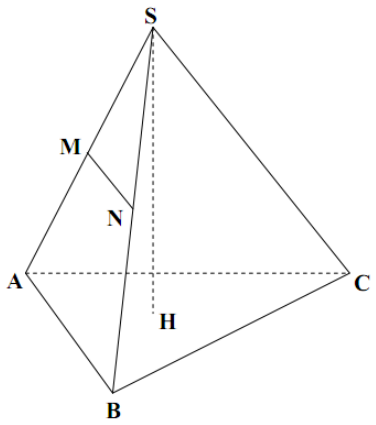
Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SH=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB nên MN // AB suy ra MN // (ABC).

Ta có: $d\left(MN;\left(ABC\right)\right)=d\left(M;\left(ABC\right)\right)$.

Lại có: M là trung điểm của SA nên $d\left(M;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}SH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(MN;\left(ABC\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

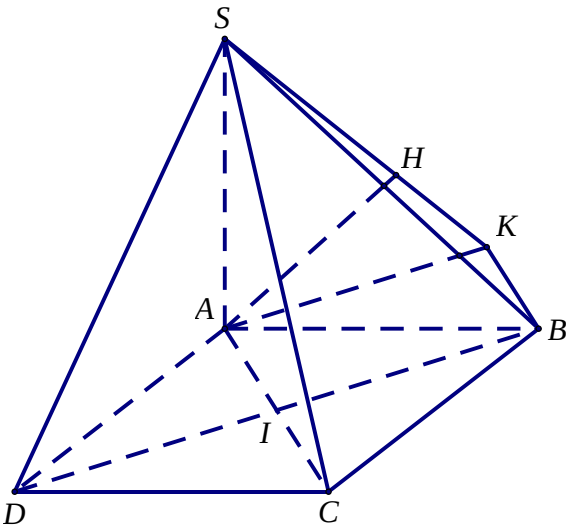
Mức độ 3 + 4

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng $45°$. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn C.



Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là x, $x>0$.

Vì $SA\perp\left(ABCD\right)$ nên suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là góc SCA.

Vậy $SCA=45°$. Do đó tam giác SAC vuông cân tại A. Suy ra $SA=AC=x\sqrt{2}$.

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.x\sqrt{2}.x^2=\frac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

Theo bài ra thì $V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Vậy $x=a$.

Cách 1: Qua B dựng đường thẳng d song song với AC, qua A dựng đường thẳng d' song song với BD. Gọi K là giao điểm của d và d'. Ta có $AC//\left(SKB\right)$.

Do đó $d(AC,SB)=d(AC,(SKB))=d(A,(SKB))$.

Trong mặt phẳng (SAK) dựng AH vuông góc với SK tại H (1).

Vì $AC\perp BD$ nên suy ra $AK\perp KB$ (2). Mặt khác $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp KB$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $KB\perp(SAK)$. Do đó ta có $KB\perp AH$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $AH\perp(SKB)$. Vậy $AH=d(A,(SKB))$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có tứ giác $AKBI$ hình chữ nhật nên $AK=BI=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAK có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2a^2}$.

Suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Cách 2: (Tọa độ hóa)

Gán hệ trục tọa độ như sau: $A(0;0;0)$, $D(a;0;0)$, $B(0;a;0)$ và $S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Khi đó $C(a;a;0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=\left(0;a;-a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{AS}=\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};a^2\right)$, $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{AS}=a^3\sqrt{2}$.

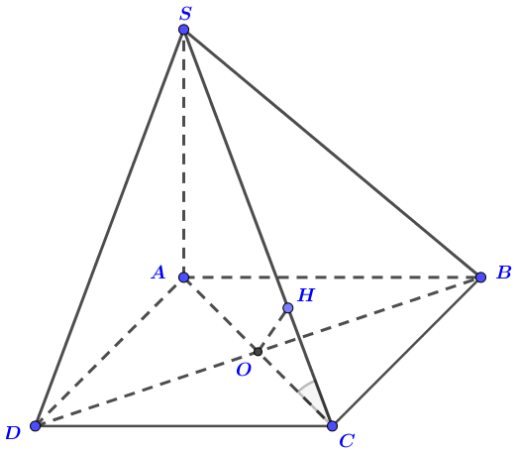
Từ đó ta có $d(AC,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\overrightarrow{AS}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right\|}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là:

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ $\Rightarrow (SC,(ABCD)) = SCA = 45°$.

Lại có: $\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp SC$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng $OH \perp SC$ tại H.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow OH$ là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Suy ra $d(BD, SC) = OH$.

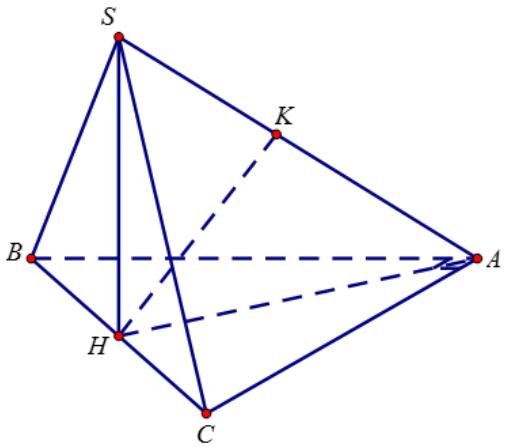
Xét tam giác OHC vuông tại H có: $OH = OC \sin 45° = \frac{\sqrt{2}a}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC.

A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$. **B.** a. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

Lời giải

Chọn A



$AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA \perp (ABC) \supset BC \to SA \perp BC$ (1)

Ta có $BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SHA)$

Trong mp(SAH), kẻ $HK \perp SA$ $(K \in SA)$. Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

Xét tam giác SHA vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HA^2} = \dfrac{16}{3a^2}$

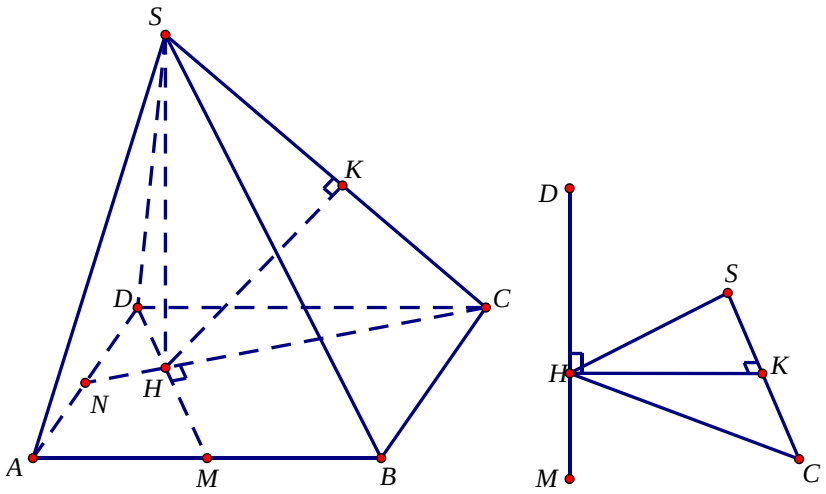
Vậy $d(SA, BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC.

A. $\dfrac{2\sqrt{57}a}{\sqrt{19}}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy $\left.\begin{matrix} DM \perp NC \\ DM \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp SC$.

Ta có: $\Delta MAD = \Delta NDC \Rightarrow ADM = DCN \Rightarrow MD \perp NC$.

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow MD \perp SH \Rightarrow MD \perp (SHC)$.

Kẻ $HK \perp SC$ $(K \in SC)$.

Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC nên $d(DM, SC) = HK$.

Ta có: $HC=\dfrac{CD^2}{CN}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ và $HK=\dfrac{SH\cdot HC}{\sqrt{SH^2+HC^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

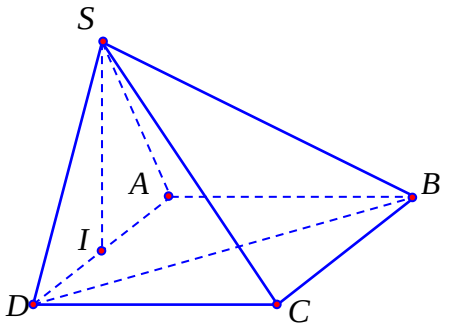
Do đó: $d\left(DM,SC\right)=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên $\left(SAD\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

A. $h=\dfrac{3}{4}a$. **B.** $h=\dfrac{2}{3}a$. **C.** $h=\dfrac{4}{3}a$. **D.** $h=\dfrac{8}{3}a$.

Lời giải

Chọn C.



Cách 1:

Ta có chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ là SI với I là trung điểm của AD.

Suy ra thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}2a^2.SI=\dfrac{4}{3}a^3\Leftrightarrow SI=2a$.

Xét tam giác SCD vuông tại D có:

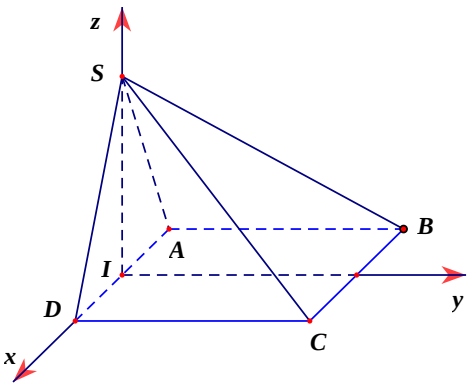
$SD=\sqrt{SI^2+ID^2}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ nên $S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}SD.CD=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}=\dfrac{3a^2}{2}$.

Thấy ngay $V_{S.ABCD}=2V_{S.BCD}=2V_{B.SCD}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}a^3=2.\dfrac{1}{3}S_{\Delta SCD}.h\Leftrightarrow h=\dfrac{4}{3}a$.

Cách 2: (Phương pháp tọa độ hóa)

Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SI\cdot S_{ABCD}\Rightarrow SI=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\dfrac{3\cdot\dfrac{4}{3}a^3}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=2a$.

Chọn hệ trục $Ixyz$ như hình vẽ:



$I(0;0;0)$, $D\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};a\sqrt{2};0\right)$, $S(0;0;2a)$; $B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};a\sqrt{2};0\right)$.

$\overrightarrow{SC}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};a\sqrt{2};-2a\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;-2a\right)$.

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(-2a^2\sqrt{2};0;-a^2\right)=-a^2\cdot\vec{u}$ với $\vec{u}=\left(2\sqrt{2};0;1\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) qua $S(0;0;2a)$ và nhận véc-tơ $\vec{u}$ làm véc-tơ pháp tuyến là

$2\sqrt{2}(x-0)+0(y-0)+1(z-2a)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x+z-2a=0$.

Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là:

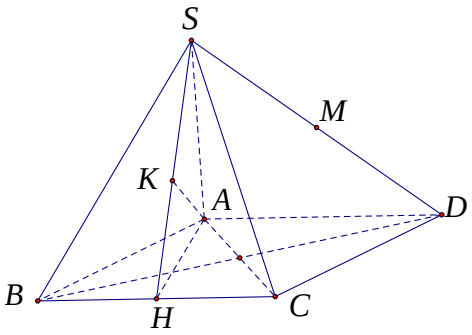
$$d\left(B,(SCD)\right)=\frac{\left|2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+0-2a\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^1}}=\frac{4a}{3}.$$

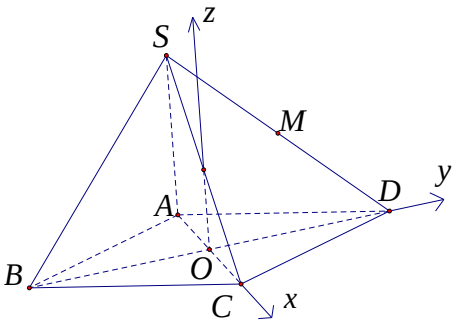
Câu 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *a*, góc $BAD=120^\circ$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi *M* là trung điểm *SD*, thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* từ *M* tới mặt phẳng (SBC) theo *a*.

A. $h=\frac{a\sqrt{228}}{38}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{228}}{19}$. **C.** $h=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $h=\frac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Lời giải

Chọn A.





Cách 1: phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến *SA* và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$. Ta có $\frac{DM}{DS}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(SBC)\right)$

AD//BC

$\Rightarrow AD//(SBC)\Rightarrow d\left(D,(SBC)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right)$. Vậy $d\left(M,(SBC)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right)$

Gọi *H* là trung điểm của *BC*, do tam giác *ABC* đều nên $AH\perp BC$, lại có
$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ nên $BC\perp(SAH)\Rightarrow(SBC)\perp(SAH)$

Dựng $AK\perp SH\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AK$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là : $S_{ABCD}=AB.BC.\sin 60^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra $SA=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=2a$. Tính được $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAH vuông tại A, đường cao AK nên :

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{228}}{19}.$$

Vậy $d\left(M,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{a\sqrt{228}}{38}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có

$$O\left(0;0;0\right),A\left(\frac{-a}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right),C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$$

$$D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{-a}{2};0;2a\right),M\left(\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB}=\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2};-2a\right),\overrightarrow{SC}=\left(a;0;-2a\right),\overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};-a\right)$$

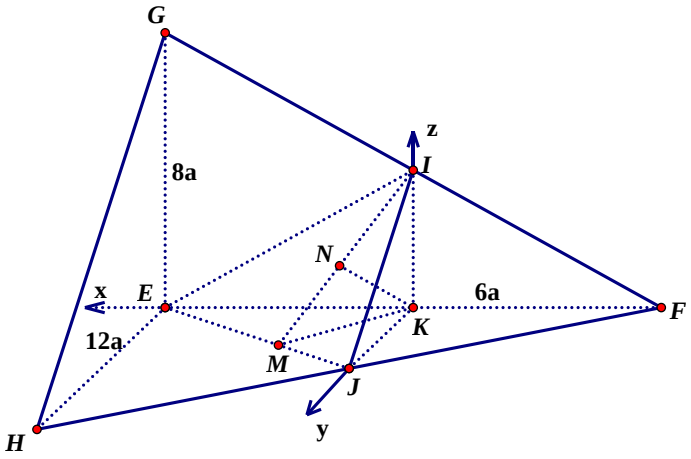
Vậy $d\left(M,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]\right\|}=\dfrac{a\sqrt{228}}{38}$.

Câu 7. Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF, EG, EH đôi một vuông góc $EF=6a$, $EG=8a$, $EH=12a$, với $a>0, a\in\mathbb{R}$. Gọi I, J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG, FH. Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng $\left(EIJ\right)$ theo a.

A. $d=\dfrac{12\sqrt{29}.a}{29}$. **B.** $d=\dfrac{6\sqrt{29}.a}{29}$. **C.** $d=\dfrac{24\sqrt{29}.a}{29}$. **D.** $d=\dfrac{8\sqrt{29}.a}{29}$.

Lời giải

Chọn C.



Cách 1: Vì EF vuông góc với EG, EG vuông góc với EH nên $EG \perp (EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK \perp (EFH)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của K trên EJ và IM ta có $d\left(K,\left(EIJ\right)\right) = KN$. Ta có: $d = \left(F,\left(EIJ\right)\right) = 2d\left(K,\left(EIJ\right)\right) = 2KN$.

Trong tam giác EKJ vuông tại K và tam giác IKM vuông tại K ta có:

$$\frac{1}{KN^2} = \frac{1}{KM^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{1}{KJ^2} + \frac{1}{KE^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{36a^2} = \frac{29}{144a^2} \Rightarrow KN = \frac{12\sqrt{29}}{29}a.$$

Vậy $d = \frac{24\sqrt{29}.a}{29}$.

Cách 2: Vì EF vuông góc với EG, EG vuông góc với EH nên $EG \perp (EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK \perp (EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có:

$K\left(0;0;0\right), I\left(0;0;4a\right), E\left(3a;0;0\right), J\left(0;6a;0\right)$

Phương trình mặt phẳng $\left(EIJ\right): \frac{x}{3a} + \frac{y}{6a} + \frac{z}{4a} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z - 12a = 0$

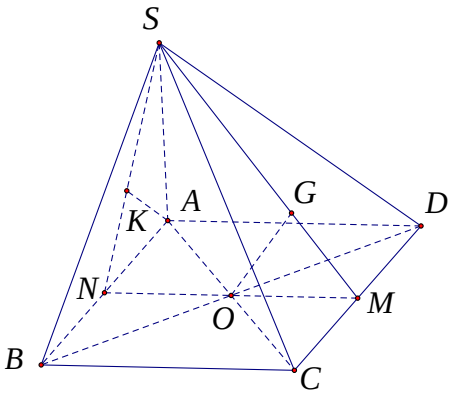
$$d = \left(F,\left(EIJ\right)\right) = 2d\left(K,\left(EIJ\right)\right) = 2\frac{12a}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{24a}{\sqrt{29}} = \frac{24\sqrt{29}a}{29}.$$

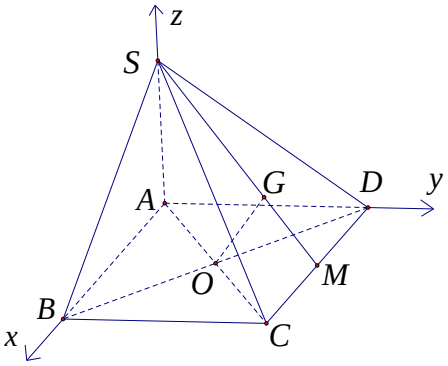
Câu 8. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O* cạnh *a*, cạnh *SA* vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là $45°$, gọi *G* là trọng tâm tam giác *SCD*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng chéo nhau *OG* và *AD*.

A. $h = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D





Cách 1 : phương pháp dựng hình

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB.

$AD//MN \Rightarrow AD//(SMN) \Rightarrow d(AD,MN) = d(AD,(SMN)) = d(A,(SMN))$

$MN \perp AB, MN \perp SA \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$

Dựng $AK \perp SN \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A,(SMN)) = AK$

Lại có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$

Từ đó suy ra $(SC,(ABCD)) = (SC,AC) = SCA = 45^0$.

Vậy giác SAC vuông cân, suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$

Tam giác SAN vuông tại A, đường cao AK suy ra :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2 : phương pháp tọa độ

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, theo cách 1 ta tính được $SA = a\sqrt{2}$

Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a\sqrt{2})$

Suy ra $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), G = \left(\frac{a}{3};\frac{2a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right), \overrightarrow{OG} = \left(\frac{-a}{6};\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

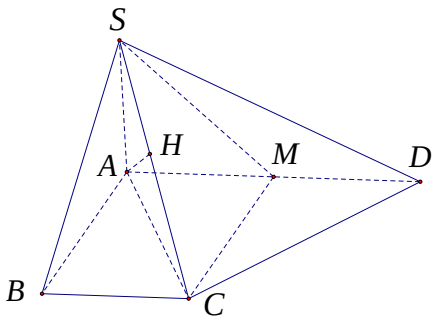
$\overrightarrow{AD} = (0;a;0), \overrightarrow{AO} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$. Vậy $d(AD,OG) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OG}\right].\overrightarrow{AO}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OG}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Biết $AD = 2a$, $AB = BC = SA = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $h = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



C1: phương pháp dựng hình.

Tứ giác $ABCM$ là hình vuông nên $CM = a = \frac{1}{2}AD$

Suy ra tam giác ACD vuông tại C

Ta có $CD \perp AC, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Kẻ $AH \perp SC$ tại H khi đó do

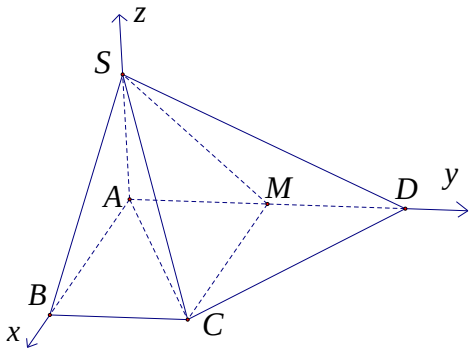
$CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy $d(M,(SCD)) = \frac{1}{2}d(A,(SCD)) = \frac{1}{2}AH$

Tam giác SAC vuông tại A, đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$

Suy ra $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(M,(SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

C2: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có :

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), S(0;0;a)$

Từ đó suy ra $M(0;a;0), C(a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} = (0;a;-a)$

$\overrightarrow{SC} = (a;a;-a), \overrightarrow{SD} = (0;2a;-a)$

$\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right] = (a^2;a^2;2a^2), \left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right]\right| = \sqrt{6}a^2$

Vậy khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) là

$$d\left(M,(SCD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

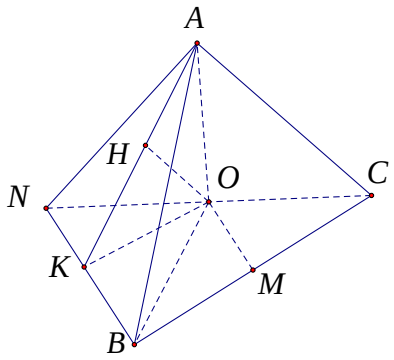
Câu 10. Cho hình tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB=a$, $OC=a\sqrt{3}$. Cạnh OA vuông góc với mặt phẳng (OBC), $OA=a\sqrt{3}$, gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng AB và OM.

A. $h=\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Gọi N là điểm đối xứng của C qua O. Khi đó $OM//BN$ (tính chất đường trung bình)

do đó $OM//(ABN)$. Suy ra $d(OM,AB)=d\left(OM,(ABN)\right)=d\left(O,(ABN)\right)$.

Dựng $OK\perp BN$, $OA\perp(OBC)\Rightarrow BN\perp OA\Rightarrow BN\perp AK$

Dựng $OH\perp AK$ khi đó $OH\perp(ABN)$. Từ đó $d(OM,AB)=OH$

Tam giác ONB vuông tại O, đường cao OK nên

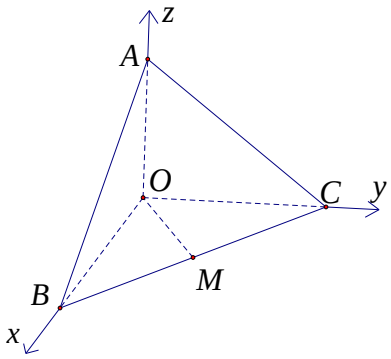
$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}$$

Tam giác AOK vuông tại O, đường cao OH nên

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Vậy $d(OM,AB)=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2 : Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó $O(0;0;0), A(0;0;a\sqrt{3}), B(a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{AB}=(a;0;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{OB}=(a;0;0)$

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right]=\left(\frac{3a^2}{2};\frac{-a^2\sqrt{3}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right), \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right]\right|=\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$

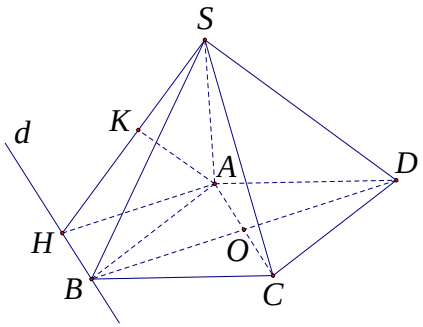
Vậy $d(AB,OM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OM}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

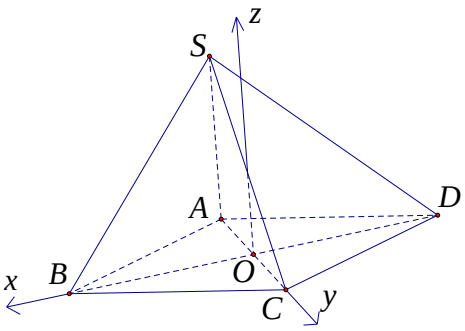
Câu 11. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *2a*, góc $BAD=120°$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *SB* và *AC* theo *a*.

A. $h=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.





Cách 1 : phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến *SA*

và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Dựng đường thẳng d qua B và song song với AC.

Dựng $AH \perp d, AK \perp SH$. Ta chứng minh được $AK \perp (SBH)$

$AC//HB \Rightarrow AC//(SBH) \Rightarrow d(AC,SB) = d(AC,(SBH)) = AK$

$BO \perp AC, AH \perp HB \Rightarrow AH \perp AC$ suy ra $AH//BO$.

Vậy tứ giác $AHBO$ là hình chữ nhật nên $AH = BO = a\sqrt{3}$

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC.\sin 60^0 = 2\sqrt{3}a^2$

Suy ra $AH = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = a$

Tam giác SAH vuông tại A, đường cao AK nên

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(AC,SB) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có

$O(0;0;0), A(-a;0;0), B(0;\sqrt{3}a;0), C(a;0;0), S(-a;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;a\sqrt{3};-a), \overrightarrow{OB} = (0;a\sqrt{3};0), \overrightarrow{OC} = (a;0;0)$

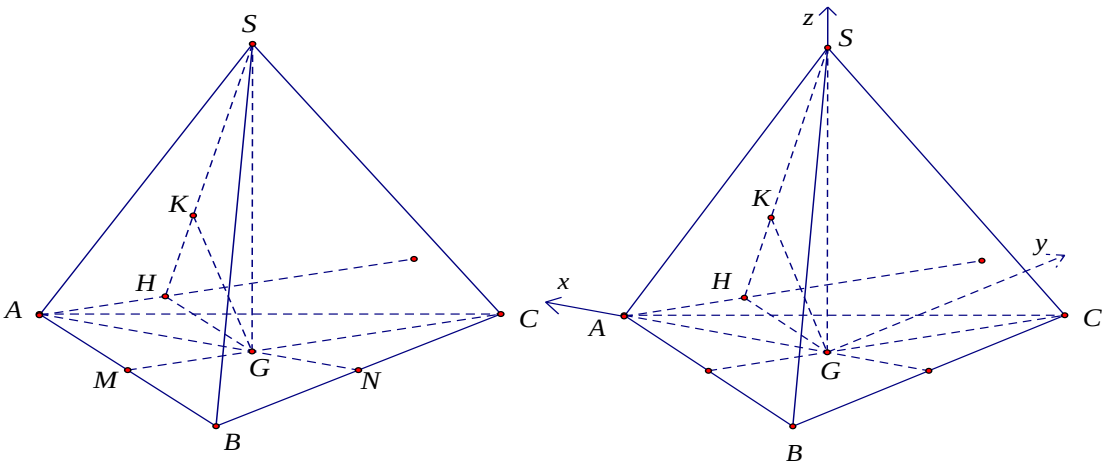
Vậy $d(AC,SB) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng GC và SA bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và BC. Gọi H là hình chiếu của G lên đường thẳng đi qua A và song song với CG. GK là đường cao của tam giác GHS.

Khi đó, $d(GC,SA)=d(GC,(SAH))=GK$. Ta có: $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$\left(SA,(ABC)\right)=SAG=60^0\Rightarrow SG=AG.\tan 60^0=a,\ \ GH=AM=\dfrac{a}{2}$, suy ra

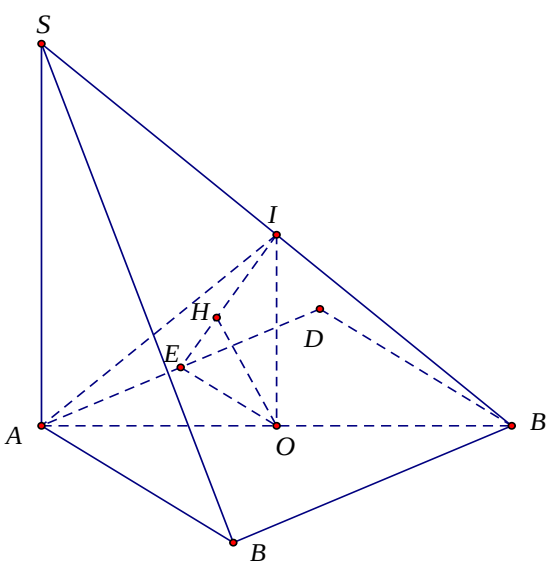
$$d(GC,SA)=GK=\frac{GS.GH}{\sqrt{GS^2+GH^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

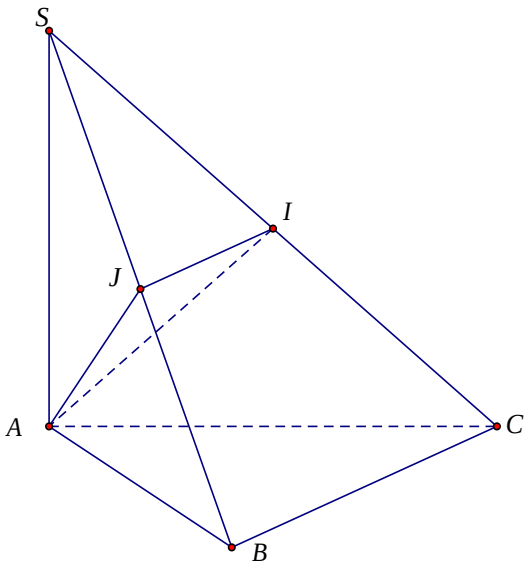
Câu 13. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, tam giác ABC vuông cân tại B, $BA=BC=a$, góc giữa $mp(SBC)$ với $mp(ABC)$ bằng 60^0. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI với BC.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B





Cách 1: Vì tam giác SAC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC là trung điểm I của SC. Ta góc giữa mp(SBC) với mp(ABC) là góc SBA, theo bài góc $SBA=60^0$

Suy ra $SA=AB.\tan SBA=a\sqrt{3}$.

Kẻ AD // BC, D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

Kẻ $OE\perp AD$ tại E. $OH\perp IE$ tại H.

Khi đó: $d(AI,BC)=d(BC,(IAD))=2d(O,(IAD))=2.OH$

Ta có $OH=\dfrac{OE.OI}{\sqrt{OE^2+OI^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, suy ra $d(AI,BC)=2d(O,(IAD))=2.OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2: Kẻ $IJ//BC$, J thuộc cạnh SB.

Suy ra $d(AI,BC)=d(BC,(AIJ))=d(S,(AIJ))$.

Ta có: Tam giác AIJ vuông tại J và $AJ=\frac{1}{2}SB=a$;

$IJ=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$ suy ra $S_{\Delta AIJ}=\frac{a^2}{4}$. $\frac{V_{S.AIJ}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AIJ}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

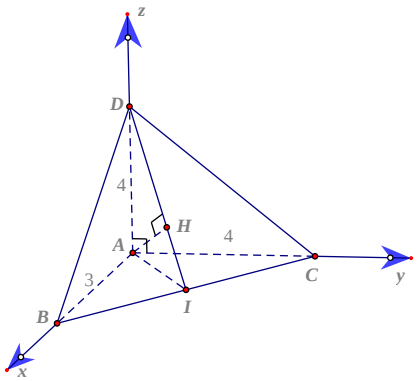
Suy ra $d(AI,BC)=d(S,(AIJ))=\frac{3V_{S.AIJ}}{S_{\Delta AIJ}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, $AB=3$, $AC=AD=4$. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).

A. $\frac{4\sqrt{34}}{17}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\frac{6\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $A(0;0;0)$; $B(0;0;3)$; $C(0;4;0)$; $D(4;0;0)$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}-1=0$.

Khoảng cách từ điểm $A(0;0;0)$ đến mặt phẳng (BCD) là:

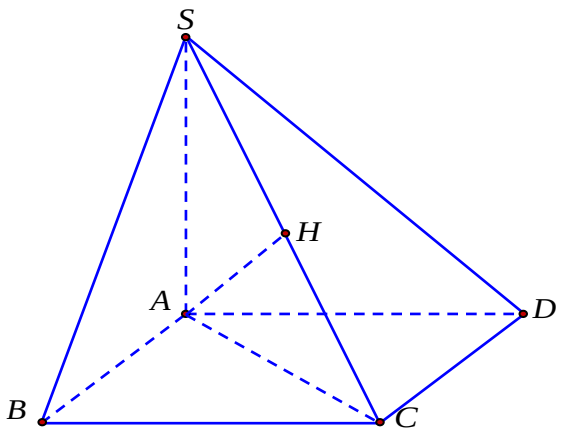
$$\mathrm{d}\left(A,(BCD)\right)=\frac{\left|\frac{0}{3}+\frac{0}{4}+\frac{0}{4}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{34}}{12}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $B=60°$. Biết $SA=2a$, tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AH \perp SC$ suy ra $d\left(A,SC\right)=AH$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB=BC$, mặt khác $B=60°$.

Suy ra ΔABC là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AC=a$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}$

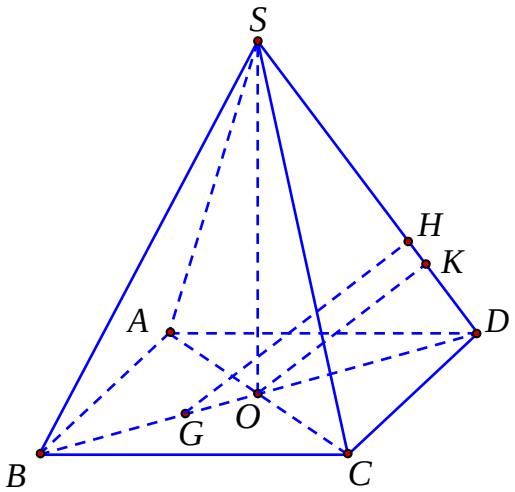
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{3}$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, tính khoảng cách từ G đến SD.

A. $\dfrac{4a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{5a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều suy ra $SO \perp \left(ABCD\right)$.

Suy ra $SB=SC=SD=SA=a\sqrt{3}$, $AC=BD=2a\sqrt{2}$.

Ta có $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{SA^2-\dfrac{AC^2}{4}}=\sqrt{3a^2-2a^2}=a$.

Kẻ OK vuông góc với SD.

Khi đó $OK=\dfrac{SO.OD}{SD}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Kẻ $GH\perp SD$ suy ra $GH\,//\,OK$.

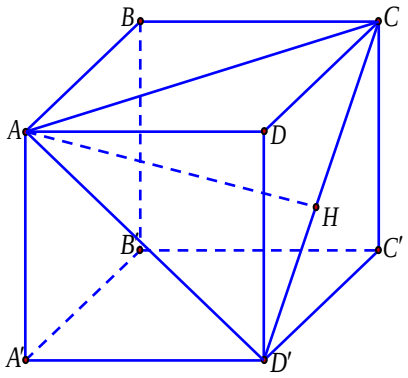
Ta có $\dfrac{OK}{GH}=\dfrac{DO}{DG}\Rightarrow GH=\dfrac{OK.(DO+OG)}{DO}\Rightarrow GH=\dfrac{4}{3}OK=\dfrac{4a\sqrt{6}}{9}$ $\left(OG=\dfrac{1}{3}BO=\dfrac{1}{3}DO\right)$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến CD'.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của CD'. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình

lập phương nên $\Delta ACD'$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$.

Khi đó AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao.

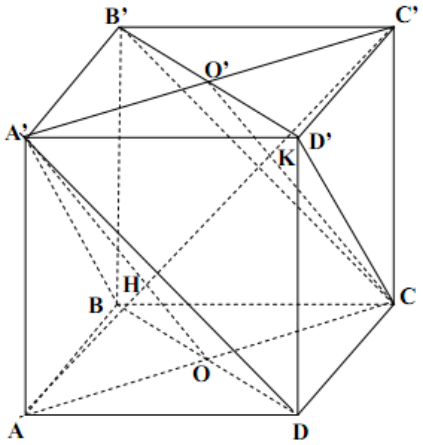
Suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Hay khoảng cách từ A đến CD' bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó, khoảng cách giữa đường thẳng BD và mặt phẳng $(CB'D')$ bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Ta có $BD \,//\, B'D'$ nên $BD \,//\, (CB'D')$.

Do đó: $d\left(BD;(CB'D')\right) = d\left(O;(CB'D')\right) = \frac{1}{2}d\left(A;(CB'D')\right)$

Theo kết quả đã trình bày ở ví dụ 2, $d\left(A;(CB'D')\right) = \frac{2}{3}AC' = \frac{2}{3}.a\sqrt{3}$.

Do đó $d\left(BD;(CB'D')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho tọa độ các điểm như sau:

$A(0;0;0); B(a;0;0); D(0;a;0); A'(0;0;a)$. Khi đó, các điểm còn lại có tọa độ

$C(a;a;0); B'(a;0;a); D'(0;a;a); C'(a;a;a)$.

Ta có $\overrightarrow{CB'} = (0;-a;a); \overrightarrow{CD'} = (-a;0;a)$

Từ đó viết được phương trình mặt phẳng $(CB'D')$ $x + y + z - 2 = 0$

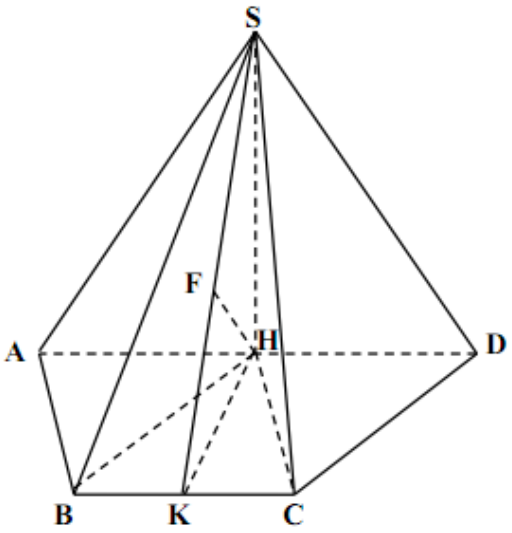
$d\left(BD;(CB'D')\right) = d\left(B;(CB'D')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $d\left(BD;(CB'D')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD. Biết $SB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Khoảng cách giữa đường thẳng AD đến (SBC) là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AD, K là trung điểm BC.

Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$. Do đó: $d\left(AD;(SBC)\right)=d\left(H;(SBC)\right)$

Dựng $HF \perp SK, F \in SK$. Chứng minh được hai mặt phẳng (SHK) và (SBC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SK nên suy ra $HF \perp (SBC)$. Suy ra: $d\left(H;(SBC)\right)=HF$.

Tứ giác $ABCH$ và $BCDH$ là hình thoi cạnh a nên $HB=HC=BC=a$, suy ra $HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

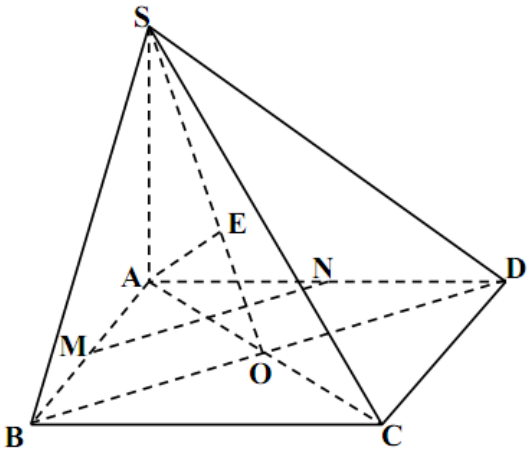
Tính được $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=a$, từ đó suy ra $HF=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm AC và BD.

Ta có $MN \,//\, BD$ nên $MN \,//\, (SBD)$. Do đó: $d\left(MN;(SBD)\right) = d\left(M;(SBD)\right) = \frac{1}{2} d\left(A;(SBD)\right)$

Dựng $AE \perp SO, E \in SO$. Chứng minh được hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SO nên suy ra $AE \perp (SBD)$. Suy ra: $d\left(A;(SBD)\right) = AE$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AE = \frac{2a}{3}$.

Vậy $d(MN,(SBD)) = \frac{a}{3}$.

DẠNG TOÁN 41: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

✪ Định nghĩa:

• Cho hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K (K có thể là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

-Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

-Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

✪ Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x)>0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

✪ Định lý mở rộng:

a) Nếu $f'(x)>0,\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x)<0,\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc K thì hàm số nghịch biến trên K

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.

• Tìm điều kiện m để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định)

• Sử dụng tính đơn điệu của hàm số trong phương trình, hệ bất phương trình, bất phương trình để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất.

• Tìm m để phương trình $f(x)=m$ có đúng n nghiệm.

….

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên R?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm m để hàm số đồng biến trên R.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính đạo hàm $f'(x)=x^2+2mx+4$.

B2: $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in R \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+2mx+4\ge 0,\forall x\in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2-4\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 2.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\{-2;-1;0;1;2\}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 1

Câu 1. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng về hàm số này?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

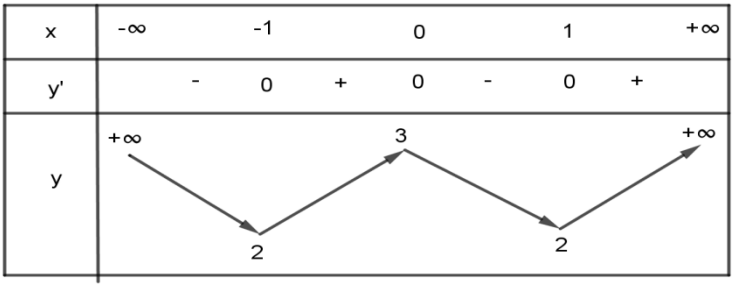
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=4x^3-4x$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1.\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{-3x+6}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $R\setminus\{2\}$. **D.** $R\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{2x+1}{-3x+6}$.

TXĐ: $D=R\setminus\{2\}$.

$y'=\dfrac{15}{(-3x+6)^2}>0,\ \forall x\neq 2$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 3. Hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ đồng biến trên khoảng nào trong những khoảng sau?

A. $(-1;3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-2;2)$.

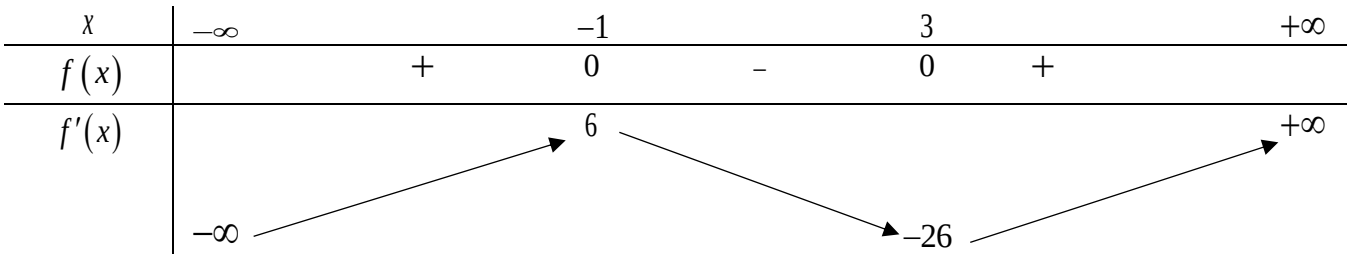
Lời giải

Chọn A

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Đạo hàm: $y'=3x^2-6x-9$.

Xét $y'=0\Rightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=-26\\x=-1\Rightarrow y=6\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Với mọi $x_1;x_2\in\mathbb{R};x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

B. Với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

C. Với mọi $x_1;x_2\in\mathbb{R};x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

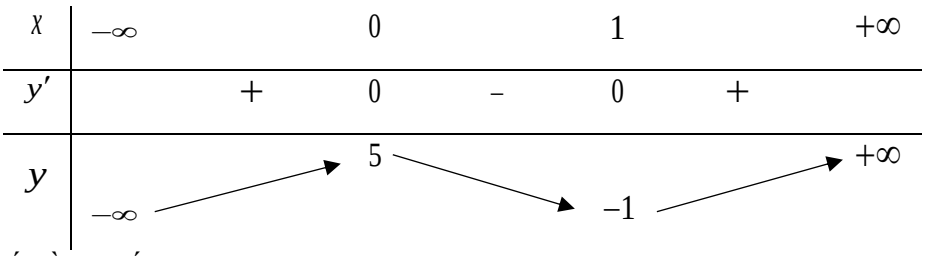
D. Với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

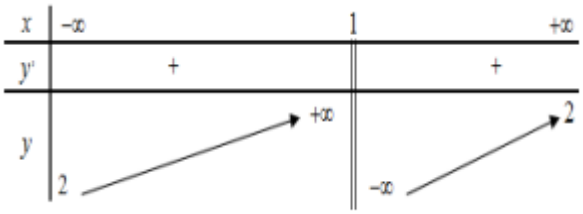
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta thấy trên khoảng $(-\infty;0)$ thì bảng biến thiên thể hiện hàm số đồng biến.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$..

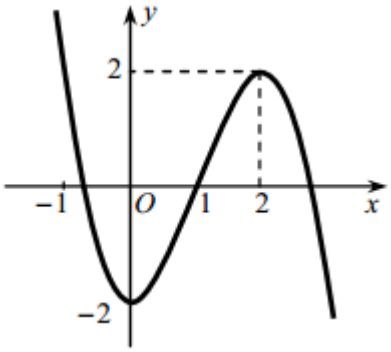
D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



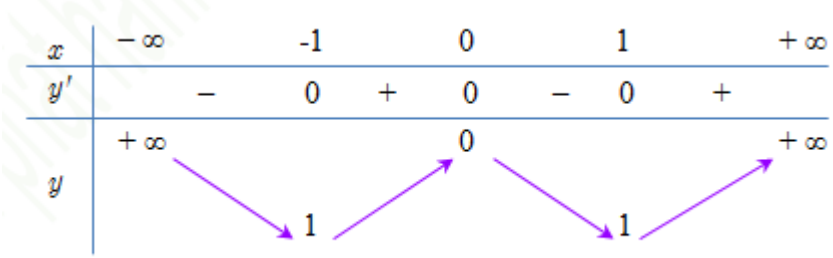
A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải:

Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$ **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$

Lời giải:

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 9. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=-x^3+3x^2-1$.

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải:

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$y'>0\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)<0,\forall x\in(-3;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(-2)=f(2)$ **B.** $f(-3)>f(5)$. **C.** $f(-3)<f(5)$ **D.** $f(0)<f(5)$

Lời giải:

Chọn D

Dễ thấy hàm số nghịch biến trên đoạn $[-3;5]$ và $-3<5$ nên suy ra $f(-3)>f(5)$

↳ Mức độ 2

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số có tập xác định $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ nên loại A,B,D.

Câu 3. Cho các hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, $y=\tan x$, $y=x^3+x^2+4x-2017$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

* Loại hai hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$, $y=\tan x$ vì không xác định trên $\mathbb{R}$.

* Với hàm số $y=x^3+x^2+4x-2017$ ta có $y'=3x^2+2x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy chỉ có 1 hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4-2x^2-1$ **B.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x+1$

C. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ **D.** $y=x^3+4x^2+3x-1$

Lời giải.

Chọn B

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+3x+1$ có $y'=x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 5. Cho các khẳng định:
(I): Hàm số $y=2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(II):Hàm số $y=x^3-12x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

(III): Hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 2. **B.** $m=0$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có hàm số $y=2$ là hàm hằng nên khẳng định (I) là khẳng định sai.

Hàm số $y=x^3-12x$ có $y'=3x^2-12\Rightarrow y'<0\Leftrightarrow -2<x<2$.

Nên hàm số $y=x^3-12x$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Do đó khẳng định (II) là khẳng định đúng.

Hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$ có $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0,\forall x\neq 2$.

Nên hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Do đó khẳng định (III) là khẳng định đúng.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+7}{x+2}$ có đồ thị (C). Hãy chọn mệnh đề **sai**:

A. Có đạo hàm $y'=\dfrac{-3}{(x+2)^2}$.. **B.** Đồ thị cắt trục hoành tại điểm $A\left(\dfrac{-7}{2};0\right)$

C. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số có tập xác định là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Lời giải:

Chọn C

Vì $y'=\dfrac{-3}{(x+2)^2}<0,\forall x\neq -2$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2);(-2;+\infty)$.

Câu 7. Hàm số $y=\sqrt{x^2-7x+12}$ đồng biến trên.

A. $(-\infty,3)$. **B.** $(4,+\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

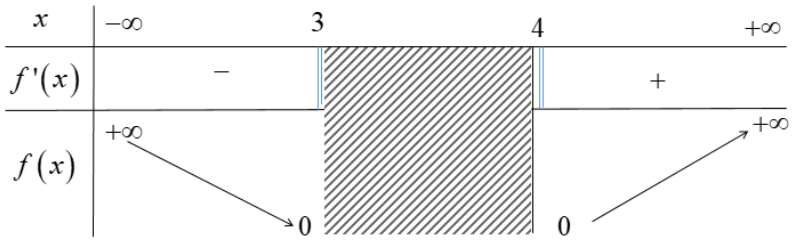
Lời giải:

Chọn B

Điều kiện $x^2-7x+12\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 3\\x\geq 4\end{array}\right.$. Hàm số có tập xác định $D=(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$.

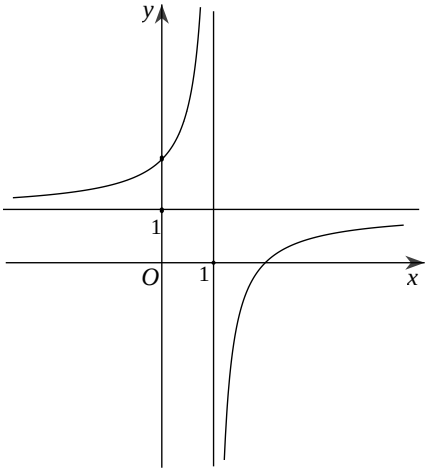
Ta có $y'=\dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+12}}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}\notin D$.

Bảng biến thiên.



Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên $(4,+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét các mệnh đề sau:

(I) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

(II) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

(III) Hàm số đồng biến trên tập xác định.

Số các mệnh đề đúng là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=x(x-2),\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

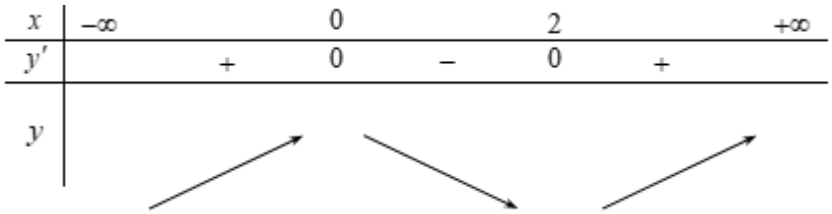
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(2;+\infty)$.

. **B.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;2)$.

Lời giải:

Chọn C

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng trên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;2)$.

Mức độ 3

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-(m+1)x^2+(m-2)x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le -\frac{1}{4}$. **B.** $m<0$. **C.** $m>0$. **D.** $\frac{-1}{4}\le m<0$.

Lời giải:

Chọn A

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$y'=mx^2-2(m+1)x+(m-2)$.

TH1: $m=0$ ta có $y'=-2x-2$ (không thỏa mãn)

TH2: $m\neq 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ (m+1)^2-m(m-2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 1+4m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le -\frac{1}{4}.$$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3(m^2+3m+3)x^2+3(m^2+1)^2x+m+2$.Gọi S là tập các giá trị của tham số

m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. S là tập hợp con của tập hợp nào sau đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $y'=3x^2-6\left(m^2+3m+3\right)x+3\left(m^2+1\right)^2$.

Khi đó : $\Delta'=9\left(m^2+3m+3\right)^2-9.\left(m^2+1\right)^2=9(3m+2).\left(2m^2+3m+4\right)$.

TH1 : Nếu $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{2}{3}$. Khi đó ta có $a=3>0$ nên $y'\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$.

TH2: Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow m>-\frac{2}{3}$. Khi đó $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Ta có $y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ và $y'<0\Leftrightarrow x\in(x_1;x_2)$. Do đó để hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì $[1;+\infty)\subset(x_2;+\infty)$.

Ta có : $x_1<x_2\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}<1\\(x_1-1).(x_2-1)\le 0\end{cases}$.

Xét $\frac{x_1+x_2}{2}<1\Leftrightarrow m^2+3m+3<1\Leftrightarrow m^2+3m+2<0\Leftrightarrow -2<m<-1$ (vô lý vì $m>-\frac{2}{3}$).

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì $m\le -\frac{2}{3}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3.Giả sử $m_0=-\frac{a}{b}$(với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó biểu thức $a+2b$ có giá trị bằng

A. 23 **B.** 34. **C.** -34. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

$y'=3x^2+6x+m=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 và $|x_1-x_2|=3$.

$$\begin{cases}\Delta>0\\(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}36-12m>0\\4-4\frac{m}{3}=9\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{15}{4}.$$

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\frac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left[-2;-\frac{14}{15}\right]$ **B.** $\left[-\frac{14}{15};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0, \forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $(1)\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến khoảng $(0;+\infty)$.

A. $0<m<2$. **B.** $0\le m\le 2$. **C.** $0\le m<2$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải:

Chọn C

Tập xác định của hàm số là : $D=(-\infty;-m)\cup(-m;+\infty)$. Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $\begin{cases}-m\le 0\\ m^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2$

Vậy giá trị cần tìm của m là $0\le m<2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $m>-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\ge -\dfrac{1}{2}$.

C. $-\dfrac{1}{2}<m<0$ hoặc $m>1$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 0$ hoặc $m\ge 1$.

Lời giải:

Chọn D

Đặt $t=\sin x$

Hàm số $y=\dfrac{-2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $f(t)=\dfrac{-2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2m+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số $f(t)=\dfrac{-2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

khi $\begin{cases}2m+1>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$. Khi đó hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trong khoảng nào?

A. $(-2;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$

.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $y=f(x^2)\Rightarrow y'=2xf'(x^2)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$ nên $y'=2xf'(x^2)=2x.(x^2)^2(x^2-9)(x^2-4)^2$.

Do đó $y'=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$

$$y'=0\Leftrightarrow 2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 3\\ x=\pm 2\end{array}\right.$$

(Trong đó: $x=-2;x=2$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $(x+2)^2=0$ và $(x-2)^2=0$)

Ta có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 3$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải:

Chọn D

Điều kiện: $x\ge -1$.

Ta có $2\sqrt{x+1}=x+m \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-x=m\ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=2\sqrt{x+1}-x\ (C)$ và $y=m$.

Xét hàm số $y=\sqrt{x+1}-x$ với $x\ge -1$ ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-1$.

Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Lập bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	2	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm khi $m\le 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $f(x)\le m$ với mọi $x\in[-1;1]$.

A. $m<\sqrt{2}$. **B.** $m\ge\sqrt{2}$. **C.** $m<0$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Hàm số $y=f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}};\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$; $f(-1)=-1$ và $f(1)=1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-1$ khi $x=-1$.

Do đó, $f(x)\le m$ với mọi $x\in[-1;1]$ khi và chỉ khi $m\ge \max\limits_{[-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m\ge\sqrt{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$. Khẳng định nào đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

Lời giải:

Chọn D

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có: $y=\begin{cases} x^2-4x+3 \text{ khi } x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty) \\ -x^2+4x-3 \text{ khi } x\in(1;3) \end{cases}$

$y'=\begin{cases} 2x-4 \text{ khi } x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty) \\ -2x+4 \text{khi } x\in(1;3) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-4x+3-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3)=-2$

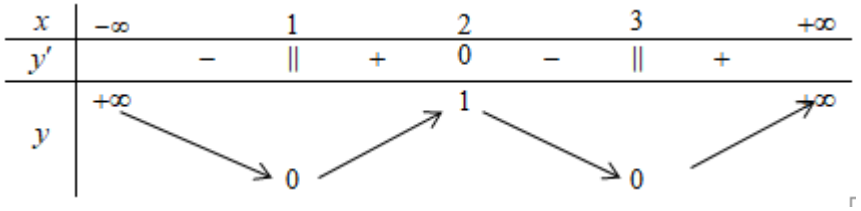
$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-x^2+4x-3-0}{x-1}\lim\limits_{x\to 1^+}(-x+3)=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{y(x)-y(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{y(x)-y(1)}{x-1} \Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại $x=1$

Chứng minh tương tự hàm số không có đạo hàm tại $x=3$

$y'=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

Mức độ 4

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của tham số thực m để hàm số $y=\left|x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 4039. **B.** 4037. **C.** 2019. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn B

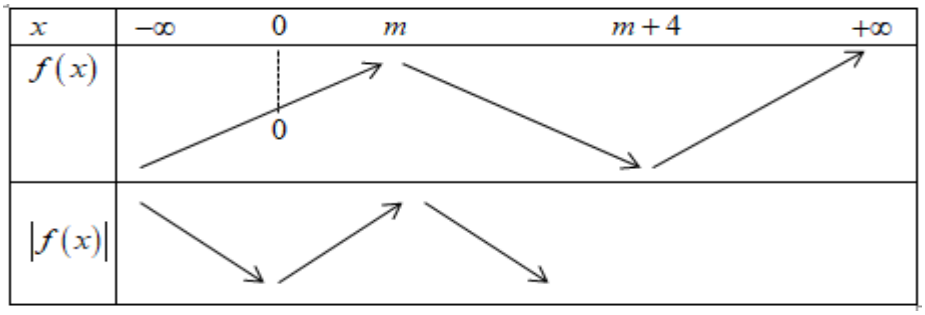
Xét hàm số $f(x)=x^3-3(m+2)x^2+3m(m+4)x$ trên khoảng $(0;2)$

$f'(x)=3x^2-6(m+2)x+3m(m+4)=3\left[x^2-2(m+2)x+m(m+4)\right]$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+4 \end{array}\right.$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y=f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0;0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m>0$

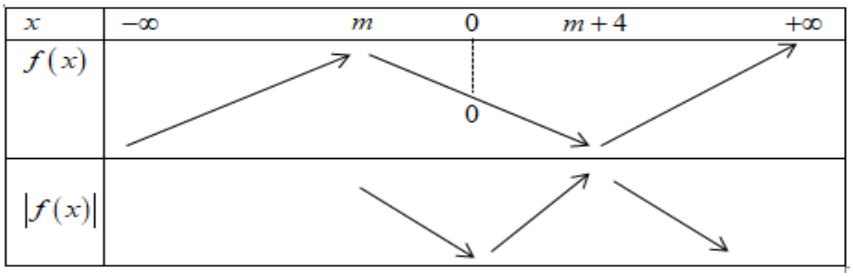


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow (0;2)\subset(0;m) \Leftrightarrow m\geq 2$

Kết hợp với $m>0$, ta có $m\geq 2$.

Trường hợp 2: Nếu $m\leq 0<m+4 \Leftrightarrow -4<m\leq 0$



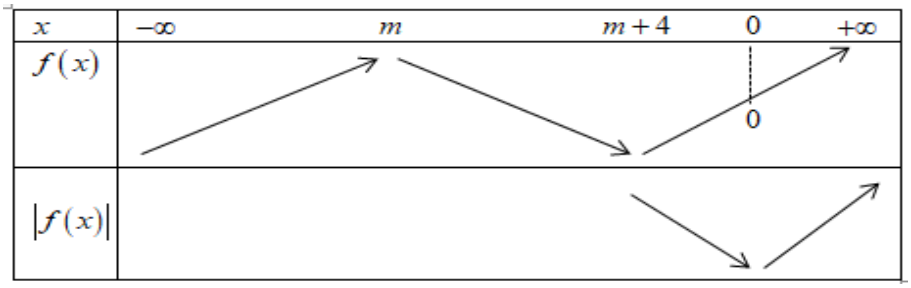
Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2) \Leftrightarrow (0;2)\subset(0;m+4) \Leftrightarrow m+4\geq 2$

$\Leftrightarrow m\geq -2$

Kết hợp với $-4<m\leq 0$, ta có $-2\leq m\leq 0$.

Trường hợp 3: Nếu $m+4\leq 0 \Leftrightarrow m\leq -4$

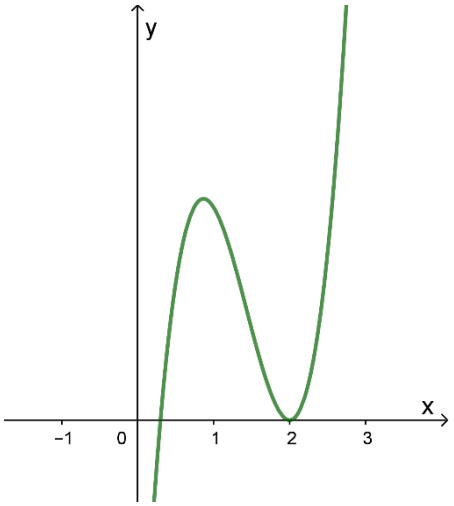


Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y=|f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ với mọi $m\leq -4$. Vậy $\left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ -2\leq m\leq 0 \\ m\leq -4 \end{array}\right.$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019;2019]$ nên có 4037 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cot^3 x-m\cot^2 x+\cot x+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tập S có chứa bao nhiêu số nguyên dương?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\frac{1}{3}\cot^3 x-m\cot^2 x+\cot x+1$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có: $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}\left(\cot^2 x-2m\cot x+1\right)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$) $\Leftrightarrow \cot^2 x-2m\cot x+1\ge 0,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Đặt $t=\cot x$. Khi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $t\in(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2-2mt+1\ge 0,\ \forall t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ \forall t\in(0;+\infty)$ (*)

Xét $f(t)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ t\in(0;+\infty)$. Ta có: $f(t)\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{t.\frac{1}{t}}=1$, dấu "=" xảy ra khi $t=1$.

Tập giá trị của $f(t)$ trên $(0;+\infty)$ là $[1;+\infty)$, do đó: (*) $\Leftrightarrow m\le 1$.

Vậy $S=(-\infty;1]$ nên S chứa đúng 1 số nguyên dương.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

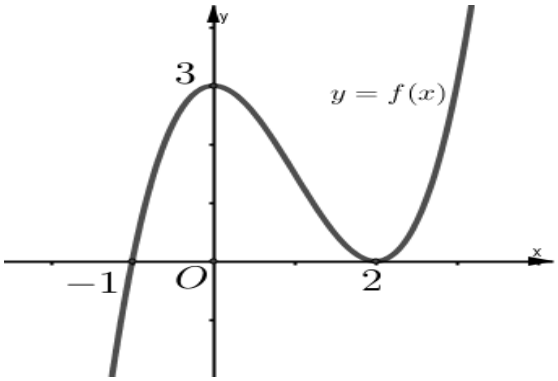
Từ $f'(x)=(1-x)(x+2).g(x)+2018 \Rightarrow f'(1-x)=x(3-x).g(1-x)+2018$

Nên đạo hàm của hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ là

$y'=-x(3-x).g(1-x)-2018+2018=-x(3-x)g(1-x)$.

Xét bất phương trình $y'<0 \Leftrightarrow x(3-x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$, do $g(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 4040.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $y'=(-\sin x+2).f'(\cos x+2x+m)$

Hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, suy ra:

Hàm số $y=f(\cos x+2x+m)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$(-\sin x+2).f'(\cos x+2x+m)\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ (1)

Do $-\sin x+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow f'(\cos x+2x+m)\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ (2)

Dựa vào đồ thị ta có

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+2x+m\geq 2,\ \forall x\in(0;+\infty)\\ \cos x+2x+m\leq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x+2x\geq 2-m,\ \forall x\in(0;+\infty)\ (3a)\\ \cos x+2x\leq -m,\ \forall x\in(0;+\infty)\ (3b)\end{array}\right.$$

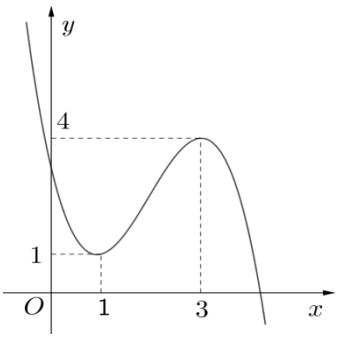
Xét hàm $g(x)=\cos x+2x$ trên $[0;+\infty)$ có $g'(x)=-\sin x+2>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ đồng thời $g(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ suy ra

$\min\limits_{[0;+\infty)} g(x)=g(0)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Do đó, không có giá trị m thỏa $(3b)$;

$(3a) \Leftrightarrow \min\limits_{[0;+\infty)} g(x) \geq 2-m \Leftrightarrow 1 \geq 2-m \Leftrightarrow m \geq 1.$

Vậy có tất cả 2019 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d; a \neq 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2020;2020)$ để hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x^2 + m\right)$ nghịch trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2020. **B.** 2013. **C.** 4040. **D.** 4038.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) f'(x^3 - 3x + m)$.

Với mọi $x \in (2;+\infty)$ ta có $3x^2 - 6x > 0$ nên hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x^2 + m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ nên

$f'(x) \leq 0$ với $x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$.

Do đó: $f'(x^3 - 3x^2 + m) \leq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + m \leq 1, \forall x \in (2;+\infty) \\ x^3 - 3x^2 + m \geq 3, \forall x \in (2;+\infty) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2;+\infty) \\ m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2;+\infty) \end{array}\right.$.

Nhận thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x^2 + 1) = -\infty$ nên trường hợp $m \leq -x^3 + 3x^2 + 1, \forall x \in (2;+\infty)$ không xảy ra.

Trường hợp: $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2;+\infty)$. Ta có hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$ liên tục trên $[2;+\infty)$ và $h'(x) = -3x^2 + 6x < 0, \forall x \in (2;+\infty)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$ suy ra

$\max\limits_{[2;+\infty)} h(x) = h(2)$.

Do đó $m \geq -x^3 + 3x^2 + 3, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[2;+\infty)} h(x) = h(2) \Leftrightarrow m \geq 7$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ nên $m\in\{7;8;9;...;2019\}$.

Vậy có 2013 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(0;2020)$ để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2020$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. 8. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2013.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\le 0,\forall x\in(a;b)$ (rõ ràng dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm). Có: $\Delta=m^2-6m+9=(m-3)^2$.

TH1: $\Delta\le 0\Rightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)\ge 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$. (không thỏa mãn yêu cầu).

TH2: $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne 3\Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1,x_2\ (x_2>x_1)$.

$\Rightarrow$Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$.

Yêu cầu đề bài: $\Leftrightarrow x_2-x_1>3\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2>9\Leftrightarrow S^2-4P>9$.

$\Leftrightarrow (m-1)^2-4(m-2)>9\Leftrightarrow m^2-6m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>6\\m<0\end{array}\right.$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(0;2020)$ nên $m\in\{7;8;9;...;2019\}$.

Vậy số giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(0;2020)$ là 2013

Câu 7. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+6(m^2-2)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=a+b$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$.. **D.** $T=1$..

Lời giải:

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'=3x^2-6mx+6(m^2-2)\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+2(m^2-2)\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'\le 0\\\left\{\begin{array}{l}\Delta'>0\\x_1<x_2\le 2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-2(m^2-2)\le 0\\\left\{\begin{array}{l}m^2-2(m^2-2)>0\\m+\sqrt{4-m^2}\le 2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}-2<m<2\\\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -2\\m\ge 2\\-2<m\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\m\ge 2\end{array}\right.$$

Vậy $a=0;b=2\Rightarrow T=2$..

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $g'(x)=2xf'(x^2)=2x.x^2(x^2-1)^2(3x^8+mx^6+1)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^8+mx^6+1\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m\leq 3x^2+\frac{1}{x^6},\ \forall x\in(0;+\infty)$.

$h(x)=3x^2+\frac{1}{x^6}=x^2+x^2+x^2+\frac{1}{x^6}\overset{Côsi}{\geq}4,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Đẳng thức xảy ra khi: $x^2=\frac{1}{x^6}$ $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $-m\leq 3x^2+\frac{1}{x^6},\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\leq 4\Leftrightarrow m\geq -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=\frac{m}{2}$ có nghiệm thực?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4 **D.** 2

Lời giải:

Chọn D

Không mất tính tổng quát ta chỉ xét phương trình trên $[-\pi;\pi]$.

Điều kiện $\begin{cases}1+2\sin x\geq 0\\1+2\cos x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$.

Phương trình đã cho tương đương với

$2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2\cos x}\sqrt{1+2\sin x}=\frac{m^2}{4}\ (*)\ (m>0)$.

Đặt $t=\sin x+\cos x$ với $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$ thì $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\leq t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow t\in\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2};\sqrt{2}\right]$.

Mặt khác, ta lại có $t^2=1+2\sin x\cos x$.

Do đó $(*) \Rightarrow 2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}=\dfrac{m^2}{4}$

Xét hàm số $f(t)=2t+2+2\sqrt{2t^2+2t-1}, t\in\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2};\sqrt{2}\right]$

$f'(t)=2+\dfrac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0$

t	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ $\sqrt{2}$
$f'(t)$	+
$f(t)$	$\sqrt{3}+1$ → $4\left(\sqrt{2}+1\right)$

Từ bảng biến thiên, ta kết luận rằng phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{3}+1\le\dfrac{m^2}{4}\le 4\left(\sqrt{2}+1\right)\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)}\le m\le 4\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Vậy có 3 giá trị của m.

Câu 10. Cho hàm số $y=4x^2+\sqrt{2x-1}-\left(m^2-2\right)x+2019.m^{2020}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4 **D.** 7

Lời giải:

Chọn D

Tập xác định $D=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

- Nhận thấy: hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ nếu $y'\ge 0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm).

- Ta có: $y'=8x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-m^2+2$.

Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, xét phương trình $y'=0$

$\Leftrightarrow 8x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}-m^2+2=0\Leftrightarrow 8x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+2=m^2\ \ (1)$

+ Xét hàm số $g(x)=8x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+2$ trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Có $g'(x)=8-\dfrac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{8}\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

+ Dựa vào BBT ta thấy: phương trình (1) chỉ có tối đa 2 nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ với mỗi giá trị bất kì của tham số m hay $y'=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

- Mặt khác: dựa vào BBT trên lại thấy:

$y'\ge 0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m^2\le g(x),\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m^2\le \min\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)} g(x)$

$\Leftrightarrow m^2\le 9\Leftrightarrow -3\le m\le 3$. Do m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

DẠNG TOÁN 42: HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARITS (BÀI TOÁN THỰC TẾ)

PHẦN I:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- **Bất phương trình mũ với cơ** $a>1$**:** $a^x>b>0\Leftrightarrow x>\log_a b$.
- **Bất phương trình mũ với cơ** $0<a<1$**:** $a^x>b>0\Leftrightarrow x<\log_a b$.
- **Công thức mũ:** $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Bài toán lãi đơn.
- Bài toán lãi kép.
- Bài toán tăng trưởng dân số.
- Bài toán vay vốn trả góp.
- Bài toán tiền gửi.
- Bài toán tính khối lượng phóng xạ.
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n)=\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán khảo sát thực tế liên quan hàm số mũ.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Nêu điều kiện để số người đạt trên 30%: $P(n)>0,3\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}>0,3$.

B2: Giải bất phương trình mũ: $e^{-0,015n}<\dfrac{1}{21}\Leftrightarrow e^{0,015n}>21\Leftrightarrow 0,015n>\ln 21\approx 202,97$.

B3: Kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Để số người mua sản phẩm đạt trên $30\%\Rightarrow P(n)>0,3\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}>0,3$

$1+49.e^{-0,015n}<\dfrac{1}{0,3}\Leftrightarrow e^{-0,015n}<\dfrac{1}{21}\Leftrightarrow e^{0,015n}>21\Leftrightarrow 0,015n>\ln 21\approx 202,97$.

Vậy phải có ít nhất 203 lần quảng cáo. **Chọn B**

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 3

Câu 1. Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ biến thành chất khác). Với $T=1000$ năm, hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\dfrac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu?

A. 2584 năm. **B.** 2585 năm.

C. 2586 năm. **D.** 2587 năm.

Lời giải

Chọn B

Với $T=1000$ và khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\dfrac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu. Suy ra: $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}<\dfrac{1}{6}m_0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1000}}<\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow\dfrac{t}{1000}>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow t>1000.\log_2 6\approx 2584,962501$

Vậy sau ít nhất 2585 năm thì khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\dfrac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu.

Câu 2. Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

A. 19 quý. **B.** 15 quý. **C.** 16 quý. **D.** 20 quý.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức lãi kép $P_n=P(1+r)^n$ với $P=27$, $r=0,0185$, tìm n sao cho $P_n>36$.

Ta có $27.1,0185^n>36\Leftrightarrow n>\log_{1,0185}\dfrac{4}{3}\Rightarrow n=16$.

Câu 3. Cường độ của ánh sáng I khi đi qua môi trường khác với không khí, chẳng hạn như sương mù hay nước,...sẽ giảm dần tùy theo độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu ánh sáng tùy theo bản chất môi trường mà ánh sáng truyền đi và được tính theo công thức $I = I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và tính bằng mét, I_0 là cường độ ánh sáng tại thời điểm trên mặt nước. Biết rằng nước hồ trong suốt có $\mu = 1,4$. Hỏi cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần khi truyền trong hồ đó từ độ sâu 3m xuống đến độ sâu 30m (chọn giá trị gần đúng với đáp số nhất).

A. e^{30} lần. **B.** $2,6081.10^{16}$ lần. **C.** e^{27} lần. **D.** $2,6081.10^{-16}$ lần.

Lời giải

Chọn B

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 3m là $I_1 = I_0.e^{-1,4.3} = I_0.e^{-4,2}$

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 30m là $I_2 = I_0.e^{-1,4.30} = I_0.e^{-42}$

Ta có $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{e^{-4,2}}{e^{-42}} = 2,6081.10^{16}$ nên cường độ ánh sáng giảm đi $2,6081.10^{16}$ lần.

Câu 4. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) lớn hơn hai lần số tiền ban đầu, nếu người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 174 tháng. **B.** 173 tháng. **C.** 176 tháng. **D.** 175 tháng.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép ta có: $P = P_0(1+r)^n = 100(1+0,4\%)^n > 200 \leftrightarrow n > 173,6331381$

Vậy sau ít nhất 174 tháng thì số tiền lĩnh được lớn hơn hai lần số tiền ban đầu.

Câu 5. E.coli là vi khuẩn đường ruột gây tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E. coli tăng gấp đôi. Ban đầu, chỉ có 40 vi khuẩn E. coli trong đường ruột. Hỏi sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn E.coli lớn hơn 671088640 con?

A. 48 giờ. **B.** 24 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 8 giờ.

Lời giải

Chọn D

Vì cứ sau 20 phút (bằng $\dfrac{1}{3}$ giờ) số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi nên số lượng vi khuẩn tăng theo quy luật $N_n = N_0.2^n = 40.2^n > 671088640 \Rightarrow n > 24$. Vậy sau ít nhất $24.\dfrac{1}{3} = 8$ giờ thì số vi khuẩn đạt mức lớn hơn 671088640 con.

Câu 6. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 3 lần số tiền gửi ban đầu.

A. 10 năm. **B.** 14 năm. **C.** 8 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải:

Chọn B

Gọi số tiền gửi ban đầu là A và số năm tối thiểu thỏa ycbt là n.

Ta có $A(1+8,4\%)^n > 3A \Leftrightarrow 1,084^n > 3 \Leftrightarrow n > \log_{1,084} 3 = 13,62064$.

Vậy số năm tối thiểu là 14 năm.

Câu 7. Ông An muốn sở hữu khoản tiền $20.000.000$ đồng vào ngày $10/7/2020$ ở một tài khoản với lãi suất năm $6,05\%$. Hỏi ông An đã đầu tư tối thiểu bao nhiêu tiền trên tài khoản này vào ngày $10/7/2015$ để được mục tiêu đề ra?

A. $14.059.373,18$ đồng. **B.** $15.812.018,15$ đồng.

C. $14.909.000$ đồng. **D.** $14.909.965,26$ đồng.

Lời giải:

Chọn D

Gọi A là số tiền tối thiểu mà ông An đầu tư.

Ta có $A(1+r)^5 = 20.10^6 \Rightarrow A = \dfrac{20.10^6}{\left(1+\dfrac{6.05}{100}\right)^5} \Rightarrow A = \dfrac{20.10^6}{\left(1+\dfrac{6,05}{100}\right)^5} \approx 14.909.65,26$.

Câu 8. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức: $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t gần với kết quả nào sau đây nhất:

A. 3 giờ 9 phút. **B.** 3 giờ 2 phút. **C.** 3 giờ 30 phút. **D.** 3 giờ 18 phút.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $300 = 100.e^{5r} \Rightarrow r = \dfrac{1}{5}\ln 3$.

$2.A = A.e^{t.\frac{1}{5}\ln 3} \Rightarrow t = 5\log_3 2 \approx 3,1546$ giờ. **Chọn A.**

Câu 9. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi xuất $r = 0,5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó với tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

A. 45 tháng. **B.** 46 tháng. **C.** 47 tháng. **D.** 44 tháng.

Lời giải:

Chọn A

Theo công thức lãi kép số tiền có được sau n tháng là $T = T_0 \times (1+r)^n$.

Áp dụng vào ta có: $100.000.000 \times 1,005^n \geq 125.000.000 \Rightarrow n \geq 45$.

Câu 10. Cho biết sự rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là $1,32\%$, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì đến tăng trưởng dân số được tính theo công thức tăng trưởng liên tục $S = A.e^{Nr}$ trong đó A là dân số tại thời điểm mốc, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Biết năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 7879 triệu người. **B.** 7680 triệu người. **C.** 7782 triệu người. **D.** 7777 triệu người.

Lời giải:

Chọn C

Áp dụng công thức $S = A.e^{Nr}$ với $A = 7095$, $N = 7$; $r = 0.0132$ ta có
$S = 7095.e^{7.0,0132} \approx 7782$ triệu người.

Câu 11. Một người gởi 75 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất $5,4\%$ một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi, hỏi 6 năm sau người đó nhận về số tiền là bao nhiêu kể cả gốc và lãi? (đơn vị đồng, làm tròn đến hàng nghìn)

A. $97.860.000$. **B.** $150.260.000$. **C.** $102.826.000$. **D.** $120.826.000$.

Lời giải:

Chọn C

Số tiền người đó nhận về sau 6 năm là: $75000000 \times \left(1 + \dfrac{5,4}{100}\right)^6 \approx 102826000$.

Câu 12. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $8,4\%$/năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 2 lần số tiền gửi ban đầu.

A. 10 năm. **B.** 9 năm. **C.** 8 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền gửi ban đầu là A và số năm tối thiểu thỏa ycbt là n.
Ta có $A(1+8,4\%)^n = 2A \Leftrightarrow 1,084^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,084} 2 = 8,59$.
Vậy số năm tối thiểu là 9 năm.

Câu 13. Một người gửi tiết kiệm với số tiền gửi là A đồng với lãi suất 6% một năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính gốc cho năm tiếp theo. Sau 10 năm người đó rút ra được số tiền gốc lẫn lãi nhiều hơn số tiền ban đầu là 100 triệu đồng ? Hỏi người đó phải gửi số tiền A bằng bao nhiêu ?

A. $145037058,3$ đồng. **B.** $55839477,69$ đồng. **C.** 126446589 đồng. **D.** $111321563,5$ đồng.

Lời giải

Chọn C

Từ công thức lãi kép ta có $A_n = A(1+r)^n$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} n=10 \\ r=0,06 \\ A_n = A+100 \end{cases} \Rightarrow 100+A=A(1+0,06)^{10} \Leftrightarrow 100=A\left(1,06^{10}-1\right) \Leftrightarrow A=\frac{100}{1.06^{10}-1}$$

$\Leftrightarrow A=126446597$ (đồng).

Câu 14. Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $P(t)=ae^{bt}$, trong đó a, b là các hằng số, t là năm tính dân số. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người; dân số thế giới năm 1980 là 3040 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2020?

A. 3823 triệu. **B.** 5360 triệu. **C.** 3954 triệu. **D.** 4017 triệu.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.e^{1950b}=2560 \ (1) \\ a.e^{1980b}=3040 \ (2) \end{cases}$.

Chia (2) cho (1) ta được $e^{30b}=\frac{19}{16} \Leftrightarrow 30b=\ln\frac{19}{16} \Leftrightarrow b=\frac{1}{30}\ln\frac{19}{16}$.

Thay vào (1) ta được: $a=\frac{2560}{\left(\frac{19}{16}\right)^{65}}$.

Vậy $P(2020)=\frac{2560}{\left(\frac{19}{16}\right)^{65}}.e^{2020.\frac{1}{30}\ln\frac{19}{16}} \approx 3823$ (triệu)

Câu 15. Sự tăng dân số được ước tính theo công thức $P_n=P_0e^{n.r}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 triệu và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 100 triệu người?

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2015. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn D

$$P_n=P_0e^{n.r} \Leftrightarrow 100000000=78685800e^{n.1,7\%} \Leftrightarrow n=\frac{\ln\frac{1000000}{786858}}{1,7\%} \approx 14.1.$$

Sau 15 năm thì dân số nước ta ở mức 100 triệu người.

Do đó năm 2016 dân số nước ta ở mức 100 triệu người.

Câu 16. Một người gửi ngân hàng lần đầu 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Sau một năm, tổng số tiền gốc và lãi của người đó là bao nhiêu (làm tròn đến hàng triệu đồng)?

A. 212 triệu. **B.** 216 triệu. **C.** 221 triệu. **D.** 210 triệu.

Lời giải

Chọn A

Sau 6 tháng đầu thì người đó gửi được hai kì hạn nên tổng cả vốn và lãi lúc đó là $A=100.(1,02)^2$ triệu đồng.

Người đó gửi thêm 100 triệu thì số tiền gửi là $B=A+100$ triệu.

Vậy sau một năm thì được số tiền là $B(1,02)^2=100.(1,02)^4+100.(1,02)^2\approx 212$ triệu đồng.

Câu 17. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn 1 nửa). Tính khối lượng còn lại của 40 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

A. $4,34.10^{-15}(\text{gam})$. **B.** $4,44.10^{-15}(\text{gam})$. **C.** $4,06.10^{-15}(\text{gam})$. **D.** $4,6.10^{-15}(\text{gam})$.

Lời giải

Chọn B

Ta có 7314 ngày tương ứng 53 chu kì.

Nên khối lượng còn lại của 40 gam poloni 210 sau 7314 ngày bằng $40\left(\frac{1}{2}\right)^{53}=4,44.10^{-15}(\text{gam})$.

Câu 18. Cường độ của ánh sáng I khi đi qua môi trường khác với không khí, chẳng hạn như sương mù hay nước,...sẽ giảm dần tùy theo độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu ánh sáng tùy theo bản chất môi trường mà ánh sáng truyền đi và được tính theo công thức $I=I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và tính bằng mét, I_0 là cường độ ánh sáng tại thời điểm trên mặt nước. Biết rằng nước hồ trong suốt có $\mu=1,4$. Hỏi cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần khi truyền trong hồ đó từ độ sâu 3m xuống đến độ sâu 30m (chọn giá trị gần đúng với đáp số nhất).

A. e^{30} lần. **B.** $2,6081.10^{16}$ lần. **C.** e^{27} lần. **D.** $2,6081.10^{-16}$ lần.

Lời giải

Chọn B

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 3m là $I_1=I_0.e^{-1,4.3}=I_0.e^{-4,2}$

Cường độ ánh sáng ở độ sâu 30m là $I_2=I_0.e^{-1,4.30}=I_0.e^{-42}$

Ta có $\frac{I_1}{I_2}=\frac{e^{-4,2}}{e^{-42}}=2,6081.10^{16}$ nên cường độ ánh sáng giảm đi $2,6081.10^{16}$ lần.

Câu 19. Ông A đầu tư 150 triệu đồng vào một công ti với lãi 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 5 năm số tiền lãi ông A rút về gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này ông A không rút tiền ra và lãi không thay đổi?

A. 54.073.000 đồng. **B.** 54.074.000 đồng. **C.** 70.398.000 đồng. **D.** 70.399.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Sau một năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là $150+150.8\%=150(1+8\%)$ triệu.

Sau hai năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là $150(1+8\%)(1+8\%)=150(1+8\%)^2$ triệu.

…

Sau năm năm số tiền gốc lẫn lãi của ông A là $150(1+8\%)^5$ triệu.

Số tiền lãi ông A rút về là $150.(1+8\%)^5-150\approx 70,399...$ triệu.

Vậy số tiền lãi ông A rút về sau 5 năm gần với số tiền $70.399.000$ đồng.

Câu 20. Anh Nam dự định sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) sẽ có đủ 2 tỉ đồng để mua nhà. Mỗi năm anh phải gửi tiết kiệm bao nhiêu tiền (số tiền mỗi năm gửi như nhau ở thời điểm cách lần gửi trước 1 năm) ? Biết lãi suất là $8\%/$ năm, lãi hàng năm được nhập vào vốn và sau kỳ gửi cuối cùng anh đợi đúng 1 năm để có đủ 2 tỉ đồng.

A. $2\times\dfrac{0,08}{(1,08)^9-1,08}$ tỉ đồng. **B.** $2\times\dfrac{0,08}{(1,08)^8-1,08}$ tỉ đồng.

C. $2\times\dfrac{0,08}{(1,08)^7-1}$ tỉ đồng. **D.** $2\times\dfrac{0,08}{(1,08)^8-1}$ tỉ đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là số tiền anh Nam phải gửi hàng năm.
Để sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) sẽ có đủ 2 tỉ đồng, tính luôn cả thời gian anh đợi để rút tiền ra thì anh gửi tất cả 8 lần.

Ta có công thức $T_n=\dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$

$\Rightarrow M=\dfrac{T_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}=\dfrac{2\times 0,08}{(1.08)^9-1,08}$ tỉ đồng.

Mức độ 3

Câu 21. Cho biết rằng sự tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là $1,32\%$, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì dân số sau N năm được tính theo công thức tăng trưởng liên tục $S=A.e^{Nr}$ trong đó A là dân số tại thời điểm mốc, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Biết năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 7879 triệu người. **B.** 7680 triệu người. **C.** 7782 triệu người. **D.** 7777 triệu người.

Lời giải

Chọn C

Lấy năm 2013 làm mốc, ta có $A=7095$, $N=2020-2013=7$

$\Rightarrow$ Dân số thế giới vào năm 2020 là $S=7095.e^{7.\frac{1,32}{100}}\approx 7781,82$ triệu người.

Câu 22. Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải tương ứng với $88\,Mhz$ và $108\,Mhz$. Hai vạch này cách nhau $10\,\text{cm}$. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái $d(\text{cm})$ thì có tần số bằng

$k.a^d\,(Mhz)$ với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV_1 với tần số $102,7\,Mhz$

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $1,98\,cm$. **B.** Cách vạch ngoài cùng bên phải $2,46\,cm$.

C. Cách vạch ngoài cùng bên trái $7,35\,cm$. **D.** Cách vạch ngoài cùng bên trái $8,23\,cm$

Lời giải

Chọn C

$d=0\Rightarrow k.a^0=88\Rightarrow k=88$

$d=10\Rightarrow k.a^{10}=108\Rightarrow 88.a^{10}=108\Rightarrow a^{10}=\dfrac{108}{88}\Rightarrow a=\sqrt[10]{\dfrac{108}{88}}$

Gọi d_1 là vị trí để vạch có tần số $102,7\,Mhz$ khi đó ta có

$$88.\left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1}=102,7\Leftrightarrow\left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1}=\frac{102,7}{88}\Leftrightarrow d_1=\log_{\sqrt[10]{\frac{108}{88}}}\frac{102,7}{88}=7,54$$

Vậy vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV_1 với tần số $102,7\,Mhz$ là $7,35\,cm$

Câu 23. Người ta đã biết số $p=2^{756839}-1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết cho đến lúc đó). Hãy tìm số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân.

A. 227830 chữ số. **B.** 227834 chữ số. **C.** 227832 chữ số. **D.** 227831 chữ số.

Lời giải

Chọn C

+) 2^{756839} có chữ số tận cùng khác 0 nên 2^{756839} và $p=2^{756839}-1$ có số các chữ số bằng nhau.

+) Số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân của $p=2^{756839}-1$ là:

$\left[\log 2^{756839}\right]+1=\left[756839\log 2\right]+1=\left[227831,2409\right]+1=227832$

Suy ra $p=2^{756839}-1$ khi viết trong hệ thập phân là số có 227832 chữ số.

Câu 24. Một người gửi vào Ngân hàng 50 triệu đồng thời hạn 15 tháng, lãi suất $0,6\%$ /tháng (lãi kép). Hỏi hết kì hạn thì tổng số tiền người đó có được là bao nhiêu?

A. 55,664 triệu đồng. **B.** 54,694 triệu đồng. **C.** 55,022 triệu đồng. **D.** 54,368 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi T là số tiền cả vốn lẫn lãi sau 15 tháng.

M là số tiền gửi ban đầu.

n là số kì hạn tính lãi.

r là suất định kỳ, tính theo %.

Hết kì hạn thì số tiền người đó là:

$T=M(1+r)^n=50000000.(1+0.6\%)^{15}=54694003,63\approx 54694000$ đồng.

Câu 25. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức $1,05\%$. Biết rằng, dân số của Việt Nam ngày 1 tháng 4 năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 thì dân số của Việt Nam là

A. 106.118.331 người. **B.** 198.049.810 người.

C. 107.232.574 người. **D.** 107.323.573 người.

Lời giải

Chọn C

Dân số vào ngày 1 tháng 4 năm 2030 là: $90.728.900\times(1+1,05\%)^{16}=107.232.574$ người.

Câu 26. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.281.600;1.281.700)$. **B.** $(1.281.700;1.281.800)$.

C. $(1.281.800;1.281.900)$. **D.** $(1.281.900;1.282.000)$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S=Ae^{Nr}$ từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có:

$$1153600=1038229.e^{5r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}.$$

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là $S=1038229.e^{10.\frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}}\approx 1281792$ người.

Câu 27. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t)=S(0).2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 19 phút. **B.** 48 phút. **C.** 12 phút. **D.** 7 phút.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $S(3)=S(0).2^3$ hay $S(0)=\frac{S(3)}{2^3}=\frac{625\ 000}{8}=78125$.

Vậy sau t phút, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con thì $10\ 000\ 000=78125.2^t$ hay $2^t=\frac{10\ 000\ 000}{78125}=128$. Từ đây suy ra $t=7$ (phút).

Câu 28. Anh Nam gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất không thay đổi hàng năm là 7.5% năm. Sau 5 năm thì anh Nam nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là

A. 685755000 đồng. **B.** 717815000 đồng. **C.** 667735000 đồng. **D.** 707645000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 5 năm là $T=500.10^6(1+0.075)^5=717815000$ đồng.

Câu 29. Dân số thế giới cuối năm 2010, ước tính khoảng 7 tỉ người. Hỏi với mức tăng trưởng $1,5\%$ mỗi năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người?

A. 2. **B.** 28. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n$

Suy ra: $n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)$

Trong đó: $A = 7$ (tỉ người), $S_n = 10$ (tỉ người), $r = 1,5\% = \frac{1,5}{100}$

Ta được $n = 23,95622454$.

Vậy sau ít nhất 24 năm nữa dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người.

Câu 30. Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn quý với lãi suất $1,65\%/$ quý. Hỏi sau ít nhất bao lâu thì người đó nhận được 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 5 năm. **B.** 4 năm 2 quý. **C.** 3 năm 2 quý. **D.** 4 năm.

Lời giải

Chọn B

Ta biết, nếu gửi số tiền A vào ngân hàng n kỳ hạn theo hình thức lãi kép với lãi suất không đổi của mỗi kỳ hạn là r thì sau n kỳ hạn số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi là $N = A(1+r)^n$.

Gọi số kỳ hạn mà người đó gửi là n.

Sau n kỳ hạn số tiền cả vốn lẫn lãi nhận về là: $N = 15000000\left(1+\frac{1,65}{100}\right)^n = 15000000.1,0165^n$.

Theo giả thiết $N = 20000000$.

Vậy ta có: $15000000.1,0165^n = 20000000 \Leftrightarrow 1,0165^n = \frac{4}{3} \Leftrightarrow n = \log_{1,0165}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 17,6$.

Kết luận: Người đó phải gửi ít nhất 18 kỳ hạn, tương đương 18 quý (tức 4 năm 2 quý).

Câu 31. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng, với kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 2%/kỳ. Theo hình thức lãi kép, hết 6 tháng người đó gửi thêm 100 triệu đồng, với kỳ hạn và lãi suất như trước. Sau một năm kể từ lần gửi đầu tiên số tiền người đó có được gần nhất với số nào sau đây?

A. 210 triệu. **B.** 220 triệu. **C.** 212 triệu. **D.** 216 triệu.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức lãi kép, sau 6 tháng (2 kỳ) số tiền người đó nhận được là $a = 100\ 1+2\%\ ^2 = 104,04$ triệu.

Sau 6 tháng tiếp theo, số tiền người đó thu được tổng cộng là

$a+100\ \ 1+2\%\ ^{2}=204,04.\ 1+2\%\ ^{2}=212,283216$ triệu.

Như vậy sau một năm số tiền người đó có được gần nhất với 212 triệu.

Câu 32. Một thầy giáo gửi 200 triệu đồng loại kỳ hạn 6 tháng vào một ngân hàng với lãi suất 3,45% /kỳ. Hỏi sau 6 năm 9 tháng, thầy giáo đó nhận số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu? Biết rằng thầy giáo đó không rút lãi ở tất cả các kỳ hạn trước và nếu rút trước hạn thì ngân hàng sẽ trả lãi theo lãi suất không kỳ hạn 0,002% / ngày (Giả sử một tháng có 30 ngày).

A. 471688328 đồng. **B.** 321556228 đồng. **C.** 311392503 đồng. **D.** 302088933 đồng.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi số tiền gửi ban đầu là T đồng, r là lãi suất của 1 kỳ.

Theo thể thức lãi kép thì:

Sau kỳ thứ nhất, tổng số tiền thu về là: $T_1=T+T.r=T(1+r)$.

Sau kỳ thứ hai, tổng số tiền thu về là: $T_2=T_1+T_1.r=T_1(1+r)=T(1+r)^2$.

Sau kỳ thứ n, tổng số tiền thu về là: $T_n=T(1+r)^n$.

+) Thầy giáo gửi tiền trong thời gian 6 năm 9 tháng nên trong 6 năm 6 tháng đầu (tương ứng với 13 kỳ mỗi kỳ 6 tháng) hưởng lãi suất 3,45%/1 kỳ, trong 90 ngày tiếp theo hưởng lãi suất không kỳ hạn 0,002% / ngày.

Vậy tổng số tiền thầy giáo nhận được là: $20.10^6\left(1+\frac{3,45}{100}\right)^{13}\left(1+\frac{0,002}{100}\right)^{90}=311392503$ đồng.

Câu 33. Anh Nam mới ra trường và đi làm với mức lương khởi điểm là 6 triệu đồng/ tháng. Anh muốn dành một khoản tiền tiết kiệm bằng cách trích ra 20% lương hàng tháng gửi vào ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,5%/ tháng. Hỏi sau một năm, số tiền tiết kiệm của anh Nam gần nhất với số nào sau đây?

A. 15 320 000 đồng. **B.** 14 900 000 đồng. **C.** 14 880 000 đồng. **D.** 15 876 000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền anh Nam trích ra từ tiền lương để gửi tiết kiệm hàng tháng là $M=20\%.6000000=1200000$ đồng.

Đầu mỗi tháng anh Nam gửi số tiền cố định là M vào ngân hàng với lãi suất cố định là r với kì hạn N tháng ta có công thức tính tiền thu được của anh sau N tháng gửi là

$$T=M(1+r)\frac{(1+r)^N-1}{r}.$$

Từ đó suy ra $T=1200000(1+0.5\%)\frac{(1+0.5\%)^{12}-1}{0.5\%}=14876668$ đồng.

Câu 34. Một người tham gia chương trình bảo hiểm An sinh xã hội của công ty X với thể lệ như sau: Cứ đến tháng 9 hàng năm người đó đóng vào công ty là 12 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất hàng năm không đổi là 6%/ năm. Hỏi sau đúng 18 năm kể từ ngày đóng, người đó thu về được tất cả bao nhiêu tiền? Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.

A. $412,23$ (triệu đồng). **B.** $393,12$ (triệu đồng).

C. $403,32$ (triệu đồng). **D.** $293,32$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Đặt $p = 6\% = 0.06$

Theo bài ra ta có:

Sau một năm số tiền có được là: $12+12p=12.(1+p)$

Sau hai năm số tiền có được là: $\left[12+12.(1+p)\right].(1+p)=12.\left[(1+p)+(1+p)^2\right]$

…

Sau n năm số tiền có được là: $12.\left[(1+p)+(1+p)^2+...+(1+p)^n\right]=12.\dfrac{(1+p)\left[(1+p)^n-1\right]}{(1+p)-1}$.

Sau 18 năm số tiền có được là: $12.\dfrac{(1+0,06)\left[(1+0,06)^{18}-1\right]}{(1+0,06)-1}\approx 393,12$ (triệu đồng).

Câu 35. Một kĩ sư mới ra trường làm việc với mức lương khởi điểm là $7.000.000$ đồng/tháng. Cứ sau 9 tháng làm việc, mức lương của kĩ sư đó lại được tăng thêm 10%. Hỏi sau 4 năm làm việc, tổng số tiền lương kĩ sư đó nhận được là bao nhiêu?

A. $415.367.400$ đồng. **B.** $418.442.010$ đồng.

C. $421.824.081$ **D.** $407.721.300$ đồng.

Lời giải

Chọn B

Tổng tiền lương 9 tháng đầu là $9.7.10^6$ (đồng).

Tiền lương tháng 10 là $7.10^6(1+10\%)=7.10^6.1,1$ đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 10 đến tháng 18 là $9.7.10^6.1,1$ đồng.

Tiền lương tháng 19 là $7.10^6(1+10\%)^2=7.10^6.1,1^2$ đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 19 đến tháng 27 là $9.7.10^6.1,1^2$ đồng.

Tiền lương tháng 28 là $7.10^6(1+10\%)^3=7.10^6.1,1^3$ đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 28 đến tháng 36 là $9.7.10^6.1,1^3$ đồng.

Tiền lương tháng 37 là $7.10^6(1+10\%)^4=7.10^6.1,1^4$ đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 37 đến tháng 45 là $9.7.10^6.1,1^4$ đồng.

Tiền lương tháng 46 là $7.10^6\left(1+10\%\right)^5=7.10^6.1,1^5$ đồng.

Tổng tiền lương từ tháng 46 đến tháng 48 là $3.7.10^6.1,1^5$ đồng.

Tổng tiền lương sau 4 năm (từ tháng 1 đến tháng 48) là 418.442.010 đồng.

Câu 36. Trong thời gian liên tục 25 năm, một người lao động luôn gởi đúng 4.000.000 đồng vào một ngày cố định của tháng ở ngân hàng A với lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền là $0,6\%$ / tháng. Gọi A đồng là số tiền người đó có được sau 25 năm. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $3.350.000.000<A<3.400.000.000$. **B.** $3.500.000.000<A<3.550.000.000$.

C. $3.450.000.000<A<3.500.000.000$. **D.** $3.400.000.000<A<3.450.000.000$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $a=4.000.000$ là số tiền người đó gửi vào ngân hàng mỗi tháng, $r=0,6\%$ là lãi suất mỗi tháng.

+ Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1=a\left(1+r\right)=\frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^1-1\right]\left(1+r\right)$$

+ Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền a đồng thì số tiền là

$$T_1=a\left(1+r\right)+a=a\left[\left(1+r\right)+1\right]=a\frac{\left[\left(1+r\right)^2-1\right]}{\left(1+r\right)-1}=\frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2-1\right]$$

+ Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2=\frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2-1\right]\left(1+r\right)$$

+ Từ đó ta có số tiền có được sau $12.25=300$ tháng là

$$S_{300}=\frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^{300}-1\right]\left(1+r\right)=\frac{4000000}{0,6\%}\left[\left(1+0,6\%\right)^{300}-1\right]\left(1+0,6\%\right)=3.364.000.000.$$

Câu 37. Một người mua một căn hộ với giá 900 triệu đồng. Người đó trả trước với số tiền là 500 triệu đồng. Số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là $0,5\%$ mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau đúng mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng (cả gốc lẫn lãi). Tính số tháng tối thiểu (làm tròn đến hàng đơn vị) để người đó trả hết nợ.

A. 133 tháng. **B.** 140 tháng. **C.** 136 tháng. **D.** 139 tháng.

Lời giải

Chọn D

Tổng số tiền người đó cần phải trả là $N=900-500=400$ (triệu).

Lãi suất hàng tháng là $r=0,5\%$ /tháng, số tiền cần phải trả mỗi tháng là $A=4$ (triệu).

Gọi n là tổng số tháng cần phải trả.

Số tiền gốc cuối tháng 1: $N+Nr-A=N(r+1)-A.$

Cuối tháng 2: $\left[N(r+1)-A\right]+\left[N(r+1)-A\right]r-A=N(r+1)^2-A\left[(r+1)+1\right].$

Cuối tháng 3: $\left[N(r+1)^2-A\left[(r+1)+1\right]\right](1+r)-A=N(r+1)^3-A\left[(r+1)^2+(r+1)+1\right].$

.....

Cuối tháng n: $N(r+1)^n-A\left[(r+1)^{n-1}+(r+1)^{n-2}+...+(r+1)+1\right].$

Sau n tháng, người đó trả hết số tiền $N=400$ triệu nên

$$N(r+1)^n-A\left[(r+1)^{n-1}+(r+1)^{n-2}+...+(r+1)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow N(r+1)^n=A\left[(r+1)^{n-1}+(r+1)^{n-2}+...+(r+1)+1\right]$$

$$\Leftrightarrow N(1+r)^n.r=A\left[(1+r)^n-1\right].$$

Thế số vào ta được

$$400.(1+0,5\%)^n.0,5\%=4\left[(1+0,5\%)^n-1\right]$$

$\Leftrightarrow(1+0,5\%)^n=2\Leftrightarrow n\approx139$ (tháng).

Câu 38. Kết thúc năm 2017, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam đạt 2300 USD / người / năm. Trong hội nghị mới đây bàn về " Tầm nhìn mới, động lực mới cho tăng trưởng kinh tế", đại diện chính phủ Việt Nam đặt mục tiêu thu nhập bình quân đầu người của nước ta vào cuối năm 2035 sẽ đạt mức 10000 USD / người / năm (theo giá hiện hành). Hỏi để đạt được mục tiêu đó, trung bình mỗi năm thu nhập bình quân đầu người của nước ta tăng bao nhiêu % (tính gần đúng).

A. $8,2$. **B.** $8,7$. **C.** $7,5$. **D.** $8,5$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử để đạt được mục tiêu đề ra, trung bình mỗi năm thu nhập bình quân đầu người của nước ta tăng $x(\%)$.

- Cuối năm 2018, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là:

$$S_1=2300+\frac{x}{100}.2300=2300.\left(1+\frac{x}{100}\right)\text{ (USD).}$$

- Cuối năm 2019, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là:

$S_2 = S_1 + \frac{x}{100}.S_1 = 2300.\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ (USD).

- Cuối năm 2035, thu nhập bình quân đầu người của Việt Nam là:

$S_{18} = 2300.\left(1+\frac{x}{100}\right)^{18}$ (USD).

Ta có: $S_{18} = 10000 \Leftrightarrow 2300.\left(1+\frac{x}{100}\right)^{18} = 10000 \Leftrightarrow \left(1+\frac{x}{100}\right)^{18} = \frac{100}{23}$

$\Leftrightarrow 18\log\left(1+\frac{x}{100}\right) = \log\frac{100}{23} \Leftrightarrow x \approx 8,5.$

Câu 39. Bác Minh có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất $2,1\%$ / quý. 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất $0,73\%$ / tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác Minh thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $75,304$ triệu đồng. **B.** $75,303$ triệu đồng.

C. $470,656$ triệu đồng. **D.** $475,304$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Công thức tính lãi kép là $S_n = A(1+r)^n$

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là: $S_1 = 200(1+2,1\%)^4$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là: $S_2 = 200(1+0,73\%)^{12}$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 1 năm là $S_1 + S_2$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác Minh thu được sau 2 năm là $S = (S_1 + S_2)(1+0,73\%)^{12} \approx 475,304$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi bác Minh thu được sau 2 năm là $L = S - 400 = 75,304$ triệu đồng.

Câu 40. Ông A là một người già hết tuổi lao động. Trước khi hết tuổi lao động, ông ấy có dành dụm được một khoản tiền để gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất ưu đãi dành cho người già là $0,9\%$ tháng. Sau khi gửi tiết kiệm ngân hàng, đủ mỗi tháng gửi, ông A đến ngân hàng rút ra một khoản tiền là 5 triệu đồng để chi tiêu hàng ngày. Sau đúng 5 năm kể từ ngày gửi tiết kiệm, số tiền tiết kiệm còn lại của ông ấy là 100 triệu đồng. Hỏi số tiền ban đầu mà ông A gửi tiết kiệm là bao nhiêu? (lấy kết quả gần đúng)

A. $289,440$ triệu đồng. **B.** $291,813$ triệu đồng.

C. $287,044$ triệu đồng. **D.** $233,663$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền ban đầu là M, lãi suất một tháng là r.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.

Ngay sau đó ông A rút 5 triệu đồng để chi tiêu nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r)-5$.

Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là

$$\left[M(1+r)-5\right](1+r)=M(1+r)^2-5(1+r).$$

Ngay sau đó ông A lại rút 5 triệu để chi tiêu nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$$M(1+r)^2-5(1+r)-5.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n\geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A có trong ngân hàng là

$$M(1+r)^n-5(1+r)^{n-1}-5(1+r)^{n-2}-...-5(1+r)-5=M(1+r)^n-\frac{5\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Sau 5 năm tức là 60 tháng, số tiền còn lại trong ngân hàng là 100 triệu nên ta có

$$M(1+r)^{60}-\frac{5\left[(1+r)^{60}-1\right]}{r}=200\Leftrightarrow M=\frac{100+\frac{5\left[(1+r)^{60}-1\right]}{r}}{(1+r)^{60}}\approx 289,440 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 41. Anh Quý vừa mới ra trường được một công ty nhận vào làm việc với cách trả lương như sau: 3 năm đầu tiên, hưởng lương 10 triệu đồng/tháng. Sau mỗi ba năm thì tăng thêm 1 triệu đồng tiền lương hàng tháng. Để tiết kiệm tiền mua nhà ở, anh Quý lập ra kế hạch như sau: Tiền lương sau khi nhận về chỉ dành một nửa vào chi tiêu hàng ngày, nửa còn lại ngay sau khi nhận lương sẽ gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất $0,8\%$/tháng. Công ty trả lương vào ngày cuối của hàng tháng. Sau khi đi làm đúng 10 năm cho công ty đó anh Quý rút tiền tiết kiệm để mua nhà ở. Hỏi tại thời điểm đó, tính cả tiền gửi tiết kiệm và tiền lương ở tháng cuối cùng anh Quý có số tiền là bao nhiêu?(lấy kết quả gần đúng nhất)

A. $1102,535$ triệu đồng. **B.** $1089,535$ triệu đồng.

C. $1093,888$ triệu đồng. **D.** $1111,355$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Đặt $q=1+r=1,008$.

Giả sử anh Quý bắt đầu đi làm từ ngày 01 tháng 01 năm X nào đó.

Đến cuối tháng 1, đầu tháng 2, anh Quý bắt đầu gửi tiết kiệm ngân hàng với số tiền ban đầu là 5 triệu đồng (một nửa số tiền lương hàng tháng).

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 3 là: $5q+5$.

…

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 37 là: $5\left(q^{35}+q^{34}+...+1\right)=5\dfrac{q^{36}-1}{q-1}$.

Vì tiền lương kể từ tháng thứ 37 được tăng thêm 1 triệu đồng cho mỗi tháng lương, nên số tiền gửi tiết kiệm đầu tháng thứ 38 là: $5\dfrac{q^{36}-1}{q-1}q+5,5$.

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 39 là: $5\dfrac{q^{36}-1}{q-1}q^2+5,5\left(1+q\right)$.

…

Số tiền gửi tiết kiệm ở đầu tháng thứ 73 (tròn 6 năm đi làm) là:

$$5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{36}+5,5\left(1+q+...+q^{35}\right)=5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{36}+5,5\frac{q^{36}-1}{q-1}.$$

Lập luận tương tự như trên, số tiền tiết kiệm ở đầu tháng thứ 109(tròn 9 năm đi làm) là:

$$5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{72}+5,5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{36}+6.\frac{q^{36}-1}{q-1}.$$

Đến đầu tháng thứ 120 (tháng cuối cùng đang đi làm để tròn 10 năm), số tiền tiết kiệm là:

$$5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{72+11}+5,5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{36+11}+6.\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{11}+6,5\frac{q^{11}-1}{q-1}$$

Đến cuối tháng thứ 120(thời điểm tròn 10 năm đi làm) số tiền gửi ngân hàng anh Quý có được là:

$$\left(5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{83}+5,5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{47}+6.\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{11}+6,5\frac{q^{11}-1}{q-1}\right)q.$$

Tại thời điểm này, anh Quý rút tiền để mua nhà ở, do đó tổng số tiền lương ở tháng cuối cùng và số tiền tiết kiệm 10 năm là:

$$\left(5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{83}+5,5\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{47}+6.\frac{q^{36}-1}{q-1}q^{11}+6,5\frac{q^{11}-1}{q-1}\right)q+13\approx 1102,535 \text{ triệu đồng.}$$

DẠNG TOÁN 42: HÀM SỐ MŨ-LOGARIT (BÀI TOÁN THỰC TẾ)

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Lãi đơn

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $V_n = V_0(1+r.n)$

Trong đó:

V_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

V_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần: $T_n = T_0(1+r)^n$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

b. Lãi kép liên tục: $T_n = T_0.e^{nr}$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0: Số tiền gửi ban đầu;

n: Số kỳ hạn tính lãi;

r: Lãi suất định kỳ, tính theo %.

c. Lãi kép, gửi định kỳ.

✪*Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.*

Bài toán 1: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là:

$$T_n = \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Bài toán 2: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$

Bài toán 3: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r}\left(\frac{Ar}{m}+1\right)$.

✪*Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.*

Bài toán 4: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$

Bài toán 5: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m=\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$

Bài toán 6: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n=\log_{1+r}\left[\dfrac{Ar}{m(1+r)}+1\right]$.

✪*Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.*

Bài toán 7: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n=A(1+r)^n-m(1+r)\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Bài toán lãi suất
- Bài toán thực tế liên môn
- …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n)=\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Phân tích hướng dẫn giải

Đây là dạng toán khảo sát thực tế liên quan hàm số mũ.

……

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- **Bất phương trình mũ với cơ** $a>1$**:** $a^x>b>0\Leftrightarrow x>\log_a b$.
- **Công thức mũ:** $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

……

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Nêu điều kiện để số người đạt trên 30%: $P(n)>0,3\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}>0,3$.

B2: Giải bất phương trình mũ: $e^{-0,015n}<\dfrac{1}{21}\Leftrightarrow e^{0,015n}>21\Leftrightarrow 0,015n>\ln 21\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 21}{0,015}\approx 202,97$.

B3: Kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Để số người mua sản phẩm đạt trên $30\%\Rightarrow P(n)>0,3\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+49.e^{-0,015n}}>0,3$

$1+49.e^{-0,015n}<\dfrac{1}{0,3}\Leftrightarrow e^{-0,015n}<\dfrac{1}{21}\Leftrightarrow e^{0,015n}>21\Leftrightarrow 0,015n>\ln 21\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln 21}{0,015}\approx 202,97$.

Vậy phải có ít nhất 203 lần quảng cáo. **Chọn B**

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 3

Câu 1. Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Chọn C

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là m thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $A.(1+m)^n$.

Do đó, số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là $300.1,07^n$ triệu đồng.

Số tiền cả gốc và lãi nhận được nhiều hơn 600 triệu đồng $\Leftrightarrow 300.1,07^n>600$

$\Leftrightarrow n>\log_{1,07}2\approx 10,245$.

Vậy sau ít nhất 11 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

Câu 2. Một người gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc và tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được số tiền lãi ít nhất bằng số tiền gửi ban đầu, giả định trong thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra ?

A. 12 năm. B. 11 năm. C. 10 năm. D. 13 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền ban đầu là A. Số tiền lãi nhận được sau n năm là $A(1+0,061)^n-A$.

Ta cần tìm n nguyên dương nhỏ nhất để $A(1+0,061)^n-A\geq A\Leftrightarrow n\geq\log_{1,061}2\approx 11,7$.

Vậy $n=12$.

Câu 3. Một người gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với lãi suất $6,5\%/$ năm, kì hạn một năm. Hỏi sau 5 năm người đó rút cả vốn lẫn lãi được số tiền gần với số nào nhất trong các số tiều sau? (biết lãi suất hàng năm không đổi) .

A. 73 triệu đồng. **B.** $53,3$ triệu đồng.

C. $64,3$ triệu đồng. **D.** $68,5$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền ban đầu là A. Lãi suất tính theo năm là r.

Hết năm thứ nhất số tiền cả vốn và lãi là: $A+A.r=A(1+r)$.

Hết năm thứ hai số tiền cả vốn và lãi là: $A(1+r)+A(1+r).r=A(1+r)^2$.

Hết năm thứ ba số tiền cả vốn và lãi là: $A(1+r)^2+A(1+r)^2.r=A(1+r)^3$.

Từ đó suy ra sau n năm số tiền cả vốn và lãi là: $A(1+r)^n$.

Thay số với $A=50;r=6,5\%;n=5$ ta được số tiền là $A_5=50(1+6,5\%)^5\approx 68,5$ (triệu đồng).

Câu 4. Bà Tư gửi tiết kiệm 75 triệu đồng vào ngân hàng theo kỳ hạn một quý với lãi suất $1,77\%$ một quý. Nếu bà không rút lãi ở tất cả các định kỳ thì sau 3 năm bà ấy nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu ? Biết rằng hết một kỳ hạn lãi sẽ được cộng vào vốn để tính lãi trong kỳ hạn tiếp theo.

A. 90930000. **B.** 92690000.

C. 92576000. **D.** 80486000.

Lời giải

Chọn C

Như vậy sau 3 năm là định kỳ thứ 12 ta có: $a(1+r)^{12}=75(1+1,77\%)^{12}=92576000$

Câu 5. Một người gửi 58.000.000 đồng vào ngân hàng với lãi suất $r\%$/ tháng theo thể thức lãi kép (tức là sau mỗi tháng người đó không rút tiền thì tiền lãi được gộp vào tiền gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo). Biết rằng sau 8 tháng người đó lấy về tất cả số tiền cả gốc và lãi được 61.329.000 đồng. Lãi suất hàng tháng gần đúng nhất với giá trị nào sau đây?

A. $0,5\%$. **B.** $0,7\%$. **C.** $0,6\%$. **D.** $0,8\%$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A là số tiền gốc, S_k là số tiền cả gốc và lãi sau k tháng.

Khi đó:

+ Sau 1 tháng: $S_1=A+A.r\%=A(1+r\%)$.

+ Sau 2 tháng: $S_2=A(1+r\%)+A(1+r\%)r\%=A(1+r\%)^2$.

…

+ Sau 8 tháng: $S_8=A(1+r\%)^8$.

Mà $S_8=61.329.000$ suy ra $61.329.000=58.000.000(1+r\%)^8\Rightarrow r\approx 0,7$.

Vậy $r\approx 0,7$.

Câu 6. Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

A. $0,8$ %. B. $0,6$ %. C. $0,7$ %. D. $0,5$ %.

Lời giải

Chọn C

Gọi r là lãi suất tiền gửi của ngân hàng theo tháng. T_0, T lần lượt là số tiền gưi ban đầu và số tiền sau $n=9$ tháng. Áp dụng công thức lãi kép ta có

$$T=T_0(1+r)^n \Leftrightarrow 61758000=58000000(1+r)^9 \Leftrightarrow r=\sqrt[9]{\frac{61758000}{58000000}}-1\approx 7.10^{-3}=0,7\,\%.$$

Câu 7. Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong một ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $231\,525\,000$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

A. $8\%/$ năm. B. $7\%/$ năm. C. $6\%/$ năm. D. $5\%/$ năm.

Lời giải

Chọn D

Gọi lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng là x.

Số tiền học sinh A nhận được sau 3 năm (khi 18 tuổi) là: $200000000(1+x)^3$ VNĐ.

Theo giả thiết: Khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $231\,525\,000$ VNĐ nên ta có: $200000000(1+x)^3=231525000 \Leftrightarrow x=\frac{1}{20} \Leftrightarrow x=5\%$.

Vậy lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng là: $5\%/$ năm.

Câu 8. Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ để mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 154 triệu đồng. **B.** 150 triệu đồng.

C. 140 triệu đồng. **D.** 145 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Số tiền ông An nhận được sau 3 năm là: $T_3=x(1+6,5\%)^3$.

Theo bài ra ta có

$$x(1+6,5\%)^3-x=30$$

$$\Rightarrow x=\frac{30}{(1+6,5\%)^3-1}=144,2657...$$

Câu 9. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu ?

A. 394 triệu đồng. **B.** 396 triệu đồng.

C. 397 triệu đồng. **D.** 395 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi A (triệu đồng) là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất mỗi kì hạn (%/năm) và S là số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn. Ta có $S=A(1+r)^n$.

Theo giả thiết $S=500 \Leftrightarrow A(1+r)^n=500 \Leftrightarrow A(1+0,08)^3=500$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{500}{(1+0,08)^3}\approx 397$ triệu đồng.

Câu 10. Thầy giáo Công gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn 4 tháng. Biết rằng lãi suất của ngân hàng là $0,5\%/$ tháng. Hỏi sau 2 năm thầy giáo thu được số tiền lãi gần nhất với số nào sau đây?

A. 1.262.000đ. **B.** 1.271.000đ.

C. 1.272.000đ. **D.** 1.261.000đ.

Lời giải

Chọn A

Lãi suất theo kỳ hạn 4 tháng bằng 2%.

Sau 2 năm ta có 6 kỳ hạn, do đó số tiền cả gốc và lãi bằng: $10(1+2\%)^6=11.261.624$ đồng.

Do đó số tiền lãi bằng: $1.261.624$đồng.

Câu 11. Ông A vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó và sau đúng hai năm kể từ ngày vay ông A trả hết nợ. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $9,85$ triệu đồng. **B.** $9,44$ triệu đồng. **C.** $9,5$ triệu đồng. **D.** $9,41$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Ta có $m=\dfrac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.Ar=\dfrac{(1+1\%)^{24}}{(1+1\%)^{24}-1}.200.1\%\approx 9,41$ (triệu đồng).

Trong đó: m (triệu đồng) là số tiền cần trả mỗi tháng, $r(\%)$ là lãi suất mỗi tháng, A (triệu đồng) là số tiền vay ban đầu, n (tháng) là số tháng trả để ông A trả hết nợ.

Câu 12. Một sinh viên A trong thời gian 4 năm học đại học đã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất 3% năm (thủ tục vay một năm một lần vào thời điểm đầu năm học). Khi ra trường A thất nghiệp nên chưa trả được tiền cho ngân hàng do vậy phải chịu lãi suất 8% một năm cho tổng số tiền vay gồm gốc và lãi của 4 năm học. Sau 1 năm thất nghiệp, sinh viên A cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ dần. Tổng số tiền mà sinh viên A nợ ngân hàng sau 4 năm học đại học và 1 năm thất nghiệp gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 43.091.358 đồng. **B.** 48.621.980 đồng. **C.** 46.538.667 đồng. **D.** 45.188.656 đồng.

Lời giải

Chọn C

Tổng số tiền (cả gốc và lãi) sinh viên A nợ ngân hàng sau 4 năm học là:

$T=10(1+0,03)^4+10(1+0,03)^3+10(1+0,03)^2+10(1+0,03)$ (triệu đồng)

Tổng số tiền (cả gốc và lãi) sinh viên A nợ ngân hàng sau 1 năm ra trường là:

$$P=T(1+0,08)^1=\left[10(1+0,03)^4+10(1+0,03)^3+10(1+0,03)^2+10(1+0,03)\right](1+0,08)$$

$$P=(1+0,08)(1+0,03).10.\frac{(1,03)^4-1}{1,03-1}\approx 46.538.667\,.$$

Câu 13. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%$/ tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

A. 139. **B.** 140. **C.** 100. **D.** 138.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_1=A(1+r)-1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_2=\left[A(1+r)-1\right](1+r)-1=A(1+r)^2-(1+r)-1$.

…

Sau n tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n=A(1+r)^n-(1+r)^{n-1}-(1+r)^{n-2}-\cdots-(1+r)-1=A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có $S_n=0\Leftrightarrow A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}=0$

$$\Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1)+1=0\Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\frac{1}{1-Ar}\Leftrightarrow n=-\log_{(1+r)}(1-Ar).$$

Với $A=100$ triệu đồng, $r=0,005$ ta có $n\approx 138,9757216$.

Câu 14. Ông An lập cuốn sổ tiết kiệm ở một ngân hàng số tiền gốc ban đầu là 200 triệu đồng với lãi suất cố định $0,54\%$ / tháng. Cứ đều đặn sau mỗi tháng, kể từ ngày gửi, ông An rút 5 triệu ra để chi phí cho sinh hoạt gia đình. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng tính lãi cho ông An theo số tiền còn lại. Hỏi sau đúng 3 năm, số tiền còn lại trong ngân hàng của ông An gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $40,8$ triệu. **B.** $44,7$ triệu. **C.** $39,9$ triệu. **D.** $49,4$ triệu.

Lời giải

Chọn B

+) Gọi số tiền gốc ban đầu khi ông An lập sổ tiết kiệm là A triệu đồng với lãi suất r và số tiền ông An rút ra hàng tháng là a triệu đồng.

+) Sau 1 tháng số tiền ông An còn lại trong ngân hàng là: $A_1 = A(1+r)-a$ triệu đồng.

+) Sau 2 tháng số tiền ông An còn lại trong ngân hàng là:

$A_2 = A_1(1+r)-a = A(1+r)^2 - a(1+r)-a$ triệu đồng.

+) Sau 3 tháng số tiền ông An còn lại trong ngân hàng là:

$A_3 = A_2(1+r)-a = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r)-a$ triệu đồng.

….

+) Cứ như vậy sau 36 tháng số tiền ông An còn lại trong ngân hàng là:

$$A_{36} = A(1+r)^{36} - \left[a(1+r)^{35} + a(1+r)^{34} + ... + a(1+r) + a\right]$$

$$= A.(1+r)^{36} - \frac{a}{r}.\left[(1+r)^{36} - 1\right] \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền ông An còn lại trong ngân hàng sau 3 năm là:

$$A_{36} = 200.(1+0.0054)^{36} - \frac{5}{0.0054}.(1,0054^{36} - 1) \approx 44,69 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 15. Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong ba năm đầu tiên là 6 triệu đồng/ tháng. Tính từ ngày đầu làm việc, cứ sau đúng ba năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng. Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu?

A. $6.1,1^4$ (triệu đồng). **B.** $6.1,1^6$ (triệu đồng).

C. $6.1,1^5$ (triệu đồng). **D.** $6.1,1^{16}$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn C

Sau 3 năm, bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 4 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6+6.10\% = 6.1,1$ (triệu đồng).

Sau 6 năm (2.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 7 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1+6.1,1.10\% = 6.1,1.(1+10\%) = 6.1,1^2$ (triệu đồng).

Tương tự như vậy sau 15 năm (5.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 16 số tiền người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Vậy tháng đầu tiên của năm thứ 16, người đó nhận được mức lương là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Câu 16. Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với lương năm đầu là 72 triệu đồng, cứ sau 3 năm thì tăng lương 10%. Nếu tính theo hợp đồng thì sau đúng 21 năm, người đó nhận được tổng số tiền của công ty là

A. $216\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng). **B.** $7200\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng).

C. $720\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng). **D.** $2160\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn D

Số tiền lương sau 3 năm đầu tiên người đó nhận được là $72.3=216$ (triệu đồng).

Kể từ năm thứ 4 đến năm thứ 6, mỗi năm người đó nhận được số tiền lương là $72.\left(1+10\%\right)=72.1,1$ (triệu đồng).

Số tiền lương sau 6 $\left(3.2\right)$ năm người đó nhận được là $216+3.72.1,1=216.\left(1+1,1\right)$ (triệu đồng).

Kể từ năm thứ 7 đến năm thứ 9, mỗi năm người đó nhận được số tiền lương là $72.1,1.\left(1+10\%\right)=72.1,1^2$ (triệu đồng).

Số tiền lương sau 9 $\left(3.3\right)$ năm người đó nhận được là

$216.\left(1+1,1\right)+3.72.1,1^2=216.(1+1,1+1,1^2)$ (triệu đồng).

Tương tự như vậy, số tiền lương sau 21 $\left(3.7\right)$ năm người đó nhận được là

$216.(1+1,1+1,1^2+...+1,1^6)$ (triệu đồng).

Mặt khác ta thấy $1;\ 1,1;\ 1,1^2;\ \ldots;\ 1,1^6$ là một cấp số nhân gồm 7 số hạng với $u_1=1,\ q=1,1$.

Tổng 7 số hạng của cấp số nhân trên là $S_7=1+1,1+...+1,1^6=\dfrac{1.\left(1,1^7-1\right)}{1,1-1}=10.\left(1,1^7-1\right)$.

Vậy sau đúng 21 năm, số tiền lương người đó nhận được là $216.10.\left(1,1^7-1\right)=2160\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng).

Câu 17. Anh C đi làm với mức lương khởi điểm là x (triệu đồng)/ tháng, và số tiền lương này được nhận vào ngày đầu tháng. Vì làm việc chăm chỉ và có trách nhiệm nên sau 36 tháng kể từ ngày đi làm, anh C được tăng lương thêm 10%. Mỗi tháng, anh ta giữ lại 20% số tiền lương để gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng và lãi suất là $0,5\%$ /tháng, theo hình thức lãi kép (tức tiền lãi của tháng này được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo). Sau 48 tháng kể từ ngày đi làm, anh C nhận được số tiền cả gốc và lãi là 100 triệu đồng. Hỏi mức lương khởi điểm của người đó là bao nhiêu?

A. $8.991.504$ đồng. **B.** $9.991.504$ đồng. **C.** $8.981.504$ đồng. **D.** $9.881.505$ đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm ngân hàng trong 36 tháng đầu là A; số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm sau tháng thứ 36 là B.

Đặt $q=1+0,5\%=1,005$

Gọi S_n là số tiền sau tháng thứ n ta có

$S_1=A+A.0,5\%=A.q$

$S_2=(S_1+A)+(S_1+A).0,5\%=(S_1+A).q=Aq^2+Aq$.

….

$S_{36}=(S_{35}+A)+(S_{35}+A).0,5\%=(S_{35}+A).q=Aq^{36}+Aq^{35}+\ldots+Aq=Aq.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}$.

$S_{37}=(S_{36}+B)+(S_{36}+B).0,5\%=(S_{36}+B).q=S_{36}.q+B.q$.

$S_{38}=(S_{37}+B)+(S_{37}+B).0,5\%=(S_{37}+B).q=S_{36}q^2+Bq^2+Bq$.

….

$S_{48}=S_{36}.q^{12}+Bq^{12}+Bq^{11}+\ldots+Bq=Aq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}+Bq.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}$.

Theo giả thiết ta có $A=20\%x=0,2x$; $B=20\%(x+10\%x)=0,22x$; $S_{48}=10^8$.

Vậy $0,2xq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}+0,22x.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}=10^8 \Leftrightarrow x=10^8:\left(0,2q^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}+0,22.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}\right)$

$\Leftrightarrow x\approx 8991504$ đồng.

Câu 18. Một chiếc ô tô mới mua năm 2016 với giá 800 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm, giá chiếc ô tô này bị giảm 5%. Hỏi đến năm 2020, giá tiền chiếc ô tô này còn khoảng bao nhiêu?

A. 651.605.000 đồng. **B.** 685.900.000 đồng. **C.** 619.024.000 đồng. **D.** 760.000.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Giá tiền còn lại của chiếc ô tô là $P=800(1-5\%)^4=651.605$ (triệu đồng).

Câu 19. Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 22.

Lời giải

Chọn D

Gọi x $(x>0)$ là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài sau 1 năm giá trị tiền tệ còn $0,9x$.

Cuối năm thứ nhất còn $0,9x$.

Cuối năm thứ hai còn $0,9.0,9x = 0,9^2 x$.

.....

Cuối năm thứ n còn $0,9^n x$.

Theo đề bài, sau n năm đơn vị tiền tệ mất đi ít nhất 90% giá trị nó nên ta có $0,9^n x \le 0,1x \Leftrightarrow n > 21,86$. Mà n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn nên $n = 22$

Câu 20. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 10 năm khu rừng đó có số mét khối gỗ gần nhất với số nào?

A. $5,9.10^5$. **B.** $5,92.10^5$. **C.** $5,93.10^5$. **D.** $5,94.10^5$.

Lời giải

Chọn B

Số lượng gỗ sau 10 năm là : $4.10^5.(1+0,04)^{10} = 592097,714$.

Mức độ 4

Câu 1. Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

A. 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

Lời giải

Chọn A

Bài toán lãi kép:

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là $r\%$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $S_n = A.(1+r\%)^n$.

Anh Bảo nhận được số tiền ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn và lãi nên ta có:

$27(1+1,85\%)^n \ge 36 \Leftrightarrow n \ge 15.693$.

Vậy thời gian tối thiểu để anh Bảo nhận được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi là 16 quý.

Câu 2. Do có nhiều cố gắng trong học kì I năm học lớp 12, Hoa được bố mẹ cho chọn một phần thưởng dưới 5 triệu đồng. Nhưng Hoa muốn mua một cái laptop 10 triệu đồng nên bố mẹ đã cho Hoa 5 triệu đồng gửi vào ngân hàng (vào 1/1/2019) với lãi suất 1% trên tháng đồng thời ngày đầu tiên mỗi tháng (bắt đầu từ ngày 1/2/2019) bố mẹ sẽ cho Hoa 300000 đồng và cũng gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 1% trên tháng. Biết hàng tháng Hoa không rút lãi và tiền lãi được cộng vào tiền vốn cho tháng sau chỉ rút vốn vào cuối tháng mới được tính lãi của tháng ấy. Hỏi ngày nào trong các ngày dưới đây là ngày gần nhất với ngày 1/2/2019 mà bạn Hoa có đủ tiền để mua laptop?

A. 15/3/2020. **B.** 15/5/2020.

C. 15/4/2020. **D.** 15/6/2020.

Lời giải

Chọn C

Gọi n là số tháng gửi tiết kiệm của Hoa (tính từ 1/1/2019).

Khi đó tổng số tiền bạn Hoa nhận được sau n tháng là:

Với 5000000 đồng ban đầu: $T_1 = 5000000(1+1\%)^n$

Với A đồng gửi mỗi tháng thì

* Đầu tháng thứ 2: gửi A đồng.

Cuối tháng thứ 2, có $A + A.r = A(1+r)$.

* Đầu tháng thứ 3 gửi A đồng.

Cuối tháng thứ 3 có: $\left[A(1+r)+A\right](1+r) = A\left[(1+r)^2+(1+r)\right]$.

* Đầu tháng thứ 4 gửi A đồng.

Cuối tháng thứ 4 có: $A\left[(1+r)^2+(1+r)\right](1+r)+A(1+r) = A\left[(1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)\right]$

…

* Đầu tháng thứ n gửi A đồng.

Cuối tháng thứ n có: $A\left[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+...+(1+r)\right] = A(1+r)\dfrac{1-(1+r)^{n-1}}{1-(1+r)}$

$= \dfrac{A}{r}(1+r).\left[(1+r)^{n-1}-1\right]$.

Do đó, sau n tháng gửi tiết kiệm của Hoa (tính từ 1/1/2019) thì

$T_2 = \dfrac{300000}{0,01}.1,01.\left[(1,01)^{n-1}-1\right] = 30300000.\left[(1,01)^{n-1}-1\right]$.

Ta có $T = T_1 + T_2 = 5000000(1+1\%)^n + 30300000.\left[(1,01)^{n-1}-1\right] \ge 10000000$.

$\Leftrightarrow 50(1,01)^n + 303.\left[(1,01)^{n-1}-1\right] \ge 100$.

$\Leftrightarrow 353,5(1,01)^{n-1} \ge 403 \Leftrightarrow n-1 \ge \log_{1,01}\left(\dfrac{806}{707}\right) \approx 13,17 \Leftrightarrow n \ge 14,17$.

Vậy sau ít nhất 15 tháng (tính từ 1/1/2019) thì Hoa có ít nhất 10 triệu đồng nên ngày gần nhất với ngày 1/2/2019 là $15/4/2020$.

Câu 3. Đầu mỗi tháng anh Sơn gửi vào ngân hàng $5.000.000$ đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất là $0,7\%$ trên một tháng. Biết rằng ngân hàng chi tất toán vào cuối tháng và lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian Anh Sơn gửi tiền. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng kể từ ngày anh Sơn gửi tiền cả gốc và lãi không ít hơn $63.000.000$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức số tiền cả gốc và lãi trong n tháng là $S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$

Ta có: $\frac{5.10^6}{0,007}\left[(1+0,007)^n - 1\right](1+0,007) \ge 63.10^6$

$\Leftrightarrow (1+0,007)^n - 1 \ge \frac{441}{5035} \Leftrightarrow (1,007)^n \ge \frac{5476}{5035} \Leftrightarrow n \ge \log_{1,007}\left(\frac{5476}{5035}\right) \Leftrightarrow n \ge 12,0364$

Do n là số nguyên nên chọn $n = 13$.

Vậy sau 13 tháng kể từ ngày anh Sơn gửi tiền cả gốc và lãi không ít hơn 63.000.000 .

Câu 4: Trung tâm luyện thi Đại học Diệu Hiền muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi và tiền gốc) để trao 10 suất học bổng hằng tháng cho học sinh nghèo ở TP. Cần Thơ, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi suất ngân hàng là 1% /*tháng* , và Trung tâm Diệu Hiền bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, trung tâm cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là:

A. 108500000 đồng. **B.** 119100000 đồng.

C. 94800000 đồng. **D.** 120000000 đồng.

Lời giải

Chọn C.

Gọi M (triệu). Lãi suất là a

Số tiền sau tháng thứ nhất và đã phát học bổng là $M(1+a)-10$

Số tiền sau tháng thứ hai và đã phát học bổng là

$\left(M(1+a)-10\right)(1+a)-10 = M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10$

Số tiền sau tháng thứ ba và đã phát học bổng là

$\left(M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10\right)(1+a) - 10 = M(1+a)^3 - 10\left[(1+a)^2 + (1+a) + 1\right]$

.....

Số tiền sau tháng thứ 10 và đã phát học bổng là

$M(1+a)^{10} - 10\left[(1+a)^9 + ... + (1+a) + 1\right] = M(1+a)^{10} - 10.\frac{(1+a)^{10} - 1}{a}$

Theo yêu cầu đề bài

$M(1+a)^{10} - 10.\frac{(1+a)^{10} - 1}{a} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{10\left[(1+a)^{10} - 1\right]}{a(1+a)^{10}}$

Thay $a = 1\%$. Ta tìm được $M = 94713045 \approx 94800000$

Câu 5. Một người gửi bảo hiểm cho con từ lúc con tròn 6 tuổi, hàng tháng người này đều đặn gửi vào tài khoản bảo hiểm của con m nghìn đồng với lãi suất 0,5% một tháng. Trong quá trình đó, người này không rút tiền ra và giả sử lãi suất không thay đổi. Nếu muốn số tiền rút ra lớn hơn 100 triệu đồng cũng là lúc con tròn 18 tuổi thì hằng tháng phải gửi vào tài khoản bảo hiểm tối thiểu tiền? Kết quả làm tròn đến nghìn đồng.

A. 474 nghìn đồng. **B.** 437 nghìn đồng.

C. 480 nghìn đồng. **D.** 440 nghìn đồng.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức: $A_n = A.(1+r)\left[\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$

Với: A: là số tiền mỗi tháng đóng vào tài khoản; r: lãi suất một tháng và A_n : số tiền cuối tháng thứ n người đó có được trong tài khoản.

Người đó đóng bảo hiểm trong 12 năm = 144 tháng.

Từ đó suy ra: $A = \dfrac{A_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$ hay $m = \dfrac{100000000.0,005}{(1+0,005)\left[(1,005)^{144} - 1\right]} \approx 473482$.

Vậy số tiền tối thiểu mỗi tháng người đó phải đóng là: 474000 đồng.

Câu 6. Một thầy giáo cứ đầu mỗi tháng lại gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất 0.5%/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng thầy giáo có thể tiết kiệm tiền để mua được một chiếc xe Ô tô trị giá 400 000 000 VNĐ?

A. 60 tháng B. 50 tháng C. 55 tháng D.45 tháng

Lời giải

Chọn D

Công thức tính: Mỗi tháng gửi một số tiền A đồng với lãi suất kép là r %/ tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng (n là số tự nhiên khác 0) là S_n.

$$S_n = \frac{A}{r\%}\left[(1+r\%)^n - 1\right](1+r\%)$$

Thầy giáo gửi mỗi tháng 8 000 000 VNĐ với lãi suất 0.5%/ tháng.

Từ đây ta có phương trình:

$$400000000 = \frac{8000000}{0.5\%}\left[(1+0.5\%)^n - 1\right](1+0.5\%) \Leftrightarrow n \approx 44.5$$

Vậy thầy giáo cần tiết kiệm 45 tháng để có thể mua chiếc xe ô tô giá 400 000 000 VNĐ.

Câu 7. Ông T vay ngân hàng nông nghiệp tỉnh Lào Cai một tỷ đồng theo phương thức trả góp để làm vốn kinh doanh. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất ông T trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,65\%$ mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao nhiêu tháng ông T trả hết số tiền trên?

A. 27. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 29.

Lời giải

Chọn B

Gọi P_n (triệu) là số tiền còn nợ sau tháng thứ n.

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 1: $P_1 = 1000(1+0,65\%) - 40$.

Số tiền còn nợ sau tháng thứ 2: $P_2 = 1000(1+0,65\%)^2 - 40(1+0,65\%) - 40$.

Tương tự cho các tháng tiếp theo.

Suy ra số tiền còn nợ sau tháng thứ n:

$$P_n = 1000(1+0,65\%)^n - 40(1+0,65\%)^{n-1} - 40(1+0,65\%)^{n-2} - ..... - 40$$

$$\Leftrightarrow P_n = 1000(1+0,65\%)^n - 40.\frac{(1+0,65\%)^n - 1}{0,65\%}$$

Để trả hết nợ thì $P_n = 0 \Leftrightarrow 1000(1+0,65\%)^n - 40.\frac{(1+0,65\%)^n - 1}{0,65\%} = 0$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{40}{40 - 1000.0,65\%}\right)}{\ln(1+0,65\%)} \approx 27,37$$

Kết quả cho thấy để trả hết nợ thì phải mất 28 tháng nhưng tháng cuối chỉ trả số tiền ít hơn 40 triệu.

Câu 8. Chị Phương Anh vay trả góp ngân hàng MSB số tiền 500 triệu đồng với lãi suất 10,8 %/năm, mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng thì chị Phương Anh trả hết nợ?

A. 39 tháng. **B.** 41 tháng.

C. 40 tháng. **D.** 42 tháng.

Lời giải

Chọn C

Sau tháng thứ nhất số tiền còn lại là $T_1 = 500(1+0,9\%) - 15$.

Sau tháng thứ hai số tiền còn lại là

$T_2 = T_1(1+0,9\%) - 15 = 500(1+0,9\%)^2 - 15(1+0,9\%) - 15$.

Sau tháng thứ n số tiền còn lại là $T_n = T_{n-1}(1+0,9\%) - 15$.

$$= 500(1+0,9\%)^n - 15(1+0,9\%)^{n-1} - 15(1+0,9\%)^{n-2} - ...15(1+0,9\%) - 15$$

$$= 500(1+0,9\%)^n - 15\frac{1-(1+0,9\%)^n}{1-(1+0,9\%)}$$

Để $T_n = 0 \Rightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{10}{7} \Leftrightarrow n \approx 39,81$.

Vậy sau ít nhất 40 tháng thì trả hết nợ.

Câu 9. Anh An vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất $0,7\%/1$ tháng theo phương thức trả góp, cứ mỗi tháng anh An sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh An trả được hết nợ ngân hàng? (Biết lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. 21 tháng. **B.** 23 tháng. **C.** 22 tháng. **D.** 20 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi N là số tiền vay ngân hàng ban đầu, r là lãi suất mỗi tháng, A là số tiền phải trả mỗi tháng để sau n tháng thì hết nợ.

Sau 1 tháng thì số tiền gốc và lãi là $N+Nr$, người đó trả A đồng nên số tiền còn nợ là:

$N+Nr-A=N(1+r)-A$.

Sau 2 tháng, số tiền còn nợ là:

$$\left[N(1+r)-A\right]+\left[N(1+r)-A\right]r-A=N(1+r)^2-A\left[(1+r)+1\right]=N(1+r)^2-\frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$$

Sau 3 tháng, số tiền còn nợ là $N(1+r)^3-\frac{A}{r}\left[(1+r)^3-1\right]$.

Sau n tháng, số tiền còn nợ là $N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

Để trả hết nợ sau n tháng thì số tiền này phải bằng 0.

$$\Rightarrow N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^n\left(N-\frac{A}{r}\right)=\frac{-A}{r}\Leftrightarrow (1+r)^n=\frac{A}{A-Nr}\Leftrightarrow n=\log_{1+r}\left(\frac{A}{A-Nr}\right).$$

Áp dụng với $N=100$(triệu đồng), $r=0,7\%=0,007$, $A=5$(triệu đồng).

$$\Rightarrow n=\log_{1,007}\left(\frac{5}{5-100.0,007}\right)\approx 21,62.$$

Vậy sau 22 tháng thì anh An trả hết nợ.

Câu 10. Để đủ tiền mua nhà, anh Hoàng vay ngân hàng 500 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh Hoàng trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh Hoàng trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (Tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

A. 67. **B.** 65. **C.** 68. **D.** 66.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là số tiền hoàn nợ mỗi tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay.

Số tiền còn nợ ngân hàng sau một tháng là: $S+S.r=S(1+r)$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 1 thì số tiền còn nợ là: $S(1+r)-x$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 2 thì số tiền còn nợ là:

$S(1+r)-x+\left[S(1+r)-x\right]r-x=S(1+r)^2-x\left[(1+r)+1\right]$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ 3 thì số tiền còn nợ là:

$S(1+r)^2 - x\left[(1+r)+1\right] + \left\{S(1+r)^2 - x\left[(1+r)+1\right]\right\}r - x$

$= S(1+r)^3 - x\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$ (triệu đồng).

…

Lý luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ n thì số tiền còn nợ ngân hàng là:

$S(1+r)^n - x\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + 1\right]$

$= S(1+r)^n - x\dfrac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = S(1+r)^n - \dfrac{x}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$

Vì sau n tháng trả hết nợ, cho nên: $S(1+r)^n - \dfrac{x}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{S.r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$.

Thay vào công thức, ta có: $10.10^6 = \dfrac{500.10^6(1+0,0085)^n.0,0085}{(1+0,0085)^n - 1}$.

Sử dụng máy tính tìm được $n \simeq 65,38$. Vậy sau 66 tháng thì anh Hoàng trả hết nợ.

Câu 11. Một người vay ngân hàng $90.000.000$ đồng theo hình thức trả góp trong 3 năm. Mỗi tháng người đó phải trả số tiền bằng nhau. Giả sử lãi suất trong toàn bộ quá trình trả nợ không đổi là $0,8\%$ trên tháng. Tổng số tiền người đó phải trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là

A. 103.320.000 đồng. **B.** 101.320.000 đồng. **C.** 105.320.000 đồng. **D.** 103.940.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi N là số tiền vay ngân hàng ban đầu, r là lãi suất mỗi tháng, A là số tiền phải trả mỗi tháng để sau n tháng thì hết nợ.

Sau 1 tháng thì số tiền gốc và lãi là $N + Nr$, người đó trả A đồng nên số tiền còn nợ là:

$N + Nr - A = N(1+r) - A$.

Sau 2 tháng, số tiền còn nợ là:

$\left[N(1+r) - A\right] + \left[N(1+r) - A\right]r - A = N(1+r)^2 - A\left[(1+r)+1\right] = N(1+r)^2 - \dfrac{A}{r}\left[(1+r)^2 - 1\right]$

.

Sau 3 tháng, số tiền còn nợ là $N(1+r)^3 - \dfrac{A}{r}\left[(1+r)^3 - 1\right]$.

Sau n tháng, số tiền còn nợ là $N(1+r)^n - \dfrac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$.

Để trả hết nợ sau n tháng thì số tiền này phải bằng 0.

$\Rightarrow N(1+r)^n - \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$.

$\Leftrightarrow A = \frac{N(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} = \frac{90.000.000(1+0,8\%)^{35}.0,8\%}{(1+0,8\%)^{35} - 1} = 2887174$ đồng.

Tổng số tiền người đó phải trả là $2887174.36 = 103.938.264$ đồng.

Câu 12. Cô Ngọc vay ngân hàng một số tiền với lãi suất 1%/ tháng. Cô ấy muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày cho vay, cô ấy bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là 5 triệu đồng và cô ấy trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay (số tiền hoàn nợ tháng cuối cùng có thể ít hơn 5 triệu đồng). Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mà cô Ngọc vay ngân hàng là số nào trong các số dưới đây?

A. 224 triệu đồng. **B.** 222 triệu đồng. **C.** 221 triệu đồng. **D.** 225 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền cô Ngọc vay là A, số tiền trả hàng tháng là m. Với lãi suất là 1%/ tháng thì :

Cuối tháng 1 còn nợ : $A + Ar - m = A(1+r) - m$.

Cuối tháng 2 còn nợ: $A(1+r) - m + \left[A(1+r) - m\right]r - m = A(1+r)^2 - m\left[(r+1)+1\right]$.

Cuối tháng 3 còn nợ : $\left[A(1+r)^2 - m\left[(r+1)+1\right]\right](1+r) - m$

$= A(1+r)^3 - m\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$.

Cứ như vậy cuối tháng n còn nợ:

$A(1+r)^n - m\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right]$

$= A(1+r)^n - m\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = A(1+r)^n - m\frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Để trả hết nợ thì $A(1+r)^n - m\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow A = m\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n r}$.

Áp dụng công thức ta có: $A = 5\frac{(1+1\%)^{60} - 1}{(1+1\%)^{60} 1\%} = 224,76$ (triệu).

Câu 13. Một người vay ngân hàng số tiền 400 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 10 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 1% mỗi tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Biết lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi, hỏi số tiền còn phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

A. $2.921.000$. **B.** $3.387.000$. **C.** $2.944.000$. **D.** $7.084.000$.

Lời giải

Chọn B

Cuối tháng thứ nhất, tiền gốc và lãi là $400\cdot 1,01$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $\left(400\cdot 1,01-10\right)$ triệu đồng.

Cuối tháng thứ hai, tiền gốc và lãi là: $\left(400\cdot 1,01^2-10\cdot 1,01\right)$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $\left(400\cdot 1,01^2-10\cdot 1,01-10\right)$ triệu đồng.

Như vậy ở cuối tháng thứ $n\left(n\ge 1\right)$ người đó nếu còn nợ thì số tiền nợ là:

$\left(400\cdot 1,01^n-10\cdot 1,01^{n-1}-10\cdot 1,01^{n-2}-\ldots-10\right)$ triệu đồng.

Xét $400\cdot 1,01^n-10\cdot 1,01^{n-1}-10\cdot 1,01^{n-2}-\ldots-10=0$

$\Leftrightarrow 400\cdot 1,01^n-10\cdot\dfrac{1,01^n-1}{0,01}=0\Leftrightarrow 600\cdot 1,01^n=1000\Leftrightarrow n=\log_{1,01}\dfrac{5}{3}\simeq 51,33$

Do vậy kỳ cuối cùng người đó phải trả tiền là tháng thứ 52. Cuối tháng thứ 51, số tiền còn nợ lại là $400\cdot 1,01^{51}-10\cdot\dfrac{1,01^{51}-1}{0,01}\simeq 3,3531596$ triệu đồng.

Vậy kỳ cuối người đó phải trả số tiền là $3,3531596\cdot 1,01=3,386647$ triệu đồng $\simeq 3387000$ đồng.

Câu 14. Ông X muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi lẫn gốc) để trao 10 suất học bổng hàng tháng cho học sinh nghèo, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi ngân hàng là 1% tháng. Ông X bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, ông X cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là:

A. 92100000 đồng. **B.** 96400000 đồng.

C. 94800000 đồng. **D.** 100000000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Mỗi tháng ông X rút số tiền là $T=10\,000\,000$. Lãi suất hàng tháng là $r=0,01$.

Sau tháng thứ nhất, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$$M\left(1+r\right)-T.$$

Sau tháng thứ hai, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$$\left[M\left(1+r\right)-T\right]\left(1+r\right)-T=M\left(1+r\right)^2-T\left[1+\left(1+r\right)\right].$$

Tương tự, sau tháng thứ n, số tiền ông X còn lại trong ngân hàng là:

$$M\left(1+r\right)^n-T\left[1+\left(1+r\right)+\left(1+r\right)^2+.....\left(1+r\right)^{n-1}\right]=M\left(1+r\right)^n-T\frac{\left(1+r\right)^n-1}{r}.$$

Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng thì: $M\left(1+r\right)^{10}-T\dfrac{\left(1+r\right)^{10}-1}{r}\ge 0$

$$M \ge T\frac{(1+r)^{10}-1}{r(1+r)^{10}} \approx 94800000.$$

Vậy số tiền ông X cần gửi tối thiểu là 94800000 đồng.

Câu 15. Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu 10 triệu đồng/tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh nhiều hơn 20 triệu đồng(biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ)?

A. Tháng thứ 31 **B.** Tháng thứ 25 **C.** Tháng thứ 19 **D.** Tháng thứ 37

Lời giải

Chọn B

Gọi n là số chu kỳ 6 tháng (một chu kỳ là 6 tháng). Thì lương một tháng của anh A sau n chu kỳ là:

$T = A(1+r)^n$ với $A = 10.000.000$ đồng, $r = 0,2$

Trước hết ta tìm n để $T = A(1+r)^n > 20.000.000 \Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 = \log_{1,2} 2 = 3,08$

Tức là để lương của anh A nhiều hơn 20 triệu thì phải từ 3 chu kỳ trở lên.

Xét $n = 3$ (sau 18 tháng) thì lương của anh A là:

$T = A(1+r)^n = 10.000.000.1,2^3 = 17.280.000$ đ

Xét $n = 4$ (sau 24 tháng) thì lương của anh A là:

$T = A(1+r)^n = 10.000.000.1,2^3 = 20.736.000$ đ

Từ đó dễ thấy đáp án B thoả mãn.

Câu 16. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ ponoli 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Thời gian phân rã phóng xạ ponoli 210 để từ 20 gam còn lại $2,22.10^{-15}$ gam gần đúng với đáp án nào nhất?

A. Khoảng 18 năm. **B.** Khoảng 21 năm. **C.** Khoảng 19 năm. **D.** Khoảng 20 năm.

Lời giải

Chọn D

Gọi t (ngày) là số chu kì bán rã. Khi đó ta có phương trình:

$$20.\left(\frac{1}{2}\right)^t = 2,22.10^{-15} \Rightarrow t \approx 53.$$

Thời gian phân rã gần bằng: $53.138 : 365 \approx 20$ (năm).

Câu 17. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là $mmHg$) suy giảm mũ so với độ cao x (so với mực nước biển) (đo bằng mét) theo công thức $P = P_0.e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao

$1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3343m$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $505,45mmHg$. **B.** $530,23mmHg$. **C.** $485,36mmHg$. **D.** $495,34mmHg$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} x = 1000m \\ P = 672,71mmHg \\ P_0 = 760mmHg \end{cases}$ thay vào công thức $P = P_0.\mathrm{e}^{xi}$ ta được:

$$672,71 = 760.\mathrm{e}^{1000i} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{1000\,\mathrm{i}} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760} .$$

Với $\begin{cases} x = 3343m \\ i = \dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{672,71}{760} \\ P_0 = 760mmHg \end{cases}$ thay vào công thức $P = P_0.\mathrm{e}^{xi}$ ta được:

$$P = 760.\mathrm{e}^{3343.\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}} \approx 505,4548502 .$$

Vậy đáp án **A.**

Câu 18. Trong phim *Cube* của đạo diễn Vicenzo Natali thực hiện năm 1997, có một căn phòng âm thanh. Trong căn phòng đó, cứ có bất kì âm thanh nào phát ra với mức cường độ âm thanh trên $50dB$ thì có một bộ phận trong căn phòng sẽ phát ra khí độc giết chết toàn bộ sự sống trong đó. Biết rằng mức cường độ âm thanh được tính theo công thức $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ (đơn vị: dB), trong đó $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W}/m^2$ là cường độ âm chuẩn, I là cường độ âm. Tính giá trị lớn nhất $I_{\max}$ của cường độ âm I để căn phòng an toàn.

A. $I_{\max} = 10^{-7}\mathrm{W}/m^2$. **B.** $I_{\max} = 10^{-5}\mathrm{W}/m^2$. **C.** $I_{\max} = 10^{-8}\mathrm{W}/m^2$. **D.** $I_{\max} = 10^{-6}\mathrm{W}/m^2$.

Lời giải

Chọn A

Căn phòng an toàn khi và chỉ khi $L = 10\log\dfrac{I}{I_0} \le 50 \Leftrightarrow \log\dfrac{I}{I_0} \le 5 \Leftrightarrow \dfrac{I}{I_0} \le 10^5 \Leftrightarrow I \le 10^5 I_0$

$\Leftrightarrow I \le 10^{-7}\mathrm{W}/m^2$.

Vậy cường độ âm lớn nhất để căn phòng an toàn là $I_{\max} = 10^{-7}\mathrm{W}/m^2$.

Câu 19. Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

A. 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.

Lời giải

Chọn D

Gọi S là diện tích lá bèo thả ban đầu.

Vì sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó nên sau 12 giờ, tổng diện tích các lá bèo trong chậu là $10^{12}S$.

Theo đề bài: Sau 12 giờ, bèo phủ kín mặt nước trong chậu nên diện tích mặt nước trong chậu là $10^{12}S$. Giả sử sau x giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Ta có: $10^x S = \frac{1}{5}.10^{12}S \Leftrightarrow 10^{12-x} = 5 \Leftrightarrow x = 12 - \log 5 \simeq 11,3$.

Vậy sau $11,3$ giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Câu 20. Trong y học các khối u ác tính được điều trị bằng xạ trị và hoá trị (sử dụng thuốc hoá học trị liệu). Xét một thí nghiệm y tế trong đó những con chuột có khối u ác tính được điều trị bằng một loại thuốc hoá học trị liệu. Tại thời điểm bắt đầu sử dụng thuốc khối u có thể tích khoảng $0,5cm^3$, thể tích khối u sau t (ngày) điều trị xác định bởi công thức: $V(t) = 0,005e^{0,24t} + 0,495e^{-0,12t}\ (0 \le t \le 18)cm^3$. Hỏi sau khoảng bao nhiêu ngày thì thể tích khối u là nhỏ nhất ?

A. 10,84 ngày **B.** 9,87 ngày **C.** 1,25 ngày **D.** 8,13 ngày

Lời giải

Chọn A

$$V'(t) = \frac{3}{2500}e^{0,24t} - \frac{297}{5000}e^{-0,12t} = \frac{1}{e^{0,12t}}\left(\frac{3}{2500}e^{0,36t} - \frac{297}{5000}\right).$$

Trên đoạn $[0;18]$ có: $V'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2500}e^{0,36t} - \frac{297}{5000} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{0,36t} = \frac{99}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,36}.\ln\left(\frac{99}{2}\right) \approx 10,84.$$

Bảng biến thiên

x	0		$10,84$		18
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘		↗	

Suy ra $V(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t \approx 10,84$ (ngày).

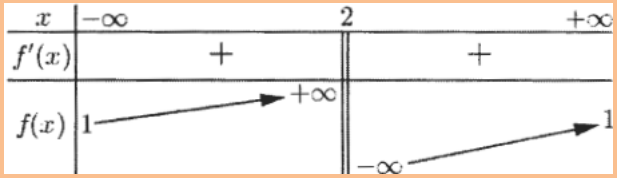
DẠNG TOÁN 34: XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA HÀM SỐ NHẤT BIẾN.

PHẦN I:

(CHƯA CÓ KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a,b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là bài toán ở dạng vận dụng: Từ bảng biến thiên xác định dấu các hệ số *a*, *b* và *c* của hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$.

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ là $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Từ công thức của hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ chỉ ra phương trình đường thẳng của tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và công thức tính đạo hàm của nó.

B2: Từ bảng biến thiên chỉ ra tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và chiều biến thiên của hàm số đó.

B3: Thay các dữ kiện ở bước 1 vào bước 2 ta sẽ xác định được dấu của các hệ số *a*, *b* và *c*.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases}-\dfrac{c}{b}=2\\ \dfrac{a}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2}$ (1)

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên

$$f'(x)=\frac{ac-b}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow ac-b>0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0\Leftrightarrow -c^2+c>0\Leftrightarrow 0<c<1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Bài tập tương tự và phát triển 1:

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+m^2+4}{bx+c}$ $(a,b,c,m\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ 1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

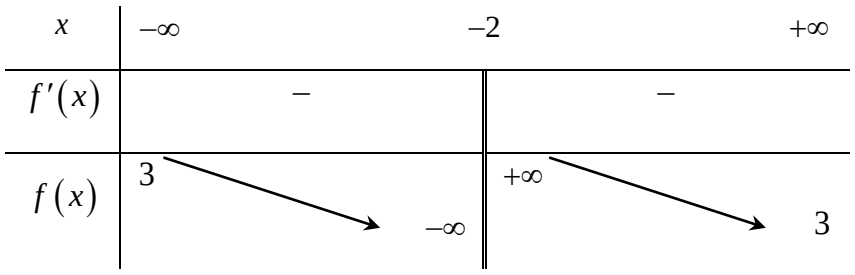
Tiệm cận đứng: $x=3>0\Rightarrow -\dfrac{c}{b}>0\Rightarrow bc<0$.

Tiệm cận ngang: $y=1>0\Rightarrow \dfrac{a}{b}>0\Rightarrow ab>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x>3>0\Rightarrow -\dfrac{m^2+4}{a}>0\Rightarrow a<0\Rightarrow b<0$

$\Rightarrow c>0$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+9}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

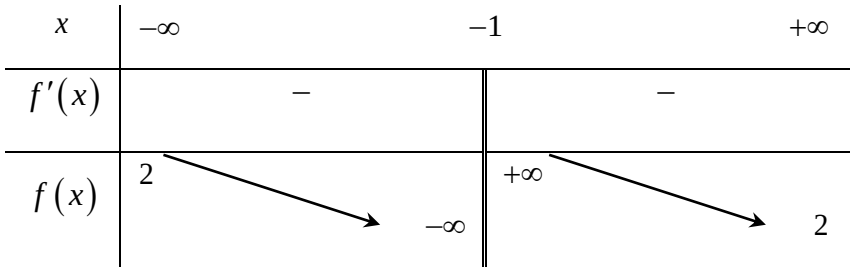
Tiệm cận đứng: $x=-2<0 \Rightarrow -\frac{c}{b}<0 \Rightarrow bc>0$.

Tiệm cận ngang: $y=3>0 \Rightarrow \frac{a}{b}>0 \Rightarrow ab>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x<-2<0 \Rightarrow -\frac{9}{a}<0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow b>0$

$\Rightarrow c>0$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a>0)$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $b>0,\ c>0,\ d>0$. **B.** $b<0,\ c>0,\ d<0$.

C. $b<0,\ c<0,\ d<0$. **D.** $b>0,\ c<0,\ d<0$.

Lời giải

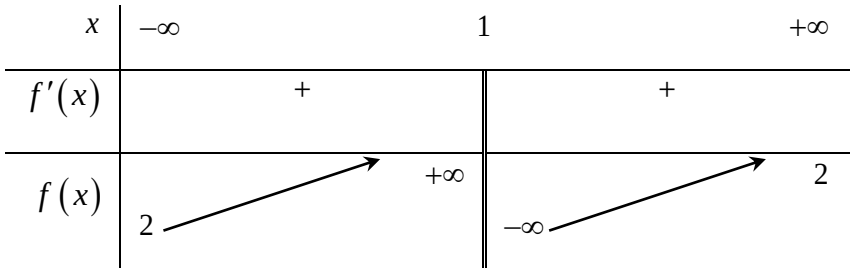
Chọn A

Tiệm cận ngang: $y=2>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>0$, mà $a>0 \Rightarrow c>0$.

Tiệm cận đứng: $x=-1<0 \Rightarrow -\frac{d}{c}<0 \Rightarrow \frac{d}{c}>0$, mà $c>0 \Rightarrow d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x<-1<0 \Rightarrow -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}>0 \Rightarrow b>0$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R}, a<0)$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $b>0,\ c>0,\ d>0$. **B.** $b<0,\ c>0,\ d<0$.

C. $b<0,\ c<0,\ d<0$. **D.** $b>0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải

Chọn D

Tiệm cận ngang: $y=2>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>0$, mà $a<0 \Rightarrow c<0$.

Tiệm cận đứng: $x=1>0 \Rightarrow -\frac{d}{c}>0 \Rightarrow \frac{d}{c}<0$, mà $c<0 \Rightarrow d>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x>1>0 \Rightarrow -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{b}{a}<0 \Rightarrow b>0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax-2}{bx+c}$ $(a,b,c,m\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiệm cận đứng: $x=1>0 \Rightarrow -\frac{c}{b}>0 \Rightarrow bc<0$.

Tiệm cận ngang: $y=1>0 \Rightarrow \frac{a}{b}>0 \Rightarrow ab>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x>1>0 \Rightarrow \frac{2}{a}>0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow b>0$

$\Rightarrow c<0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\frac{ax+2020}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\frac{1}{3}$

Kết quả nào sau đây **đúng**?

A. $a<0,\ b>0, c>0$. **B.** $a<0,\ b>0, c<0$.

C. $a>0,\ b>0, c<0$. **D.** $a>0,\ b>0, c>0$.

Lời giải

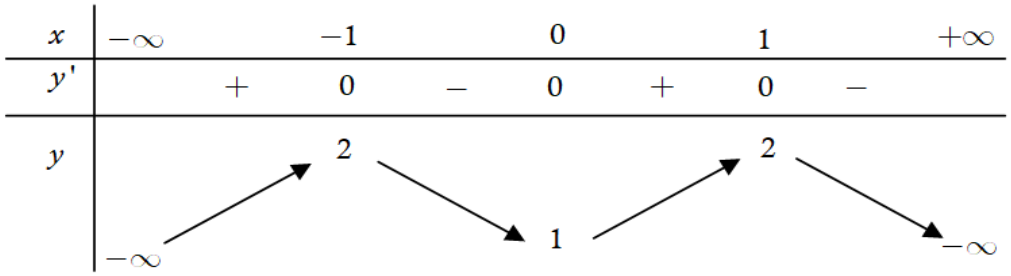
Chọn B

+ Tiệm cận đứng: $x=4>0 \Rightarrow -\frac{c}{b}>0 \Rightarrow bc<0$

+ Tiệm cận ngang: $y=-\frac{1}{3}<0\Rightarrow\frac{a}{b}<0\Rightarrow ab<0$

+ Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $x>4\Rightarrow x>0\Rightarrow-\frac{2020}{a}>0\Rightarrow a<0\Rightarrow b>0\Rightarrow c<0$.

Câu 7: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\quad a\neq 0$ có bảng biến thiên dưới đây:



Tính $P=a-2b+3c$.

A. $P=3$. **B.** $P=6$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=2$.

Lời giải

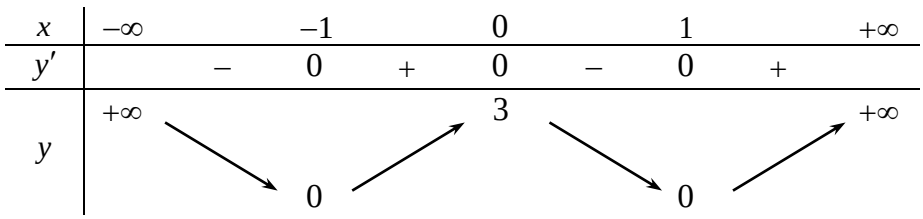
Chọn C

Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-\frac{b}{2a}\end{array}\right.$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $a<0$; $b>0$, hàm đạt cực đại tại $x=\pm1$ và $y(\pm1)=2$, hàm đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y(0)=1$. Suy ra, $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1\\a+b+c=2\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=1\end{cases}$.

Do đó: $P=a-2b+3c=-2$.

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a>0,b<0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$.

C. $a>0,b<0,c<0$. **D.** $a<0,b<0,c>0$.

Lời giải

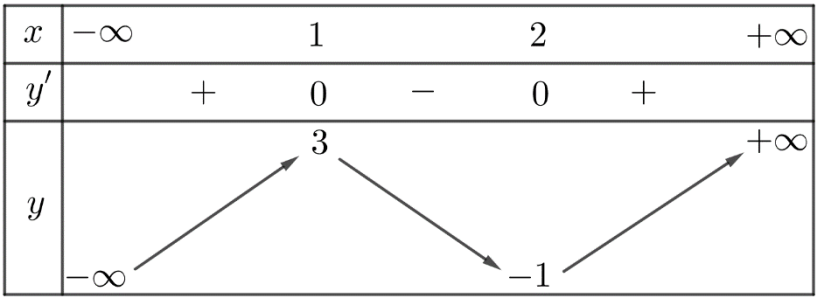
Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$ nên $a>0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0;3)$ do đó $c=3>0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab<0\Rightarrow b<0$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq0,d<0)$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a>0$.

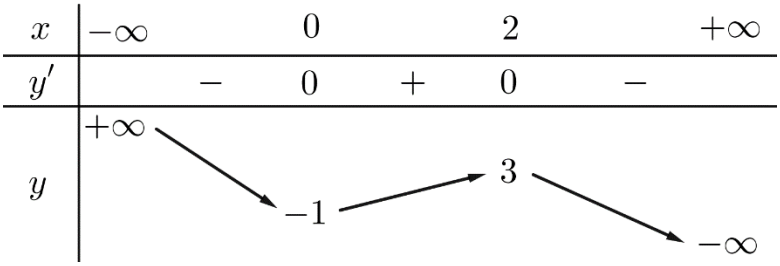
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a}>0 \\ \dfrac{c}{3a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ c>0 \end{cases}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a<0$.

$x=0\Rightarrow y=d=-1\Rightarrow d<0$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0 \end{cases}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

$x = 0 \Rightarrow y = d > 0$.

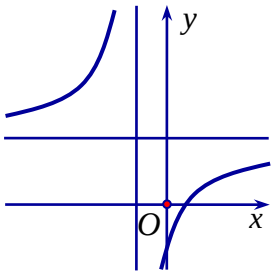
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Vì hàm số có 2 cực trị nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Nên theo công thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị ta có: $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x - c}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $a < 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn D

❖ Từ hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x - c}$ suy ra:

+ Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng có phương trình $x = c$.

+ Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng có phương trình $y=a$.

+ Giao điểm với trục hoành là $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$, $a\neq 0$.

+ Giao điểm với trục tung là $B\left(0;-\frac{b}{c}\right)$, $c\neq 0$.

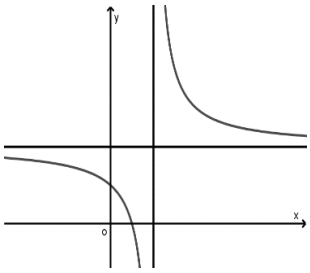
❖ Từ đồ thị hàm số ta có:

+ Đường tiệm cận đứng nằm bên trái Oy nên $c<0$.

+ Đường tiệm cận ngang nằm trên Ox nên $a>0$.

+ Giao điểm với trục Ox có hoành độ dương nên $-\frac{b}{a}>0$. Vì $a>0$ nên $b<0$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\frac{ax-1}{x+d}\left(a,d\in\mathbb{R},ad+1\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\begin{cases}a>0\\d<0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a>0\\d>0\end{cases}$

C. $\begin{cases}a<0\\d<0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a<0\\d>0\end{cases}$

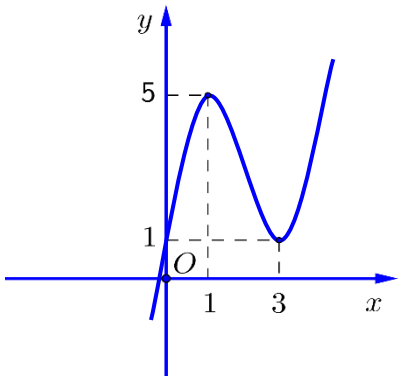
Lời giải

Chọn A

+ Phương trình tiệm cận đứng: $x=-d$. Dựa vào đồ thị ta có $-d>0\Leftrightarrow d<0$

+ Phương trình tiệm cận ngang: $y=a$. Dựa vào đồ thị ta có $a>0$

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$. **D.** $a<0,\ b<0,\ c>0,\ d<0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị ta thấy nhánh cuối cùng bên phải hướng lên trên suy ra $a>0$.

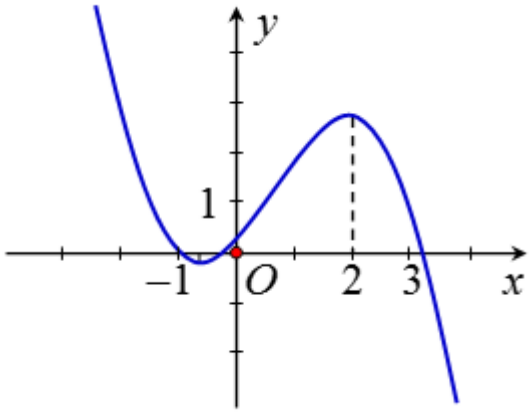
Đồ thị cắt trục tung tại điểm $x=1\Rightarrow d=1>0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1=1>0, x_2=3>0\Rightarrow x_1+x_2>0\Rightarrow -\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

$x_1x_2>0\Rightarrow \dfrac{c}{3a}>0\Rightarrow c>0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$.

Câu 15: Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây đúng.



A. $a<0;b>0;c>0;d>0$. **B.** $a<0;b>0;c<0;d>0$.

C. $a<0;b<0;c<0;d>0$. **D.** $a<0;b<0;c>0;d>0$.

Lời giải

Chọn A

Có $a<0$ do điểm cuối đồ thị có hướng đi xuống.

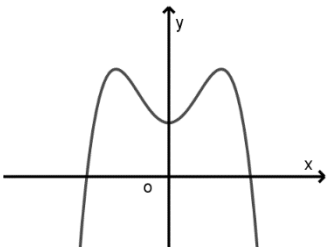
$d>0$ do giao điểm của đồ thị với Oy nằm phía trên Ox.

Đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $3a.c<0\Rightarrow c>0$.

Hoành độ điểm uốn dương nên $-\dfrac{b}{3a}>0\Rightarrow b>0$.

Câu 16: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0;b>0;c<0$. **B.** $a>0;b<0;c<0$. **C.** $a<0;b<0;c>0$. **D.** $a<0;b>0;c>0$.

Lời giải

Chọn D

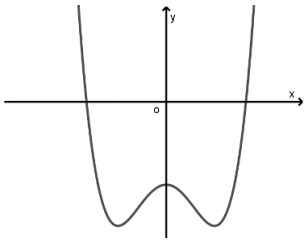
+ Dựa vào dạng đồ thị ta thấy: $a<0$.

+ Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab<0\Rightarrow b>0$.

+ Với $x=0$ ta có: $y(0)=c>0$.

Câu 17: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0;b>0;c<0.$ **B.** $a>0;b<0;c<0.$ **C.** $a<0;b>0;c<0.$ **D.** $a<0;b>0;c>0.$

Lời giải

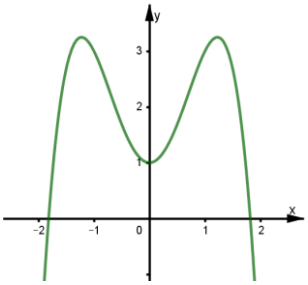
Chọn B

+ Dựa vào dạng đồ thị ta thấy: $a>0$.

+ Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên: $ab<0\Rightarrow b<0$.

+ Với $x=0$ ta có: $y(0)=c<0$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ với $a\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $a<0;\ b>0;\ c>0.$ **B.** $a>0;\ b<0;\ c>0.$

C. $a<0;\ b<0;\ c>0.$ **D.** $a<0;\ b>0;\ c<0.$

Lời giải

Chọn A

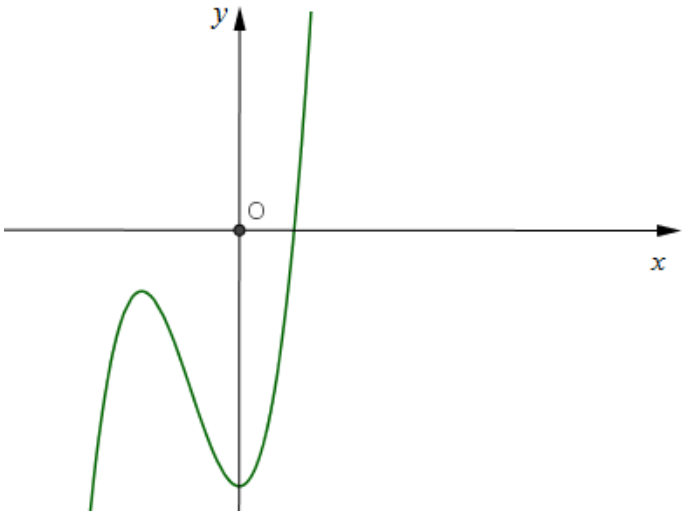
Ta có nhánh bên phải đồ thị đi xuống, suy ra $a<0$.

Mặt khác do đồ thị có ba cực trị suy ra $ab<0$ mà $a<0\Rightarrow b>0$.

Mà giao điểm của đồ thị với trục Oy tại điểm có tung độ $y=c>0$.

Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 19: 2 Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,b>0,c=0,d<0$.
B. $a>0,b=0,c<0,d<0$.
C. $a>0,b=0,c>0,d<0$.
D. $a>0,b=0,c>0,d<0$.

Lời giải

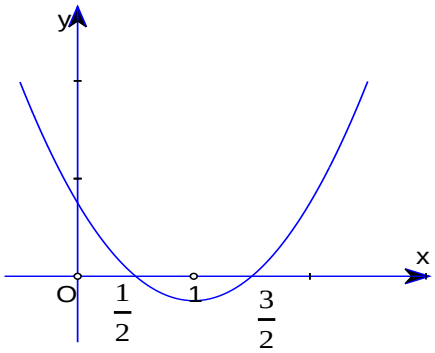
Chọn A

Do nhánh cuối của đồ thị đi lên nên ta có $a>0$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Do cực tiểu của hàm số thuộc trục tung và có giá trị âm nên $d<0$ và $x=0$ là nghiệm của phương trình $y'=0\Rightarrow c=0$.

Lại có $3ax^2+2bx \Leftrightarrow =0\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{2b}{3a}\Rightarrow -\dfrac{2b}{3a}<0\Rightarrow a>0,b>0. \end{array}\right.$

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Giá trị của $\dfrac{c}{b}$ là:



A. $-\dfrac{1}{3}$.
B. $\dfrac{3}{4}$.
C. $\dfrac{1}{3}$.
D. $-\dfrac{3}{4}$.

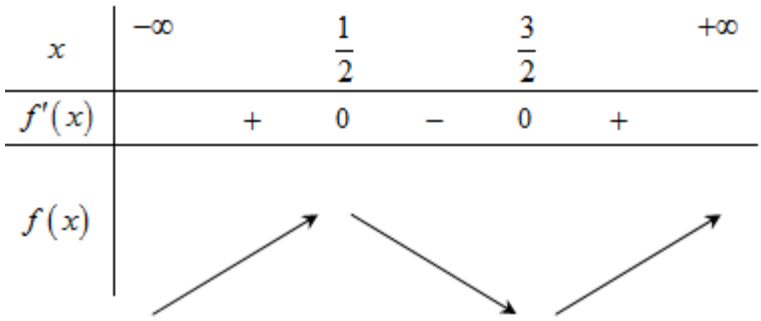
Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm cấp 1 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng thiên của hàm số $f(x)$



Ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3a}{4}+b+c$ và $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27a}{4}+3b+c$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases}3a+4b+4c=0\\27a+12b+4c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}27a+36b+36c=0\\27a+12b+4c=0\end{cases}$.

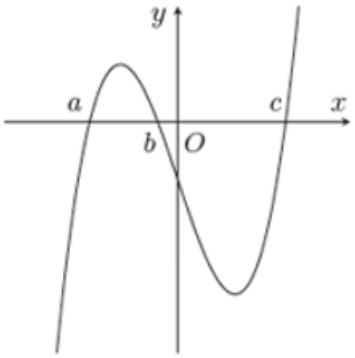
$\Rightarrow 24b+32c=0\Rightarrow\frac{c}{b}=-\frac{3}{4}$.

Vậy $\frac{c}{b}=-\frac{3}{4}$.

Bài tập tương tự và phát triển 2:

Mức độ 3

Câu 43.1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$, biết rằng đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

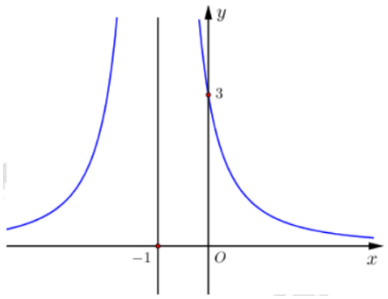
x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	

Vì $f(a)>0$ nên ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $f(c)>0$ thì toàn bộ đồ thị hàm số nằm ở phía trên trục hoành, do đó đồ thị hàm số không cắt trục hoành.
- Nếu $f(c)=0$ thì đồ thị hàm số và trục hoành có một điểm chung duy nhất
- Nếu $f(c)<0$ thì đồ thị hàm số và trục hoành có hai điểm chung

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất tại hai điểm.

Câu 43.2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ dưới đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;4)$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $f(1)=2$. **B.** $f(2)=\frac{11}{2}$. **C.** $f(1)=\frac{7}{2}$. **D.** $f(2)=6$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $A(0;4)$ nên $b=4d\ (1)$.

Ta có: $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Căn cứ theo đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\frac{d}{c}=-1\Rightarrow c=d\ (2)$.

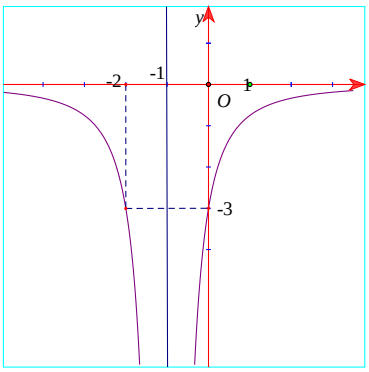
Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua $(0;3)$ nên $\frac{ad-bc}{d^2}=3\Rightarrow ad-bc=3d^2\ (3)$.

Thay (1), (2) vào (3) ta được $ad-4d^2=3d^2\Rightarrow a=7d\ (d\neq 0)$ vì nếu $d=0$ thì $a=b=c=d=0$ (vô lí).

Do đó $f(x)=\frac{7dx+4d}{dx+d}=\frac{7x+4}{x+1}$.

Vậy $f(2)=6$.

Câu 43.3. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, (a, b, c, $d\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$, $d\neq 0$) có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có phương trình là



A. $x+3y+2=0$. **B.** $x+3y-2=0$. **C.** $x-3y-2=0$. **D.** $x-3y+2=0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $f'(x)=\dfrac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^2}$.

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $f(0)=2\Leftrightarrow\dfrac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=2d$

. Từ đồ thị $y=f'(x)$ nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng nên $-\dfrac{d}{c}=-1\Leftrightarrow d=c$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-2d^2}{(dx+d)^2}=\dfrac{a-2d}{d(x+1)^2}$.

Mặt khác ta lại có đồ thị $y=f'(x)$ đi qua điểm $(-2;-3)$ nên $f'(2)=3\Rightarrow\dfrac{a-2d}{d}=-3$

$\Leftrightarrow a=-d$.

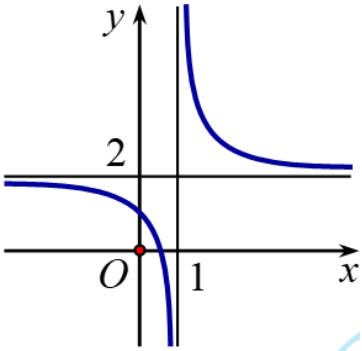
Vậy $f(x)=\dfrac{-dx+2d}{dx+d}=\dfrac{-x+2}{x+1}$.

Đồ thị (C) cắt trục Ox tại điểm $(2;0)$ và $f'(2)=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục Ox là $y=-\dfrac{1}{3}(x-2)$

$\Leftrightarrow x+3y-2=0$.

Câu 43.4. Xác định a, b, c để hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



A. $a=2,\ b=1,c=-1.$ **B.** $a=2,\ b=1,c=1.$

C. $a=2,\ b=2,c=-1.$ **D.** $a=2,\ b=-1,c=1.$

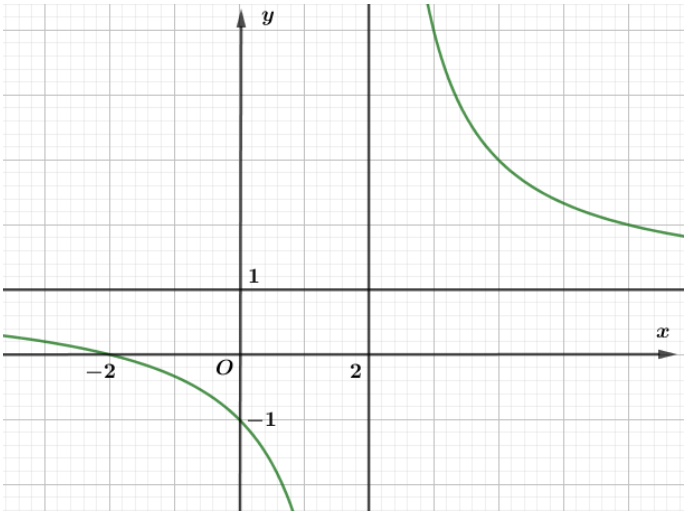
Lời giải

Chọn A

Nhận xét: đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=\dfrac{-b}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}$.

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}\dfrac{-b}{c}=1\\ \dfrac{a}{b}=2\\ M(0;1)\in(C):y=\dfrac{ax-1}{bx+c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=0\\ a=2b\\ 1=\dfrac{-1}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=0\\ a=2b\\ c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b=2\\ b=-c=1\\ c=-1\end{cases}$.

Câu 43.5. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a=1;\ b=-2;\ c=1$. **B.** $a=1;\ b=2;\ c=1$. **C.** $a=1;\ b=1;\ c=-1$. **D.** $a=2;b=2;c=-1$.

Lời giải:

Chọn A

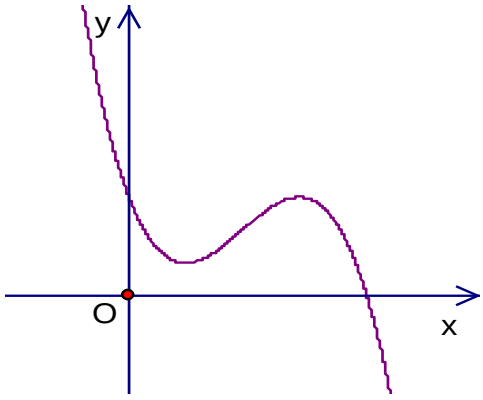
Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(-2;0)$ nên ta có:

$\frac{-2a+2}{-2c+b}=0\Rightarrow a=1$. Vậy loại D

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1\Rightarrow\frac{a}{c}=1\Rightarrow c=a=1$. Vậy loại C

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2\Rightarrow-\frac{b}{c}=2\Rightarrow b=-2c=-2$.

Câu 43.6. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ c>0,\ d>0$. **B.** $a<0,\ c>0,\ d>0$.

C. $a<0,\ c<0,\ d<0$. **D.** $a<0,\ c<0,\ d>0$.

Lời giải:

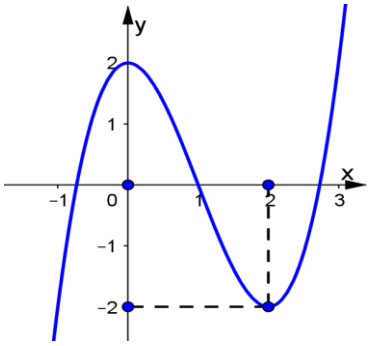
Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị: đồ thị hàm bậc ba có hệ số $a<0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung nên $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$.

Câu 43.7. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = -4$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 6$.

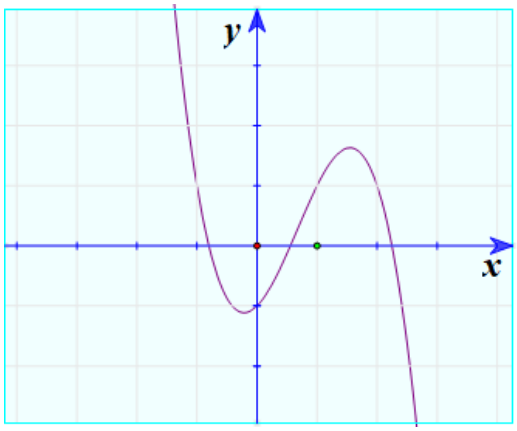
Lời giải:

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ liên tục trên $\mathbb{R}$; đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;-2)$ và $(0;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ d = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow S = 0.$$

Câu 43.8. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải:

Chọn A

$y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Từ đồ thị ta có: hàm số có hai điểm cực trị $\begin{cases} x_1<0<x_2 \\ |x_1|<x_2 \end{cases}$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

Suy ra $\begin{cases} a<0 \\ d<0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ d<0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$.

Câu 43.9. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a>0$ và $b\leq 0$. **B.** $a<0$ và $b\geq 0$. **C.** $a>0$ và $b\geq 0$. **D.** $a<0$ và $b\leq 0$.

Lời giải:

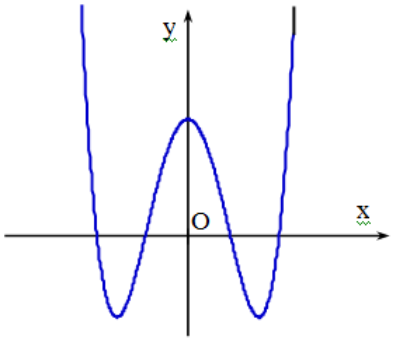
Chọn C

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow a>0$.

Hàm số có một cực trị $\Rightarrow a.b\geq 0 \Rightarrow b\geq 0$. Vậy KĐ "$a>0$ và $b\geq 0$" là đúng.

Câu 43.10. Cho hàm số $y=ax^4-bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0,b>0,c>0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$. **C.** $a>0,b>0,c<0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Lời giải:

Chọn A

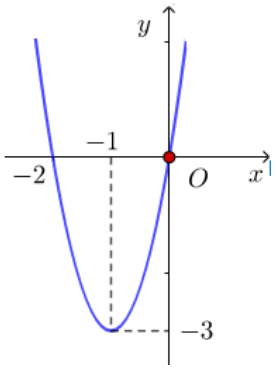
Ta có $y'=4ax^3-2bx=0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $a>0$ và $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên.

$$y'=0\Leftrightarrow 2x\left(2ax^2-b\right)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{\dfrac{b}{2a}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{b}{2a}} \end{array}\right.$$ với $a>0,\ b>0$ loại B và C.

Thay $x=0\Rightarrow y=c>0$ loại D.

Câu 43.11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đạo hàm là hàm số $y=f'\left(x\right)$ với đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



A. 4. **B.** 1. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Nhìn đồ thị ta thấy $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Do đó, hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=0$ và $x=-2$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm nên suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm có hoành độ âm $\Rightarrow f\left(-2\right)=0$. (1)

Mặt khác $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ đi qua các điểm có tọa độ $\left(0;0\right)$, $\left(-2;0\right)$, $\left(-1;-3\right)$. (2)

Từ (1), (2) lập được hệ phương trình $\begin{cases} c=0 \\ 12a-4b+c=0 \\ 3a-2b+c=-3 \\ -8a+4b-2c+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=-4 \end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+3x^2-4$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=f\left(0\right)=-4$.

Câu 43.12. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ và đi qua điểm $A\left(2;-3\right)$. Lúc đó hàm số $y=\dfrac{ax+1}{cx+d}$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y=\frac{-3}{5}.\frac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y=\frac{2x-1}{1-x}$. **C.** $y=\frac{-2x-1}{-x+1}$. **D.** $y=\frac{2x-1}{x-1}$.

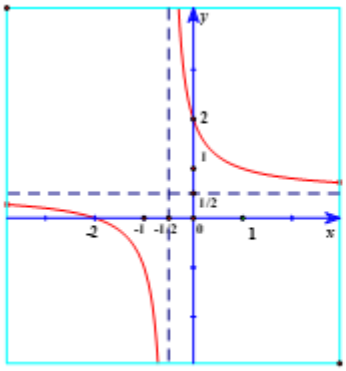
Lời giải:

Chọn B

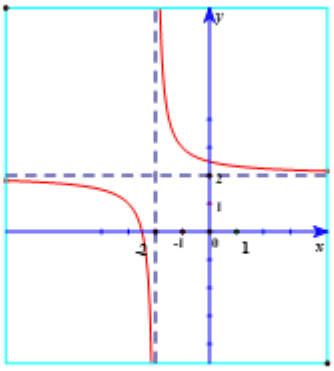
Đồ thị hàm số $y=\frac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$

Theo đề bài ta có $\begin{cases}\frac{a}{c}=2\\ -\frac{d}{c}=2\\ \frac{a.2-1}{c.2+d}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2c\\ -d=2c\\ 2a-1=-6c-3d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2c=0\\ 2c+d=0\\ 2a+6c+3d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ c=-1\\ d=1\end{cases}$

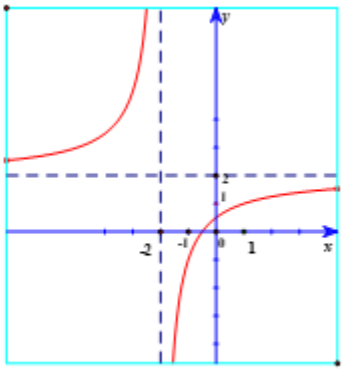
Câu 43.13. Cho hàm số $y=\frac{mx+1}{x+m}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho? Hãy chọn đáp án **sai**?



Hình (I)



Hình (II)



Hình (III)

A. Hình (I) và (III). **B.** Hình (III). **C.** Hình (I). **D.** Hình (II).

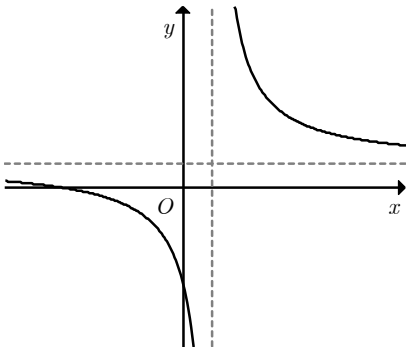
Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\frac{mx+1}{x+m}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\frac{m^2-1}{(x+m)^2}$, $y'<0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m<1$; $y'>0\Leftrightarrow m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.$. Hình (I) có $m=-\frac{1}{2}\in(-1;1)$ nên $y'<0$ suy ra hàm số nghịch biến, do đó Hình (I) đúng. Hình (II) có $m=-\frac{3}{2}<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (II) sai. Hình (III) có $m=-2<-1$ nên $y'>0$ suy ra hàm số đồng biến, do đó Hình (III) đúng.

Câu 43.14. Hàm số $y=\frac{bx-c}{x-a}$ $(a\neq 0;\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$ **B.** $a>0,\ b>0,\ c-ab>0.$

C. $a>0,\ b>0,\ c-ab=0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c-ab<0.$

Lời giải

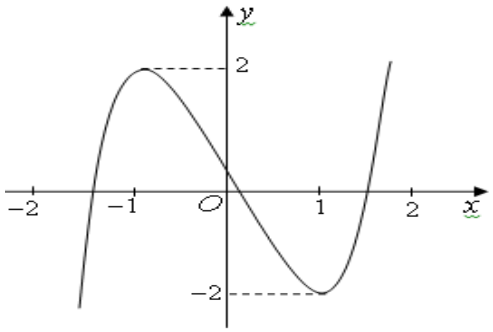
Chọn A

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a>0$; tiệm cận ngang $y=b>0.$

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên $y'=\dfrac{c-ab}{x-a^2}<0,\forall x\neq a\longrightarrow c-ab<0.$

Vậy $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$.

Câu 43.15. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

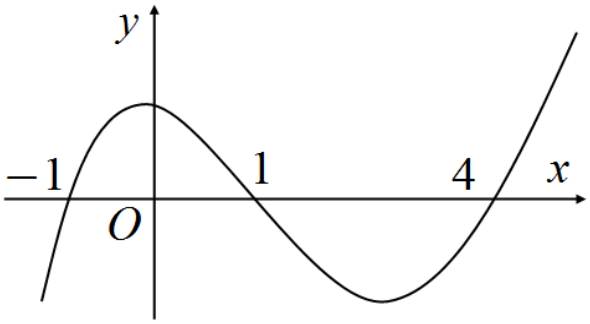
Từ đồ thị hàm số đã cho trong hình vẽ ta có phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và x_3 thuộc khoảng $(-2;2)$ hay $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\end{array}\right.$ với x_1, x_2 và x_3 thuộc khoảng $(-2;2)$.

Đặt $t=f(x)$ ta có $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\\t=t_2\\t=t_3\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}f(x)=t_1\\f(x)=t_2\\f(x)=t_3\end{array}\right.$ với t_1, t_2 và t_3 thuộc khoảng $(-2;2)$

Dựa vào đồ thị ta thấy ba đường thẳng phân biệt $y=t_1$, $y=t_2$ và $y=t_3$ mỗi đường thẳng luôn cắt đồ thị hàm số tại ba điểm.

Vậy phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có 9 nghiệm.

Câu 43.16. Cho hàm số $y=f\ x\ =mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\ x$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f\ x\ =16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m>0$ và

$f'\ x\ =4m(x+1)(x-1)(x-4)=4mx^3-16mx^2-4mx+16m.$

* Mà $f'\ x\ =4mx^3+3nx^2+2px+q$. Suy ra $\begin{cases} n=-\dfrac{16}{3}m \\ p=-2m \\ q=16m \end{cases}$.

* Phương trình $f\ x\ =16m+8n+4p+2q+r$.

$\Leftrightarrow mx^4-\frac{16}{3}mx^3-2mx^2+16mx+r=16m-\frac{128}{3}m-8m+32m+r$

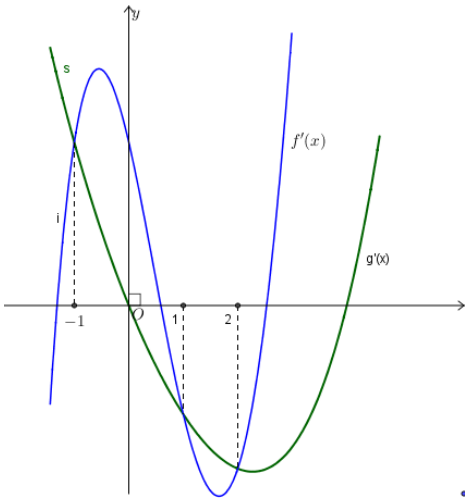
$\Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\frac{8}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3-\frac{10}{3}x^2-\frac{26}{3}x-\frac{4}{3}=0 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^3-\frac{10}{3}x^2-\frac{26}{3}x-\frac{4}{3}=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f\ x\ =16m+8n+4p+2q+r$ có 4 nghiệm.

Câu 43.17. Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(m,n,p,q,r,a,b,c,d\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải:

Chọn B

+ Từ đồ thị hàm số $y=f'(x) \Rightarrow m\neq 0$.

+ $f(0)=g(0)\Rightarrow r=d$.

+ Ta có $f'(x)-g'(x)=4mx^3+3(n-a)x^2+2(p-b)x+q-c \ (1)$.

Mặt khác từ đồ thị hai hàm số $y=f'(x)$ và $g'(x)$ ta có $f'(x)-g'(x)=4m(x+1)(x-1)(x-2)$

hay $f'(x)-g'(x)=4mx^3-8mx^2-4mx+8m \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases}3(n-a)=-8m\\2(p-b)=-4m\\q-c=8m\end{cases}$.

+ Phương trình $f(x)=g(x)\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx+r=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=ax^3+bx^2+cx$

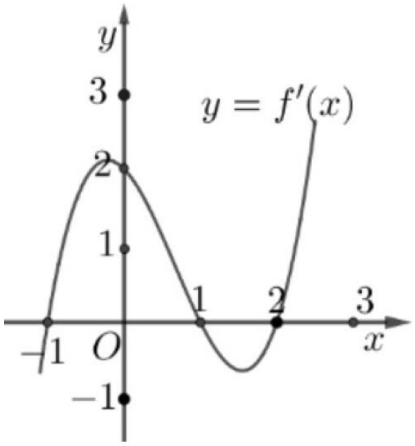
$\Leftrightarrow x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+q-c\right]=0 \Leftrightarrow x\left(mx^3-\frac{8m}{3}x^2-2mx+8m\right)=0$

$\Leftrightarrow mx\left(x^3-\frac{8}{3}x^2-2x+8\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-\frac{8}{3}x^2-2x+8=0\end{array}\right.$.

Phương trình $x^3-\frac{8}{3}x^2-2x+8=0$ có đúng một nghiệm thực khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 43.18. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ là một đa thức bậc ba có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ lần lượt -1;1;2. Vì vậy $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=4a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Mặt khác $f'(0)=2\Rightarrow 4a(0+1)(0-1)(0-2)=2\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

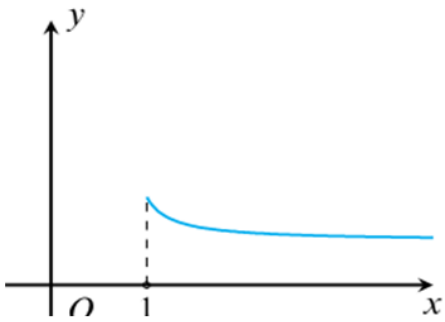
Vậy ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=(x+1)(x-1)(x-2),\forall x$

$\Leftrightarrow 4ax^3+3bx^2+2cx+d=x^3-2x^2-x+2,\forall x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a=1\\3b=-2\\2c=-1\\d=2\end{cases}\Leftrightarrow (a;b;c;d)=\left(\frac{1}{4};-\frac{2}{3};-\frac{1}{2};2\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+e$$

Khi đó $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{155}{192}=0\Rightarrow 4$ nghiệm. Chọn đáp án **A.**

Câu 43.19. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ để hàm số $y=\frac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây?



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

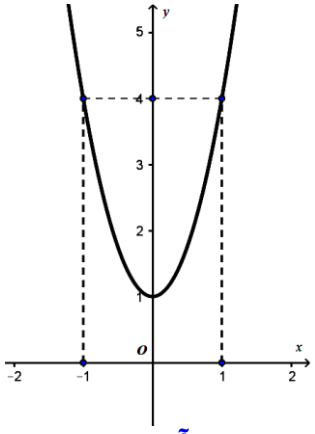
Chọn D

Hàm số không xác định tại điểm $x=\frac{b}{4}$. Theo đồ thị ta có tiệm cận đứng nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{b}{4}<1\Leftrightarrow b<4$. Do b nguyên dương nên $b\in\{1,2,3\}$.

Ta có $y'=\dfrac{4a-2b}{(4x-b)^2}$. Hàm số nghịch biến nên $4a-2b<0\Leftrightarrow b>2a$. Do a là số nguyên dương và $b\in\{1,2,3\}$ nên ta có một cặp (a,b) thỏa mãn là $(1,3)$

Câu 43.20. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=64$. **B.** $H=51$. **C.** $H=58$. **D.** $H=45$.



Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ do đó $y=f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'(x)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases}c'=1\\a'-b'+c'=4\\a'+b'+c'=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=3\\b'=0\\c'=1\end{cases}\Rightarrow y=f'(x)=3x^2+1$.

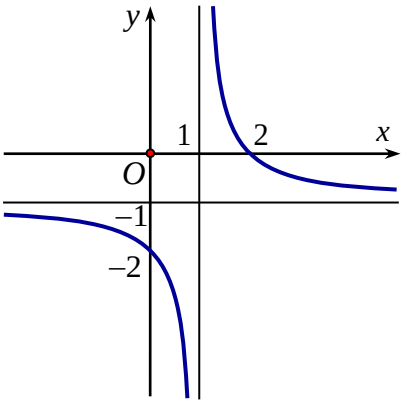
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int\limits_2^4(3x^2+1)\mathrm{d}x=58$.

Lại có: $S=\int\limits_2^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^4=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

Câu 43. 21. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

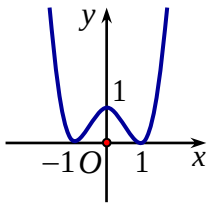
A. $b<0<a$. **B.** $0<b<a$. **C.** $b<a<0$. **D.** $0<a<b$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị ta thấy : Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=a$ và tiệm cận đứng $x=1$.Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{b}{a}>1$. Ta có : $\begin{cases}\dfrac{a}{-1}=1\\ \dfrac{b}{a}>1\end{cases}\Leftrightarrow b<a=-1<0$.

Câu 43.22. Giả sử hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a>0,\ b<0,\ c=1$. **B.** $a>0,\ b>0,\ c=1$.

C. $a<0,\ b>0,\ c=1$. **D.** $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Đồ thị hướng lên nên $a>0$, loại đáp án **C.**

+Với $x=0\ \Rightarrow y=c=1$nên loại đáp án **D.**

+Có 3 cực trị nên $ab<0$ suy ra $b<0$.

Câu 43.23. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\ a>0;b^2-3ac\ge 0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\ a<0;b^2-3ac<0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\ a>0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\ a<0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

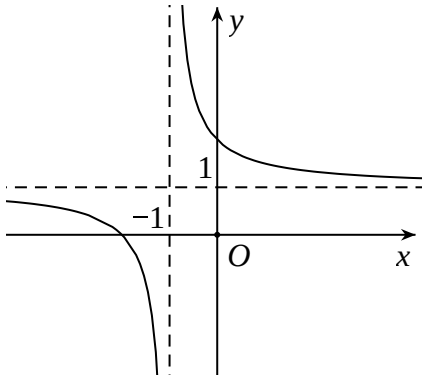
Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y'=3ax^2+2bx+c\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $a=b=0,c>0$

Trường hợp 1: $a\ne 0$, giải $\Delta'=b^2-3ac$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Câu 43. 24. **Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.**

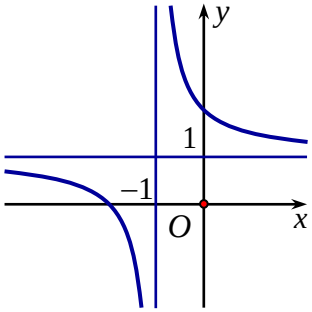


Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $b < 0 < a$. **B.** $0 < a < b$. **C.** $a < b < 0$. **D.** $0 < b < a$.

Lời giải

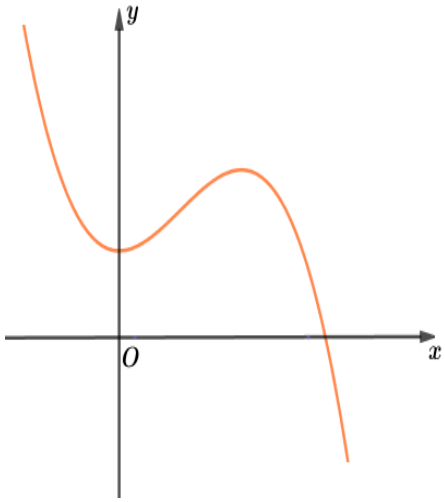
Chọn B



$y' = \dfrac{a-b}{(x+1)^2}$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định và có đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Suy ra: $\begin{cases} y' < 0 \\ \lim\limits_{x \to \pm y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b < 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b > 1 \end{cases}$. Vậy $0 < a < b$.

Câu 43.25. cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a<0,\ b>0,\ c=0,\ d>0.$ **B.** $a<0,\ b<0,\ c=0,\ d>0.$

C. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0..$ **D.** $a<0,\ b>0,\ c>0,\ d>0..$

Lời giải

Chọn A

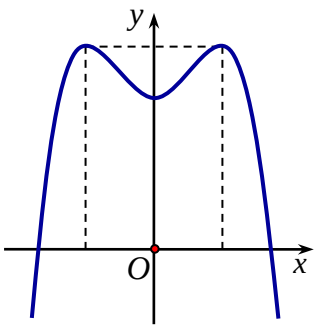
$y=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Cho $x=0$, ta có $f(0)=d>0.$ Từ hình dáng đồ thị ta thấy $a<0$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu, suy ra $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt, từ đồ thị có hoành độ hai điểm cực trị không âm do đó $\begin{cases} a<0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c=0 \end{cases}$

Câu 43.26. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



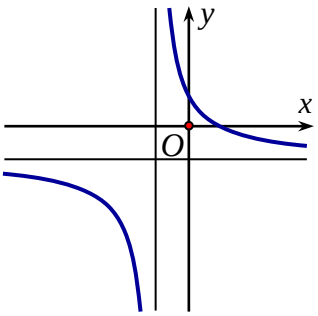
A. $a<0;\ b>0;\ c>0.$ **B.** $a<0;\ b>0;\ c<0.$ **C.** $a>0;\ b<0;\ c<0.$ **D.** $a<0;\ b<0;\ c<0.$

Lời giải:

Chọn A

Đồ thị hàm số có dạng đồ thị của hàm số bậc bốn hệ số a âm, giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên điểm O nên hệ số c dương. Đồ thị hàm số có ba cực trị nên hệ số b trái dấu với hệ số a, hay hệ số b dương.

Câu 43.27. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ (a , c , d : hằng số thực) như hình vẽ.



Khẳng định nào đúng

A. $d>0,a>0,c<0$. **B.** $d>0,a<0,c>0$. **C.** $d<0,a>0,c<0$. **D.** $d<0,a<0,c>0$.

Lời giải

Chọn C

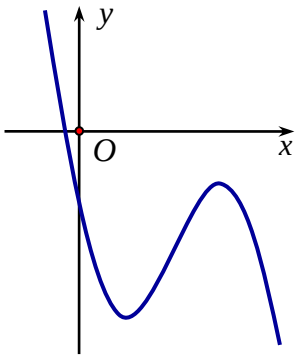
Ta có $x=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{d}>0\Rightarrow d<0$.

$y=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}>0\Rightarrow a>0$.

Hàm số $y=\dfrac{ax-1}{cx+d}$ có tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}<0\Rightarrow c<0$.

Vậy $d<0,a>0,c<0$.

Câu 43.28. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (a , b , c , d là các hằng số thực và $a\neq 0$) như hình vẽ.



Khẳng định nào đúng

A. $b>0,c>0$. **B.** $b>0,c<0$. **C.** $b<0,c>0$. **D.** $b<0,c<0$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$ nên $a>0$.

Nhận thấy $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm dương phân biệt nên

$$\begin{cases} P=\dfrac{c}{3a}>0 \\ S=-\dfrac{2b}{3a}>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c<0 \\ b>0 \end{cases}.$$

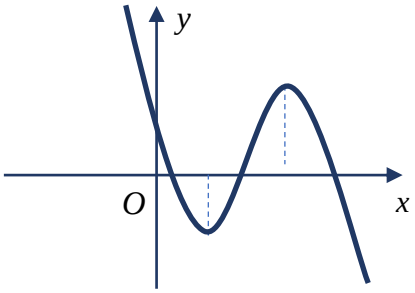
Câu 43.29. Giả sử tồn tại hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	1	↘		↗	$+\infty$	↗	2	↘	$+\infty$	↘		↗	3
			-3		$-\infty$				$-\infty$		1		

Câu 43.30. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a>0;b<0;c<0;d>0;b^2>3ac.$ **B.** $a<0;b<0;c>0;d>0;b^2>3ac.$

C. $a<0;b>0;c<0;d>0;b^2>3ac.$ **D.** $a<0;b>0;c>0;d>0;b^2>3ac.$



Lời giải

Chọn C

$y'=3ax^2+2bx+c$.

$\Delta'=b^2-3ac$.

$S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ nên $a<0.(1)$

Nhìn vào ĐTHS khi $x=0$ thì $y=d>0.(4)$

Phương trình có hai cực trị dương nghiệm nên $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2-3ac>0(5)\\ -\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow b>0(2).\\ \dfrac{c}{a}>0\Rightarrow c<0(3)\end{cases}$

Câu 43.31. Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{bx+1}$ có đồ thị (C). Nếu (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\dfrac{1}{3}$ thì các giá trị của a và b lần lượt là

A. $-\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{1}{6}$. **B.** -3 và -6. **C.** $-\dfrac{1}{6}$ và $-\dfrac{1}{2}$. **D.** -6 và -3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{b} \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình $x = -\dfrac{1}{b}$, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình $y = \dfrac{a}{b}$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $\begin{cases} -\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{a}{b} = 2 \\ a.\left(-\dfrac{1}{b}\right) + b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -6 \end{cases}$.

Câu 43.32. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc -3. Khi đó giá trị a, b thỏa mãn điều kiện sau:

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \dfrac{-a-b}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$ nên: $1 = \dfrac{b}{-1} \Rightarrow b = -1$.

Vì tiếp tuyến tại A có hệ số góc bằng -3 nên: $y'(0) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-a-b}{(-1)^2} = -3 \Rightarrow a = 4$.

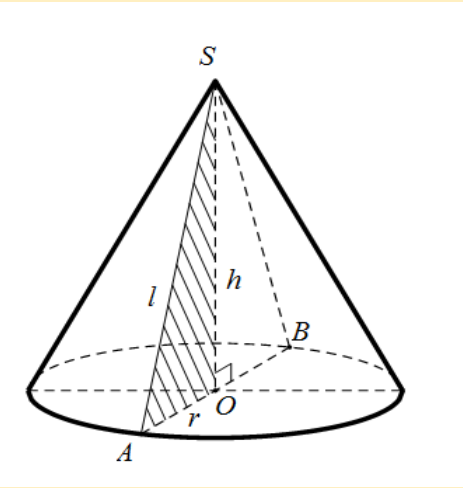
Vậy $a+b=3$.

DẠNG TOÁN 44: KHỐI NÓN -TRỤ- CẦU

PHẦN I:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Khối nón :



◆ **Các yếu tố cơ bản của hình nón:**

+ Chiều cao: h.

+ Bán kính đường tròn đáy: r.

+ Độ dài đường sinh: l.

+ Góc ở đỉnh: 2α $\left(0° < \alpha < 90°\right)$.

◆ **Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón:** $\boxed{l^2 = h^2 + r^2}$

◆ **Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác:** Cho ΔAIB vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

+ Đường thẳng AI gọi là trục, A là đỉnh, AI gọi là đường cao và AB gọi là đường sinh của hình nón.

+ Hình tròn tâm I, bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

◆ **Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón:**

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì ta có:

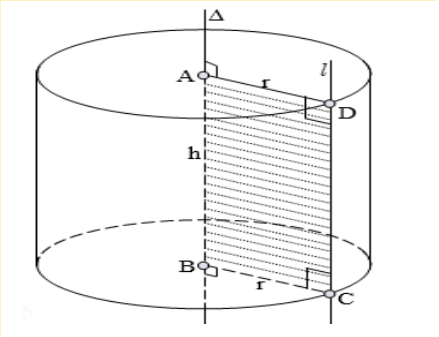
+ Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = \pi.r.l}$

+ Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{S_{đ} = \pi.r^2}$

+ Diện tích toàn phần hình nón: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{đ}}$.

+ Thể tích khối nón: $\boxed{V_{non} = \frac{1}{3}S_{đ}.h = \frac{1}{3}\pi.r^2.h}$.

2. Khối trụ :



◆ **Các yếu tố cơ bản của hình trụ:**

+ Chiều cao: h.

+ Bán kính đường tròn đáy: r.

+ Độ dài đường sinh: $l = h$.

◆ **Công thức diện tích của hình trụ và thể tích của khối trụ:**

-Diện tích đáy khối trụ : $S_{đ} = \pi r^2$.

- Diện tích xung quanh khối trụ : $S_{xq} = 2\pi rh$.

- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

- Chu vi một đáy của hình trụ: $C = 2\pi r$.

-Thể tích khối trụ : $V = \pi r^2 h$

3. Khối cầu:

- Diện tích khối cầu bán kính R: $S_{đ} = 4\pi R^2$.

-Thể tích khối cầu bán kính R: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Lý thuyết mặt nón, mặt trụ, mặt cầu.
- Bài tập tổng hợp về nón- trụ- cầu.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng:

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là bài toán ở dạng vận dụng Tính thể tích khối trụ từ các điều kiện cho trước.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Cách xác định một mặt phẳng song song với 1 đường thẳng cho trước.

Cách xác định khoảng cách từ 1 đường thẳng đến 1 mặt phẳng song song với nó.

Công thức tính thể tích khối trụ: $V=\pi r^2 h$, với h là đường cao và r là bán kính đường tròn đáy.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định mặt phẳng thiết diện song song với trục của hình trụ.

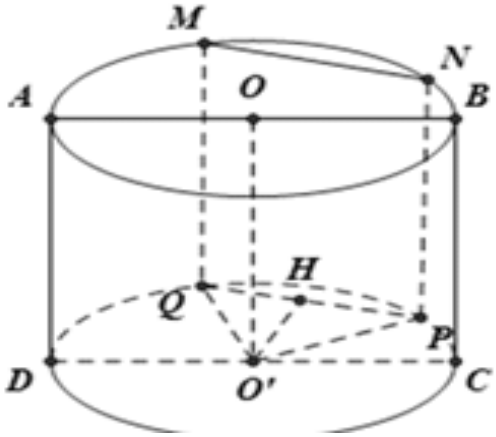
B2: Xác định khoảng cách từ trục của hình trụ đến thiết diện. Từ đó tìm được bán kính của đường tròn đáy.

B3: Tính thể tích của khối trụ cần tìm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



Lấy 2 điểm M, N lần lượt nằm trên đường tròn tâm O sao cho $MN=6a$.

Từ M, N lầm lượt kẻ các đường thẳng song song với trục OO', cắt đường tròn tâm O' tại Q, P.

Thiết diện ta thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$.

Gọi H là trung điểm của PQ.

Vì $OO'//(MNPQ)$ nên ta có $d(OO',(MNPQ))=d(O',(MNPQ))=O'H$.

Từ giả thiết, ta có $O'H=3a$. Do đó $\Delta O'HP$ là tam giác vuông cân tại H.

Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $O'P=\sqrt{O'H^2+HP^2}=3a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là: $V=6a.\pi.\left(3a\sqrt{2}\right)^2=108\pi a^3$.

Bài tập tương tự và phát triển:

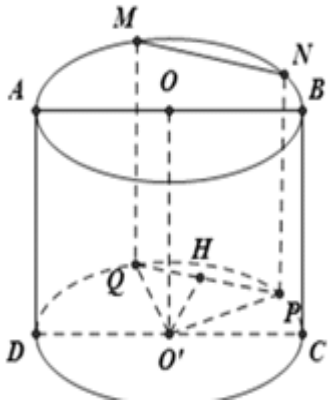
Mức độ 3

Câu 1. Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $6a\sqrt{2}$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $108\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $150\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết, bán kính hình trụ là: $R = 3a\sqrt{2}$

Giả sử thiết diện là hình vuông $MNPQ$, ta có, $O'H = 3a$; $O'Q = 3a\sqrt{2}$.

Suy ra $QH = \sqrt{O'Q^2 - O'H^2} = 3a \Rightarrow PQ = 6a$.

Thiết diện ta thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$. Suy ra chiều cao hình trụ là $h = 6a$

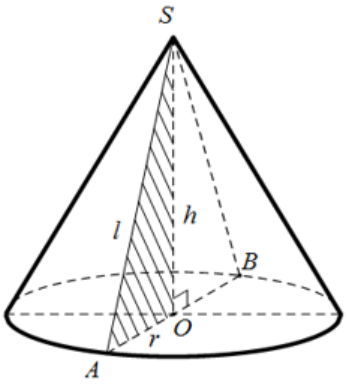
Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là: $V = 6a.\pi.\left(3a\sqrt{2}\right)^2 = 108\pi a^3$.

Câu 2. Cho hình nón có độ dài đường sinh là $l = 6a$. Biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng qua trục thiết diện thu được là một hình tam giác đều. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\sqrt{3}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{9\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi ΔSAB là thiết diện khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng qua trục

Tam giác ΔSAB đều, suy ra $AB = SA = 6a \Rightarrow r = OA = 3a$ và $SO = 3a\sqrt{3} = h$.

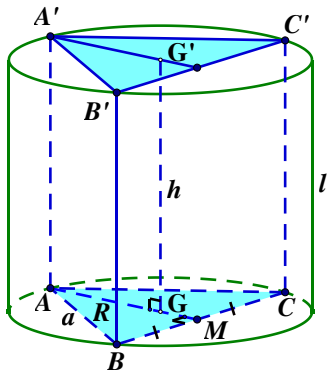
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(3a\right)^2 3a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{\pi a^2 h}{9}$. **B.** $\frac{\pi a^2 h}{6}$. **C.** $\frac{\pi a^2 h}{3}$. **D.** $3\pi a^2 h$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm ΔABC còn M là trung điểm của BC.

ΔABC đều cạnh bằng a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $R = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

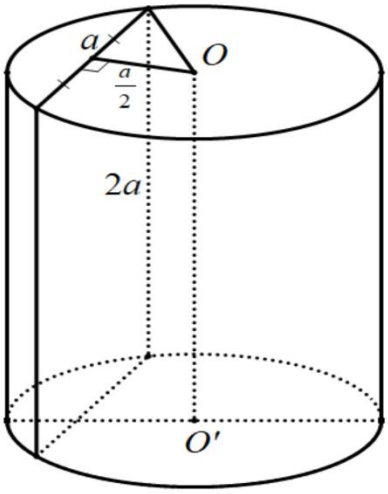
Vậy thể tích V của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ là $V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 h = \frac{\pi a^2 h}{3}$.

Câu 4. Cho hình trụ có trục OO', thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng $\frac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P).

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2. **C.** $2a^2\sqrt{3}$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) song song với trục nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một kích thước là $2a$. Kích thước còn lại là $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$, trong đó $r=a$ bán kính đáy và $d=\frac{a}{2}$ là khoảng cách từ trục đến mặt phẳng (P).

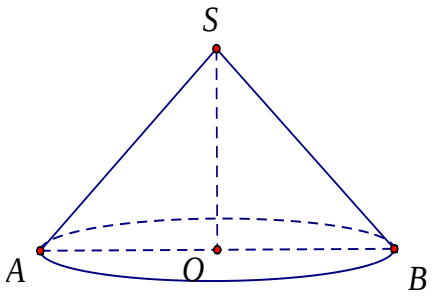
Diện tích thiết diện là $S=2a.a\sqrt{3}=2a^2\sqrt{3}$.

Câu 5. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có diện tích bằng 8. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$. **B.** $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn B



Ta có thiết diện là tam giác SAB vuông cân tại S

Diện tích $S_{\Delta SAB}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}.SA.SB=8\Leftrightarrow SA^2=16\Leftrightarrow SA=4$

Tam giác SAB vuông cân tại S suy ra $AB=4\sqrt{2}$

Đường cao và bán kính của hình nón là $h=SO=r=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối nón là: $V=\frac{1}{3}.\pi.r^2.h=\frac{1}{3}.\pi.\left(2\sqrt{2}\right)^3=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 6. Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$ (a là độ dài có sẵn). Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Nếu hình trụ được tạo thành có chu vi đáy bằng $2a$ thì thể tích của nó bằng

A. $\frac{a^3}{\pi}$. **B.** πa^3. **C.** $\frac{a^3}{2\pi}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy là R. Hình trụ có chu vi đáy bằng $2a$ nên ta có $2\pi R=2a\Leftrightarrow R=\frac{a}{\pi}$.

Suy ra hình trụ này có đường cao $h=a$.

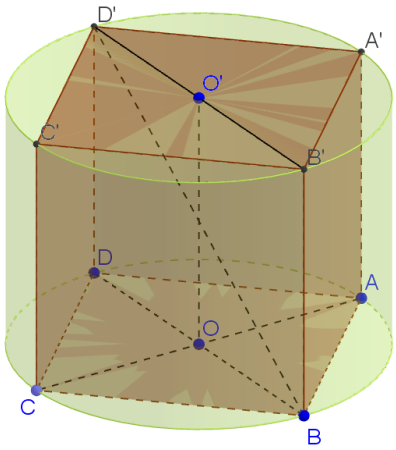
Vậy thể tích khối trụ $V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^2a=\frac{a^3}{\pi}$ (đvtt).

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $BD'=x\sqrt{3}$. Tính thể tích khối trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

A. $\frac{3\pi x^3}{2}$. **B.** $\frac{\pi x^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi x^3}{2}$. **D.** $\frac{2\pi x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $BD' = AB\sqrt{3} = x\sqrt{3} \Rightarrow AB = x$. Suy ra hình trụ có chiều cao $h = x$.

Do hình trụ có hai đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ nên có bán kính $R = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

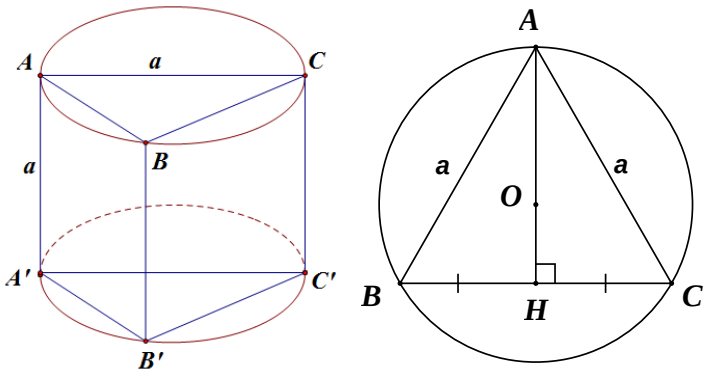
Vậy thể tích khối trụ cần tìm là: $V = \pi R^2.h = \pi.\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2.x = \frac{\pi x^3}{2}$.

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ. Thể tích của khối trụ tròn xoay bằng

A. $\frac{\pi a^3}{9}$. **B.** πa^3. **C.** $3\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm tam giác đều ABC.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó $R = OA = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Chiều cao của hình trụ $h = a$.

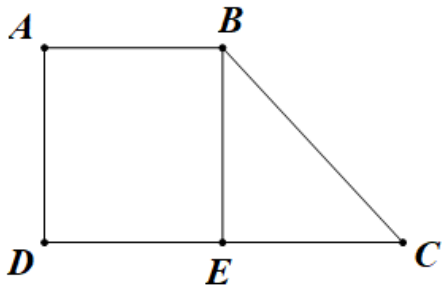
Thể tích của khối trụ tròn xoay đó là: $V_{tru} = \pi.R^2.h = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 9. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD=a$, đáy nhỏ $AB=a$, đáy lớn $CD=2a$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang vuông đó quanh cạnh CD là

A. $V=\frac{2}{3}\pi a^3$. **B.** $V=\frac{1}{3}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $V=2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Khối tròn xoay tạo thành bao gồm

Khối trụ có chiều cao $AB=a$, bán kính đáy $AD=a$ nên $V_{tru}=\pi.(a)^2.a=\pi a^3$.

Khối nón có chiều cao $EC=a$, bán kính đáy $BE=a$ nên $V_{non}=\frac{1}{3}\pi(a)^2 a=\frac{\pi a^3}{3}$.

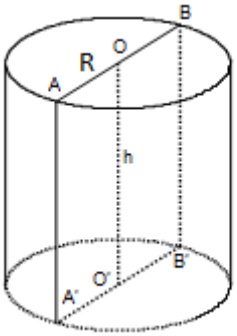
Vậy thể tích khối tròn xoay $V=\pi a^3+\frac{\pi a^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 10. Cho khối trụ có đường kính đáy là a, mặt phẳng qua trục của khối trụ cắt khối trụ theo một thiết diện có diện tích là $3a^2$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $\frac{3\pi a^3}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **C.** $\frac{9\pi a^3}{4}$. **D.** $\frac{3\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi R là bán kính đáy của hình trụ $\Rightarrow R=\frac{a}{2}$.

Giả sử mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$

Có: $AB=2R=a$, $AA'=h$ là chiều cao của hình trụ.

$S_{ABB'A'}=AB.AA'\Leftrightarrow 3a^2=a.h\Leftrightarrow h=3a$

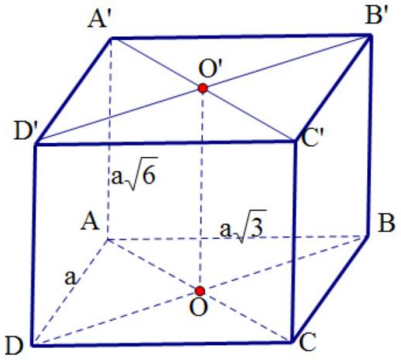
$V_{tru}=\pi.R^2.h=\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.3a=\frac{3\pi a^3}{4}$.

Câu 11. Thể tích khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a\sqrt{3}$, $AD=a$, $AA'=a\sqrt{6}$ là *(Khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật là khối trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai đáy của khối hộp chữ nhật)*

A. $V=\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD;\ O'=A'C'\cap B'D'$.

Khối trụ ngoại tiếp khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có: bán kính đáy $R=OA=\dfrac{1}{2}AC=a$ và chiều cao $h=OO'=AA'=a\sqrt{6}$.

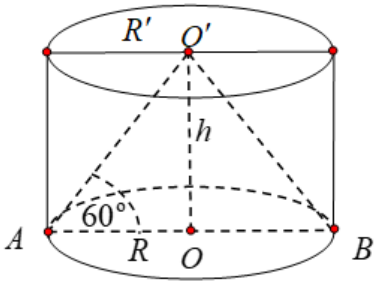
Thể tích khối trụ: $V=\pi R^2h=\pi a^3\sqrt{6}$.

Câu 12. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=h$. Biết AB là một đường kính của đường tròn $(O;R)$ và tam giác $O'AB$ đều. Thể tích của khối trụ tạo bởi hình trụ trên bằng

A. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\pi R^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\pi R^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có tam giác $\Delta O'AB$ đều có cạnh bằng $2R$ suy ra $h=OO'=R\sqrt{3}$.

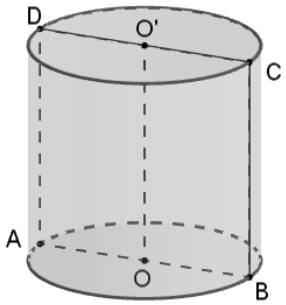
Thể tích của khối trụ $V=\pi R^2h=\pi R^2.R\sqrt{3}=\pi R^3\sqrt{3}$.

Câu 13. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn B



Gọi $ABCD$ là thiết diện qua trục của hình trụ, ta có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Từ giả thiết suy ra $AB=2a$ và $2\ AB+BC\ =10a\Rightarrow BC=3a$.

Suy ra hình trụ có chiều cao $h=3a.$

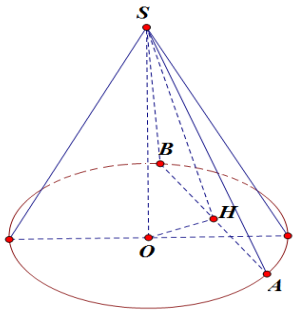
Vậy thể tích khối trụ đã cho bằng $V=\pi R^2.h=\pi.a^2.3a=3\pi a^3$.

Câu 14. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, độ dài đường sinh bằng $2a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB có diện tích lớn nhất. Biết khoảng cách từ O đến đường thẳng AB bằng a. Thể tích của khối nón tạo bởi hình nón trên bằng

A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn D



Ta có độ dài đường sinh $l=2a;OH=a$

Tam giác SAB cân tại S.

Khi đó diện tích tam giác $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SA.SB.\sin ASB=\frac{1}{2}l^2.\sin ASB\le\frac{l^2}{2}$.

Nên diện tích tam giác SAB lớn nhất khi $\sin ASB=1$ hay tam giác SAB vuông cân tại $S\Rightarrow AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=\sqrt{2l^2}=2\sqrt{2}a$.

Bán kính đáy $r=\sqrt{OH^2+HA^2}\ =\sqrt{OH^2+\frac{AB^2}{4}}\ =\sqrt{a^2+2a^2}=\sqrt{3a^2}\ \Rightarrow r=a\sqrt{3}$,

Chiều cao của hình nón $h=SO=\sqrt{SA^2-r^2}=a$.

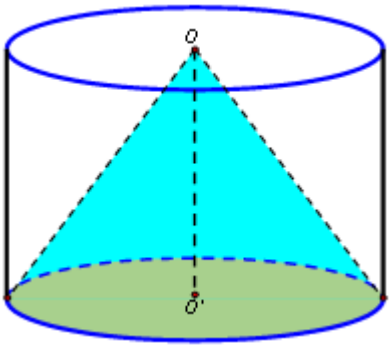
Thể tích khối nón. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=a^3\pi$.

Câu 15. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $O;r$ và $O';r$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO'=r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O và có đáy là hình tròn $O';r$. Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=2$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Hình trụ có bán kính đáy r, chiều cao $h=r\sqrt{3}$.

Hình nón có bán kính đáy r, chiều cao $h=r\sqrt{3}$, độ dài đường sinh $l=2r$.

$S_1=2\pi rh=2\pi r.r\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi r^2$.

$S_2=\pi rl=\pi r.2r=2\pi r^2$.

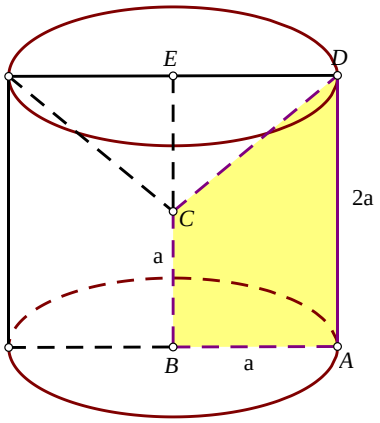
Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\sqrt{3}\pi r^2}{2\pi r^2}=\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $AB=BC=\frac{AD}{2}=a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh BC. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V=\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\pi a^3$. **D.** $V=\frac{7\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình chữ nhật $ABED$ với E nằm trên tia BC.

Thể tích khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $ABED$ khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là $V_1=AD.\pi.AB^2=2a.\pi.a^2=2\pi a^3$.

Thể tích khối nón sinh bởi tam giác EDC khi xoay quanh đường thẳng chứa cạnh BC là $V_2=\frac{1}{3}CE.\pi.ED^2=\frac{1}{3}.a.\pi.a^2=\frac{\pi a^3}{3}$.

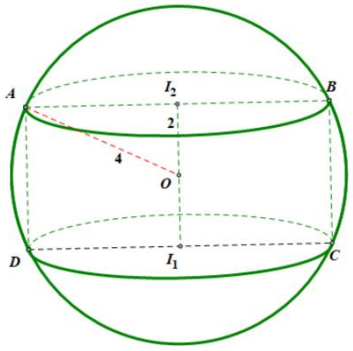
Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = \dfrac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 17. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{16}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{16}$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B



Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu (S) nên tâm mặt cầu (S) là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm hai đáy của hình trụ. Khi đó:

Bán kính đáy của khối trụ (H): $r = \sqrt{4^2 - \left(\dfrac{4}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$.

Thể tích của khối trụ (H) là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.12.4 = 48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.4^3 = \dfrac{256\pi}{3}$.

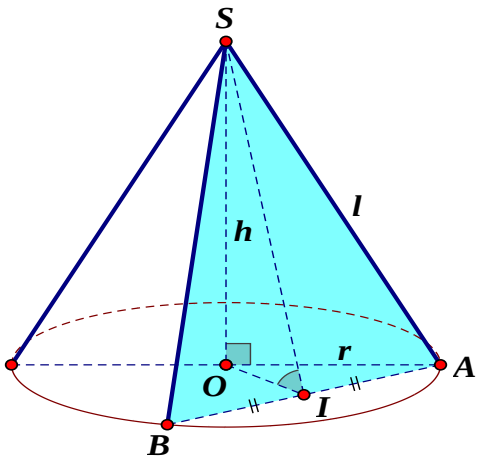
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{16}$.

Câu 18. Cho khối nón (N) đỉnh S,có chiều cao là $a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh là $3a$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S, cắt và tạo với mặt đáy của khối nón một góc $60°$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối nón (N).

A. $2a^2\sqrt{3}$. **B.** $a^2\sqrt{5}$. **C.** $2a^2\sqrt{5}$. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Khối nón (N) có tâm đáy là điểm O, chiều cao $SO = h = a\sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 3a$.

Giả sử mặt phẳng (P) cắt (N) theo thiết diện là tam giác SAB.

Do $SA = SB = l \Rightarrow$ tam giác SAB cân tại đỉnh S.

Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có $OI \perp AB$, $SI \perp AB$ và khi đó góc giữa mặt phẳng (P) và mặt đáy của (N) là góc $SIO = 60°$.

Trong tam giác SOI vuông tại O góc $SIO = 60°$.

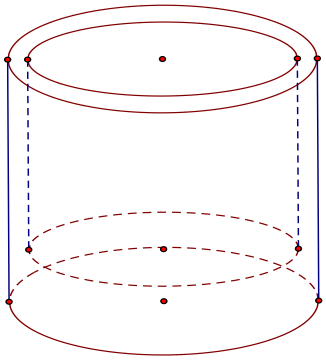
Ta có $SI = \dfrac{SO}{\sin SIO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin 60°} = 2a$.

Trong tam giác SIA vuông tại I.

Ta có $IA^2 = SA^2 - SI^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow IA = a\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2IA = 2a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là $S_{td} = S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2} SI.AB = \dfrac{1}{2}.2a.2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$.

Câu 19. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5\ cm$, thành xung quanh cốc dày $0,2\ cm$ và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi\ cm^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh (lấy gần đúng)?



A. $201\left(cm^3\right)$. **B.** $269\left(cm^3\right)$. **C.** $217\left(cm^3\right)$. **D.** $238\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $h, R\,(cm)$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ bên trong (phần hình trụ dùng để đựng được).

Ta suy ra $h+1,5\,(cm)$ và $R+0,2\,(cm)$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ bên ngoài (phần hình trụ của chiếc cốc).

Ta có thể tích thật (thể tích cái cốc có thể đựng được) được tính bởi công thức $\pi R^2 h = 480\pi$.

Suy ra $h = \dfrac{480}{R^2}$.

Do đó, thể tích phần thủy tinh cần thiết để làm chiếc cốc là

$$V = \pi(R+0,2)^2\left(\frac{480}{R^2}+1,5\right)-480\pi = \pi\left(\frac{3R^2}{2}+\frac{192}{R}+\frac{3R}{5}+\frac{96}{5R^2}+\frac{3}{50}\right).$$

Suy ra $V_R' = \pi\left(3R-\dfrac{192}{R^2}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{192}{5R^3}\right) = \dfrac{\pi(5R+1)(R-4)(3R^2+12R+48)}{5R^3}$

$V_R' = 0 \Leftrightarrow R = 4$ (nhận vì $R>0$).

Dễ thấy V_R' đổi dấu từ âm sang dương khi R đi qua 4 nên

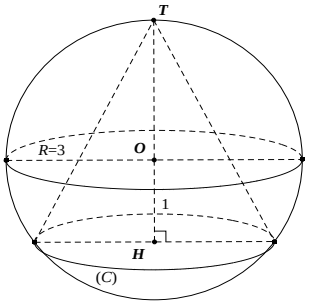
$V_{\min} = \dfrac{3783\pi}{50} \approx 238\,(cm^3)$ khi $R = 4$.

Câu 20. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V = \dfrac{32\pi}{3}$ **B.** $V = 16\pi$ **C.** $V = \dfrac{16\pi}{3}$ **D.** $V = 32\pi$

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón

Ta có: $r^2 = R^2 - OH^2 = 8$.

$HT = HO + OT = 1+3 = 4 = h$ là chiều cao của hình nón.

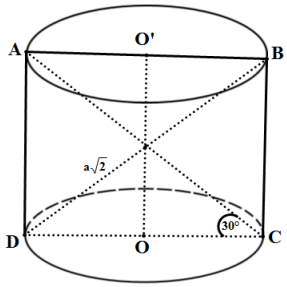
Suy ra: $V_{nón} = \dfrac{1}{3}.\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}.\pi.8.4 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 21. Cắt một khối trụ bởi mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $DCA = 30°$. Tính theo a thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.

Mặt khác xét tam giác ADC vuông tại D, ta có:

$AD = AC.\sin 30^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ và $CD = AC.\cos 30^o = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow r = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

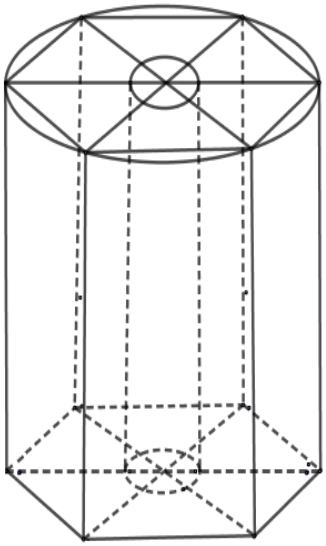
Nên $V = \pi r^2 h = \pi.\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

Câu 22. Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84,5.a$ đồng. **B.** $78,2.a$ đồng. **C.** $8,45.a$ đồng. **D.** $7,82.a$ đồng.

Lời giải

Chọn D



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra 1 mm^3 gỗ có giá $\dfrac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra 1 mm^3 than chì có giá $\dfrac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200.\pi.1^2 = 200\pi\left(mm^3\right)$.

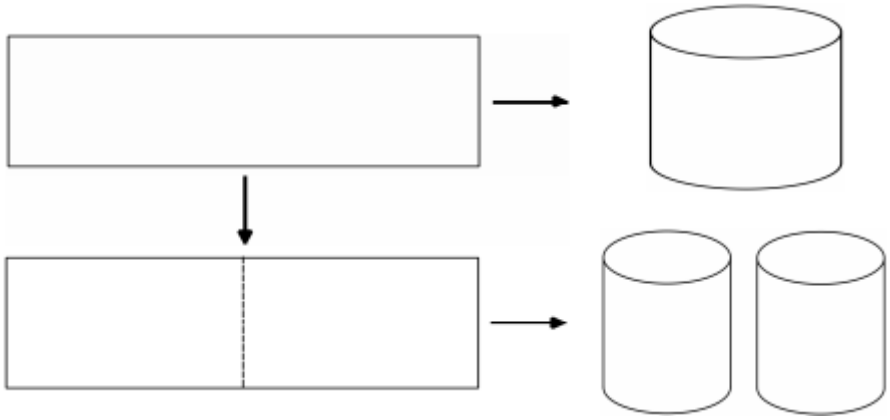
Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200.6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\left(mm^3\right)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\dfrac{6a.V_1 + a.V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 23. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm.240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải

Chọn C

Theo cách 1 thì thùng đựng nước tạo thành là hình trụ có bán kính đáy là R.

Theo cách 2 thì 2 thùng đựng nước tạo thành đều là hình trụ có bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các thùng hình trụ là bằng nhau và bằng *h*.

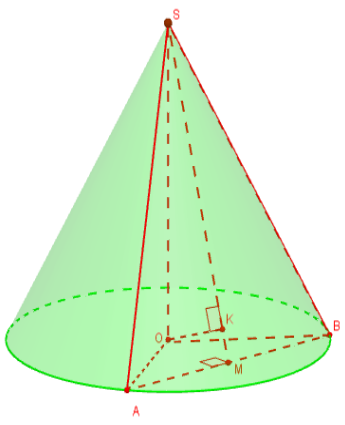
Ta có $V_1=h\pi R^2$, $V_2=2.h\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=h\pi\frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2}=2$

Câu 24. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=20cm$, bán kính đáy $r=25cm$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và cách tâm O của đáy là $12cm$. Khi đó diện tích thiết diện cắt bởi (P) với khối nón bằng

A. 500 cm^2. **B.** 475 cm^2. **C.** 450 cm^2. **D.** 550 cm^2.

Lời giải

Chọn A



Có $(P)\equiv(SAB)$. Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có $SO=20=h, OA=OB=r=25$, gọi M là hình chiếu của O lên AB suy ra M là trung điểm AB, gọi K là hình chiếu của O lên SM suy ra $d(O;(SAB))=OK=12$.

Ta tính được $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OM^2}\Rightarrow\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{12^2}-\frac{1}{20^2}\Rightarrow OM=15, SM=25$.

OAB là tam giác cân tại O, M là trung điểm của AB nên $AB=2AM=2\sqrt{OA^2-OM^2}=2\sqrt{25^2-15^2}=40$.

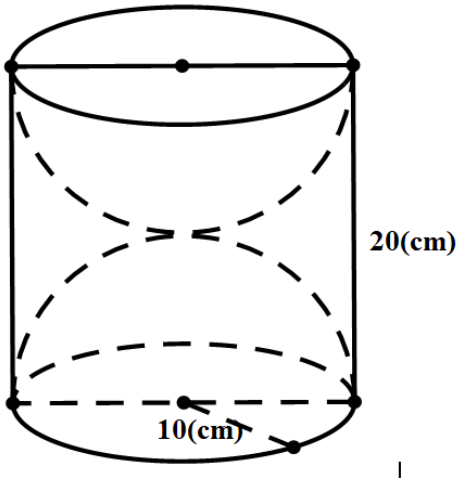
$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SM.AB=500\ (cm^2)$

Câu 25. Một khối gỗ hình trụ có bán kính đáy $r=10(\text{cm})$, chiều cao bằng $20(\text{cm})$. Người ta khoét rỗng khối gỗ bởi hai nửa hình cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu. Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích ban đầu của khối gỗ: $V=\pi r^2h=2000\pi$

Thể tích của phần gỗ bị khoét đi là: $V_1=2.\left(\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{4000}{3}\pi$

Thể tích còn lại của khối gỗ sau khi khoét là: $V_2=V-V_1=\frac{2000}{3}\pi$

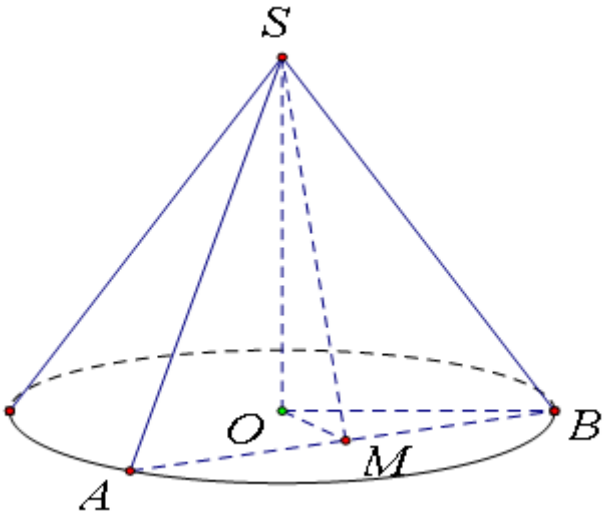
Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ: $\frac{V_2}{V}=\frac{1}{3}$.

Câu 26. Cho hình nón có chiều cao bằng 8. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $10\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{3}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn D



Giả sử thiết diện là tam giác vuông cân SAB có cạnh bên bằng l như hình vẽ

$\Rightarrow l\sqrt{2}=10\sqrt{2}\Rightarrow l=10$

Ta có: $r=OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=\sqrt{l^2-h^2}=6$

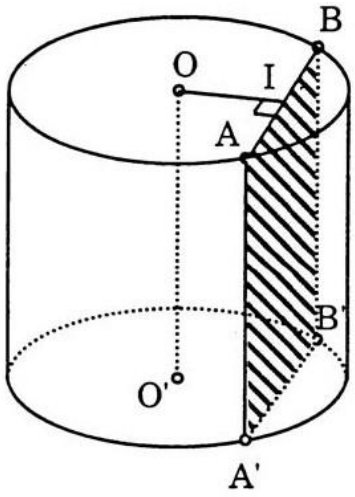
$\Rightarrow$ Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.6^2.8=96\pi$.

Câu 27. Cho một khối trụ có bán kính đáy $r=a$ và chiều cao $h=2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO', V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$. **B.** $\frac{3\pi-2}{\pi-2}$. **C.** $\frac{3\pi+3}{\pi-2}$. **D.** $\frac{3\pi-3}{\pi-2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi (H_1) là phần khối trụ chứa trục OO'; (H_2) là phần còn lại của khối trụ.

Gọi $ABB'A'$ là thiết diện do mặt phẳng (P) khối trụ

Gọi I là hình chiếu của O lên mặt phẳng $ABB'A'$.

Thể tích khối trụ: $V=\pi r^2h=\pi a^2 2a=2\pi a^3$.

Ta có: (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $OA^2 = IA^2 + IO^2 \Leftrightarrow IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra tam giác OIA vuông cân tại $I \Rightarrow IOA = 45^0 \Rightarrow AOB = 90^0$

Diện tích hình quạt AOB là $\frac{\pi a^2 .90}{360} = \frac{\pi a^2}{4}$

Diện tích tam giác AOB là $\frac{1}{2}a^2$

Suy ra diện tích hình viên phân ứng với (H_2) là: $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{\pi - 2}{4}a^2$.

Diện tích hình viên phân ứng với (H_1) là: $\pi a^2 - \frac{\pi - 2}{4}a^2 = \frac{3\pi + 2}{4}a^2$

Vì (H_1) và (H_2) có cùng chiều cao nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi + 2}{4}a^2 : \frac{\pi - 2}{4}a^2 = \frac{3\pi + 2}{\pi - 2}$.

Câu 28. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, có bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,8m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?

A. $2,8m$. **B.** $2,6m$. **C.** $2,1m$. **D.** $2,3m$.

Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,8m$ nên thể tích của từng bể nước là $\begin{cases} V_1 = \pi r_1^2 h = \pi h \\ V_2 = \pi r_2^2 h = 3,24\pi h \end{cases}$

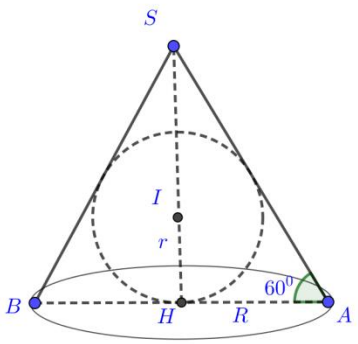
Thể tích bể nước mới là: $V = V_1 + V_2 = 4,24\pi h$.

Câu 29. Bán kính của bể nước mới là: $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{4,24\pi h}{\pi h}} = \sqrt{4,24} \approx 2,06$. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V = 3\sqrt{3}\pi$ **B.** $V = 9\sqrt{3}\pi$ **C.** $V = 3\pi$. **D.** $V = 9\pi$

Lời giải

Chọn C



Giả sử mặt phẳng qua trục cắt hình nón theo thiết diện là tam giác ΔSAB, SA; SB là đường sinh của hình nón.

Gọi h là chiều cao của hình nón. Khi đó:

Hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$ nên $SAH = 60°$

Ta có ΔSAB cân tại S có $A = 60°$ nên ΔSAB đều. Do đó tâm I của đường tròn nội tiếp ΔSAB cũng là trọng tâm của ΔSAB.

Theo bài ra $IH = 1$ suy ra $SH = 3IH = 3.$

Mặt khác $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow S_{Đáy} = \pi R^2 = 3\pi.$

Do đó $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{Đáy} = \dfrac{1}{3}3.3\pi = 3\pi.$

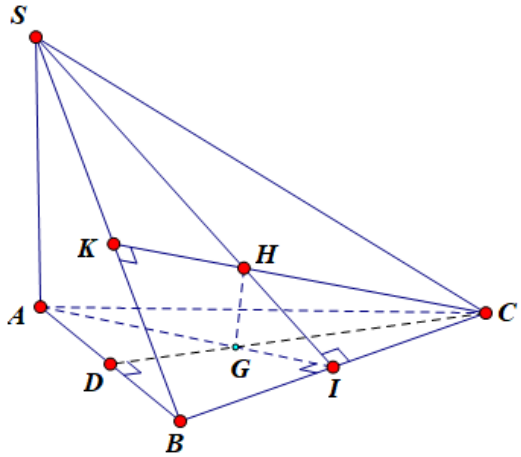
Mức độ 4

Câu 30. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi S là điểm thay đổi trên đường thẳng d, H là trực tâm tam giác SBC. Biết rằng khi điểm S thay đổi trên đường thẳng d thì điểm H nằm trên đường tròn (C). Trong số các mặt cầu chứa đường tròn (C), bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó G cũnglà trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm của BC. $D; K$ lần lượt là hình chiếu của điểm C trên AB và SB.

Dễ chứng minh $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (1).

$DC \perp (SAB) \Rightarrow DC \perp SB$

$$\left.\begin{array}{l} SB \perp KC \\ SB \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp (CDK) \Rightarrow SB \perp GH \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $GH \perp (SBC) \Rightarrow GHI = 90^o \Rightarrow H$ thuộc mặt cầu đường kính GI và thuộc mặt phẳng cố định (SAI) nên H thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu đường kính GI và mặt phẳng (SAI).

Gọi mặt cầu (S) chứa đường tròn (C) có tâm O và bán kính R.

Khi đó $R=\sqrt{\frac{GI^2}{4}+d^2\left(O;(SAI)\right)}$.

Bán kính R nhỏ nhất khi $d\left(O;(SAI)\right)$ nhỏ nhất hay $d\left(O;(SAI)\right)=0$. Khi đó $O\in(SAI)$.

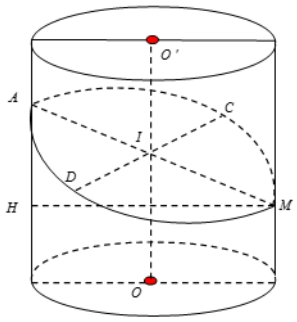
Như vậy, trong các mặt cầu chứa đường tròn (C), mặt cầu đường kính GI là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất $\Rightarrow R_{\min}=\frac{GI}{2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Câu 31. Cho khối trụ có thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2. Mặt phẳng (P) qua trung điểm I của OO' và tạo với mặt phẳng chứa đáy góc 30°. Diện tích của thiết diện do (P) cắt khối trụ gần số nào sau đây nhất?

A. $3,7$. **B.** $3,8$. **C.** $3,5$. **D.** $3,6$.

Lời giải

Chọn D



Do thiết diện qua trục OO' là một hình vuông cạnh bằng 2 nên chiều cao của hình trụ là $h=2$ và bán kính đáy là $R=1$.

Giả sử giao tuyến của mặt phẳng (P) và đáy chứa tâm O là đường thẳng d. Gọi E là hình chiếu của O trên d. Khi đó góc giữa (P) và mặt phẳng chứa đáy là góc $OEI=30^o$.

Trong tam giác vuông IOE có $\tan OEI=\frac{OI}{OE}\Rightarrow OE=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}>1$. Do đó điểm E nằm ngoài đường tròn đáy nên thiết diện là Elip.

Gọi AM và CD là trục lớn và trục bé của Elip.

Trong mặt phẳng chứa AM và trục của hình trụ, kẻ đường thẳng song song với đáy của hình trụ và cắt mặt xung quanh của hình trụ tại H. Khi đó $AMH=OEI=30^o$.

Trong tam giác vuông AHM có: $\cos AMH=\frac{HM}{AM}\Rightarrow AM=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Hay $2a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Mà $CD=2b=2\Rightarrow b=1$.

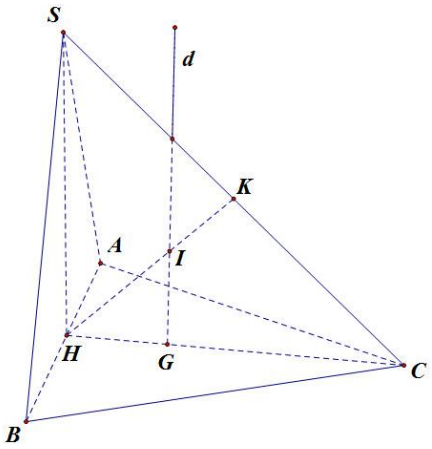
Thiết diện là hình Elip nên diện tích bằng $\pi ab=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\approx 3,62$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB; Vì ΔSAB đều nên $SH\perp AB$.

Mà $(SAB)\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp $S.ABC$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC.

Tam giác ΔABC đều $\Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Qua G kẻ đường thẳng d song song với $SH\ \Rightarrow d\perp(ABC)$ và d nằm trong mp (SHC)

Xét hai tam giác đều $\Delta ABC=\Delta SAB$ có độ dài các cạnh bằng 1 suy ra $SH=HC$

Gọi K là trung điểm của SC, vì ΔSHC vuông cân tại $H\Rightarrow HK$ là đường trung trực ứng với SC.

Trong mp (SHC), Gọi $I=d\cap HK$ ta có $\begin{cases}IA=IB=IC\\IS=IC\end{cases}\Rightarrow IA=IB=IC=IS$

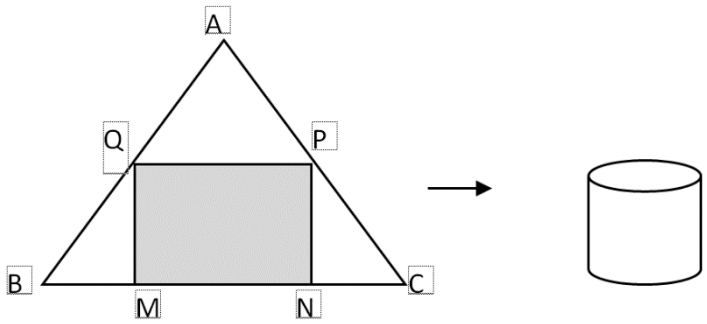
$\Rightarrow I$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow CG=\dfrac{2}{3}CH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔHIG vuông tại G ta có $IG=HG=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\Rightarrow IC=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $V=\dfrac{4}{3}\pi IC^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}\right)^3=\dfrac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Câu 33. Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M,N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là



A. $\frac{91125}{4\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $\frac{91125}{2\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **C.** $\frac{108000\sqrt{3}}{\pi}\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $\frac{13500.\sqrt{3}}{\pi}\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN

Đặt $MN=x\ (0<x<90)\Rightarrow\frac{MQ}{AI}=\frac{BM}{BI}\Rightarrow MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}(90-x)$

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R=\frac{x}{2\pi}\Rightarrow V_T=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}(90-x)=\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3+90x^2\right)$

Xét $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3+90x^2\right)$ với $0<x<90$.

Khi đó với $0<x<90$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-3x^2+180x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=60\end{array}\right.$$

Khi đó lập BBT

x	0		60		90
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	$\frac{13500.\sqrt{3}}{\pi}$	↘	

Dựa vào BBT Khi đó: $\max\limits_{x\in(0;90)}f(x)=\frac{13500.\sqrt{3}}{\pi}$ khi $x=60$.

Câu 34. Cho một hình nón đỉnh S, mặt đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R=6\left(\text{cm}\right)$ và có thiết diện qua trục là tam giác đều. Cho một hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;r)$ và $(I;r)$, có thiết diện qua trục là hình vuông, biết đường tròn $(O;r)$ nằm trên mặt đáy của hình nón, đường tròn $(I;r)$ tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón (I thuộc đoạn SO). Tính thể tích khối trụ.

A. $432\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(\text{cm}^3\right)$. **B.** $1296\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(\text{cm}^3\right)$.

C. $1296\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(\text{cm}^3\right)$. **D.** $432\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi S là đỉnh, O là tâm của đường tròn đáy của hình nón OM là bán kính đáy SM, OM cắt hai đáy của hình trụ lần lượt tại hai điểm B, A.

Hình nón có bán kính đường tròn đáy $R = 6(\text{cm})$ và có thiết diện qua trục là tam giác đều nên có

$SM = 2R = 12\,\text{cm}$; $SO = \dfrac{SM\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$

Đặt $SI = x$, vì $BI // AO$ nên ta có: $\dfrac{BI}{OM} = \dfrac{SI}{SO} \Rightarrow \dfrac{r}{6} = \dfrac{x}{6\sqrt{3}} \Rightarrow r = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

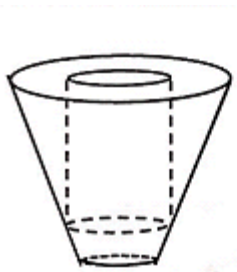
Chiều cao của hình trụ là: $h = OI = SO - SI = 6\sqrt{3} - x$

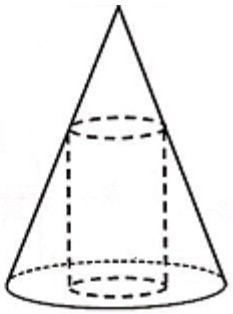
Do đó, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông khi và chỉ khi: $h = 2r \Leftrightarrow 6\sqrt{3} - x = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{18}{2+\sqrt{3}} = 18\left(2-\sqrt{3}\right)$

Khi đó: $h = 6\sqrt{3} - x = 12\left(2\sqrt{3}-3\right)$, $r = \dfrac{h}{2} = 6\left(2\sqrt{3}-3\right)$

Khối trụ có thể tích $V = \pi r^2 h = \pi.\left[6\left(2\sqrt{3}-3\right)\right]^2.12\left(2\sqrt{3}-3\right) = 1296\pi\left(26\sqrt{3}-45\right)\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 35. Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mình tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao $9(\text{cm})$ và bán kính đáy $6(\text{cm})$. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?





A. $V = 36\pi$. **B.** $V = 54\pi$. **C.** $V = 48\pi$. **D.** $V = \dfrac{81}{2}\pi$

Lời giải

Chọn C

Đây thực chất là bài toán khối trụ nội tiếp khối nón, ta có kí hiệu các kích thước như sau:

Gọi h; r lần lượt là chiều cao và bán kính của khối trụ.

Ta có thể tích vắt mì tôm được tính bằng $V = B.h = \pi r^2.h$

Đây là ứng dụng của bài toán tìm GTLN, GTNN trên một khoảng (đoạn) xác định:

Ta sẽ đưa thể tích về hàm số một biến theo h hoặc r. Trước tiên ta cần đi tìm mối liên hệ giữa h và r. Nhìn vào hình vẽ ta thấy các mối quan hệ vuông góc và song song, dùng định lí Thales ta sẽ có:

$\dfrac{h}{9} = \dfrac{6-r}{6} \Leftrightarrow h = \dfrac{18-3r}{2}$

Khi đó $V = f(r) = \pi r^2.\dfrac{18-3r}{2} = -\dfrac{3\pi r^3}{2} + 9\pi r^2$ với $0 < r < 6$

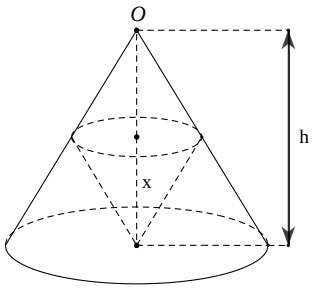
$$f'(r)=-\frac{9}{2}\pi r^2+18\pi r=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=0\\r=4\end{array}\right.$$

Khi đó lập BBT

r	0		4		6
$V'(r)$	0	+	0	−	
$V(r)$		↗	48π	↘	

Ta suy ra được với $r=4$ thì V đạt GTLN, khi đó $V=48\pi$.

Câu 36. Cho hình nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm của đáy và có đáy là là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh O đã cho (hình vẽ). Tính chiều cao x của khối nón này để thể tích của nó lớn nhất, biết $0<x<h$.



A. $x=\frac{h}{3}$. **B.** $x=h\sqrt{3}$. **C.** $x=\frac{2h}{3}$. **D.** $x=\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta có $\frac{JB}{IA}=\frac{OJ}{OI}=\frac{h-x}{h}\Rightarrow JB=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón cần tìm là: $V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x$.

Xét hàm số $V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2x$, $0<x<h$.

Ta có $V'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)=0\Leftrightarrow x=h$ hay $x=\frac{h}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	$\frac{4\pi R^2h}{81}$	↘	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối nón cần tìm lớn nhất khi chiều cao của khối nón là $x=\frac{h}{3}$;

Và $V_{\max}=\frac{4\pi R^2h}{81}$.

Câu 37. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45^0. Diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ và thể tích V của khối trụ là

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3};V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

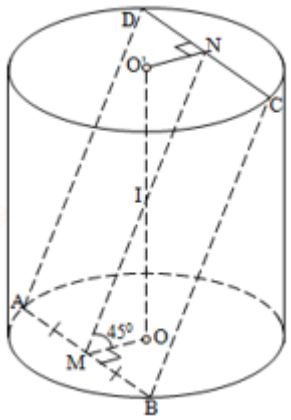
B. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3};V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{32}$.

C. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4};V=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

D. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2};V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Lời giải

Chọn D



* Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó: $OM\perp AB$ và $O'N\perp DC$.

Giả sử I là giao điểm của MN và OO'. Khi đó góc giữa mp$(ABCD)$ và đáy của hình trụ bằng góc IMO hay $IMO=45^0$.

Đặt $R=OA,\ h=OO'$.

* Trong ΔIOM vuông cân tại I nên: $OM=OI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}IM\Rightarrow\dfrac{h}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

* Ta có: $R^2=OA^2=AM^2+MO^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{8}=\dfrac{3a^2}{8}$.

Vậy $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

$V=\pi R^2h=\pi\dfrac{3a^2}{8}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 38. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

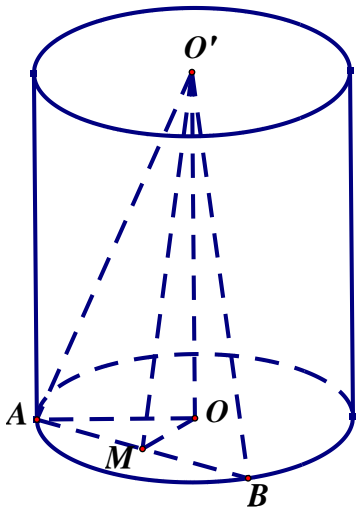
B. $V=\dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

C. $V=\dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

D. $V=\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt độ dài cạnh $AB=x\ (x>0)$ và M là trung điểm AB.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A=O'B=AB=x\Rightarrow O'M=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ góc $60°$ nên $O'MO=60°$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos O'MO=\dfrac{OM}{O'M}$.

Suy ra $\cos 60°=\dfrac{OM}{\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}\Leftrightarrow OM=\dfrac{x\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2=OM^2+AM^2$ nên

$$R^2=\left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow R^2=\frac{7}{16}x^2\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{7}}{7}R$$

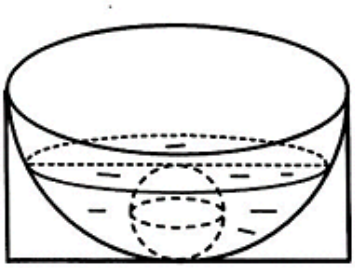
Do đó: $O'M=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM=\dfrac{x\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}R$.

Vì vậy, ta có $OO'=\sqrt{O'M^2-OM^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}R$.

Vậy thể tích khối trụ là $V=\pi R^2.h=\pi R^2.\dfrac{3\sqrt{7}}{7}R\Rightarrow V=\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 39. Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R=10$ đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (như hình vẽ 1). Trong chậu chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h=2$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (như hình vẽ 2). Cho biết công thức tính thể tích của khối chỏm cầu hình cầu $(O;R)$ có chiều cao h là: $V_{\text{chỏm}}=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$, tính bán kính r của viên bi.





Hình 1Hình 2

A. $r \approx 1$. **B.** $r \approx \frac{1}{2}$. **C.** $r \approx 1,5$. **D.** $r \approx \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích phần nước dâng lên chính bằng thể tích của viên bi bỏ vào.

Thể tích nước ban đầu: $V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$;

Gọi r là bán kính của viên bi.

Khi đó thể tích nước sau khi bỏ viên bi vào sẽ là $V_2 = V_1 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{4}{3}\pi r^3 (1)$

"Bỏ vào trong chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi".

Do vậy thể tích sau khi bỏ viên bi vào được tính bằng công thức: $V_2 = \pi.(2r)^2\left(R - \frac{2r}{3}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có phương trình: $\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\left(R - \frac{2r}{3}\right) \Leftrightarrow 4r^3 - 4Rr^2 + h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = 0$.

Khi đó thay các giá trị mà đề đã cho vào phương trình bấm máy tính giải ta được $r \approx 1.019450$ **(chọn A)**. Bấm máy tính ta thấy có 2 nghiệm, tuy nhiên việc bán kính của viên bi $r \approx 9.90486$ xấp xỉ bằng chậu nước là điều vô lí.

Câu 40. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì khối trụ có thể tích lớn nhất khi bán kính R và chiều cao h là

A. $R = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}; h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. **B.** $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}; h = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

C. $R = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}; h = 4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **D.** $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có: $S = S_{2day} + S_{xq} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

Từ đó suy ra: $\frac{S}{2\pi} = R^2 + Rh \Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \overset{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$

hay $27\frac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2}$ hay $h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$ khi $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h = 2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

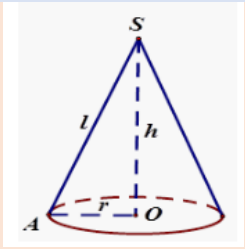
DẠNG TOÁN 44: THIẾT DIỆN CỦA HÌNH NÓN, TRỤ, CẦU

PHẦN II:

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Khối nón

Cho hình nón có bán kính đáy r, đường cao h và đường sinh l.



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$.
- Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón: $S = S_{xq} + S_{day} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
- Công thức tính thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
- Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông SOA:

$$l^2 = h^2 + r^2;\ \cos ASO = \frac{h}{l};\ \sin ASO = \frac{r}{l};\ \tan ASO = \frac{r}{h}.$$

- Định lý sin trong tam giác (ABC): $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. ($R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác (ABC)).
- Định lý Talet trong tam giác (ABC): $MN // BC, M \in AB, N \in AC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

2. Khối trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$

Diện tích toàn phần của hình trụ: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$

Thể tích khối trụ: $\boxed{V = \pi r^2 h}$

3. Khối cầu

Diện tích của mặt cầu bán kính R: $\boxed{S = 4\pi R^2}$

Thể tích khối cầu bán kính R: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Thiết diện qua trục của hình nón, hình trụ.
- Thiết diện không qua trục của hình nón, hình trụ.
- Thiết diện của mặt cầu.

BÀI TẬP MẪU

Câu 44. (ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính thể tích của khối trụ tròn xoay.

2. HƯỚNG GIẢI:

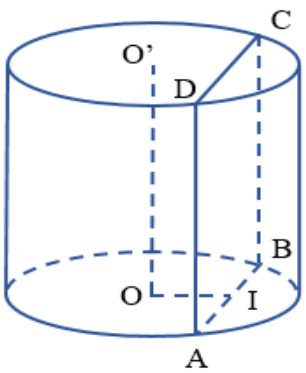
B1: Tìm bán kính hình tròn đáy

B2: Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ và tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D



Gọi O và O' là tâm hai đáy của hình trụ.

Giả sử thiết diện thu được khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục là hình vuông $ABCD$.

Theo giả thiết ta có $AB = BC = OO' = 6a$.

Gọi I là trung điểm AB. Suy ra $OI \perp AB$ và $AI = \frac{1}{2}AB = 3a$.

Mà $OI \perp BC$ nên $OI \perp (ABCD)$.

Vì $OO' // (ABCD)$ nên $d(OO';(ABCD)) = d(O;(ABCD)) = OI = 3a$.

Xét tam giác AOI vuông tại I và có $OI = AI = 3a \Rightarrow OA = 3a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi.R^2.h = \pi.OA^2.OO' = \pi.\left(3a\sqrt{2}\right)^2.(6a) = 108\pi a^3$.

Bài tập tương tự và phát triển:

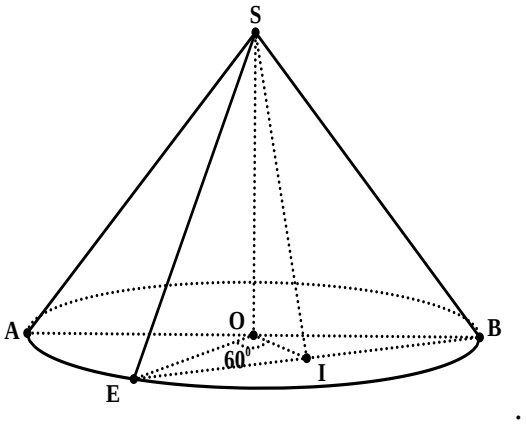
Mức độ 3

Câu 1: Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 2. Tính diện tích của thiết diện đi qua đỉnh và cắt đáy của hình nón theo cung có số đo $120°$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi thiết diện qua trục là ΔSAB, tâm O của đáy là trung điểm của AB.

Theo giả thiết ΔSAB vuông cân tại S có cạnh $SA=SB=2$, suy ra đường sinh của hình nón $l=2$, bán kính đáy $r=\sqrt{2}$ và chiều cao $h=\sqrt{2}$.

Gọi ΔSEB là thiết diện đi qua đỉnh và cắt đáy của hình nón theo cung EB có số đo bằng $120°$ và I là trung điểm của EB.

Ta có: Tam giác EOI vuông tại I có $EOI=60^o$, suy ra $OI=\frac{\sqrt{2}}{2}; EI=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác SOI vuông tại O, có $SI=\sqrt{OI^2+SO^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

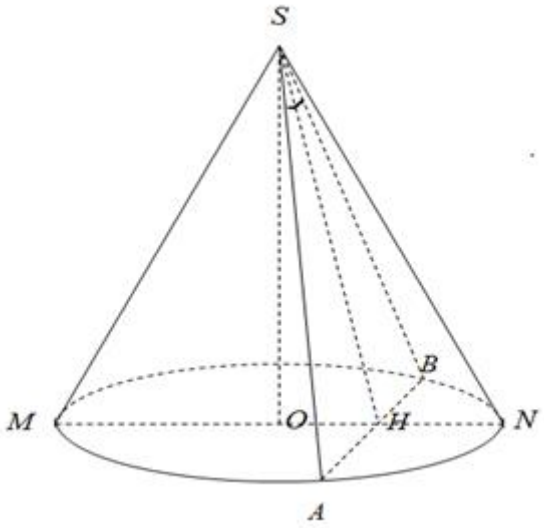
Diện tích thiết diện SEB là: $\frac{1}{2}.SI.EB=\frac{1}{2}.SI.2.EI=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Câu 2: Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh bằng $6a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S của hình nón và cắt đường tròn đáy tại hai điểm A, B sao cho $ASB=30^o$. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $16a^2$. **B.** $9a^2$. **C.** $18a^2$. **D.** $12a^2$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh bằng $6a$ nên hình nón có đường sinh $l=6a$. Suy ra: $SA=SB=6a$.

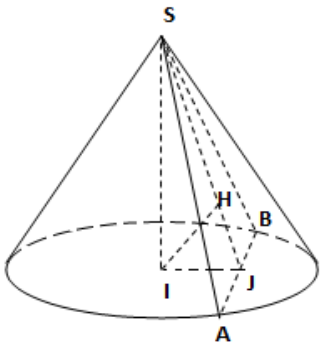
Khi đó: $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}.SA.SB.\sin ASB=9a^2$.

Câu 3: Cho hình nón có đường cao $h=40cm$, bán kính đáy $r=50cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón, có khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $24cm$. Tính diện tích thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $S=2000\left(cm^2\right)$. **B.** $S=800\left(cm^2\right)$. **C.** $S=1200\left(cm^2\right)$. **D.** $S=1600\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón, I là tâm của đường tròn đáy hình nón.

Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh và cắt mặt mặt đáy tại hai điểm A,B sao cho $d\left(I,(P)\right)=24cm$.

Gọi J là trung điểm của AB. Kẻ $IH\perp SI$, $H\in SJ$.

Có: $\begin{cases}AB\perp IJ\\AB\perp SI\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SJI)\Rightarrow(SAB)\perp(SIJ)$

Có $\begin{cases}(SAB)\perp(SIJ)\\(SAB)\cap(SIJ)=SJ\Rightarrow d\left(I,(SAB)\right)=IH=24.\\IH\perp SJ\end{cases}$

Xét tam giác SIJ vuông tại I, đường cao IH, ta có $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{IJ^2}\Leftrightarrow\frac{1}{IJ^2}=-\frac{1}{40^2}+\frac{1}{24^2}$

$\Rightarrow JI=30$. Suy ra $BJ=\sqrt{IB^2-IJ^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40\Rightarrow AB=80$.

Mặt khác: $SJ=\sqrt{40^2+30^2}=50$.

Vậy $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SJ.AB=\frac{1}{2}50.80=2000\left(cm^2\right)$.

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S có đường sinh là l, góc giữa đường sinh và đáy là α. Một mặt phẳng (P) hợp với đáy một góc 60° và cắt hình nón theo hai đường sinh. Diện tích thiết diện cắt bởi (P) và hình nón bằng

A. $2l^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

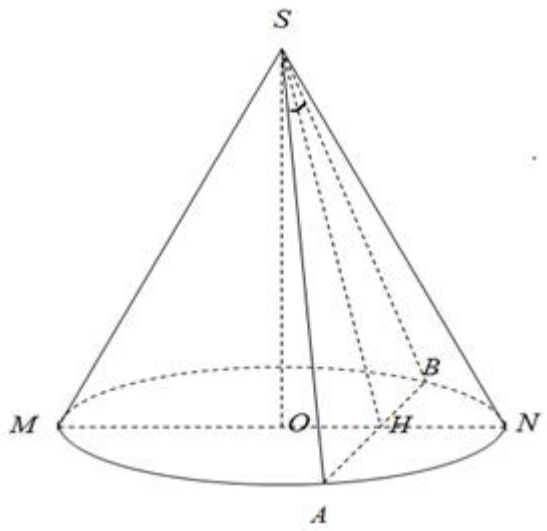
B. $\frac{2l^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}{3}$.

C. $\frac{l^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}{3}$.

D. $l^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo hai đường sinh SA, SB.

$(P)=(SAB)\Rightarrow\alpha=SAO;\ SHO=60°$ với H là trung điểm của AB.

$SO=SA\sin\alpha=l\sin\alpha;\ SH=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{2l\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.

$AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=l\sqrt{\frac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{3}}$.

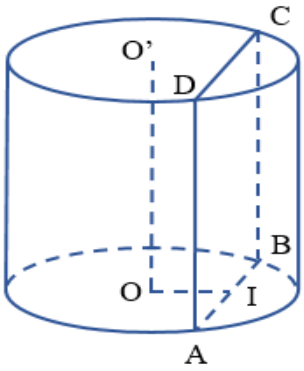
$$S_{SAB}=SH.AH=\frac{2l\sin\alpha}{\sqrt{3}}.l\sqrt{\frac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{3}}=\frac{2l^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}{3}.$$

Câu 5: Cho hình trụ có trục OO', thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng $\frac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. πa^2. **B.** $2a^2\sqrt{3}$. **C.** a^2. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $2a$ nên suy ra hình trụ có bán kính $r=a$; chiều cao $h=2a$.

Mặt phẳng (P) song song với trục nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ với $OA=r=a$; $BC=h=2a$.

Gọi I là trung điểm AB. Suy ra $OI\perp AB$.

Mà $OI\perp BC$ nên $OI\perp(ABCD)$.

Vì $OO'//(ABCD)$ nên $d(OO';(ABCD))=d(O;(ABCD))=OI=\frac{a}{2}$.

Xét tam giác AOI vuông tại I, ta có $AI=\sqrt{OA^2-OI^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=a\sqrt{3}$.

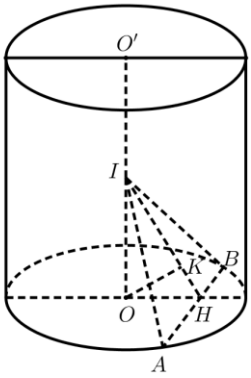
Diện tích thiết diện là $S_{ABCD}=AB.BC=2a^2\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy bằng R. Một mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc bằng 30°, (P) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

A. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2R}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của OO', mặt phẳng (P) đi qua I và cắt đường tròn đáy theo một dây cung AB khi đó $(P)\equiv(IAB)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên dây cung AB, kẻ $OK\perp IH$, $K\in IH$.

Có $\begin{cases}AB\perp OI\\AB\perp OH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(OIH)\Rightarrow AB\perp OK$.

Có $\begin{cases}OK\perp AB\\OK\perp IH\end{cases}\Rightarrow OK\perp(IAB)\Rightarrow IH$ là hình chiếu của IO lên mặt phẳng (P).

$\Rightarrow(OO',(P))=(OO',IH)=OIH=30°$.

Xét tam giác OIH vuông tại O có $\tan 30°=\dfrac{OH}{OI}\Rightarrow OH=OI.\tan 30°=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$

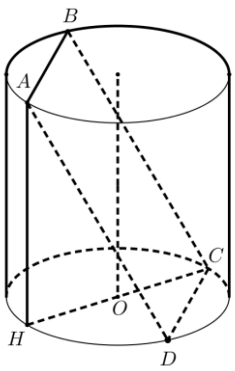
suy ra: $AB=2AH=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{3}}=\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Câu 7: Cho hình trụ (*H*) có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $\sqrt{10}$. Một hình vuông *ABCD* có hai cạnh *AB* và *CD* lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy, các cạnh *AD* và *BC* không là đường sinh của hình trụ. Độ dài cạnh của hình vuông *ABCD* bằng

A. 10. **B.** 20. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D



Gọi kích thước cạnh của hình vuông là a.

Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng đáy.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD$ nên HC là đường kính của đường tròn đáy.

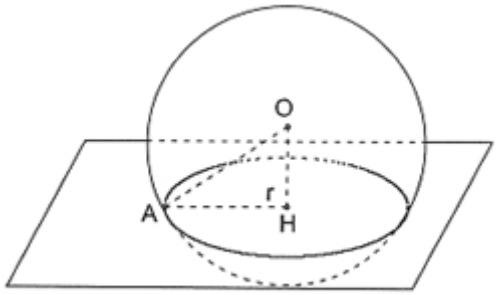
Ta có hệ $\begin{cases} DH^2 + DC^2 = HC^2 \\ DH^2 + AH^2 = AD^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DH^2 + a^2 = 40 \\ DH^2 + 10 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$.

Câu 8: Diện tích hình tròn lớn của hình cầu là S, một mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo một đường tròn có bán kính là r và có diện tích bằng $\frac{1}{2}S$. Biết bán kính hình cầu là R. Tính r.

A. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{R\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{R\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính hình tròn lớn của hình cầu là R. Khi đó ta có: $S = \pi R^2$.

Hình tròn giao tuyến của (P) và hình cầu có bán kính là r có diện tích là: πr^2.

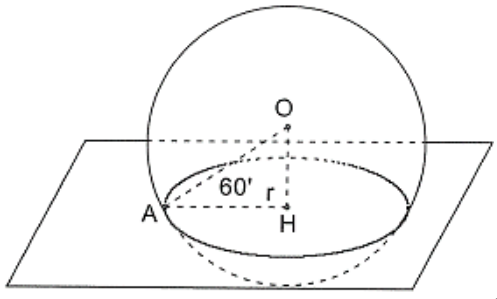
Theo giả thiết: $\pi r^2 = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Cho mặt cầu $S(O;R)$, A là một điểm ở trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và (P) bằng $60°$. Diện tích của hình tròn giao tuyến giữa khối cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\pi R^2}{2}$. **B.** $\frac{\pi R^2}{8}$. **C.** πR^2. **D.** $\frac{\pi R^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì

* H là tâm của đường tròn giao tuyến của (P) và (S).

* $(OA,(P))=(OA,AH)=60^0$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến: $r=HA=OA.\cos 60^0=\dfrac{R}{2}$.

Suy ra diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2=\pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2=\dfrac{\pi R^2}{4}$.

Câu 10: Cho hai đường tròn (C_1), (C_2) lần lượt chứa trong hai mặt phẳng phân biệt (P), (Q). (C_1), (C_2) có hai điểm chung A, B. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có thể đi qua (C_1) và (C_2)?

A. Có 2 hoặc 3 mặt cầu phân biệt tùy thuộc vào vị trí của (P), (Q).

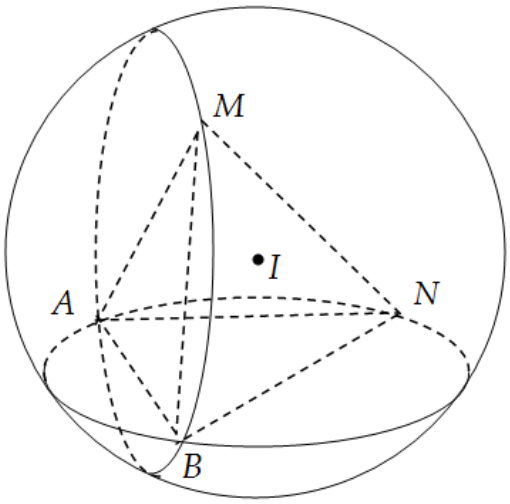
B. Có đúng 2 mặt cầu phân biệt.

C. Có duy nhất 1 mặt cầu.

D. Không có mặt cầu nào.

Lời giải

Chọn C



Trên đường tròn (C_1), (C_2) lần lượt lấy M, N sao cho hai điểm này không trùng với A, B.

Khi đó 4 điểm A, B, M, N không đồng phẳng nên tạo thành tứ diện $ABMN$.

Mặt cầu (S) đi qua (C_1) và (C_2) nên mặt cầu (S) đi qua A, B, M, N.

Qua 4 điểm không đồng phẳng có duy nhất 1 mặt cầu ngoại tiếp.

Do đó có duy nhất 1 mặt cầu.

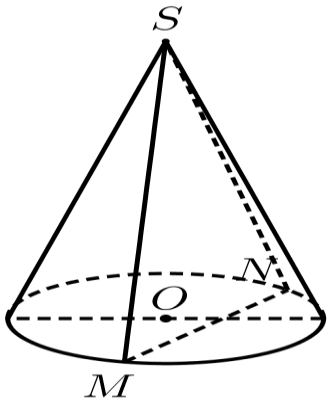
Mức độ 4

Câu 11: Cho hình nón đỉnh *S* có đường cao $h=a$, đường sinh $l=2a$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh *S* và cắt đường tròn đáy tại hai điểm *M, N*. Diện tích tam giác *SMN* lớn nhất bằng

A. $2a^{2.}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đáy của hình nón; I là trung điểm của MN.

Ta có $SM = l = 2a$

Khi đó $OI \perp MN \Rightarrow SI \perp MN$

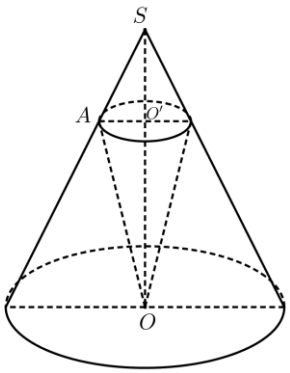
Diện tích tam giác $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SI.MN = \frac{1}{2}\sqrt{SM^2 - \frac{MN^2}{4}}.MN = \sqrt{\left(SM^2 - \frac{MN^2}{4}\right).\frac{MN^2}{4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\left(SM^2 - \frac{MN^2}{4}\right).\frac{MN^2}{4}} \le \frac{SM^2 - \frac{MN^2}{4} + \frac{MN^2}{4}}{2} = \frac{SM^2}{2} = 2a^2$$

$S_{\Delta SMN}$ lớn nhất bằng $2a^{2.}$ khi $MN = \sqrt{2}SM = 2\sqrt{2}a$.

Câu 12: Khối nón tròn xoay (N) đỉnh S, O là tâm của đáy, chiều cao h, bán kính đáy R. Một khối nón (N') có đỉnh là O, đáy là thiết diện cắt bởi một mặt phẳng song song với đáy của nón (N). Chiều cao của nón (N') phải bằng bao nhiêu để thể tích khối nón (N') là lớn nhất.



A. $\frac{2h}{3}$. **B.** $\frac{h}{3}$. **C.** $\frac{h}{2}$. **D.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O' là tâm đáy của hình nón (N'), bán kính đáy hình nón (N') là R'.

Đặt $OO'=t$, $0<t<h$. Ta có : $R'=\dfrac{h-t}{h}R$ (tam giác vuông đồng dạng).

Thể tích khối nón (N'): $V=\dfrac{1}{3}\pi(R')^2t=\dfrac{\pi R^2}{3h^2}(h-t)^2t$

Xét $f(t)=\dfrac{\pi R^2}{3h^2}(h-t)^2t$

Ta có $f'(t)=\dfrac{\pi R^2}{3h^2}\left(3t^2-4ht+h^2\right)$

Cho $f'(t)=0\Rightarrow 3t^2-4ht+h^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=h\\ t=\dfrac{h}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{4\pi R^2h}{81}$	↘	

Suy ra $V_{\max}=\dfrac{4\pi}{81}R^2h$ khi $t=\dfrac{h}{3}$.

Câu 13: Cho hình trụ có tính chất: Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là $12\,\text{cm}$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ.

A. $16\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $8\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $32\pi\ \text{cm}^3$. **D.** $64\pi\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử hình trụ có chiều cao h và bán kính r.

Suy ra thiết diện là hình chữ nhật có hai kích thước là $h\ (0<h<6)$ và $2r\ (0<r<3)$

Theo giả thiết ta có $h+2r=6\Rightarrow h=6-2r$.

Thể tích khối trụ: $V=\pi r^2h=\pi r^2(6-2r)$.

Đặt $f(r)=\pi r^2(6-2r)\Rightarrow f'(r)=\pi\left(12r-6r^2\right)\Rightarrow f'(r)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=0\\ r=2\end{array}\right.$.

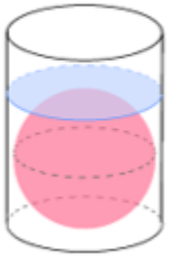
Lập bảng biến thiên

r	0		2		3
$f'(r)$	0	+	0	−	
$f(r)$		↗	8π	↘	

Ta thấy $f(r)$ đạt giá trị lớn nhất khi $r=2$.

Vậy $V=8\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 14: Người ta thả một quả bóng hình cầu vào một cốc nước thì mực nước dâng lên tại vị trí cao nhất của quả bóng, nghĩa là mặt nước là mặt phẳng tiếp xúc với quả bóng. Cho biết đường kính đáy cốc là 14 cm và chiều cao mực nước ban đầu là 4 cm. Tính bán kính quả bóng, biết quả bóng không thể chui lọt một ống hình trụ có diện tích hình tròn đáy bằng $50\ cm^2$. (làm tròn tới hàng phần trăm)



A. 2,13 cm. **B.** 7,03 cm. **C.** 2,03cm. **D.** 7,31cm.

Lời giải

Chọn A

Chiều cao mực nước sau khi nhúng chìm quả bóng vào cốc cũng chính là đường kính quả bóng.

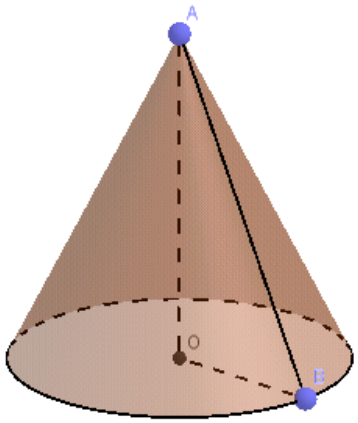
Gọi r (cm) là bán kính quả bóng, xét điều kiện ta có: $r>\sqrt{\dfrac{50}{\pi}}\approx 3,99\ cm$, ngoài ra vì quả bóng bỏ lọt chiếc cốc nên $r<7cm$.

Theo bài ra: $\pi.7^2.4+\dfrac{4}{3}.\pi.r^3=\pi.7^2.2r\Leftrightarrow 196\pi+\dfrac{4}{3}\pi r^3=98\pi r$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}r^3-98r+196=0\Leftrightarrow r\approx 7,31\ (cm)\ hay\ r\approx 2,13\ (cm)$.

Đối chiếu điều kiện ta có $r\approx 2,13\ cm$.

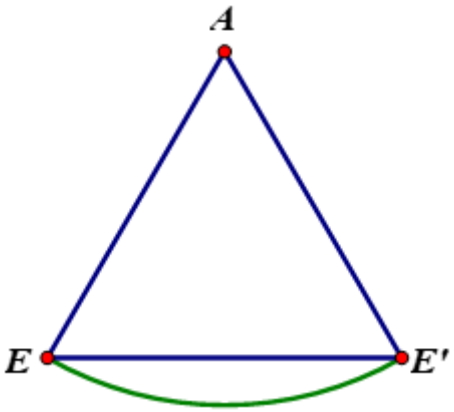
Câu 15: Một cây thông Noel có dạng hình nón với chiều dài đường sinh bằng 60cm và bán kính đáy $r=10cm$. Một chú kiến bắt đầu xuất phát từ một điểm nằm trên mặt đáy hình nón và có dự định bò một vòng quanh cây thông sau đó quay trở lại vị trí xuất phát ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà chú kiến có thể đi được?



A. $45cm$. **B.** $63cm$. **C.** $125cm$. **D.** $60cm$

Lời giải

Chọn D



Giả sử con kiến xuất phát từ điểm E và đi một vòng rồi lại trở về điểm E.

Ta "cắt" hình nón theo cạnh AE và trải hình nón ra được một hình quạt như hình vẽ.

Khi đó đoạn đường ngắn nhất con kiến đi được bằng EE'.

Ta có đường sinh của hình nón bằng bán kính quạt nên $R = AE = 60cm$.

Gọi α là góc của cung tròn quạt khi đó độ dài của cung tròn quạt là: $C = 2\pi R\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) = R\alpha$.

Mặt khác $C = 2\pi r$.

Suy ra $2\pi r = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{R} = \frac{\pi}{3}$

Do đó tam giác AEE' đều nên $EE' = 60$.

Vậy quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi được chính bằng $EE' = 60cm$.

Câu 16: Cho hình nón có đỉnh S, độ dài đường sinh bằng $2a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S cắt hình nón theo một thiết diện, diện tích lớn nhất của thiết diện là

A. $2a^2$. **B.** a^2. **C.** $4a^2$. **D.** $\sqrt{3}a^2$

Lời giải

Chọn A

Thiết diện là tam giác cân tại S với $SA = SB = l$.

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}.SA.SB.\sin ASB=\frac{l^2}{2}\sin ASB\le\frac{l^2}{2}.$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin ASB=1$ hay $SA\perp SB$

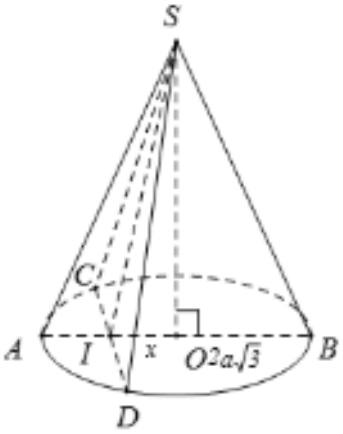
Vậy diện tích lớn nhất của thiết diện bằng $\frac{l^2}{2}$ khi thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau và $S_{\max}=\frac{l^2}{2}=2a^2.$

Câu 17: Một hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. $S_{\max}=8a^2$ **B.** $S_{\max}=4a^2\sqrt{2}$ **C.** $S_{\max}=4a^2$ **D.** $S_{\max}=16a^2$

Lời giải

Chọn A



Cách 1: Gọi thiết diện của hình chóp là ΔSCD, I là trung điểm của CD.

Ta có $SO=\frac{OB}{\tan 60°}=2a$.

Đặt $OI=x$ suy ra $IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{12a^2-x^2}$; $SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{4a^2+x^2}$.

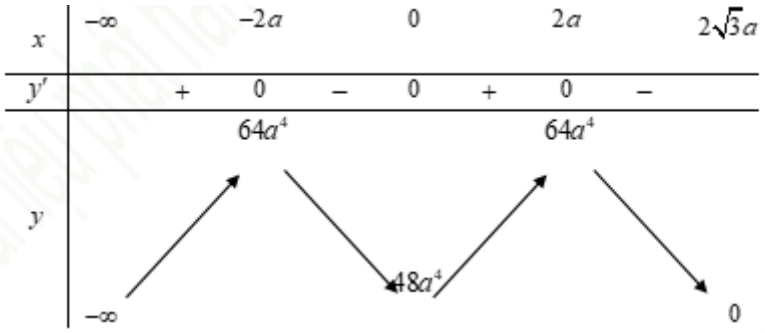
$S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CD.SI=SI.IC=\sqrt{\left(4a^2+x^2\right)\left(12a^2-x^2\right)}\Rightarrow\left(S_{\Delta SCD}\right)^2=-x^4+8a^2x^2+48a^4$

Xét hàm số $f\left(x\right)=-x^4+8a^2x^2+48a^4$ với $0<x<2\sqrt{3}a$.

$f'\left(x\right)=-4x^3+16a^2x$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2a\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\left(S_{\max}\right)^2 = 64a^4 \Rightarrow S_{\max} = 8a^2$.

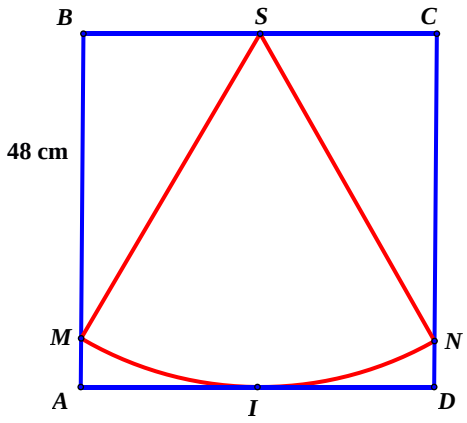
Cách 2: Gọi thiết diện của hình chóp là ΔSCD.

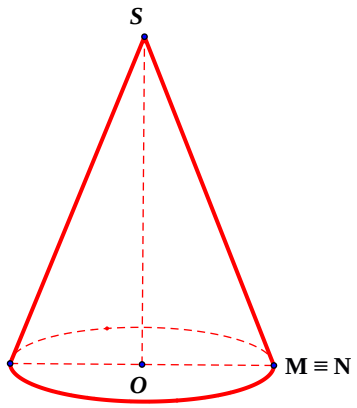
Vì ΔSOB vuông tại O, có $OB = r = 2a\sqrt{3}$, $OSB = 60^o$ nên $l = SB = \dfrac{r}{\sin 60^o} = 4a$.

Khi đó, $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}SC.SD.\sin CSD \le \dfrac{1}{2}SC.SD = 8a^2$ (vì $\sin CSD \le 1$).

Vậy Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là $8a^2$ khi $CSD = 90^o$.

Câu 18: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 48 cm. Gọi S, I lần lượt là trung điểm của BC, AD. Dùng compa vạch cung tròn MN có tâm là S và bán kính SI (như hình vẽ) rồi cắt tấm bìa theo cung tròn đó. Dán phần hình quạt sao cho cạnh SM và SN trùng nhau thành một cái mũ hình nón không đáy với đỉnh S (giả sử phần mép dán không đáng kể). Tính thể tích V của cái mũ đó.





A. $V = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{3}\left(\text{cm}^3\right)$.

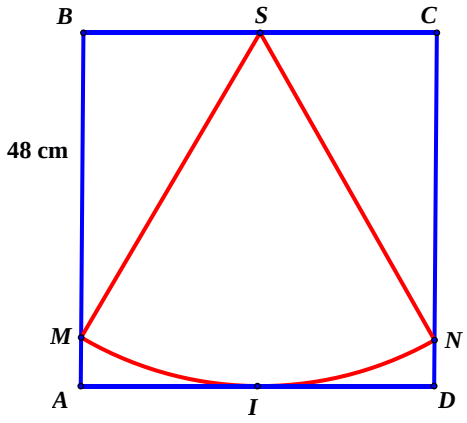
B. $V = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{9}\left(\text{cm}^3\right)$.

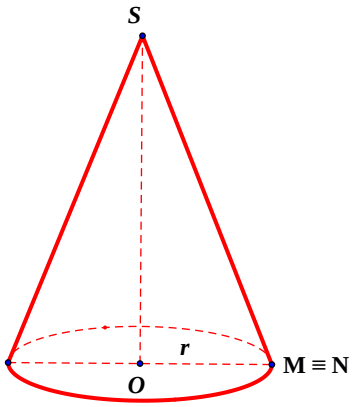
C. $V = 1024\pi\left(\text{cm}^3\right)$.

D. $V = 512\pi\sqrt{35}\left(\text{cm}^3\right)$.

Lời giải

Chọn A





Ta có $MN = SM = SN = 48\,\text{cm}$ nên ΔSMN đều $\Rightarrow MSN = 60°$.

Chu vi đường tròn đáy của cái mũ chính là chiều dài x của dây cung MN.

Mặt khác số đo cung MN bằng số đo góc $MSN = 60°$ nên $x = \dfrac{\pi.48.60}{180} = 16\pi$.

Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của cái mũ, ta có $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{16\pi}{2\pi} = 8$.

Chiều cao của cái phễu $h = \sqrt{SM^2 - r^2} = \sqrt{48^2 - 8^2} = 8\sqrt{35}$.

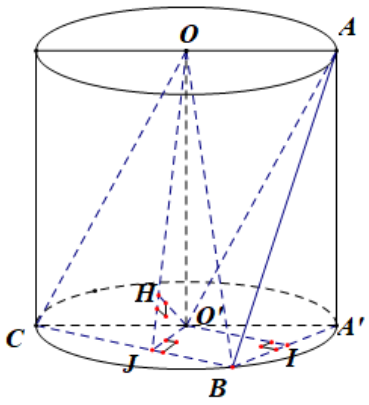
Vậy thể tích cái phễu $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi 8^2.8\sqrt{35} = \dfrac{512\pi\sqrt{35}}{3}\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 19: Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng 4 cm. Điểm A nằm trên đường tròn đáy tâm O, điểm B nằm trên đường tròn đáy tâm O' của hình trụ. Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng OO' và AB bằng $2\sqrt{2}$ cm. Khi đó khoảng cách giữa $O'A$ và OB bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. **C.** $2\sqrt{3}$ cm. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

Lời giải

Chọn D



Gọi AA' là đường sinh của hình trụ, ta có $OO' // AA' \Rightarrow OO' // \left(AA'B\right)$.

Suy ra $d\left(OO', AB\right) = d\left(OO', \left(AA'B\right)\right) = d\left(O', \left(AA'B\right)\right)$.

Kẻ $O'I \perp A'B$. Ta có $\begin{cases} O'I \perp A'B \\ O'I \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'I \perp \left(AA'B\right)$.

$\Rightarrow d\left(OO',\, AB\right) = O'I = 2\sqrt{2}$.

Trong $\Delta O'A'I$ vuông tại I có $A'I = \sqrt{O'A'^2 - O'I} = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $A'B = 2A'I = 4\sqrt{2}$.

Gọi C là điểm đối xứng với A' qua O' suy ra tứ giác $OAO'C$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} OC // O'A \\ OC = O'A \end{cases} \Rightarrow O'A // \left(OBC\right)$.

$\Rightarrow d\left(O'A,\, OB\right) = d\left(O'A,\, \left(OBC\right)\right) = d\left(O',\, \left(OBC\right)\right)$.

Kẻ $O'J \perp BC$, mà $OO' \perp BC) \Rightarrow BC \perp \left(OO'J\right)$.

$\Rightarrow \left(OO'J\right) \perp \left(OBC\right),\, \left(OO'J\right) \cap \left(OBC\right) = OJ$

Kẻ $O'H \perp OJ \Rightarrow O'H \perp \left(OBC\right)$

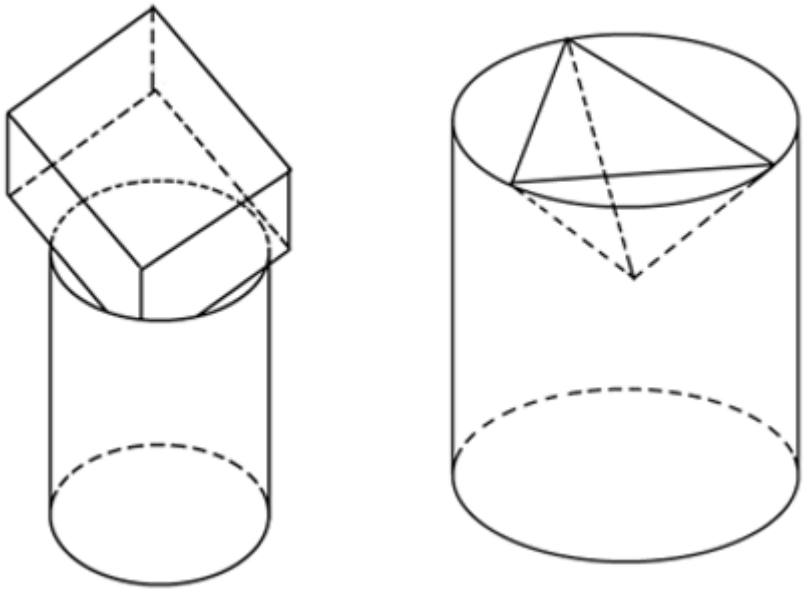
$\Rightarrow d\left(O'A,\, OB\right) = d\left(O',\, \left(OBC\right)\right) = O'H$.

Trong $\Delta A'BC$ vuông tại B có $BC = \sqrt{A'C^2 - A'B^2} = \sqrt{64-32} = 4\sqrt{2}$.

Suy ra $\Delta A'BC$ vuông cân tại B, mà $O'J \perp BC \Rightarrow O'J = O'I = 2\sqrt{2}$.

Trong $\Delta OO'J$ vuông tại $O' \Rightarrow O'H = \dfrac{OO'.O'J}{OJ} = \dfrac{4.2\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

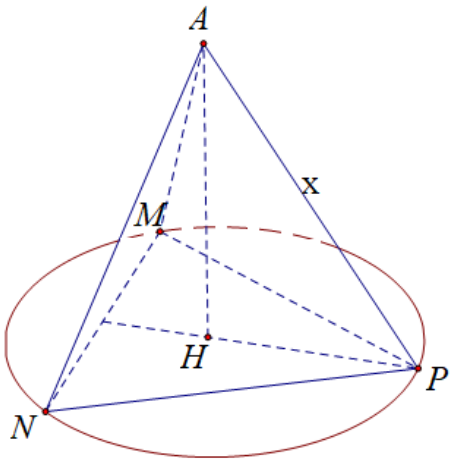
Câu 20: Có một cái bể hình trụ cao $10dm$ với bán kính đáy $4dm$ chứa đầy nước bị một thùng gỗ hình lập phương đóng kín rơi vào làm cho một lượng nước V tràn ra. Biết rằng cạnh thùng gỗ là $8dm$ và khi nó rới vào miệng bể, một đường chéo dài nhất của nó vuông góc với mặt bể, ba cạnh của thùng chạm vào thành của bể như hình vẽ. Tính V.

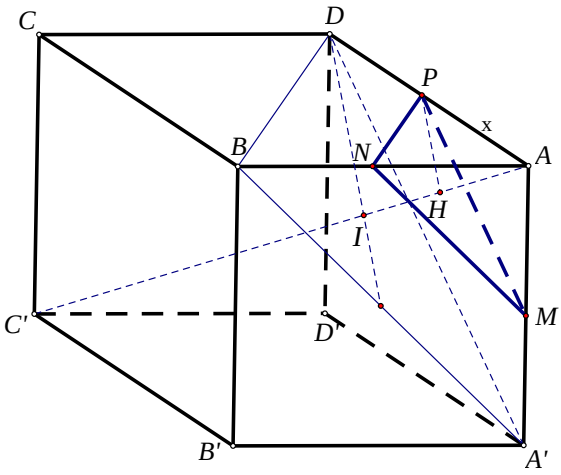


A. $6\sqrt{6}$. **B.** $10\sqrt{6}$. **C.** $5\sqrt{6}$. **D.** $8\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D





Giả sử hình lập phương là $ABCD.A'B'C'D'$, đường chéo vuông góc với mặt bể là AC', các cạnh chạm thành bể là AA', AB, AD và các điểm chạm tương ứng là M, N, P.

Lượng nước V tràn ra bằng thể tích khối chóp $AMNP$.

Do AC' vuông góc với mặt bể và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên chóp $A.MNP$ đều.

Đặt $AP = x \quad 0 < x \le 8$.

Gọi H là tâm của tam giác MNP, và I là giao điểm của AC' với $A'BD$, ta có

$$AI = \frac{1}{3}AC' = \frac{1}{3}8\sqrt{3} = \frac{8}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{AH}{AI} = \frac{AP}{AD} = \frac{x}{8} \Rightarrow AH = \frac{x}{8}.\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$PH^2 = AP^2 - AH^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2 \Rightarrow PH = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Tam giác MNP nội tiếp trong đường tròn miệng bể nên PH là bán kính đường tròn đáy của hình trụ và $PH = 4 \ \ dm$,

Ta được $\frac{x\sqrt{6}}{3} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}$.

Có $\frac{NP}{BD} = \frac{AP}{AD} \Rightarrow NP = \frac{8\sqrt{2}.2\sqrt{6}}{8} = 4\sqrt{3}$; $S_{\Delta MNP} = \frac{4\sqrt{3}^{\,2}.\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \ \ dm^2$.

Thể tích cần tìm $V = V_{A.MNP} = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}.12\sqrt{3} = 8\sqrt{6} \ \ dm^3$.

DẠNG TOÁN 44B: TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN HÌNH NÓN, TRỤ, CẦU

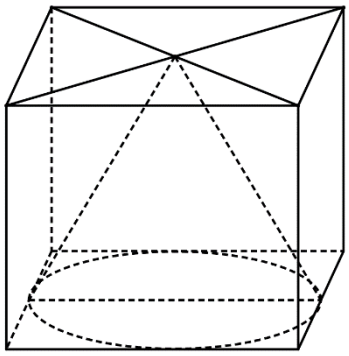
Mức độ 3

Câu 1. Một chiếc thùng đựng nước có hình của một khối lập phương cạnh $1m$ chứa đầy nước. Đặt vào trong thùng đó một khối có dạng nón sao cho đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.

A. $\frac{1}{11}$. **B.** $\frac{\pi}{12}$. **C.** $\frac{\pi}{12-\pi}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích của chiếc thùng là $1m^3$.

Từ giả thiết ta thấy khối nón có chiều cao h bằng cạnh hình lập phương, bán kính đáy r bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh bằng $1m$. Suy ra: $h=1m$, $r=\frac{1}{2}m$.

Thể tích nước trào ra bằng thể tích nón và bằng $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{\pi}{12}\ \left(m^3\right)$.

Thể tích lượng nước còn lại là $V_2=1-\frac{\pi}{12}=\frac{12-\pi}{12}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{12-\pi}$.

Câu 2. Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao là $15cm$, đường kính đáy là $6cm$, lượng nước ban đầu trong cốc cao $10cm$. Thả vào cốc nước 5 viên bi hình cầu có cùng đường kính là $2cm$. Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu cm ? (Kết quả làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số).

A. $3,52cm$. **B.** $4,26cm$. **C.** $4,25cm$. **D.** $4,81cm$.

Lời giải

Chọn B

Hình trụ có bán kính $r=3$; hình cầu có bán kính $R=1$

$V_{coc\ nuoc}=\pi r^2.h=\pi.15.3^2=135\pi$.

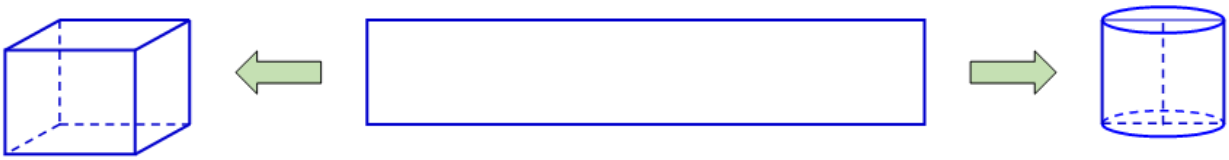
Thể tích V_1 của cốc nước sau khi thả 5 viên bi: $V_1=\pi.10.3^2+5.\frac{4}{3}\pi.1^3=\frac{290\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại trong cốc không chứa nước : $V_2=V-V_1=135\pi-\frac{290\pi}{3}=\frac{115\pi}{3}$.

Gọi h_1 là khoảng cách từ mực nước trong cốc đến miệng cốc.

Ta có: $\pi 3^2.h_1 = \dfrac{115\pi}{3} \Rightarrow h_1 = \dfrac{115}{27} \approx 4,26cm$.

Câu 3. Cho hai tấm tôn hình chữ nhật đều có kích thước $1,5\text{m} \times 8\text{m}$. Tấm tôn thứ nhất được chế tạo thành một hình hộp chữ nhật không đáy, không nắp, có thiết diện ngang là một hình vuông (mặt phẳng vuông góc với đường cao của hình hộp và cắt các mặt bên của hình hộp theo các đoạn giao tuyến tạo thành một hình vuông) và có chiều cao $1,5\text{m}$; còn tấm tôn thứ hai được chế tạo thành một hình trụ không đáy, không nắp và cũng có chiều cao $1,5\text{m}$. Gọi V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích của khối hộp chữ nhật và thể tích của khối trụ. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \pi$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn D

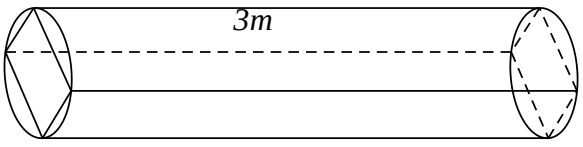
Thiết diện ngang của hình hộp chữ nhật là hình vuông $\Rightarrow$ Hình hộp có đáy là hình vuông cạnh là $\dfrac{8}{4} = 2(\text{m})$, chiều cao là $1,5(\text{m}) \Rightarrow V_1 = 2^2.1,5 = 6(\text{m}^3)$.

Hình trụ có đáy là hình tròn có chu vi là $8(\text{m}) \Rightarrow$ bán kính hình tròn đáy là $\dfrac{4}{\pi}$.

Thể tích khối trụ là $V_2 = \pi.\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2.1,5 = \dfrac{24}{\pi}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{6}{\dfrac{24}{\pi}} = \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 4. Một khúc gỗ hình trụ có chiều cao $3m$, đường kính đáy $80cm$. Người ta cưa 4 tấm bìa để được một khối lăng trụ đều nội tiếp trong khối trụ. Tính tổng thể tích của 4 tấm bìa bị cưa, xem mạch cưa không đáng kể.



A. $0,12(\pi - 2)\ m^3$. **B.** $0,48(\pi - 2)\ m^3$. **C.** $1,92(\pi - 2)\ m^3$. **D.** $0,4(\pi - 2)\ m^3$.

Lời giải

Chọn B

Tổng thể tích của 4 tấm bìa bị cưa bằng hiệu thể tích của khối trụ và khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

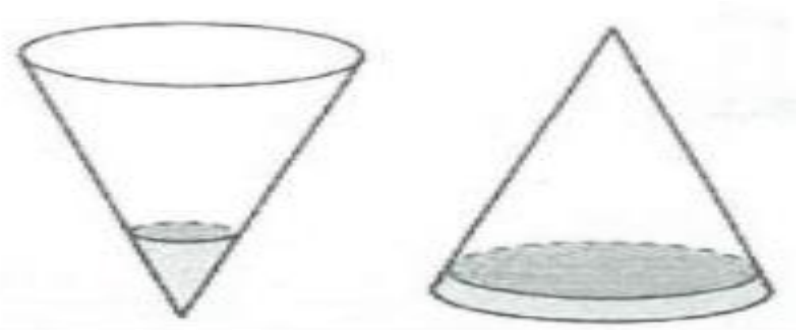
Khối trụ có chiều cao $h=3m$ và bán kính đáy $r=0,4m$.

Khối lăng trụ đều có chiều cao $h=3m$ và đáy là hình vuông có độ dài đường chéo $d=0,8m$.

Vậy tổng thể tích của 4 tấm bìa bị cưa bằng

$$h\left(\pi r^2-\frac{1}{2}d^2\right)=3\left(0,16\pi-0,32\right)=0,48\left(\pi-2\right)\left(m^3\right).$$

Câu 5. Một cái ly có dạng hình nón như hình vẽ. Người ta đổ một lượng nước vào ly sao cho chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của ly (không tính chân ly). Hỏi nếu bịt kín miệng ly rồi dốc ngược ly lên thì tỷ lệ chiều cao của nước và chiều cao của ly bằng bao nhiêu?



A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi R là bán kính miệng ly, r bán kính mặt nước trong ly, h là chiều cao của ly và V là thể tích ly nước.

$V_{H_2O}=\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{3}\cdot\pi r^2$.

Mà $\frac{r}{R}=\frac{\frac{h}{3}}{h}=\frac{1}{3}\Rightarrow r=\frac{R}{3}\Rightarrow V_{H_2O}=\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{3}\cdot\pi\cdot\frac{R^2}{9}=\frac{1}{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot h.\pi R^2\right)=\frac{1}{27}V$.

Vậy thể tích khối còn lại: $V_1=\frac{26}{27}V$.

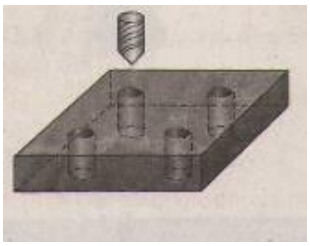
Khi dốc ngược ly thì phần hình nón không chứa nước có thể tích là V_1 có chiều cao và bán kính đáy là h_1,r_1 tương ứng.

Ta có: $V_1=\frac{26}{27}V\Leftrightarrow\frac{1}{3}h_1\cdot\pi r_1^2=\frac{26}{27}\cdot\frac{1}{3}h\cdot\pi R^2\left(*\right)$.

Mặt khác $\frac{r_1}{R}=\frac{h_1}{h}$ nên

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\frac{h_1}{h}=\frac{26}{27}\cdot\frac{R^2}{r_1^2}=\frac{26}{27}\cdot\frac{h^2}{h_1^2}\Leftrightarrow\frac{h_1}{h}=\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\Leftrightarrow\frac{h-h_1}{h}=\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}\Leftrightarrow\frac{h_{H_2O}}{h}=\frac{3-\sqrt[3]{26}}{3}.$$

Câu 6. Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình vẽ (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày $2(cm)$, đáy của nó là hình vuông có cạnh $5(cm)$. Đường kính của lỗ khoan là $8(mm.)$ Thể tích phần còn lại của tấm kim loại là



A. $5000-1280\pi\left(mm^3\right)$.

B. $50000-1280\pi\left(mm^3\right)$.

C. $50000-320\pi\left(mm^3\right)$.

D. $5000-1280\pi\left(mm^3\right)$.

Lời giải

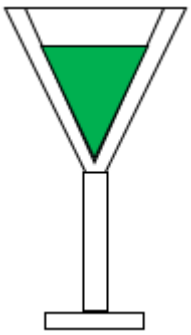
Chọn B

Thể tích tấm kim loại khi chưa khoan là: $V=50.50.20=50000mm^3$.

Thể tích của mỗi lỗ thủng là: $V_T=\pi.4^2.20=320\pi mm^3$.

Thể tích phần còn lại của tấm kim loại là: $V-4V_T=50000-1280\pi\ \ mm^3$.

Câu 7. Cho một chiếc cốc hình nón chứa đầy rượu như hình vẽ. Người X uống một phần rượu sao cho chiều cao của nó giảm đi $\frac{1}{3}$ so với chiều cao của rượu trong cốc. Người Y uống phần rượu còn lại trong cốc. Khi đó khẳng định nào đúng?



A. Người X uống lượng rượu bằng $5,75$ lần lượng rượu của người Y uống.

B. Hai người X và Y uống lượng rượu bằng nhau.

C. Người X uống lượng rượu bằng $2,375$ lần lượng rượu của người Y uống.

D. Người X uống lượng rượu bằng một nửa lượng rượu của người Y uống.

Lời giải

Chọn C

Gọi $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ là thể tích rượu có trong chiếc cốc hình nón đó (*với R là bán kính đáy hình nón và h là chiều cao hình nón*).

Sau khi người X uống một phần rượu sao cho chiều cao của nó giảm đi $\frac{1}{3}$ so với chiều cao của rượu trong cốc thì phần rượu còn lại của người Y uống là thể tích khối nón có chiều cao là $\frac{2}{3}h$ và bán kính mặt rượu còn lại trong cốc là r.

Ta có: $\frac{r}{R}=\frac{\frac{2}{3}h}{h}\Rightarrow r=\frac{2}{3}R$.

Suy ra lượng rượu còn lại người Y uống là $V_Y=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2.\left(\frac{2}{3}h\right)=\frac{8}{81}\pi R^2h$.

Khi đó người X đã uống một lượng rượu bằng $V_X=V-V_Y=\frac{19}{81}\pi R^2h$.

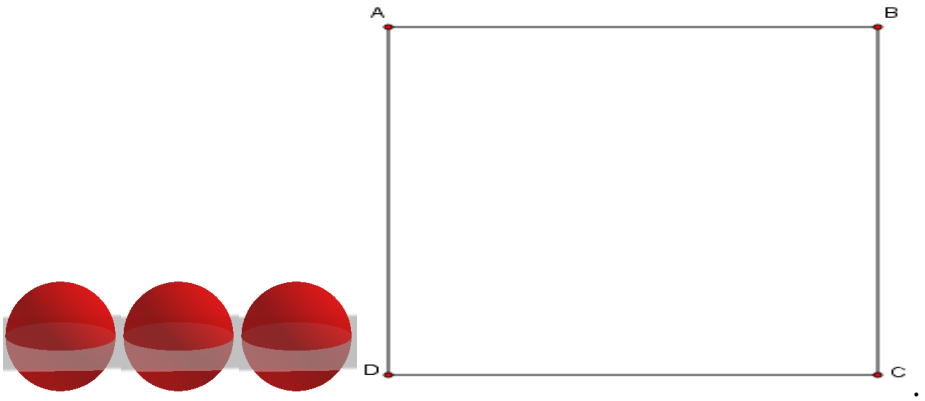
Vậy $\frac{V_X}{V_Y}=\frac{19}{8}=2,375$.

Câu 8. Có ba quả bóng với kích thước bằng nhau. Một miếng tôn hình chữ nhật được cuốn thành hình trụ sao cho chiều cao của hình trụ gấp 3 lần đường kính quả bóng, đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2}=2$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=5$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=1$.

Lời giải

Chọn D



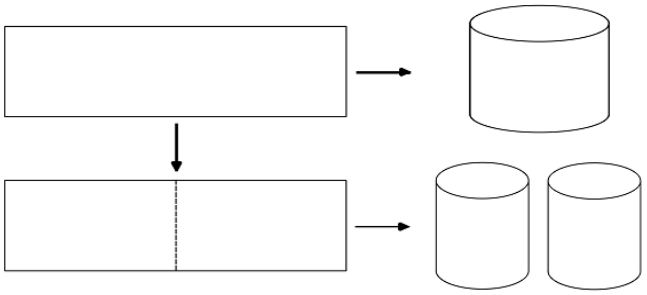
Ta có: $S_1=3.4.\pi R^2=12\pi R^2$; $S_2=2\pi.R.h=12\pi.R^2$. Khi đó $\frac{S_1}{S_2}=1$.

Câu 9. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 80 cm x 360 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 80cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

* Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

* Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.



A. $\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V_2}{V_1}=1$. **C.** $\frac{V_2}{V_1}=2$. **D.** $\frac{V_2}{V_1}=4$.

Lời giải

Chọn A

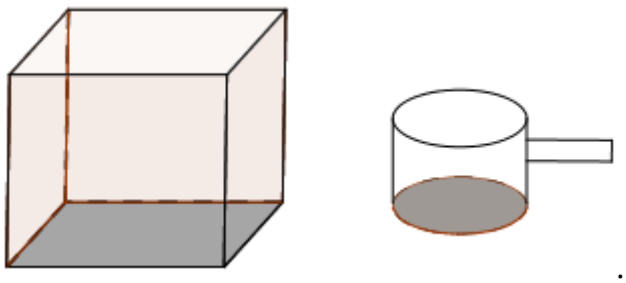
Gọi C_1 là chu vi đường tròn theo cách 1, C_2 là chu vi đường tròn theo cách 2. Suy ra $C_2=\frac{C_1}{2}$

Ta có: $\frac{V_2}{V_1}=\frac{2.\pi.R_2^2.h}{\pi.R_1^2.h}=\frac{2R_2^2}{R_1^2}$

Mà $C_1=2\pi R_1\Leftrightarrow R_1=\frac{C_1}{2\pi}$ và $C_2=\frac{C_1}{2}=2\pi R_2\Leftrightarrow R_2=\frac{C_1}{4\pi}$

Nên $\frac{V_2}{V_1}=\frac{2.\left(\frac{C_1}{4\pi}\right)^2}{\left(\frac{C_1}{2\pi}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

Câu 10. Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày nước ở trong bể được lấy ra bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là $5cm$ và bán kính đường tròn đáy là $4cm$. Trung bình một ngày được múc ra 170 gáo nước để sử dụng (Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?



A. 282 ngày. **B.** 281 ngày. **C.** 283 ngày. **D.** 280 ngày.

Lời giải

Chọn B

Thể tích nước được đựng đầy trong hình bể là $V = 2.3.2 = 12\left(m^3\right)$.

Thể tích nước đựng đầy trong gáo là $V_g = \pi 4^2.5 = 80\pi\left(cm^3\right) = \dfrac{\pi}{12500}\left(m^3\right)$.

Một ngày bể được múc ra 170 gáo nước tức trong một ngày lượng được được lấy ra bằng

$$V_m = 170.V_g = \frac{17}{1250}\pi\left(m^3\right).$$

Ta có $\dfrac{V}{V_m} = \dfrac{12}{\dfrac{17}{1250}\pi} \simeq 280,8616643 \Rightarrow$ sau 281 ngày bể sẽ hết nước.

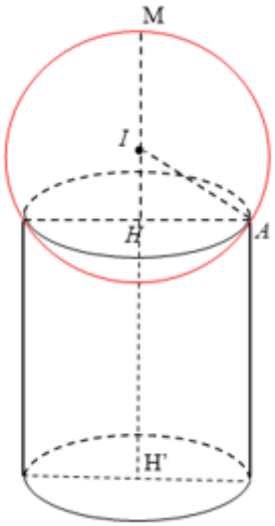
Mức độ 4

Câu 11. Một cái ống hình trụ tròn xoay bên trong rỗng, có chiều cao bằng $25\,\text{cm}$ và đường kính đáy bằng $6\,\text{cm}$ đặt trên cái bàn nằm ngang có mặt bàn phẳng sao cho một miệng ống nằm trên mặt bàn. Người ta đặt lên trên miệng ống còn lại một quả bóng hình cầu có bán kính $5\,\text{cm}$. Tính khoảng cách lớn nhất h có thể từ một điểm trên quả bóng tới mặt bàn nếu coi độ dày của thành ống là không đáng kể.

A. $h = 32\,\text{cm}$. **B.** $h = 34\,\text{cm}$. **C.** $h = 35\,\text{cm}$. **D.** $h = 30\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm mặt cầu.

A là một điểm chung của mặt cầu và hình trụ.

Gọi H, H' là tâm của hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng miệng đáy trên của hình trụ.

Kẻ HH' cắt mặt cầu tại M.

Khoảng cách lớn nhất h có thể từ một điểm trên quả bóng tới mặt bàn là $h = HH' + HI + IM$

Trong tam giác IHA vuông tại H có: $IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Do đó $h = 5 + 4 + 25 = 34cm$.

Câu 12. Người ta cần sản xuất một thùng đựng sơn hình trụ có thể tích 4π. Hỏi tổng bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ bằng bao nhiêu để tốn ít nguyên vật liệu nhất?

A. $R+h=2\sqrt[3]{4}$. **B.** $R+h=3\sqrt[3]{2}$. **C.** $R+h=3$. **D.** $R+h=\sqrt{2}+2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: thể tích là đại lượng không đổi, ta đặt bán kính đáy là $x>0$.

Khi đó chiều cao của thùng hình trụ $h=\dfrac{V}{\pi x^2}=\dfrac{4}{x^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng là $S_{tp}=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi\left(x^2+\dfrac{4}{x}\right)$.

Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải đạt giá trị nhỏ nhất.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có: $x^2+\dfrac{4}{x}=x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}\ge 3\sqrt[3]{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Hay để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì $R=\sqrt[3]{2};\ h=2\sqrt[3]{2}$.

Câu 13. Người ta cần sản xuất một lon hình trụ bằng nhôm có thể tích V. Để tiết kiệm nhôm nhất thì phải sản xuất lon hình trụ có tích bán kính đáy R và chiều cao h là

A. $Rh=\dfrac{3}{\pi}$. **B.** $R.h=\sqrt[3]{\dfrac{2V^2}{\pi^2}}$. **C.** $R.h=\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\pi^2}}$. **D.** $R.h=\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{2\pi^2}}$.

Lời giải

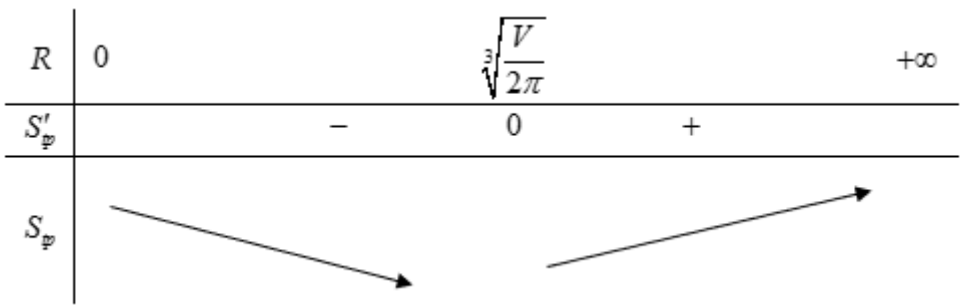
Chọn B

Ta có: $V=\pi R^2h\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}\Rightarrow S_{tp}=S_{xq}+2\pi R^2=2\pi R\dfrac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2$.

Để tiết kiệm nhôm nhất thì S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất .

Ta có: $S'_{tp}=\dfrac{-2V}{R^2}+4\pi R=\dfrac{-2V+4\pi R^3}{R^2}\Rightarrow S'_{tp}=0\Leftrightarrow -2V+4\pi R^3=0\Rightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

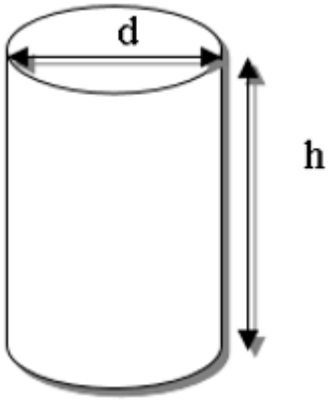
Khi đó $hR=\frac{V}{\pi R}=\sqrt[3]{\frac{2V^2}{\pi^2}}$.

Câu 14. Khi sản xuất vỏ lon bia hình trụ có chiều cao h và đường kính đáy d. Các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu chi phí nguyên liệu vỏ lon (bằng nhôm) là thấp nhất khi thể tích của lon bia là V không đổi. Khi đó tỉ lệ $\frac{h}{d}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



Ta có $d=2R\Rightarrow R=\frac{d}{2}$

$V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2h=\frac{1}{4}\pi d^2h\Rightarrow h=\frac{4V}{\pi d^2}$

$S_d=\pi R^2=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\pi d^2}{4}$.

$S_{xq}=2\pi Rh=2\pi\frac{d}{2}.\frac{4V}{\pi d^2}=\frac{4V}{d}$

$S_{tp}=S_{xq}+2S_d=\frac{4V}{d}+2\frac{\pi d^2}{4}=\frac{2V}{d}+\frac{2V}{d}+\frac{\pi d^2}{2}\geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$

Để chi phí thấp nhất thì diện tích toàn phần phải đạt giá trị nhỏ nhất.

$\min S_{tp}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}\Leftrightarrow\frac{2V}{d}=\frac{\pi d^2}{2}\Leftrightarrow 2.\frac{\frac{1}{4}\pi d^2h}{d}=\frac{\pi d^2}{2}\Leftrightarrow h=d\Leftrightarrow\frac{h}{d}=1.$

Câu 15. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích bằng $27\,\text{cm}^3$. Tìm tỉ số $\frac{h}{r}$ của chiều cao h và bán kính đáy r của hình nón để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

A. $\frac{h}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{h}{r}=2$. **C.** $\frac{h}{r}=\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{h}{r}=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{3V}{\pi r^2}$

Suy ra độ dài đường sinh là $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2+r^2}=\sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2}\right)^2+r^2}=\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4}+r^2}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi diện tích xung quanh của hình nón đạt giá trị nhỏ nhất.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq}=\pi rl=\pi r\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^4}+r^2}=\pi\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2}+r^4}=\pi\sqrt{\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}+\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}+r^4}\geq\pi\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}\cdot\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}\cdot r^4}}$$

$$\Rightarrow S_{xq}\geq\pi\sqrt[6]{\frac{3^{19}}{4\pi^4}}.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của S_{xq} là $\pi\sqrt[6]{\frac{3^{19}}{4\pi^4}}$ khi $\frac{3^8}{2\pi^2 r^2}=r^4$ hay $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

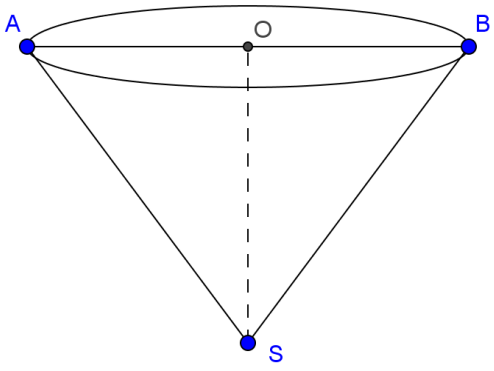
Vậy $\frac{h}{r}=\frac{3V}{\pi r^3}=\sqrt{2}$.

Câu 16. Một cơ sở sản xuất đồ gia dụng được đặt hàng làm các chiếc cốc hình nón không nắp bằng nhôm có thể tích là $V=9a^3\pi$. Để tiết kiệm sản suất và mang lại lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sẽ sản suất những chiếc cốc hình nón có bán kính miệng cốc là R sao cho diện tích nhôm cần sử dụng là ít nhất. Tính R.

A. $R=\frac{3a}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $R=\frac{3a}{\sqrt[6]{2}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{9}a$. **D.** $R=3a$.

Lời giải

Chọn B

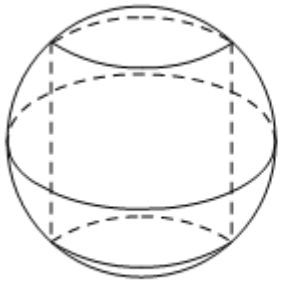


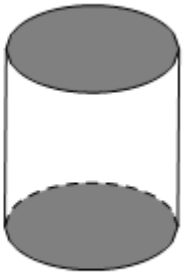
$$V=9a^3\pi=\frac{1}{3}\pi R^2.h\Rightarrow h=\frac{27a^3}{R^2}\Rightarrow l=\sqrt{h^2+R^2}=\sqrt{\frac{(3a)^6+R^6}{R^4}}.$$

$$S_{xq}=\pi Rl=\pi .R.\sqrt{\frac{(3a)^6+R^6}{R^4}}=\pi\sqrt{\frac{(3a)^6+R^6}{R^2}}$$
$$=\pi\sqrt{\frac{(3a)^6}{2R^2}+\frac{(3a)^6}{2R^2}+R^4}\ge\pi\sqrt[6]{\frac{(3a)^6}{2R^2}.\frac{(3a)^6}{2R^2}.R^4}=\pi\sqrt[6]{\frac{(3a)^{12}}{4}}=\frac{9\pi a^2}{\sqrt[3]{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{(3a)^6}{2R^2}=R^4\Leftrightarrow(3a)^6=2R^6\Leftrightarrow R=\frac{3a}{\sqrt[6]{2}}$.

Câu 17. Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R, người thợ thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.

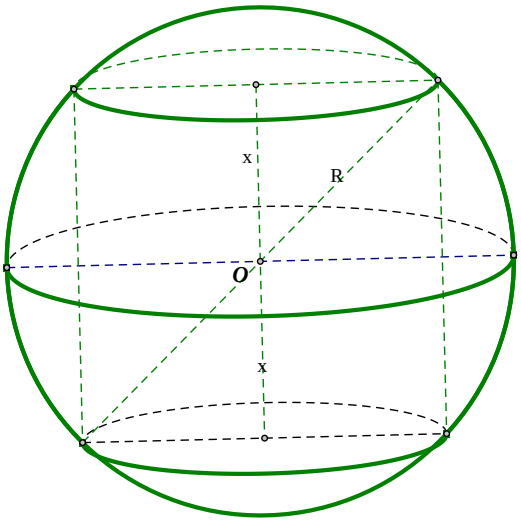




A. $\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{4}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0<x<R)$ (xem hình vẽ).

Bán kính của khối trụ là $r=\sqrt{R^2-x^2}$.

Thể tích khối trụ là: $V=\pi(R^2-x^2)2x$.

Xét hàm số $f(x)=2x\left(R^2-x^2\right)$, $0<x<R$, có $f'(x)=2(R^2-3x^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{R\sqrt{3}}{3}$		R
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	↘	

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$;

$V_{\max}=\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 18. Một công ty muốn thiết kế bao bì để đựng sữa với thể tích $1\left(dm^3\right)$. Bao bì được thiết kế bởi một trong hai mô hình sau: Dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông hoặc dạng hình trụ và được sản xuất cùng một nguyên vật liệu. Hỏi thiết kế theo mô hình nào sẽ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất? Và thiết kế mô hình đó theo kích thước như thế nào?

A. Hình trụ và chiều cao bằng đường kính đáy.

B. Hình hộp chữ nhật và cạnh bên bằng cạnh đáy.

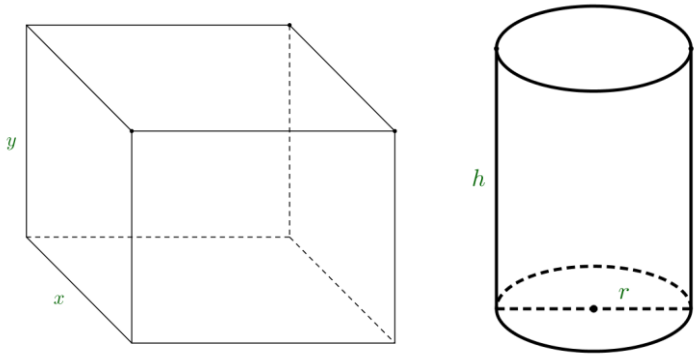
C. Hình hộp chữ nhật và cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy.

D. Hình trụ và chiều cao bằng bán kính đáy.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: Hình hộp có cạnh đáy là $x\left(dm\right)$, chiều cao là $y\left(dm\right)$.



Khi đó : $V=x^2y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2}$.

$S_{tp}=4xy+2x^2=\frac{4}{2x}+\frac{4}{2x}+2x^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x}+2x^2\geq 3\sqrt[3]{8}=6$.

Đẳng thức xả ra khi $\frac{2}{x}=2x^2\Leftrightarrow x=1$.

Trường hợp 2 : Hình trụ có bán kính đáy r, chiều cao h.

Khi đó $V=\pi r^2h=1\Rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$.

$S_{tp}=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi\left(\frac{1}{\pi r}+r^2\right)=2\pi\left(\frac{1}{2\pi r}+\frac{1}{2\pi r}+r^2\right)\geq 6\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{2\pi r}=r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}=2r$.

Có $6\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}<6$.

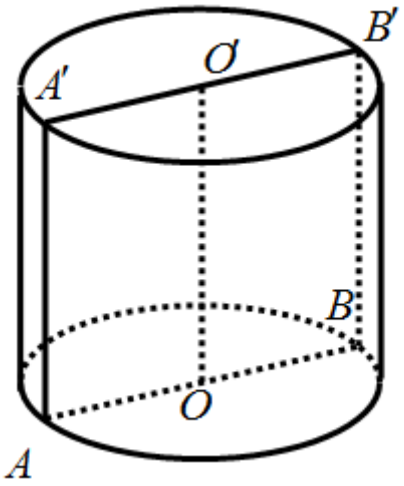
Từ hai trường hợp, mô hình nào sẽ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất khi là hình trụ và có chiều cao bằng đường kính đáy.

Câu 19. Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích $150\ m^3$. Đáy bể làm bằng bê tông giá $100000\ đ/m^2$. Phần thân làm bằng tôn giá $90000\ đ/m^2$, nắp bằng nhôm giá $120000\ đ/m^2$. Hỏi khi chi phí sản suất để bể đạt mức thấp nhất thì tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

A. $\frac{21}{32}$. **B.** $\frac{22}{9}$. **C.** $\frac{31}{22}$. **D.** $\frac{9}{22}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V=150 \Leftrightarrow \pi R^2 h=150 \Rightarrow h=\frac{150}{\pi R^2}$.

Khi đó chi phí làm bể là $f(R)=100000\pi R^2+120000\pi R^2+180000\pi Rh$

$=220000\pi R^2+180000\pi R\frac{150}{\pi R^2}=220000\pi R^2+\frac{27000000}{R}$.

Để chi phí thấp nhất thì hàm số $f(R)$ đạt giá trị nhỏ nhất với mọi $R>0$.

$f'(R)=440000\pi R-\frac{27000000}{R^2}=\frac{440000\pi R^3-27000000}{R^2}$, cho $f'(R)=0 \Rightarrow R=\frac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$.

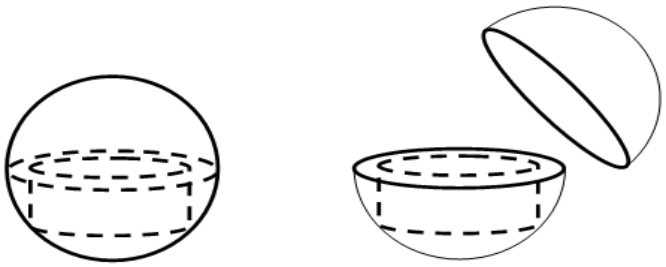
Bảng biến thiên

R	0	$\frac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	$-$	0	$+$
$f(R)$	↘		↗

Từ BBT suy ra $f(R)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $R=\dfrac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$.

Khi đó $\dfrac{h}{R}=\dfrac{150}{\pi R^3}=\dfrac{22}{9}$.

Câu 20. Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế vỏ hộp là một khối cầu như viên ngọc trai, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng như hình vẽ. Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R=3\sqrt{3}cm.$ Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



.

A. $54\pi cm^3$. **B.** $45\pi cm^3$. **C.** $108\pi cm^3$. **D.** $18\pi cm^3$.

Lời giải

Chọn A

Xét mặt cắt như hình vẽ.

Gọi h,r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ nằm trong nửa khối cầu.

Ta có $r^2+h^2=27\Leftrightarrow r^2=27-h^2$ với $0<h<3\sqrt{3}$.

Ta có thể tích khối trụ $V=h.\pi r^2=h\pi\left(27-h^2\right)=-\pi h^3+27\pi h$.

Có $V'=-3\pi h^2+27\pi;$ cho $V'=0\Leftrightarrow h=3.$

Bảng biến thiên

x	0		3		$3\sqrt{3}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	54π	↘	

Vậy $V_{\max}=54\pi$ khi $h=3.$

DẠNG TOÁN 48: TÍCH PHÂN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ẨN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Các tính chất tích phân:

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ với $a < c < b$.
- $k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x (k \neq 0)$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z$
- $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$

2. Công thức đổi biến số: $\int f\left(u(x)\right).u'(x)dx = \int f(u)du,\ u = u(x)$

$$\int_a^b f\left(u(x)\right).u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,\ u = u(x)$$

Phương pháp đổi biến số thường được sử dụng theo hai cách sau đây:

- Giả sử cần tính $\int_a^b g(x)dx$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f\left(u(x)\right)u'(x)$ thì $\int_a^b g(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$, trong nhiều trường hợp thì tích phân mới này đơn giản hơn .
- Giả sử cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Đặt $x = x(t)$ thỏa mãn $\alpha = x(a),\ \beta = x(b)$ thì

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f\left(x(t)\right)x'(t)dt = \int_a^b g(t)dt$, trong đó $g(t) = f\left(x(t)\right).x'(t)$

BÀI TẬP MẪU

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}.$

Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Tính tích phân hàm ẩn.

.....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆Công thức đổi biến số trong tích phân: $\int_a^b f\left[u(x)\right].u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$

◆ Tính chất tích phân:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\big|_{x=a}^{x=b}=f(b)-f(a)$$

.....

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Nhân cả hai vế của phương trình với x, rồi sử dụng tích phân hai vế để tính $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B2: Nhân cả hai vế của phương trình với x, rồi sử dụng tích phân hai vế để tính $\int_{0}^{1} f(x)dx$.

B3: Kết luận $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Cách 1 : Dùng vi phân

Ta có: $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}+x^7-2x^2, \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$

Khi đó: $(*)\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} x^2 f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1} xf\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\,\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t+0=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-4\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=-4$$

Mặt khác: $(*)\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right)dx+\int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{8}\quad\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)dx=-\frac{3}{4}$$

Theo tính chất tích phân ta có: $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx-\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\frac{-13}{4}$

Cách 2: (Tham khảo không giống phân tích ở trên)

Bậc cao nhất vế phải là x^{10}, bậc cao nhất vế phải là $x.f\left(x^3\right)$. Kết luận: $f(x)$ bậc 3 vì $x.\left(x^3\right)^3=x^{10}$.

Hệ số của bậc cao nhất vế phải là -1. Kết luận: Hệ số của bậc cao nhất vế trái là -1.

Vậy $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$.

$x.f\left(x^3\right)=-x^{10}+x.a\left(x^3\right)^2+...=-x^{10}+ax^7+...$ Vế phải không có x^7. Vậy $a=0$

Kết luận $f(x)=-x^3+bx+c$.

$$x.f\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+bx^4+cx-\left(1-x^2\right)^3+b\left(1-x^2\right)+c$$

$$=-x^{10}+bx^4+cx-1+3x^2-3x^4+x^6+b-bx^2+c$$

$$=-x^{10}+x^6+(b-3)x^4+(3-b)x^2+cx+b+c-1$$

Đồng nhất hệ số được $b=3; c=-2$.

Tóm lại $f(x)=-x^3+3x-2$. Suy ra $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\frac{-13}{4}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 48.1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$.

Khi đó $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^2 \left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2 \left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=\int_0^2 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x+4\int_0^2 \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x)=\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right)+8$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2+8$

$\Leftrightarrow 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.$

Câu 48.2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(\ln x)+f(1-\ln x)=x$.

Khi đó $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{e-1}{2}$. **B.** $\frac{e+1}{2}$. **C.** $\frac{e}{2}$. **D.** $\frac{2}{e-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(\ln x)+f(1-\ln x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x}f(1-\ln x)=1\ (*)$

Lấy tích phân từ 1 đến e cả hai vế của $(*)$, ta được

$\int_1^e \left[\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x}f(1-\ln x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^e \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x+\int_1^e \frac{1}{x}f(1-\ln x)\mathrm{d}x=e-1$

$\Leftrightarrow \int_1^e f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)-\int_1^e f(1-\ln x)\mathrm{d}(1-\ln x)=e-1\ (**)$

Đặt $t=\ln x$. Đổi cận $\begin{vmatrix} x=1\to t=0 \\ x=e\to t=1 \end{vmatrix}$

Khi đó $(**)\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(1-t)\mathrm{d}(1-t)=e-1$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e-1$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{e-1}{2}.$

Câu 48.3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(1)=-2\ln 2 \\ f(2)=a+b\ln 3;\ a,b\in\mathbb{Q} \\ x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \end{cases}$.

Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ (1)

Chia cả 2 vế của biểu thức (1) cho $(x+1)^2$ ta được $\dfrac{x}{x+1}.f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|+C\right)$

Mặt khác, $f(1)=-2\ln 2 \Leftrightarrow 2(1-\ln 2+C)=-2\ln 2 \Leftrightarrow C=-1$.

Do đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|-1\right)$.

Với $x=2$ thì $f(x)=\dfrac{3}{2}(1-\ln 3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 48.4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=\mathrm{e}$ và $(x+2).f(x)=x.f'(x)-x^3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\mathrm{e}-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\mathrm{e}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x+2).f(x)=x.f'(x)-x^3 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-(x+2)f(x)}{x^3}=1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}\right]'=\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-x}f(x)}{x^2}=\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C \Leftrightarrow f(x)=-x^2+C.x^2\mathrm{e}^{x}$

Vì $f(1)=\mathrm{e} \Rightarrow -1+C.\mathrm{e}=\mathrm{e} \Leftrightarrow C=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Do đó $f(x)=-x^2+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^{x}$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[-x^2+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^{x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -x^2\mathrm{d}x+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right)=-\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[\mathrm{e}-\int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right]=-\dfrac{1}{3}+e+1-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x}\right).$

$=\dfrac{2}{3}+e-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right]=\dfrac{2}{3}+e-2\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-(e-1)\right]=-\dfrac{4}{3}+e-\dfrac{2}{e}$

Câu 48.5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f(3x)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2}$, $\int\limits_3^9 f(x)\mathrm{d}x=2019$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{688}{3}$. **B.** $I=\dfrac{688}{3}$. **C.** $I=\dfrac{886}{3}$. **D.** $I=\dfrac{68}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow t=3 \end{array}\right.$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(\dfrac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Mà $2f(3x)+3f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{15x}{2} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{2}{x}\right)=-\dfrac{5x}{2}-\dfrac{2}{3}f(3x)$ hay $f\left(\dfrac{2}{t}\right)=-\dfrac{5t}{2}-\dfrac{2}{3}f(3t)$

Nên $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3\left[-\dfrac{5t}{2}-\dfrac{2}{3}f(3t)\right]\mathrm{d}t=-\dfrac{5}{4}\int\limits_1^3 t\,\mathrm{d}t-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f(3t)\mathrm{d}t=-5-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^3 f(3t)\mathrm{d}t\ (1)$

Đặt $u=3t \Rightarrow dt=\frac{1}{3}du$. Đổi cận $\begin{vmatrix} t=1\Rightarrow u=3 \\ t=3\Rightarrow u=9 \end{vmatrix}$.

Khi đó $I=-5-\frac{1}{9}\int_3^9 f(u)\mathrm{d}u=-5-\frac{2019}{9}=-\frac{688}{3}$.

Câu 48.6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, $\int_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x=5$. Giá trị $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{103}{48}$. **B.** $\frac{103}{24}$. **C.** $\frac{103}{48}$. **D.** $-\frac{103}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Ta có $\int_1^2 x.f'(x)dx=x.f(x)\big|_1^2-\int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow 5=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx$ (1)

Lần lượt thay $x=1$ và $x=\frac{1}{2}$ vào $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ ta được

$$\begin{cases} 2f(2)-f(1)=1 \\ 2f(1)-f(2)=\frac{1}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(2)=\frac{3}{4} \\ f(1)=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=2f(2)-f(1)-5=-4\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=-2$.

Lại có $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\Rightarrow 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx\Leftrightarrow 2.(-2)-\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{7}{24}$

$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-4-\frac{7}{24}=-\frac{103}{24}$.

Đặt $t=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\frac{2}{t}\Rightarrow dx=-\frac{2}{t^2}dt$ ta có $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)dx=\int_2^1 f(t).\frac{-2}{t^2}dt=2\int_2^1 f(t).\frac{-1}{t^2}dt$ (2)

Đặt $u=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{u}\Rightarrow dx=-\frac{1}{u^2}du$ ta có $\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^1 f(u).\frac{-1}{u^2}du=\int_2^1 f(t).\frac{-1}{t^2}dt=-\frac{103}{24}$.

Thay vào (2) ta được $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)dx=2.\left(-\frac{103}{24}\right)=-\frac{103}{12}$.

Câu 48.7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9\Leftrightarrow 9\left[f''(x)-1\right]=-\left[f'(x)-x\right]^2\Leftrightarrow -\frac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\frac{1}{9}$.

$\Rightarrow\left[\frac{1}{f'(x)-x}\right]'=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{1}{f'(x)-x}=\frac{1}{9}\int dx\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C\Leftrightarrow f'(x)=x+\frac{9}{x+9C}$

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)dx=\left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=9\ln 2+\frac{1}{2}$.

Câu 48.8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{16}{3}$. **B.** $I=-\frac{16}{5}$. **C.** $I=-\frac{14}{3}$. **D.** $I=-\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$

$\Rightarrow\ln\left[f(x).f(2-x)\right]=\ln e^{2x^2-4x}$

$\Leftrightarrow\ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x\ (*)$

Mặt khác, với $x=0$, ta có $\begin{cases}f(0).f(2)=1\\f(0)=1\end{cases}$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int_0^2\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right).\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=\int_0^2\left(x^3-3x^2\right)d\left(\ln\left[f(x)\right]\right)$

$=\left(\left(x^3-3x^2\right)\ln\left[f(x)\right]\right)\Big|_0^2-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln\left[f(x)\right]dx$

$=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right).\ln f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\int_0^2\left(6x-3x^2\right).\ln\left[f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\left(1\right)$

Đặt $t=2-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{vmatrix}x=0\to t=2\\x=2\to t=0\end{vmatrix}$

Do đó $I=-\int_2^0 3\left(2-t\right)t.\ln\left[f\left(2-t\right)\right]\mathrm{d}t=\int_0^2\left(6t-3t^2\right).\ln\left[f\left(2-t\right)\right]\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=\int_0^2\left(6x-3x^2\right).\ln\left[f\left(2-x\right)\right]\mathrm{d}x\left(2\right)$

Cộng 2 vế của $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$, ta được $2I=\int_0^2\left(6x-3x^2\right).\left(\ln\left[f\left(x\right)\right]+\ln\left[f\left(2-x\right)\right]\right)\mathrm{d}x$

Hay $I=\frac{1}{2}\int_0^2\left(6x-3x^2\right).\left(\ln\left[f\left(x\right)\right]+\ln\left[f\left(2-x\right)\right]\right)\mathrm{d}x\left(**\right)$

Thế $\left(*\right)$ vào $\left(**\right)$, ta có $I=\frac{1}{2}\int_0^2\left(6x-3x^2\right).\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$

Câu 48.9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(2\right)=\frac{1}{15}$ và $f'\left(x\right)+\left(2x+4\right)f^2\left(x\right)=0$. Biết $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln\frac{c}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Chọn D

Do $f\left(x\right)>0$, với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$ nên $f'\left(x\right)+\left(2x+4\right)f^2\left(x\right)=0\Leftrightarrow-\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}=2x+4$.

Suy ra $\frac{1}{f\left(x\right)}=x^2+4x+C$.

Mặt khác $f\left(2\right)=\frac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+4x+3}$.

Vậy $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\Rightarrow a=1,b=2,c=3\Rightarrow S=6$

Câu 48.10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1\\f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)+3xy\left(x+y\right)-1\end{cases}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f\left(x-1\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2\Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$. Do đó $f(x)=x^3+x+1$.

Vậy $\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 (x^3+x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Câu 48.11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2$.

Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(\sqrt{2};5)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

Khi đó $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t.f(\tan t)}{\tan^2 t+1}(\tan^2 t+1)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t.f(\tan t)\mathrm{d}t$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right).f(\tan t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t)\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=6$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Đổi cận $t=0\Rightarrow x=0$; $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=1$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan t)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Câu 48.12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, đồng biến, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{2}{3}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613<f^2(8)<2614$.

B. $2614<f^2(8)<2615$.

C. $2618<f^2(8)<2619$.

D. $2616<f^2(8)<2617$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $f'(x)\ge 0, \forall x\in(0;+\infty)$.

Mặt khác $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên

$$\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)\Rightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)},\ \forall x\in(0;+\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{(x+1)},\ \forall x\in(0;+\infty);$$

$$\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\sqrt{(x+1)}dx\Rightarrow\sqrt{f(x)}=\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C;$$

Từ $f(3)=\frac{2}{3}$ suy ra $C=\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}$

Như vậy $f(x)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2$

Bởi thế:

$$f(8)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2\Rightarrow f^2(8)=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^4.$$

Câu 48.13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M=20;\ m=2$.

B. $M=4\sqrt{11};\ m=\sqrt{3}$.

C. $M=20;\ m=\sqrt{2}$.

D. $M=3\sqrt{11};\ m=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{\left(f(x)\right)^2+1}}=2x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{\left(f\left(x\right)\right)^2+1}=x^2+C$, do $f\left(0\right)=0$ nên $C=1$.

Vậy $f\left(x\right)=\sqrt{x^4+2x^2}=x\sqrt{x^2+2}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}>0$ với mọi $x\in\left[1;3\right]$ nên $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;3\right]$.

Vậy $M=f\left(3\right)=3\sqrt{11}$; $m=f\left(1\right)=\sqrt{3}$.

Câu 48.14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Bài ra $f\left(0\right)=0$ và $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên $f\left(0\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left[f\left(x\right)\right]=\left[xf\left(x\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$

Suy ra: $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Mặt khác,

$f\left(x\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^0f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(*)$

Đặt $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^0f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(t\right)\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$

Nên từ $(*)\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$

Vậy $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 48.15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx$. Suy ra $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = -\frac{1}{3}$.

Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = \frac{1}{63}$.

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2.21 \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx + 21^2 \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3$, do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{4} \int_0^1 (x^4 - 1) dx = \frac{7}{5}$.

Câu 48.16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x . f(x) dx = \left[-\cos x . f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . f'(x) dx$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x) dx = \frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x+\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx - 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \cos x]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x) = \cos x$, do đó $f(x) = \sin x + C$. Vì $f(0) = 0$ nên $C = 0$.

Ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

Câu 48.17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$.

Giá trị $\int\limits_0^2 (x+1) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx$ bằng

A. $-\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'\left(\frac{x}{2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

$\int\limits_0^2 (x+1) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2(x+1).f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 - 2\int\limits_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6f(1) - 2f(0) - 4\int\limits_0^1 f(u)du$;

$\left(u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx; \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = 2 \Rightarrow u = 1 \end{cases}\right)$.

$f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{3}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \left(6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\right)dx = \int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)dx + 6\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} (1)$

*Tính $\int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)dx$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2.dx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$\int\limits_0^1 6x^2 f(x^3)dx = 2\int\limits_0^1 f(t)dt = 2\int\limits_0^1 f(x)dx (2)$.

*Tính $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} (3)$.

Thay kết quả (2) và (3) vào (1) ta được: $\int\limits_0^1 f(x)dx = 2\int\limits_0^1 f(x)dx + 6.\frac{2}{3} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = -4$.

Thay lần lượt $x = 0; x = 1$ vào $f(x) = 6x^2 f(x^3) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ ta được

$f(0) = 6; f(1) = 6f(1) + 3 \Rightarrow f(1) = -\frac{3}{5}$

Vậy $\int\limits_0^2 (x+1) f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6f(1) - 2f(0) - 4\int\limits_0^1 f(u)du = 6.\left(-\frac{3}{5}\right) - 2.6 - 4.(-4) = \frac{2}{5}$

Câu 48.18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Biết rằng $f(0) = 0$, tính $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. **D.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

• Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\cos x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

• Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'\left(x\right)-\cos x\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{4}-2.\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$.

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'\left(x\right)-\cos x\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'\left(x\right)-\cos x=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\cos x$.

Suy ra $f\left(x\right)=\sin x+C$.

Mà $f\left(0\right)=0\Rightarrow C=0$.

Khi đó $f\left(x\right)=\sin x$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48.19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int_0^1\left[f\left(x\right)+\left(ax+b\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left[f\left(x\right).\left(ax+b\right)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left(ax+b\right)^2\mathrm{d}x$

$=4+2a\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3a}\left(ax+b\right)^3\Big|_0^1=4+2\left(a+b\right)+\frac{a^2}{3}+ab+b^2$.

Cần xác định a, b để $\frac{a^2}{3}+\left(2+b\right)a+b^2+2b+4=0$. (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a.

Ta có: $\Delta = b^2+4b+4-\frac{4}{3}\left(b^2+2b+4\right) = \frac{-(b-2)^2}{3} \le 0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=-6$.

Khi đó: $\int_0^1 \left[f(x)+(-6x+2)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 6x-2$.

Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 dx = \int_0^1 (6x-2)^3 dx = \frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1 = 10$.

Câu 48.20: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$.

Tính $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J = 1+\ln 4$. **B.** $J = 4-\ln 2$. **C.** $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **D.** $J = \frac{1}{2}+\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2}dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}f(2) - f(1) + \left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}+\ln 4$.

Câu 48.21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f'(x)\,f\left[f(x)\right]dx = 10$ và $f(0)=1, f(1)=2$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx; x=0 \Rightarrow t = f(0)=1, x=1 \Rightarrow t = f(1)=2$.

Khi đó $10 = \int_0^1 f'(x)\,f\left[f(x)\right]dx = \int_1^2 f(t)dt$.

Vậy $\int_1^2 f(x)dx = 10$.

Câu 48.22: Cho $\int_0^1 \left(1-x^2\right) f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$..

A. $I=5\pi$. **B.** $I=10\pi$. **C.** $I=10$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn C

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right).f\left(\sin x\right).\cos x\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ và $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int_0^1 \left(1-t^2\right) f\left(t\right)\mathrm{d}t=10$.

Câu 48.23: Cho $\int_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int_1^e \frac{\left(x-1\right) f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^1 f\left(e^x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** −1. **C.** 1. **D.** −3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=e^x \Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$ và $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$.

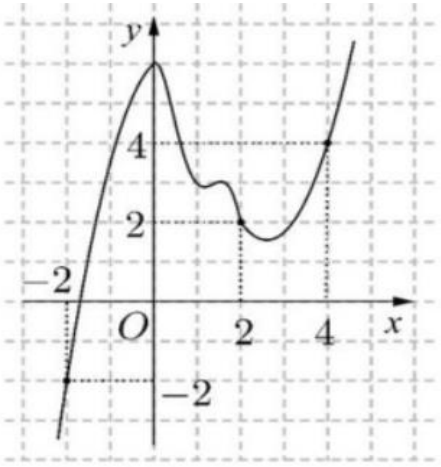
Do đó: $\int_0^1 f\left(e^x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Mặt khác theo giả thiết có:

$2-1=\int_1^e \frac{\left(x-1\right) f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e \left[\frac{\left(x-1\right) f\left(x\right)}{x}-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_1^e -\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_0^1 f\left(e^x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}=-1$.

Câu 48.24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới



Khi đó tổng $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

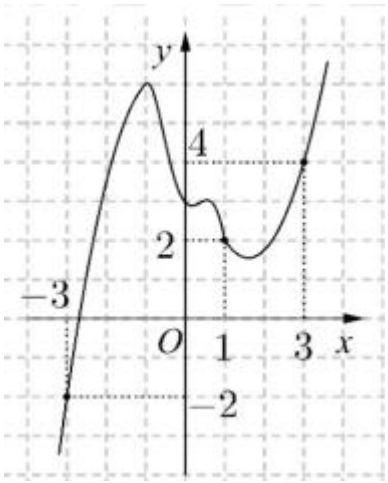
Dựa vào đồ thị hàm số có $f(-1)=-2, f(2)=2, f(4)=4$.

Đặt $t=x-2\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^2 f'(t)\mathrm{d}t=f(2)-f(-2)=2-(-2)=4$.

Đặt $t=x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=\int_2^4 f'(t)\mathrm{d}t=f(4)-f(2)=4-2=2$.

Vậy $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=6$.

Câu 48.25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới



Khi đó tổng $\int_{-2}^0 f'(2x+1)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Ta có $\int_{-2}^0 f'(2x+1)\mathrm{d}x=\int_{-3}^1 f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}\int_{-3}^1 f'(t)\mathrm{d}x=\frac{f(1)-f(-3)}{2}=\frac{2-(-2)}{2}=2$.

Đặt $t=x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có $\int_0^2 f'(x+1)\mathrm{d}x=\int_1^3 f'(t)\mathrm{d}t=f(3)-f(1)=4-2=2$.

Vậy $\int_{-2}^0 f'(2x+1)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+1)\mathrm{d}x=2+2=4$.

Câu 48.26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.Tích phân $\int\limits_1^5 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{31}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** $\dfrac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f\left(x^3+3x+1\right)=3x+2$ nên suy ra $f(1)=2$, $f(5)=5$.

Suy ra $I=\int\limits_1^5 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=23-\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=t^3+3t+1\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=0; x=5\Rightarrow t=1$

Do đó $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(t^3+3t+1\right)\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1(3t+2)\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t=\dfrac{59}{4}$.

Vậy $I=23-\dfrac{59}{4}=\dfrac{33}{4}$.

Câu 48.27: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ f'(x)=-e^x f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R} \text{. Tính giá trị của } f(\ln 2) \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A. $f(\ln 2)=\dfrac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2)=\dfrac{1}{3}$. **C.** $f(\ln 2)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2)=\ln^2 2+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-e^x f^2(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-e^x$ (do $f(x)>0$)

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int -e^x dx\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=-e^x+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{e^x-C}.$$

Thay $x=0$ ta được $f(0)=\dfrac{1}{e^0-C}\overset{f(0)=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} C=-1.$

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}\Rightarrow f(\ln 2)=\dfrac{1}{e^{\ln 2}+1}=\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 48.28: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2\left[f(x)\right]^3+3f(x)+5=x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_5^{10} f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=3$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)\Rightarrow 2t^3+3t+5=x\Rightarrow dx=(6t^2+3)dt$ và

$x=5\Rightarrow 2t^3+3t+5=0\Leftrightarrow t=0$

$x=10\Rightarrow 2t^3+3t+5=10\Leftrightarrow t=1$

Vậy $I=\int_5^{10} f(x)dx=\int_0^1 t(6t^2+3)dt=3$.

Câu 48.29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $bf(a)+af(b)=1$, với mọi $a,b\in[0;1]$.

Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

- Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t dt$

Với $x=0$ thì $t=0$; Với $x=1$ thì $t=\frac{\pi}{2}$

Ta được: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t dt$.

Đặt $x=\cos t\Rightarrow dx=-\sin t dt$

Với $x=0$ thì $t=\frac{\pi}{2}$; Với $x=1$ thì $t=0$

Ta được: $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin t dt$.

Suy ra: $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(\sin t)\cos t+f(\cos t)\sin t\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 48.30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2.f(x^3)-\frac{6x}{\sqrt{3x+1}}$, $\forall x\in[a;b]$.

Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. 2. **B.** 4. **C.** −1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=6x^2.f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 3x^2 f(x^3)dx=-6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$ (*)

Đặt $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2dx$

Với $x=0 \Rightarrow u=0$ và $x=1 \Rightarrow u=1$

Khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x^3)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1 f(x)dx$ thay vào (*), ta được:

$$\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^1 f(x)dx=-6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx=4.$$

Câu 48.31: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases}\frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases}, \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)dx\right]$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** −1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases}, \forall x\in[1;2].$

Suy ra $\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{(x+1)}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}g(x)+\frac{x+1}{x}f(x)=x+C.$$

Mà $\Leftrightarrow f(1)=g(1)=0 \Rightarrow C=-1 \Leftrightarrow I=\int_1^2\left[\frac{x+1}{x}f(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}.$

Câu 48.32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$

.

Tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow f(x)=8x^3f(x^4)-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\ (1)$

Xét $\int_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x=\int_0^1 2f(x^4)d(x^4)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2I$

Xét $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)t\mathrm{d}t}{t}=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1)\Rightarrow I=2I-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$.Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 48.33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x,\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1 f(1-x^2)dx$

A. $I=\frac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\frac{2}{15}$. **D.** $I=\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-x,\forall x\in[0;1]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Ta có $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=3(1-x)^2-3$

$\Rightarrow f(1-t)+2f(t)=3t^2-3\Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\\2f(x)+f(1-x)=3x^2-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x\\4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3f(x)=3x^2+6x-6\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x-2$

Khi đó $f(1-x^2)=(1-x^2)^2+2(1-x^2)-2=x^4-4x^2+1$

Suy ra $I=\int\limits_0^1 f\left(1-x^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^4-4x^2+1\right)dx=-\dfrac{2}{15}$.

Câu 48.34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(1\right)=1$, biểu thức $f\left(x\right)=f'\left(x\right)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $2<f\left(5\right)<3$. **B.** $4<f\left(5\right)<5$. **C.** $1<f\left(5\right)<2$. **D.** $3<f\left(5\right)<4$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\limits_1^5\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left[f\left(x\right)\right]\Big|_1^5=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}\left(3x+1\right)}{\sqrt{3x+1}}$

$\Leftrightarrow\ln\left[f\left(5\right)\right]-\ln\left[f\left(1\right)\right]=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_1^5\Leftrightarrow\ln\left[f\left(5\right)\right]=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f\left(5\right)=e^{\frac{4}{3}}\approx3,7937$.

Vậy $3<f\left(5\right)<4$.

Câu 48.35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+x^{2019}f\left(x^{2020}\right)=\sqrt{1-x^2}$ với mọi x thuộc $\left[0;1\right]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ bằng:

A. 1020604π. **B.** $\dfrac{2017\pi}{8072}$. **C.** $\dfrac{505\pi}{2021}$. **D.** $\dfrac{\pi}{8076}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$

Đặt $t=x^{2020}\Rightarrow dt=2020.x^{2019}dx$ và $\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\dfrac{1}{2020}\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt=\dfrac{1}{2020}\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx+\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{2021}{2020}\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\dfrac{505\pi}{2021}$.

Câu 48.36: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[4;8\right]$ và $f\left(x\right)\neq0\ \ \forall x\in\left[4;8\right]$. Biết rằng $\int\limits_4^8\dfrac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{\left[f\left(x\right)\right]^4}\mathrm{d}x=1$ và $f\left(4\right)=\dfrac{1}{4}$, $f\left(8\right)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f\left(6\right)$.

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_4^8=-\dfrac{1}{f(8)}+\dfrac{1}{f(4)}=2$ (1).

Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int_4^8\left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx=0$

Ta có $\int_4^8\left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2 dx=\int_4^8\frac{(f'(x))^2}{(f(x))^4}dx+2k\int_4^8\left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)dx+k^2\int_4^8 dx=1+4k+4k^2=(1+2k)^2$

$\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ thì $\int_4^8\left(\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{2}\right)^2 dx=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_4^6\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int_4^6 dx$

$\Leftrightarrow\int_4^6\frac{df(x)}{f^2(x)}=1\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(4)}-\frac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow 4-\frac{1}{f(6)}=1\Leftrightarrow f(6)=\frac{1}{3}$

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx=0$ không được phép suy ra $f(x)=0$ nhưng $\int_a^b\left[f(x)\right]^{2k}dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Câu 48.37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$4xf\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4xf\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$ nên ta có

$\int_0^1\left[4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)\right]dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)dx+\int_0^1 3f(1-x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ (1)

Lại có $\int_0^1 4x.f\left(x^2\right)dx=2\int_0^1 f\left(x^2\right)d\left(x^2\right)\overset{t=x^2}{\to}2\int_0^1 f(t)dt=2I$ và

$\int_0^1 3f(1-x)dx=-3\int_0^1 f(1-x)d(1-x)\overset{u=1-x}{\to}3\int_0^1 f(u)du=3I.$

Đồng thời $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{\to}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{4}.$

Vậy $(1)\Leftrightarrow 2I+3I=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{20}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$.

Câu 48.38: Cho $\int_0^1 f(x)dx=1$ và $\int_0^1\frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx=2$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-3$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$ Và $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Do đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{f\left(\tan x\right)}{1+\tan^2 x}.\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int\limits_0^1\dfrac{f\left(t\right)}{1+t^2}.dt=\int\limits_0^1\dfrac{f\left(x\right)}{1+x^2}.dx$.

Ta có : $\int\limits_0^1\dfrac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}dx=2\Leftrightarrow\int\limits_0^1\dfrac{\left[\left(x^2+1\right)-1\right]f\left(x\right)}{x^2+1}dx=2$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx-\int\limits_0^1\dfrac{f\left(x\right)}{x^2+1}dx=2\Leftrightarrow 1-I=2\Leftrightarrow I=-1.$

Câu 48.39: Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ thỏa mãn $xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)=x^3-\dfrac{1}{2x}-2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. Giá trị của

tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(5;6\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)=x^3-\dfrac{1}{2x}-2,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

$\Rightarrow\int\limits_1^2\left[xf\left(x^2\right)-f\left(2x\right)\right]dx=\int\limits_1^2\left(x^3-\dfrac{1}{2x}-2\right)dx$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x^2\right)d\left(x^2\right)-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(2x\right)d\left(2x\right)=\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x-2x\right)\Big|_1^2$

$\underset{v=2x}{\overset{u=x^2}{\Rightarrow}}\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 f\left(u\right)du-\dfrac{1}{2}\int\limits_2^4 f\left(v\right)dv=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx-\dfrac{1}{2}\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx+\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx\right]-\dfrac{1}{2}\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2\Leftrightarrow\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=\dfrac{7}{2}-\ln 2\approx 2.80852819.$

Câu 48.40: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=1$. Tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1\dfrac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1; x=16\Rightarrow t=4$.

Suy ra $1=\int_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t^2}.2t\mathrm{d}t=2\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\Rightarrow\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\sin x\cos x\mathrm{d}x\Rightarrow\cot x\mathrm{d}x=\cot x.\frac{\mathrm{d}t}{2\sin x\cos x}=\frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 x}=\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Do đó $1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(t\right).\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$

Đặt $t=4x\Rightarrow \mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\frac{1}{8}\Rightarrow t=\frac{1}{2}; x=1\Rightarrow t=4$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^1\frac{f\left(4x\right)\mathrm{d}x}{x}=\int_{\frac{1}{2}}^4\frac{f\left(t\right)}{\frac{t}{4}}.\frac{\mathrm{d}t}{4}=\int_{\frac{1}{2}}^4\frac{f\left(t\right)}{t}.\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

DẠNG TOÁN 46: TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM HỢP KHI BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

PHẦN I

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

• $f(x)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=m$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=m$.

• $f(x)=g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số lượng giác.

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số căn thức, đa thức, …

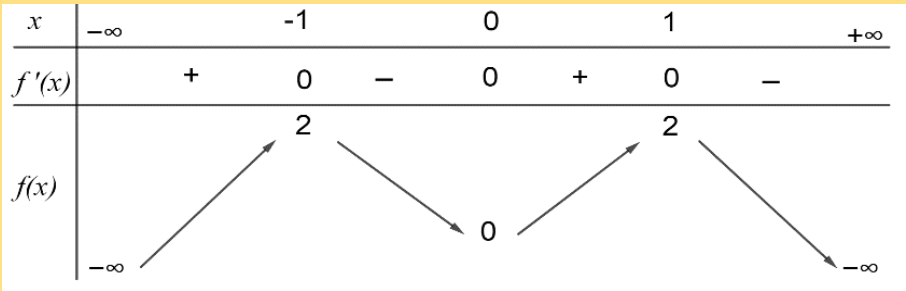
• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số mũ, hàm số logarit.

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2 - BDG 2019 - 2020)

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của PT $c.f(g(x))+d=m$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của PT $f(t)=k$ là số giao điểm của đồ thị $y=f(t)$ và đường thẳng $y=k$ với $t\in[a';b']$ (k là tham số).

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt ẩn phụ $t=g(x)$. Với $x\in[a;b]\Rightarrow t\in[a';b']$.

B2: Với $c.f(g(x))+d=m\Rightarrow f(t)=k$.

B3: Từ BBT của hàm số $y=f(x)$ suy ra BBT của hàm số $y=f(t)$ để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của phương trình $f(t)=k$.

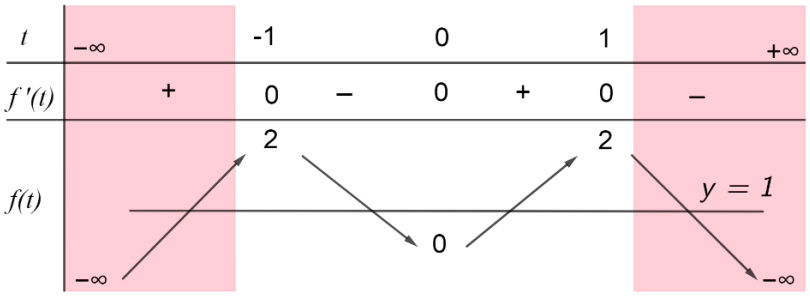
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

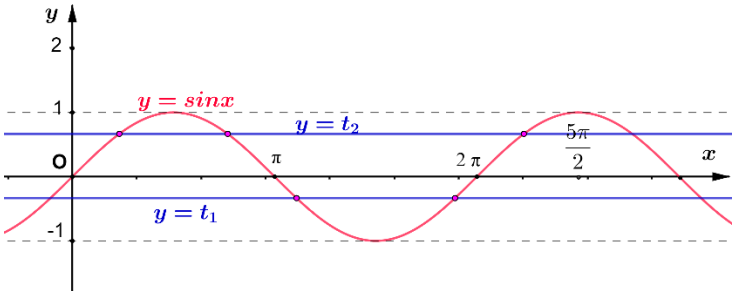
Đặt $t=\sin x,\ t\in[-1;1]$ thì PT $f(\sin x)=1\ (1)$ trở thành $f(t)=1\ (2)$.

BBT hàm số $y=f(t),\ t\in[-1;1]$:



Dựa vào BBT ta có số nghiệm $t\in[-1;1]$ của PT (1) là 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-1;0),\ t_2\in(0;1)$.

Quan sát đồ thị $y=\sin x$ và hai đường thẳng $y=t_1$ với $t_1\in(-1;0)$ và $y=t_2$ với $t_2\in(0;1)$.



+ Với $t_1\in(-1;0)$ thì PT $\sin x=t_1$ có 2 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

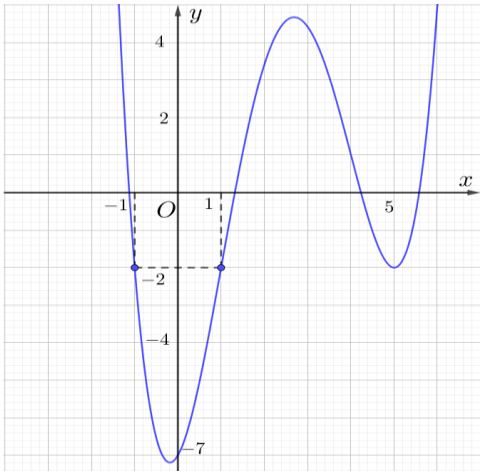
+ Với $t_2\in(0;1)$ thì PT $\sin x=t_2$ có 3 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=1$ là $2+3=5$ nghiệm.

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 3

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây:

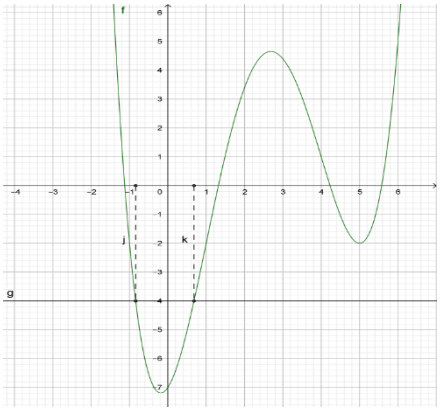


Số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=-4$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Xét phương trình: $f\left(\sin x\right)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\alpha\in\left(-1;0\right)\\ \sin x=\beta\in\left(0;1\right)\end{array}\right.$

Vì $x\in\left(0;\pi\right) \Rightarrow \sin x\in\left(0;1\right]$. Suy ra với $x\in\left(0;\pi\right)$ thì $f\left(\sin x\right)=-4\Leftrightarrow \sin x=\beta\in\left(0;1\right)$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x\in\left(0;\pi\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1]$.

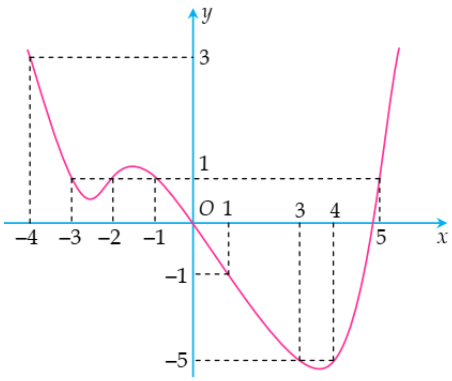
Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ trở thành $f(t)=\dfrac{13}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t)=\dfrac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in(0;1)$.

Với một nghiệm $t\in(0;1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $f(2\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$, $t\in[-2;2]$.

Xét phương trình $f(t)=1$, dựa vào đồ thị ta thấy:

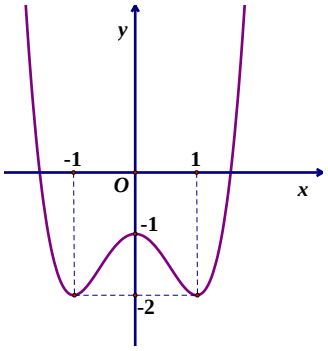
$$f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=-3 & (l)\\ t=-2 & (n)\\ t=-1 & (n)\\ t=5 & (l)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x=-2\\ 2\sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Với $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$, $x\in[0;2\pi]\Rightarrow x=\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$.

Vậy phương trình $f(2\sin x)=1$ có 3 nghiệm trên đoạn $[0;2\pi]$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ của phương trình $3f(\cos x)+5=0$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

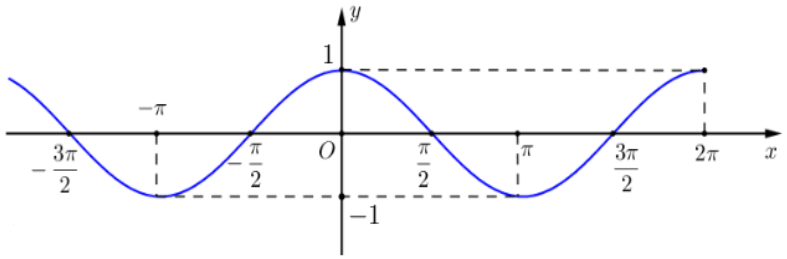
Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(\cos x)+5=0\Leftrightarrow f(\cos x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=a\in(-2;-1)\\ \cos x=b\in(-1;0)\\ \cos x=c\in(0;1)\\ \cos x=d\in(1;2)\end{array}\right.$

Vì $\cos x\in[-1;1]$ nên $\cos x=a\in(-2;-1)$ và $\cos x=d\in(1;2)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.



Phương trình $\cos x = b \in (-1;0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình $\cos x = b \in (-1;0)$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $3f(2\sin x)+1=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2\sin x$. Vì $x \in [-\pi;\pi]$ nên. $t \in [-2;2]$.

$\Rightarrow 3f(t)+1=0 \Leftrightarrow f(t) = -\dfrac{1}{3}$.

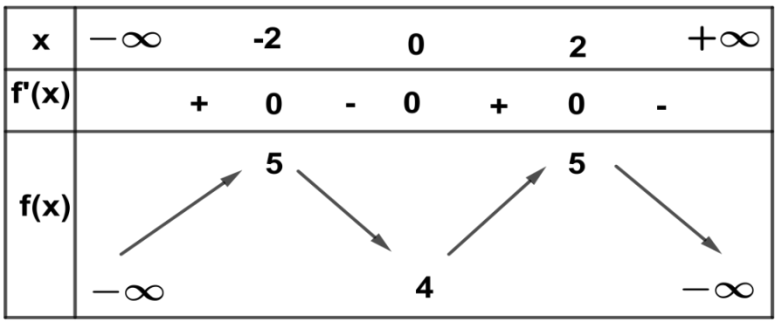
Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = -\dfrac{1}{3}$ có 2 nghiệm $t_1 \in (-2;0)$ và $t_2 \in (0;2)$.

Suy ra $\sin x = \dfrac{t_1}{2} \in (-1;0)$ và $\sin x = \dfrac{t_2}{2} \in (0;1)$.

- Với $\sin x = \dfrac{t_1}{2} \in (-1;0)$ thì phương trình có 2 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0$.
- Với $\sin x = \dfrac{t_2}{2} \in (0;1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0 < x_3 < x_4 < \pi$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

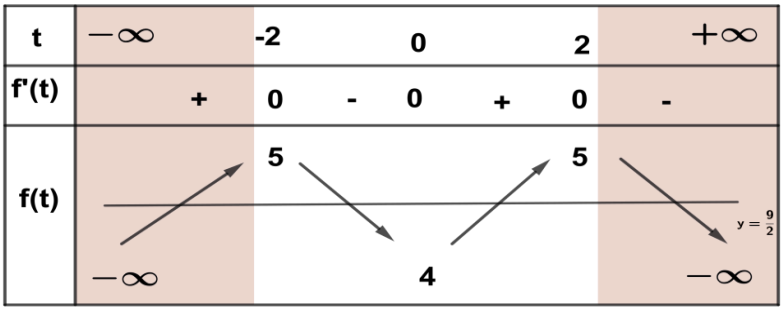
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\cos x$, $t\in[-2;2]$ thì $2f(2\cos x)-9=0$ trở thành $2f(t)-9=0\Leftrightarrow f(t)=\frac{9}{2}$ (1).

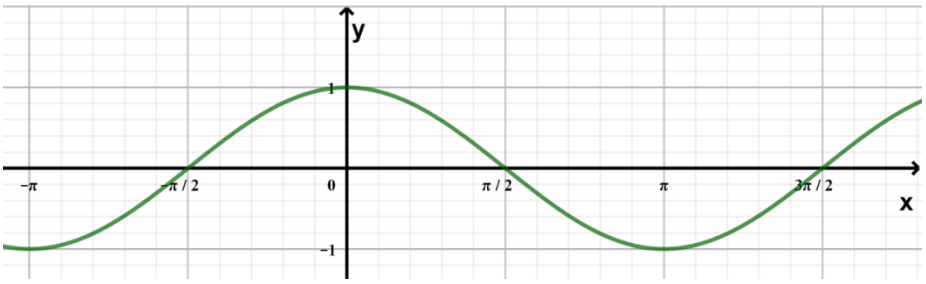
Nhận xét: số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C):y=f(t)$ và đường thẳng $(d):y=\frac{9}{2}$.

Bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-2;2]$:



Dựa vào bảng biến thiên, trên đoạn $[-2;2]$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-2;0)$, $t_2\in(0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$:



- Với $t_1 \in (-2;0) \Rightarrow 2\cos x = t_1 \in (-2;0) \Rightarrow \cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\pi < x_1 < -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$.

- Với $t_2 \in (0;2) \Rightarrow 2\cos x = t_2 \in (0;2) \Rightarrow \cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2} < x_4 < 0 < x_5 < \frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x) - 9 = 0$ là 5 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm trên đoạn $[-2\pi;2\pi]$ của phương trình $4f(\cos x) + 5 = 0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

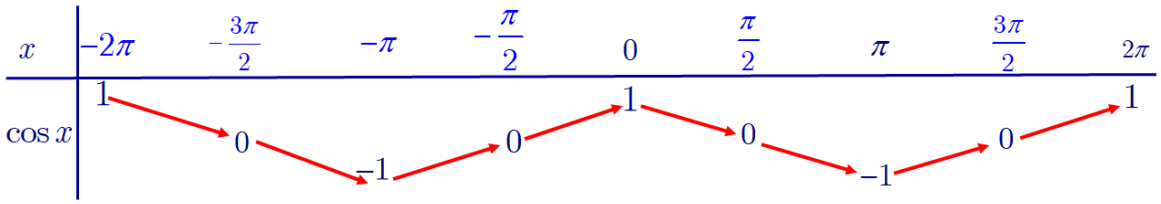
Chọn D

Từ $4f(\cos x) + 5 = 0 \Rightarrow f(\cos x) = -\frac{5}{4}(1)$.

Đặt $t = \cos x$ với $x \in [-2\pi;2\pi]$ thì $t \in [-1;1]$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(t) = -\frac{5}{4}$.

Xét hàm số $h(x)=\cos x$; $x\in[-2\pi;2\pi]$, ta có BBT:

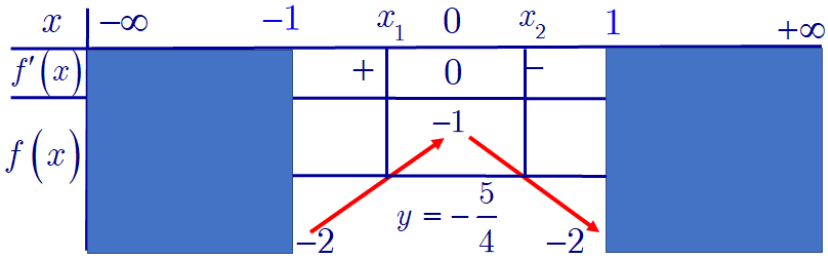


Với $t=-1$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Với $-1<t<1$ thì phương trình có 4 nghiệm.

Với $t=1$ thì phương trình có 3 nghiệm.

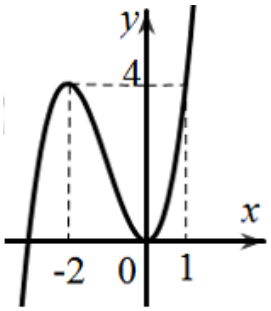
Xét $f(t)=-\dfrac{5}{4}$ với $t\in[-1;1]$.



Nhìn vào BBT, khi đó phương trình $f(t)=-\dfrac{5}{4}$ có 2 nghiệm.

Vậy tất cả có 8 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ là



A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

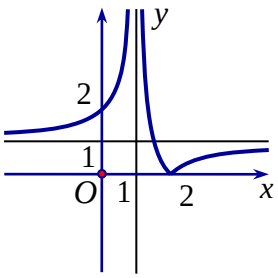
Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-2;1]$.

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3m+1$ có nghiệm thuộc $[-2;1]\Leftrightarrow 0\le 3m+1\le 4\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le m\le 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1);\ (1;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\log_2 x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(4;+\infty)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $[0;1)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

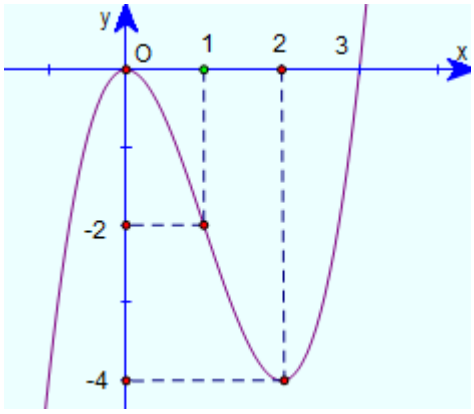
Chọn C

Đặt $t=\log_2 x$. Với $x\in(4;+\infty)$ thì $t\in(2;+\infty)$.

Do đó phương trình $f(\log_2 x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;+\infty)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;+\infty)$ khi $m\in[0;1)$.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây:



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2$.

A. 1 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\sqrt{-x^2+4x-3}$ xác định khi $1\le x\le 3$.

Từ đồ thị của hàm số, ta có $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{-x^2+4x-3}=a<0(\text{loại})\\ \sqrt{-x^2+4x-3}=1\\ \sqrt{-x^2+4x-3}=b\in(2;3)\end{cases}$.

- $\sqrt{-x^2+4x-3}=1\Leftrightarrow x=2.$
- $\sqrt{-x^2+4x-3}=b\Leftrightarrow x^2-4x+3+b^2=0$ có

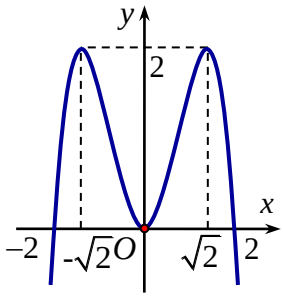
$\Delta'=4-\left(3+b^2\right)=1-b^2<0,\forall b\in(2;3).$

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2$ có đúng 1 nghiệm.

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{-x^2+4x-3}\Rightarrow t\in[0;1],\ \forall x\in[1;3]$.

Ta có $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2$ trở thành $f(t)=-2$, khi đó phương trình có 1 nghiệm trên $[0;1]$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm là:



A. $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $[0;2]$.

Lời giải

Chọn D

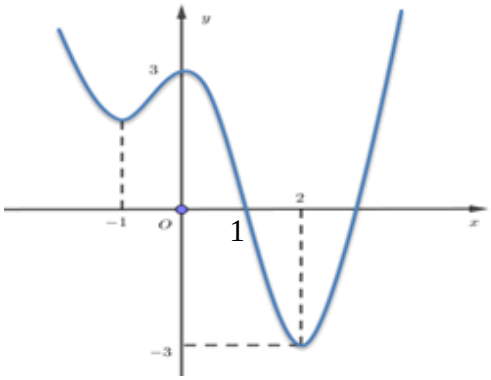
Điều kiện của phương trình: $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}$. Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Do đó phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[0;2]$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(e^x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$.



A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $[-3;0]$

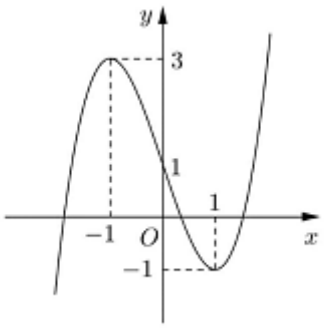
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\mathrm{e}^x$. Với $x\in(0;\ln 2)\Rightarrow t\in(1;2)$.

Phương trình $f\left(\mathrm{e}^x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2)\Leftrightarrow -3<m<0$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sin^2 x\right)=m$ có nghiệm.



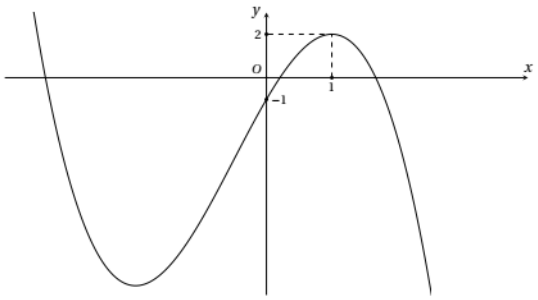
A. $[-1;1]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $[-1;3]$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow t\in[0;1]$, khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm t trên đoạn $[0;1]$. Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra $m\in[-1;1]$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\log_2 x\right)=2m+1$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

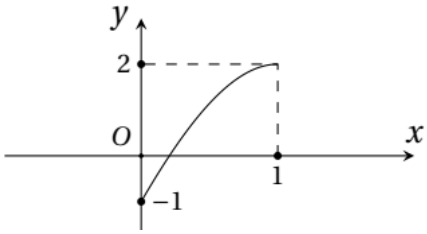


A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

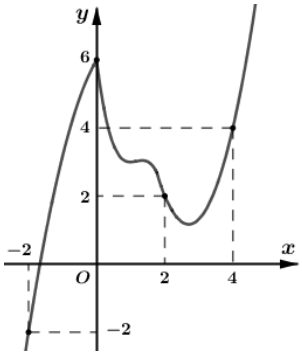
Đặt $t=\log_2 x \overset{x\in[1;2]}{\to} t\in[0;1] \Rightarrow f(t)\in[-1;2]$. Ta có đồ thị hình vẽ như sau:



Để phương trình đã cho có nghiệm thoả mãn yêu cầu thì $-1\le 2m+1\le 2 \Leftrightarrow -1\le m\le \frac{1}{2}$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0\}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x)=m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$?



A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

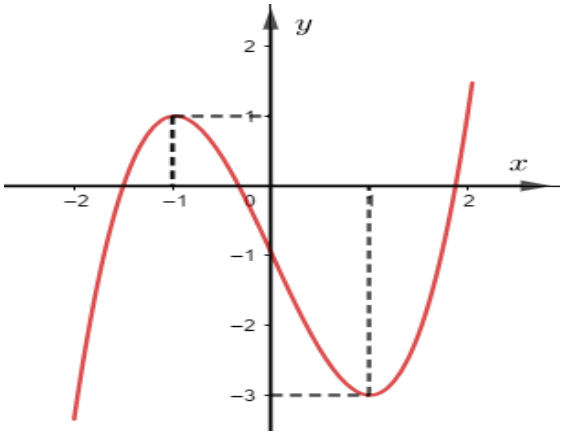
Chọn B

Đặt $t=2\log_2 x$, $x\in\left[\frac{1}{2};2\right)\Rightarrow t\in[-2;2)$. Với mỗi $t\in[-2;2)$ thì phương trình $2\log_2 x=t$ có một nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Phương trình $f\left(2\log_2 x\right)=m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm duy nhất thuộc $\left[-2;2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ m=6\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f\left(2\cos x-1\right)=m$ có hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2\cos x-1=t$; $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in\left(-1;1\right]$.

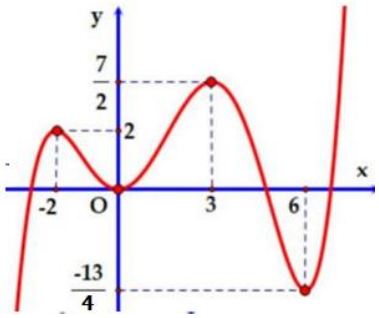
Ta có: $t\in\left(-1;1\right)$ cho 2 nghiệm $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó phương trình $f\left(2\cos x-1\right)=m$ có hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có một nghiệm thuộc $\left(-1;1\right)$.

Từ đồ thị ta thấy $f\left(t\right)=m$ có một nghiệm thuộc $\left(-1;1\right)\Rightarrow m\in\left(-3;1\right)$.

Vậy tập hợp số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\left\{-2;-1;0\right\}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3-6x+2)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=2x^3-6x+2$ trên đoạn $[-1;2]$, ta có bảng biến thiên như sau :

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

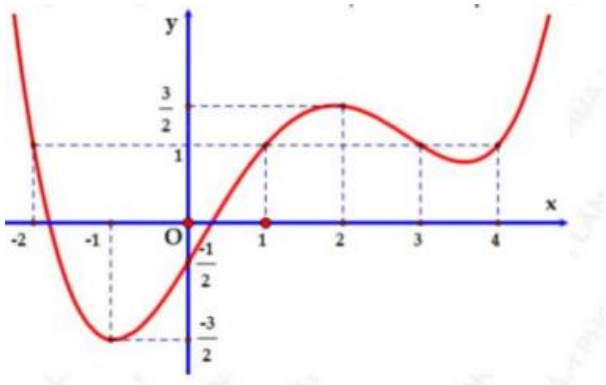
Đặt $t=2x^3-6x+2$, với $x\in[-1;2]$ thì $t\in[-2;6]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có nhận xét với mỗi giá trị $t_0\in(-2;6]$ thì phương trình $t_0=2x^3-6x+2$ có hai nghiệm phân biệt $x\in[-1;2]$ và tại $t_0=2$ thì phương trình $t_0=2x^3-6x+2$ có một nghiệm.

Với nhận xét trên và đồ thị hàm số trên đoạn $[-2;6]$ thì phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $(-2;6]$.

Suy ra $0<m<2$. Vậy một giá trị nguyên $m=1$ thỏa mãn.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=m-2019$ có nghiệm?

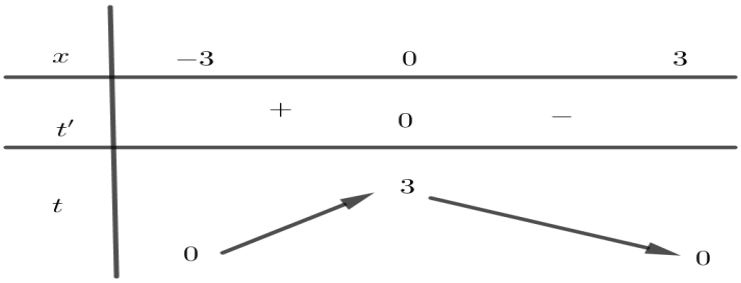
A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=m-2019 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{9-x^2}\right)=\dfrac{m-2019}{2}$ $(*)$.

Đặt $t=\sqrt{9-x^2}$ với $x\in[-3;3]$. Ta có $t'=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow t'=0 \Leftrightarrow x=0$.



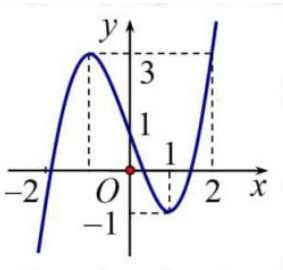
Từ bảng biến thiên ta có $t\in[0;3]$. Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\dfrac{m-2019}{2}$ có nghiệm $t\in[0;3]$ hay $\min\limits_{[0;3]} f(t)\le\dfrac{m-2019}{2}\le\max\limits_{[0;3]} f(t)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le\frac{m-2019}{2}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow -1\le m-2019\le 3\Leftrightarrow 2018\le m\le 2022.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2018;2019;2020;2021;2022\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(e^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(e^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=\dfrac{m^2-1}{8}\left(*\right)$.

Đặt $e^x=t\left(t>0\right)$. Khi đó $\left(*\right)$ trở thành $f\left(t\right)=\dfrac{m^2-1}{8}\quad\left(1\right)$.

Ta có mỗi $t>0$ cho duy nhất một giá trị $x=\ln t$.

Phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=\dfrac{m^2-1}{8}$ cắt phần đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1\Leftrightarrow -7<m^2<9\Leftrightarrow -3<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1;2\right\}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f^2\left(x\right)=3-2f\left(x\right)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f^2\left(x\right)=3-2f\left(x\right)\Leftrightarrow f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=-3\end{array}\right.$$

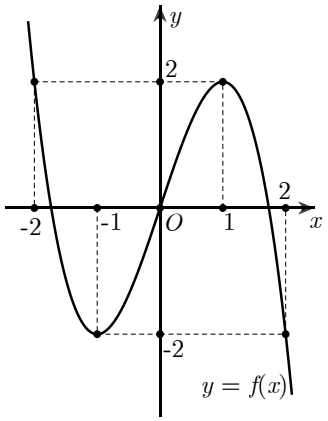
Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có hai nghiệm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=-3$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=-3$ có hai nghiệm phân biệt, không trùng với các nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=1$.

Vậy phương trình $f^2\left(x\right)=3-2f\left(x\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi phương trình $f\left(f(x)\right)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

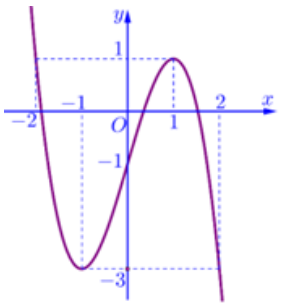
$$f\left(f(x)\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-2 \\ f(x)=1 \end{array}\right. .$$

Số nghiệm của các phương trình $f(x)=-2$ và $f(x)=1$ lần lượt là số giao điểm đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=-2,\ y=1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=-2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1;\ x_2=2$ và $f(x)=1$ có ba nghiệm $x_3=a;\ x_4=b;\ x_5=c$ sao cho $-2<a<-1<b<1<c<2$.

Vậy phương trình $f\left(f(x)\right)=2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị:

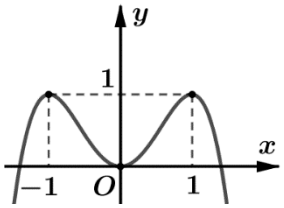
$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (-2<a<-1)\\x=b\ (0<b<1)\\x=c\ (1<c<2)\end{array}\right.\Rightarrow f\left(2-f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=a\\2-f(x)=b\\2-f(x)=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2-a\ (1)\\f(x)=2-b\ (2)\\f(x)=2-c\ (3)\end{array}\right.$$

Nghiệm của các phương trình (1); (2); (3) lần lượt là giao điểm của các đường thẳng $y=2-a;\ y=2-b;\ y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- $a\in(-2;-1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.
- $b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.
- $c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f\left[f(\cos 2x)\right]=0$?

A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x\in[-1;1]$ thì $y\in[0;1]$.

Do đó nếu đặt $t=\cos 2x$ thì $t\in[-1;1]$, khi đó $f(\cos 2x)\in[0;1]$.

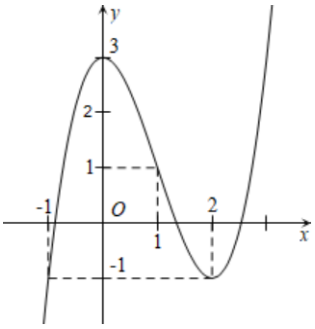
Dựa vào đồ thị, ta có $f\left[f(\cos 2x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos 2x)=0\\f(\cos 2x)=a\ (a<-1)\ (\text{loại})\\f(\cos 2x)=b\ (b>1)\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Phương trình $f(\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\\cos 2x=a\ (a<-1)\ (\text{loại})\\\cos 2x=b\ (b>1)\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2+1)]^2 - f(x^2+1) - 2 = 0$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow t \geq 1$.

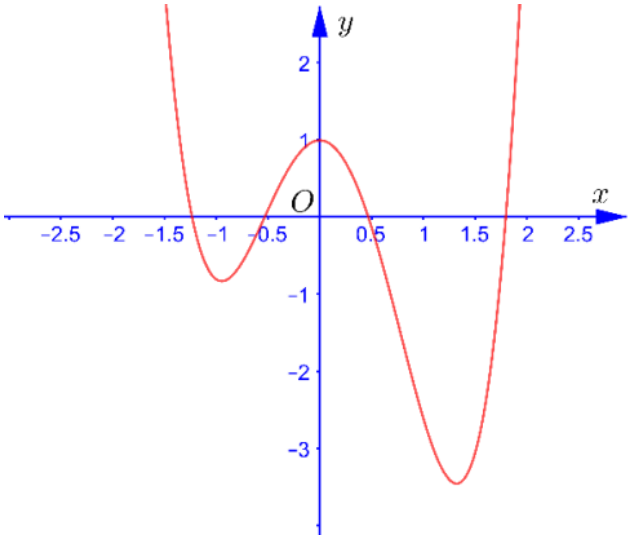
Ta thấy ứng với $t = 1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t > 1$ cho ta hai giá trị của x.

Phương trình đã cho trở thành: $[f(t)]^2 - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = -1 \\ f(t) = 2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t) = -1$ có 1 nghiệm $t = 2$ và phương trình $f(t) = 2$ có 1 nghiệm $t > 2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 5. Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có dạng như hình vẽ sau:

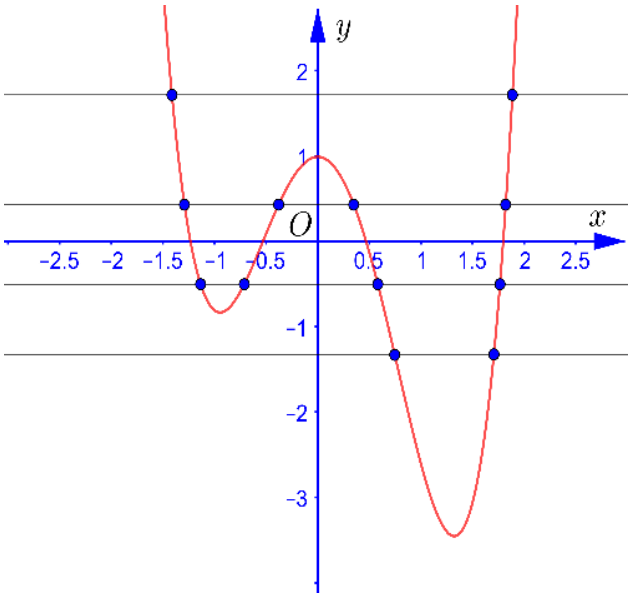


Phương trình $a(f(x))^4 + b(f(x))^3 + c(f(x))^2 + df(x) + e = 0$ (*) có số nghiệm là

A. 2. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C.



Ta thấy đồ thị $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1\in(-1,5;-1)$, $x_2\in(-1;-0,5)$, $x_3\in(0;0,5)$, $x_4\in(1,5;2)$.

Kẻ đường thẳng $y=m$, khi đó:

Với $m=x_1\in(-1,5;-1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_1$ có 2 nghiệm.

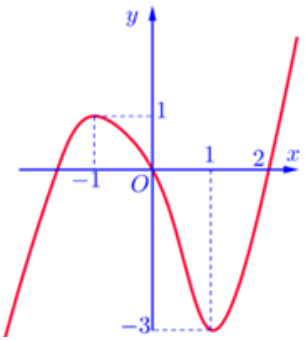
Với $m=x_2\in(-1;-0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m=x_3\in(0;0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m=x_4\in(1,5;2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

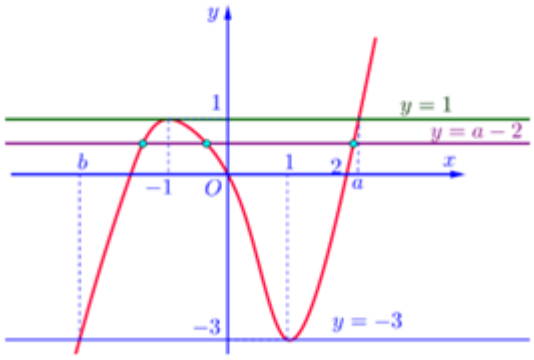


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

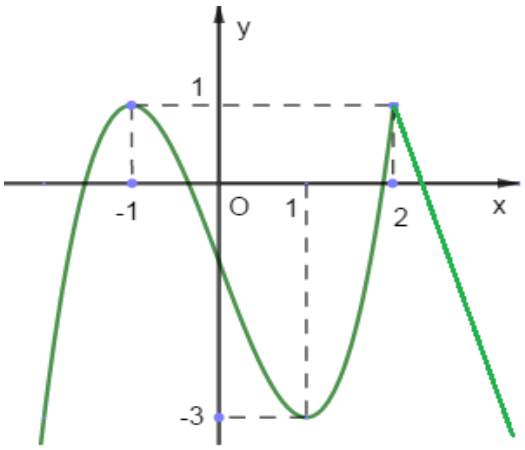
$$f\left(2+f\left(e^{x}\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2+f\left(e^{x}\right)=-1\\2+f\left(e^{x}\right)=a,(2<a<3)\end{array}\right.$$

$$2+f\left(e^{x}\right)=-1\Leftrightarrow f\left(e^{x}\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{x}=1\\e^{x}=b<-1(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$$

$$2+f\left(e^{x}\right)=a\Leftrightarrow f\left(e^{x}\right)=a-2,(0<a-2<1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^{x}=c<-1(L)\\e^{x}=d<0(L)\\e^{x}=t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây:



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy điều kiện của phương trình đã cho là $x\geq 0$.

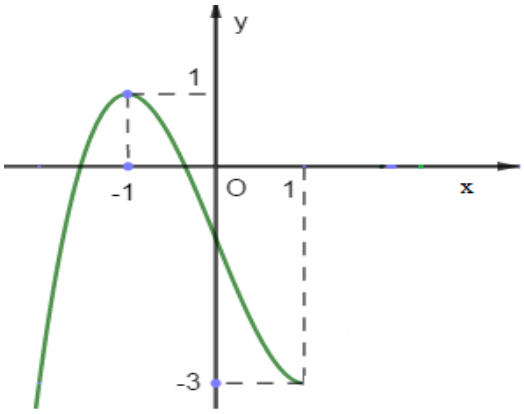
Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}\quad(1)\Rightarrow t\in(-\infty;1]$.

Dễ thấy phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất $\forall t \in (-\infty;1]$.

Phương trình đã cho có dạng: $f(t)=a \quad (2),\ t \le 1$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm của (2).

Đồ thị hàm số $y=f(t),\ t \le 1$ có dạng:



Do đó:

(2) vô nghiệm khi $a>1$.

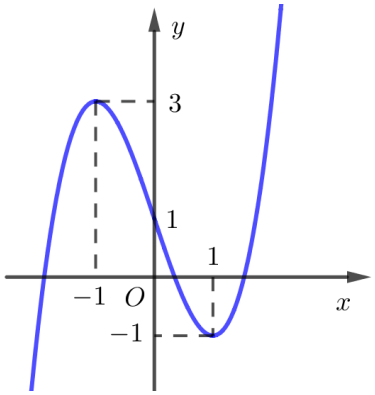
(2) có hai nghiệm khi $-3 \le a<1$.

(2) có nghiệm duy nhất khi $a=1$ hoặc $a<-3$.

Vậy $m=2, n=1 \Rightarrow m+n=3$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f(\sin x)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -5. **B.** -8. **C.** -10. **D.** -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, do $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x \in (0;1] \Rightarrow t \in (0;1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f(t)=3t+m \Leftrightarrow f(t)-3t=m \quad (*)$.

Đặt $g(t)=f(t)-3t$. Ta có: $g'(t)=f'(t)-3 \quad (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có: $\forall t\in(0;1]: f'(t)<0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t\in(0;1]: g'(t)<0$.

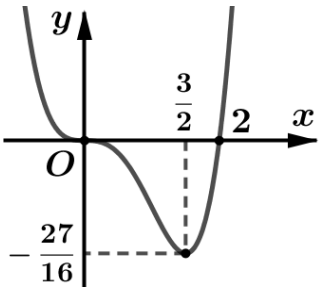
Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

PT (*) có nghiệm $t\in(0;1]\Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t)\le m<\max\limits_{[0;1]} g(t)\Leftrightarrow g(1)\le m<g(0)$

$\Leftrightarrow f(1)-3\le m<f(0)\Leftrightarrow -4\le m<1$.

Vậy m nguyên là: $m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}\Rightarrow S=-10$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2|\sin x|\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g(x)$	0	↗	2	↘	0	↗	2	↘	0	↗	2	↘	0

Phương trình $f\left(2|\sin x|\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(t)=f\left(\dfrac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $-\dfrac{27}{16}<f\left(\dfrac{m}{2}\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}0<\dfrac{m}{2}<2\\ \dfrac{m}{2}\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\ m\neq 3\end{cases}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn bài toán.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $f\left(\dfrac{1}{3}\sin x-\dfrac{1}{4}\cos x\right)=-2$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta xét phương trình $f(x)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

Nên từ đó ta có : $f\left(\dfrac{1}{3}\sin x-\dfrac{1}{4}\cos x\right)=-2\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\sin x-\dfrac{1}{4}\cos x=\pm 1$

$\Leftrightarrow\dfrac{5}{12}\left(\dfrac{4}{5}\sin x-\dfrac{3}{5}\cos x\right)=\pm 1\Leftrightarrow\dfrac{5}{12}\sin(x-\alpha)=\pm 1\Leftrightarrow\sin(x-\alpha)=\pm\dfrac{12}{5}$

Dễ thấy rằng phương trình trên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã vô nghiệm trên đoạn $[0;2\pi]$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f\left(\sin x+\cos x\right)+4=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $3f\left(\sin x+\cos x\right)+4=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ta được phương trình $3f\left(t\right)+4=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=-\frac{4}{3}$.

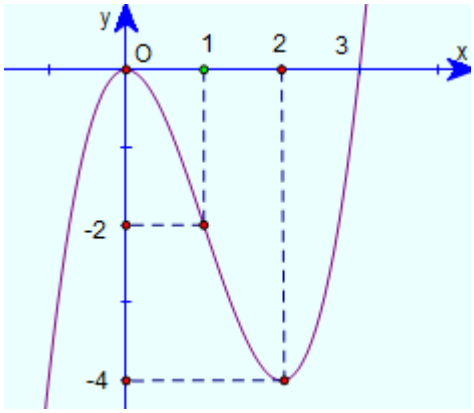
Dựa vào bảng biến thiên kết hợp điều kiện của ẩn t ta có:

$$f\left(t\right)=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in\left(-\sqrt{2};0\right)\\t=b\in\left(0;\sqrt{2}\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}\in\left(-1;0\right) & (1)\\\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}\in\left(0;1\right) & (2)\end{array}\right.$$

Ta có: trên đoạn $\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ phương trình (1) có 2 nghiệm, còn phương trình (2) có 3 nghiệm khác 2 nghiệm của phương trình (1).

Vì vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm trên đoạn $\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ của phương trình $3f\left(2\left|\cos x\right|\right)+2=0$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2\left|\cos x\right|$. Vì $x\in\left[-\pi;\pi\right]$ nên $t\in\left[0;2\right]\Rightarrow 3f\left(t\right)+2=0\Leftrightarrow f\left(t\right)=-\frac{2}{3}$.

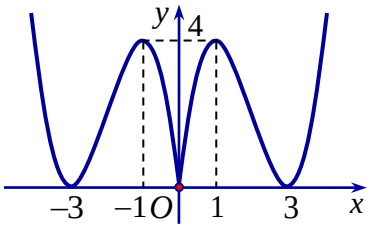
Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=-\frac{2}{3}$ có 1 nghiệm $t_0\in(0;1)$.

Suy ra $|\cos x|=\frac{t_0}{2}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

- Với $\cos x=\frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $\frac{-\pi}{2}<x_1<0<x_2<\frac{\pi}{2}$.
- Với $\cos x=-\frac{t_0}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $-\pi<x_3<-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}<x_4<\pi$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f\left(2|\sin x|+1\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[0;4)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $[0;8)$.

Lời giải

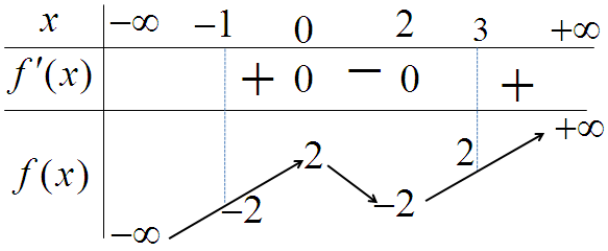
Chọn D

Đặt $t=2|\sin x|+1$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(1;3]$.

Do đó phương trình $2f\left(2|\sin x|+1\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\frac{m}{2}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1;3]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\frac{m}{2}\in[0;4)\Leftrightarrow m\in[0;8)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=f(m)$ có nghiệm thực?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $2\sin x+1=t\Rightarrow t\in[-1;3]$ phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ trở thành $f(t)=f(m)$.

Phương trình $f(2\sin x+1)=f(m)$ có nghiệm khi phương trình $f(t)=f(m)$ có nghiệm $t\in[-1;3]$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(t)=f(m)$ có nghiệm $t\in[-1;3]$ khi $-2\le f(m)\le 2$.

Cũng từ bảng biến thiên suy ra $-2\le f(m)\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{1,2,3\}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+ 0	-
f(x)	$+\infty$ ↘	-4 ↗	-3 ↘	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f(-2|\sin x|)+10=0$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

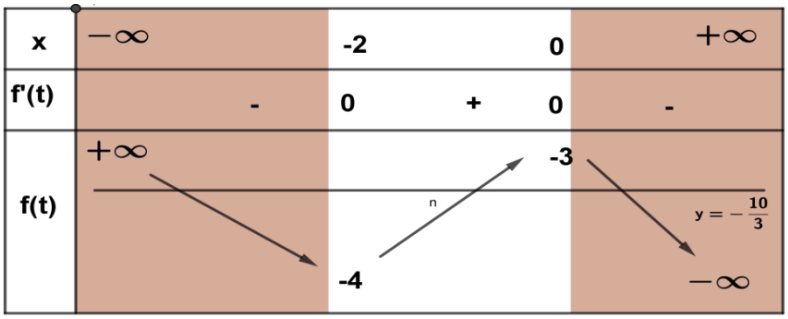
Chọn D

Đặt $t=-2|\sin x|$, $t\in[-2;0]$ thì $3f(-2|\sin x|)+10=0$ (1) trở thành

$$3f(t)+10=0\Leftrightarrow f(t)=-\frac{10}{3}\ (2).$$

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (2) số giao điểm của hai đồ thị: $(C):y=f(t)$ và đường thẳng $(d):y=-\frac{10}{3}$.

Bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-2;0]$:

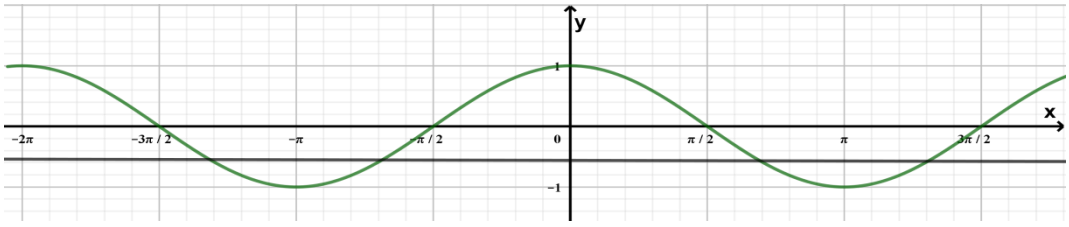


Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t\in[-2;0]$ của (2) là 1 nghiệm $t\in(-2;0)$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=t_1\in(-1;0)\\ \sin x=t_2\in(0;1)\end{array}\right.$.

- Trường hợp 1: $\sin x=t_1\in(-1;0)$

Đồ thị hàm số: $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-2\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$

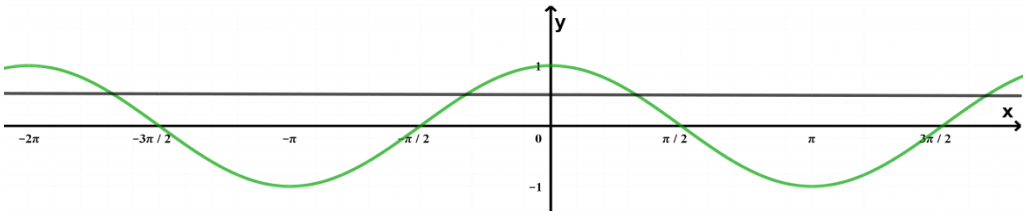


Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $\sin x=t_1\in(-1;0)$ là số giao điểm cuả hai đồ thị $y=\sin x$ và đường thẳng $d: y=t_1, t_1\in(-1;0)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\sin x=t_1\in(-1;0)$ có 4 nghiệm phân biệt $-\dfrac{3\pi}{2}<x_1<-\pi;\ -\pi<x_2<-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}<x_3<\pi;\ \pi<x_4<\dfrac{3\pi}{2}$.

- Trường hợp 2: $\sin x=t_2\in(0;1)$ PT (1)

Đồ thị hàm $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-2\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$

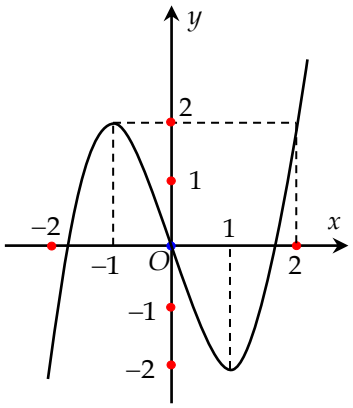


Nhận xét: Số nghiệm của phương trình $\sin x=t_2\in(0;1)$ là số giao điểm cuả hai đồ thị $y=\sin x$ và đường thẳng $d: y=t_2, t_2\in(0;1)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $\sin x = t_2 \in (0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt $-2\pi < x_5 < -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} < x_6 < 0; 0 < x_7 < \frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $3f\left(-2|\sin x|\right)+10=0$ là 7 nghiệm.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.



A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

+) Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên suy ra $t \in (-1;0]$.

Trên khoảng $(-1;0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1;0]$ thì $f(0) \le f(t) < f(-1)$ hay $0 \le f(t) < 2$.

+) Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u = \sqrt{2f(t)}, u \in [0;2)$. Khi đó bài toán trở thành:

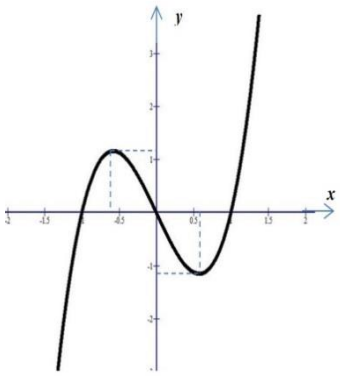
Tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0;2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0;2)$ thì $f(u) \in [-2;2) \Rightarrow -2 \le m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\}$. Vậy có 4 giá trị của m.

Tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là -2.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$ của phương trình $2\left|f(\cos x)\right|-1=0$ là:

A. 12. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x$ với $x\in[0;3\pi]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Phương trình $2\left|f(\cos x)\right|-1=0$ trở thành $\left[\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{1}{2} \quad (1) \\ f(t)=\dfrac{-1}{2} \quad (2) \end{array}\right.$

Căn cứ đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy:

+ $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=t_1\in(-1;0) \\ t=t_2\in(-1;0) \end{array}\right.\ (t_1\neq t_2)$

Với $t=t_1\in(-1;0)\Rightarrow\cos x=t_1$ có 3 nghiệm thuộc $[0;3\pi]$.

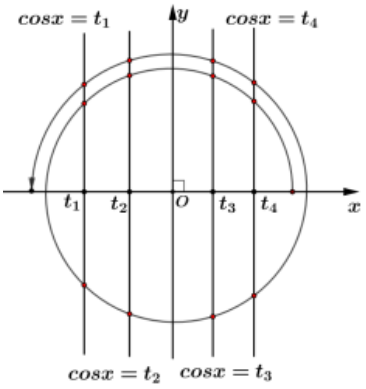
Với $t=t_2\in(-1;0)\Rightarrow\cos x=t_2$ có 3 nghiệm thuộc $[0;3\pi]$.

$+(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=t_3\in(0;1) \\ t=t_4\in(0;1) \end{array}\right.\ (t_3\neq t_4)$

Với $t=t_3\in(0;1)\Rightarrow\cos x=t_3$ có 3 nghiệm thuộc $[0;3\pi]$.

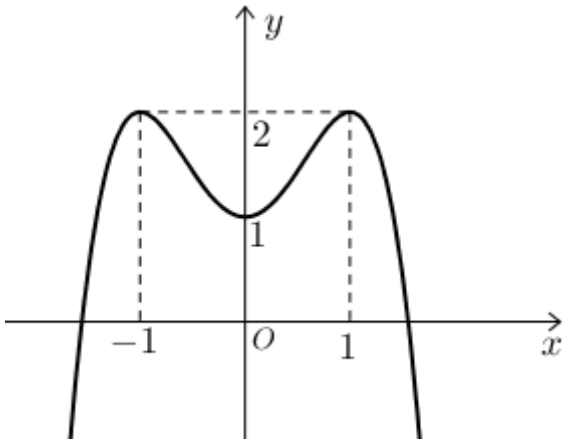
Với $t=t_4\in(0;1)\Rightarrow\cos x=t_4$ có 3 nghiệm thuộc $[0;3\pi]$.

Các nghiệm trên không có nghiệm nào trùng nhau.



Vậy phương trình đã cho có 12 nghiệm thuộc $[0;3\pi]$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$, $a\neq 0$ và có đồ thị như sau:



Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2f\left(\sin x\right)-3\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sin x=t$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]\Rightarrow 2f\left(\sin x\right)=2f\left(t\right)\in[2;4]$.

Đặt $u=2f\left(\sin x\right)-3\Rightarrow u\in[-1;1]$.

Phương trình trở thành: $f\left(u\right)=m$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại các điểm có hoành độ thuộc $[-1;1]$.

Dựa vào đồ thị suy ra $1\le m\le 2$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn là 3.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

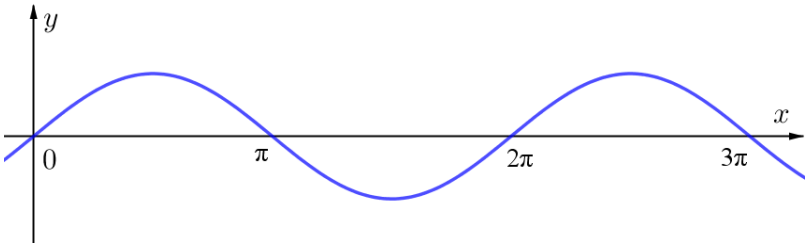
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0;3\pi]$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$f\left(2\sin x+m\right)+2=0\Leftrightarrow f\left(2\sin x+m\right)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+m=-1\\2\sin x+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{-m-1}{2}\\\sin x=\dfrac{-m+1}{2}\end{array}\right.$$



Nhận xét $\dfrac{-m+1}{2}-\dfrac{-m-1}{2}=1$.

Để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì

$\left[\begin{array}{ll}\sin x=\dfrac{-m-1}{2} & (1)\\\sin x=\dfrac{-m+1}{2} & (2)\end{array}\right.$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

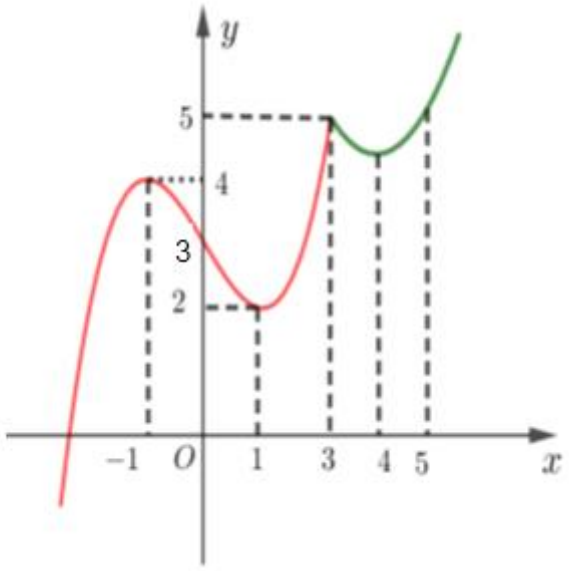
$\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\sin x$, để (1) có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-m-1}{2}=0\\\dfrac{-m+1}{2}=1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}-1<\dfrac{-m-1}{2}<0\\0\le\dfrac{-m+1}{2}<1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\\left\{\begin{array}{l}-1<m<1\\-1<m\le 1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le m<1.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=0;m=-1$ để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới đây:



Tìm m để phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

A. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

B. $2<m\le 3$ hoặc $f(4)<m<5$.

C. $2\le m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

D. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m\le 5$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\left|x^2-2x\right|$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x)=x^2-2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ và $u'=2x-2;\ u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$		0		1		2		$\frac{7}{2}$
$u'(x)$			$-$		0		$+$		
$u(x)$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$
$t=\left\|u(x)\right\|$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Ta có nhận xét:

Với $t=0$ hoặc $1<t\le\frac{21}{4}$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 2 nghiệm phân biệt;

Với $t=1$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 3 nghiệm phân biệt;

Với mỗi $t\in(0;1)$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t=\left|x^2-2x\right|$ phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ thành $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$.

Dựa vào đồ thị, ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m=2$

$f(t)=2\Leftrightarrow t=1$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: $2<m<3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(0;1)\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 3: $m=3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 4: $3<m<f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow t=a\in(1;4)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 5: $m=f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=b\in(1;4)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 6: $f(4)<m<5$

$f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 7: $m=5$

$f(t)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 8: $5<m<f\left(\frac{21}{4}\right)$

$f(t)=m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1;\frac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2<m<3$ hoặc $f\left(4\right)<m<5$.

DẠNG TOÁN 46: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

(Tìm số nghiệm của phương trình liên quan đến sin*x* khi biết bảng biến thiên)

PHẦN II

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

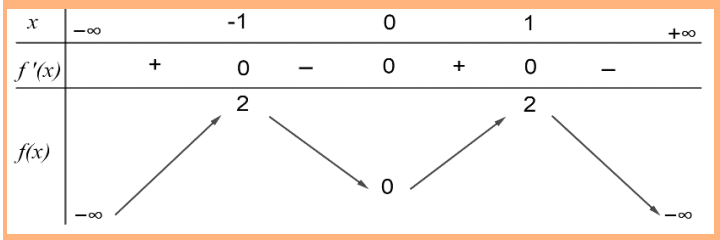
Số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của PT $f(t)=k$ là số giao điểm của đồ thị $y=f(t)$ với đường thẳng $y=k$ với $t\in[a';b']$ (k là tham số).

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- Tìm số nghiệm của phương trình liên quan đến cos*x* khi biết bảng biến thiên
- Tìm số nghiệm của phương trình liên quan đến sin*x* khi biết đồ thị của hàm số.
- …

BÀI TẬP MẪU

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán dùng BBT của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của PT $c.f\left(g(x)\right)+d=m$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của PT $f(t)=k$ là số giao điểm của đồ thị $y=f(t)$ với đường thẳng $y=k$ với $t\in[a';b']$ (k là tham số).

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt ẩn phụ $t=g(x)$. Với $x\in[a;b]\Rightarrow t\in ?$

B2: Với $c.f\left(g(x)\right)+d=m\Rightarrow f(t)=k$

B3: Từ BBT của hàm số $y=f(x)$ suy ra BBT của hàm số $y=f(t)$ để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của PT $f(t)=k$.

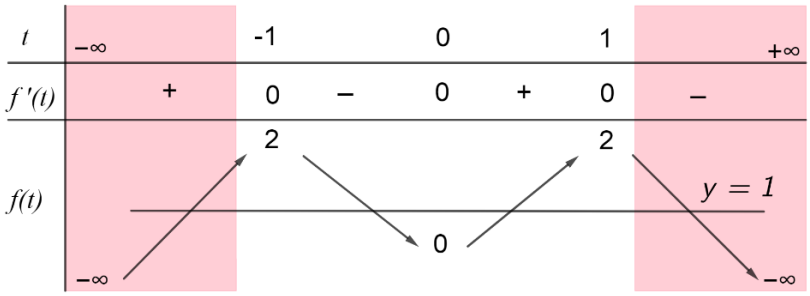
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

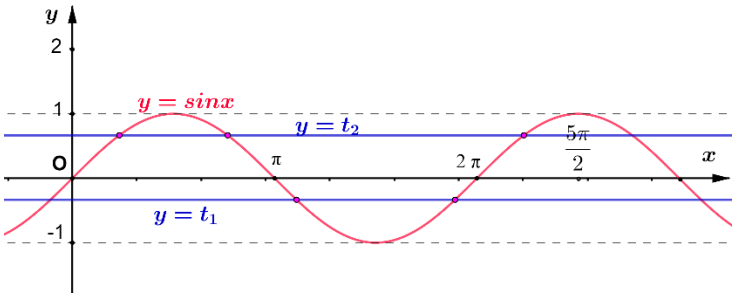
Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$ thì PT $f(\sin x)=1\ (1)$ trở thành $f(t)=1\ (2)$.

BBT hàm số $y=f(t),\ t\in[-1;1]$:



Dựa vào BBT ta thấy trên đoạn $[-1;1]$, PT (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-1;0),\ t_2\in(0;1)$.

Quan sát đồ thị $y=\sin x$ và hai đường thẳng $y=t_1$ với $t_1\in(-1;0)$ và $y=t_2$ với $t_2\in(0;1)$.



+ Với $t_1\in(-1;0)$ thì PT $\sin x=t_1$ có 2 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

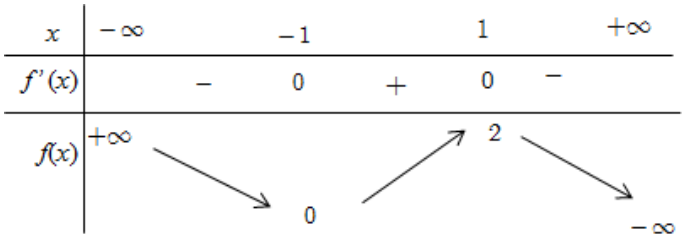
+ Với $t_2\in(0;1)$ thì PT $\sin x=t_2$ có 3 nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là $2+3=5$.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 3 hoặc 4

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$ thì PT $f(\sin x)=m$ (1) trở thành $f(t)=m$ (2).

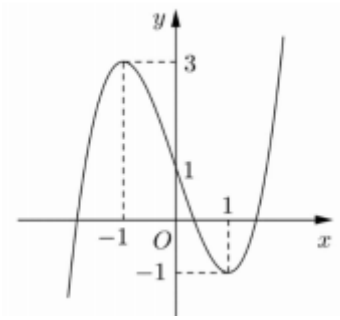
Bài toán được thỏa mãn khi đường thẳng $y=m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(x)$ với hoành độ giao điểm thuộc đoạn $[-1;1]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m\in[0;2]$.

Mặt khác $m\in\mathbb{Z}$ nên ta có các giá trị của m thỏa mãn là $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy, có tất cả 3 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $(-1;3)$. **B.** $[-1;1)$. **C.** $[-1;3)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\cos x$.

Vì $\forall x\in(0;\pi)$ nên $t\in(-1;1)$.

Vậy phương trình trở thành $f(t)=m$.

Bài toán được thỏa mãn khi đường thẳng $y=m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(x)$ với hoành độ giao điểm thuộc khoảng $(-1;1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $m\in(-1;3)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x, t\in[-1;1]$ thì PT $f(\cos x)=1$ (1) trở thành $f(t)=1$ (2).

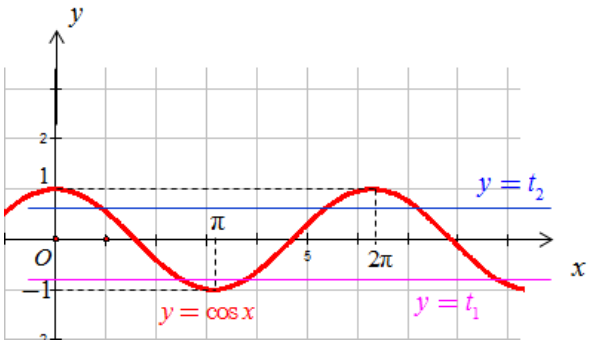
BBT hàm số $y=f(t), t\in[-1;1]$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$y=1$

Dựa vào BBT ta thấy trên đoạn $[-1;1]$, PT (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-1;0)$, $t_2\in(0;1)$.

Quan sát đồ thị $y=\cos x$ và hai đường thẳng $y=t_1$ với $t_1\in(-1;0)$ và $y=t_2$ với $t_2\in(0;1)$.

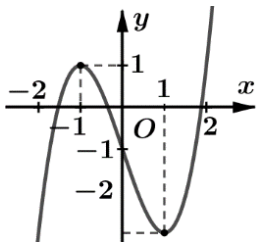


+ Với $t_1\in(-1;0)$ thì PT $\cos x=t_1$ có 2 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

+ Với $t_2\in(0;1)$ thì PT $\cos x=t_2$ có 2 nghiệm $x\in[0;2\pi]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $f(\cos x)=1$ là $2+2=4$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left[f(\sin x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0;3\pi]$?



A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

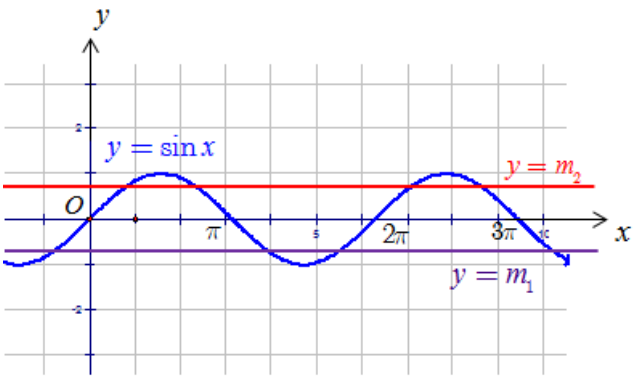
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có: $f\left[f(\sin x)-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(\sin x)-1=x_1, x_1\in(-2;-1) \\ f(\sin x)-1=x_2, x_2\in(-1;0) \\ f(\sin x)-1=x_3, x_3\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(\sin x)=x_1+1=m_1, m_1\in(-1;0) & (1) \\ f(\sin x)=x_2+1=m_2, m_2\in(0;1) & (2) \\ f(\sin x)=x_3+1=m_3, m_3\in(2;3) & (3) \end{array}\right.$$

Xét (1): Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$, được phương trình $f(t)=m_1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(t)$ trên đoạn $[-1;1]$ với đường thẳng $y=m_1$ $(-1<m_1<0)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $f(t)=m_1$ có 1 nghiệm $t\in(-1;0)$, khi đó có 1 giá trị của $\sin x \Rightarrow$ tương ứng cho ra 2 nghiệm $x\in[0;3\pi]$.

Tương tự (2) có 4 nghiệm $x\in[0;3\pi]$; phương trình (3) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Với m là tham số thực bất kỳ, phương trình $f(|x|+m)=0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

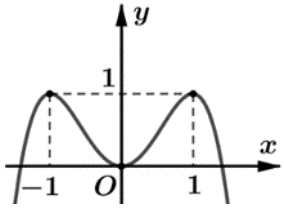
Lời giải:

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó phương trình $f(x+m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Do đó, phương trình $f(|x|+m)=0$ có tối đa 6 nghiệm phân biệt (khi đồ thị hàm số $y=f(x+m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ dương).

Câu 6. Cho hàm số $y=f\ x$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f(f(\sin 2x))=0$?



A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số điểm.

Lời giải:

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x\in[-1;1]$ thì $y\in[0;1]$.

Đặt $t=\sin 2x$ thì $t\in[-1;1]$ khi đó $f(t)\in[0;1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f(f(t))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=a_1,a_1<-1(l)\\f(t)=0\\f(t)=a_2,a_2>1(l)\end{array}\right.$.

Khi đó: $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=t_1,t_1<-1(l)\\t=t_2,t_2>1\ (l)\end{array}\right.$ hay $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Phương trình $f\ f(\sin x)\ =2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 5.

Lời giải

Chọn A

$f\ f(\sin x)\ =2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\sin x)=-1\\f(\sin x)=1\end{array}\right.$

- $f(\sin x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=a<-1\\\sin x=b>1\end{array}\right.$

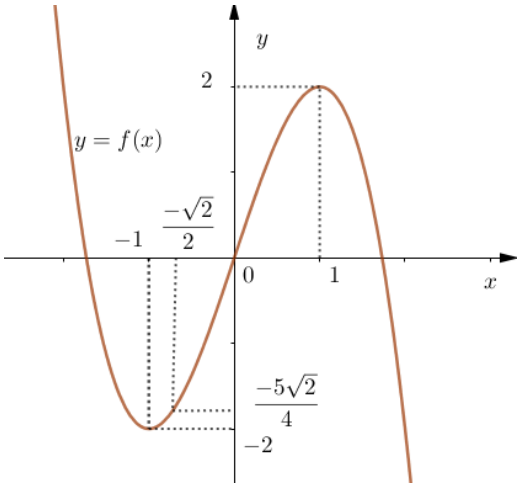
Phương trình vô nghiệm

- $f(\sin x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=c<-1\\\sin x=d>1\\\sin x=0\end{array}\right.$

$\sin x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pi\end{array}\right.$: Phương trình có 2 nghiệm trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

Vậy phương trình $f\ f(\sin x)\ =2$ có 2 nghiệm trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin 2x\right)=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm $x\in\left(\dfrac{-\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin 2x$, do $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t\in[-1;1]$.

Khi đó bài toán trở thành:

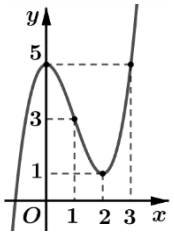
Tìm m để phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm $t\in[-1;1]$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $t\in[-1;1]$ thì $f\left(t\right)\in[-2;2]\Rightarrow -2\le\dfrac{m}{2}\le 2\Leftrightarrow -4\le m\le 4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy, có 9 giá trị của m.

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số thực bất kì thuộc khoảng $\left(1;3\right)$, hỏi phương trình $f\left(x^3-3x^2\right)=m^2-2m+2$ có bao nhiêu nghiệm thực?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $k=m^2-2m+2$, ta có: $k=\left(m-1\right)^2+1\in\left(1;5\right),\forall m\in\left(1;3\right)$.

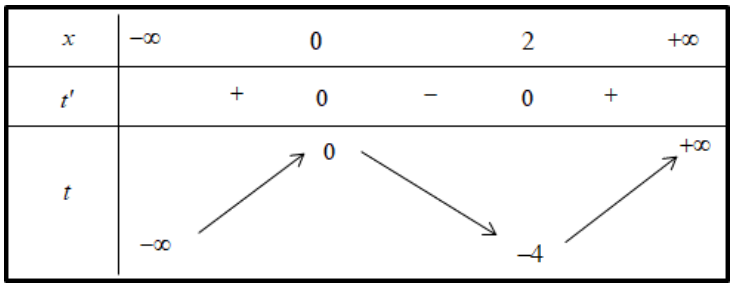
Đặt $t = x^3 - 3x^2$.

Phương trình trở thành $f(t) = k$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = k$ với $k \in (1;5)$ cắt đồ thị $f(t)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2 < t_1 < 0, 0 < t_2 < 2$ và $2 < t_3 < 3$.

Xét hàm số $t(x) = x^3 - 3x^2$, có $t' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $t(x)$:

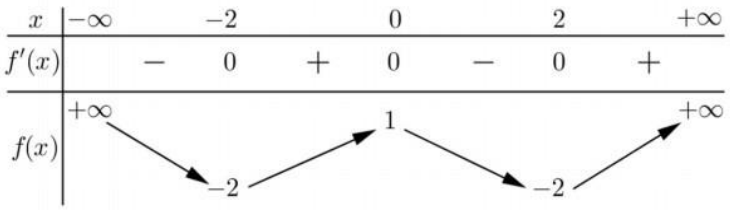


Từ bảng biến thiên ta có

- Phương trình $x^3 - 3x^2 = t_1 \in (-2;0)$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x^2 = t_2 \in (0;2)$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $x^3 - 3x^2 = t_3 \in (2;3)$ có 1 nghiệm.

Vậy, với $m \in (1;3)$ thì phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $f(2\sin x) + 1 = 0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

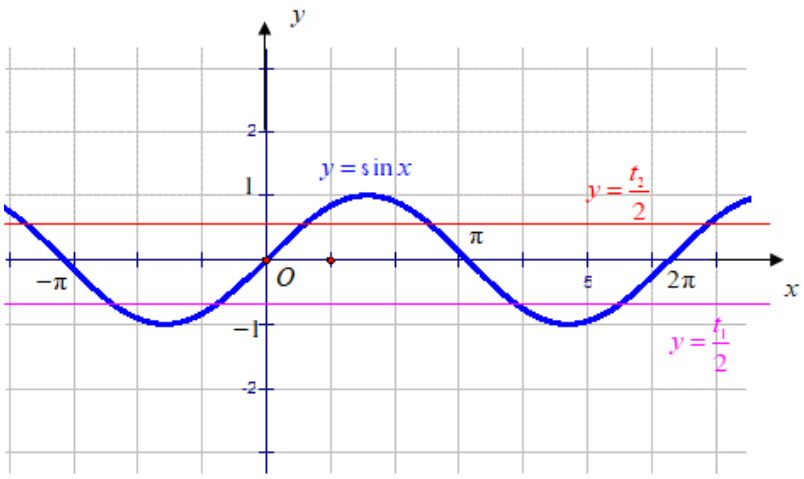
Chọn B

Đặt $t = 2\sin x$. Vì $x \in [-\pi;2\pi]$ nên $t \in [-2;2]$.

Ta có phương trình: $f(t) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -1$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t) = -1$ có 2 nghiệm $t_1 \in (-2;0)$ và $t_2 \in (0;2)$

Suy ra: $\sin x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$ và $\sin x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$.



- Với $\sin x = \frac{t_1}{2} \in (-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm.

-Với $\sin x = \frac{t_2}{2} \in (0;1)$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Vậy phương trình có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$.

DẠNG TOÁN 47: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

(CHƯA CÓ PHẦN KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$ **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$ **C.** $[3;4)$ **D.** $\left[\frac{5}{2};3\right)$

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính giới hạn của hàm số tại $+\infty$ và $-\infty$

B2: Kết quả giới hạn là 1, suy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bài tập tương tự và phát triển:

↳ Mức độ 3

Câu 1. Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y}=x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=-x^2+4y$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có: $y^x\left(e^x\right)^{e^y}=x^y\left(e^y\right)^{e^x}\Leftrightarrow\ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right)=\ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y+xe^y=y\ln x+ye^x\Leftrightarrow\dfrac{x}{\ln x+e^x}=\dfrac{y}{\ln y+e^y}$ (*) (vì $y=e^x+\ln x$ có

$y'=e^x+\dfrac{1}{x}>0;\forall x>1$ nên $y\ge y(1)=e>0$)

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{t}{\ln t+e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t)=\dfrac{\ln t+e^t-1-te^t}{\left(\ln t+e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t)=\ln t+e^t-1-te^t$ có $g'(t)=\left(\ln t+e^t-1-te^t\right)'=\dfrac{1}{t}-te^t<0,\forall t>1$

Nên $g(t)<g(1)=-1\Rightarrow f'(t)<0;\forall t>1$

$\Rightarrow y=f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x)=f(y)\Rightarrow y=x>1$

Khi đó $P=-x^2+4y=-x^2+4x\le 4,\forall x>1$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=2$.

Vậy: $P_{\min}=4$ khi: $x=y=2$.

Câu 2. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x+\log 20y\ge 1+\log\left(x+16y^3\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\log_2 x-\log_2 2y$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có $\log x+\log 20y\ge 1+\log\left(x+16y^3\right)$

$\Leftrightarrow\log x+1+\log 2y\ge 1+\log\left(x+16y^3\right)$

$\Leftrightarrow\log 2xy\ge\log\left(x+16y^3\right)$

$\Leftrightarrow 2xy\ge x+16y^3$

$\Leftrightarrow x(2y-1)\ge 16y^3\ge 0\Rightarrow 2y-1\ge 0\Rightarrow x\ge\dfrac{16y^3}{2y-1}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{2y}\ge\dfrac{8y^2}{2y-1}=4y+2+\dfrac{2}{2y-1}=4y-2+\dfrac{2}{2y-1}+4\overset{cauchy}{\ge}2\sqrt{(4y-2)\dfrac{2}{2y-1}}+4=8$

$\Rightarrow P=\log_2 x-\log_2 2y=\log_2\dfrac{x}{2y}\ge\log_2 8=3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2y-1=1\Leftrightarrow y=1,\ x=16$

Câu 3. Cho x,y là hai số dương thỏa mãn $\ln(x+1)+\ln y\ge\ln\left(x^2+2x+y+1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là:

A. $2+\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $3+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra ta có $\ln(x+1)y \ge \ln\left[(x+1)^2+y\right]$.

$\ln(x+1)y \ge \ln\left[(x+1)^2+y\right]$.

$\Leftrightarrow (x+1)y \ge (x+1)^2+y$

$\Leftrightarrow xy \ge (x+1)^2$

$\Leftrightarrow y \ge \dfrac{(x+1)^2}{x}$

Do đó $x+y = x+\dfrac{(x+1)^2}{x} = 2x+\dfrac{1}{x}+2 \overset{cauchy}{\ge} \sqrt{2x.\dfrac{1}{x}}+2 = 2+\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x=\dfrac{1}{x} \\ x>0 \\ y=\dfrac{(x+1)^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}; y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 4. Cho hai số thực dương $a;b$ thỏa mãn $a^2+b^2>2$ và $\log_{a^2+b^2}(2a+4b)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b-3$ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn A

Do $a^2+b^2>2$ nên từ . $\log_{a^2+b^2}(2a+4b)\ge 1 \Rightarrow 2a+4b \ge a^2+b^2>2$

Suy ra: $\begin{cases} a^2+b^2>2 \\ (a-1)^2+(b-2)^2 \le 5 \end{cases}$

Khi đó

$P=a+b-3=1(a-1)+1(b-2) \le \sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[(a-1)^2+(b-2)^2\right]} \le \sqrt{2.5}=\sqrt{10}$

(Áp dụng BĐT Bu-nhi-a- Cốp -xki)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{a-1}{1}=\dfrac{b-2}{1} \\ (a-1)^2+(b-2)^2=5 \\ a^2+b^2>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ b=2+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Vậy $P_{\max}=\sqrt{10}$ khi $\begin{cases} a=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ b=2+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$.

Câu 5. Cho $m=\log_a \sqrt[3]{ab}$ với $a>1, b>1$ và $P=\log_a b+16\log_b a$. Tính giá trị nhỏ nhất của P.

A. 1. **B. 2.** **C. 4.** **D. 3.**

Lời giải

Chọn A

Ta có $m=\log_a \sqrt{ab}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_a b \Rightarrow \log_a b=3m-1$

Lại có $P=\log_a b+16\log_b a=(3m-1)^2+16.\dfrac{1}{3m-1}$

Đặt $t=3m-1(t\neq 0)$ khảo sát hàm $P=t^2+\dfrac{16}{t}$ thấy $\min P=12$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=2\Rightarrow m=1$

Câu 6. Cho các số thực $a, b>1$ và các số dương x, y thay đổi thỏa mãn $a^x=b^y=ab$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{16}{x}-y^2$ bằng

A. 40. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Đặt $a^x=b^y=ab=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_a t \\ y=\log_b t \\ ab=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_t a=\dfrac{1}{x} \\ \log_t b=\dfrac{1}{y} \\ \log_t ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1.$.

Khi đó ta có $P=\dfrac{16}{x}-y^2=16\left(1-\dfrac{1}{y}\right)-y^2=16-\dfrac{16}{y}-y^2.$

Có: $16-\dfrac{16}{y}-y^2=16-\left(\dfrac{8}{y}+\dfrac{8}{y}+y^2\right)\overset{cauchy}{\leq} 16-3.\sqrt[3]{\dfrac{8}{y}.\dfrac{8}{y}.y^2}=16-3.4=4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y=2, x=2$. Vậy $P_{\max}=4$ đạt được khi $x=2, y=2$.

Câu 7. Cho x, y là các số thực dương, thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\leq \log_{\frac{1}{2}}(3x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4x+y$.

A. $P_{\min}=27+12\sqrt{5}$ **B.** $P_{\min}=27+6\sqrt{5}$

C. $P_{\min}=12\sqrt{5}$ **D.** $P_{\min}=12+6\sqrt{5}$.

Lời giải:

Chọn A

$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\le \log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge 3x+y^2\Leftrightarrow x(y-3)\ge y^2$.Từ đây, x,y là các số thực dương nên ta suy ra $y>3$ và $x\ge \dfrac{y^2}{y-3}=y+3+\dfrac{9}{y-3}$

Do đó, $P\ge 4\left(y+3+\dfrac{9}{y-3}\right)+y=5(y-3)+\dfrac{36}{y-3}+27\ge 12\sqrt{5}+27$.

Dấu bằng xảy ra khi $y=3+\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, x=6+\dfrac{27\sqrt{5}}{10}$.

Câu 8. Cho các số thực x,y thỏa mãn điều kiện $0\le x\le 2$ và $2^{x+y+1}=4^x+\dfrac{x-y-1}{2^y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

A. $2-\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x+y+1}=4^x+\dfrac{x-y-1}{2^y}\Leftrightarrow 2^{x+2y+1}+x+2y+1=2^{2x+y}+2x+y\ (*)$

Xét hàm $g(t)=2^t+t$, ta có: $g'(t)=2^t.\ln 2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow 2x+y=x+2y+1\Leftrightarrow y=x-1$.

Chú ý:

Bài giải của GV chưa hoàn tất

Câu 9. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^{2x}=b^y=a^4b^4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+3x+2y$ có dạng $m+n\sqrt{14}$ (với m,n là các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

A. 48 **B.** 34 **C.** 30. **D.** 38.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có: $a^{2x}=b^y=a^4b^4\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2x}=a^4b^4\\ b^y=a^4b^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\log_a\left(a^4b^4\right)\\ y=\log_b\left(a^4b^4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4+4\log_a b\\ y=4+4\log_b a\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\left(1+\log_a b\right)\\ y=4\left(1+\log_b a\right)\end{cases}$

Do đó: $P=xy+3x+2y=8\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_b a\right)+6\left(1+\log_a b\right)+8\left(1+\log_b a\right)$

$=16+8\log_b a+8\log_a b+6+6\log_a b+8+8\log_b a$

$=30+14\log_a b+16\log_b a$

Đặt $t=\log_a b$. Vì $a>1$, $b>1$ nên $\log_a b>\log_a 1=0$.

Khi đó $P=30+14t+\frac{16}{t}\ge 30+2\sqrt{14t.\frac{16}{t}}=30+8\sqrt{14}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $30+8\sqrt{14}$ khi $14t=\frac{16}{t}\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{14}}{7}$ hay $b=a^{\frac{2\sqrt{14}}{7}}$.

Ta có: $\begin{cases}m=30\\n=8\end{cases}\Rightarrow S=m+n=38$.

Câu 10. Cho hai số thực dương x,y thay đổi thỏa mãn đẳng thức: $(2xy-1)4^{xy-1}=(x^2+y+1)2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=3$. **B.** $y_{\min}=\sqrt{3}$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=2$.

Lời giải

Chọn D

Do x,y là số thực dương đẳng thức $(2xy-1)4^{xy-1}=(x^2+y+1)2^{x^2+y}$. Suy ra $2xy-1>0$.

Khi đó ta có $\log_2(2xy-1)+(2xy-1)=\log_2(x^2+y+1)+(x^2+y+1)$ (1)

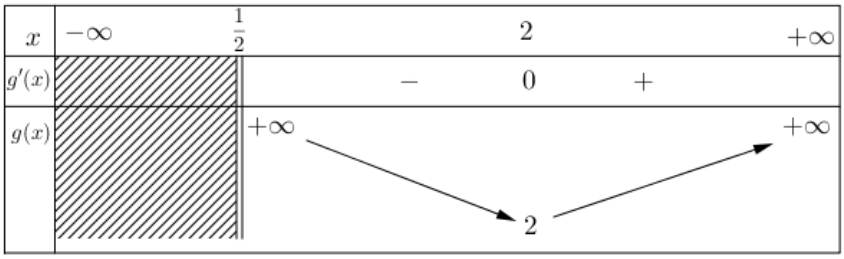
Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$. Hàm số này đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên từ (1) ta được $f(2xy-1)=f(x^2+y+1)\Leftrightarrow 2xy-2=x^2+y\Leftrightarrow y(2x-1)=x^2+2$

Do $y>0$, $x^2+2>0$ nên $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ Suy ra $y=\frac{x^2+2}{2x-1}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{x^2+2}{2x-1}$ trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên $g(x)$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y_{\min}=2$ tại $x=2$.

Mức độ 4

Câu 1. Cho hai số thức a,b thỏa mãn $16.2^{a+2b}=\frac{8(1-2ab)}{a+2b}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{4}ab+ab^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn C

Từ giải thiết suy ra $1-2ab>0$. Theo bài ra:

$$16^{ab}.2^{a+2b}=\frac{8(1-2ab)}{a+2b}\Leftrightarrow a^{a+2b}(a+2b)=\frac{8(1-2ab)}{16^{ab}}$$

$$\Leftrightarrow 2^{a+2b}(a+2b)=\frac{8(1-2ab)}{2^{4ab}}\Leftrightarrow 2^{a+2b}(a+2b)=2^{2-4ab}(2-4ab) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\in D=(0;+\infty)$

Do hàm số liên tục trên D và có $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln t>0,\forall t\in D$ suy ra hàm số đồng biến trên D.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow a+2b=2-4ab\Leftrightarrow a(1+4b)=2-2b$ suy ra $2-2b>0\Leftrightarrow b<1$.

Ta có $P=\frac{1}{4}ab+ab^2=\frac{1}{4}ab(1+4b)=\frac{1}{4}b(2-2b)=\frac{1}{2}b(1-b)\le\frac{1}{2}\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

Vậy $\max P=\frac{1}{8}$ xảy ra khi $\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 2. Cho $0\le x,y\le 2$ thỏa mãn $2019^{2-x-y}=\frac{x^2+2020}{y^2-4y+2024}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=(2x^2-y)(2y^2-x)-15xy$. Khi đó $M.m$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{245}{4}$. **B.** $\frac{245}{4}$. **C.** 147. **D.** $-\frac{89}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2019^{2-x-y}=\frac{x^2+2020}{y^2-4y+2024}\Leftrightarrow\frac{2019^{2-y}}{2019^x}=\frac{x^2+2020}{(y-2)^2+2020}$

$\Leftrightarrow 2019^x(x^2+2020)=2019^{2-y}\left[(y-2)^2+2020\right]$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2019^t(t^2+2020)$ trên khoảng $[0;2]$, có

$f'(t)=2019^t\ln 2019(t^2+2020)+2t.2019>0;\forall t\in[0;2]$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;2]$.

Từ (1) suy ra $f(x)=f(2-y)\Rightarrow x+y=2$.

Do $2=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\le 1\Rightarrow 0\le xy\le 1$.

Lại có

$S=(2x^2-y)(2y^2-x)-15xy=4x^2y^2-2(x^3+y^3)-14xy$

$=4x^2y^2-2\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]-14xy$

$=4x^2y^2-2(8-6xy)-14xy$

$=4x^2y^2-2xy-16$

Đặt $t=xy\in[0;1]$ khi đó $S=f(t)=4t^2-2t-16$

Xét hàm số $f(t)=4t^2-2t-16$ trên $[0;1]$ ta được $\begin{cases} m=\min\limits_{[0;1]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{49}{4} \\ M=\max\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=-10 \end{cases}$

Suy ra $M.m=-\frac{49}{4}.(-10)=\frac{245}{4}$.

Câu 3. Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $6.3^y+y+1=3x+\log_3(x+3^y)$ .Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2y}$ bằng

A. $\frac{\ln 3}{e}$. **B.** $\frac{e-\ln 3}{2}$. **C.** $\frac{e.\ln 3}{2}$. **D.** $e\ln 3$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\log_3(x+3^y)\Leftrightarrow 3^t=x+3^y\Leftrightarrow 3x=3^{t+1}-3^{y+1}$

Khi đó phương trình $6.3^y+y+1=3x+\log_3(x+3^y)$ trở thành:

$2.3^{y+1}+y+1=3^{t+1}-3^{y+1}+t$

$\Leftrightarrow 3.3^{y+1}+y+1=3^{t+1}+t$

$\Leftrightarrow 3^{y+2}+y+1=3^{t+1}+t$ (1)

Xét hàm số: $f(x)=3^{x+1}+x$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=3^{x+1}.\ln 3+1>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số luôn đồng biến

Do (1) suy ra $f(y+1)=f(t)\Leftrightarrow y+1=t\Leftrightarrow y+1=\log_3(x+3^y)\Leftrightarrow 3^{y+1}-3^y=x\Leftrightarrow x=2.3^y$

Khi đó $P=\frac{x}{2y}=\frac{3^y}{y}=g(y)$ có $\Rightarrow g'(y)=\frac{3^y.y\ln 3-3^y}{y^2}=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\ln 3}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} P=g\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=e\ln 3$.

Câu 4. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{2x^2+y^2}(x+2y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x+2y$ bằng:

A. 9. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{2x^2+y^2}(x+2y)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2+y^2>1\\ x+2y\ge 2x^2+y^2\end{cases} \quad (I)\\ \begin{cases}0<2x^2+y^2<1\\ 0<x+2y\le 2x^2+y^2\end{cases} \quad (II)\end{array}\right.$.

Xét $T=x+2y$

TH1: $(x;\ y)$ thỏa mãn (II) khi đó $0<T=x+2y\le 2x^2+y^2<1$ Không tồn tại maxT.

TH2: $(x;\ y)$thỏa mãn (I) $2x^2+y^2\le x+2y\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2\le\frac{9}{8}$.

Khi đó

$$x+2y=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)+2(y-1)+\frac{9}{4}\le\sqrt{\left(\frac{1}{2}+2^2\right)\left[2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2\right]}+\frac{9}{4}$$
$$\le\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

Suy ra: $\max T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 5. Cho các số thực $x;y$ thỏa mãn $x^2+4xy+12y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2(x-2y)^2$ là

A. $\max P=3\log_2 2$ **B.** $\max P=\log_2 12$ **C.** $\max P=12$ **D.** $\max P=16$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\ne 2y$. Từ $x^2+4xy+12y^2=4$ suy ra:

Nếu $y=0$ thì $x^2=4\Rightarrow P=2$

Nếu $y\ne 0$ ta có: $P=\log_2(x-2y)^2\Leftrightarrow 4(x-2y)^2=4.2^P$

$$\Rightarrow\frac{4.2^P}{4}=\frac{4.(x-2y)^2}{x^2+4xy+12y^2}=\frac{4\left(\frac{x}{2y}-1\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2+2\frac{x}{2y}+3}$$

Đặt $t=\frac{x}{2y},t\in\mathbb{R}$, $2^P=\frac{4t^2-8t+4}{t^2+2t+3}\Leftrightarrow 2^P\left(t^2+2t+3\right)=4t^2-8t+4$

$\Leftrightarrow\left(2^P-4\right)t^2+2\left(2^P+4\right)t+3.2^P-4=0$ Xét với $(P\ne 2)$

Để phương trình có nghiệm: $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow\left(2^P+4\right)^2-\left(2^P-4\right)\left(3.2^P-4\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow -2\left(2^P\right)^2+24.2^P\ge 0\Leftrightarrow 0\le 2^P\le 12\Rightarrow P\le\log_2 12$

Vậy $\max P=\log_2 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} t=-2 \\ t=\dfrac{x}{2y} \\ x^2+4xy+12y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4y \\ y^2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\dfrac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng?

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$

$\Leftrightarrow \log_{16}(x+y+z)+2(x+y+z)=\log_{16}(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 2\log_{16}(x+y+z)+4(x+y+z)=2\log_{16}(2x^2+2y^2+2z^2+1)+2(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow \log_4(x+y+z)+4(x+y+z)+1=\log_4(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(x^2+y^2+z^2)+1$

$\Leftrightarrow \log_4 4(x+y+z)+4(x+y+z)=\log_4(2x^2+2y^2+2z^2+1)+(2x^2+2y^2+2z^2+1)$

Xét hàm số: $f(t)=\log_4 t+t\,(t>0)$.

Hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

Suy ra: $f(4(x+y+z))=f(2x^2+2y^2+2z^2+1)$

$\Rightarrow 4(x+y+z)=2x^2+2y^2+2z^2+1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+\dfrac{1}{2}=0\ (S)$

Ta có mặt cầu: $(S):\begin{cases} I(1;1;1) \\ R=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Ta có: $F=\dfrac{x+y-z}{x+y+z} \Leftrightarrow (F-1)x+(F-1)y+(F+1)z=0\ (P)$

Để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung:

$$d\left[I;(P)\right]\le R\Leftrightarrow\frac{\left|F-1+F-1+F+1\right|}{\sqrt{2(F-1)^2+(F+1)}}\le\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 3F^2-2F-13\le 0.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-2\sqrt{10}}{3}\le F\le\frac{1+2\sqrt{10}}{3}.$$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng $\frac{2}{3}$.

DẠNG TOÁN 48: GTNN – GTNN (TÌM GTLN – GTNN CỦA HÀM PHỤ THUỘC THAM SỐ TRÊN ĐOẠN .

PHẦN I:

KHÔNG CÓ KIẾN THỨC CẦN NHỚ - KHÔNG BÀI TẬP MẪU.

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán GTLN – GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn **(cố gắng đưa ra phương pháp chung cho dạng toán này nếu được)**

……

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ: (thầy cô liệt kê hết các công thức cần dùng cho biến đổi của bài toán)

+ Quy tắc xác định GTLN – GTNN của hàm số liên tục trên một đoạn:

Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

B1: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_1, x_2,..., x_n$ trên khoảng $(a;b)$ tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

B2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(b)$.

B2: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Ta có: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x); m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

……

3. HƯỚNG GIẢI: (nếu là câu hỏi lý thuyết hay câu hỏi dễ quá chỉ có 1; 2 dòng thì bỏ qua bước này)

B1: Xét trường hợp $m=1 \Rightarrow$ thấy thỏa mãn bài toán.

B2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Xét các trường hợp $f'(x)>0, f'(x)<0$ để suy ra $\max\limits_{[0;1]} f(x)$ và $\min\limits_{[0;1]} f(x)$.

B3: Biện luận để suy ra $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|$ và $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|$ từ đó tìm ra đáp số của bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

+ Với $m=1$: ta có $f(x)=1, \forall x\in[0;1]$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=1\Rightarrow\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=2$ (thỏa mãn đề bài).

+ Với $m\neq1$, ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{1-m}{\left(x+1\right)^2}\neq0,\forall x\in\left[0;1\right]$.

Có $f\left(0\right)=m;\ f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{2}$.

- Nếu $1-m<0\Leftrightarrow m>1$ thì $f'\left(x\right)<0\Rightarrow$ Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{2}>0$ và $\max\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=f\left(0\right)=m>0$.

Suy ra $\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{m+1}{2}$ và $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=m$.

Theo bài ra ta phải có: $m+\dfrac{m+1}{2}=2\Leftrightarrow3m=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

- Nếu $1-m>0\Leftrightarrow m<1$ thì $f'\left(x\right)>0\Rightarrow$ Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{2}$ và $\min\limits_{[0;1]}f\left(x\right)=f\left(0\right)=m$.

Ta xét $\left|\dfrac{m+1}{2}\right|<\left|m\right|\Leftrightarrow\left(m+1\right)^2<4m^2\Leftrightarrow3m^2-2m-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{1}{3}\\m>1\end{array}\right.$.

+) Khi $0\leq m<1$, ta có $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{m+1}{2}$ và $\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=m$.

Theo bài ra ta phải có: $\dfrac{m+1}{2}+m=2\Leftrightarrow3m=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

+) Khi $-\dfrac{1}{3}\leq m<0$, ta có $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|\dfrac{m+1}{2}\right|$ và $\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m\right|$.

Theo bài ra ta phải có:

$\left|\dfrac{m+1}{2}\right|+\left|m\right|=2\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{2}-m=2\Leftrightarrow-m=-3\Leftrightarrow m=3$ (loại).

+) Khi $m<-\dfrac{1}{3}$, ta có $\left|\dfrac{m+1}{2}\right|<\left|m\right|$ nên $\max\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|m\right|$ và $\min\limits_{[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|\dfrac{m+1}{2}\right|$.

Theo bài ra ta phải có:

$\left|m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|=2\Leftrightarrow-m-\dfrac{m+1}{2}=2\Leftrightarrow-3m=5\Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn).

Vậy, ta có tập $S=\left\{-\dfrac{5}{3};1\right\}$, do đó số phần tử của tập S bằng 2.

Bài tập tương tự và phát triển :

Câu 1. Cho hàm số $y=x^2-6x+m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;4]} y=-1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m<-10$. **B.** $-10<m\le -7$. **C.** $-7<m<0$. **D.** $0<m<10$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Phương pháp

- **B1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **B2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in[a;b]$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in[a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **B3:** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **B4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

.....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ (nhắc lại các công thức, định lý cần dùng cho phần lời giải chi tiết)

- $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.
- $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- $(uv)'=u'.v+v'.u$.
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$.
- $(k.u)'=k.u'$ $(k\in\mathbb{R})$.

.....

3. HƯỚNG GIẢI:

- **B1:** Tính đạo hàm $f'(x)$.
- **B2:** Tìm tất cả các nghiệm $x_i\in[a;b]$ của phương trình $f'(x)=0$ và tất cả các điểm $\alpha_i\in[a;b]$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- **B3:** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- **B4:** So sánh các giá trị tính được và kết luận $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Từ đó ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra $\min\limits_{[0;4]} y = \min\left\{y(0); y(3); y(4)\right\} = \min\left\{m; m-9; m-8\right\} = m-9$.

Theo giả thiết ta có $m-9 = -1 \Leftrightarrow m = 8$.

Vậy $0 < m < 10$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;4]} y - 2\max\limits_{[0;4]} y = -18$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra

+) $\min\limits_{[0;4]} y = \min\left\{y(0); y(3); y(4)\right\} = \min\left\{m; m-9; m-8\right\} = m-9$

+) $\max\limits_{[0;4]} y = \max\left\{y(0); y(3); y(4)\right\} = \max\left\{m; m-9; m-8\right\} = m$.

Theo giả thiết ta có $\min\limits_{[0;4]} y - 2\max\limits_{[0;4]} y = -23 \Rightarrow m - 9 - 2m = -18 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy $0 < m < 10$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[0;4]} y = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} y = \max\left\{y(0); y(3); y(4)\right\} = \max\left\{m; m-9; m-8\right\} = m$.

Theo giả thiết ta có $\max\limits_{[0;4]} y = 3 \Rightarrow m = 3$.

Vậy $0 < m < 10$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;4]} y + \max\limits_{[0;4]} y = -23$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Suy ra

+) $\min\limits_{[0;4]} y = \min\{y(0); y(3); y(4)\} = \min\{m; m-9; m-8\} = m-9$

+) $\max\limits_{[0;4]} y = \max\{y(0); y(3); y(4)\} = \max\{m; m-9; m-8\} = m$.

Theo giả thiết ta có $\min\limits_{[0;4]} y + \max\limits_{[0;4]} y = 7 \Rightarrow m - 9 + m = -23 \Leftrightarrow m = -7$.

Vậy $-10 < m \le -7$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-1;3]} y = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;3]} y = \min\{y(2); y(-1); y(3)\} = \min\{-5-\text{m}; 4-m; 3-\text{m}\} = -5-m$.

Theo giả thiết ta có $-5 - m = 3 \Leftrightarrow m = -8$.

Vậy $-10 < m \le -7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-1;3]} y = 10$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} y = \max\{y(2); y(-1); y(3)\} = \max\{-5-\text{m}; 4-m; 3-\text{m}\} = 4-m$.

Theo giả thiết ta có $4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy $-7 < m < 0$.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-1;3]} y + \max\limits_{[-1;3]} y = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < -10$. **B.** $-10 < m \le -7$. **C.** $-7 < m < 0$. **D.** $0 < m < 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra

+) $\min\limits_{[-1;3]} y = \min\{y(2); y(-1); y(3)\} = \min\{-5-\text{m}; 4-m; 3-\text{m}\} = -5-m$

+) $\max\limits_{[-1;3]} y = \max\{y(2); y(-1); y(3)\} = \max\{-5-\text{m}; 4-m; 3-\text{m}\} = 4-m$.

Theo giả thiết ta có $\min\limits_{[-1;3]} y + \max\limits_{[-1;3]} y = 1 \Leftrightarrow -5 - m + 4 - m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $-7 < m < 0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y=-1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $2<m<4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=m, y(2)=m-4, y(3)=m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m-4$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=-1\Rightarrow m-4=-1\Leftrightarrow m=3$.

Vậy $2<m<4$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3+2\left(m^2+1\right)x+3+m$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có $\max\limits_{[0;1]} y-3\min\limits_{[0;1]} y=9$. Tổng các phần tử của S là.

A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2+2\left(m^2+1\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\min\limits_{[0;1]} y=y(0)=3+m$, $\max\limits_{[0;1]} y=y(1)=2m^2-m+6$.

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y-3\min\limits_{[0;1]} y=9\Rightarrow m+3-3\left(2m^2-m+6\right)=9$.

$\Leftrightarrow 2m^2+2m-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-3\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S là -1.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y=5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=m, y(2)=m-4, y(3)=m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y=m$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y=-1\Rightarrow m=-1$.

Vậy $-2<m<0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;3]} y=-5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<m<0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $0<m<2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = m, y(2) = m - 4, y(3) = m$.

Suy ra $\min\limits_{[0;3]} y = m - 4$

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = -5 \Rightarrow m - 4 = -5 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy -2 < m < 0.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[0;4]} y = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. -2 < m < 0. **B.** 0 < m < 1. **C.** $1 < m < 2$. **D.** 0 < m < 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 6, y(4) = 70 - 48m, y(2m) = 6 - 4m^3$.

Nếu $y(4) = 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{17}{12} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(2m) = -\dfrac{2321}{432} \\ x = 2m = \dfrac{17}{6} \in [0;4] \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y \neq 2$.

Nếu $y(2m) = 2 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(4) = 22 \\ x = 2m = 2 \in [0;4] \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = 2$.

Vậy m = 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[-1;1]} y = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. m=2. **B.** m=4. **C.** $m = 0$. **D.** m=6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1;1) \\ x = -2 \notin (-1;1) \end{array}\right.$.

Ta có $\left\{\begin{array}{l} y(0) = m \\ y(1) = m - 4 \\ y(-1) = m - 2 \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} y = m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực) có $\max\limits_{[-1;1]} y = 6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. m=2. **B.** m=4. **C.** $m = 0$. **D.** m=6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1;1) \\ x = -2 \notin (-1;1) \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} y(0) = m \\ y(1) = m - 4 \\ y(-1) = m - 2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} y = m = 6 \Leftrightarrow m = 6$.

Câu 15. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ (với m là tham số thực) có $\min\limits_{[-1;1]} y + \max\limits_{[-1;1]} y = 6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. m=5. **B.** m=4. **C.** $m = 0$. **D.** m=6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1;1) \\ x = -2 \notin (-1;1) \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} y(0) = m \\ y(1) = m - 4 \\ y(-1) = m - 2 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} y = m - 4, \max\limits_{[-1;1]} y = m$.

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y + \max\limits_{[-1;1]} y = 6 \Rightarrow m - 4 + m = 6 \Leftrightarrow m = 5$

Câu 16. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 2\sqrt{2}$. **C.** $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = -\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = [-2;2]$.

$y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$f(2) = 2 + m, f(-2) = -2 + m, f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + m$.

Nên giá trị lớn nhất là: $2\sqrt{2} + m = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 17. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là 3. Giá trị của m là

A. $m = 5$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = [-2;2]$.

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

$f(2)=2+m, f(-2)=-2+m, f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+m.$

Nên giá trị nhỏ nhất là: $-2+m=3\Leftrightarrow m=5.$

Câu 18. Biết rằng tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là 3. Giá trị của m là

A. $m=5.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=0.$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=[-2;2].$

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

$f(2)=2+m, f(-2)=-2+m, f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+m.$

Nên tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất là: $-2+m+2\sqrt{2}+m=2\sqrt{2}\Leftrightarrow m=1.$

Câu 19. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2x+m^2+m-1}{x-1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;4]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. $1.$ **B.** $3.$ **C.** $2.$ **D.** $0.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\frac{-m^2-m-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\ne 1.$

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Suy ra $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=m^2+m+3$

Do đó $\max\limits_{[2;4]} y=3\Leftrightarrow m^2+m+3=3\Leftrightarrow m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{2x+m^2+m-1}{x-1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;4]$ bằng 3.

A. $m=1$ hoặc $m=-2.$ **B.** $m=-2.$ **C.** $m=-1$ hoặc $m=0.$ **D.** $m=0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{m^2+m+7}{3}$

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=3\Leftrightarrow \dfrac{m^2+m+7}{3}=3\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=-2\end{array}\right.$.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2x+m^2+m-1}{x-1}$ có $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=8$. Tích các phần tử của S là.

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-m-2}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1.$

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Suy ra

$\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{m^2+m+7}{3}$, $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=m^2+m+3$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=8\Rightarrow \dfrac{m^2+m+7}{3}+m^2+m+3=8$.

$\Leftrightarrow 4m^2+4m-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=-2\end{array}\right.$.

Vậy tích các phần tử của S là -2.

Câu 22. Tìm tất cả các số nguyên âm của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x-m^2-m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -6

A. $m=-3$. **B.** $m=-2$ hoặc $m=3$.

C. $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{57}}{2}$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{m^2+m+2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Suy ra $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m^2 - m = -6 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Do m là số nguyên âm nên $m = -3$

Câu 23. Tìm tất cả các số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x - m^2 - m}{x+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 1.

A. $m = -1$ hoặc $m = 0$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + m + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{2 - m^2 - m}{2} = 1 \Leftrightarrow -m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Câu 24. Tìm tất cả các số thực m để hàm số $y = \dfrac{2x - m^2 - m}{x+1}$ có $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 1$.

A. $m = -1$ hoặc $m = 0$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$.

C. $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + m + 2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

$\min\limits_{[0;1]} y = y(0) = -m^2 - m$, $\max\limits_{[0;1]} y = y(1) = \dfrac{2 - m^2 - m}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[0;1]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 1 \Rightarrow -m^2 - m + \dfrac{2 - m^2 - m}{2} = 1$.

$\Leftrightarrow -3m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $1\le m<3$. **C.** $m>4$. **D.** $m<-1$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m>-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}<0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(4)=\dfrac{m+4}{3}=3\Leftrightarrow m=5$ (chọn).

TH2. Với $m<-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}>0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y=f(2)=m+2=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$.

Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $3<m\le 4$. **B.** $1\le m<3$. **C.** $m>4$. **D.** $m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m>-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}<0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=m+2=3\Leftrightarrow m=1$(chọn).

TH2. Với $m<-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}>0;\ \forall x\ne 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Khi đó $\max\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{m+4}{3}=3\Leftrightarrow m=5$ (loại).

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $1\le m<3$..

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (với m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0<m\le 2$. **B.** $2<m\le 4$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m>4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m\neq 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=f(1)+f(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow\dfrac{5m}{6}=\dfrac{25}{6}\Leftrightarrow m=5$.

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm và thỏa mãn điều kiện $m>4$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$. Tìm m để $2\max\limits_{[0;1]} y+3\min\limits_{[0;1]} y=1$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=R\setminus\{-1\}$

$$y'=\frac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[0;1]} y=y(1)=\dfrac{-m^2+m+1}{2}\\ \min\limits_{[0;1]} y=y(0)=-m^2+m\end{cases}$$

Theo đề ta có: $2\max\limits_{[0;1]} y+3\min\limits_{[0;1]} y=1$.

$$\Rightarrow 2\left(\frac{-m^2+m+1}{2}\right)+3\left(-m^2+m\right)=1.$$

$$\Leftrightarrow -4m^2+4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$. Tìm m để $\max\limits_{[2;4]} y+3\min\limits_{[2;4]} y=8$

A. $m=1\vee m=\dfrac{1}{5}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=\dfrac{1}{5}$ **D.** $m=-1$

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$, $y'=\dfrac{-m-1}{(x-1)^2}$

TH1: $-m-1>0\Leftrightarrow m<-1\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

$$\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{4+m}{3}\\ \min\limits_{[2;4]} y=y(2)=2+m\end{cases}$$

$$\max_{[2;4]} y+3\min_{[2;4]} y=8\Leftrightarrow\frac{4+m}{3}+3(2+m)=8\Leftrightarrow m=\frac{1}{5}(l)$$

TH2: $-m-1<0\Leftrightarrow m>-1\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$$\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{4+m}{3}\\ \max\limits_{[2;4]} y=y(2)=2+m\end{cases}$$

$$\max_{[2;4]} y+3\min_{[2;4]} y=8\Leftrightarrow 3\left(\frac{4+m}{3}\right)+2+m=8\Leftrightarrow m=1(n)$$

Vậy $m=1$

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-m^2x-1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[2;4]} y=\dfrac{14}{3}$. Hỏi số phần tử của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x+m^2+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2+m^2}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in[2;4]$

Do đó $a=\max\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{15-4m^2}{3}$.

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{15-4m^2}{3}=\dfrac{14}{3}\Rightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-m^2x-1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Hỏi số phần tử của S là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x+m^2+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2+m^2}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)=-2m^2+3$.

Theo giả thiết, ta có $-2m^2+3=3\Leftrightarrow m=0$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-m^2x-1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=3$. Hỏi tổng các phần tử của S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x+m^2+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2+m^2}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)=-2m^2+3$, $\max\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{15-4m^2}{3}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=3\Rightarrow -2m^2+3+\dfrac{15-4m^2}{3}=-2$.

$\Leftrightarrow -10m^2+30=0\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 0.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-mx+1}{x+m}$ (với m là tham số thực âm). Biết $\min\limits_{[2;4]} y=1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $0<m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $2<m<3$. **D.** $m\le -3$.

Lời giải

Chọn D

Với $m>0$, ta có $y'=\dfrac{-x^2-2mx-m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{-\left[(x+m)^2+1\right]}{(x+m)^2}<0,\forall x\in[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{-4m-15}{m+4}=1\Leftrightarrow m=-\dfrac{19}{5}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Biết $\max\limits_{[2;4]} y=-3$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $0<m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $2<m<3$. **D.** $m\le -3$.

Lời giải

Chọn D

Với $m>0$, ta có $y'=\dfrac{-x^2-2mx-m^2-1}{(x+m)^2}=\dfrac{-\left[(x+m)^2+1\right]}{(x+m)^2}<0,\forall x\in[2;4]$.

Do đó $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=\dfrac{-3-2m}{2+m}=-3\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{-x^2-mx+1}{x+m}$ (với m là tham số) có $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=-1$. Tổng các phần tử của S là.

A. $\frac{8}{25}$. **B.** $\frac{-8}{25}$. **C.** $\frac{25}{8}$. **D.** $-\frac{28}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Với $m>0$, ta có $y'=\frac{-x^2-2mx-m^2-1}{(x+m)^2}=\frac{-\left[(x+m)^2+1\right]}{(x+m)^2}<0, \forall x\in[2;4]$.

Do đó $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\frac{-4m-15}{m+4}$, $\max\limits_{[2;4]} y=y(2)=\frac{-3-2m}{2+m}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} y+\max\limits_{[2;4]} y=-1\Rightarrow \frac{-4m-15}{m+4}+\frac{-3-2m}{2+m}=-1$.

$\Leftrightarrow 5m^2+28m+34=0\Leftrightarrow m=\frac{-14\pm\sqrt{26}}{5}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $-\frac{28}{5}$.

Câu 36. Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

A. $(-5;-2)\cup(0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-6;-3)\cup(0;1)$. **D.** $(-4;3)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Có $f'(x)=2x-2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $f(-1)=m+3$, $f(1)=m-1$, $f(2)=m$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y=m+3$ hoặc $\max\limits_{[-1;2]} y=1-m$.

Ta xét các Trường hợp sau:

TH1: $\max\limits_{[-1;2]} y=m+3=5\Rightarrow m=2$.

Thử lại với $m=2$.

Khi đó $y=\left|x^2-2x+2\right|=x^2-2x+2, \forall x\in[-1;2]$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y=5$.

Do đó $m=2$ (thỏa mãn).

TH2: $\max\limits_{[-1;2]} y=1-m=5\Rightarrow m=-4$.

Thử lại với $m=-4$.

Khi đó $y=\left|x^2-2x-4\right|$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y=5$.

Do đó $m=-4$ (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m=1; m=-4$.

Câu 37. Tìm tất cả các tham số thực m biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ trên $[0;4]$ bằng 20.

A. $\{-16;4\}$. **B.** $\{\pm 4\}$. **C.** $\{20;4\}$. **D.** $\{-16;20\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=x^3-3x^2+m \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do đó, ố $\max\limits_{[0;4]} y=\max\{y(0);y(2);y(4)\}=\max\{|m|;|m-4|;|m+16|\}=20$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} |m|=20 \\ |m-4|=20 \\ |m+16|=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 20 \\ m=\{-16;24\} \\ m=\{-36;4\} \end{array}\right.$$

Thử lại điều kiện $\max\{|m|;|m-4|;|m+16|\}=20 \Rightarrow m=\{-16;4\}$.

Câu 38. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021$ đạt tại $x=0$. Số phần tử của tập S là

A. 34. **B.** 42. **C.** 35. **D.** 37.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=x^6+(m-2)x^5+(m^2-11)x^4+2021 \geq f(0)=2021,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^4\left[x^2+(m-2)x+m^2-11\right]\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m^2-11\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta=(m-2)^2-4(m^2-11)\leq 0 \Leftrightarrow -3m^2-4m+48\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{-2-2\sqrt{37}}{3} \\ m\geq \dfrac{-2+2\sqrt{37}}{3} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-21;21] \end{cases} \Rightarrow m\in\{-21;...;-5;4;...;21\} \Rightarrow S=\{-21;...;-5;4;...;21\}$.

Vậy tập S có tất cả 35 phần tử.

Câu 39. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2mx^3+4mx^2-(2m+2)x-2021$ đạt tại $x_0=2$. Số phần tử của tập S là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

+ Một hàm đa thức muốn đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=x_0$ thì hệ số của lũy thừa cao nhất phải dương và đạo hàm phái triệt tiêu tại $x=x_0$. Suy ra: $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ a_n>0 \end{cases}$

+ Đạo hàm: $f'(x)=4x^3-6mx^2+8mx-(2m+2)$.

+ Suy ra: $f'(2)=4.2^3-6m.2^2+8m.2-(2m+2)=0\Leftrightarrow m=3$.

+ **Thử lại:** Với $m=3\rightarrow f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x-2021=(x-2)^2(x^2-2x)-2021$.

+ Không thỏa mãn điều kiện: $f(x)=(x-2)^2(x^2-2x)-2021>f(2)=-2021$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Suy ra không có giá trị nào của tham số m thỏa mãn.

Câu 40. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)=-x^4-2mx^3+3mx^2-2mx-2021$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=1$. Số phần tử của tập S là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

+ Một hàm đa thức muốn đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=x_0$ thì hệ số của lũy thừa cao nhất phải âm và đạo hàm phái triệt tiêu tại $x=x_0$. Suy ra: $\begin{cases}f'(x_0)=0\\a_n<0\end{cases}$.

+ Đạo hàm: $f'(x)=-4x^3-6mx^2+6mx-2m$.

+ Suy ra: $f'(1)=-4.1^3-6m.1^2+6m.1-2m=0\Leftrightarrow m=-2$.

+ **Thử lại:** Với $m=-2\rightarrow f(x)=-x^4+4x^3-6x^2+4x-2021=-(x-1)^4-2020$.

+ Thỏa mãn điều kiện: $f(x)=-(x-1)^4-2020\le f(1)=-2020$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Suy ra giá trị của tham số $m=-2$ thỏa mãn.

Câu 41. Cho hàm số $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là 4 và -3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|g(x)|$ trên đoạn $[a;b]$ lần lượt bằng

A. 4 và 0. **B.** 4 và -3. **C.** 7 và -3. **D.** 3 và 0.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|g(x)|$ khi biết giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

• Đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm phía trên trục hoành.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành, bỏ đi phần đồ thị $y=g(x)$ nằm phía dưới trục hoành.

Đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ là hợp của hai phần trên.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xét giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số để kiểm tra đồ thị hàm số có cắt trục hoành không.

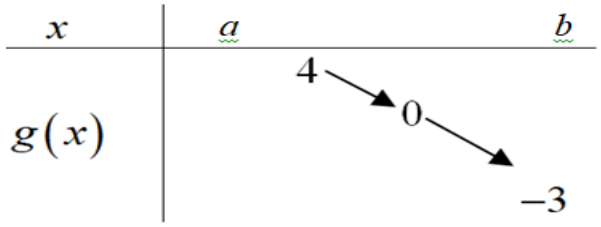
B2: Từ cách vẽ đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|g(x)|$ từ giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

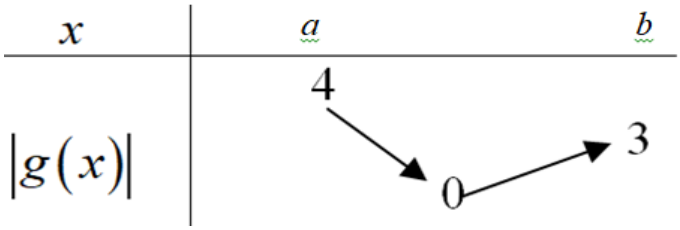
Lời giải

Chọn B

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ nên ta có thể giả sử bảng biến thiên của $g(x)$ là



Suy ra bảng biến thiên của $|g(x)|$



Suy ra $\min\limits_{[a;b]}|g(x)|=0$, $\max\limits_{[a;b]}|g(x)|=4$.

Câu 42. Cho hàm số $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là 3 và -5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|g(x)|$ trên đoạn $[a;b]$ lần lượt bằng

A. 5 và 0. **B.** 3 và -5. **C.** 5 và -3. **D.** 8 và 0.

Phân tích hướng dẫn giải

1.DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán max min hàm số chứa trị tuyệt đối

2.KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

a. Cách vẽ hàm số $|f\ x|$:

B1: Vẽ đồ thị hàm số $y=f\ x$ C

B2: Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm trên trục hoành.

B3: Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành.

b. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[a;b]$:

Nếu $x_o\in a;b$ và $f\ x_o\geq f\ x\ \ \forall x\in a;b$

thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[a;b]$ là $f\ x_o$.

Nếu $x_o\in a;b$ và $f\ x_o\leq f\ x\ \ \forall x\in a;b$

thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ là $f\ x_o$

3.HƯỚNG GIẢI

B1: Phác thảo đồ thị hàm số $y=f\ \ x\ \ \ C$

B2: Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm trên trục hoành.

B3: Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C) nằm dưới trục hoành.

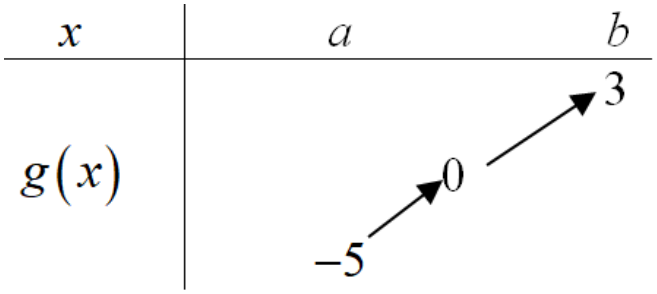
B4: Dựa vào đồ thị của hàm số $y=\left|f\ \ x\ \right|$ để kết luận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Từ đó ta có thể giải bài toán cụ thể như sau

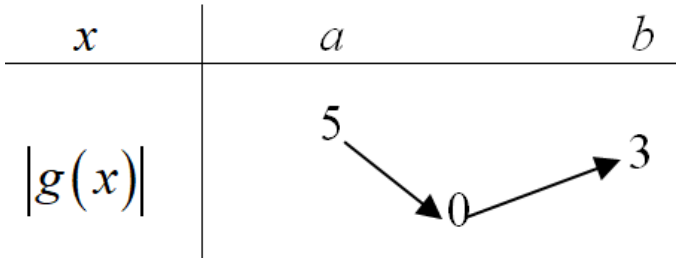
Lời giải

Chọn A

Vì hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ nên ta có thể giả sử bảng biến thiên của $g\left(x\right)$ là



Suy ra bảng biến thiên của $\left|g\left(x\right)\right|$



Kết quả cho ta $\max\limits_{x\in\left[a;b\right]}\left|g\left(x\right)\right|=5$ và $\min\limits_{x\in\left[a;b\right]}\left|g\left(x\right)\right|=0$.

Câu 43. Cho hàm số $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là β và α. Ta gọi giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ là M, mệnh đề phát biểu **sai** tương ứng là:

A. Nếu $\beta\geq-\alpha$ thì $M=\beta$.

B. Nếu $\beta\leq-\alpha$ thì $M=-\alpha$.

C. Nếu $\beta\geq-\alpha$ thì $M=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

D. $M=\max\left\{\beta;-\alpha\right\}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất của hàm trị tuyệt đối $y=\left|g\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ khi biết trước giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Cách biến đổi đồ thị hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$:**

Gọi $\left(C_1\right)$ là phần đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)$ nằm phía trên trục Ox,

$\left(C_2\right)$ là phần đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)$ không nằm phía trên trục Ox,

$\left(C_2'\right)$ là phần đồ thị đối xứng với đồ thị $\left(C_2\right)$ qua trục Ox.

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|g(x)\right|$ là $\left(C_1\right)\cup\left(C_2'\right)$.

◆ **Đồ thị hàm số trên đoạn $[a;b]$:**

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ là phần đồ thị của hàm số $y=g(x)$ mà có hoành độ $x\in[a;b]$.

◆ **Giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$:**

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ là tung độ điểm cao nhất của đồ thị hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định giá trị nhỏ nhất α và giá trị lớn nhất β của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

B2: Xét dấu của α.

Nếu $\alpha>0$ thì $M=\beta$.

Nếu $\alpha<0$ ta so sánh $-\alpha$ với β rồi ra kết luận.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Nếu $\alpha\geq 0$ thì $M=\beta$.
Nếu $\alpha<0$ thì để tìm M ta chỉ cần so sánh β với $-\alpha$ giá trị nào lớn hơn thì đó là M.
Do đó các mệnh đề:
Nếu $\beta\geq-\alpha$ thì $M=\beta$.
Nếu $\beta\leq-\alpha$ thì $M=-\alpha$.
$M=\max\{\beta;-\alpha\}$ đều đúng.
Mệnh đề Nếu $\beta\geq-\alpha$ thì $M=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. là mệnh đề sai.

Câu 44. Cho hàm số $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là β và α. Ta gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ trên đoạn $[a;b]$ là m, mệnh đề phát biểu **sai** tương ứng là:

A. Nếu $\alpha\geq 0$ thì $m=\alpha$.
B. Nếu $\beta\leq 0$ thì $m=-\beta$.
C. Nếu $\alpha\beta<0$ thì $m=0$.
D. $m=\min\{\beta;\alpha\}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm trị tuyệt đối $y=\left|g(x)\right|$ trên đoạn $[a;b]$ khi biết trước giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Cách biến đổi đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ từ đồ thị hàm số $y=g(x)$:**

Gọi (C_1) là phần đồ thị của hàm số $y=g(x)$ nằm phía trên trục Ox,

(C_2) là phần đồ thị của hàm số $y=g(x)$ không nằm phía trên trục Ox,

(C_2') là phần đồ thị đối xứng với đồ thị (C_2) qua trục Ox.

Khi đó đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ là $(C_1)\cup(C_2')$.

◆ **Đồ thị hàm số trên đoạn $[a;b]$:**

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ là phần đồ thị của hàm số $y=g(x)$ mà có hoành độ $x\in[a;b]$.

◆ **Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$:**

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ là tung độ điểm thấp nhất của đồ thị hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xác định giá trị nhỏ nhất α và giá trị lớn nhất β của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

B2: Xét dấu của α và β.

Nếu $\alpha\beta<0$ ta kết luận $m=0$, (vì đồ thị hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$ cắt trục hoành nên mọi điểm nằm trên đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ trên đoạn $[a;b]$ đều có tung độ không âm).

Nếu $\alpha>0,\beta>0$ ta kết luận $m=\alpha$.

Nếu $\alpha<0,\beta<0$ ta kết luận $m=-\beta$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Muốn xác định m ta phải xác định dấu α, β. Ta có các khẳng định:

Nếu $\alpha\beta<0$ thì $m=0$

Nếu $\alpha>0,\beta>0$ thì $m=\alpha$.

Nếu $\alpha<0,\beta<0$ thì $m=-\beta$ đều là các khẳng định đúng.

Do đó khẳng định $m=\min\{\beta;\alpha\}$ sai.

Câu 45. Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+m-3\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $-2;2$ bằng 10. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 2. **B.** −1. **C.** −3. **D.** 3.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán về GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Quy tắc tìm GTLN – GTNN của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $a;b$:**

+ Tính đạo hàm $f'\ x$. Giải phương trình $f'\left(x\right)=0$ trên đoạn $a;b$.

+ Gọi các nghiệm tìm được là $x_1,x_2,...,x_m\in a;b$, tính các giá trị $f\ a$, $f\ x_1$, $f\ x_2$,..., $f\ x_m$, $f\ b$.

+ So sánh các giá trị tìm được ở trên để kết luận $\max\limits_{a;b} f\ x$ và $\min\limits_{a;b} f\ x$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2+2x+m-3$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f\ x$ trên đoạn $-2;2$.

B2: Biện luận các trường hợp $\min\limits_{[-2;2]} f\left(x\right)\ge 0$ và $\max\limits_{[-2;2]} f\left(x\right)\le 0$ để từ đó suy ra được $\max\limits_{[-2;2]}\left|f\left(x\right)\right|$.

B3: Xác định tập S và chỉ ra đáp số của bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Ta xét hàm số: $f\left(x\right)=x^2+2x+m-3$.

Đặt $g\ x=\left|f\ x\right|$.

Ta có: $f'\left(x\right)=2x+2;\quad f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\ x$ trên đoạn $-2;2$

x	-2		-1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$m-3$	↘	$m-4$	↗	$m+5$

+ Trường hợp 1: $m-4\ge 0\Leftrightarrow m\ge 4$, ta có $\max\limits_{-2;2} g\ x=g\ 2=\left|f\ 2\right|=\left|m+5\right|=m+5$.

Ta phải có $m+5=10\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

+ Trường hợp 2: $m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -5$, ta có $\max\limits_{-2;2} g\ x=g\ -1=\left|f\ -1\right|=\left|m-4\right|$.

Ta phải có $|m-4|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-4=10 \\ m-4=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=14 \ l \\ m=-6 \end{array}\right.$.

Vậy, ta có $S=\ -6;5\ $ nên tổng tất cả các phần tử của S bằng $-6+5=-1$.

Câu 46. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+2m-1\right|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $-1;1$ bằng 6. Tích tất cả các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** -14. **C.** $-\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán về GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Quy tắc tìm GTLN – GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $a;b$:**

+ Tính đạo hàm $f'\ x\ $. Giải phương trình $f'(x)=0$ trên đoạn $a;b$.

+ Gọi các nghiệm tìm được là $x_1, x_2, ..., x_m \in a;b$, tính các giá trị $f\ a\ , f\ x_1\ , f\ x_2\ ,...,$ $f\ x_m\ , f\ b\ .$

+ So sánh các giá trị tìm được ở trên để kết luận $\max\limits_{a;b} f\ x\ $ và $\min\limits_{a;b} f\ x\ $.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2m-1$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f\ x\ $ trên đoạn $-1;1$.

B2: Biện luận các trường hợp $\min\limits_{[-1;1]} f(x)\geq 0$ và $\max\limits_{[-1;1]} f(x)\leq 0$ để từ đó suy ra được $\max\limits_{[-1;1]}\left|f(x)\right|$.

B3: Xác định tập S và chỉ ra đáp số của bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

Ta xét hàm số: $f(x)=x^3-3x^2+2m-1$.

Đặt $g\ x\ =\left|f\ x\ \right|$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x;\quad f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\notin[-1;1] \quad (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\ x\ $ trên đoạn $-1;1$

x	-1		0		1
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$2m-5$	↗	$2m-1$	↘	$2m-3$

+ Trường hợp 1: $2m-5\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{5}{2}$, ta có $\max\limits_{-1;1} g\ x\ =g\ 0\ =\left|f\ 0\right|=\left|2m-1\right|=2m-1$.

Ta phải có $2m-1=6\Leftrightarrow m=\frac{7}{2}$ (thỏa mãn).

+ Trường hợp 2: $2m-1\le 0\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$, ta có $\max\limits_{-1;1} g\ x\ =g\ -1\ =\left|f\ -1\right|=\left|2m-5\right|$.

Ta phải có $\left|2m-5\right|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-5=6\\2m-5=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{11}{2}\ l\\m=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy, ta có $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$ nên tích tất cả các phần tử của S bằng $\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[a;b\right]$ lần lượt là 6 và -2. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-21;21\right]$. Để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+3m-1\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[a;b\right]$ không nhỏ hơn 12. Số phần tử của S là?

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 36.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số có dấu trị tuyệt đối chứa tham số.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆Từ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra giá trị lớn nhất,nhất của hàm số $y=f\left(x\right)\pm m$.

+) $\max\limits_{[a;b]}\left|g\left(x\right)\right|=\max\left\{\max\limits_{[a;b]}g\left(x\right);-\min\limits_{[a;b]}g\left(x\right)\right\}$

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xét hàm số: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+3m-1$ trên $\left[a;b\right]$.

B2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+3m-1$ trên $\left[a;b\right]$.

B4: Dùng bổ đề để biện luận về GTLN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+3m-1\right|$ trên $\left[a;b\right]$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

+) Xét hàm số: $g(x)=f(x)+3m-1$: $\max\limits_{[a;b]} g(x)=3m+5;\ \min\limits_{[a;b]} g(x)=3m-3$.

+) Suy ra: $\max\limits_{[a;b]}|g(x)|=\left\{\max\limits_{[a;b]} g(x)=3m+5;-\min\limits_{[a;b]} g(x)=-3m+3\right\}$.

Suy ra điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3m+5\ge 12\\3m+5\ge 3-3m\end{cases}\\\begin{cases}3-3m\ge 12\\3-3m\ge 3m+5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge\dfrac{7}{3}\\m\ge-\dfrac{1}{3}\end{cases}\\\begin{cases}m\le -3\\m\le-\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\dfrac{7}{3}\\m\le -3\end{array}\right.$.

Kết hợp với giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$, nên $m\in[-21;-3]\cup[3;21]\Rightarrow$ có 38 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ lần lượt là 5 và -3. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|f(3-x)+m|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ không lớn hơn 12. Số phần tử của tập S là

A. 17. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 23.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán max min hàm giá trị tuyệt đối

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆**Bổ đề:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng $\max\limits_{x\in K} f(x)=a;\min\limits_{x\in K} f(x)=b$. Khi đó

+ $\max\limits_{x\in K}|f(x)|=\max\{|a|;|b|\}$.

+ $\min\limits_{x\in K}|f(x)|=\begin{cases}b & \text{khi } b\ge 0\\-a & \text{khi } a\le 0\\0 & \text{khi } a.b<0\end{cases}$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Xét hàm số: $g(x)=f(3-x)+m$ trên $[0;3]$.

B2: Đặt $t=3-x\Rightarrow t\in[a;b]$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $h(t)=f(t)+m$ trên $[a;b]$.

B3: Suy ra GTLN, GTNN của hàm số $g(x)=f(3-x)+m$ trên $[0;3]$.

B4: Dùng bổ đề để biện luận về GTLN của hàm số $y=|f(3-x)+m|=|g(x)|$ trên $[0;3]$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số trong dấu giá trị tuyệt đối: $g(x)=f(3-x)+m$ trên $[0;3]$.

Đặt $t=3-x\Rightarrow t\in[0;3]$ hàm số trở thành $h(t)=f(t)+m$.

Do $\max\limits_{x\in[0;3]}f(x)=5\Rightarrow\max\limits_{x\in[0;3]}g(x)=\max\limits_{t\in[0;3]}h(t)=5+m$;

$\min\limits_{x\in[0;3]}f(x)=-3\Rightarrow\min\limits_{x\in[0;3]}g(x)=\min\limits_{t\in[0;3]}h(t)=-3+m$.

Suy ra: $\max\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|=\max\limits_{x\in[0;3]}\{5+m;3-m\}$.

Để hàm số $y=|f(3-x)+m|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ không lớn hơn 12 thì

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+5\le 12\\ m+5\ge 3-m\end{cases}\\ \begin{cases}3-m\le 12\\ 3-m>m+5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\le 7\\ m\ge -1\end{cases}\\ \begin{cases}m\ge -9\\ m<-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le m\le 7\\ -9\le m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow -9\le m\le 7.$$

Vậy, có 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=|x^5-5x+2m-1|$ trên đoạn $[-2;0]$ lớn hơn 5. Số phần tử của tập S là:

A. 2022. **B.** 4042. **C.** 4021. **D.** 4027.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm ẩn.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.**

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ luôn tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

◆ **Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[a;b]$:**

$$\min_{[a;b]}|f(x)|=\min\left\{\left|\min_{[a;b]}f(x)\right|;\left|\max_{[a;b]}f(x)\right|\right\};\ \max_{[a;b]}|f(x)|=\max\left\{\left|\min_{[a;b]}f(x)\right|;\left|\max_{[a;b]}f(x)\right|\right\}.$$

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

B2: Nhận xét do $\min\limits_{[a;b]}|g(x)|>5$ nên đồ thị hàm số không cắt trục hoành chỉ có thể ở hoàn toàn phía trên hoặc hoàn toàn phía dưới trục hoành.

B3: Tìm m theo hai trường hợp.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

+ Xét hàm trong trị tuyệt đối: $g(x)=x^5-5x+2m-1$ trên $[-2;0]$ ta được kết quả:

+ $\min\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=2m-23$ và $\max\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=2m+3$.

+ Có $\min\limits_{x\in[-2;0]}\left|g(x)\right|>5$ suy ra đồ thị hàm $y=g(x)$ không cắt trục hoành, tức luôn nằm trên hoặc nằm dưới. Khi đó có hai trường hợp ứng với nằm trên và nằm dưới như sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\min\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=2m-23>0\\ \min\limits_{x\in[-2;0]}\left|g(x)\right|=\min\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=2m-23>5\end{cases}\\ \begin{cases}\max\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=2m+3<0\\ \min\limits_{x\in[-2;0]}\left|g(x)\right|=-\max\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=-2m-3>5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>\dfrac{23}{2}\\ m>14\end{cases}\\ \begin{cases}m<-\dfrac{3}{2}\\ m<-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{23}{2}\\ m<-4\end{array}\right.$$

Các giá trị nguyên m thỏa mãn điều kiện bài toán là: $\left[\begin{array}{l}12\le m\le 2021\\ -2021\le m\le -5\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4027 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$. Gọi α và β lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để $2\alpha>\beta$. Số phần tử của tập S là:

A. 33. **B.** 41. **C.** 27. **D.** 32.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tìm GTLN, GTNN của hàm số chứa tham số thỏa mãn điều kiện cho trước

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều cógiá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trênđoạnđó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$ta làm như sau:

∗ Tìm các điểm $x_1; x_2;...; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

∗ Tính $f(x_1); f(x_2);...; f(x_n); f(a); f(b)$.

∗ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a;b]$.

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Khảo sát hàm số bên trong dấu giá trị tuyệt đối để tìm ra GTLN, GTNN của hàm số .

B2:Từ mối liên hệ giữa GTLN, GTNN của hàm số kết luận đặc điểm của hàm số . Cụ thể ở đây ta suy ra, đồ thị hàm số $y=g(x)$ không cắt trục hoành (luôn nằm trên hoặc luôn nằm dưới).

B3: Xét các trường hợp suy ra khoảng giá trị tham số m cần tìm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn D

Khảo sát nhanh hàm số trong trị tuyệt đối: $g(x)=x^3-12x+m$ trên đoạn $[0;3]$, ta được kết quả: $\min\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m-16$ và $\max\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m$.

Ta có $2\min\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|>\max\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|>0$.

Suy ra, đồ thị hàm số $y=g(x)$ không cắt trục hoành (luôn nằm trên hoặc luôn nằm dưới)

Trường hợp 1: Đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm trên trục hoành Ox ,suy ra:

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m-16>0\\ \alpha=\min\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|=\min\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m-16\\ \beta=\max\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|=\max\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>16\\ 2(m-16)>m\end{cases}\Leftrightarrow m>32 \qquad (*)$$

Trường hợp 2: Đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm dưới trục hoành Ox , suy ra:

$$\begin{cases}\max\limits_{x\in[0;3]} g(x)=m<0\\ \alpha=\min\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|=-\max\limits_{x\in[0;3]} g(x)=-m\\ \beta=\max\limits_{x\in[0;3]}|g(x)|=-\min\limits_{x\in[0;3]} g(x)=16-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 2(-m)>16-m\end{cases}\Leftrightarrow m<-16 \qquad (**)$$

Kết hợp $(*),(**)$ và điều kiện ban đầu giá trị nguyên $m\in[-40;40]$.

Suy ra : $\left[\begin{array}{l}33\le m\le 40\\ -40\le m\le -17\end{array}\right.$ Suy ra có tất cả 32 giá trị m nguyên thỏa mãn.

DẠNG TOÁN 49: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN (thể tích khối đa diện được cắt ra từ 1 khối khác)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Thể tích khối đa diện

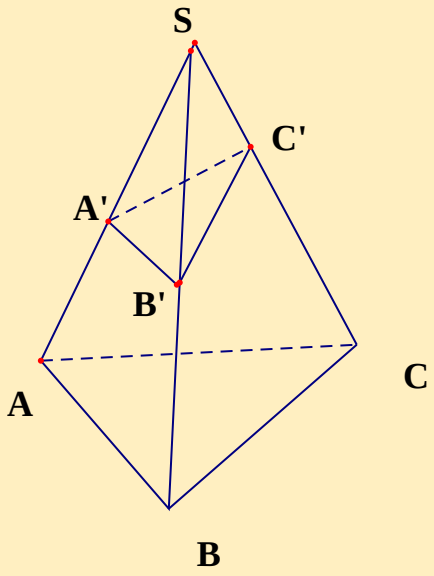
- Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3} S_d.h$

- Thể tích khối lăng trụ : $V = S_d.h$.

- Thể tích khối lập phương : $V = a^3$, **thể tích khối hộp chữ nhật :** $V = a.b.c$.

2. Thể tích khối đa diện được phân chia :

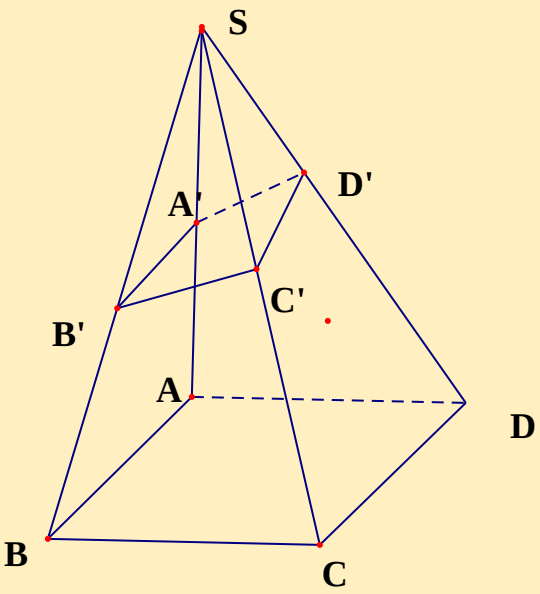
+) Khối chóp tam giác : $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$



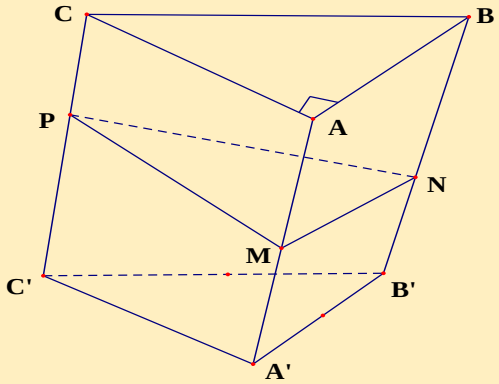
+) Khối chóp tứ giác có đáy là hình hành :

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \frac{a+b+c+d}{a.b.c.d}\left(a = \frac{SA}{SA'}, b = \frac{SB}{SB'}, c = \frac{SC}{SC'}, d = \frac{SD}{SD'}\right)$$

$a + c = b + d$

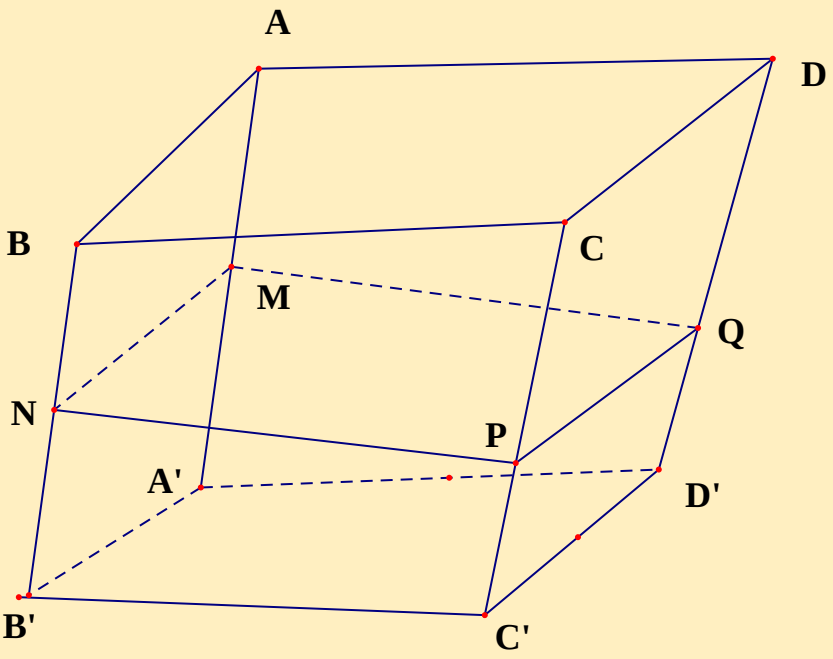


+) Thể tích khối lăng trụ tam giác : $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC,A'B'C'}} = \frac{1}{3}.\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'}\right)$



+) Khối hộp : $\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD,A'B'C'D'}} = \frac{1}{4}.\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right)$

$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

- ♦ Khối đa diện cắt ra từ một khối chóp
- ♦ Khối chóp cụt
- ♦ Khối hình hộp khác
- ♦ Khối lăng trụ khác
- ♦ Khối da diện cắt ra từ khối lăng trụ
- ♦ …

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A',BCC'B',CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán tính thể tích khối đa diện.

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Tính thể tích khối $B.EMN$ theo thể tích khối hộp với E là trung điểm cạnh BB'.

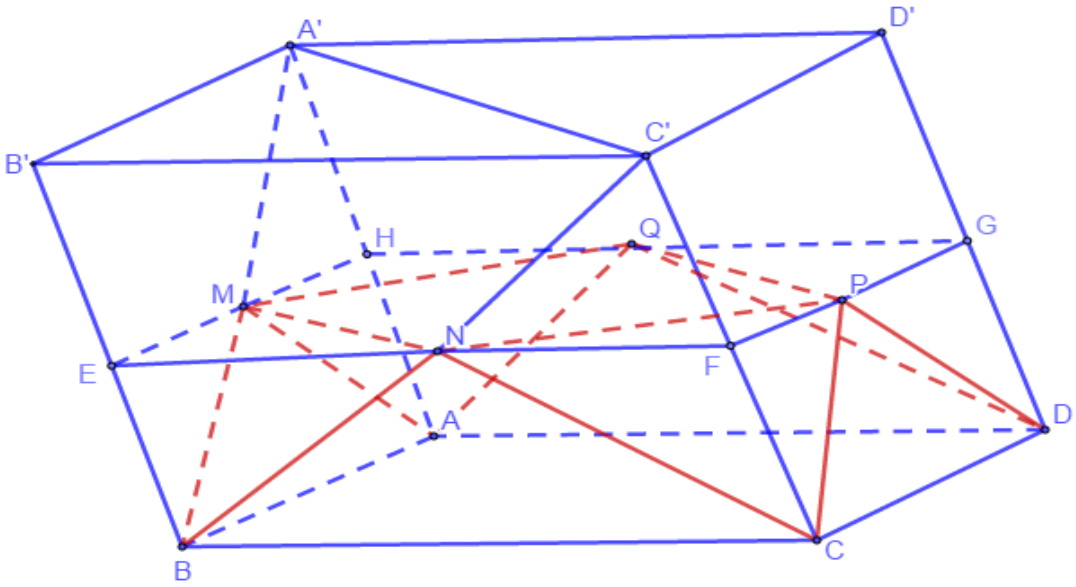
B2: Hoàn toàn tương tự, tính thể tích 3 khối nhỏ là $V_{C.NFP};V_{D.GPQ};V_{A.MHQ}$.

B3: Thể tích khối đa diện cần tìm sẽ bằng thể tích khối $EFGH.ABCD$ trừ đi thể tích 4 khối nhỏ bằng nhau là $V_{B.EMN};V_{C.NFP};V_{D.GPQ};V_{A.MHQ}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B



Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của BB',CC',DD' và AA'.

Ta có:

$$EMN \parallel A'B'C' \Rightarrow \frac{V_{B.EMN}}{V_{B.A'B'C'}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow V_{B.EMN}=\frac{1}{8}V_{B.A'B'C'}=\frac{1}{8}.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{1}{24}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Hoàn toàn tương tự,

$$V_{C.NFP}=V_{D.GPQ}=V_{A.MHQ}=\frac{1}{48}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

Thể tích khối đa diện cần tìm sẽ bằng thể tích khối $EFGH.ABCD$ trừ đi thể tích 4 khối nhỏ bằng nhau là $V_{B.EMN};V_{C.NFP};V_{D.GPQ};V_{A.MHQ}$.

Suy ra $V_{MNPQABCD}=\frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{2}-\frac{4}{48}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{5}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$

Mà $V_{ABCD.A'B'C'D'}=8.9=72$ nên $V_{MNPQABCD}=\frac{5}{12}.72=30$ (đvtt).

Bài tập tương tự và phát triển:

Mức độ 3

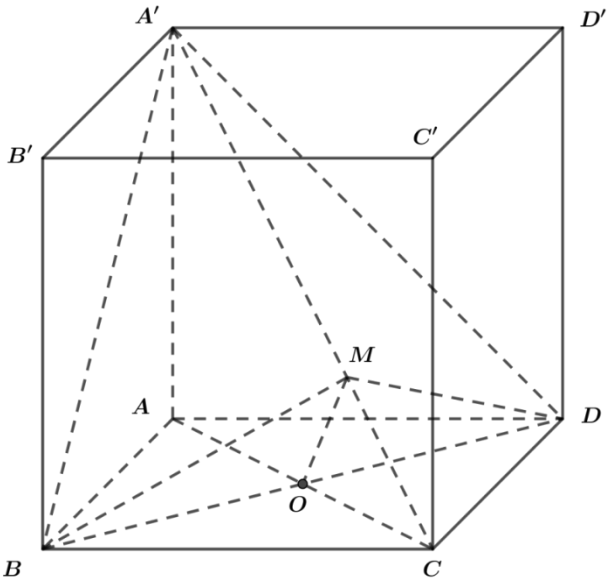
Câu 1Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $ABC=120°$.

Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3}{8}a^3$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC=120^0$ nên $BD=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có $BD\perp(A'AC)\Rightarrow BD\perp A'C$.

Kẻ $OM\perp A'C$ tại M thì $A'C\perp(BDM)\Rightarrow A'C\perp MD$, do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ là góc giữa hai đường thẳng MB và MD. Vậy $BMD=60°$ hoặc $BMD=120°$.

TH1: $BMD=60°$ thì do $MB=MD$ nên tam giác BMD là tam giác đều, do đó $OM=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow OM=OC$ (vô lý vì ΔOMC vuông tại M).

TH2: $BMD=120°$ thì do tam giác BMD cân tại M nên $BMO=60°$ $\Rightarrow MO=BO.\cot 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, do đó $MC=\sqrt{OC^2-MO^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Có tam giác $AA'C$ đồng dạng với tam giác MOC nên $\frac{AA'}{AC}=\frac{MO}{MC}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

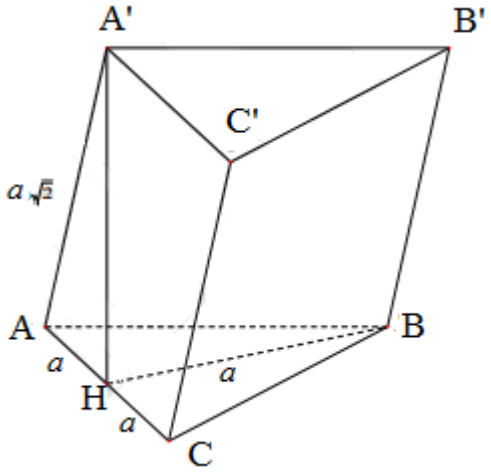
Vậy $V=AA'.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$.

Câu 2. **2H1-3.2-2]** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=2a$, cạnh bên $AA'=\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{1}{2}a^3$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao.

$HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$, $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

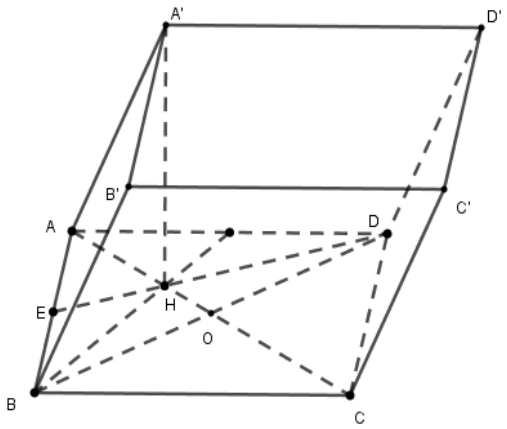
$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = A'H.\frac{1}{2}BH.AC = a^3$.

Câu 3. **[2H1-3.2-3]** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $ABC = 120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Hình thoi $ABCD$ cạnh a, $ABC = 120°$ nên góc $BAD = 60°$, suy ra tam giác ABD đều cạnh a. Diện tích đáy $ABCD$ là $S = 2.S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Ta có $A'H \perp (ABCD)$.

Tính được $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa AA' và mặt đáy bằng góc $A'AH = 60°$.

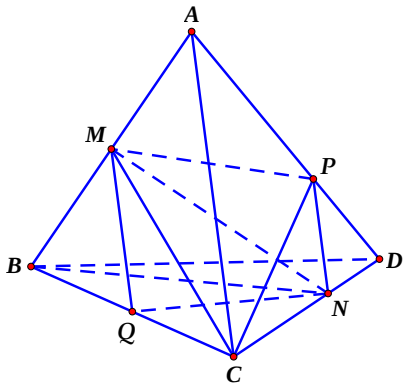
Ta có $A'H = AH.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$. Thể tích lăng trụ $V = A'H.S = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V=\frac{7\sqrt{2}}{216}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}}{108}$. **D.** $V=\frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, suy ra M là trung điểm AB;

$\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{ND}$, suy ra $NC=2ND$.

Từ N kẻ $NP // AC$, $N\in AD$; M kẻ $MQ // AC$, $Q\in BC$.

Mặt phẳng (P) là $(MPNQ)$.

Gọi AH là chiều cao khối chóp hạ từ A.

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{BCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

$V=V_{ACMPNQ}=V_{AMPC}+V_{MQNC}+V_{MPNC}$

Ta có $V_{AMPC}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AP}{AD}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{ABCD}$.

$V_{MQNC}=\frac{1}{2}V_{AQNC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{CQ}{CB}\cdot\frac{CN}{CD}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{2}V_{ABCD}$.

$V_{MPNC}=\frac{2}{3}V_{MPCD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}V_{MACD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{AM}{AB}\cdot V_{ABCD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{ABCD}=\frac{1}{9}V_{ABCD}$.

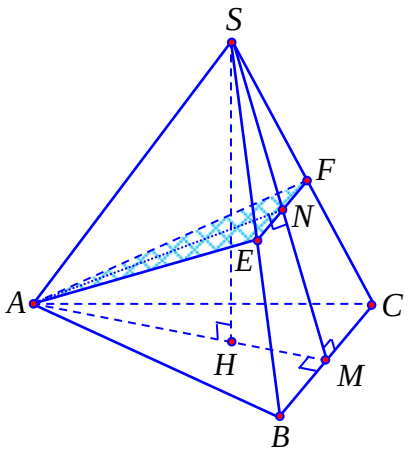
Vậy $V=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)V_{ABCD}\Rightarrow V=\frac{11}{18}V_{ABCD}=\frac{11\sqrt{2}}{216}$.

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh BC và EF; H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases}(AEF)\perp(SBC)\\(AEF)\cap(SBC)=EF\end{cases}$ (1)

Trong mặt phẳng (SBC), ta có $\begin{cases}EF\,//\,BC\\SM\perp BC\end{cases}$ nên $EF\perp SM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra SM vuông góc với mặt phẳng (AEF) tại N

Mặt khác

Tam giác SHM vuông tại H có $\cos M=\frac{HM}{SM}$ (3).

Tam giác AMN vuông tại N có $\cos M=\frac{MN}{AM}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{HM}{SM}=\frac{MN}{AM}\Leftrightarrow SM.MN=HM.AM$ (vì N là trung điểm SM)

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}SM^2=\frac{1}{3}AM^2\Leftrightarrow SM=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}AM=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SHM vuông tại H có $HM=\frac{1}{3}.AM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH=\sqrt{SM^2-HM^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

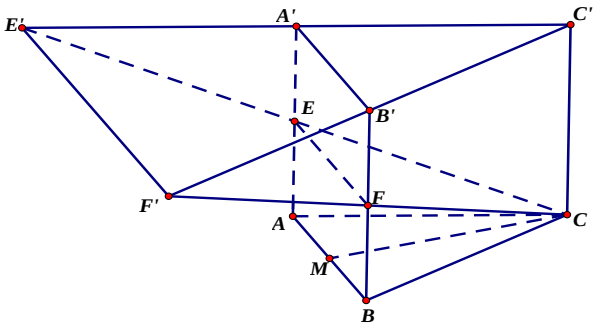
Khi đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AA' và BB'; đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E', đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F'. Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{\sqrt{3}}{4}.1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi M là trung điểm AB. Suy ra $CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $C.ABFE$ là

$$V_{C.ABFE} = \frac{1}{3}.S_{ABFE}.CM = \frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Thể tích khối đa diện $A'B'C'EFC$ là

$$V_{A'B'C'EFC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được A' và B' lần lượt là trung điểm của $C'E'$ và $C'F'$.

Thể tích khối chóp $C.C'E'F'$ là

$$V_{C.C'E'F'} = \frac{1}{3}.S_{C'E'F'}.CC' = \frac{1}{3}.4.S_{C'A'B'}.CC' = \frac{1}{3}.4.\frac{\sqrt{3}}{4}.1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Khi đó, thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ là

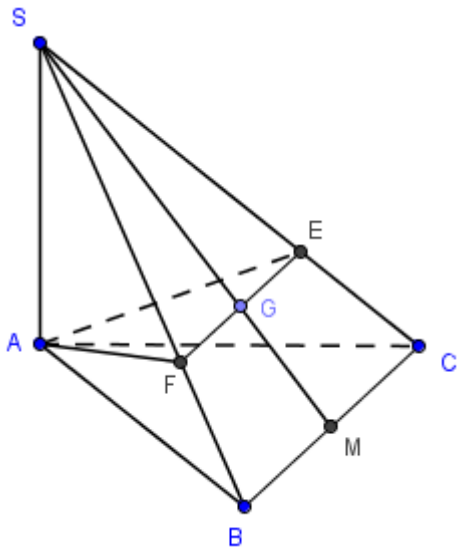
$$V_{EFA'B'E'F'} = V_{C.C'E'F'} - V_{A'B'C'EFC} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AG và song song với BC, chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S.

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{2a^3}{9}$. **D.** $\frac{5a^3}{54}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (SBC), qua G kẻ đường thẳng song song với BC, lần lượt cắt SC, SB tại E và F. Khi đó, khối đa diện không chứa đỉnh S là $ABCEF$.

Gọi M là trung điểm BC. Vì G là trọng tâm của ΔSBC nên $\frac{SE}{SC}=\frac{SF}{SB}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$.

Do đó: $\frac{V_{S.AFE}}{V_{S.ABC}}=\frac{SF}{SB}.\frac{SE}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Hay $V_{S.AFE}=\frac{4}{9}.V_{S.ABC}\Rightarrow V_{ABCEF}=V_{S.ABC}-\frac{4}{9}.V_{S.ABC}=\frac{5}{9}.V_{S.ABC}$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$ nên $AB=BC=a$.

Mặt khác $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.a.a=\frac{a^3}{6}$. Suy ra $V_{ABCEF}=\frac{5}{9}.\frac{a^3}{6}=\frac{5a^3}{54}$.

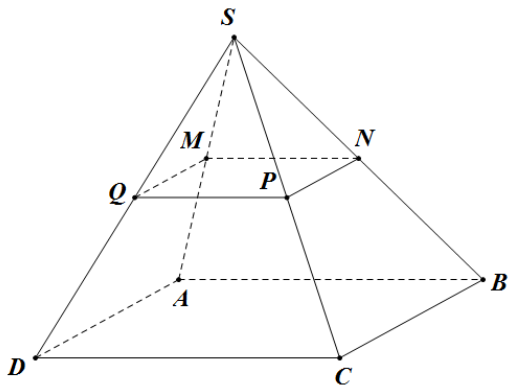
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,SD. Tỉ số thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và khối chóp $S.ABCD$ là.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $S_{ABC}=S_{ACD}$.



Do đó $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2V_{S.ACD}$.

Ta có.

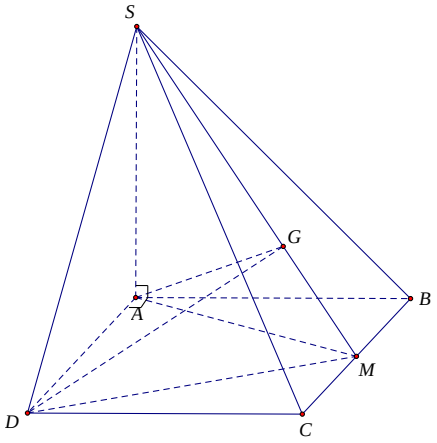
$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.MPQ}}{2V_{S.ACD}}$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{1}{2}\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}.$$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA=AD=2a$. Góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là $60°$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính thể tích khối chóp $S.AGD$ là

A. $\frac{16a^3}{9\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{32a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Vì góc giữa (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là $60°$ nên $SBA=60°\Rightarrow AB=\frac{SA}{\tan 60°}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Khi đó: $S_{ABCD}=AB.AD=\frac{2a}{\sqrt{3}}.2a=\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M là trung điểm BC, khi đó: $S_{ADM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

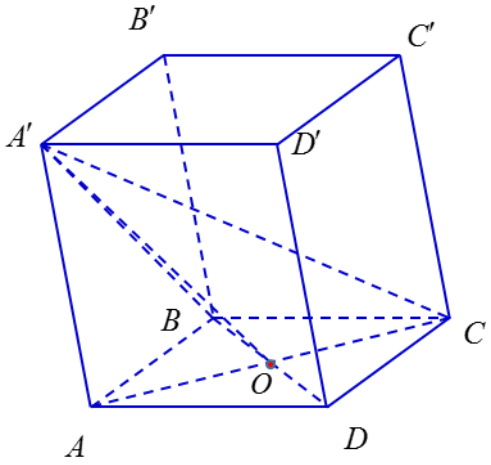
$\Rightarrow V_{S.ADG}=\frac{2}{3}V_{S.ADM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.2a.\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}=\frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$.

Câu 10. Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Thể tích của khối chóp $A'.BCO$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



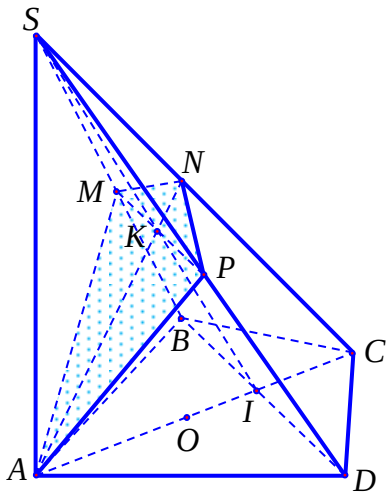
$V_{A'.BCO}=\frac{1}{3}d\left(A',(BCO)\right).S_{BCO}=\frac{1}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=1$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, tam giác ABD đều cạnh a, tam giác BCD cân tại C và $BCD=120°$. $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Tính thể tích khối chóp $S.AMNP$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{42}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{21}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{14}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trọng tâm tam giác đều ABD và I là trung điểm BD thì $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OI=\frac{1}{3}AI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác ICD vuông I có $ICD=60°$, $ID=\frac{1}{2}BD=\frac{a}{2}$ và $IC=ID.\cot 60°=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$\Rightarrow O$ và C đối xứng nhau qua đường thẳng $BD\Rightarrow AC=AI+IC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$

Mà $SC\perp(P)$ nên $BD//(P)$

Do đó $\begin{cases}(P)\cap(SBD)=MP\\(SBD)\cap(ABCD)=BD\end{cases}\Rightarrow MP//BD$

Lại có $\begin{cases}BD\perp(SAC)\\AN\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow BD\perp AN\Rightarrow AN\perp MP$

Tam giác SAC vuông tại A có $SN.SC=SA^2 \Rightarrow \dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SA^2}{SC^2} \Rightarrow \dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\dfrac{3}{7}$

Tam giác ABC có $SD=a\sqrt{2}$; $BC=\sqrt{IC^2+IB^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $AC^2=AB^2+BC^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại $B \Rightarrow BC\perp(SAB)$; $AM\subset(SAB) \Rightarrow BC\perp AM$

Lại có tam giác SAB vuông nên $AM\perp SB \Rightarrow M$ là trung điểm $SB \Rightarrow \dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2}$

Mà $MP//BD$ nên $\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2}$

Mặt khác

$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}CB.CD.\sin 120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $V=V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Khi đó $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{3}{7}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{14} \Rightarrow V_{S.ANP}=\dfrac{3}{28}V$. Do đó $V_{S.ANM}=\dfrac{3}{28}V$.

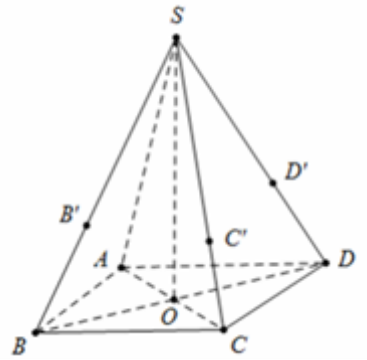
Vậy $\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{3}{14} \Rightarrow V_{S.AMNP}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{42}$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC cắt SC,SB,SD lần lượt tại B',C',D'. Biết rằng $3SB'=2SB$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ là

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{2}{3}$, bây giờ cần tìm $\dfrac{SC'}{SC}$

Tọa độ hóa với $Ox\equiv OC, Oy\equiv OB, OS\equiv Oz$ và đặc biệt hóa cho $OA=1$

$\Rightarrow \begin{cases} A(-1;0;0) \\ C(1;0;0), S(0;0;a) \Rightarrow \overrightarrow{SC}=(1;0;-a) \end{cases}$

$\Rightarrow (P):(x+1)-az=0 \Leftrightarrow x-az+1=0.$

Ta có $B(0;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{SB}=(0;1;-a) \Rightarrow SB:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=-at \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Cho giao với $(P) \Rightarrow a^2t+1=0 \Rightarrow B'\left(0;1-\frac{1}{a^2};\frac{1}{a}\right)$.

Ta có

$$3\left(0;1-\frac{1}{a^2};\frac{1}{a}-a\right)=2(0;1;-a) \Rightarrow \begin{cases} 3-\frac{3}{a^2}=2 \\ \frac{3}{a}-3a=-2a \end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} S\left(0;0;\sqrt{3}\right) \\ (P): x-z\sqrt{3}+1=0 \end{cases}$$

Cho SC giao với

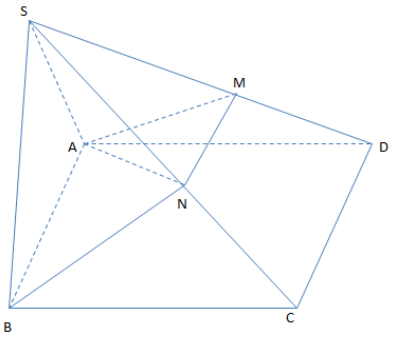
$$(P) \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \\ \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}.$$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 18, đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt SC tại N. Tính thể tích khối chóp $S.ABNM$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C



Có : $\begin{cases} M \in (ABM) \cap (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Leftrightarrow (ABM) \cap (SCD) = MN // CD$.

$$\frac{V_{S.ABNM}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{SANM}}{2V_{SACD}}+\frac{V_{SANB}}{2V_{SACB}}=\frac{1}{2}\left[\frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SC}+\frac{SN}{SC}\right]=\frac{5}{9}.$$

Vậy : $V_{S.ABNM}=\frac{5}{9}.V_{SABCD}=10$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là trung điểm SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD, cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'. Tỷ số $\frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}}$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm hình bình hành đáy.

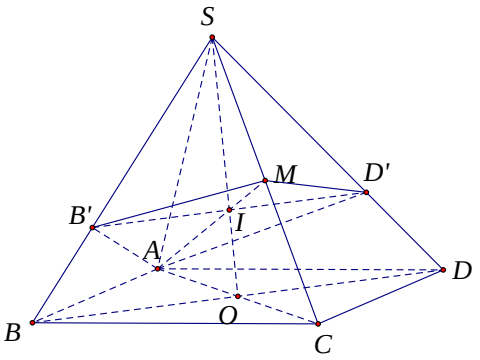
$I=AO \cap SO$.

Đường thẳng qua I và song song BD cắt SB, SD tại B', D'.

Ta có $V_{SAB'MD'}=V_{SAB'M}+V_{SAMD'}$.

$\frac{V_{SAB'M}}{V_{SABC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ nên $V_{SAB'M}=\frac{1}{6}V_{SABCD}$.

Tương tự $\frac{V_{SAMD'}}{V_{SACD}}=\frac{1}{3}$ nên $V_{SAMD'}=\frac{1}{6}V_{SABCD}$ do đó $V_{SAB'MD'}=\frac{1}{3}V_{SABCD}$.



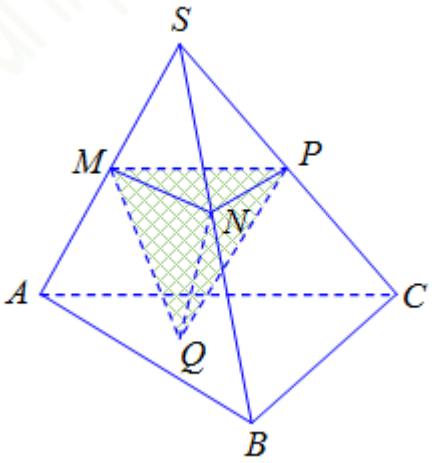
.

Câu 15. Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích V. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của SA, SB và SC. Thể tích khối tứ diện có đáy là tam giác MNP và đỉnh là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{8}$. **D.** $\frac{V}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy khoảng cách từ đỉnh tứ diện cần tính thể tích đến mặt phẳng (MNP) cũng bằng khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng (MNP).

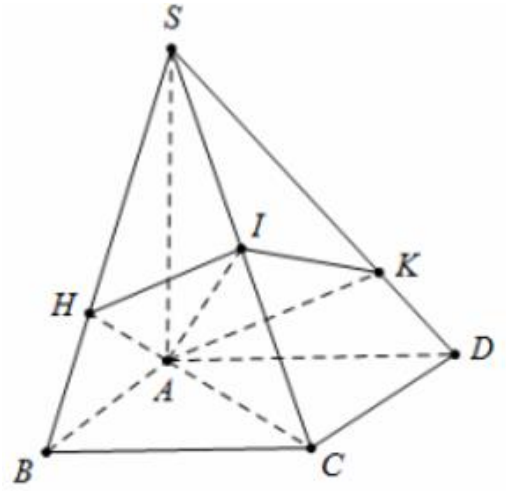
Ta có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{8}$ nên $V_{S.MNP}=\frac{V}{8}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy một góc $45°$. H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD mặt phẳng (AHK), cắt SC tại I. Khi đó thể tích của khối chóp $S.AHIK$ là:

A. $V=\frac{a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3}{18}$. **D.** $V=\frac{a^3}{36}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SBA = 45^\circ \Rightarrow SA = AB = a$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \Rightarrow SC \perp AH$.

Tương tự $SC \perp AK \Rightarrow SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AI$.

Ta có $\frac{SA^2}{AC^2} = \frac{SI}{IC} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SI}{SC} = \frac{1}{3}$.

Tỉ số $\frac{V_{S.AHI}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SB}.\frac{SI}{SC} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AHI} = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}$.

Tỉ số $\frac{V_{S.AIK}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SI}{SC}.\frac{SK}{SD} = 1.\frac{1}{3}.\frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.AIK} = \frac{1}{12}V_{S.ABCD}$.

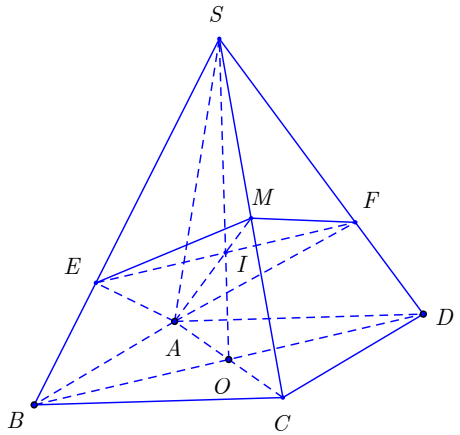
$\Rightarrow V_{S.AHIK} = V_{S.AHI} + V_{S.AIK} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}.\frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{18}$.

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích V khối chóp $S.AEMF$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(SBD): EF \cap SO = I$. Suy ra A, M, I thẳng hàng.

Trong tam giác SAC hai trung tuyến AM, SO cắt nhau tại I suy ra $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

Lại có $EF \,//\, BD \Rightarrow \dfrac{SE}{SB}=\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AEM}}{V_{SABC}}=\dfrac{SE}{SB}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{3}$. $\dfrac{V_{S.AFM}}{V_{SADC}}=\dfrac{SF}{SD}\cdot\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.AEM}+V_{S.AFM}}{V_{S.ABC}+V_{S.ADC}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_{S.AEMF}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{3}$.

Góc giữa cạnh bên và đáy của $S.ABCD$ bằng góc $SBO=60^\circ$ suy ra $SO=BO\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $V_{S.AEMF}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=1, DA\perp(ABC)$. ΔABC là tam giác đều, có cạnh bằng 1. Trên ba cạnh DA, DB, DC lấy điểm M, N, P mà $\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{1}{2},\dfrac{DN}{DB}=\dfrac{1}{3},\dfrac{DP}{DC}=\dfrac{3}{4}$. Thể tích V của tứ diện $MNPD$ bằng

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{96}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{96}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.1=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

$\dfrac{V_{DMNP}}{V_{DABC}}=\dfrac{DM}{DA}.\dfrac{DN}{DB}.\dfrac{DP}{DC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{8}$.

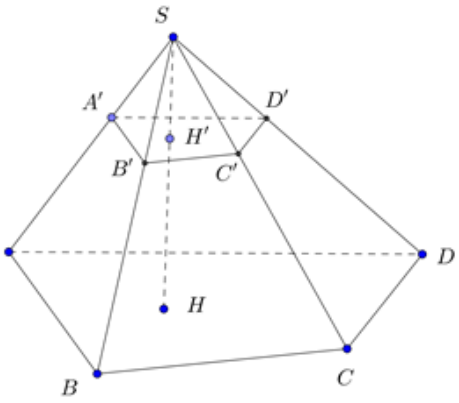
$\Rightarrow V_{DMNP}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{96}$.

Câu 19. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Trên cạnh SA lấy A' sao cho $SA'=\dfrac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với mặt đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$.

A. $\dfrac{V}{81}$. **B.** $\dfrac{V}{27}$. **C.** $\dfrac{V}{3}$. **D.** $\dfrac{V}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{3}$ (theo Talet).

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{SA'.SB'.SC'.SD'}{SA.SB.SC.SD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{81}\Rightarrow V_{A'B'C'D'}=\frac{V}{81}.$

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=1;\ DA\perp(ABC)$. ΔABC là tam giác đều, có cạnh bằng 1. Trên cạnh $DA,\ DB,\ DC$ lấy 3 điểm $M,\ N,\ P$ sao cho $\frac{DM}{DA}=\frac{1}{2};\ \frac{DN}{DB}=\frac{1}{3};\ \frac{DP}{DC}=\frac{3}{4}$. Thể tích của tứ diện $MNPD$ bằng

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{96}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}}{96}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.1=\frac{\sqrt{3}}{12}.$

$\frac{V_{DMNP}}{V_{DABC}}=\frac{DM}{DA}.\frac{DN}{DB}.\frac{DP}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$

Suy ra $V_{DMNP}=\frac{1}{8}.\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{96}.$

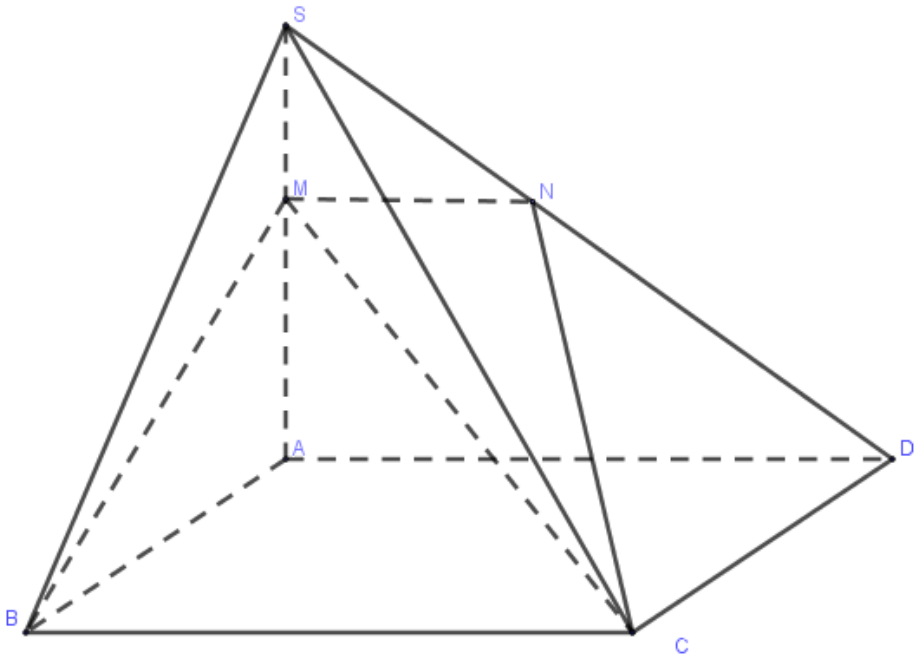
Mức độ 4

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=k, 0<k<1$. Khi đó giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau là

A. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **C.** $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. **D.** $k=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử (MBC) cắt SD tại N. Khi đó $MN // BC // AD$ suy ra $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SD}=k(k>0)$.

Ta có $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}=k,\ \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SD}=k^2$.

Do đó: $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABCD}}=\frac{k}{2};\ \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABCD}}=\frac{k^2}{2}$.

Bài toán thoả mãn khi $\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

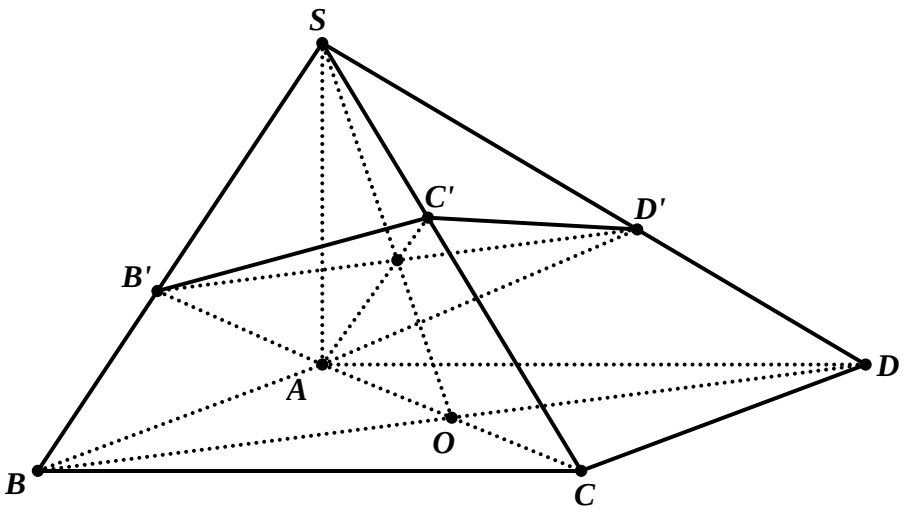
Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 2.] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $AD'\perp(SDC)\Rightarrow AD'\perp SD$; $AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SB$.

Do $SC\perp(AB'D')\Rightarrow SC\perp AC'$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC.

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\frac{SB'}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2a^2}{3a^2}=\frac{2}{3}$.

$$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{SAB'C'}+V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}+\frac{SD'}{SD}\cdot\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Vậy $V_{SAB'C'D'}=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

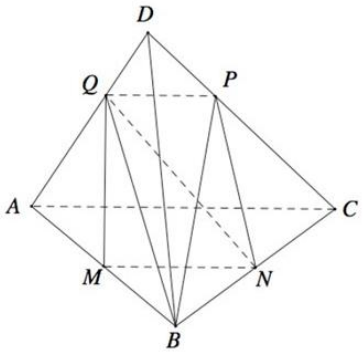
Câu 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P là một điểm trên cạnh CD sao cho $PC=2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AD tại Q. Thể tích của khối đa diện $BDMNPQ$ bằng

A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{27}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{108}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải

Chọn D

Vì M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Khi đó $MN//AC\Rightarrow(MNP)\cap(ACD)=PQ//MN$ với $P\in CD$ và $Q\in AD$.



Thể tích khối tứ diện đều $ABCD$ là $V_0=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có:

$$V_{D.BPQ}=\frac{DP}{DC}.\frac{DQ}{DA}.\frac{DB}{DB}.V_{D.CAB}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.1.V_0=\frac{1}{9}V_0.$$

$$V_{B.MNQ}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BQ}{BQ}.V_{B.ACQ}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1.V_{B.ACQ}=\frac{1}{4}.\frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}.V_{B.ACD}=\frac{1}{4}.\frac{AQ}{AD}.V_0=\frac{1}{6}V_0.$$

$$V_{B.PQN}=\frac{BP}{BP}.\frac{BQ}{BQ}.\frac{BN}{BC}.V_{B.PQC}=1.1.\frac{1}{2}.V_{B.PQC}=\frac{1}{2}.\frac{S_{PQC}}{S_{ADC}}.V_{B.ADC}=\frac{1}{2}.\frac{2}{9}.V_0=\frac{1}{9}V_0.$$

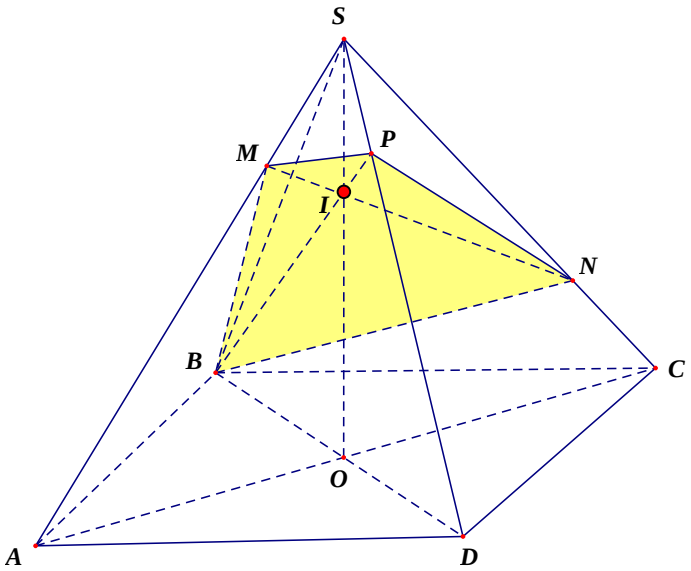
Vậy $V_{BDMNPQ}=V_{D.BPQ}+V_{B.MNQ}+V_{B.PQN}=\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right).V_0=\dfrac{7}{18}.\dfrac{\sqrt{2}}{12}=\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\dfrac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\dfrac{m}{n}$.

A. 2. **B.** $\dfrac{7}{5}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn C



+) Đặt $\begin{cases} \dfrac{SA}{SM} = x \\ \dfrac{SC}{SN} = y \end{cases}, (x, y \ge 1)$.

+) Có $\dfrac{SB}{SB} + \dfrac{SD}{SP} = 2\dfrac{SO}{SI} = 2.3 = 6 \Rightarrow \dfrac{SD}{SP} = 5$.

+) Có $x + y = 2\dfrac{SO}{SI} = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x$, $1 \le x \le 5$.

+) $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{x+1+y+5}{4.x.1.y.5} = \dfrac{12}{20xy} = \dfrac{3}{5xy} = \dfrac{3}{5x(6-x)} = \dfrac{3}{5(6x-x^2)}$.

+) Xét $f(x) = \dfrac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1 \le x \le 5$.

+) Có $f'(x) = \dfrac{3}{5}.\dfrac{2x-6}{(6x-x^2)^2}$.

+) $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ 1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

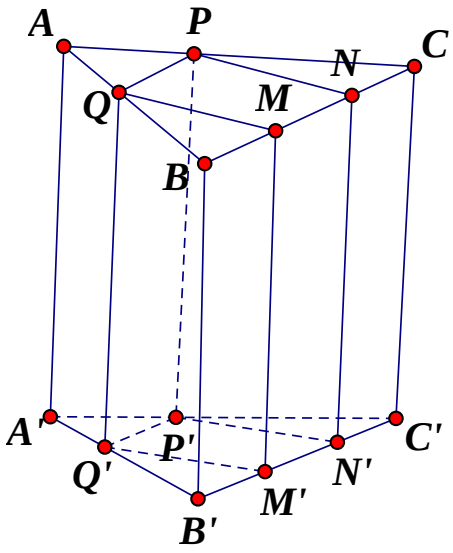
+) $f(1) = \dfrac{3}{25}$; $f(3) = \dfrac{1}{15}$; $f(5) = \dfrac{3}{25} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{25} \\ n = \dfrac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{9}{5}$.

Câu 5. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Lấy các điểm M, N nằm trên cạnh BC ; P, Q lần lượt nằm trên cạnh AC, AB sao cho $MNPQ$ là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ nội tiếp trong lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có thể tích lớn nhất là :

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Lời giải

Chọn C



Gọi độ dài đoạn MN là x với $(0<x<a)$ thì $MQ=\dfrac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ là $V=\dfrac{ax(a-x)\sqrt{3}}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a\sqrt{3}x(a-x)}{2}$ có $f'(x)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}(a-2x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$

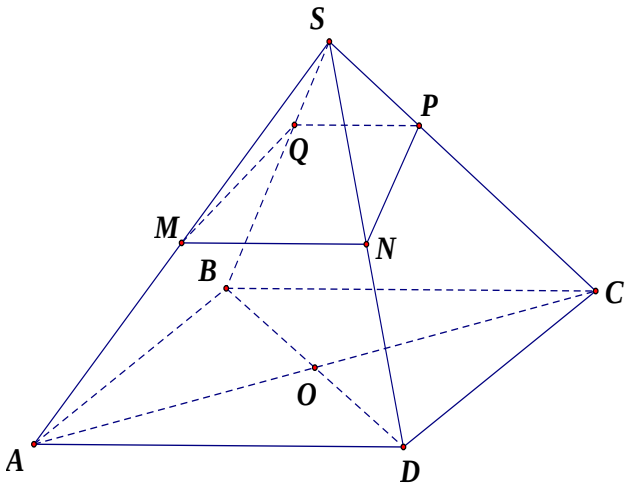
Vậy thể tích lớn nhất của hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Nên chọn C

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại Q, P. Đặt $\dfrac{SQ}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$, V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V_1=\dfrac{1}{2}V$.

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **C.** $x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **D.** $x=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

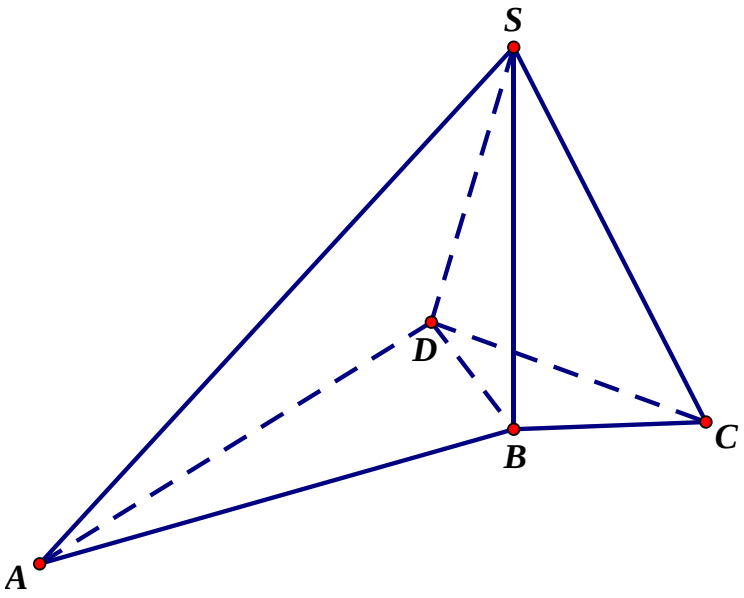


Do $\begin{cases} MN \,//\, BC \\ (\alpha)\cap(SBC)=PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, BC$.

$\dfrac{V_{S.MNQ}}{V}+\dfrac{V_{S.NPQ}}{V}=\dfrac{V_1}{V} \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MNQ}}{2V_{S.ABD}}+\dfrac{V_{S.NPQ}}{2V_{S.BCS}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SQ}{SB}+\dfrac{SP}{SC}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SQ}{SB}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1 \Leftrightarrow 2x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (vì $x>0$).

Câu 7. Cho hình đa diện như hình vẽ



Biết $SA=6$, $SB=3$, $SC=4$, $SD=2$ và $ASB=BSC=CSD=DSA=BSD=60°$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

A. $10\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $30\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA'=SB'=SC'=SD=2$. Ta có $A'B'=B'C'=C'D=DA'=2$. Khi đó hình chóp $S.A'B'D$ và hình chóp $S.CB'D$ là các hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 2.

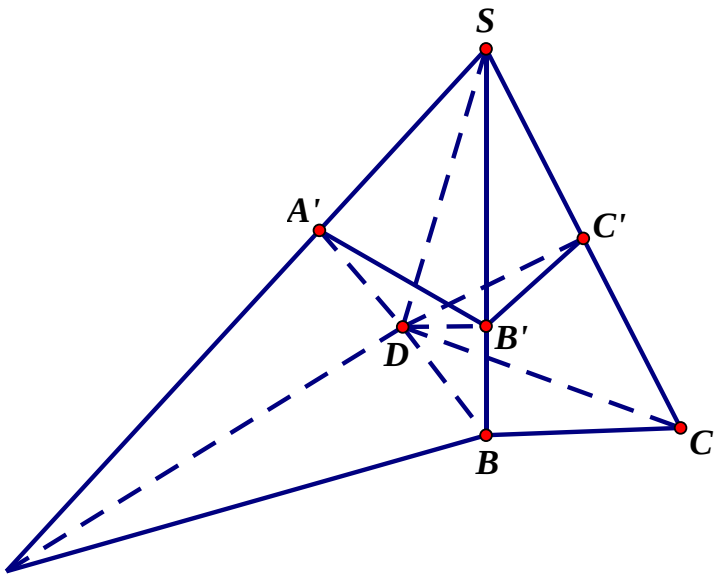
$V_{S.A'B'D}=V_{S.C'B'D}=\dfrac{2^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S.ABD}}{V_{S.A'B'D}}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SD}{SD}=3.\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$, nên $V_{S.ABD}=\dfrac{9}{2}V_{S.A'B'D}=\dfrac{9}{2}.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$.

$\dfrac{V_{S.CBD}}{V_{S.C'B'D}}=\dfrac{SC}{SC'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SD}{SD}=2.\dfrac{3}{2}=3$, nên $V_{S.CBD}=3V_{S.C'B'D}=3.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$.

Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

$V=V_{S.ABD}+V_{S.CBD}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

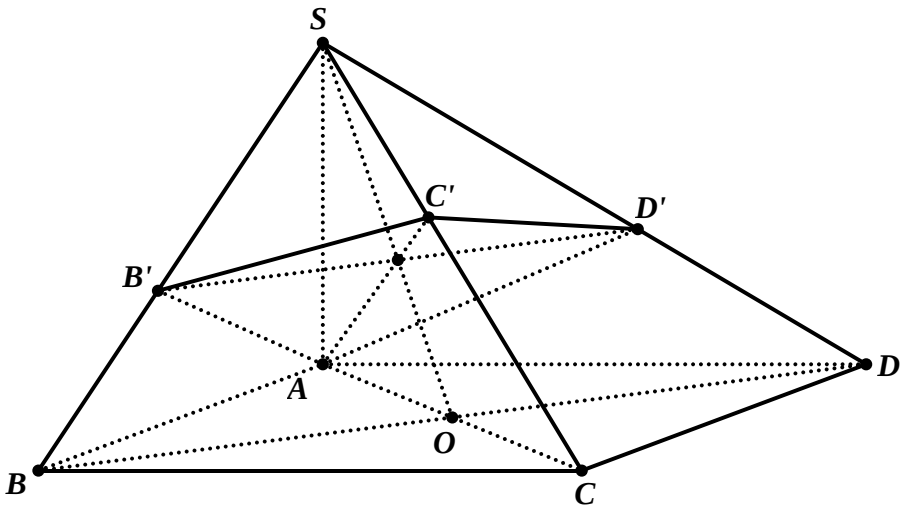


Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $AD'\perp(SDC)\Rightarrow AD'\perp SD$; $AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SB$.

Do $SC\perp(AB'D')\Rightarrow SC\perp AC'$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC.

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{2a^2}{3a^2}=\dfrac{2}{3}$.

$$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{SAB'C'}+V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}+\frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

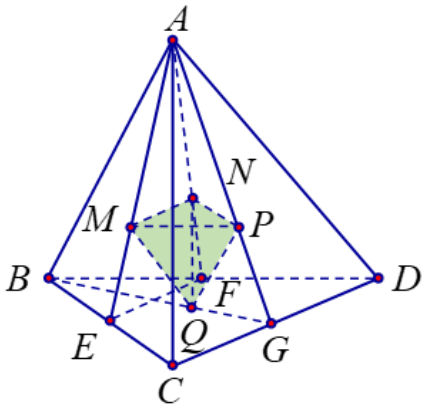
Vậy $V_{SAB'C'D'}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 9. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{2017}{27}$. **B.** $\frac{4034}{81}$. **C.** $\frac{8068}{27}$. **D.** $\frac{2017}{9}$.

Lời giải

Chọn A



$\frac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{EFG}}{S_{BCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AEFG} = \frac{1}{4}V_{ABCD}$

.

$\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \frac{SM}{SE}.\frac{SN}{SE}.\frac{SP}{SG} = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{8}{27}V_{AEFG} = \frac{8}{27}.\frac{1}{4}V_{ABCD} = \frac{2}{27}V_{ABCD}$

Do mặt phẳng $(MNP)//(BCD)$ nên $\frac{V_{QMNP}}{V_{AMNP}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_{QMNP} = \frac{1}{2}V_{AMNP}$

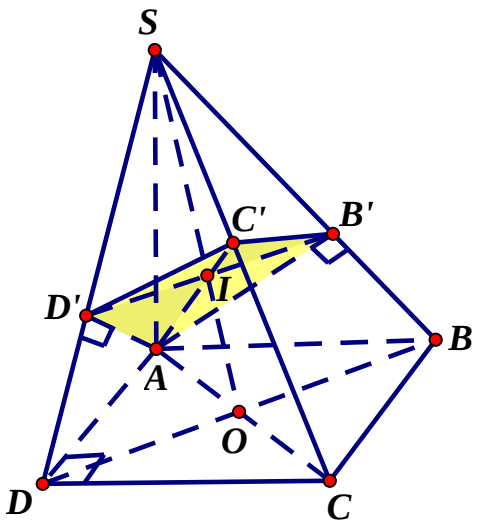
$V_{QMNP} = \frac{1}{2}.\frac{2}{27}V_{ABCD} = \frac{1}{27}V_{ABCD} = \frac{2017}{27}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi $B'; D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

A. $\frac{16a^3}{45}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}$ (1) mà $\dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ $(*)$

ΔSAC vuông tại A nên $SC^2 = SA^2 + AC^2 = (2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 6a^2$ suy ra $SC = a\sqrt{6}$

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ và $SB \perp AB'$ suy ra $AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp BC$

Tương tự $AD' \perp SC$. Từ đó suy ra $SC \perp (AB'D') \equiv (AB'C'D')$ nên $SC \perp AC'$

Mà $SC'.SC = SA^2$ suy ra $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4a^2}{6a^2} = \dfrac{2}{3}$. Ta cũng có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \dfrac{4}{5}$

Từ $(*) \Rightarrow \dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{8}{15}$ suy ra $V_{SAB'C'} = \dfrac{8}{15}V_{SABC} = \dfrac{8}{15}.\dfrac{1}{2}V_{SABCD} = \dfrac{8}{30}V_{SABCD}$ mà

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{2a^3}{3}$

Suy ra $V_{SAB'C'} = \dfrac{8}{30}.\dfrac{2a^3}{3} = \dfrac{8a^3}{45}$

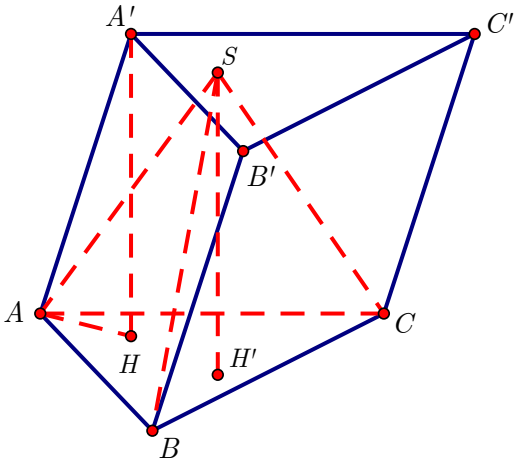
Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \dfrac{16a^3}{45}$.

Câu 11. Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của khối chóp có đáy là đáy của lăng trụ và đỉnh là một điểm bất kì trên đáy còn lại là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha.$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha.$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha.$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha.$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC). Khi đó $\alpha = A'AH$.

Ta có $A'H = A'A.\sin\alpha = b\sin\alpha$ nên thể tích khối lăng trụ là

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{4}$.

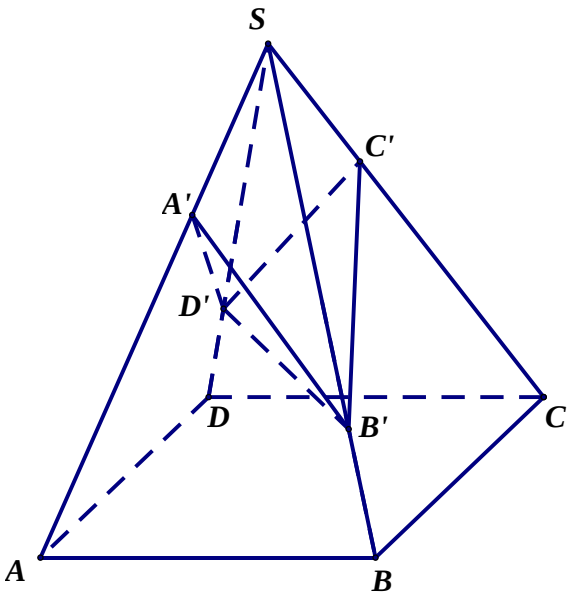
Lại có chiều cao của chóp theo yêu cầu đề bài chính là chiều cao của lăng trụ và bằng $A'H$ nên thể tích khối chóp là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{12}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích 48. Trên các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm A', B', C' và D' sao cho $\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$ và $\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{3}{4}$. Tính thể tích V của khối đa diện lồi $SA'B'C'D'$.

A. $V=\frac{3}{2}$. **B.** $V=9$. **C.** $V=4$. **D.** $V=6$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V=V_{SA'B'C'D'}=V_{S.D'A'B'}+V_{S.D'C'B'}$.

$V_{S.D'A'B'}=\frac{3}{4}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.V_{S.DAB}=\frac{3}{16}.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}=\frac{3}{32}.48=\frac{9}{2}$.

Tương tự: $V_{S.D'C'B'}=\frac{9}{2}$.

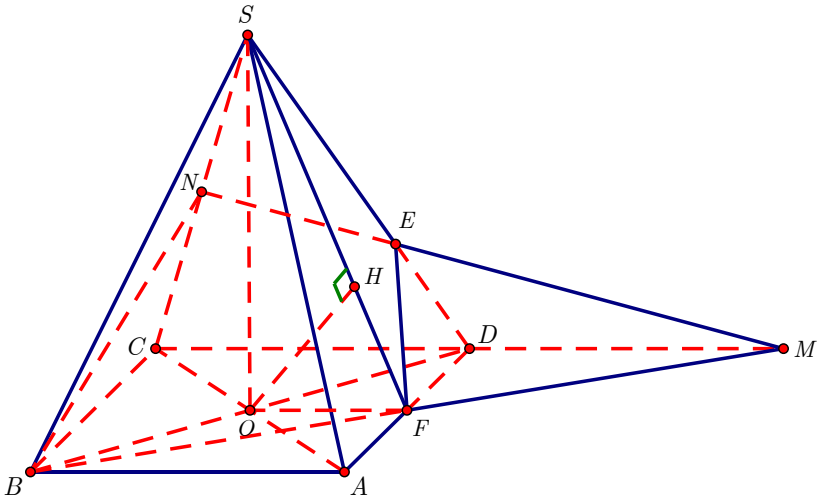
Vậy $V=9$.

Câu 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử các điểm như hình vẽ.

$E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM, $DF \,//\, BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM.

Ta có: $\left(SD,(ABCD)\right) = SDO = 60^\circ \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow d\left(O,(SAD)\right) = OH = h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \dfrac{1}{2} SF.AD = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$

$\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \dfrac{ME}{MN} \cdot \dfrac{MF}{MB} \cdot \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \dfrac{5}{6} V_{MNBC} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot d\left(M,(SAD)\right) \cdot \dfrac{1}{2} S_{SBC} = \dfrac{5}{18} \cdot 4h \cdot \dfrac{1}{2} S_{SAD} = \dfrac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \dfrac{7a^3\sqrt{6}}{36}.$

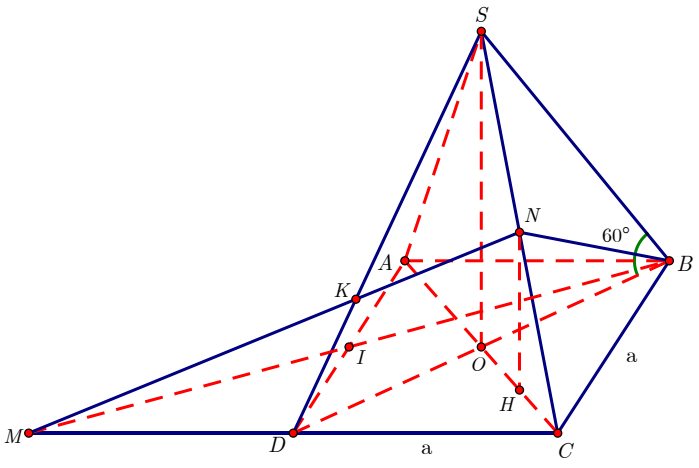
Suy ra: $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \dfrac{7}{5}.$

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D; N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần đó.

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{7}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\begin{cases} V_1 = V_{SABIKN} \\ V_2 = V_{NBCDIK} \end{cases} \to \dfrac{V_1}{V_2} = ?$.

* $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

* $V_{N.BMC} = \dfrac{1}{3}.NH.S_{\Delta BMC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{SO}{2}.S_{\Delta BMC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{1}{2}.a.2a = \dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

* Nhận thấy K là trọng tâm của tam giác SMC $\to \dfrac{MK}{MN} = \dfrac{2}{3}$.

* $\dfrac{V_{M.DIK}}{V_{M.CBN}} = \dfrac{MD}{MC}.\dfrac{MI}{MB}.\dfrac{MK}{MN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$.

$\to V_2 = V_{M.CBN} - V_{M.DIK} = \dfrac{5}{6}V_{M.CBN} = \dfrac{5}{6}.\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3 = \dfrac{5\sqrt{6}}{72}a^3$.

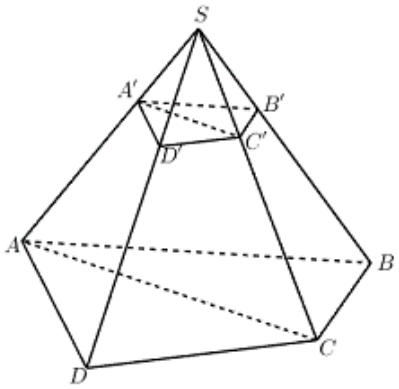
$\to V_1 = V_{S.ABCD} - V_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a^3 - \dfrac{5\sqrt{6}}{72}a^3 = \dfrac{7\sqrt{6}}{72}a^3 \to \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{7\sqrt{6}}{72}a^3}{\dfrac{5\sqrt{6}}{72}a^3} = \dfrac{7}{5}$.

Câu 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \dfrac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với mặt đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Khi đó thể tích chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{V}{27}$. **C.** $\dfrac{V}{9}$. **D.** $\dfrac{V}{81}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $(A'B'C'D')//(ABCD) \Rightarrow A'B'//AB, B'C'//BC, C'D'//CD$.

Mà $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là $V_{S.ABC}, V_{S.ACD}$.

Ta có $V_1 + V_2 = V$.

$\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'B'C'} = \dfrac{V_1}{27}$.

$\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow V_{S.A'C'D'} = \dfrac{V_2}{27}$.

Vậy $V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'C'D'}=\dfrac{V_1+V_2}{27}=\dfrac{V}{27}$.

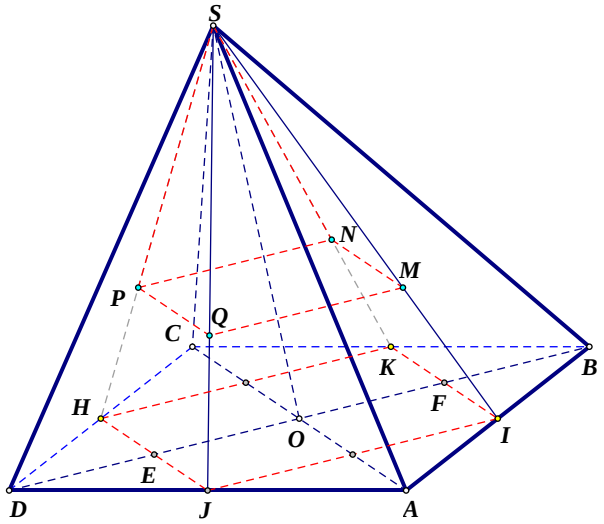
Vậy $V_{S.A'BC'D'}=\dfrac{V}{27}$.

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Biết thể tích khối chóp $S.MNPQ$ là V, khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{81V}{8}$. **B.** $\dfrac{27V}{4}$. **C.** $\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 V$. **D.** $\dfrac{9V}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\dfrac{d\left(S,(MNPQ)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\dfrac{SM}{SI}=\dfrac{2}{3}$.

Mặt khác gọi $S=S_{ABCD}$ ta có $\dfrac{S_{\Delta DEJ}}{S_{\Delta BDA}}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow S_{\Delta DEJ}=\dfrac{1}{16}S$.

Tương tự ta có $\dfrac{S_{\Delta JAI}}{S_{\Delta DAB}}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow S_{\Delta JAI}=\dfrac{1}{8}$.

Suy ra $S_{HKIJ}=\left[1-\left(4.\dfrac{1}{16}+2.\dfrac{1}{8}\right)\right]S=\dfrac{1}{2}S$.

Mà $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{HKIJ}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{2}{9}S_{ABCD}$.

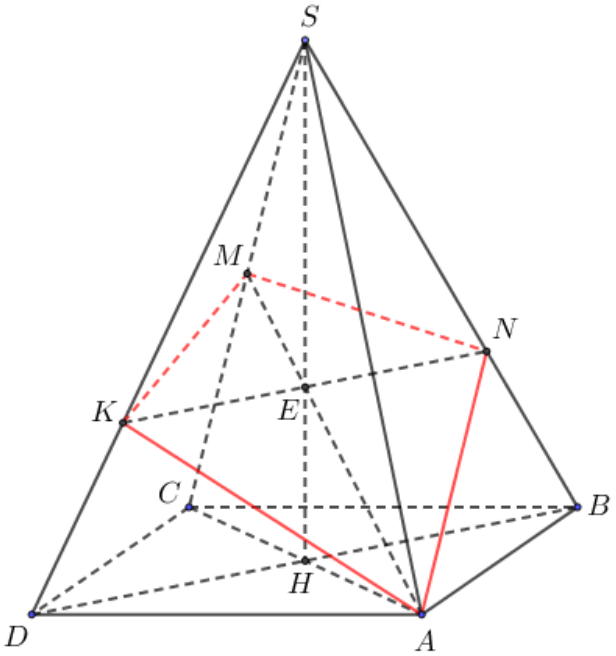
Suy ra $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}d\left(S,(ABCD)\right).S=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}d\left(S,(MNPQ)\right).\dfrac{9}{2}S=\dfrac{27}{4}V$.

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, M là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB, SD tại N, K. Tính tỉ số thể tích của khối $S.ANMK$ và khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{2}{9}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{3}{5}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$, $E = SH \cap AM \Rightarrow E$ là trọng tâm ΔSAC

$\Rightarrow \dfrac{SE}{SH} = \dfrac{SK}{SD} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{2}{3}$. Ta có $\dfrac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA.SK.SM}{SA.SD.SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AKM} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Tương tự $\dfrac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ANM} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

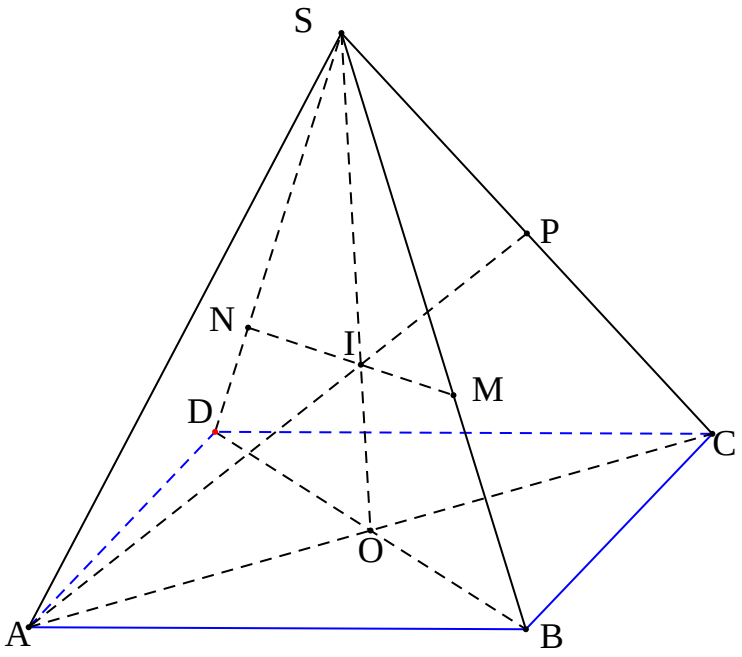
Từ đó $V_{S.ANMK} = V_{S.ANM} + V_{S.AKM} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt các cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\frac{SM}{SB}=x$, $\frac{SN}{SD}=y$, $0<x$, $y\le 1$.

Vì $\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}$ nên $1+2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$

Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.ANP}}{2V_{S.ADC}}+\frac{V_{S.AMP}}{2V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SP}{SC}+\frac{1}{2}.\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.y.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.x.\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}(x+y)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$

Vì $x>0$, $y>0$ nên $\frac{1}{3}<x<1$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{x}{3x-1}\right)$ trên $\left(\frac{1}{3};1\right]$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(3x-1)^2}\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{3}{8}$

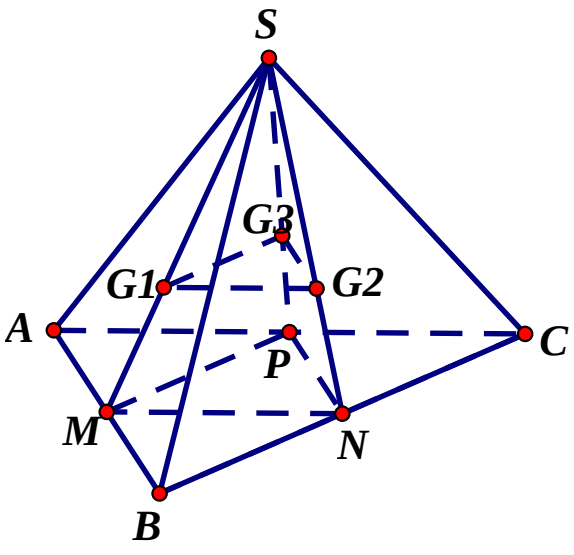
Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $S.ABC$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ΔSAB, ΔSBC, ΔSCA. Tính $\frac{V_{S.G_1G_2G_3}}{V_{S.ABC}}$.

A. $\frac{1}{48}$. **B.** $\frac{2}{27}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{2}{81}$.

Lời giải

Chọn B

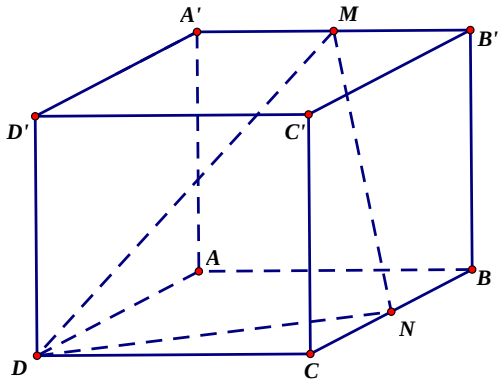


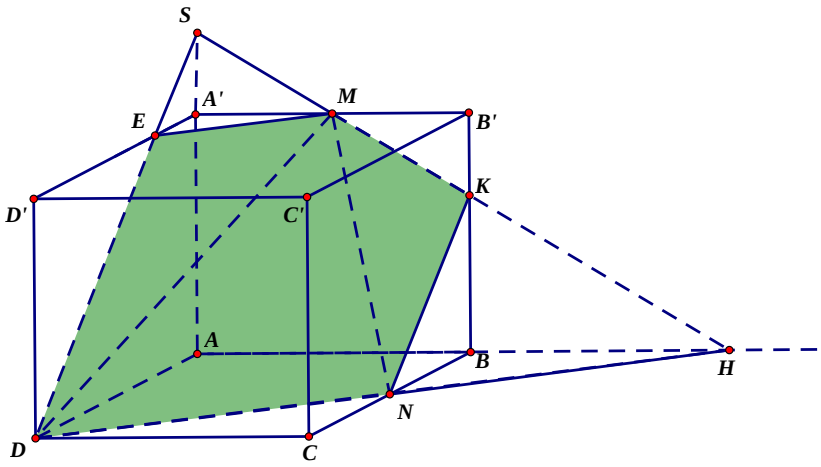
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Ta có.

$\frac{V_{SG_1G_2G_3}}{V_{SMNP}}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\Rightarrow V_{SG_1G_2G_3}=\frac{8}{9}V_{SMNP}=\frac{8}{8}.\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{2}{27}$.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$ và BC. Mặt phẳng (DMN) chia hình lập phương thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của phần còn lại. Tính tỉ số $\frac{V1}{V2}$.

A. $\frac{55}{89}$. **B.** $\frac{37}{48}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.





Lời giải

Chọn A

Gọi $H = AB \cap DN$; MH cắt $B'B$ tại K, cắt $A'A$ tại S; SD cắt $A'D'$ tại E.

Thiết diện tương ứng là ngũ giác $DNKME$.

Phần đa diện chứa A có thể tích là: $V_1 = V_{S.ADH} - V_{S.A'EM} - V_{K.BNH}$.

Dùng tam giác đồng dạng kiểm tra được: $BA = BH$; $AH = 4A'M$; $AD = 4A'E$ và $SA' = B'K = \frac{1}{3}A'A$.

Đặt độ dài cạnh hình lập phương bằng 1 thì: $SA' = \frac{1}{3}; KB = \frac{2}{3}$.

Ta có: $V_{S.ADH} = \frac{1}{6}SA.AD.AH = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}\right).1.2 = \frac{4}{9}$.

$V_{S.A'EM} = \frac{1}{64}V_{S.ADH} = \frac{1}{144}$; $V_{K.BNH} = \frac{1}{8}V_{S.ADH} = \frac{1}{18}$

Vậy thì phần đa diện chứa A có thể tích là: $\frac{4}{9} - \frac{1}{144} - \frac{1}{18} = \frac{55}{144}$.

Suy ra phần đa diện không chứa A có thể tích là: $1^3 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$.

DẠNG TOÁN 50: PHƯƠNG TRÌNH MŨ-LOGARIT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ **Phương trình logarit cơ bản:** $\log_a x = b \Leftrightarrow a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

BÀI TẬP MẪU

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2-BDG 2019-2020) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán liên quan đến giải phương trình logarit.

.....

2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t$. Điều kiện: $x+y>0$.

B2: Tính tổng $S = x+y$ và tích $P = xy$. Để tồn tại cả x, y thì $S^2 \geq 4P$, suy ra điều kiện t.

B3: Với điều kiện đó, tìm những giá trị x nguyên thỏa mãn.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t$. Điều kiện: $x+y>0$.

Suy ra $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x+y^2-2xy=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ xy=\dfrac{9^t-4^t}{2} \end{cases}$ nên $S=3^t$ và $P=\dfrac{9^t-4^t}{2}$.

Để tồn tại x, y thì $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow x+y^2 \geq 4xy$ nên $9^t \geq 4\left(\dfrac{9^t-4^t}{2}\right) \Leftrightarrow 9^t \leq 2.4^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{4}\right)^t \leq 2$.

Khi đó $t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$.

Ta có: $\log_4(x^2+y^2) = t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4^{\log_{\frac{9}{4}} 2} \approx 3,27$.

Mặt khác x là số nguyên nên $x=-1;x=0,x=1$.

Thử lại:

Với $x=-1$ ta có $\begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ y\geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2\geq 5$. Suy ra loại $x=-1$.

Với $x=0$ ta có $\begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$. Suy ra nhận $x=0$.

Với $x=1$ ta có $\begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=2 \end{cases}$. Suy ra nhận $x=1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu bài toán là $x=0$ và $x=1$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 1. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)=\log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5)=\log_5[5(a+b)]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x)=\log_5 x+x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{x.\ln 5}+1>0,\forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5)=f(5(a+b)) \Leftrightarrow 4a+2b+5=5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

Mặt khác: $5^2=(a+3b)^2\leq(1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T=a^2+b^2\geq\frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{2};b=\frac{3}{2}$.

Câu 2. Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

A. $3+\sqrt{3}$ **B.** 4

C. $3+2\sqrt{3}$ **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y \Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)-\log_3(x+y)=x+2y$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)=\log_3(3x+3y)+x+2y-1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1)+2x+y+1=\log_3(3x+3y)+3x+3y \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Khi đó $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2x+y+1=3x+3y \Leftrightarrow x+2y=1 \Leftrightarrow x=1-2y$.

Vì $x,y>0 \Rightarrow 0<y<\dfrac{1}{2}$.

Xét $T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{1-2y}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=\dfrac{1}{1-2y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $T\geq 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{y(1-2y)}}=3.\sqrt[3]{\dfrac{2}{2y(1-2y)}}\geq 3.\sqrt[3]{8}=6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 1-2y=\sqrt{y} \\ 2y=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Câu 3 . Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\dfrac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x+y+x>0$.

Ta có: $\log_{16}\left(\dfrac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$.

$\Leftrightarrow 2\log_{16}\left[4(x+y+z)\right]+\left[4(x+y+z)\right]=2\log_{16}\left[2x^2+2y^2+2z^2+1\right]+\left[2x^2+2y^2+2z^2+1\right](1)$.

Xét hàm số $f(t)=2\log_{16}t+t$ trên $(0;+\infty)$. Có: $f'(t)=\dfrac{2}{t\cdot\ln 16}+1>0;\forall t\in(0;+\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)=2\log_{16}t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó suy ra: $2x^2+2y^2+2z^2+1=4(x+y+z)\Leftrightarrow(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+\dfrac{1}{2}=0$.

$F=\dfrac{x-y-z}{x+y+z}\Leftrightarrow F(x+y+z)=x-y-z\Leftrightarrow(P):(F-1)x+(F+1)y+(F+1)z=0$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có điểm chung nên:

$$d(I;(P))\le R\Leftrightarrow\frac{|3F+1|}{\sqrt{(F-1)^2+(F+1)^2+(F+1)^2}}\le\sqrt{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow 3F^2+2F-13\le 0.$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1-2\sqrt{10}}{3}\le F\le\frac{-1+2\sqrt{10}}{3}\Rightarrow\min F+\max F=-\frac{2}{3}.$$

Câu 4. Có tất cả bao giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(1999;2050)$ để

$$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)^a.$$

A. 29 **B.** 33. **C.** 34 **D.** 32

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$

$\Leftrightarrow 2017\ln\left(2^a+2^{-a}\right)\le a\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln\left(2^a+2^{-a}\right)}{a}\le\frac{\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)}{2017}.$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\ln\left(2^x+2^{-x}\right)}{x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f'(x)=\frac{\left(2^x-2^{-x}\right)\ln 2-\left(2^x+2^{-x}\right)\ln\left(2^x+2^{-x}\right)}{x^2\left(2^x+2^{-x}\right)}.$$

Vì : $\ln 2<\ln\left(2^x+2^{-x}\right)$ và $0<2^x-2^{-x}<2^x+2^{-x}$ (Do $x\in(1999;2050)$)

Suy ra $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

Do đó: $\frac{\ln\left(2^a+2^{-a}\right)}{a} \le \frac{\ln\left(2^{2017}+2^{-2017}\right)}{2017}$.

$\Leftrightarrow a \ge 2017$.

Vậy có: 33 giá trị của a

Câu 5. Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $S=\{-5;-1;1;5\}$.

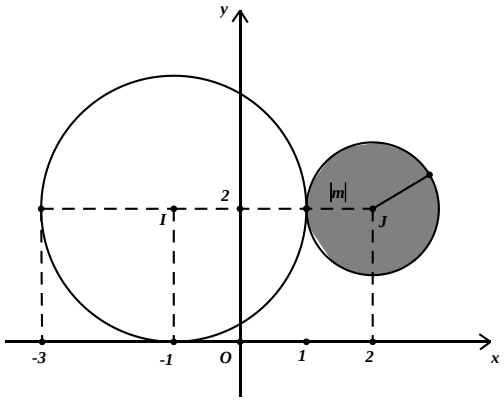
B. $S=\{-1;1\}$.

C. $S=\{-5;5\}$.

D. $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Lời giải

Chọn B



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x,y \in \mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \ge x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m \ne 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$.

Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ)

Điều này xảy ra khi $|m|=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn $m \ne 0$).

Vậy $S=\{-1;1\}$.

Câu 6.. Giả sử $a;b$ là các số thực sao cho: $x^3+y^3=a\cdot 10^{3z}+b\cdot 10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương $z;y;z$ thỏa mãn: $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $a+b$ là:

A. $\frac{31}{2}$. **B.** $\frac{29}{2}$. **C.** $-\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=10^z$. Khi đó: $x^3+y^3=a.t^3+b.t^2$.

Ta có: $\begin{cases}\log(x+y)=z\\ \log\left(x^2+y^2\right)=z+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z=t\\ x^2+y^2=10.10^z=10t\end{cases}\Rightarrow xy=\frac{t^2-10.t}{2}$.

Khi đó: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=t^3-\frac{3t\left(t^2-10t\right)}{2}=-\frac{1}{2}t^3+15t^2$.

Suy ra: $a=-\frac{1}{2}$ và $b=15$.

Vậy $a+b=\frac{29}{2}$.

Câu 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_4(512x+768)+2x-1=2y+16^y$?

A. 2019 **B.** 0 **C.** 2020 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\log_4(512x+768)+2x-1=2y+16^y$

$\Leftrightarrow\log_4 256(2x+3)+2x-1=2y+4^{2y}$

$\Leftrightarrow\log_4(2x+3)+(2x+3)=2y+4^{2y}$.

Xét hàm số $f(t)=t+4^t$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=1+4^t\ln 4>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $\log_4(2x+3)=2y\Leftrightarrow 2x+3=16^y\Leftrightarrow x=\frac{16^y-3}{2}$.

Vì: $0 \le x \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{16^y - 3}{2} \le 2020 \Leftrightarrow 3 \le 16^y \le 4043 \Leftrightarrow \log_{16} 3 \le y \le \log_{16} 4043$.

Mà $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{1;2\}$.

Với $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{13}{2} (l)$.

Với $y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{253}{2} (l)$.

Vậy không có cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hai số thực $a;b$ thỏa mãn: $\log_{a^2+b^2}(a+b) \ge 1$ và $a^2 + b^2 > 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là:

A. $\sqrt{10}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $2\sqrt{10}$

Lời giải

Chọn B

Do $a^2 + b^2 > 1$ nên

$\log_{a^2+b^2}(a+b) \ge 1.$

$\Leftrightarrow a^2 - a + b^2 - b \le 0$.

$\Leftrightarrow \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $P = 2a + 4b - 3 = 2\left(a - \dfrac{1}{2}\right) + 4\left(b - \dfrac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow P^2 \le \left(2^2 + 4^2\right)\left[\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2\right] \le 10$.

Suy ra: $-\sqrt{10} \le P \le \sqrt{10}$.

Câu 9. Cho $\log_8 |x| + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_8 |y| + \log_4 x^2 = 7$. Tìm giá trị của biểu thức $P = |x| - |y|$.

A. $P = 56$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = 8$. **D.** $P = 64$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\log_8|x|+\log_4 y^2=5\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_2|x|+\frac{1}{2}\log_2 y^2=5$.

$\Leftrightarrow\log_2\sqrt[3]{|x|}+\log_2|y|=5\Leftrightarrow\sqrt[3]{|x|}.|y|=2^5\Leftrightarrow|x|.|y|^3=\left(2^5\right)^3=2^{15}\ (1)$.

Tương tự: $\log_8|y|+\log_4 x^2=7\Leftrightarrow|y|.|x|^3=2^{21}\ (2)$.

Lấy (1) nhân (2) được $x^4.y^4=2^{36}\Leftrightarrow x^2.y^2=2^{18}\ (3)$.

Lấy (1) chia (2) được $\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{2^6}\Leftrightarrow x^2=2^6.y^2\ (4)$.

Thay (4) vào (3) được $2^6.y^4=2^{18}\Leftrightarrow y^4=2^{12}=\left(2^3\right)^4\Leftrightarrow|y|=2^3=8$.

Thay $|y|=8$ vào (4) được $x^2=2^6.64=\left(2^6\right)^2\Leftrightarrow|x|=2^6=64$. Do đó $P=|x|-|y|=56$.

Câu 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\2^x+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}$ 1, m là tham số. Gọi S là tập các giá trị m nguyên để hệ 1 có một nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $|y|\le 1\Leftrightarrow y\in[-1;1]$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ 1 ta có $2^{x-y}+(x-y)=2^y+y\ \ 2$.

Xét hàm số $y=f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy $y'=2^t.\ln 2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình 2 tương đương với $x-y=y\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai của hệ 1 ta được $4^y+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}\ \ 3$.

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình 3 phải có nghiệm duy nhất $y\in[-1;1]$.

Giả sử $y_0\in[-1;1]$ là một nghiệm của 3 thì $4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$.

Khi đó $4^{-y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{-y_0}.\sqrt{1-(-y_0)^2}\Leftrightarrow 4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của 3. Suy ra $y_0=-y_0\Leftrightarrow y_0=0$. Thay $y=0$ vào 3 ta được $m=0$.

Thử lại: với $m=0$ thì 3 viết thành $4^y+1=2.2^y.\sqrt{1-y^2}\Leftrightarrow 2^y+\frac{1}{2^y}=2\sqrt{1-y^2}\ \ 4$.

Ta có $VT\ 4\ge 2$, dấu bằng khi $2^y=\frac{1}{2^y}\Leftrightarrow y=0$; $VP\ 4\le 2$, dấu bằng khi $y=0$.

Suy ra phương trình 4 có nghiệm duy nhất là $y=0$. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Câu 11. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{8}$. **D.**9.

Lời giải

Chọn B

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2>1 \\ 2x+y\geq x^2+2y^2 \end{cases} (I), \quad \begin{cases} 0<x^2+2y^2<1 \\ 0<2x+y\leq x^2+2y^2 \end{cases} (II).$

Xét T= $2x+y$

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0<T=2x+y\leq x^2+2y^2<1$

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2\leq 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\leq \frac{9}{8}$. Khi đó

$$2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})+\frac{9}{4}\leq \sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]}+\frac{9}{4}$$

$$\leq \sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

Suy ra : $\max T=\frac{9}{2} \Leftrightarrow (x;y)=(2;\frac{1}{2})$

BÌNH LUẬN

- Sử dụng tính chất của hàm số logarit $y=\log_a b$ đồng biến nếu $a>1$ nghịch biến nếu $0<a<1$

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

- Sử dụng bất đẳng thức BCS cho hai bộ số $(a;b),(x;y)$ thì $|ax+by|\leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}>0$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

$e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y \Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(3x+5y)=f(x+3y+1) \Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1 \Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$.

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình có dạng: $t^2-(m+6)t+m^2+9=0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2+12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 13. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2016^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$;

$3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1$

A. 2 **B.** 1

C. 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} 2016^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017} & 1 \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 & 2 \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x+2y+6>0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$.

$1 \Leftrightarrow \log_{2016} 2016^{y^2-x^2}=\log_{2016}\dfrac{x^2+2017}{y^2+2017}$

$\Leftrightarrow y^2-x^2=\log_{2016}(x^2+2017)-\log_{2016}(y^2+2017)$.

$\Leftrightarrow y^2+\log_{2016}(y^2+2017)=x^2+\log_{2016}(x^2+2017)$ 3

Xét hàm số $f(t)=t^2+\log_{2016}(t^2+2017)$ trên $(0,+\infty)$. Ta có.

$f'(t)=2t+\dfrac{2t}{(t^2+2017)\ln 2016} \geq 0, \forall t \in (0,+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0,+\infty)$.

Do đó $3 \Leftrightarrow y^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$.

Với $y=x$ thay vào phương trình 2 ta được.

$3\log_3(3x+6)=2\log_2(2x+2)+1$

.

$\Leftrightarrow 3[1+\log_3(x+2)]=2[1+\log_2(x+1)]+1 \Leftrightarrow 3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1)$.

Đặt $\begin{cases} t=3\log_3(x+2) \\ t=2\log_2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3^{\frac{t}{3}} \\ x+1=2^{\frac{t}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\sqrt[3]{3}^{t} \quad (4) \\ x+1=\sqrt{2}^{t} \quad (5) \end{cases}$.

Lấy (5) thay vào (4), ta được $\sqrt{2}^{t}+1=\sqrt[3]{3}^{t} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^{t}+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{t}=1 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t=6$. Suy ra phương trình có nghiệm $x=7$. Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(7;7)$.

Với $y=-x$ thay vào phương trình (2) ta được.

$3\log_3(y+6)=3 \Leftrightarrow \log_3(y+6)=1 \Rightarrow y=-3, x=3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(3;-3)$, $(7;7)$.

Câu 14. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=(2x^2+y)(2y^2+x)+9xy$

A. $P_{\max}=\frac{27}{2}$. **B.** $P_{\max}=18$. **C.** $P_{\max}=27$. **D.** $P_{\max}=12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4=2^x+2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{x+y} \Leftrightarrow x+y \leq 2$.

Suy ra $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq 1$.

Khi đó $P=(2x^2+y)(2y^2+x)+9xy=2(x^3+y^3)+4x^2y^2+10xy$.

$P=2(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+(2xy)^2+10xy$

$\leq 4(4-3xy)+4x^2y^2+10xy=16+2x^2y^2+2xy(xy-1) \leq 18$

Vậy $P_{\max}=18$ khi $x=y=1$.

Câu 15. Xét các số thực x, y $(x \geq 0)$ thỏa mãn

$2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\frac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3)$.

Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;2)$.

C. $m \in (2;3)$. **D.** $m \in (-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\frac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3)$

$\Leftrightarrow 2018^{x+3y}-2018^{-x-3y}+x+3y=2018^{-xy-1}-2018^{xy+1}-xy-1$

$\Leftrightarrow f\left(x+3y\right)=f\left(-xy-1\right)\left(1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2018^{t}-2018^{-t}+t$, với $t\in\mathbb{R}$ ta có

$f'\left(t\right)=2018^{t}\ln 2018+2018^{-t}\ln 2018+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

Do đó $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $\left(1\right)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1$

$\Leftrightarrow y\left(x+3\right)=-x-1\Rightarrow y=-\dfrac{x+1}{x+3}\Rightarrow T=x-\dfrac{2\left(x+1\right)}{x+3}.$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x-\dfrac{2\left(x+1\right)}{x+3}$, với $x\in\left[0;+\infty\right)$ có

$f'\left(x\right)=1-\dfrac{4}{\left(x+3\right)^{2}}=\dfrac{x^{2}+6x+5}{\left(x+3\right)^{2}}>0,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right).$

Do đó $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)\Rightarrow f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=-\dfrac{2}{3}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0\ \Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}.$

↳ Mức độ 4

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{2x^{2}+y^{2}}=3^{x+y}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2^{2x^{2}+y^{2}}=3^{x+y}=t$, suy ra $\begin{cases}2x^{2}+y^{2}=\log_{2}t\\x+y=\log_{3}t\end{cases}.$

Ta có $\left(x+y\right)^{2}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}x+1.y\right)^{2}\leq\left(\dfrac{1}{2}+1\right)\left(2x^{2}+y^{2}\right)$ nên suy ra:

$\log_{3}^{2}t\leq\dfrac{3}{2}\log_{2}t=\dfrac{3}{2}\log_{2}3.\log_{3}t\Rightarrow\log_{3}t\leq\dfrac{3}{2}\log_{2}3\approx 2,74.$

Do đó $2x^{2}+y^{2}=\log_{2}t=\log_{2}3.\log_{3}t\leq 3,7.$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{-1;0;1\right\}.$

+ Với $x=0$, ta có $\begin{cases}y^{2}=\log_{2}t=\log_{2}3.\log_{3}t\\y=\log_{3}t\end{cases}$, suy ra $y^{2}=y.\log_{2}3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\log_{2}3\end{array}\right.$.

+ với $x=1$, ta có $\begin{cases}2+y^{2}=\log_{2}t=\log_{2}3.\log_{3}t\\1+y=\log_{3}t\end{cases}$, suy ra

$2+y^{2}=\log_{2}3.\left(1+y\right)\Leftrightarrow y^{2}-\log_{2}3.y+2-\log_{2}3=0$ phương trình có nghiệm.

+ Với $x=-1$, ta có $\begin{cases}2+y^{2}=\log_{2}t=\log_{2}3.\log_{3}t\\-1+y=\log_{3}t\end{cases}$, suy ra

$2+y^2=\log_2 3.(-1+y)\Leftrightarrow y^2-\log_2 3.y+2+\log_2 3=0$ phương trình vô nghiệm.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+2y)=\log_2(x^2+y^2)=t\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3^t\\x^2+y^2=2^t\end{cases}$ (*)

Ta có $(x+2y)^2\le(1+4)(x^2+y^2)=5(x^2+y^2)$ nên: $9^t\le 5.2^t\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^t\le 5\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}5$.

Suy ra $x^2+y^2=2^t\le 2^{\log_{\frac{9}{2}}5}\approx 2.1$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

+Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}x-1=3^t\\x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow(3^t+1)^2+1=2^t\Leftrightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2=0$ (**)

Nếu $t<0$ thì $2-2^t>0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Nếu $t\ge 0\Rightarrow 9^t-2^t\ge 0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x=3^t\\x^2=2^t\end{cases}\Rightarrow 9^t=2^t\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^t=1\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=1$.

- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x+1=3^t\\x^2+1=2^t\end{cases}\Rightarrow(3^t-1)^2=2^t-1\,(***)$.

Dễ thấy (***) luôn có ít nhất một nghiệm $t=0\Rightarrow x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y=0,\ y=1$.

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}>0\Leftrightarrow x+y>0$.

$\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y)+2-2\log_3(x^2+y^2+xy+2)=x^2+y^2+xy+2-3x-3y$

$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+(3x+3y)=2\log_3(x^2+y^2+xy+2)+x^2+y^2+xy+2$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2\log_3 t+t,\ t\in(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{2}{t.\ln 3}+1>0,\forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(3x+3y)=f(x^2+y^2+xy+2)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2=3x+3y$

$\Leftrightarrow x^2+(3-y)x+y^2-3y+2=0$.

Điều kiện của y để phương trình có nghiệm là $(3-y)^2-4(y^2-3y+2)\ge 0$

$\Leftrightarrow -3y^2+6y+1\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}\le y\le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2\}$.

+ Với $y=0$, ta được $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

+ Với $y=1$, ta được $x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

+ Với $y=2$, ta được $x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Vậy có 6 cặp số thỏa mãn đề bài.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x,y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}-e^{x+3y-9}=(x+3y-9)-(3x+5y-10)$

$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10}+(3x+5y-10)=e^{x+3y-9}+(x+3y-9)(1)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(t)=e^t+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)=e^t+t$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Do đó

$(1)\Leftrightarrow 3x+5y-10=x+3y-9\Leftrightarrow 2x+2y=1$

Khi đó phương trình

$\log_5^2(3x+2y+4)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0$

$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5)-(m+6)\log_5(x+5)+m^2+9=0.$

Đặt $t=\log_5(x+5), t\in\mathbb{R}$, ta được

$t^2-(m+6)t+m^2+9=0(2).$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(m+6)^2-4(m^2+9)=-3m^2+12m\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4.$

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Câu 5: Cho $0\leq x\leq 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$.Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0\leq x\leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y-2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+2^t.$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t)>0 \ \forall t\in\mathbb{R}.$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(1)\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x+1=2^{3y}$

$\Leftrightarrow y=\log_8(x+1).$

Ta có $0\leq x\leq 2020$ nên $1\leq x+1\leq 2021$ suy ra $0\leq \log_8(x+1)\leq \log_8 2021.$

Lại có $\log_8 2021\approx 3,66$ nên nếu $y\in\mathbb{Z}$ thì $y\in\{0;1;2;3\}.$

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0), (7;1), (63;2), (511;3).$