

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$)

Câu 1. Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

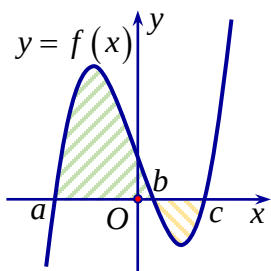
A. $\int_a^b |f(x)| dx$.

B. $\int_a^b f^2(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x) dx$.

D. $\pi \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



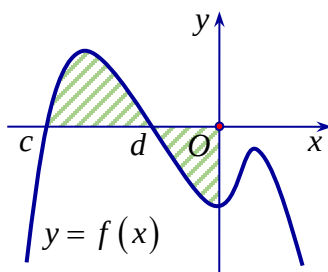
A. $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

C. $-\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



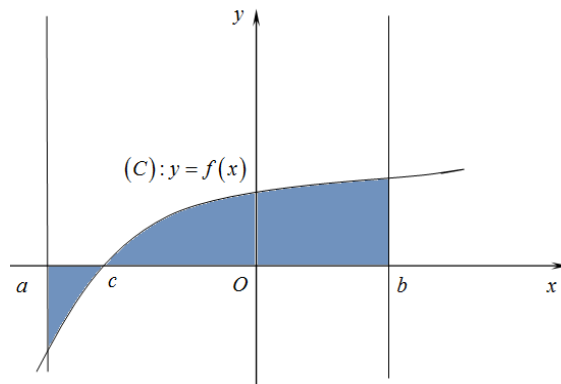
A. $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx$.

B. $S = -\int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx$.

C. $S = -\int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx$.

D. $S = \int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx$.

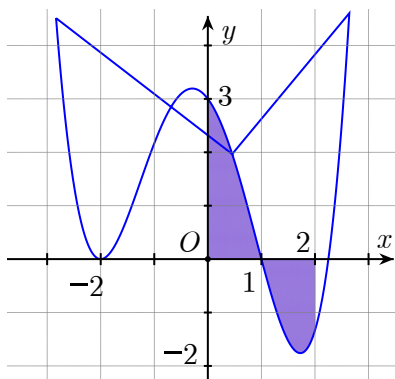
Câu 4. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S = \int_a^b f(x) dx.$ **B.** $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$ **D.** $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

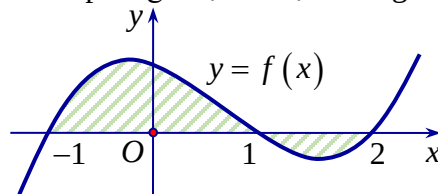
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phân tô đen) là



A. $\int_0^2 f(x) dx.$ **B.** $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

C. $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$ **D.** $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|.$

Câu 6. Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$ **B.** $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx.$ **D.** $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx.$

Câu 7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

A. $\frac{53}{4}$

B. $\frac{51}{4}$

C. $\frac{49}{4}$

D. $\frac{25}{2}$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

A. $\frac{142}{5}$

B. $\frac{143}{5}$

C. $\frac{144}{5}$

D. $\frac{141}{5}$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

A. $3 + 2\ln 2$

B. $3 - \ln 2$

C. $3 - 2\ln 2$

D. $3 + \ln 2$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ là

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Câu 12. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x + e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$.

A. $S = \frac{e^4 + 1}{e^2}$ (đvdt).

B. $S = \frac{e^4 - 1}{e}$ (đvdt).

C. $S = \frac{e^2 - 1}{e}$ (đvdt).

D. $S = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ (đvdt).

Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = \frac{8}{3}$.

C. $S = 7$.

D. $S = 8$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2\sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

Câu 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ Ox , Oy ta được: $S = a \ln \frac{b}{c} - 1$. Chọn đáp án **đúng**

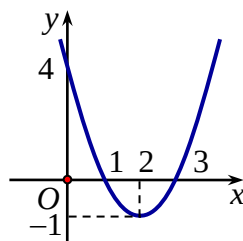
A. $a+b+c=8$

B. $a > b$

C. $a-b+c=1$

D. $a+2b-9=c$

Câu 16. Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

- A. 4. B. 2. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 17. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- A. $S = \frac{31}{4}$. B. $S = \frac{49}{4}$. C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{39}{4}$.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ D. $\frac{23}{3}$

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 4$ là

- A. $\frac{202}{3}$ B. $\frac{203}{4}$ C. $\frac{201}{5}$ D. $\frac{201}{4}$

Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{2}$ C. $\frac{e^2 - 1}{4}$ D. $\frac{e^2 + 1}{4}$

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

- A. $15 \text{ (cm}^2\text{)}$. B. $\frac{15}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$. C. $\frac{17}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$. D. $17 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 22. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{4}$. D. 2.

Câu 23. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành bằng

- A. 9. B. $\frac{13}{6}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 24. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích là

- A. 8. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là.

- A. $3 + 2 \ln 2$. B. $3 + \ln 2$. C. $3 - 2 \ln 2$. D. $3 - \ln 2$.

Câu 26. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng

- A. $S = \frac{16}{3}$. B. $S = 3$. C. $S = \frac{15}{4}$. D. $S = \frac{17}{3}$.

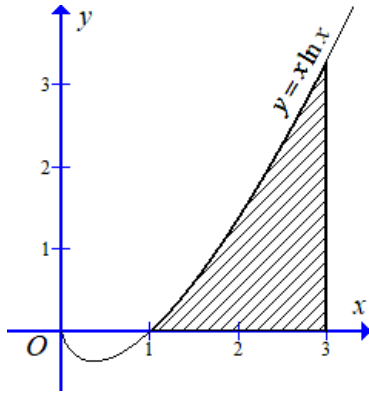
Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 4$, $x = 9$ và đường cong có phương trình $y^2 = 8x$.

- A. $\frac{76\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{152}{3}$. C. $76\sqrt{2}$. D. $\frac{152\sqrt{2}}{3}$.

Câu 28. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = \ln \frac{9}{2}$. B. $k = \ln 4$. C. $k = \frac{2}{3} \ln 4$. D. $k = \ln 5$.

Câu 29. Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H) .



- A. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$. B. 1. C. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$. D. $\frac{9}{2} \ln 3 + 2$.

Câu 30. Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

- A. $S = \frac{2000}{3}$. B. $S = 2008$. C. $S = \frac{2008}{3}$. D. 2000.

Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

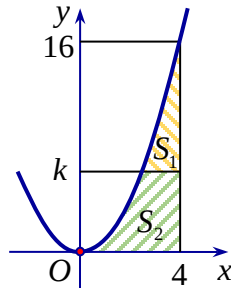
- A. $S = \frac{10}{3}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = \frac{13}{3}$. D. $S = \frac{5}{3}$.

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$

bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là

- A. 11. B. 12. C. 13. D. 14.

Câu 33. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

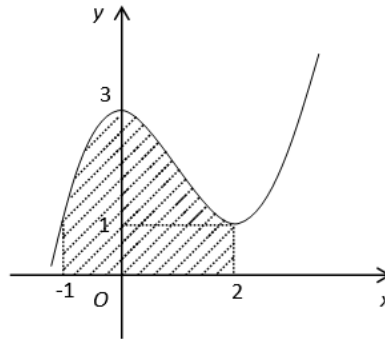
A. $k = 8$.

B. $k = 4$.

C. $k = 5$.

D. $k = 3$.

Câu 34. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



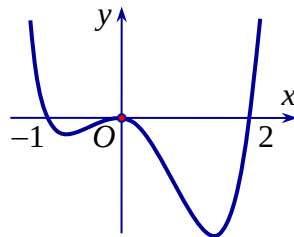
A. $S = \frac{51}{8}$.

B. $S = \frac{52}{8}$.

C. $S = \frac{50}{8}$.

D. $S = \frac{53}{8}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^2 f(x) dx$. **B.** $\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx < 0$.

C. $-\int_0^2 f(x) dx > 0$.

D. $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C) . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S = 1$?

A. Không.

B. Một.

C. Ba.

D. Hai.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

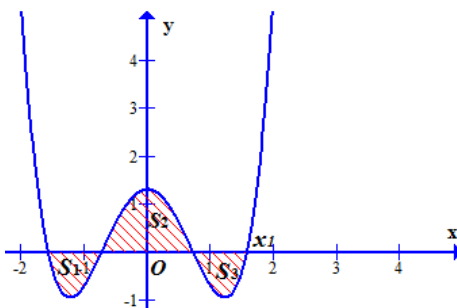
A. $m \in (-1; 1)$.

B. $m \in (3; 5)$.

C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in (5; +\infty)$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $-\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 39. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4; -1)$.

B. $m \in (3; 5)$.

C. $m \in (0; 3)$.

D. $m \in (-2; 1)$.

Câu 40. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Câu 41. Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2, x = m, (-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Câu 42. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a, b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a, x = b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số

$$f(x) = \ln x \text{ bị giới hạn bởi các đường thẳng } x = 1, x = \sqrt{3} \text{ là } m - \sqrt{m} + \ln \frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{n}} \text{ với } m, n \in \mathbb{Z} \text{ thì giá}$$

trị của $m^2 - mn + n^2$ là bao nhiêu?

A. 6.

B. 7.

C. 3.

D. 1.

Câu 43. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a, x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} \text{ và các đường thẳng } x = 1, x = e \text{ quanh } Ox \text{ là}$$

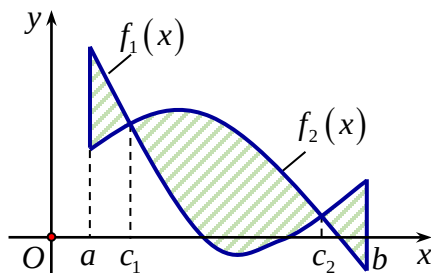
A. $\frac{2e^2 - 1}{8}\pi$. B. $\frac{4e^4 - 9}{64}\pi$. C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16}\pi$. D. $\frac{4e^4 - 9}{16}\pi$.

Dạng 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

A. $S_H = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |g(x)| dx$. B. $S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
C. $S_H = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. D. $S_H = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Câu 45. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$. B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$.
C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx$. D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

(I) $S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$. (II) $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$.
(III) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx$. (IV) $S = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right|$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

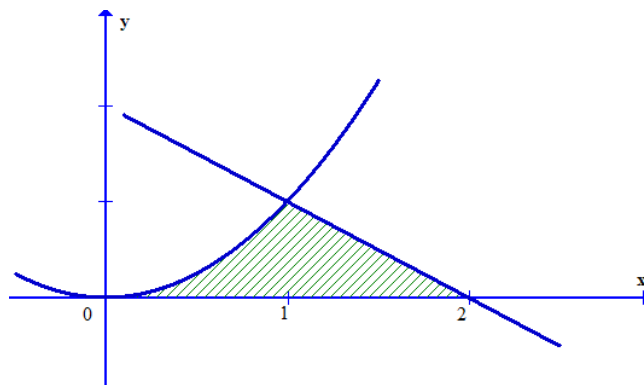
Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào trong các công thức dưới đây?

A. $S = \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_1^2 f^2(x) dx$. C. $S = \int_1^2 |f(x)| dx$. D. $S = \pi \int_1^2 f^2(x) dx$.

Câu 48. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

- A. $\frac{8\pi}{3}$. B. $\frac{16\pi}{3}$. C. 10π . D. 8π .

Câu 49. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 50. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$. Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{87}{5}$ B. $\frac{87}{4}$ C. $\frac{87}{3}$ D. $\frac{87}{5}$

Câu 51. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = a$ ($a < 0$) có diện tích bằng 5 Khi đó a bằng

- A. $1 - e^5$ B. $1 + e^5$ C. $1 + 2e^5$ D. $1 - 2e^5$

Câu 52. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng ?

- A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 53. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức:

- A. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx$. B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$. C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$. D. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx$.

Câu 54. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.

- A. $S = 4 \ln 2 + e - 5$. B. $S = 4 \ln 2 + e - 6$. C. $S = e^2 - 7$. D. $S = e - 3$.

Câu 55. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng

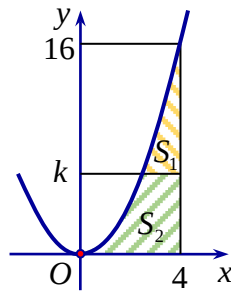
$d: y = x - 1$ và $x = a$, $x = 2a$ ($a > 1$) bằng $\ln 3$?

- A. $a = 1$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Câu 56. Biết diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = a$ (với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$) là $\frac{1}{2}(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{7}{10}, 1\right)$. B. $\left(\frac{51}{50}, \frac{11}{10}\right)$. C. $\left(\frac{11}{10}, \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(1, \frac{51}{50}\right)$.

Câu 57. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 , S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = 8$. B. $k = 4$. C. $k = 5$. D. $k = 3$.

Câu 58. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $S_1 = 2S_2$. B. $S_1 = 3S_2$. C. $S_1 = 2S_2 - 2$. D. $S_1 = 2S_2 + 2$.

Dạng 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$

Câu 59. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

Câu 60. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là:

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 61. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{1}{15}$

Câu 62. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ là

- A. $\frac{37}{13}$ B. $\frac{37}{12}$ C. 3 D. 4

Câu 63. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2; 0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{8}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 64. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = (1 + e^x)x$, $y = (1 + e)x$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{e-1}{2}$

B. $\frac{e-2}{2}$

C. $\frac{e-2}{2}$

D. $\frac{e+1}{2}$

Câu 65. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{71}{3}$

B. $\frac{73}{3}$

C. $\frac{70}{3}$

D. $\frac{74}{3}$

Câu 66. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \begin{cases} -x, & \text{khi } x \leq 1 \\ x-2, & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và $y = \frac{10}{3}x - x^2$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + 2b$ bằng

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

Câu 67. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{108}{5}$

B. $\frac{109}{5}$

C. $\frac{109}{6}$

D. $\frac{119}{6}$

Câu 68. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 + 3$, tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x = 2$ và trục tung bằng

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. $\frac{7}{3}$

Câu 69. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

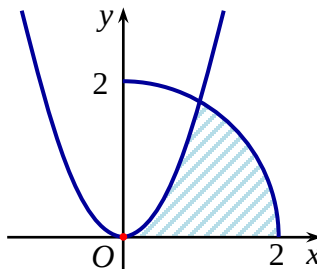
A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Câu 70. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Câu 71. Gọi S là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$. Tìm m để diện tích S=4?

A. $m=6$

B. $m=-6$

C. $m=\pm 6$

D. Không tồn tại m

Câu 72. Cho (P) $y = x^2 + 1$ và (d) $y = mx + 2$. Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn (P) và (d) đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. 0

Câu 73. Với giá trị nào của m thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = -x^2 + 2x$ và (d): mx ($m < 0$) bằng 27 đơn vị diện tích

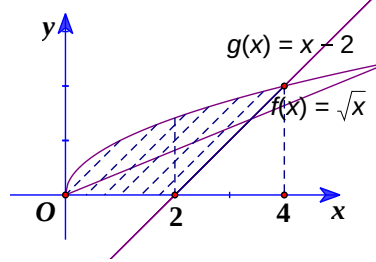
A. $m = -1$

B. $m = -2$

C. $m \in \emptyset$

D. $m \in \mathbb{R}$

Câu 74. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S = \frac{8}{3}$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 75. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 3$ và đường thẳng $y = 5$.

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{45}{4}$.

C. $\frac{27}{4}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Câu 76. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H).

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 77. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $S = 13$.

B. $S = \frac{81}{12}$.

C. $S = \frac{9}{4}$.

D. $S = \frac{37}{12}$.

Câu 78. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H): $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ.

Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 - 1$ (đvdt).

B. $S = 2 \ln 2 - 1$ (đvdt).

C. $S = 2 \ln 2 + 1$ (đvdt).

D. $S = \ln 2 + 1$ (đvdt).

Câu 79. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

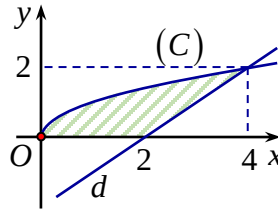
A. $S = \frac{343}{12}$

B. $S = \frac{793}{4}$

C. $S = \frac{397}{4}$

D. $S = \frac{937}{12}$

Câu 80. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 81. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4, 2)$ và trục hoành là

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 82. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$ là

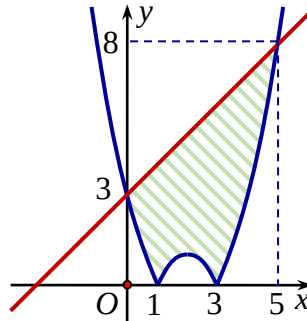
A. $S = 9$.

B. $S = \frac{9}{4}$.

C. $S = \frac{9}{2}$.

D. $S = \frac{8}{9}$.

Câu 83. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{37}{2}$.

B. $\frac{109}{6}$.

C. $\frac{454}{25}$.

D. $\frac{91}{5}$.

Câu 84. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = 5x - 2$.

A. $S = \frac{5}{4}$.

B. $S = \frac{5}{8}$.

C. $S = \frac{9}{8}$.

D. $S = \frac{9}{4}$.

Câu 85. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x$.

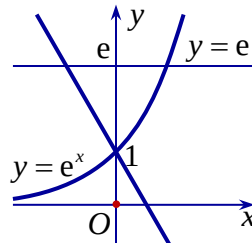
A. $S = \frac{1}{6}$.

B. $S = \frac{5}{6}$.

C. $S = \frac{1}{3}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Câu 86. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = e$, $y = e^x$ và $y = (1 - e)x + 1$ (tham khảo hình vẽ bên).



Diện tích hình phẳng (H) là

- A.** $S = \frac{e+1}{2}$. **B.** $S = e + \frac{3}{2}$. **C.** $S = \frac{e-1}{2}$. **D.** $S = e + \frac{1}{2}$.

Câu 87. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 2x$ và đường thẳng $y = x$.

- A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{11}{6}$. **C.** $\frac{27}{6}$. **D.** $\frac{17}{6}$.

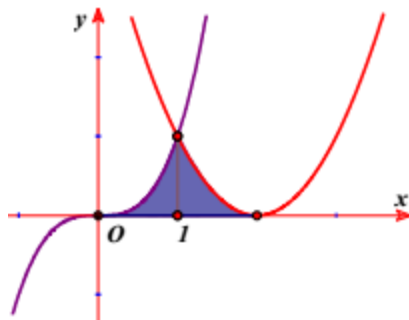
Câu 88. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Giá trị của a bằng

- A.** 2. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 89. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng

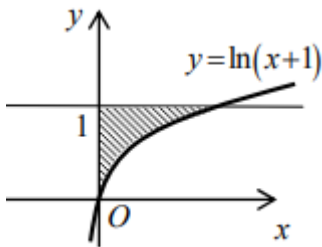
- A.** 0. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** 2.

Câu 90. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 4$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H).



- A.** $S = \frac{11}{2}$. **B.** $S = \frac{7}{12}$. **C.** $S = \frac{20}{3}$. **D.** $S = -\frac{11}{2}$.

Câu 91. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

- A.** $e - 2$. **B.** $e - 1$. **C.** 1. **D.** $\ln 2$.

Câu 92. Hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình

$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$.

B. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$.

D. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ và parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.

B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi - 2}{9\pi + 2}$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi + 2}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 1}{9\pi - 1}$.

Câu 94. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$

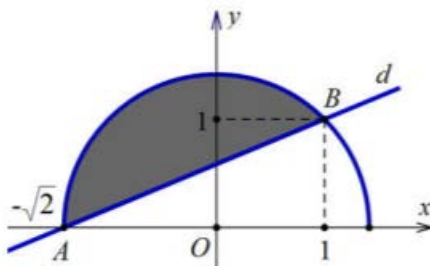
A. $\frac{13}{3}$.

B. $\frac{7}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{11}{3}$.

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y = \sqrt{2 - x^2}$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-\sqrt{2}; 0)$ và $B(1; 1)$ (phần tô đậm như hình vẽ)



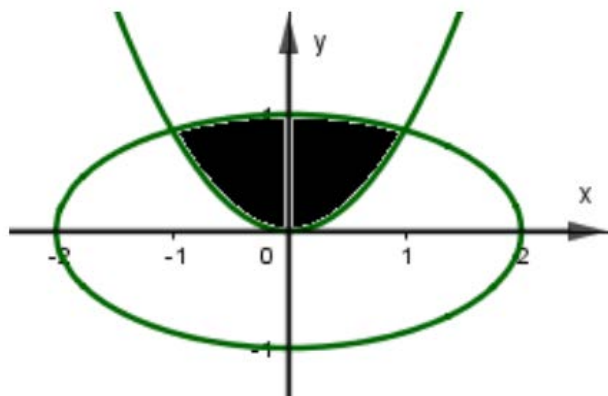
A. $\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{3\pi + 2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3\pi - 2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 96. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



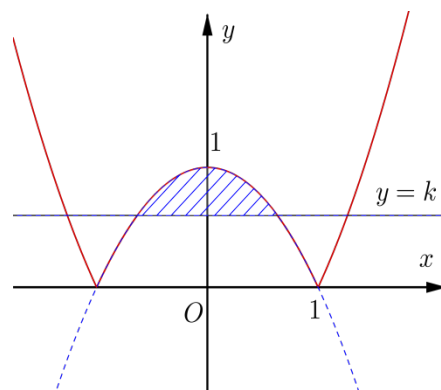
A. $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}$.

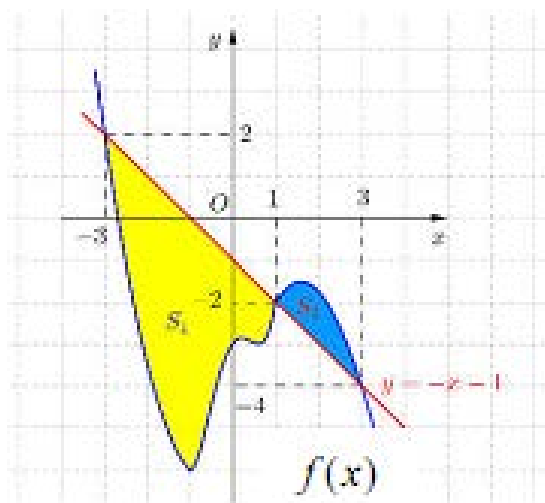
D. $\frac{3\pi}{4}$.

Câu 97. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k, 0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.



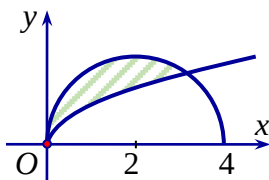
- A. $k = \sqrt[3]{4}$.
- B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.
- C. $k = \frac{1}{2}$.
- D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là M, m . Tính tích phân $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng



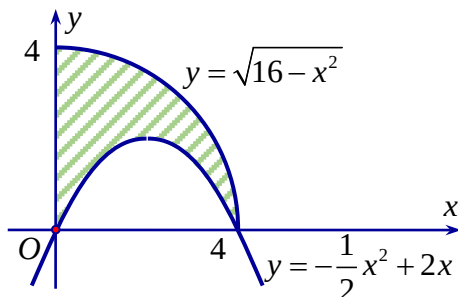
- A. $6 + m - M$.
- B. $6 - m - M$.
- C. $M - m + 6$.
- D. $m - M - 6$.

Câu 99. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4x - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



- A. $\frac{4\pi + 15\sqrt{3}}{24}$.
- B. $\frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{6}$.
- C. $\frac{10\pi - 9\sqrt{3}}{6}$.
- D. $\frac{10\pi - 15\sqrt{3}}{6}$.

Câu 100. Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, với $(0 \leq x \leq 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D .



- A. $8\pi - \frac{16}{3}$. B. $2\pi - \frac{16}{3}$. C. $4\pi + \frac{16}{3}$. D. $4\pi - \frac{16}{3}$.

Câu 101. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 102. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$. D. $\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$.

Câu 103. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

- A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. B. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. C. $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. D. $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 104. Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

- A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{6}$.

Câu 105. Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB .

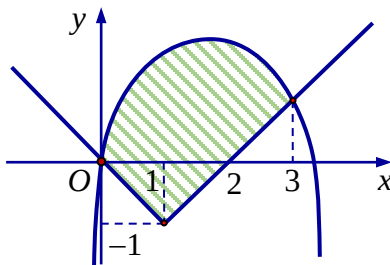
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{6}$.

Dạng 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong (>2 đường cong)

Câu 106. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{21}{4}$.

Câu 107. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x-2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



- A. $\frac{11}{6}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{14}{3}$.

Câu 108. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

- A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi-1}{2}$. C. $\frac{\pi}{2} - 1$. D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 109. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 1$ trên miền $x \geq 0, y \leq 1$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 110. Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = 2$, $y = x$ có diện tích là $S = a + b\pi$. Chọn kết quả đúng:

- A. $a > 1, b > 1$. B. $a + b < 1$. C. $a + 2b = 3$. D. $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Câu 111. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$; $y = \frac{1}{27}x^2$; $y = \frac{27}{x}$ bằng

- A. $27 \ln 2$ B. $27 \ln 3$ C. $28 \ln 3$ D. $29 \ln 3$

Câu 112. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Câu 113. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$; $y = x^2$; $y = 1$ trên miền $x \geq 0$; $y \leq 1$

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 114. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 68

B. 67

C. 66

D. 65

Câu 115. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Câu 116. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1; 2)$ và $B(4; 5)$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{9}{8}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 117. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 1 - x$.

A. $S = e - \frac{3}{2}$.

B. $S = e - \frac{1}{2}$.

C. $S = e + \frac{1}{2}$.

D. $S = e + \frac{3}{2}$.

Câu 118. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 62.

B. 67.

C. 33.

D. 66.

Câu 119. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P) và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P) . Giá trị của S bằng

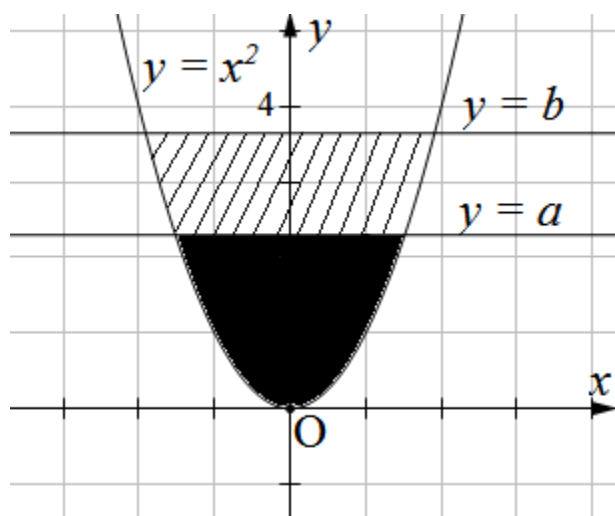
A. 9.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 120. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



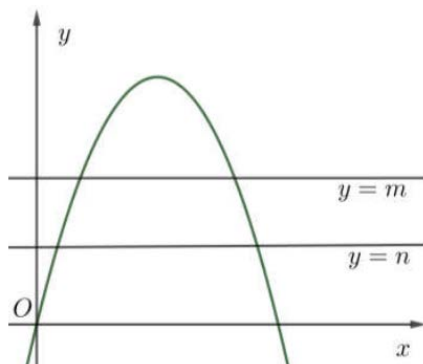
A. $b = \sqrt[3]{4a}$.

B. $b = \sqrt[3]{2a}$.

C. $b = \sqrt[3]{3a}$.

D. $b = \sqrt[3]{6a}$.

Câu 121. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ).



Giá trị biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng

A. $T = \frac{320}{9}$.

B. $T = \frac{75}{2}$.

C. $T = \frac{512}{15}$.

D. $T = 450$.

Câu 122. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{27}{x}$.

A. $\frac{63}{8}$.

B. $27 \ln 2 - \frac{63}{8}$.

C. $27 \ln 2$.

D. $27 \ln 2 - \frac{63}{4}$.

Câu 123. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\frac{13}{2}$.

B. 7.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{27}{4}$.

Câu 124. Tính diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $(d_1): y = 2x - 2$,

$(d_2): y = \frac{x}{2} + 1$, $(P): y = x^2 - 4x + 3$.

A. $S = \frac{189}{16}$.

B. $S = \frac{13}{3}$.

C. $S = \frac{487}{48}$.

D. $S = \frac{27}{4}$.

Dạng 5: Diện tích S giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị của $x = g(y)$, $x = h(y)$, $h(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$.

- Hai đường thẳng $x = c, x = d$

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$$

Câu 125. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là

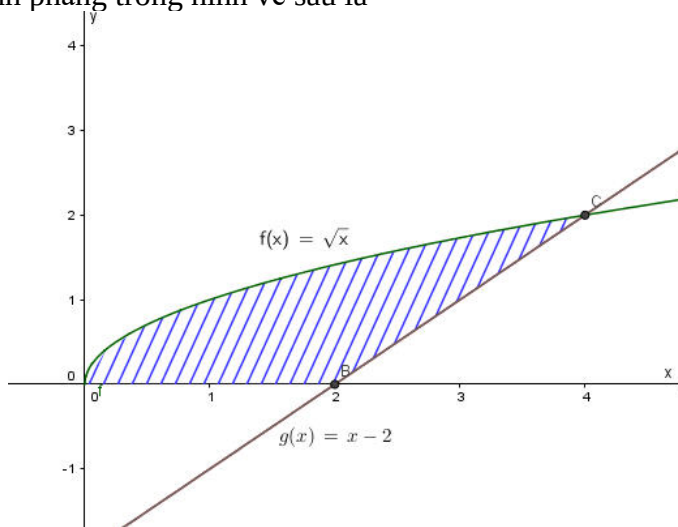
A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{11}{2}$

Câu 126. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{11}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

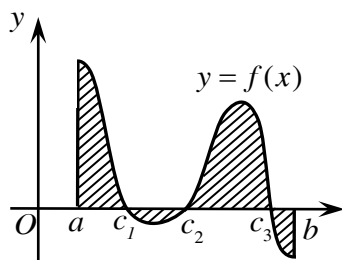
D. $\frac{10}{3}$

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH

1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

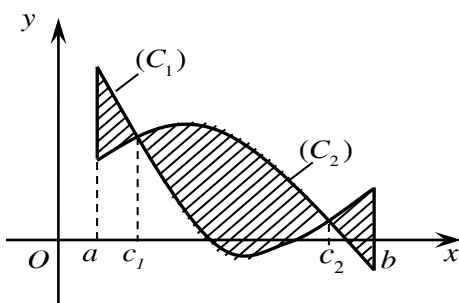


$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

- Nhớ vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$,

$y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG ĐƯỢC GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Trường hợp 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn

bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a; b]$, giả sử α thì $S = \left| \int_a^\alpha (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_\alpha^b (f(x) - g(x)) dx \right|$

Chú ý: Có thể lập bảng xét dấu hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ rồi dựa vào bảng xét dấu để tính tích phân.

Trường hợp 2. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó α, β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$).

Phương pháp giải toán

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β .

Bước 2. Tính $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ như trường hợp 1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$)

Câu 1. Viết công thức tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

A. $\int_a^b |f(x)| dx$.

B. $\int_a^b f^2(x) dx$.

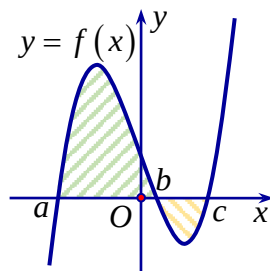
C. $\int_a^b f(x) dx$.

D. $\pi \int_a^b f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$. **B.** $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

C. $-\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

D. $\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

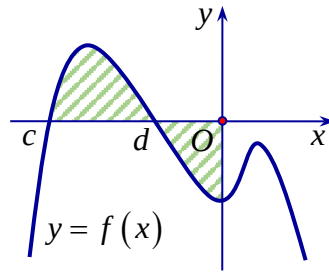
Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ và $f(x) \leq 0 \forall x \in [b; c]$ nên diện tích của hình phẳng là

$$\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

B. $S = -\int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

C. $S = -\int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx.$

D. $S = \int_c^d f(x) dx + \int_d^0 f(x) dx.$

Hướng dẫn giải

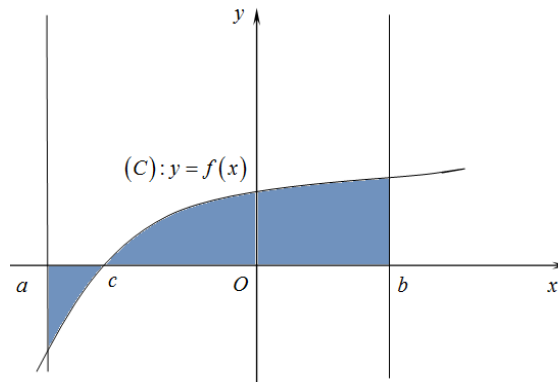
Chọn A

Ta có $S = \int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d f(x) dx + \int_d^0 |f(x)| dx.$

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy $f(x) \geq 0$ với $x \in [c; d]$ và $f(x) \leq 0$ với $x \in [d; 0]$.

Do đó $S = \int_c^d f(x) dx - \int_d^0 f(x) dx.$

Câu 4. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức:



A. $S = \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

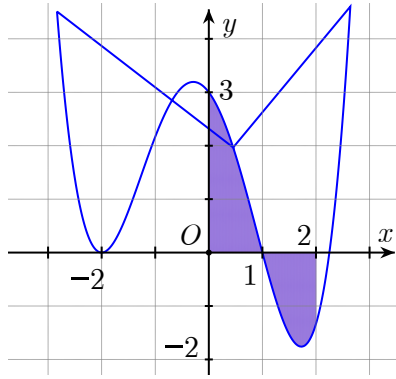
Hướng dẫn giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c [0 - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - 0] dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (phần tô đen) là



- A. $\int_0^2 f(x) dx$. B. $-\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.
C. $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$. D. $\left| \int_0^2 f(x) dx \right|$.

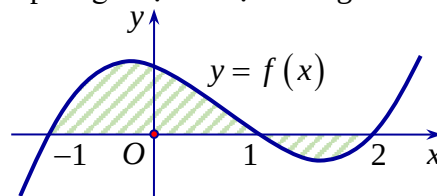
Hướng dẫn giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy: khi $x \in (0; 1)$ thì $f(x) > 0$, khi $x \in (1; 2)$ thì $f(x) < 0$.

Vậy $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 6. Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Công thức tính S là



- A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$. **B.** $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.
C. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx$. D. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta thấy miền hình phẳng giới hạn từ $x = -1$ đến $x = 1$ ở trên trục hoành $\rightarrow$ mang dấu dương

$$\Rightarrow S_1 = + \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Miền hình phẳng giới hạn từ $x = 1$ đến $x = 2$ ở dưới trục hoành $\rightarrow$ mang dấu âm

$$\Rightarrow S_2 = - \int_1^2 f(x) dx$$

Vậy $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ là

- A. $\frac{53}{4}$ **B.** $\frac{51}{4}$ C. $\frac{49}{4}$ D. $\frac{25}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [1; 4]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S = \int_1^4 |x^3 - 3x^2| dx = \left| \int_1^3 (x^3 - 3x^2) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^3 - 3x^2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \right|_1^3 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \right|_3^4 = 6 + \frac{27}{4} = \frac{51}{4}$$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là

A. $\frac{142}{5}$

B. $\frac{143}{5}$

C. $\frac{144}{5}$

D. $\frac{141}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [0; 3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S = \int_0^3 |x^4 - 3x^2 - 4| dx = \left| \int_0^2 (x^4 - 3x^2 - 4) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^4 - 3x^2 - 4) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x \right) \right|_0^2 + \left| \left(\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x \right) \right|_2^3 = \frac{48}{5} + \frac{96}{5} = \frac{144}{5}$$

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là

A. $3 + 2 \ln 2$

B. $3 - \ln 2$

C. $3 - 2 \ln 2$

D. $3 + \ln 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ nên $S = \int_{-1}^2 \left| \frac{x+1}{x+2} \right| dx = \left| \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx \right| = \left| \left(x - \ln|x+2| \right) \right|_{-1}^2 = 3 - 2 \ln 2$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \pi$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Xét trên } [0; \pi] \text{ suy ra } x = \frac{\pi}{2}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 2.$

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ là

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

Nên $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \right| = \left| \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left| \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Câu 12. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x + e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$.

A. $S = \frac{e^4 + 1}{e^2} (\text{đvdt})$. B. $S = \frac{e^4 - 1}{e} (\text{đvdt})$. C. $S = \frac{e^2 - 1}{e} (\text{đvdt})$. **D. $S = \frac{e^4 - 1}{e^2} (\text{đvdt})$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $S = \int_{-2}^0 |e^x + e^{-x}| dx = (e^x - e^{-x}) \Big|_{-2}^0 = e^2 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^4 - 1}{e^2} (\text{đvdt})$.

Câu 13. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ là

A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = 7$. D. $S = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng là $S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là

A. 11 B. 12 **C. 13** D. 14

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^1 (x^3 + x) d(\sqrt{x^2 + 1}) \\ &= (x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} (3x^2 + 1) dx \\ &= 2\sqrt{2} - 3S - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng công thức tích phân từng phần để tính $T = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$ được $a = 3, b = 2, c = 8$.

Câu 15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ Ox, Oy ta

được: $S = a \ln \frac{b}{c} - 1$. Chọn đáp án **đúng**

A. $a+b+c=8$ B. $a>b$ C. $a-b+c=1$ D. $a+2b-9=c$

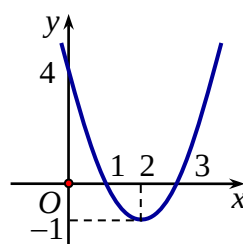
Hướng dẫn giải

Chọn A

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(-1; 0)$. Do đó:

4

Câu 16. Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành.

- A. 4. B. 2. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có phương trình của parabol là $y = x^2 - 4x + 3$.

Parabol (P) cắt Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1, x = 3$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) với trục hoành ta có

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \right|_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Câu 17. Diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- A. $S = \frac{31}{4}$. B. $S = \frac{49}{4}$. C. $S = \frac{21}{4}$. D. $S = \frac{39}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_1^2 |x^3 + 2x + 1| dx = \frac{31}{4}$.

Câu 18. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành là

- A. $\frac{22}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ D. $\frac{23}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $-x^2 + 4 = 0$ trên đoạn $[0; 3]$ có nghiệm $x = 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 |-x^2 + 4| dx + \int_2^3 |-x^2 + 4| dx = \frac{23}{3}$$

Câu 19. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3, x = 4$ là

- A. $\frac{202}{3}$ B. $\frac{203}{4}$ C. $\frac{201}{5}$ D. $\frac{201}{4}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x^3 - 4x = 0$ trên đoạn $[-3; 4]$ có nghiệm $x = -2; x = 0; x = 2$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-3}^{-2} |x^3 - 4x| dx + \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx = \frac{201}{4}$$

Câu 20. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{2}$ C. $\frac{e^2 - 1}{4}$ D. $\frac{e^2 + 1}{4}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $x \ln x = 0$ trên nửa khoảng $(0; e]$ có nghiệm $x = 1$

$$\text{Suy ra } S = \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $15 \text{ (cm}^2\text{)}.$

B. $\frac{15}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$

C. $\frac{17}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$

D. $17 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ là $S = \int_{-1}^2 |x^3| dx = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{17}{4} \text{ (dvdt)}.$

Do mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm nên diện tích cần tìm là $S = 17 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Câu 22. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ bằng

A. $\frac{1}{2}.$

B. 1.

C. $\frac{1}{4}.$

D. 2.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Diện tích của hình phẳng giới hạn là: $\int_1^e \left| \frac{1}{x} \ln x \right| dx = \left| \int_1^e \ln x d(\ln x) \right| = \left| \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e \right| = \frac{1}{2}.$

Câu 23. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành bằng

A. 9.

B. $\frac{13}{6}.$

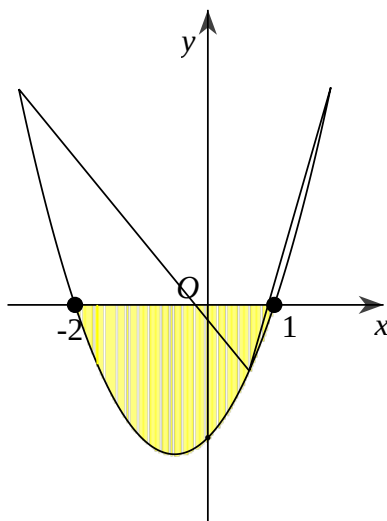
C. $\frac{9}{2}.$

D. $\frac{3}{2}.$

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$



Diện tích hình phẳng $S = \int_{-2}^1 |x^2 + x - 2| dx = -\int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = \frac{9}{2}.$

Câu 24. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1$, $x = 3$ và Ox có diện tích là

A. 8.

B. $\frac{4}{3}.$

C. $\frac{16}{3}.$

D. $\frac{20}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = 8.$$

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là.

A. $3 + 2 \ln 2$.

B. $3 + \ln 2$.

C. $3 - 2 \ln 2$.

D. $3 - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x+1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy $S = \int_{-1}^2 \left| \frac{x+1}{x+2} \right| dx = \int_{-1}^2 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left(x - \ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^2 = 3 - 2 \ln 2$.

Câu 26. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích S của hình phẳng H bằng

A. $S = \frac{16}{3}$.

B. $S = 3$.

C. $S = \frac{15}{4}$.

D. $S = \frac{17}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$.

Câu 27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 4$, $x = 9$ và đường cong có phương trình $y^2 = 8x$.

A. $\frac{76\sqrt{2}}{3}$.

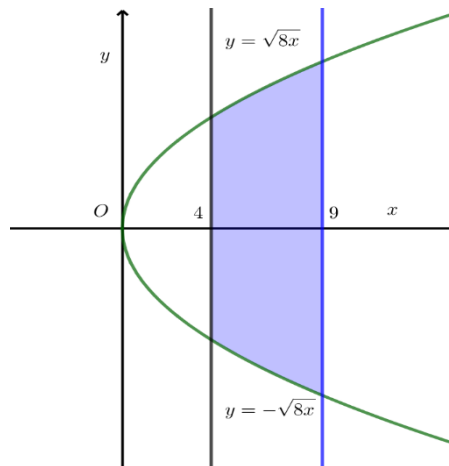
B. $\frac{152}{3}$.

C. $76\sqrt{2}$.

D. $\frac{152\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Vì $x \in [4; 9] \Rightarrow y = \pm \sqrt{8x}$

Vậy $S = 2 \int_4^9 \sqrt{8x} dx = \frac{152\sqrt{2}}{3}$

Câu 28. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = \ln \frac{9}{2}$.

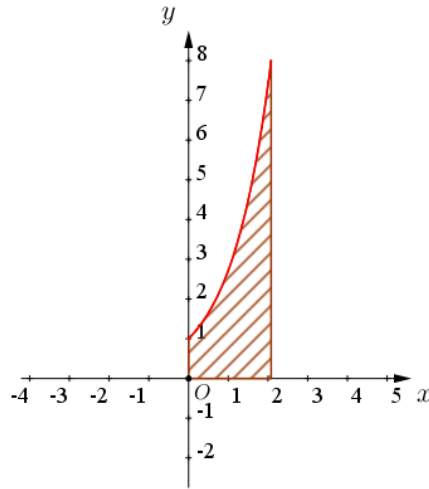
B. $k = \ln 4$.

C. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

D. $k = \ln 5$.

Hướng dẫn giải

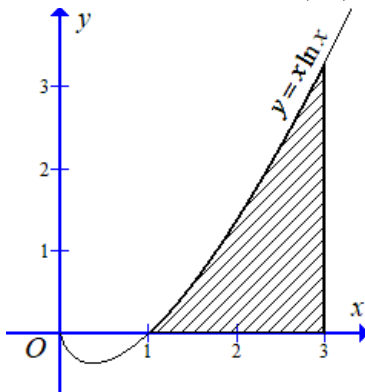
Chọn B



Ta có $S_1 + S_2 = \int_0^{\ln 8} e^x dx = (e^x) \Big|_0^{\ln 8} = 7$; $S_1 = \int_0^k e^x dx = (e^x) \Big|_0^k = e^k - 1$.

Mà $S_1 = S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow e^k - 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow k = \ln \frac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng (H).



A. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$.

B. 1.

C. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$.

D. $\frac{9}{2} \ln 3 + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng (H) là: $S = \int_1^3 x \ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$, nên:

$S = \int_1^3 x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2$.

Câu 30. Tính diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$.

B. $S = 2008$.

C. $S = \frac{2008}{3}$.

D. 2000.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 2x$ và $y = 0$ là $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Trên đoạn $[-10; 10]$ ta có

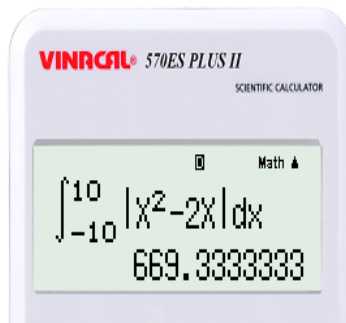
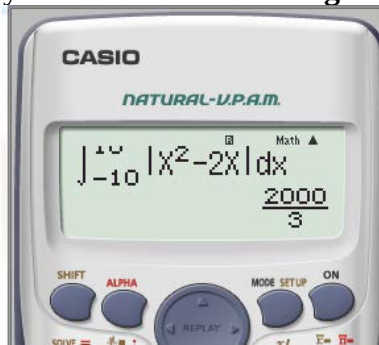
$$x^2 - 2x \geq 0, \forall x \in [-10; 0] \text{ và } [2; 10].$$

$$x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 2].$$

$$\text{Do đó } S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx = \frac{2008}{3} \text{ (đvdt)}.$$

Nhận xét:

Nếu học sinh sử dụng MTCT tính tích phân mà không chia khoảng thì có sự sai khác về kết quả giữa máy **casio** và **vinacal**. Trong trường hợp này máy **vinacal** cho đáp số đúng.



Câu 31. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

A. $S = \frac{10}{3}$.

B. $S = \frac{8}{3}$.

C. $S = \frac{13}{3}$.

D. $S = \frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S = \int_1^2 (x^2 + 2) dx = \frac{13}{3}$.

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1 (dùng máy tính):

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$ vì $x^2 \sqrt{x^2 + 1} \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$$

Bước 1: Bấm máy tính tích phân $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = 0,4201583875$ (**Lưu D**)

Bước 2: Cơ sở: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$D = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{D} \text{ (coi } c = f(x), a = x, b \in \mathbb{Z} \text{ và ta thử các giá trị)}$$

$b = \dots -5; -4; \dots 0; 1; 2; 3; 4; \dots$)

Thử với $b = 1$:

Thử với $b = 2$: Mode + 7

$$F(X) = \frac{X\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{D};$$

Start?	End?
-9	9

Step?

1

Kết quả: $a = 3; c = 8, b = 2$

										Math									
										F(X)									
11										1.2681									
12										4.634									
13																			

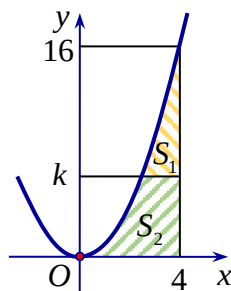
$$\text{Tính } K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^2 du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)^2 du \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)} \right) du = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } H = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} = \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } S &= \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6} K \\ &= \frac{7\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6} (3\sqrt{2} + 3\ln(1+\sqrt{2})) = \frac{3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{8} \end{aligned}$$

Câu 33. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 , S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = 8$.

B. $k = 4$.

C. $k = 5$.

D. $k = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

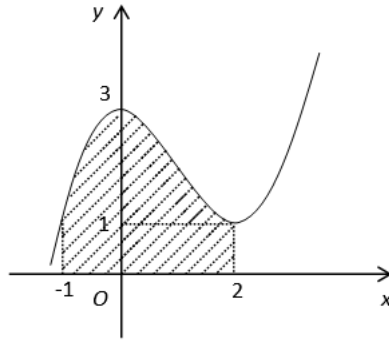
Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = k$ là $x = \sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx$, diện tích $S_2 = \int_0^4 x^2 dx - S_1$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 dx \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} - kx \right) \Bigg|_{\sqrt{k}}^4 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{64}{3} - 4k - \frac{\sqrt{k^3}}{3} + \sqrt{k^3} = \frac{32}{3}$$

$$\Leftrightarrow 16 = 6k - \sqrt{k^3} \Leftrightarrow (\sqrt{k})^3 - 6(\sqrt{k})^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{k} = 2 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow k = 4 \\ \sqrt{k} = 2 \end{cases} \quad k \in (0; 16)$$

Câu 34. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S = \frac{51}{8}$.

B. $S = \frac{52}{8}$.

C. $S = \frac{50}{8}$.

D. $S = \frac{53}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

□ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1 = 3$.

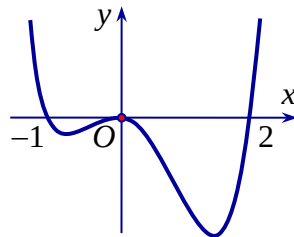
□ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ y = 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$.

Để thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$.

$$\Rightarrow S_2 = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 - 1 \right) dx = \frac{27}{8}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_1 + S_2 = \frac{51}{8}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^2 f(x) dx$. **B.** $\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx < 0$.

C. $-\int_0^2 f(x) dx > 0$. **D.** $\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $S_1 = \int_{-1}^0 |f(x)| dx < S_2 = \int_0^2 |f(x)| dx$ (1)

Mà $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-1; 0]$ và $x \in [0; 2]$.

Do đó ta có (1) $\Leftrightarrow -\int_{-1}^0 f(x) dx < -\int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^2 f(x) dx$. Vậy A sai.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+1}$ (với m là tham số khác 0) có đồ thị là (C) . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai trục tọa độ. Có bao nhiêu giá trị thực của m thỏa mãn $S = 1$?

- A. Không. B. Một. C. Ba. D. Hai.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$x = 0 \Rightarrow y = -m^2 < 0 \text{ (do } m \neq 0 \text{)}.$$

$$y = 0 \Rightarrow x = m^2 > 0.$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^{m^2} \left| \frac{x-m^2}{x+1} \right| dx = \int_0^{m^2} \left| 1 - \frac{1+m^2}{x+1} \right| dx = \int_0^{m^2} \left(\frac{1+m^2}{x+1} - 1 \right) dx = \left((1+m^2) \ln|x+1| - x \right) \Big|_0^{m^2}$$

$$= (1+m^2) \ln(m^2+1) - m^2$$

$$\text{Để } S = 1 \text{ thì } (1+m^2) \ln(m^2+1) - m^2 = 1 \Leftrightarrow (1+m^2) (\ln(m^2+1) - 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \ln(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow m^2+1 = e \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e-1}$$

Câu 37. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (3; 5)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in (5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là $x^4 - 4x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình (1) trở thành $t^2 - 4t + m = 0$ (2).

Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này xảy ra khi

$$\text{và chỉ khi } \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 4 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4 \quad (3).$$

Gọi t_1 và t_2 ($t_1 < t_2$) là hai nghiệm của (2), khi đó bốn nghiệm (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn) của phương trình (1) là $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của (C_m) nên từ giả thiết ta có

$$\int_0^{x_3} (x^4 - 4x^2 + m) dx = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 4x^2 - m) dx \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 8x^2 + 2m) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 2mx \right) \Big|_0^{x_4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 = 0$$

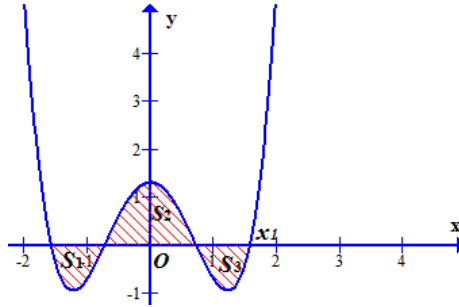
$$\Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0.$$

Vậy x_4 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_4^4 - 4x_4^2 + m = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x_4^4 - 60x_4^2 + 15m = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 0 \\ m = 0 \\ x_4^2 = \frac{10}{3} \\ m = \frac{20}{9} \end{cases}. \text{ Kết hợp điều kiện (3) suy ra } m = \frac{20}{9}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x) dx = 0$.

$$\text{Mà } \int_0^{x_1} f(x) dx = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right).$$

$$\text{Do đó, } x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0 \quad (2). \quad (\text{vì } x_1 > 0)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có phương trình } \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}.$$

Câu 39. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \sqrt{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m \in (-4; -1)$. B. $m \in (3; 5)$. C. $m \in (0; 3)$. D. $m \in (-2; 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1 = x^2 + 2mx + 1 + 2x^2 + 1$ suy ra $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} |3x^2 + 2mx + m^2 + 1| dx = S = \int_0^{\sqrt{2}} (3x^2 + 2mx + m^2 + 1) dx = \left(x^3 + mx^2 + m^2x + x \right) \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2m + \sqrt{2}m^2 + \sqrt{2} = \sqrt{2}(m^2 + \sqrt{2}m + 3) = \sqrt{2}\left[\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Ta thấy $S \geq \frac{5\sqrt{2}}{2}$, suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. Giá trị của tham số m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 2mx + m^2 + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2$

Hướng dẫn giải

Vì với m tùy ý ta luôn có $3x^2 + 2mx + m^2 + 1 > 0 \quad \forall x$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 (3x^2 + 2mx + m^2 + 1) dx = \left[x^3 + mx^2 + (m^2 + 1)x \right]_0^2 = 2m^2 + 4m + 10 = 2(m+1)^2 + 8$$

S đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $m = -1$. (dùng casio thử nhanh hơn)

Chọn C

Câu 41. Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2$, $x = m$, $(-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } S = \int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3}.$$

Phương trình $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài ra $-2 < m < 2$ nên trên $(-2; m)$ thì $4 - x^2 = 0$ vô nghiệm.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^m |4 - x^2| dx = \frac{25}{3} &\Leftrightarrow \left| \int_{-2}^m (4 - x^2) dx \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{-2}^m = \frac{25}{3} \\ &\Leftrightarrow \left| \left(4m - \frac{m^3}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right| = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \left| 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} \right| = \frac{25}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = \frac{25}{3} \\ 4m - \frac{m^3}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}m^3 - 4m + 3 = 0 \\ \frac{1}{3}m^3 - 4m - \frac{41}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 12m + 9 = 0 \\ m^3 - 12m - 41 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(m) = m^3 - 12m$, với $m \in (-2; 2)$ có

$$f'(m) = 3m^2 - 12 = 3(m^2 - 4) < 0, \quad \forall m \in (-2; 2).$$

Do đó $f(m)$ nghịch biến trên $(-2; 2) \Rightarrow f(m) < f(-2) = 16 \Rightarrow m^3 - 12m - 41 < 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow m^3 - 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2 + 3m - 3) = 0 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m = \frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 42. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a, b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số

$f(x) = \ln x$ bị giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ là $m - \sqrt{m} + \ln \frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của $m^2 - mn + n^2$ là bao nhiêu?

A. 6.

B. 7.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Khi đó, độ dài đường cong S là $l = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} x dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$. Suy ra: $t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t dt = x dx$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2$.

Suy ra: $l = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t^2-1} dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)} \right) dx = t \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^2$.

Suy ra: $l = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln(3 - 2\sqrt{2}) \right) = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} = 2 - \sqrt{2} + \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mà $l = m - \sqrt{m} + \ln \frac{1 + \sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ nên suy ra $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$.

Vậy $m^2 - mn + n^2 = 7$.

Câu 43. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$.

B. $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$.

C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$.

D. $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1. (Giải tự luận)

Ta có $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_a^b \left| f(x) \right| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx \\
S &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x} \right)^2} dx \\
&= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \left(x + \frac{1}{4x} \right) dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = 2\pi (I_1 + I_2 + I_3)
\end{aligned}$$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16} \right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4}x \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16}e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Cách 2.

Học sinh có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân $S = 2\pi \int_1^e \left| \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right| \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx$ để có

kết quả

Dạng 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Gọi (H) là hình giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Diện tích hình (H) được tính theo công thức:

A. $S_H = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b |g(x)| dx.$

B. $S_H = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

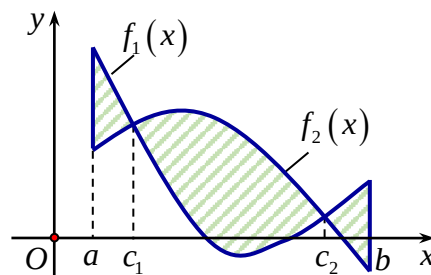
C. $S_H = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$

D. $S_H = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Câu 45. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới). Công thức tính diện tích của hình (H) là



A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định nghĩa ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) < 0 < f(-1)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$. Xét các mệnh đề sau

(I) $S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$. (II) $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$

(III) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx$. (IV) $S = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right|.$

Số mệnh đề đúng là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 1$ là

$S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ nên (2) đúng.

Do $f(0) < 0 < f(-1)$ nên $S = \int_{-1}^1 f(x) dx$ sai.

Tương tự $S = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right|$ sai. và $S = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$ sai.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$. Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 2$. Công thức tính diện tích S của (D) là công thức nào trong các công thức dưới đây?

- A. $S = \int_1^2 f(x) dx$. B. $S = \int_1^2 f^2(x) dx$. **C. $S = \int_1^2 |f(x)| dx$.** D. $S = \pi \int_1^2 f^2(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 48. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

- A. $\frac{8\pi}{3}$. **B. $\frac{16\pi}{3}$.** C. 10π . D. 8π .

Hướng dẫn giải

Chọn B

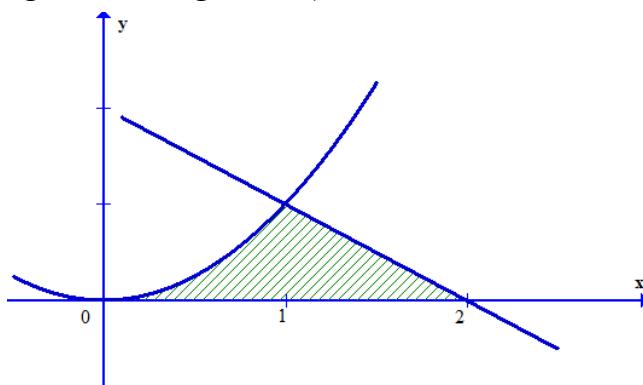
$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2$; $x = 4$.

Thể tích vật thể bằng:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_2^4 \left| (x-2)^2 - \sqrt{x}^2 \right| dx = \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_2^4 (x - (x-2)^2) dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Câu 49. Tính diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần gạch sọc trong hình vẽ)



- A. $\frac{3}{5}$. **B. $\frac{5}{6}$.** C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Câu 50. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{87}{5}$

B. $\frac{87}{4}$

C. $\frac{87}{3}$

D. $\frac{87}{5}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $(x^2 + x - 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Suy ra $S = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx = \frac{87}{3}$

Câu 51. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C): $y = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x = 0$, $x = a$ ($a < 0$) có diện tích bằng 5. Khi đó a bằng

A. $1 - e^5$

B. $1 + e^5$

C. $1 + 2e^5$

D. $1 - 2e^5$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có

TCX: $y = -x + 3$

Nên $S(a) = \int_a^0 \left(-\frac{1}{x-1} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{1}{x-1} \right) dx = \ln |x-1| \Big|_0^a = \ln(1-a)$

Suy ra $\ln(1-a) = 5 \Leftrightarrow a = 1 - e^5$

Câu 52. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng ?

A. $\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $-2\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $S = \int_0^\pi |\sin x - \cos x| dx$.

Phương trình $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cho $\frac{\pi}{4} + k\pi \in [0; \pi] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Biến đổi $S = \int_0^\pi |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi |\sin x - \cos x| dx$

$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi (\sin x - \cos x) dx \right| = \left| (-\cos x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^\pi \right| = 2\sqrt{2}$.

Câu 53. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức:

A. $S = \int_0^1 |e^x - 1| dx$.

B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$.

C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^1 |e^x - x| dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Vì trong khoảng $(0;1)$ phương trình $e^x = x$ không có nghiệm và $e^x > x, \forall x \in (0;1)$ nên

$$S = \int_0^1 |e^x - x| dx = \int_0^1 (e^x - x) dx.$$

Câu 54. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 2, x = 0, x = 1$.

- A.** $S = 4 \ln 2 + e - 5$. **B.** $S = 4 \ln 2 + e - 6$. **C.** $S = e^2 - 7$. **D.** $S = e - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S = \int_0^1 |e^x - 2| dx$.

Xét $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Bảng xét dấu $e^x - 2$:

x	0	$\ln 2$	1
$e^x - 2$	—	0	+

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_0^1 |e^x - 2| dx = - \int_0^{\ln 2} (e^x - 2) dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (2x - e^x) \Big|_0^{\ln 2} + (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1 \\ &= 4 \ln 2 + e - 5. \text{ Vậy } S = 4 \ln 2 + e - 5. \end{aligned}$$

Câu 55. Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng

$d: y = x - 1$ và $x = a, x = 2a$ ($a > 1$) bằng $\ln 3$?

- A.** $a = 1$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = 3$. **D.** $a = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \int_a^{2a} \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \right| dx = \int_a^{2a} \left| \frac{1}{x - 1} \right| dx = \int_a^{2a} \frac{1}{x - 1} dx \text{ (vì } a > 1) = \ln(x - 1) \Big|_a^{2a} \text{ (vì } a > 1) \\ &= \ln(2a - 1) - \ln(a - 1) = \ln \frac{2a - 1}{a - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \ln \frac{2a - 1}{a - 1} = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{2a - 1}{a - 1} = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 56. Biết diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = a$ (với

$a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ là $\frac{1}{2}(-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Hỏi số a thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $\left(\frac{7}{10}, 1 \right)$. **B.** $\left(\frac{51}{50}, \frac{11}{10} \right)$. **C.** $\left(\frac{11}{10}, \frac{3}{2} \right)$. **D.** $\left(1, \frac{51}{50} \right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sin x < \cos x \text{ với } x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right], \sin x > \cos x \text{ với } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Diện tích hình phẳng giới bởi các đường $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = a$ với $a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ là

$$S = \int_0^a |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^a |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^a (\sin x - \cos x) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^a \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^a$$

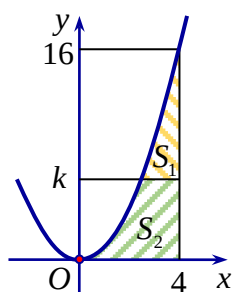
$$\Rightarrow S = \frac{-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$$

$$S = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^a = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 0 \right)$$

$$S = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \sqrt{2} \left(\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) = 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3} \approx 1,047 \Rightarrow a \in \left(\frac{51}{50}, \frac{11}{10}\right).$$

Câu 57. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 , S_2 (hình vẽ).



Tìm k để $S_1 = S_2$.

A. $k = 8$.

B. $k = 4$.

C. $k = 5$.

D. $k = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = k$ là $x = \sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1 = \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx$, diện tích $S_2 = \int_0^4 x^2 dx - S_1$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{\sqrt{k}}^4 (x^2 - k) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 dx \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} - kx \right) \Big|_{\sqrt{k}}^4 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{64}{3} - 4k - \frac{\sqrt{k}^3}{3} + \sqrt{k}^3 = \frac{32}{3}$$

$$\Leftrightarrow 16 = 6k - \sqrt{k}^3 \Leftrightarrow (\sqrt{k})^3 - 6(\sqrt{k})^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{k} = 2 + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{k} = 2 \end{cases} \xrightarrow{k \in (0;16)} k = 4$$

Câu 58. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1 = 2S_2$.

B. $S_1 = 3S_2$.

C. $S_1 = 2S_2 - 2$.

D. $S_1 = 2S_2 + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S_1 = \int_a^b |3f(x) - 3g(x)| dx = 3 \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 3 \int_a^b \left| (f(x) - 2) - (g(x) - 2) \right| dx = 3S_2.$$

Dạng 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$

Câu 59. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$ là

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 **D. $\frac{9}{2}$**

Hướng dẫn giải

Ta có $2 - x^2 = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $2 - x^2 \geq -x, \forall x \in [-1; 2]$

$$\text{Nên } S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

Câu 60. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là:

- A. $\frac{\pi}{6}$ **B. $\frac{1}{6}$** C. $\frac{5}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\text{Ta có diện tích hình phẳng cần tính là: } S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Câu 61. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ là

- A. $\frac{1}{12}$** B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 |\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}| dx = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx \right| = \left| \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Câu 62. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ và $y = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ là

- A. $\frac{37}{13}$ **B. $\frac{37}{12}$** C. 3 D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $2x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Nên } S &= \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

Câu 63. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2; 0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{8}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$y' = 2x.$$

$$y'(2) = 4.$$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M(2;0)

$$y = 2(x - 2) = 2x - 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S &= \int_0^2 |x^2 - 4 - (2x - 4)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Câu 64. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = (1 + e^x)x$, $y = (1 + e)x$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{e-1}{2}$

B. $\frac{e-2}{2}$

C. $\frac{e-2}{2}$

D. $\frac{e+1}{2}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $(1 + e^x)x - (1 + e)x = 0$ có nghiệm $x = 0, x = 1$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^1 |x(e - e^x)| dx = \int_0^1 x(e - e^x) dx = \frac{e-2}{2}$$

Câu 65. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{71}{3}$

B. $\frac{73}{3}$

C. $\frac{70}{3}$

D. $\frac{74}{3}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $|x^2 - 1| = |x| + 5$ có nghiệm $x = -3, x = 3$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-3}^3 (|x^2 - 1| - (|x| + 5)) dx = 2 \int_0^3 (|x^2 - 1| - (x + 5)) dx$$

Bảng xét dấu $x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 3]$

x	0	1	3
$x^2 - 1$	-	0	+

$$\text{Vậy } S = 2 \left| \int_0^1 (-x^2 - x - 4) dx + \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right| = \frac{73}{3}$$

Câu 66. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \begin{cases} -x, & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2, & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và $y = \frac{10}{3}x - x^2$ là $\frac{a}{b}$

. Khi đó $a + 2b$ bằng

A. 16

B. 15

C. 17

D. 18

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có

$$\frac{10}{3}x - x^2 = -x \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{10}{3}x - x^2 = x - 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx = \frac{13}{2}$$

Câu 67. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{108}{5}$

B. $\frac{109}{5}$

C. $\frac{109}{6}$

D. $\frac{119}{6}$

Hướng dẫn giải

Xét pt $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$ có nghiệm $x = 0, x = 5$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx = \frac{109}{6}$$

Câu 68. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 + 3$, tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x = 2$ và trục tung bằng

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn giải

PTTT của (P) tại $x = 2$ là $y = 4x + 3$

$$\text{Xét pt } (x^2 + 3) - (4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Câu 69. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành.

A. $\frac{11}{6}$.

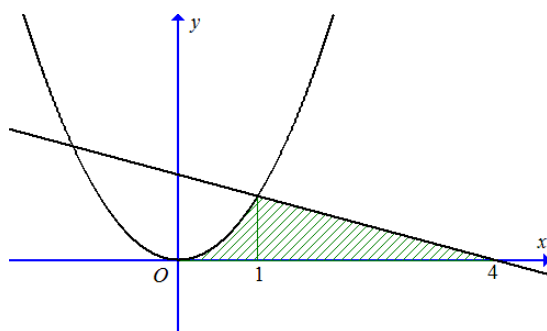
B. $\frac{61}{3}$.

C. $\frac{343}{162}$.

D. $\frac{39}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

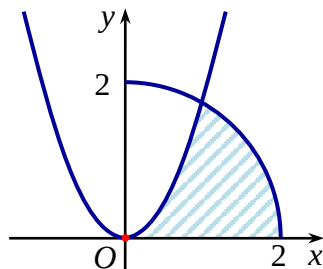
Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ với trục hoành là $x = 4$.

Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ với trục hoành là $x = 0$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4 = \frac{11}{6}.$$

Câu 70. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

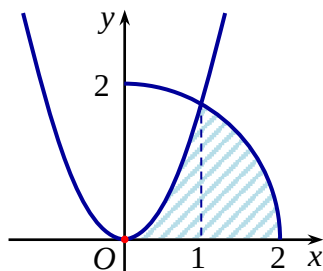
B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) là

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 3x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } 0 \leq x \leq 2 \text{)}.$$

Cách 1: Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + I \text{ với } I = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Đặt: $x = 2 \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt = (2x + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy .

Tức là $S = \pi - \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3x^2}) dx$.

Câu 71. Gọi S là diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$. Tìm m để diện tích S=4?

A. m=6

B. m=-6

C. m=±6

D. Không tồn tại m

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình $3x^2 = mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{m}{3} \end{cases}$

Xét m>0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_0^{\frac{m}{3}} |3x^2 - mx| dx = \int_0^{\frac{m}{3}} (mx - 3x^2) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - x^3 \right) \Big|_0^{\frac{m}{3}} = \frac{m^3}{54}$$

$$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = 6$$

Xét m<0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_{\frac{m}{3}}^0 |3x^2 - mx| dx = \int_0^{\frac{m}{3}} (mx - 3x^2) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - x^3 \right) \Big|_{\frac{m}{3}}^0 = -\frac{m^3}{54}$$

$$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{-m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = -6$$

Vậy m = ±6

Câu 72. Cho (P) $y = x^2 + 1$ và (d) $y = mx + 2$. Tìm m để diện tích hình phẳng giới hạn (P) và (d) đạt giá trị nhỏ nhất ?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. 0

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$$x^2 - mx - 1 = 0, \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 \geq 0 \forall m$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

Theo định lý Viet kết hợp yêu cầu: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \\ x_1 < x_2 \end{cases}$

Ta có:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 2 - x^2 - 1) dx = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 1 - x^2) dx$$

$$= \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{mx_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} + x_2 - \frac{mx_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} - x_1$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\frac{m^2}{2} + 1 - \frac{1}{3}(m^2 + 1) \right] = \sqrt{m^2 + 4} \left(\frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} \right)$$

S có GTNN khi $m = 0$.

Câu 73. Với giá trị nào của m thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = -x^2 + 2x$ và $(d): mx (m < 0)$ bằng 27 đơn vị diện tích

A. $m = -1$

B. $m = -2$

C. $m \in \emptyset$

D. $m \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

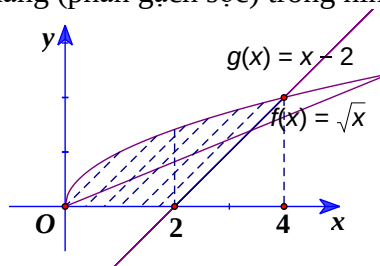
$$-x^2 + 2x = mx \Leftrightarrow x^2 - (2 - m)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 - m > 0 \end{cases}$$

$$S = \int_0^{2-m} |-x^2 + 2x - mx| dx = \int_0^{2-m} (-x^2 + 2x - mx) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{mx^2}{2} \right) \Big|_0^{2-m}$$

$$= -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 = 27$$

Do đó $m = -1$.

Câu 74. Tích diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S = \frac{8}{3}$.

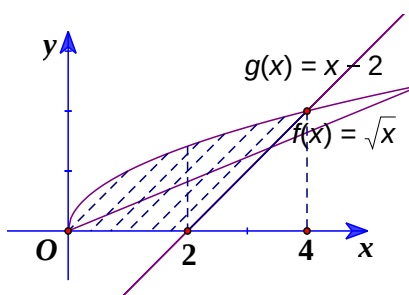
B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = \frac{11}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{10}{3}.$$

Câu 75. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 3$ và đường thẳng $y = 5$.

A. $\frac{5}{4}$.

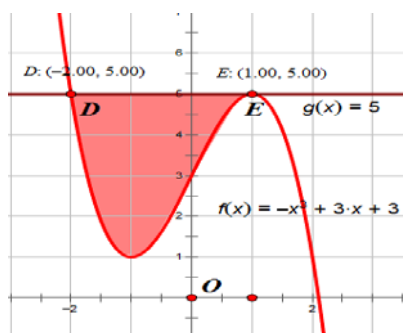
B. $\frac{45}{4}$.

C. $\frac{27}{4}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



+ Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $-x^3 + 3x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_{-2}^1 |x^3 - 3x + 2| dx = \frac{27}{4}$.

Câu 76. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}$; $y = 2x - 2$ và trục hoành. Tính diện tích của (H) .

A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

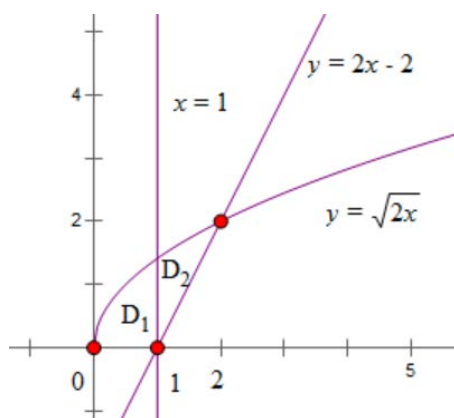
Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\square \sqrt{2x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 10x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\square 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\square \sqrt{2x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Đồ thị:



Diện tích hình (H) : $S = S_{D_1} + S_{D_2} = \int_0^1 \sqrt{2x} dx + \int_1^2 (\sqrt{2x} - 2x + 2) dx = \frac{5}{3}$

Câu 77. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $S = 13$.

B. $S = \frac{81}{12}$.

C. $S = \frac{9}{4}$.

D. $S = \frac{37}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{37}{12}.$$

Câu 78. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ.

Khi đó giá trị của S bằng

A. $S = \ln 2 - 1$ (đvdt). **B.** $S = 2 \ln 2 - 1$ (đvdt). **C.** $S = 2 \ln 2 + 1$ (đvdt). **D.** $S = \ln 2 + 1$ (đvdt).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$.

$$\text{Ta có } S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = - \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = - \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx = - \left(x - 2 \ln |x+1| \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1.$$

Câu 79. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{343}{12}$

B. $S = \frac{793}{4}$

C. $S = \frac{397}{4}$

D. $S = \frac{937}{12}$

Hướng dẫn giải

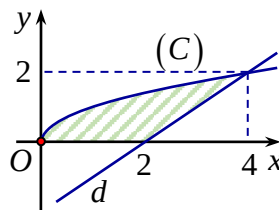
Chọn D

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình;

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow -x^3 + 12x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_{-3}^0 \left| -x^3 + 12x + x^2 \right| dx + \int_0^4 \left| -x^3 + 12x + x^2 \right| dx \\ &= \int_{-3}^0 (x^3 - 12x - x^2) dx + \int_0^4 (-x^3 + 12x + x^2) dx = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Câu 80. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Diện tích hình phẳng (H) là

$$S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 |\sqrt{x} - (x-2)| dx = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \bigg|_2^4 = \frac{10}{3}.$$

Câu 81. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và tiếp tuyến với đồ thị tại $M(4, 2)$ và trục hoành là

- A.** $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi d là phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại $M(4, 2) \Rightarrow d: y = \frac{1}{4}x + 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, d và trục Ox là

$$S = \int_{-4}^0 \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) dx + \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x} \right) dx = \frac{8}{3}.$$

Câu 82. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x + 2$ là

- A.** $S = 9$. **B.** $S = \frac{9}{4}$. **C.** $S = \frac{9}{2}$. **D.** $S = \frac{8}{9}$.

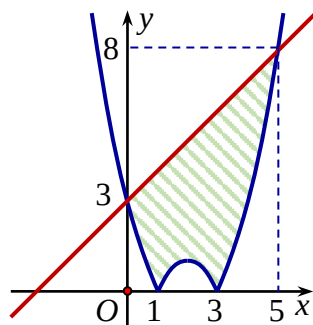
Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 83. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



- A.** $\frac{37}{2}$. **B.** $\frac{109}{6}$. **C.** $\frac{454}{25}$. **D.** $\frac{91}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^5 |x^2 - 4x + 3| - (x + 3) dx = \int_0^5 (x + 3 - |x^2 - 4x + 3|) dx$$

$$= \int_0^5 (x + 3) dx - \left[\int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^5 (x^2 - 4x + 3) dx \right]$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^5 - \left[\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^5 \right]$$

$$= \frac{55}{2} - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} \right) = \frac{109}{6}.$$

Câu 84. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = 5x - 2$.

- A.** $S = \frac{5}{4}$. **B.** $S = \frac{5}{8}$. **C.** $S = \frac{9}{8}$. **D.** $S = \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = 2x^2$ và $y = 5x - 2$:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 2$$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 |2x^2 - 5x + 2| dx = \left| \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x^2 - 5x + 2) dx \right| = \left| -\frac{9}{8} \right| = \frac{9}{8}.$$

Câu 85. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = x$.

- A.** $S = \frac{1}{6}$. **B.** $S = \frac{5}{6}$. **C.** $S = \frac{1}{3}$. **D.** $S = \frac{1}{2}$.

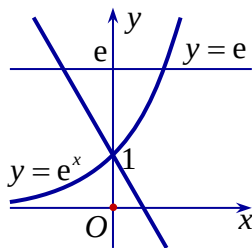
Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = x \rightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$\text{Diện tích hình phẳng là } S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \frac{1}{6}$$

Câu 86. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = e$, $y = e^x$ và $y = (1 - e)x + 1$ (tham khảo hình vẽ bên).



Diện tích hình phẳng (H) là

- A.** $S = \frac{e+1}{2}$. **B.** $S = e + \frac{3}{2}$. **C.** $S = \frac{e-1}{2}$. **D.** $S = e + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e^x$ với đường thẳng $y = e$ là $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e^x$ với đường thẳng $y = (1 - e)x + 1$ là $e^x = (1 - e)x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = e$ với đường thẳng $y = (1 - e)x + 1$ là $e = (1 - e)x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^0 |e - (1-e)x - 1| dx + \int_0^1 |e - e^x| dx$

$$= \left| \int_{-1}^0 (e - (1-e)x - 1) dx \right| + \left| \int_0^1 (e - e^x) dx \right| = \left| \left((e-1)x - \frac{(1-e)x^2}{2} \right) \right|_{-1}^0 + \left| (ex - e^x) \right|_0^1 = \frac{e+1}{2}.$$

Cách 2: Xem x là hàm theo biến y .

Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $x = \ln y$, $x = \frac{1}{1-e}(y-1)$, $y=1$, $y=e$.

Diện tích hình (H) là $S = \int_1^e \left[\ln y - \frac{1}{1-e}(y-1) \right] dy = \int_1^e \ln y dy - \frac{1}{1-e} \int_1^e (y-1) dy$

Tính $A = \int_1^e \ln y dy = (y \ln y - y) \Big|_1^e = 1$

Tính $B = \frac{1}{1-e} \int_1^e (y-1) dy = \frac{1}{1-e} \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^e = \frac{1}{1-e} \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right) = \frac{1-e}{2}$

Vậy $S = 1 - \frac{1-e}{2} = \frac{e+1}{2}$.

Câu 87. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 2x$ và đường thẳng $y = x$.

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{11}{6}$.

C. $\frac{27}{6}$.

D. $\frac{17}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int_0^3 |x^2 - 2x - x| dx = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right| = \frac{9}{2}$.

Câu 88. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Giá trị của a bằng

A. 2.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình: $ax^2 - 2 = 4 - 2ax^2 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ là

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} |3ax^2 - 6| dx = \left| \int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} (3ax^2 - 6) dx \right| = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Theo giả thiết $S = 16 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 16 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Câu 89. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. $\frac{1}{6}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

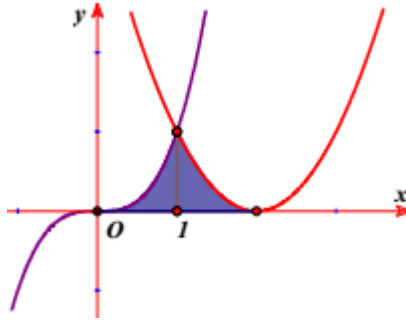
Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $x^5 = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1. \\ x=1 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^5$ và $y = x^3$ bằng

$$S = \int_{-1}^1 |x^5 - x^3| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x^5) dx - \int_0^1 (x^5 - x^3) dx = \frac{1}{6}.$$

Câu 90. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 4x + 4$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H) .



A. $S = \frac{11}{2}$.

B. $S = \frac{7}{12}$.

C. $S = \frac{20}{3}$.

D. $S = -\frac{11}{2}$.

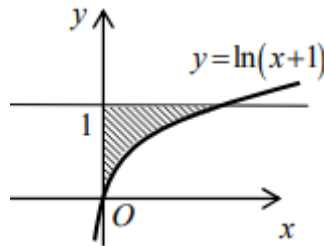
Hướng dẫn giải

Chọn B

Parabol $y = x^2 - 4x + 4$ có đỉnh $I(2; 0)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 4x + 4$ và $y = x^3$ là $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 91. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, đường thẳng $y = 1$ và trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

A. $e - 2$.

B. $e - 1$.

C. 1 .

D. $\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = \ln(x+1)$ và đường thẳng $y = 1$ là $\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = e - 1$.

Diện tích của (H) là $S = \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x+1 \end{cases}$. Khi đó $S = (x+1)\ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} dx = e - (e-1) = 1$.

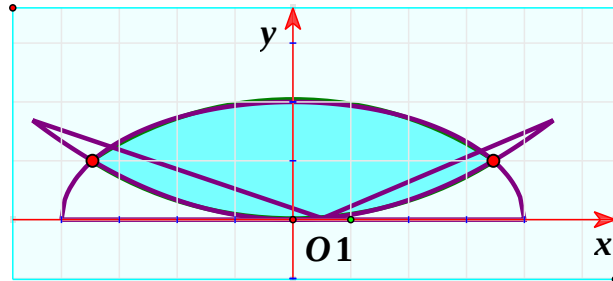
Câu 92. Hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$.

Diện tích của hình phẳng (H) bằng

- A.** $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$. **B.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{12} \Leftrightarrow 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{144}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{144} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 36x^2 - 576 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ x^2 = -48 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{12} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx - \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{12} dx.$

Xét $I = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2} dx$. Đặt $x = 4 \sin t$, với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$.

Với $x = -2\sqrt{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3}$

Với $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Khi đó: $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16 \cos^2 t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt$

$$= 8 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{1}{2} \left(\frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3} \right) - \frac{x^3}{36} \Big|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \left(\frac{24\sqrt{3} + 24\sqrt{3}}{36} \right) = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}.$$

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ và parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$?

- A.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi - 2}{9\pi + 2}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi + 2}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 1}{9\pi - 1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \quad (1) \\ y = \frac{x^2}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được: $x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -8 \quad (L) \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Phần nhỏ giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2}$; $y = \sqrt{8 - x^2}$; $x = -2$; $x = 2$ nên ta có:

$$S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \underbrace{\int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} \right) dx}_A - \underbrace{\int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx}_B$$

Tính $A = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} \right) dx$

Đặt $x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$.

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8 \sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

$$B = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{8}{3}.$$

$$\Rightarrow S_1 = 2\pi + \frac{4}{3} \Rightarrow S_2 = \pi R^2 - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$

Câu 94. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2$ và $y = -|x|$

A. $\frac{13}{3}.$

B. $\frac{7}{3}.$

C. 3.

D. $\frac{11}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

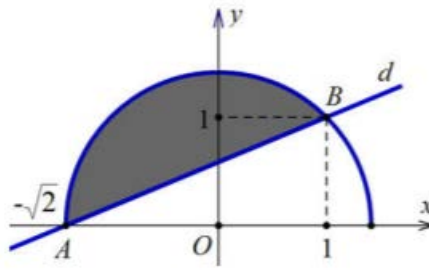
Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2 = -|x| \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Diện tích hình phẳng là: $S = \int_{-1}^1 |x^2 - 2 + |x|| dx = \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 2 + |x|) dx \right|$

$$= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - 2 - x) dx + \int_0^1 (x^2 - 2 + x) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right| = \left| -\frac{7}{6} - \frac{7}{6} \right| = \frac{7}{3}.$$

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $y = \sqrt{2 - x^2}$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-\sqrt{2}; 0)$ và $B(1; 1)$ (phần tô đậm như hình vẽ)



A. $\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{3\pi + 2\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3\pi - 2\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có d đi qua $B(1;1)$ có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1 + \sqrt{2}; 1)$ (VTPT là $\vec{n} = (-1; 1 + \sqrt{2})$)

Suy phương trình tổng quát của $d : -1(x - 1) + (1 + \sqrt{2})(y - 1) = 0 \Leftrightarrow -x + (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$

$$y = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^1 \left(\sqrt{2 - x^2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^1 \sqrt{2 - x^2} dx - \int_{-\sqrt{2}}^1 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) dx = A - B$$

$$\text{Ta có } B = \int_{-\sqrt{2}}^1 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) dx = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}x \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Xét tích phân } A = \int_{-\sqrt{2}}^1 \sqrt{2 - x^2} dx$$

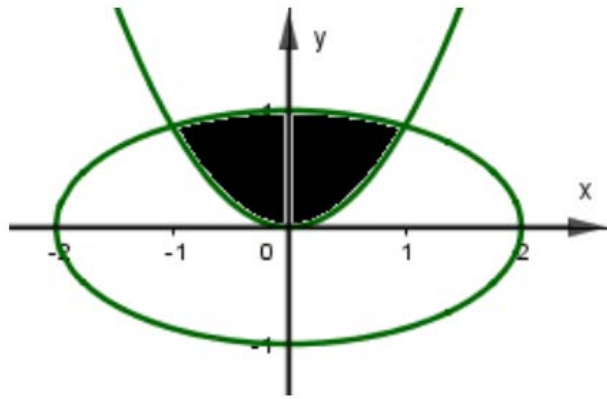
$$\text{Đặt } x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt ; \text{ Đổi cận: } x = -\sqrt{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}, x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Khi đó } A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi - 2\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 96. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và đường Elip có phương trình

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của } (H) \text{ bằng}$$



A. $\frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong nửa trên của Elip và Parabol là

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Suy ra diện tích hình phẳng (H) cần tính là

$$S_{(H)} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $I = \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx$, đặt $x = 2 \sin t$ ta được $I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \cos^2 t dt$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $S_{(H)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi + \sqrt{3}}{6}$.

Chú ý: Ta có thể bấm máy $S_{(H)} = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \right) dx$ rồi so sánh kết quả với các phương án.

Câu 97. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k, 0 < k < 1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.

A. $k = \sqrt[3]{4}$.

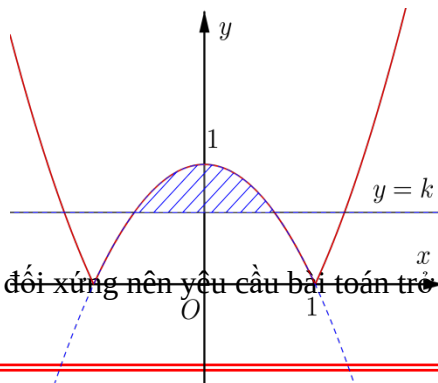
B. $k = \sqrt[3]{2} - 1$.

C. $k = \frac{1}{2}$.

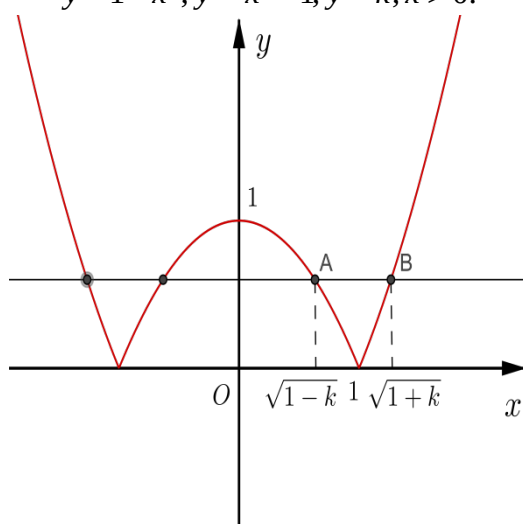
D. $k = \sqrt[3]{4} - 1$.

Chọn D

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = k$, $x = 0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi :
 $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$, $y = k$, $x > 0$.



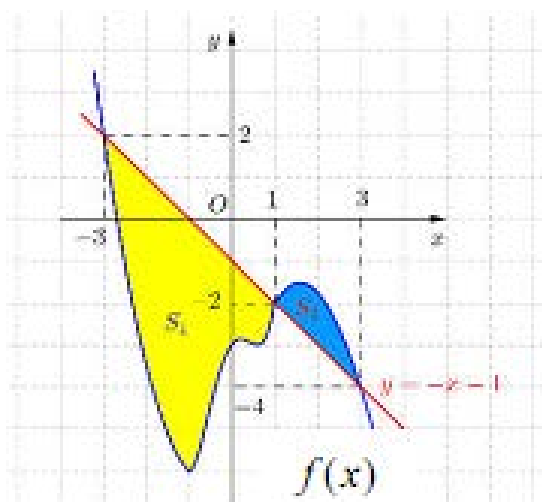
$$\int_0^{\sqrt{1-k}} (1 - x^2 - k) dx = \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k - 1 + x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k - x^2 + 1) dx.$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} + (1-k)\sqrt{1-k}$$

$$+ (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{1+k})^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1.$$

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1 , S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là M , m . Tính tích phân $\int_{-3}^3 f(x) dx$ bằng



A. $6 + m - M$.

B. $6 - m - M$.

C. $M - m + 6$.

D. $m - M - 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

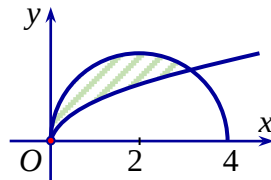
Ta có
$$M = S_1 = \int_{-3}^1 (-x - 1 - f(x)) dx = \int_{-3}^1 (-x - 1) dx - \int_{-3}^1 f(x) dx = \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-3}^1 = -\int_{-3}^1 f(x) dx$$

$$m = S_2 = \int_1^3 (f(x) + x + 1) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 (x + 1) dx = \int_1^3 f(x) dx + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^3 = \int_1^3 f(x) dx + 6$$

$$S_1 - S_2 = -\int_{-3}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx - 6 \Leftrightarrow M - m = -6 - \left(\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \right)$$

$$\Leftrightarrow M - m = -6 - \int_{-3}^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-3}^3 f(x) dx = m - M + 6$$

Câu 99. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4x - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 4$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi + 15\sqrt{3}}{24}$.

B. $\frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{10\pi - 9\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{10\pi - 15\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

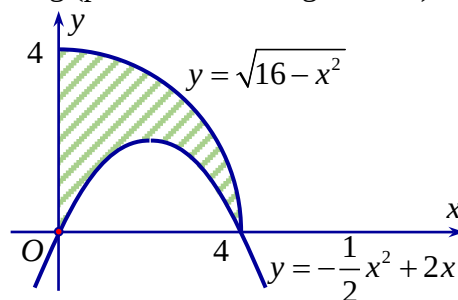
Ta có $\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_0^3 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{x}) dx = \int_0^3 \sqrt{4x - x^2} dx - \int_0^3 \sqrt{x} dx$
 $= \int_0^3 \sqrt{4 - (x - 2)^2} dx - 2\sqrt{3}$.

Đặt $x - 2 = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

Suy ra $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt - 2\sqrt{3} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2(1 + \cos 2t) dt - 2\sqrt{3} = (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} - 2\sqrt{3}$.

Câu 100. Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, với $(0 \leq x \leq 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D .



A. $8\pi - \frac{16}{3}$.

B. $2\pi - \frac{16}{3}$.

C. $4\pi + \frac{16}{3}$.

D. $4\pi - \frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng D là $S = \int_0^4 \left(\sqrt{16-x^2} - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) \right) dx$.

Xét tích phân $I = \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

Đặt $x = 4 \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^4 \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) = 4\pi$.

$J = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) dx = \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2 \right)_0^4 = \frac{16}{3}$.

Vậy $S = 4\pi - \frac{16}{3}$.

Câu 101. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$.

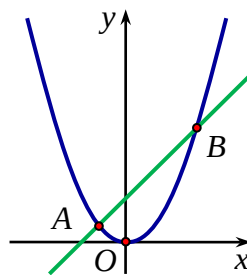
B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Cách 1: Gọi $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$ với $a < b$.

Ta có: $AB = 2 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4$

$AB: \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2} \Leftrightarrow \frac{x-a}{1} = \frac{y-a^2}{b+a}$

$\Leftrightarrow y = (a+b)(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = (a+b)x - ab$

$S = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \int_a^b (x-a)(b-x) dx$

Đặt $t = x - a$. Suy ra:

$S = \int_0^{b-a} t(b-a-t) dt = \int_0^{b-a} ((b-a)t - t^2) dt = \frac{(b-a)t^2}{2} \Big|_0^{b-a} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^{b-a} = \frac{(b-a)^3}{6}$

Ta có:

$(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1 + (a+b)^2} \leq 4$

Suy ra: $b-a \leq 2 \Rightarrow S = \frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1;1); B(1;1).$

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\frac{4}{3}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể dự đoán (lĩnh cảm:D) a, b đối nhau, nghĩa là: $a+b=0$. Từ đó, thay vào $(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4$, tìm được $a=-1, b=1$. Suy ra: $A(-1;1); B(1;1)$.

Viết phương trình: $AB: y=1$. Từ đó: $S = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$.

Hoặc cũng lĩnh cảm, đặc biệt hóa AB song song với Ox , từ đó cũng tìm được $a+b=0$.

Cách 2: Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=ax^2+bx+c$ và $(d): y=mx+n$.

Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2+bx+c=mx+n \Leftrightarrow ax^2+(b-m)x+c-n=0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2 = \frac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta = (b-m)^2 - 4a(c-n)$.

Áp dụng:

Tương tự, ta có $(AB): y=(a+b)x-ab, a < b$.

PTHĐGD: $x^2=(a+b)x-ab \Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab=0$, có $\Delta=(b-a)^2$.

Suy ra: $S^2 = \frac{\Delta^3}{36} = \frac{(b-a)^6}{36} \Rightarrow S = \frac{(b-a)^3}{6}$ và đánh giá như cách 1.

Câu 102. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$. D. $\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vì $a = \frac{1}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$S = \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right| dx = 2 \left| \int_0^{2|m|} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2 x^2 \right) dx \right|$$

$$= 2 \left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2}{3} m^2 x^3 \right) \right|_0^{2|m|} = \frac{64}{15} |m|^5$$

Ta có $S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

Câu 103. Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$.

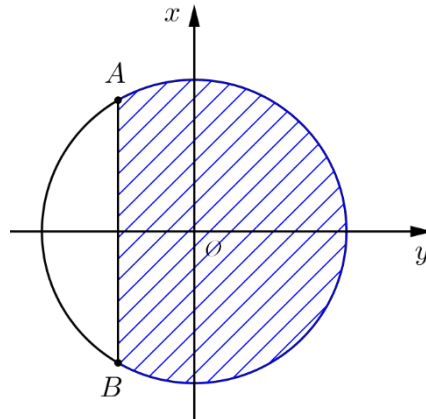
Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Gọi diện tích cần tìm là S , diện tích của hình này chiếu xuống đáy là S' .

Ta có: $S' = S \cdot \cos 60^\circ$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.



Trong $\triangle AOB$ ta có: $\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra: số đo $\widehat{AOB}$ lớn $= \frac{4\pi}{3}$.

Do đó $S' = S_{\text{quạt } AOB} + S_{\triangle AOB} = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot \pi R^2 + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) R^2 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$

Vậy $S = \frac{S'}{\cos 60^\circ} = 2 \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2 = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2$

Cách 2: Ta có: $\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



$$I = \frac{R}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) R \Rightarrow S = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2.$$

Câu 104. Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. **B.** $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. **D.** $S_{\max} = \frac{2018^3}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $A(a; a^2); B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a + b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b \left| (a + b)x - ab - x^2 \right| dx = \int_a^b \left((a + b)x - ab - x^2 \right) dx = \frac{1}{6} (b - a)^3.$$

$$\text{Vì } AB = 2018 \Leftrightarrow (b - a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b - a)^2 (1 + (b + a)^2) = 2018^2.$$

$$\Rightarrow (b - a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b - a| = b - a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{2018^3}{6} \text{ khi } a = -1009 \text{ và}$$

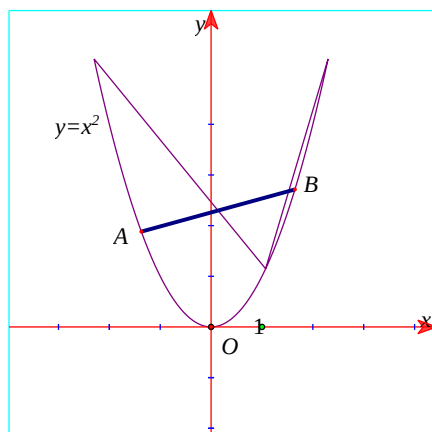
$$b = 1009.$$

Câu 105. Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB .

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB = 2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a < b$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } AB = 2 \text{ nên } (b - a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b - a)^2 [(b - a)^2 + 1] = 4.$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y = (b + a)x - ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S = \int_a^b [(a+b)x - ab - x^2] dx = \left[(a+b) \frac{x^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Mặt khác $(b-a)^2[(b-a)^2 + 1] = 4$ nên $|b-a| = b-a \leq 2$ do $(b-a)^2 + 1 \geq 1$.

Vậy $S = \frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6}$. Vậy $S_{\max} = \frac{4}{3}$.

Dạng 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong (>2 đường cong)

Câu 106. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1;3)$ và $N(2;6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{7}{4}$.

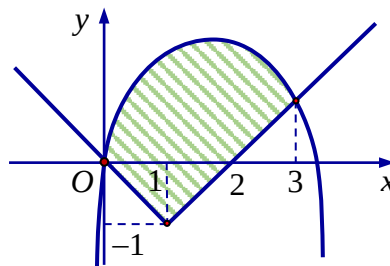
D. $\frac{21}{4}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là $d_1: y = -2x + 1$.Phương trình tiếp tuyến tại $N(2;6)$ là $d_2: y = 4x - 2$.Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và $d_2: -2x + 1 = 4x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |x^2 + 2 + 2x - 1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 |x^2 + 2 - 4x + 2| dx = \frac{9}{4}.$$

Câu 107. Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có

phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Hướng dẫn giải**Chọn B**Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -x$ và $y = x - 2$ là $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx.$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_0^1 \left(\frac{13}{3}x - x^2 \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{7}{3}x - x^2 + 2 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \left(\frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^3 = \frac{13}{2}.$$

Câu 108. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi - 1}{2}$.

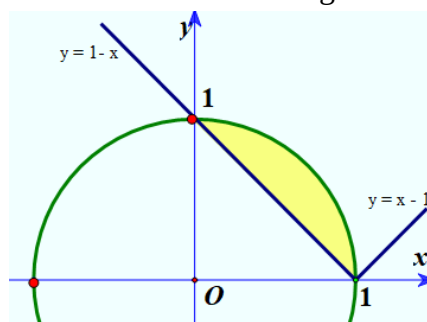
C. $\frac{\pi}{2} - 1$.

D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y = \sqrt{1-x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Cách 1:

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{4} \text{ diện tích hình tròn} - \text{diện tích tam giác vuông cân} \right)$$

Cách 2:

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2} - (1-x) \right] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 (x-1) dx = I_1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = I_1 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \quad dx = \cos t \cdot dt.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=0; \quad x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Câu 109. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 1$ trên miền $x \geq 0, y \leq 1$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Cách 1:

$$\text{Ta có: } y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}; \quad y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad (\text{do } x \geq 0).$$

Suy ra:

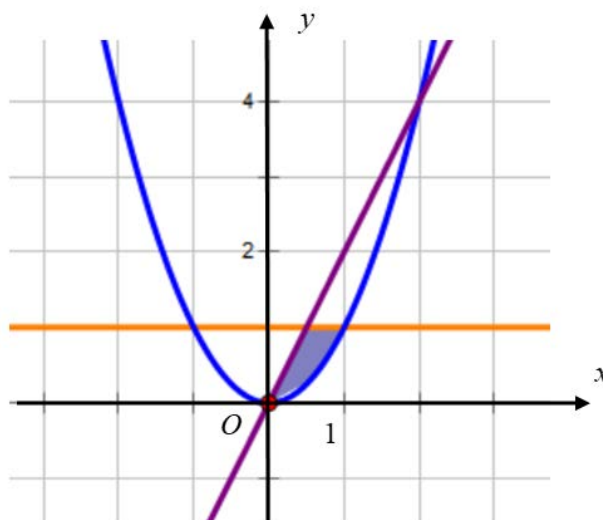
$$S = \int_0^1 \left| \sqrt{y} - \frac{y}{2} \right| dy = \frac{5}{12} \text{ (Bấm máy trực tiếp hoặc xét dấu bỏ } | \text{)}$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.



Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - x^2) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{5}{12}.$$

Câu 110. Cho hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 2$, $y = x$ có diện tích là $S = a + b\pi$. Chọn kết quả đúng:

A. $a > 1, b > 1$.

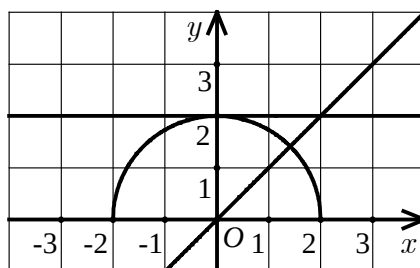
B. $a + b < 1$.

C. $a + 2b = 3$.

D. $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Các phương trình hoành độ giao điểm:

$$* \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$* \sqrt{4 - x^2} = 2 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$* x = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích cần tính là: } S &= \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \sqrt{4-x^2}) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (2-x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2 dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (2-x) dx - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= (2x) \Big|_0^{\sqrt{2}} + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx = 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx = 3 - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx. \end{aligned}$$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^2 t dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(1 + \cos 2t) dx \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = 3 - \frac{\pi}{2} - 1 = 2 - \frac{1}{2} \pi.$$

Theo kí hiệu của bài toán ta suy ra $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$. Do đó mệnh đề đúng là $a^2 + 4b^2 \geq 5$.

Câu 111. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2$; $y = \frac{1}{27}x^2$; $y = \frac{27}{x}$ bằng

A. $27 \ln 2$

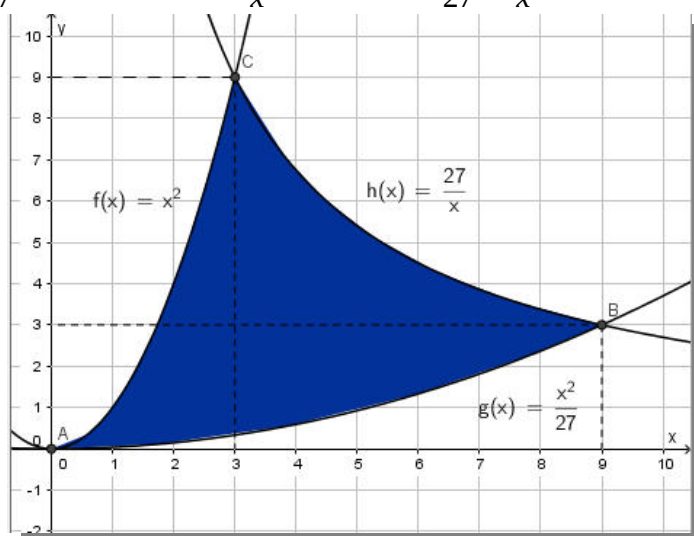
B. $27 \ln 3$

C. $28 \ln 3$

D. $29 \ln 3$

Hướng dẫn giải

Xét các pthđgđ $x^2 - \frac{x^2}{27} = 0 \Rightarrow x = 0$; $x^2 - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 3$; $\frac{x^2}{27} - \frac{27}{x} = 0 \Rightarrow x = 9$



Suy ra

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27} \right) dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27} \right) dx = 27 \ln 3$$

Câu 112. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 6x + 12$ và các tiếp tuyến tại các điểm $A(1;7)$ và $B(-1;19)$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $y' = 2x - 6$.

Gọi tiếp tuyến tại điểm $A(1;7)$ là d_1

Suy ra $d_1: y = y'(1)(x-1) + 7 = -4x + 11$.

Gọi tiếp tuyến tại điểm $B(-1;19)$ là d_2

Suy ra $d_2: y = y'(-1)(x+1) + 19 = -8x + 11$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_1 và parabol là

$$x^2 - 6x + 12 = -4x + 11 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và parabol là

$$x^2 - 6x + 12 = -8x + 11 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và d_1 là

$$-4x + 11 = -8x + 11 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-1}^0 |x^2 - 6x + 12 + 8x - 11| dx + \int_0^1 |x^2 - 6x + 12 + 4x - 11| dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 113. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x$; $y = x^2$; $y = 1$ trên miền $x \geq 0$; $y \leq 1$

A. $\frac{1}{3}$.

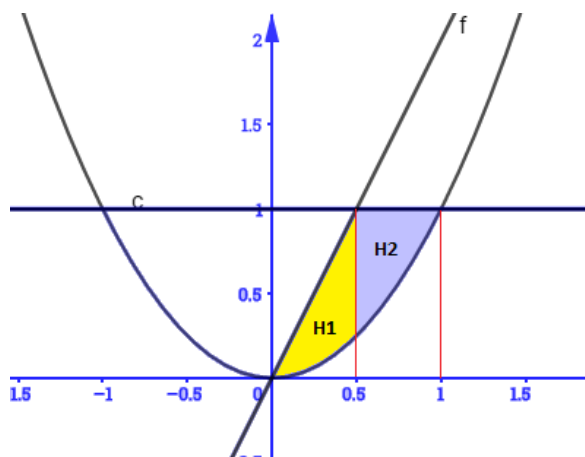
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$; $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Hình phẳng cần tính được tạo từ hai hình (H_1) và (H_2)

$$\text{Trong đó } (H_1) \begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \\ x = 0; x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |2x - x^2| dx = \frac{5}{24}.$$

$$\text{Và } (H_2) = \begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}; x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x^2| dx = \frac{5}{24}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = S_1 + S_2 = \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$.

Câu 114. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x, y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 68

B. 67

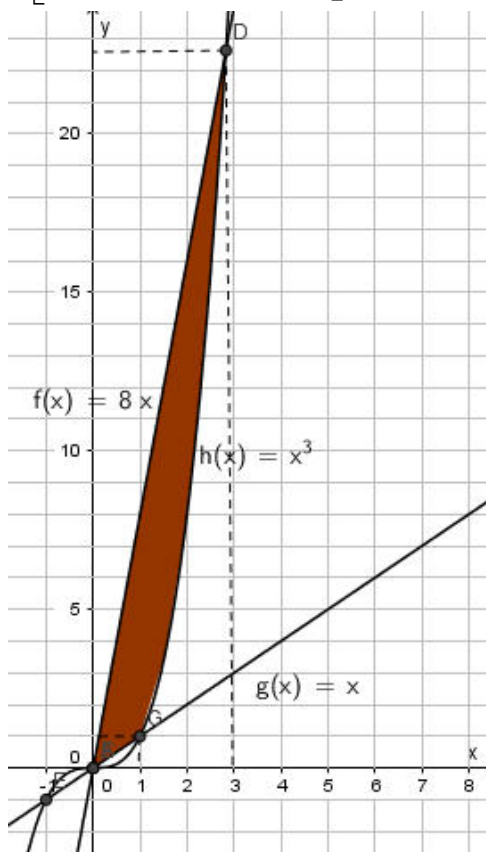
C. 66

D. 65

Hướng dẫn giải

Ta có

$$8x - x = 0 \Rightarrow x = 0; 8x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}; x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$\text{Nên } S = \int_0^1 (8x - x) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3) dx = \frac{63}{4}$$

Câu 115. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1, y = x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0, y \leq 1$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $b - a$ bằng

A. 4

B. 2

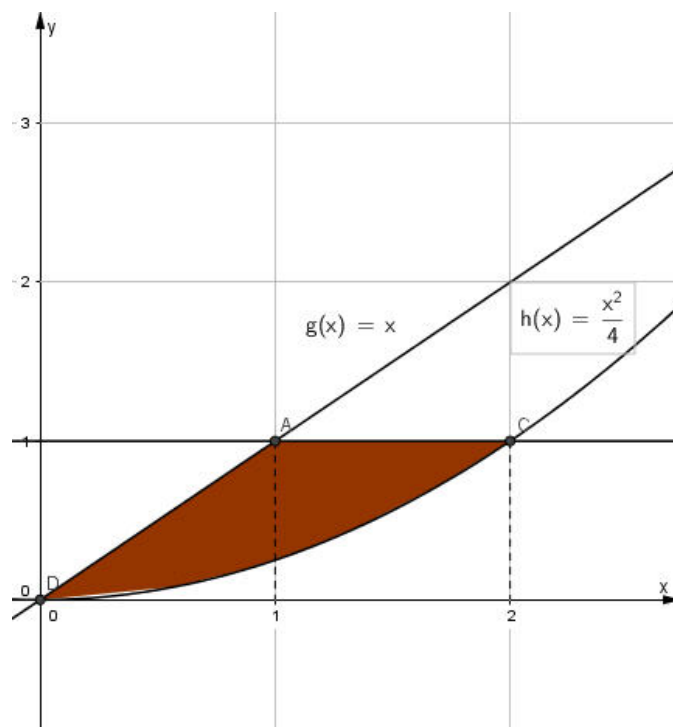
C. 3

D. 1

Hướng dẫn giải

Ta có

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 0; 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 2$$



Nên $S = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{5}{6}$

Câu 116. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và các tiếp tuyến của (P) tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{9}{8}$.

D. $\frac{5}{2}$.

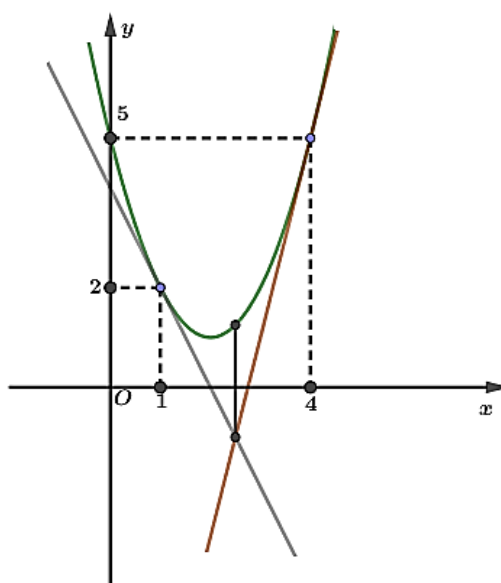
Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y' = 2x - 4$.

Tiếp tuyến của (P) tại A và B lần lượt là $y = -2x + 4$; $y = 4x - 11$.

Giao điểm của hai tiếp tuyến là $M\left(\frac{5}{2}; -1\right)$.



Khi đó, dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 4x + 5 + 2x - 4) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x^2 - 4x + 5 - 4x + 11) dx = \frac{9}{4}.$$

Câu 117. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 1 - x$.

A. $S = e - \frac{3}{2}$.

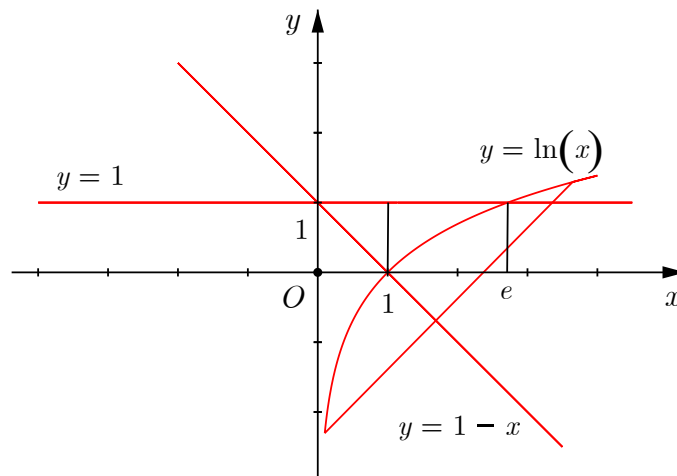
B. $S = e - \frac{1}{2}$.

C. $S = e + \frac{1}{2}$.

D. $S = e + \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_0^1 [1 - (1 - x)] dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x(1 - \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x d(1 - \ln x) \\ &= \frac{1}{2} - 1 - \int_1^e x \cdot \frac{-1}{x} dx = -\frac{1}{2} + x \Big|_1^e = -\frac{1}{2} + (e - 1) = e - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 118. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y = 8x$, $y = x$ và đồ thị hàm số $y = x^3$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 62.

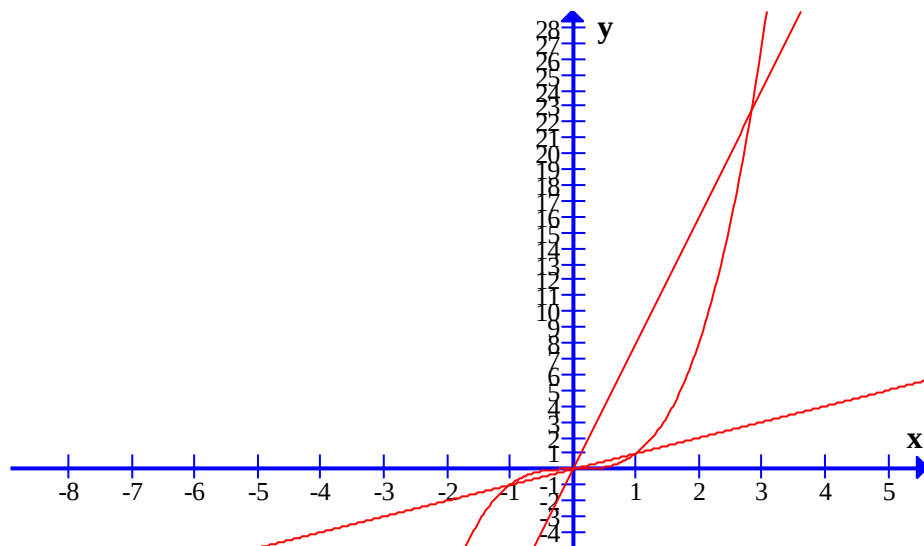
B. 67.

C. 33.

D. 66.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có

$$x^3 = 8x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ loại } x = -2\sqrt{2}$$

$$x^3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ loại } x = -1$$

$$\text{Suy ra } S = \int_0^{2\sqrt{2}} (8x - x^3) dx - \int_0^1 (x - x^3) dx = \left(\frac{8x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{2\sqrt{2}} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 16 - \frac{1}{4} = \frac{63}{4}$$

Khi đó $a + b = 67$.

Câu 119. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P) và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P). Giá trị của S bằng

A. 9.

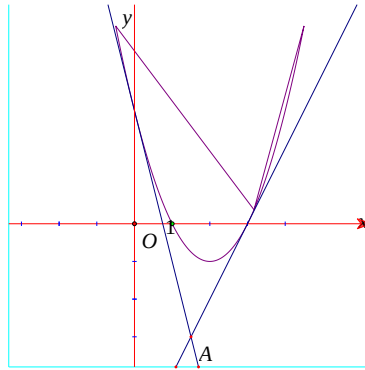
B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Giả sử Δ là đường thẳng đi qua $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ và có hệ số góc k , khi đó $\Delta: y = k\left(x - \frac{2}{3}\right) - 3$.

Để đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ thì hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 4 = k & (1) \\ x^2 - 4x + 3 = k\left(x - \frac{3}{2}\right) - 3 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } x^2 - 4x + 3 = (2x - 4)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

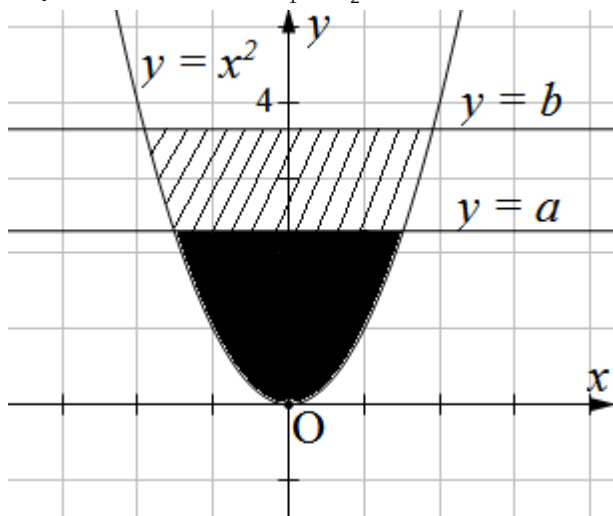
Với $x = 0$ thì $k = -4$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = -4x + 3$.

Với $x = 3$ thì $k = 2$, khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = 2x - 9$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ và hai tiếp tuyến $y = -4x + 3$ và $y = 2x - 6$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} (x^2 - 4x + 3 + 4x - 3) dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2 - 4x + 3 - 2x + 6) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{3}{2}} + \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Câu 120. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($0 < a < b$) (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



A. $b = \sqrt[3]{4a}$.

B. $b = \sqrt[3]{2a}$.

C. $b = \sqrt[3]{3a}$.

D. $b = \sqrt[3]{6a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = b$ là

$$x^2 = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{b}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $y = a$ là

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = b$ là

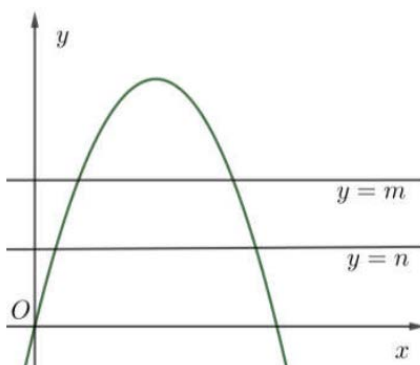
$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = 2 \left(bx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{b}} = 2 \left(b\sqrt{b} - \frac{b\sqrt{b}}{3} \right) = \frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $y = a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2 \left(ax - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = 2 \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

$$\text{Do đó } S = 2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3} = 2 \cdot \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow (\sqrt{b})^3 = 2(\sqrt{a})^3 \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{4a}.$$

Câu 121. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y = m$ và $y = n$ chia (H) thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ).



Giá trị biểu thức $T = (4-m)^3 + (4-n)^3$ bằng

A. $T = \frac{320}{9}$.

B. $T = \frac{75}{2}$.

C. $T = \frac{512}{15}$.

D. $T = 450$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Sử dụng công thức: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ và trục hoành bằng $S = \frac{\sqrt{\Delta^3}}{6a^2}$, với $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành $-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Diện tích hình (H) là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \frac{32}{3}$.

Từ đó, diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $y = m$ là

$$S_1 = \frac{\sqrt{\Delta_1^3}}{6a} = \frac{\sqrt{(16-4m)^3}}{6} = \frac{1}{3}S.$$

diện tích S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$ và đường thẳng $y = n$ là

$$S_2 = \frac{\sqrt{\Delta_2^3}}{6a} = \frac{\sqrt{(16-4n)^3}}{6} = \frac{2}{3}S.$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} \frac{\sqrt{(16-4m)^3}}{6} = \frac{32}{9} \\ \frac{\sqrt{(16-4n)^3}}{6} = \frac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-m)^3 = \frac{1}{4^3} \left(\frac{64}{3} \right)^2 \\ (4-n)^3 = \frac{1}{4^3} \left(\frac{128}{3} \right)^2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } T = (4-m)^3 + (4-n)^3 = \frac{320}{9}.$$

Câu 122. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{27}{x}$.

A. $\frac{63}{8}$.

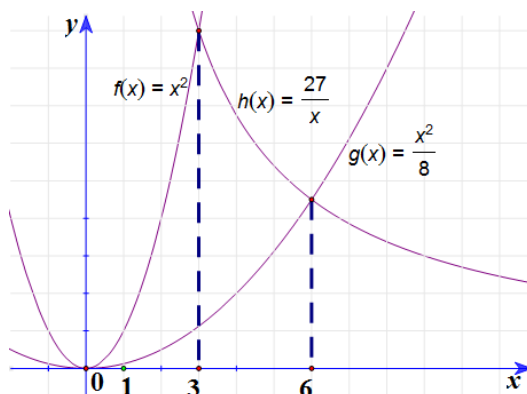
B. $27 \ln 2 - \frac{63}{8}$.

C. $27 \ln 2$.

D. $27 \ln 2 - \frac{63}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = 3; \quad x^2 = \frac{x^2}{8} \Leftrightarrow x = 0; \quad \frac{x^2}{8} = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ta có : $S_{HP} = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_3^6 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx.$

$$S_{HP} = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24} \right) \Big|_0^3 + \left(27 \ln|x| - \frac{x^3}{24} \right) \Big|_3^6 = \frac{63}{8} + 27 \ln 2 - \frac{63}{8} = 27 \ln 2.$$

Câu 123. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua điểm $A(0;9)$ và chia (H) làm ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\frac{13}{2}.$

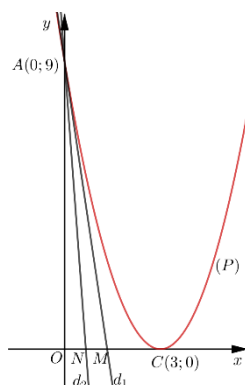
B. 7.

C. $\frac{25}{4}.$

D. $\frac{27}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi $d_1: y = k_1x + 9$, $d_2: y = k_2x + 9$ ($k_1 > k_2$).

Gọi $M = d_1 \cap Ox \Rightarrow M\left(-\frac{9}{k_1}; 0\right)$; $N = d_2 \cap Ox \Rightarrow N\left(-\frac{9}{k_2}; 0\right)$ $\left(-\frac{9}{k_2} < -\frac{9}{k_1}\right)$

Giao điểm của $(P): y = (x-3)^2$ với hai trục tọa độ lần lượt là $C(3;0)$, $A(0;9)$.

Theo giả thiết ta có $S_{\Delta AON} = S_{\Delta ANM} \Leftrightarrow OM = 2ON \Leftrightarrow -\frac{9}{k_1} = -\frac{18}{k_2} \Leftrightarrow k_2 = 2k_1.$

Lại có $S_{(H)} = 3S_{\Delta AON} \Leftrightarrow \int_0^3 (x-3)^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot ON \Leftrightarrow 9 = -\frac{243}{2k_2} \Leftrightarrow k_2 = -\frac{27}{2}.$

Suy ra $k_1 = -\frac{27}{4} \Rightarrow k_1 - k_2 = \frac{27}{4}.$

Câu 124. Tính diện tích S của hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đồ thị $(d_1): y = 2x - 2$,

$(d_2): y = \frac{x}{2} + 1$, $(P): y = x^2 - 4x + 3.$

A. $S = \frac{189}{16}.$

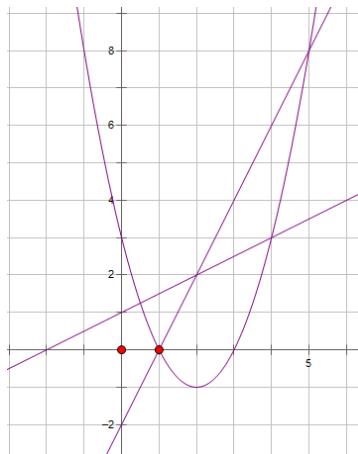
B. $S = \frac{13}{3}.$

C. $S = \frac{487}{48}.$

D. $S = \frac{27}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x}{2} + 1 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 4 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x - 2 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x - 2 = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Diện tích của hình **phẳng** (H):

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{x}{2} + 1 - (x^2 - 4x + 3) \right] dx + \int_2^5 \left[2x - 2 - (x^2 - 4x + 3) \right] dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-x^2 + \frac{9}{2}x - 2 \right) dx + \int_1^2 \left(-x^2 + 6x - 5 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x^2 - 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right) \Big|_2^5 = \frac{189}{16}.$$

Dạng 5: Diện tích S giới hạn bởi các đường:

- Đồ thị của $x = g(y)$, $x = h(y)$, $h(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$.

- Hai đường thẳng $x = c, x = d$

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$$

Câu 125. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0$, $x + y = 0$ là

A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{11}{2}$

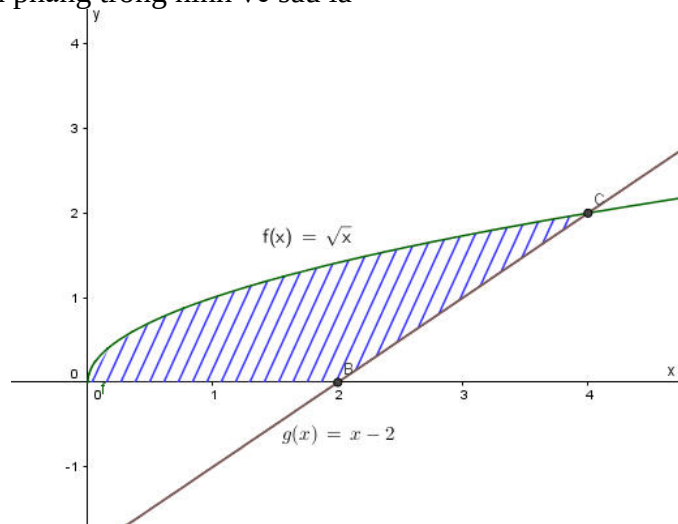
Hướng dẫn giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là $x = -y^2 + 2y$, $x = -y$

Xét pt tung độ giao điểm $(-y^2 + 2y) - (-y) = 0$ có nghiệm $y = 0, y = 3$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 |-y^2 + 3y| dy = \int_0^3 (-y^2 + 3y) dy = \frac{9}{2}$$

Câu 126. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{11}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

D. $\frac{10}{3}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y^2 = y + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ Nên } S = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$$

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH CÓ ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

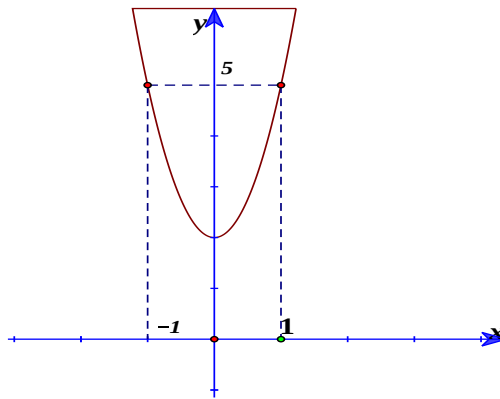
A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3) - f(1)$?



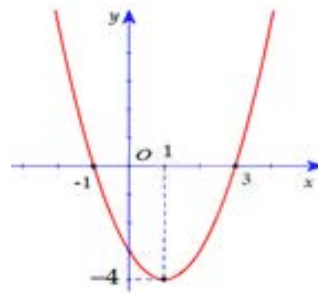
A. 24.

B. 28.

C. 26.

D. 21.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



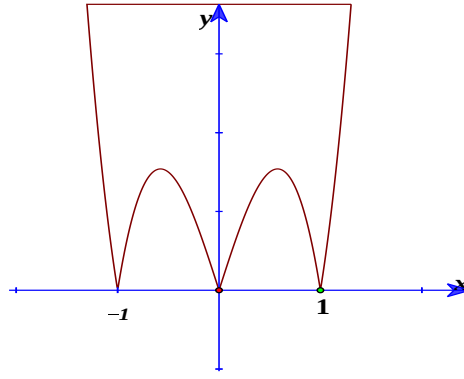
A. 2.

B. 27.

C. 29.

D. 35.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a > 0$) có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{-8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



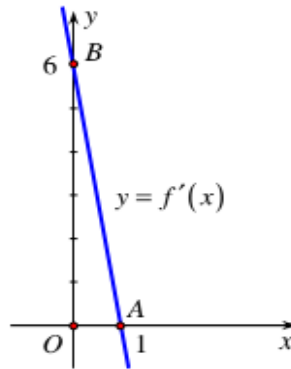
A. $\frac{7}{15}$.

B. $\frac{8}{15}$.

C. $\frac{14}{15}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) = 5$, tính giá trị của $f(1)$?



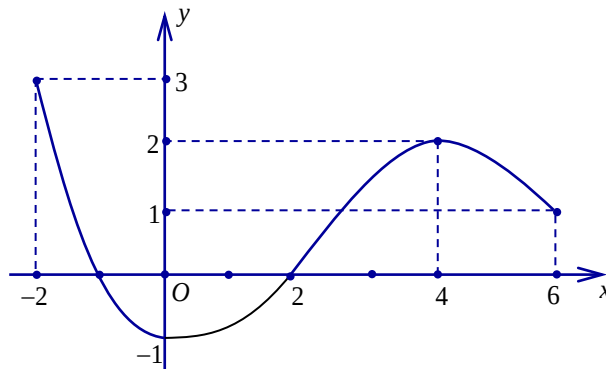
A. 0.

B. 3.

C. 8.

D. 11.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



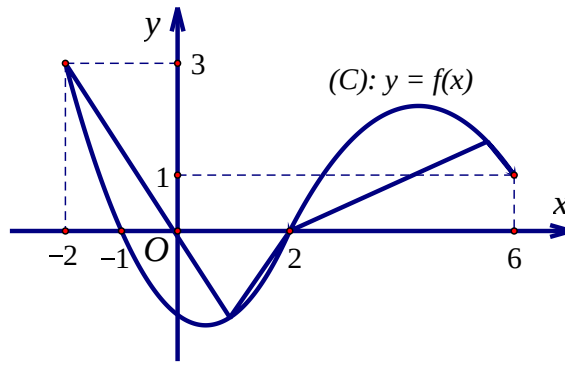
A. $\max_{[-2;6]} y = f(-2)$.

B. $\max_{[-2;6]} y = f(2)$.

C. $\max_{[-2;6]} y = f(6)$.

D. $\max_{[-2;6]} y = f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



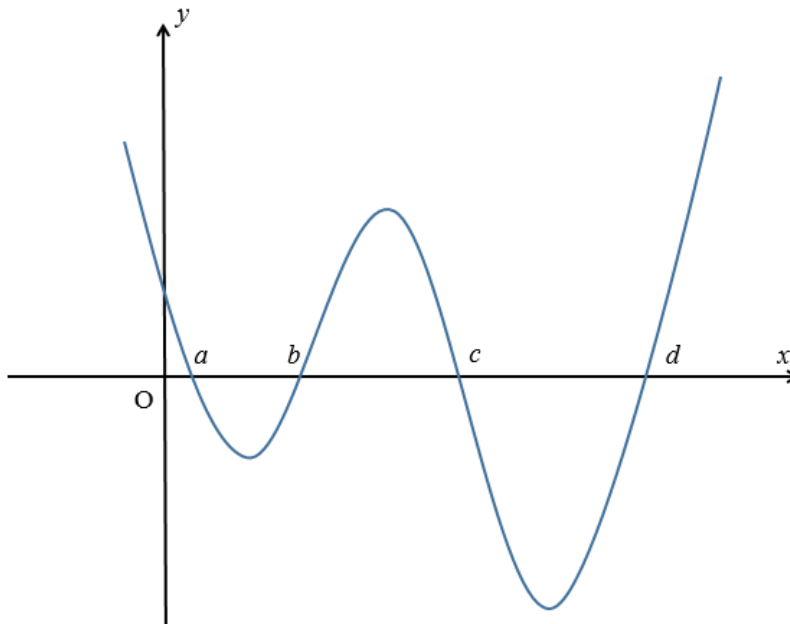
A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.

B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.

D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau).



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

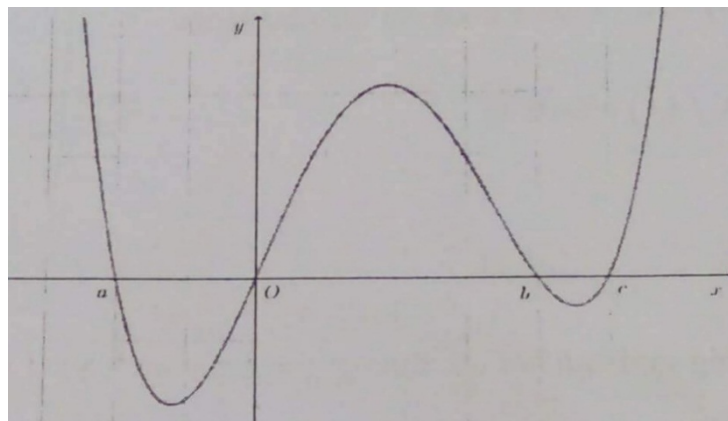
A. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

B. $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.

C. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.

D. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $a, 0, b, c$ với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

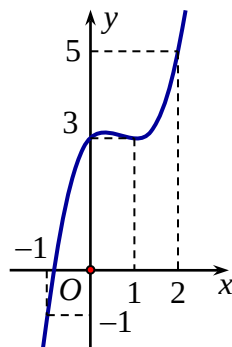
A. $f(b) > f(a) > f(c)$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(b) > f(c) > f(a)$.

D. $f(c) > f(a) > f(b)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$.

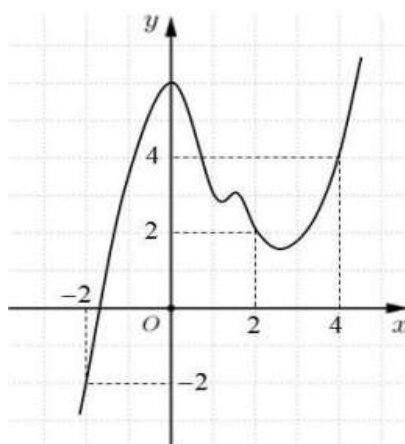
B. $g(-1) = g(1)$.

C. $g(1) = g(2)$.

D. $g(1) > g(2)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.

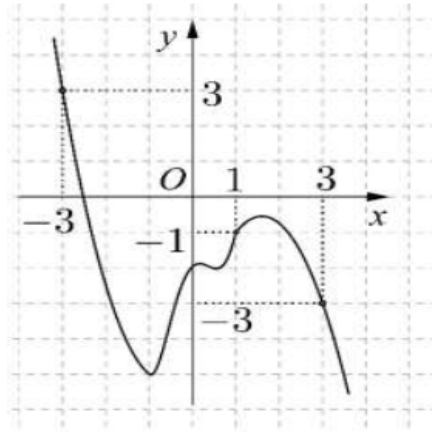
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.

C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?



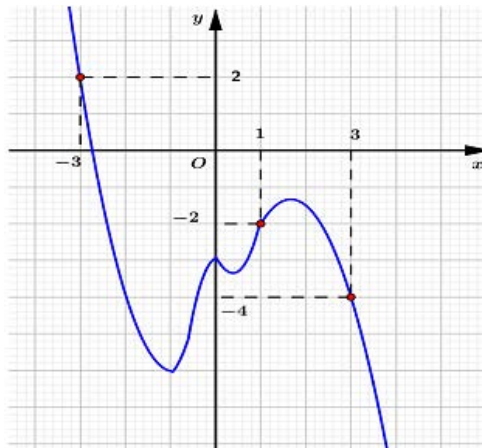
A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.

B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

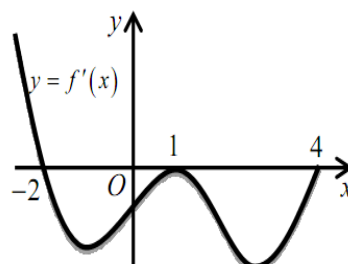
A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



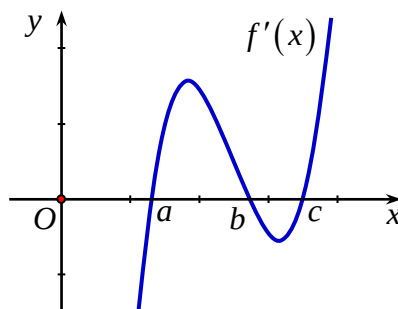
Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

- A. 21 B. 9. C. 3. D. 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 nghiệm. B. 1 nghiệm. C. 4 nghiệm. D. 3 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



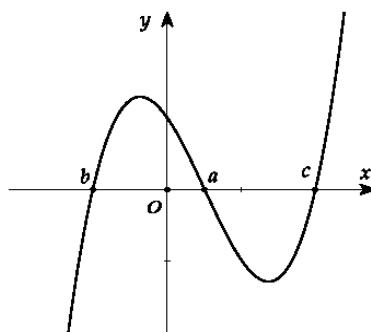
Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0); f(1); f(3); f(4)$?

- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

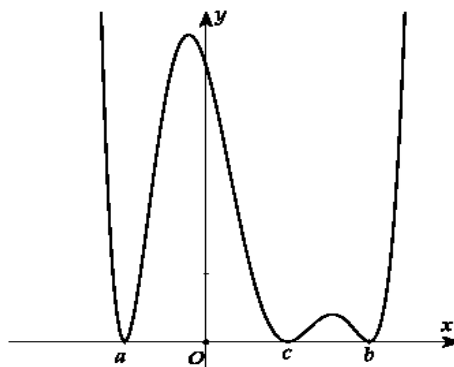
Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(a)$. B. $f(a) > f(b)$ và $f(c) < f(a)$.
C. $f(a) < f(b)$ và $f(c) > f(a)$. D. $f(a) < f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

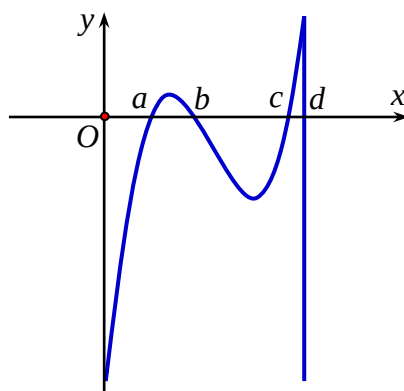
Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

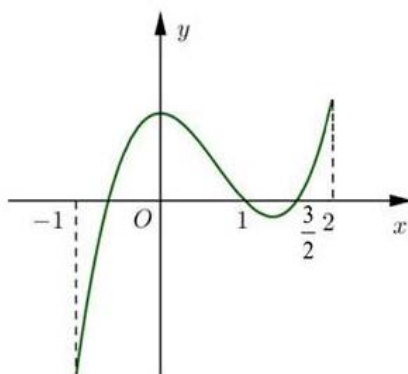
- A. $f(b) > f(c)$ và $f(c) > f(a)$.
 B. $f(b) > f(c)$ và $f(c) < f(a)$.
 C. $f(b) < f(c)$ và $f(c) > f(a)$.
 D. $f(b) < f(c)$ và $f(c) < f(a)$.

Câu 21: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A. $M + m = f(0) + f(c)$.
 B. $M + m = f(d) + f(c)$.
 C. $M + m = f(b) + f(a)$.
 D. $M + m = f(0) + f(a)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



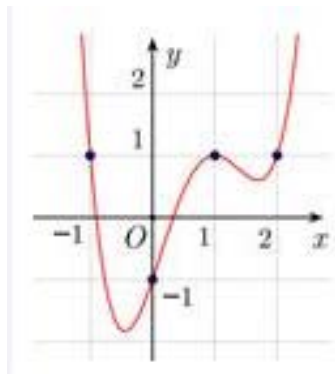
Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(-1)$.
 B. $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2)$.

C. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(1)$.

D. $\max_{[-1;2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Đặt $g(x) = f(x) - x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1) < g(1) < g(2)$.

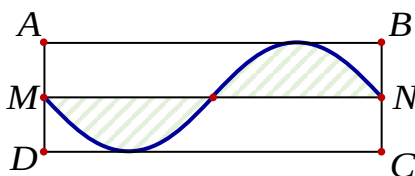
B. $g(2) < g(1) < g(-1)$.

C. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Câu 24: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$, $AD = 2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.



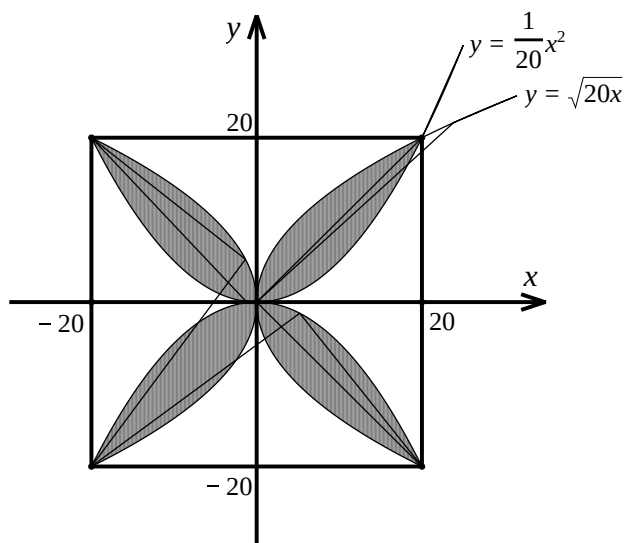
A. $4\pi - 1$.

B. $4(\pi - 1)$.

C. $4\pi - 2$.

D. $4\pi - 3$.

Câu 25: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

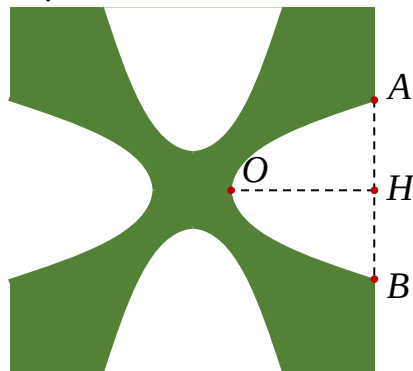
C. 250 cm^2 .

D. 800 cm^2 .

Câu 26: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng 8 m , chiều cao $12,5\text{ m}$. Diện tích của cổng là:

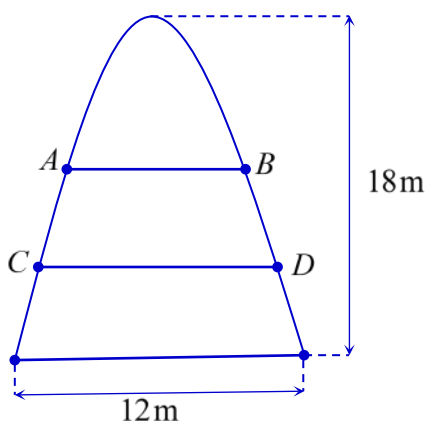
- A. $100(\text{m}^2)$. B. $200(\text{m}^2)$. C. $\frac{100}{3}(\text{m}^2)$. D. $\frac{200}{3}(\text{m}^2)$.

Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\text{ cm}$, $OH = 4\text{ cm}$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



- A. $\frac{160}{3}\text{ cm}^2$. B. $\frac{140}{3}\text{ cm}^2$. C. $\frac{14}{3}\text{ cm}^2$. D. 50 cm^2 .

Câu 28: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m , chiều rộng chân đế 12 m . Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25\text{ mét}$, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét . Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

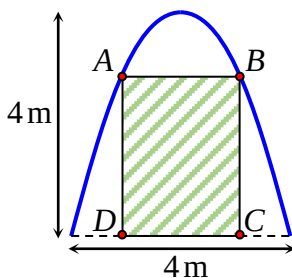
- A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. D. 6750000 đồng.

Câu 30: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá 1 m^2 cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

- A. 6500 . B. $\frac{55}{6} \cdot 10^3$. C. 5600 . D. 6050 .

Câu 31: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2

bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



- A. 900.000 đồng. B. 1.232.000 đồng. C. 902.000 đồng. D. 1.230.000 đồng.

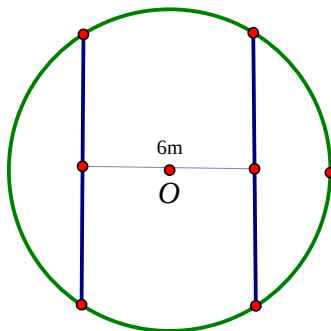
Câu 32: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

- A. 33750000 đồng. B. 12750000 đồng. C. 6750000 đồng. D. 3750000 đồng.

Câu 33: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

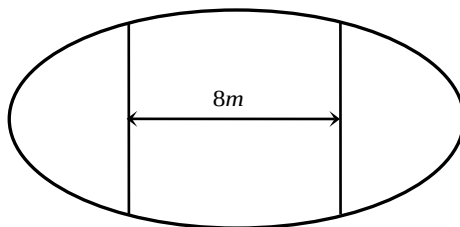
- A. $1,034 \text{ m}^2$. B. $1,574 \text{ m}^2$. C. $1,989 \text{ m}^2$. D. $2,824 \text{ m}^2$

Câu 34: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m . Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000 \text{ đồng} / \text{m}^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng. C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng.

Câu 35: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m . Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là $100.000 \text{ đồng} / \text{m}^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

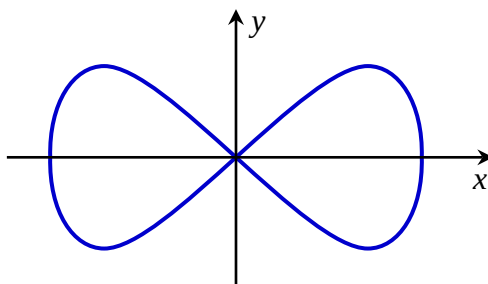


- A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng. C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Câu 36: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m , người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

- A. 3722. B. 7445. C. 7446. D. 3723

Câu 37: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

- A. $S = \frac{125}{6} (m^2)$ B. $S = \frac{125}{4} (m^2)$ C. $S = \frac{250}{3} (m^2)$ D. $S = \frac{125}{3} (m^2)$

Câu 38: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/ m^2 Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

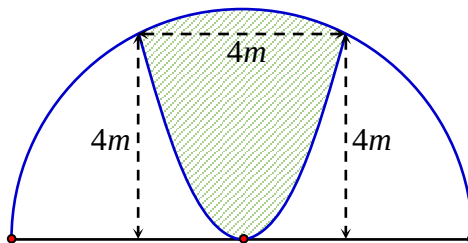
- A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng. C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng

Câu 39: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8m$ và rộng $8m$ (như hình vẽ)



- A. $\frac{28}{3}(m^2)$ B. $\frac{26}{3}(m^2)$ C. $\frac{128}{3}(m^2)$ D. $\frac{131}{3}(m^2)$

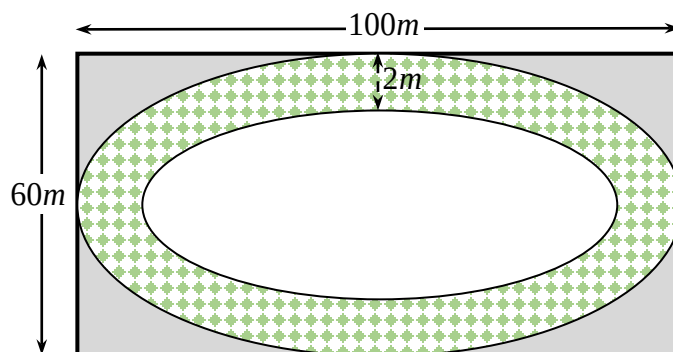
Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



- A. 3.895.000 (đồng). B. 1.948.000 (đồng). C. 2.388.000 (đồng). D. 1.194.000 (đồng).

Câu 41: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con

đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000.

B. 283904000.

C. 293804000.

D. 283604000.

Câu 42: Chọn A.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2 \int_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - 2 \int_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx.$$

Tính tích phân $I = 2 \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, (a, b \in \mathbb{R}^+)$.

Đặt $x = a \sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a \cos t dt$.

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi.$$

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 43: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a .

- A.** $a = 9$. **B.** $a = 4$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = 3$.

Câu 44: Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng $/1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng $/1m^2$. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

- A.** $6.060.000$ đồng. **B.** $5.790.000$ đồng. **C.** $3.270.000$ đồng. **D.** $3.000.000$ đồng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH CÓ ĐỒ THỊ ĐẠO HÀM

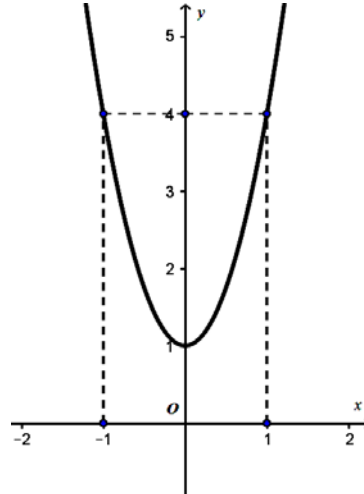
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$?

A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.



Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1.$$

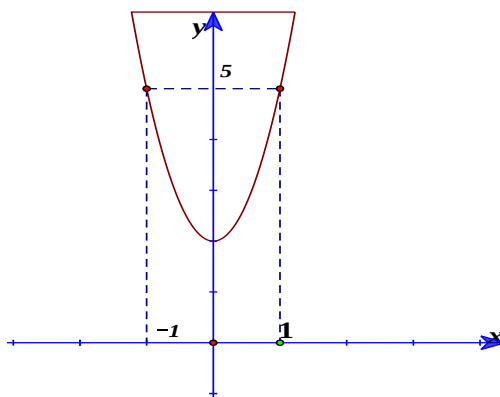
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox , $x = 4$, $x = 2$.

$$\text{Ta có } S = \int_2^4 (3x^2 + 1) dx = 58.$$

$$\text{Lại có: } S = \int_2^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^4 = f(4) - f(2).$$

$$\text{Do đó: } H = f(4) - f(2) = 58.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính $f(3) - f(1)$?



A. 24.

B. 28.

C. 26.

D. 21.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol có trục đối xứng là trục tung nên $b = 0$.

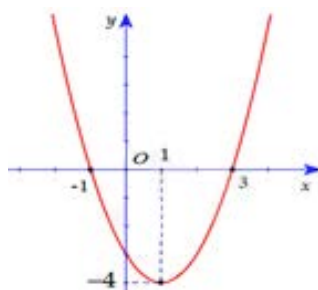
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 2 điểm $(1; 5), (0; 2)$ ta tìm được: $a = 1; c = 2$.

Suy ra: $f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + C$, đồ thị hàm số (C) đi qua gốc tọa độ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f(3) - f(2) = 21$.

Chọn D

$$\text{Hoặc: } f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f(3) - f(2) = \int_2^3 f'(x) dx = 21.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tìm phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. 2.

B. 27.

C. 29.

D. 35.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua 3 điểm $(-1; 0), (3, 0), (1, -4)$ ta tìm được: $a = \frac{1}{3}; b = -1; c = -3$.

$$\text{Suy ra: } f'(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C.$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = -9$ tại điểm có hoành độ dương nên ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3 \Rightarrow x = 3.$$

Như vậy (C) đi qua điểm $(3; -9)$ ta tìm được $C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

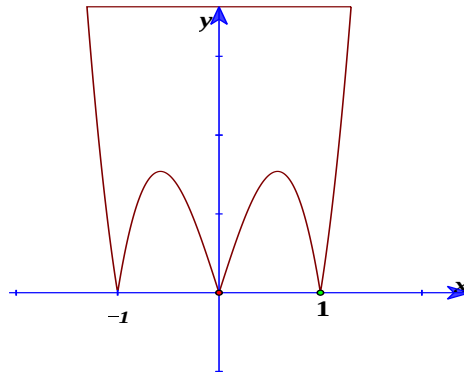
Xét phương trình hoành độ giao điểm và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$S = \int_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}} \left| \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right| dx = 29,25.$$

Chọn C

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a > 0$) có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y = |f'(x)|$ như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành?



A. $\frac{7}{15}$.

B. $\frac{8}{15}$.

C. $\frac{14}{15}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y = |f'(x)|$ và $a > 0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như sau:

Ta có

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua $(1; 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ ta tìm được

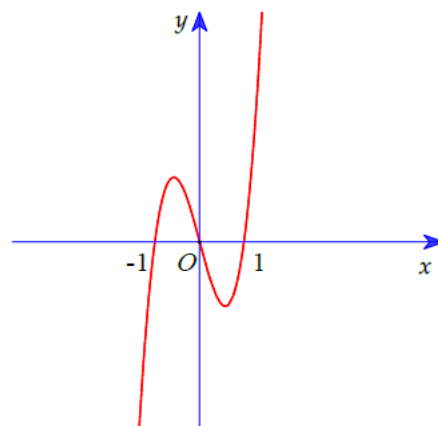
$$a = 1; b = -2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + C.$$

Do (C) tiếp xúc với trục hoành nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$. Do (C) đối xứng qua trục tung nên (C) tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm $(1; 0), (-1; 0)$.

Do đó: $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

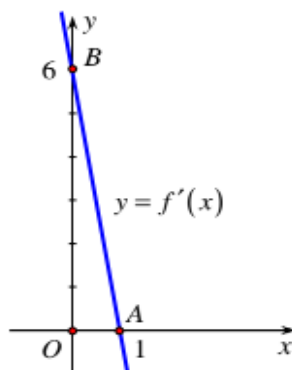
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^1 |x^4 - 2x^2 + 1| dx = \frac{16}{15}.$$



Chọn D

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) = 5$, tính giá trị của $f(1)$?



A. 0.

B. 3.

C. 8.

D. 11.

Hướng dẫn giải

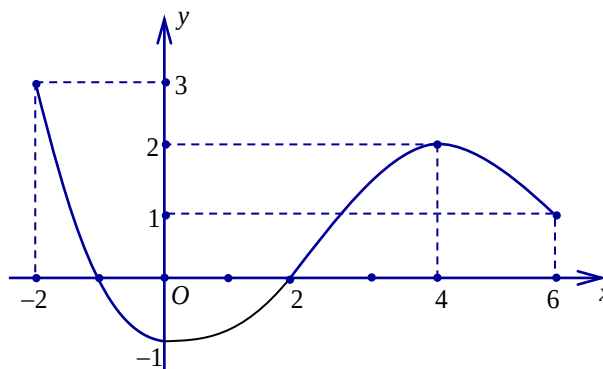
Cách 1: $f'(x) = ax + b$. Theo hình vẽ ta tìm được

$$f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + c$$

$$\text{Mà } f(0) = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow f(x) = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(1) = 8.$$

$$\text{Cách 2: } f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx = S_{OAB} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 + 5 = 8.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.



A. $\max_{[-2;6]} y = f(-2)$.

B. $\max_{[-2;6]} y = f(2)$.

C. $\max_{[-2;6]} y = f(6)$.

D. $\max_{[-2;6]} y = f(-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên:

x	-2	-1	2	6	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-2;6]} y = \max \{f(-1); f(6)\}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ là

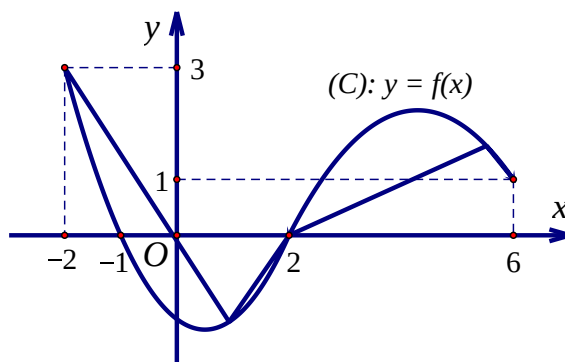
$$S_1 = -\int_{-1}^2 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-1}^2 = f(-1) - f(2).$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$ và $x = 6$ là

$$S_2 = \int_2^6 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^6 = f(6) - f(2).$$

Từ hình vẽ suy ra $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.

B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.

D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

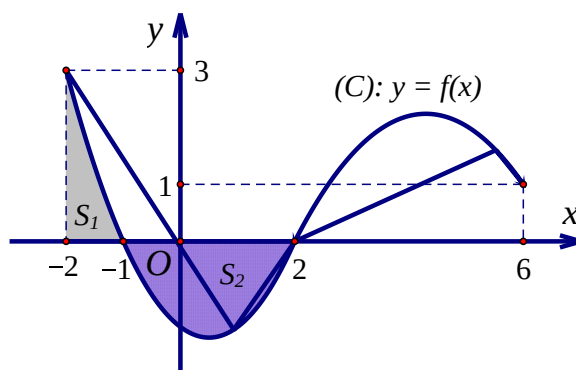
Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như sau:

x	-2	-1	2	6
$f'(x)$	0	+	0	+
$f(x)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Chỉ cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$ nữa là xong.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

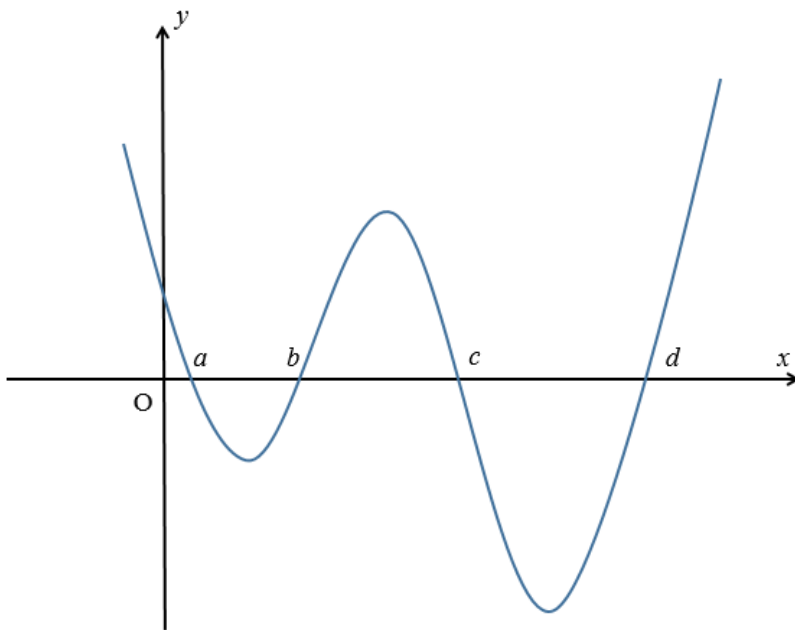
Ta có:

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx = f(-1) - f(-2).$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 |f'(x)| dx = -\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(-1) - f(2).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d (hình sau).

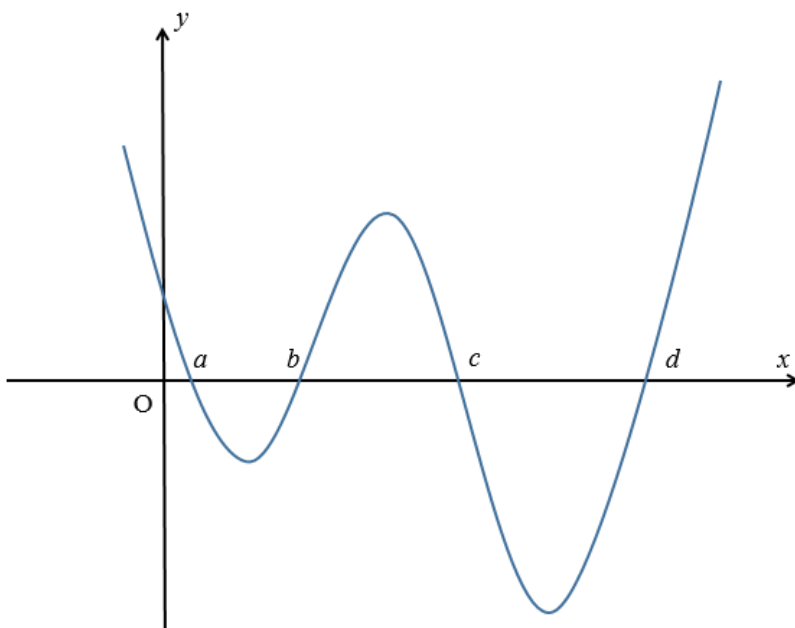


Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.** $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$. **B.** $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.
C. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$. **D.** $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.

Hướng dẫn giải

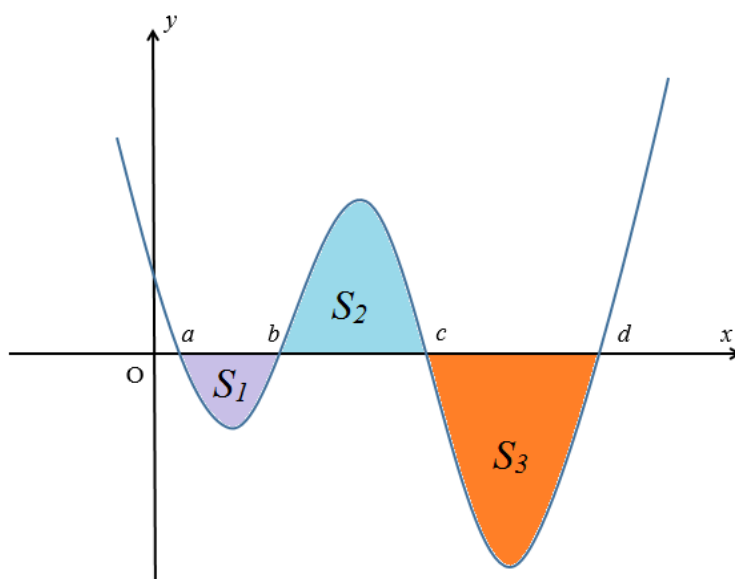
Chọn D



☒ Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có dấu của $f'(x)$ và BBT như sau

x	$-\infty$	a	b	c	d	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y		$\nearrow f(a)$ $\searrow f(b)$		$\nearrow f(c)$ $\searrow f(d)$		$\nearrow$

☑ Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $f(a)$ và $f(c)$ cùng lớn hơn $f(b)$ và $f(d)$ (1)



$$\text{☑} + S_1 < S_2 \Rightarrow \int_b^a f'(x) dx < \int_b^c f'(x) dx \Rightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b)$$

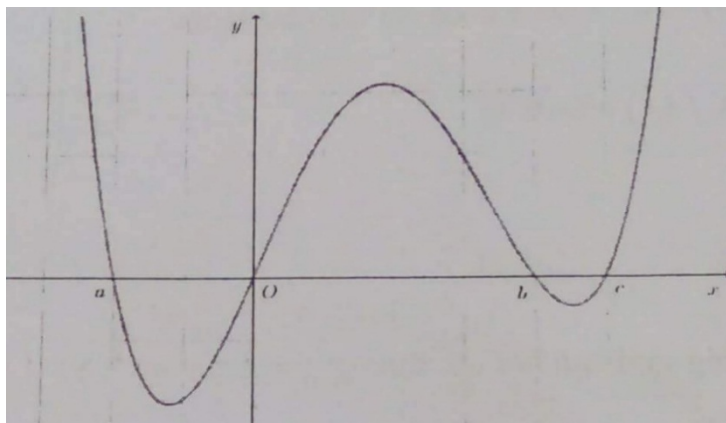
$$\Rightarrow f(a) < f(c) \text{ (2)}$$

$$\text{☑} + S_2 < S_3 \Rightarrow \int_b^c f'(x) dx < \int_d^c f'(x) dx \Rightarrow f(c) - f(b) < f(c) - f(d)$$

$$\Rightarrow f(b) > f(d) \text{ (3)}$$

$$\text{☑} \text{ Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $a, 0, b, c$ với $a < 0 < b < c$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(b) > f(a) > f(c)$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(b) > f(c) > f(a)$.

D. $f(c) > f(a) > f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

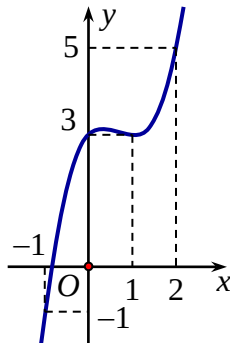
+ Từ hình vẽ ta thấy: $f'(x) < 0$ khi $x \in (b; c)$; $f'(x) > 0$ khi $x > c$ nên có $f(b) > f(c)$.

+ Ta lại có: $\int_a^0 [-f'(x)] dx < \int_0^b f'(x) dx - \int_b^c [-f'(x)] dx \Leftrightarrow \int_a^0 [-f'(x)] dx < \int_0^c f'(x) dx$

$\Rightarrow [-f(x)]_a^0 < f(x)_0^c \Rightarrow -f(0) + f(a) < f(c) - f(0) \Rightarrow f(a) < f(c)$.

+ Vậy $f(b) > f(c) > f(a)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình 2 dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$.

B. $g(-1) = g(1)$.

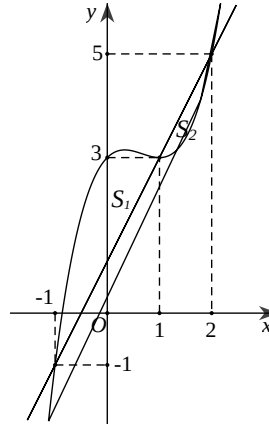
C. $g(1) = g(2)$.

D. $g(1) > g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f'(x) - (2x + 1)$. Khi đó hàm số $h(x)$ liên tục trên các đoạn $[-1; 1]$, $[1; 2]$ và có $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = h(x)$.



Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ y = f'(x) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ là

$$S_1 = \int_{-1}^1 |f'(x) - (2x + 1)| dx = \int_{-1}^1 [f'(x) - (2x + 1)] dx = g(x) \Big|_{-1}^1 = g(1) - g(-1).$$

Vì $S_1 > 0$ nên $g(1) > g(-1)$.

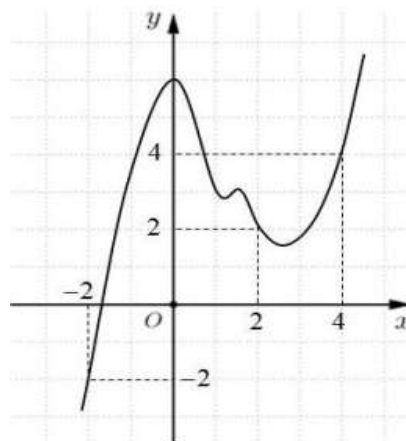
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ y = f'(x) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ là

$$S_2 = \int_1^2 |f'(x) - (2x + 1)| dx = \int_1^2 [(2x + 1) - f'(x)] dx = -g(x) \Big|_1^2 = g(1) - g(2).$$

Vì $S_2 > 0$ nên $g(1) > g(2)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.

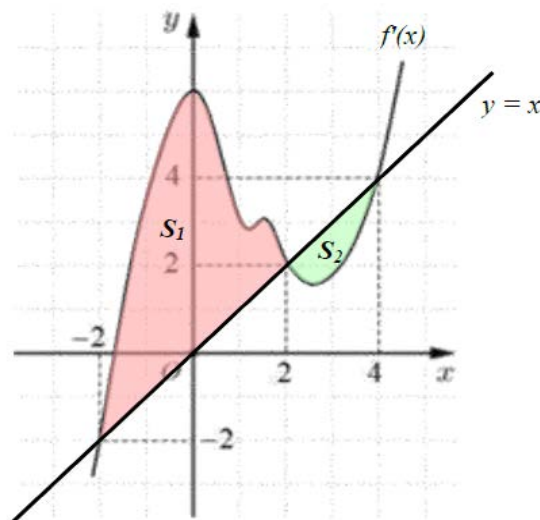
B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.

C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2x = 2[f'(x) - x]$. Ta vẽ đường thẳng $y = x$.



$$h(2) - h(-2) = \int_{-2}^2 h'(x) dx$$

$$= 2 \int_{-2}^2 [f'(x) - x] dx > 0$$

$$\Rightarrow h(2) > h(-2).$$

$$h(4) - h(2) = \int_2^4 h'(x) dx$$

$$= 2 \int_2^4 [f'(x) - x] dx < 0$$

$$\Rightarrow h(4) < h(2).$$

Hoặc

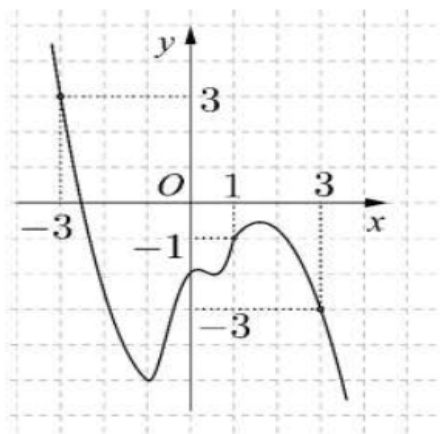
x	-2	2	4		
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$					

$$\begin{aligned} h(4) - h(-2) &= \int_{-2}^4 h'(x) dx = 2 \int_{-2}^4 [f'(x) - x] dx = 2 \int_{-2}^2 [f'(x) - x] dx + 2 \int_2^4 [f'(x) - x] dx \\ &= 2S_1 - 2S_2 > 0 \Rightarrow h(4) > h(-2). \end{aligned}$$

Như vậy ta có: $h(-2) < h(4) < h(2)$.

Chọn C

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



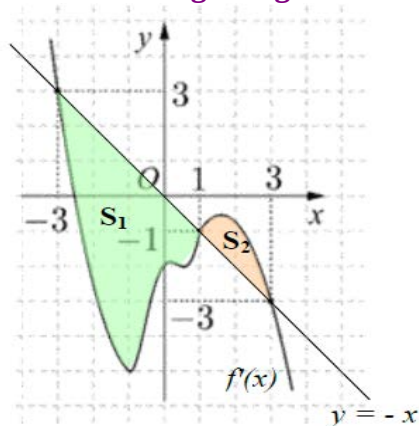
A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.

B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Hướng dẫn giải



Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2x = 2[f'(x) + x] \Rightarrow -g'(x) = 2[-x - f'(x)]$

Ta vẽ đường thẳng $y = -x$.

$$g(-3) - g(1) = -\int_{-3}^1 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^1 [-x - f'(x)] dx > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1).$$

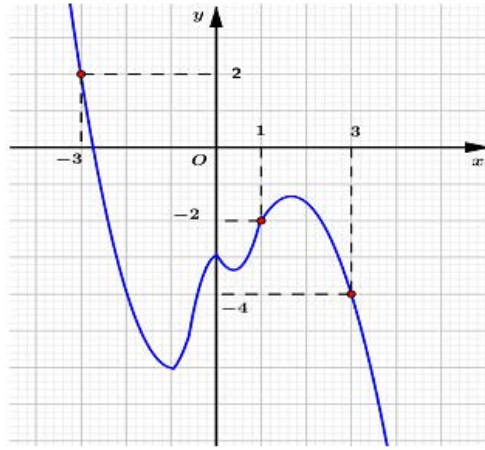
$$g(1) - g(3) = -\int_1^3 g'(x) dx = 2 \int_1^3 [-x - f'(x)] dx < 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$g(-3) - g(3) = -\int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^1 [-x - f'(x)] dx + 2 \int_1^3 [-x - f'(x)] dx = 2S_1 - 2S_2 > 0$$

$$\Rightarrow g(-3) > g(3).$$

Chọn B

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

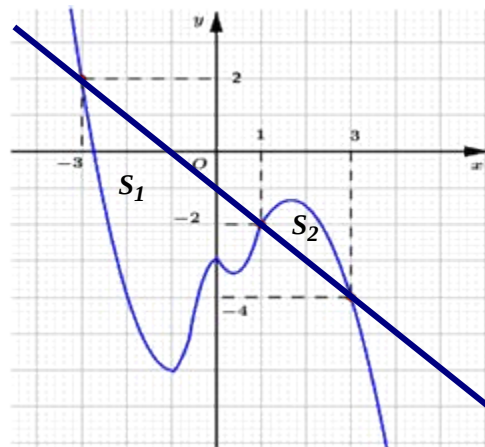
D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1) = 2[f'(x) + (x+1)] \Rightarrow -g'(x) = 2[-(x+1) - f'(x)]$$

Ta vẽ đường thẳng $y = -(x+1)$.



$$g(-3) - g(1) = -\int_{-3}^1 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^1 [-(x+1) - f'(x)] dx > 0 \Rightarrow g(-3) > g(1).$$

$$g(1) - g(3) = -\int_1^3 g'(x) dx = 2 \int_1^3 [-(x+1) - f'(x)] dx < 0 \Rightarrow g(3) > g(1).$$

$$g(-3) - g(3) = -\int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^1 [-(x+1) - f'(x)] dx + 2 \int_1^3 [-(x+1) - f'(x)] dx = 2S_1 - 2S_2 > 0$$

$$\Rightarrow g(-3) > g(3)$$

Như vậy ta có: $g(1) < g(3) < g(-3)$

Chọn A

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ cho như hình dưới đây. Đặt

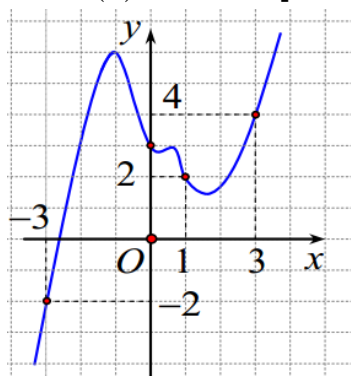
$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$.



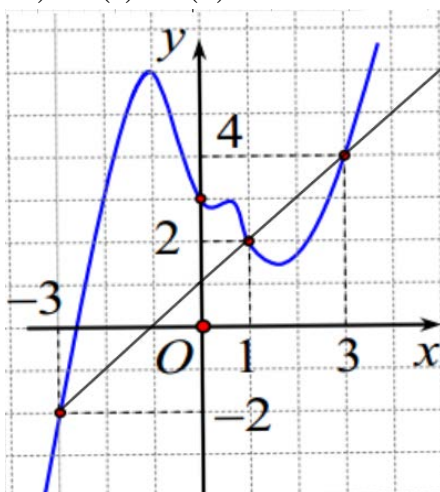
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - (2x+2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y = x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x=1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$



Xét $\int_{-3}^1 g'(x)dx = 2 \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)]dx > 0$

$\Leftrightarrow g(1) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(1) > g(-3)$.

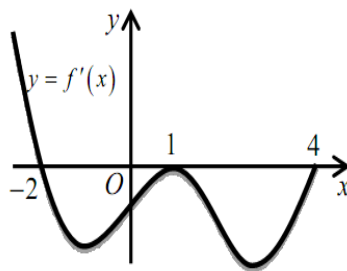
Tương tự xét $\int_1^3 g'(x)dx = 2 \int_1^3 [f'(x) - (x+1)]dx < 0 \Leftrightarrow g(3) - g(1) < 0 \Leftrightarrow g(3) < g(1)$.

Xét $\int_{-3}^3 g'(x)dx = 2 \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)]dx + 2 \int_1^3 [f'(x) - (x+1)]dx > 0$

$\Leftrightarrow g(3) - g(-3) > 0 \Leftrightarrow g(3) > g(-3)$. Vậy ta có $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Vậy $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = 9$ và $\int_1^4 |f'(x)| dx = 12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-2}^1 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-2}^1 = -f(1) + f(-2)$
 $\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9$.

Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$.

Như vậy $[-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$.

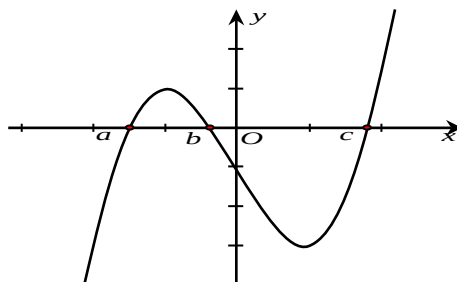
Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a) > 0$. Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 2 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 4 nghiệm.

D. 3 nghiệm.



Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$f(a)$ $f(b)$ $f(c)$				

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a). \quad \text{Do}$$

$f(a) > 0$ nên

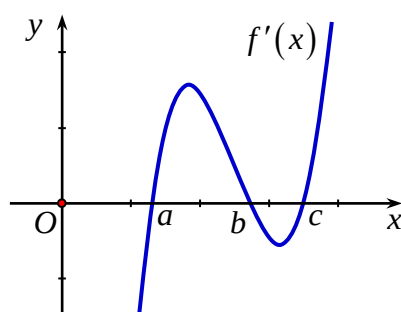
$f(c) > 0$: PT $f(x) = 0$ vô nghiệm.

$f(c) = 0$: PT $f(x) = 0$ có 1 nghiệm.

$f(c) < 0$: PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn A

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Hỏi phương trình $f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f(a) > 0$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+	
y	$f(a)$ $f(b)$ $f(c)$							

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx > 0 \Rightarrow f(c) > f(a) > 0 \Rightarrow \text{PT}$$

$f(x) = 0$ vô nghiệm.

Chọn D

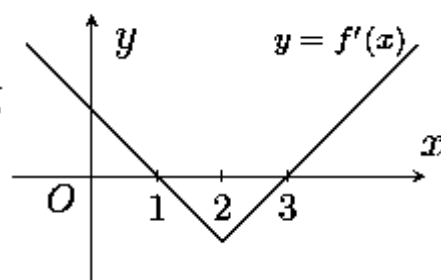
Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Số nào lớn nhất trong các số sau $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(4)$?

A. $f(0)$.

B. $f(1)$.

C. $f(3)$.

D. $f(4)$.



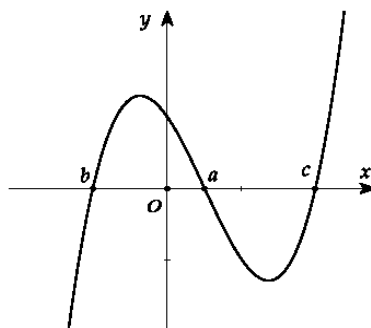
Hướng dẫn giải

x	0	1	3	4	
y'	+	0	-	0	+
y	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(4)$	

$$f(4) - f(1) = \int_1^4 f'(x) dx = \int_1^3 f'(x) dx + \int_3^4 f'(x) dx < 0 \Rightarrow f(4) < f(1).$$

Chọn B

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **B.** $f(a) > f(b)$ và $f(c) < f(a)$.
C. $f(a) < f(b)$ và $f(c) > f(a)$. **D.** $f(a) < f(b)$ và $f(c) < f(a)$.

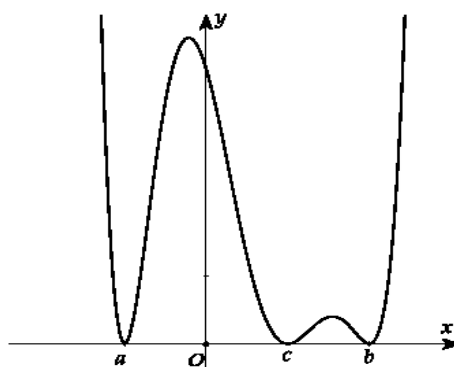
Hướng dẫn giải

$$f(a) - f(b) = \int_b^a f'(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x) dx < 0 \Leftrightarrow f(c) < f(a).$$

Chọn B

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $f(b) > f(c)$ và $f(c) > f(a)$. **B.** $f(b) > f(c)$ và $f(c) < f(a)$.
C. $f(b) < f(c)$ và $f(c) > f(a)$. **D.** $f(b) < f(c)$ và $f(c) < f(a)$.

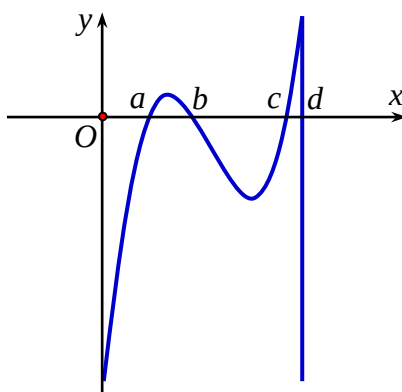
Hướng dẫn giải

$$f(b) - f(c) = \int_c^b f'(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(c).$$

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x) dx > 0 \Leftrightarrow f(c) > f(a).$$

Chọn A

Câu 21: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A.** $M + m = f(0) + f(c)$. **B.** $M + m = f(d) + f(c)$.
C. $M + m = f(b) + f(a)$. **D.** $M + m = f(0) + f(a)$.

Hướng dẫn giải

Ta có bảng biến thiên:

x	0	a	b	c	d		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$f(0)$ $f(a)$ $f(b)$ $f(c)$ $f(d)$						

So sánh $f(a); f(c)$

$$f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(c) < f(a) \Rightarrow m = f(c).$$

So sánh $f(0); f(b); f(d)$.

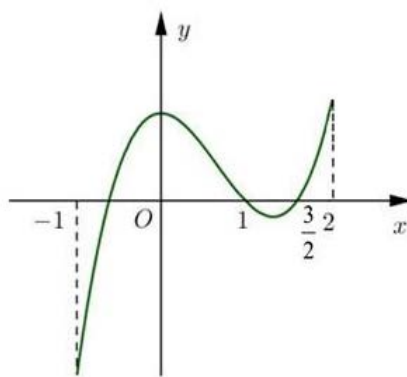
$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(x)dx = \int_0^a f'(x)dx + \int_a^b f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(b) < f(0).$$

$$f(d) - f(b) = \int_b^d f'(x)dx = \int_b^c f'(x)dx + \int_c^d f'(x)dx < 0 \Rightarrow f(d) < f(b).$$

$$\Rightarrow f(d) < f(b) < f(0) \Rightarrow M = f(0).$$

Chọn A

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(-1).$

B. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2).$

C. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(1).$

D. $\max_{[-1;2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right).$

Hướng dẫn giải

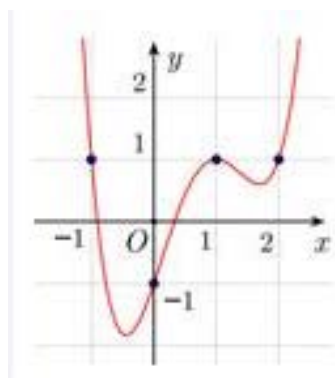
x	-1	a	1	$\frac{3}{2}$	2
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$f(-1)$ $f(a)$		$f(1)$ $f\left(\frac{3}{2}\right)$		$f(2)$

$$f(1) - f(-1) = \int_{-1}^1 f'(x) dx = \int_{-1}^a f'(x) dx + \int_a^1 f'(x) dx > 0 \Rightarrow f(1) > f(-1).$$

$$f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x) dx = \int_1^{1.5} f'(x) dx + \int_{1.5}^2 f'(x) dx > 0 \Rightarrow f(2) > f(1).$$

Chọn B

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Đặt $g(x) = f(x) - x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $g(-1) < g(1) < g(2)$.

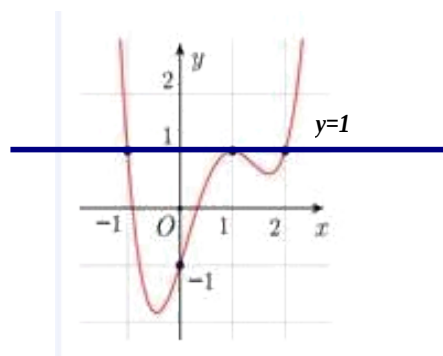
B. $g(2) < g(1) < g(-1)$.

C. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. Ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1$.



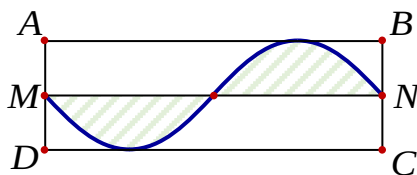
$$\text{Ta có: } g(1) - g(-1) = \int_{-1}^1 g'(x) dx = \int_{-1}^1 [f'(x) - 1] dx < 0 \Rightarrow g(1) < g(-1).$$

$$g(2) - g(1) = \int_1^2 g'(x) dx = \int_1^2 [f'(x) - 1] dx < 0 \Rightarrow g(2) < g(1).$$

Chọn B

BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Câu 24: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen Được giới hạn bởi cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$, $AD = 2(m)$. Tính diện tích phần còn lại.



A. $4\pi - 1$.

B. $4(\pi - 1)$.

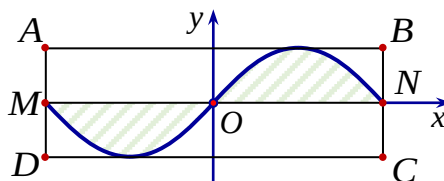
C. $4\pi - 2$.

D. $4\pi - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Chọn hệ tọa độ Oxy (như hình bên). Khi đó

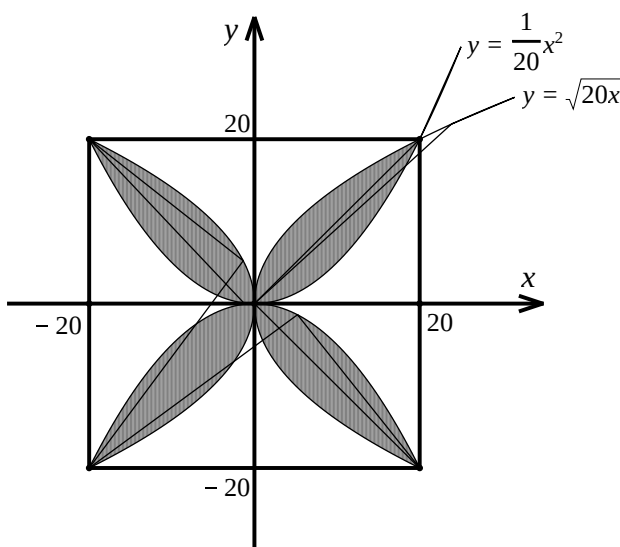


Diện tích hình chữ nhật là $S_1 = 4\pi$.

Diện tích phần đất được tô màu đen là $S_2 = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 4$.

Tính diện tích phần còn lại: $S = S_1 - S_2 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Câu 25: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

C. 250 cm^2 .

D. 800 cm^2 .

Hướng dẫn giải

Chọn B

Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20} x^2 \right) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{20} \sqrt{x^3} - \frac{1}{60} x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 26: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8m$, chiều cao $12,5m$. Diện tích của cổng là:

A. $100(m^2)$.

B. $200(m^2)$.

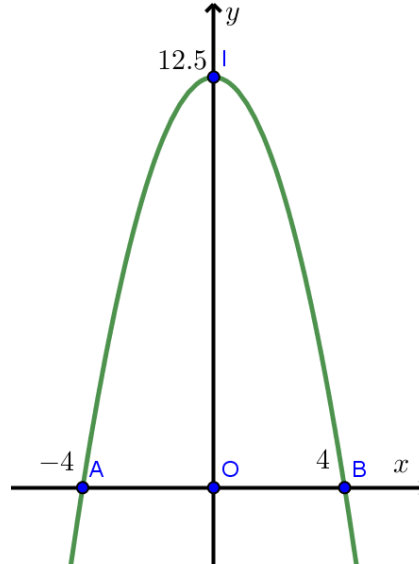
C. $\frac{100}{3}(m^2)$.

D. $\frac{200}{3}(m^2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1:



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

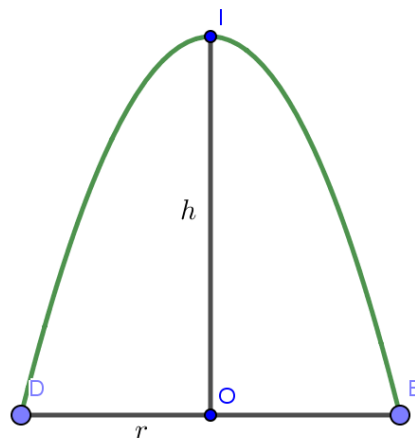
Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32}$.

Do đó $(P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \int_{-4}^4 \left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5 \right) dx = \frac{200}{3}(m^2)$.

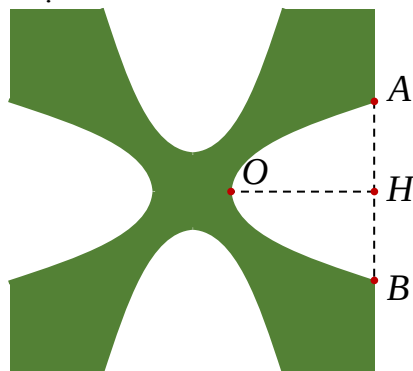
Cách 2:



Ta có parabol đã cho có chiều cao là $h = 12,5m$ và bán kính đáy $OD = OE = 4m$.

Do đó diện tích parabol đã cho là: $S = \frac{4}{3}rh = \frac{200}{3}(m^2)$.

Câu 27: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

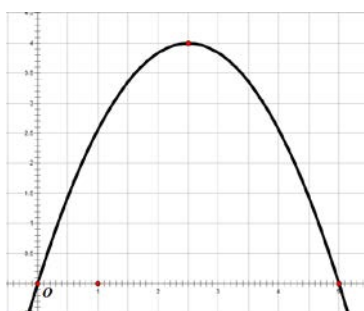
B. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{14}{3} \text{ cm}^2$.

D. 50 cm^2 .

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng

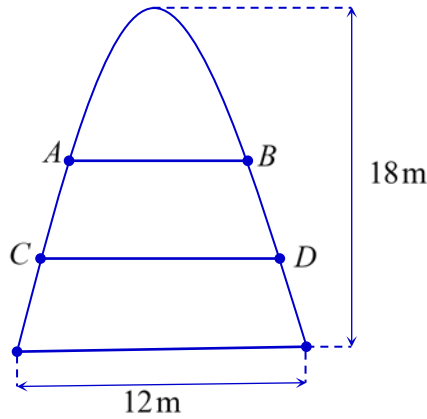
$$x = 0, x = 5 \text{ là } S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}.$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

Câu 28: Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{5}$.

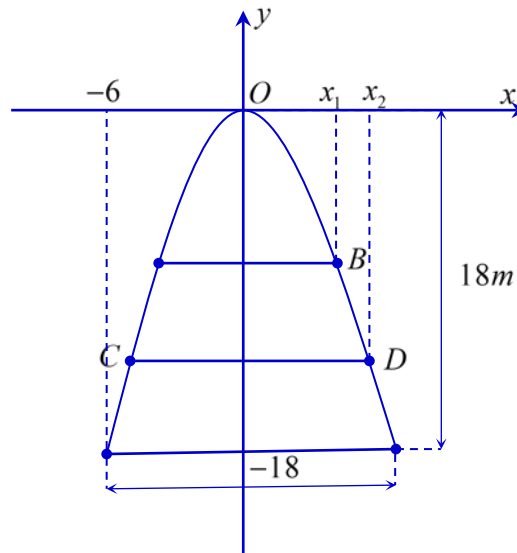
C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

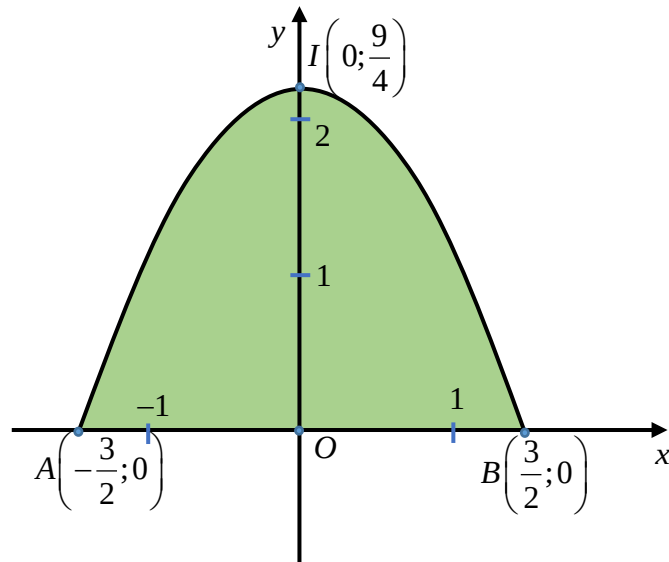
Câu 29: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

- A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. D. 6750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

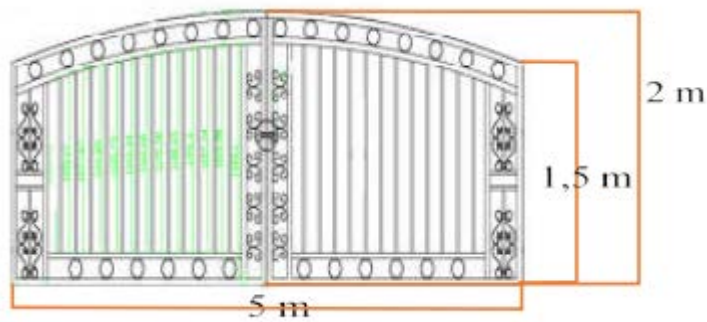
Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

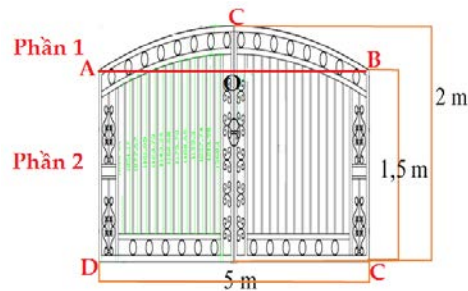
Câu 30: Ba Tí muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng là một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660.000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là:

- A. 6500. B. $\frac{55}{6} \cdot 10^3$. C. 5600. D. 6050.



Hướng dẫn giải

Chọn D



Từ hình vẽ ta chia cửa rào sắt thành 2 phần như sau:

$$\text{Khi đó } S = S_1 + S_2 = S_1 + 5.1,5 = S_1 + 7,5$$

Để tính S_1 ta vận dụng kiến thức diện tích hình phẳng của tích phân.

Gắn hệ trục Oxy trong đó O trùng với trung điểm AB , $OB \subset Ox$, $OC \subset Oy$,

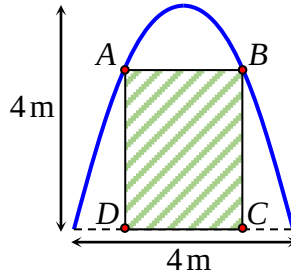
Theo đề bài ta có đường cong có dạng hình Parabol. Giả sử $(P): y = ax^2 + bx + c$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} A\left(-\frac{5}{2}; 0\right) \in (P) \\ B\left(\frac{5}{2}; 0\right) \in (P) \\ C\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{4}a - \frac{5}{2}b + c = 0 \\ \frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Diện tích } S_2 = 2 \int_0^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{10}{6} (\text{m}^2) \Rightarrow S = \frac{55}{6} (\text{m}^2).$$

$$\text{Vậy giá tiền cửa sắt là: } \frac{55}{6} \times 660.000 = 6.050.000 \text{ (đồng).}$$

Câu 31: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

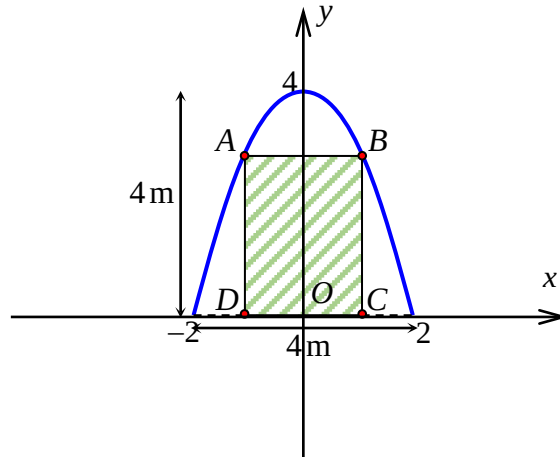


- A. 900.000 đồng. B. 1.232.000 đồng. C. 902.000 đồng. D. 1.230.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$ và cắt trục hoành tại $(2; 0)$ nên:

$$\begin{cases} b = 4 \\ a \cdot 2^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Do đó, phương trình parabol là $y = -x^2 + 4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là

$$S_1 = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

Gọi $C(t; 0) \Rightarrow B(t; 4 - t^2)$ với $0 < t < 2$.

Ta có $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_2 = CD \cdot BC = 2t \cdot (4 - t^2) = -2t^3 + 8t.$$

Diện tích phần trang trí hoa văn là

$$S = S_1 - S_2 = \frac{32}{3} - (-2t^3 + 8t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ với $0 < t < 2$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 6t^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0; 2) \\ t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0; 2) \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên

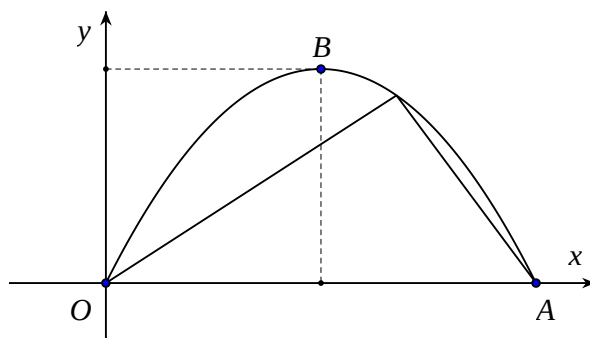
Suy ra diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}.200000 \approx 902000$ đồng.

Câu 32: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

- A.** 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parabol là $(P): (P): y = ax^2 + bx + c$

Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P): y = -x^2 + 3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}$

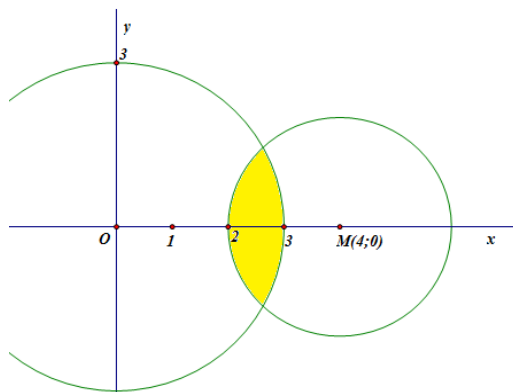
• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000 = 6750000$ (đồng)

Câu 33: Trên cánh đồng cỏ có 2 con bò được cột vào 2 cây cọc khác nhau. Biết khoảng cách giữa 2 cọc là 4 mét còn 2 sợi dây cột 2 con bò dài 3 mét và 2 mét. Tính phần diện tích mặt cỏ lớn nhất mà 2 con bò có thể ăn chung (lấy giá trị gần đúng nhất).

- A.** 1,034 m^2 . **B.** 1,574 m^2 . **C.** 1,989 m^2 . **D.** 2,824 m^2

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O, M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{9-x^2}$ và $y = \sqrt{4-(x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2} = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4+8x-16=9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S = 2 \left[\int_2^{\frac{21}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2} dx + \int_{\frac{21}{8}}^3 \sqrt{9-x^2} dx \right] \approx 1,989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy.

Chọn C

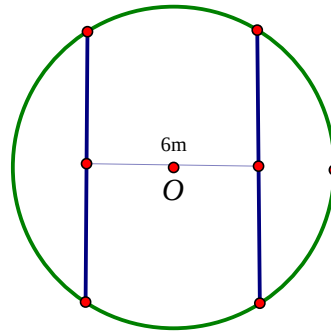
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-x^2} & (E_2) \end{cases}$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường $(E_1); (E_2); x = -4; x = 4$ và diện tích của dải vườn là $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Khi đó số tiền là $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \approx 7.653.000$.

Câu 34: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng. C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3$; $x = 3$

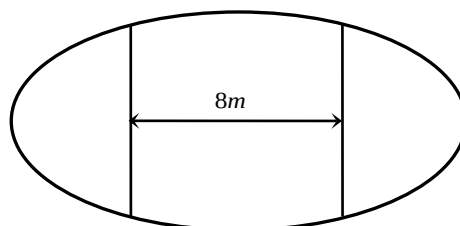
$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$$

Đặt $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18 (\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng

Câu 35: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng / $1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Câu 36: Một người có mảnh đất hình tròn có bán kính 5m, người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được giá 100 nghìn. Tuy nhiên cần có khoảng trống để dựng chòi và đồ dùng nên người này căng sợi dây 6m sao cho 2 đầu mút dây nằm trên đường tròn xung quanh mảnh đất. Hỏi người này thu hoạch được bao nhiêu tiền (tính theo đơn vị nghìn và bỏ phần số thập phân).

A. 3722.

B. 7445.

C. 7446.

D. 3723

Hướng dẫn giải

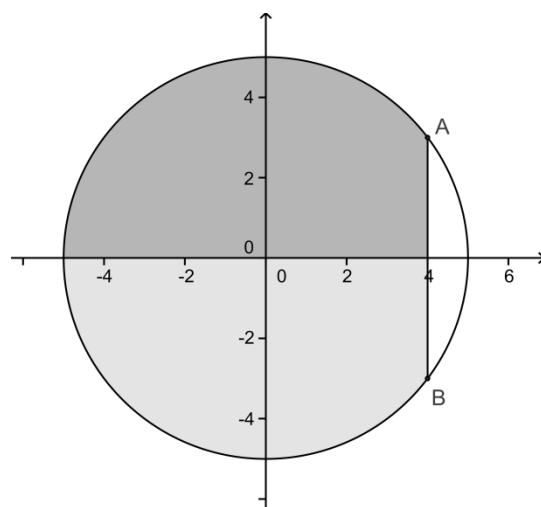
Đặt hệ trục tọa độ 4349582 như hình vẽ.

Phương trình đường tròn của miếng đất sẽ là $x^2 + y^2 = 25$

Diện tích cần tính sẽ bằng 2 lần diện tích phần tô đậm phía trên.

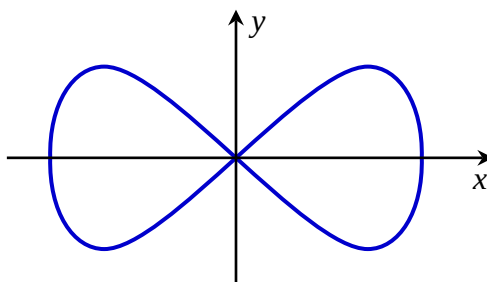
Phần tô đậm được giới hạn bởi đường cong có phương trình là $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox ; $x = -5$; $x = 4$ (trong đó giá trị 4 có được dựa vào bán kính bằng 5 và độ dài dây cung bằng 6)

Vậy diện tích cần tính là $S = 2 \int_{-5}^4 \sqrt{25 - x^2} dx \approx 74,45228...$



Chọn B

Câu 37: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \frac{125}{6} (m^2)$ B. $S = \frac{125}{4} (m^2)$ C. $S = \frac{250}{3} (m^2)$ D. $S = \frac{125}{3} (m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x \in [0; 5]$

$$\text{Nên } S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25-x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^2)$$

Câu 38: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m² Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. B. 8142232 đồng. C. 4821232 đồng. D. 4821322 đồng

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36-x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3; x = 3$

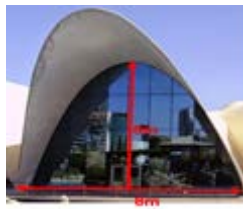
$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36-x^2} dx$$

Đặt $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18 (\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là 70000.S $\approx$ 4821322 đồng

Câu 39: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao 8m và rộng 8m (như hình vẽ)



A. $\frac{28}{3}(m^2)$

B. $\frac{26}{3}(m^2)$

C. $\frac{128}{3}(m^2)$

D. $\frac{131}{3}(m^2)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

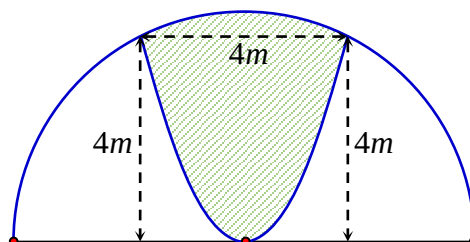
Các phương án nhiễu:

A. HS tính tích phân sai $S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| dx = \frac{28}{3} (m^2)$

B. HS tính tích phân sai $S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8 \right| dx = \frac{26}{3} (m^2)$

D. HS nhầm $a = -\frac{1}{2}$, $b = 8$, $c = 0 \Rightarrow S = \int_{-4}^4 \left| -\frac{1}{2}x^2 + 8x \right| dx = \frac{131}{3} (m^2)$

Câu 40: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



A. 3.895.000 (đồng).

B. 1.948.000 (đồng).

C. 2.388.000 (đồng).

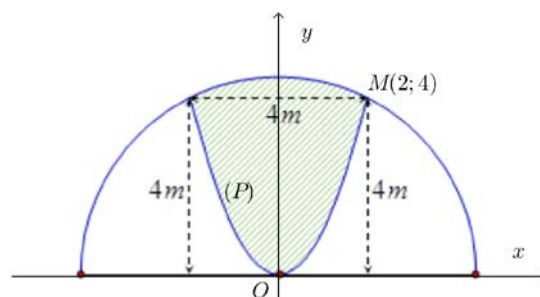
D. 1.194.000 (đồng).

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm M(2;4) do đó: $4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$.



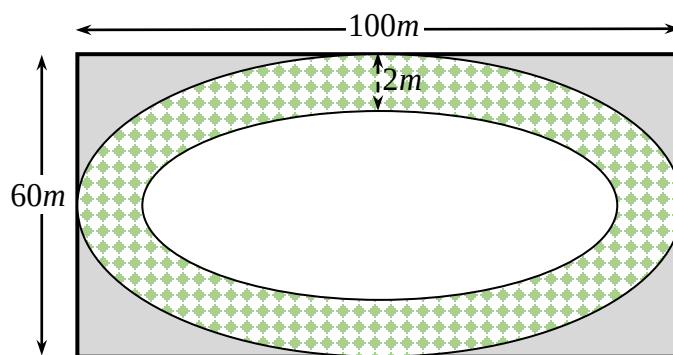
Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn. (phần tô màu)

Ta có công thức $S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{20-x^2} - x^2) dx \approx 11,94m^2$.

Vậy phần diện tích trống cỏ là $S_{trôngcỏ} = \frac{1}{2}S_{hinhhtròn} - S_1 \approx 19,47592654$

Vậy số tiền cần có là $S_{trôngxỏ} \times 100000 \approx 1.948.000$ (đồng).đồng.

Câu 41: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là 60m người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viên ngoài và viên trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viên ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2m. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000.

B. 283904000.

C. 293804000.

D. 283604000.

Hướng dẫn giải:

Câu 42: Chọn A.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viên ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viên trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2 \int_{-50}^{50} 30 \sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - 2 \int_{-48}^{48} 28 \sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx.$$

Tính tích phân $I = 2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, (a, b \in \mathbb{R}^+).$

Đặt $x = a \sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a \cos t dt.$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

Khi đó $I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$

$$= ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

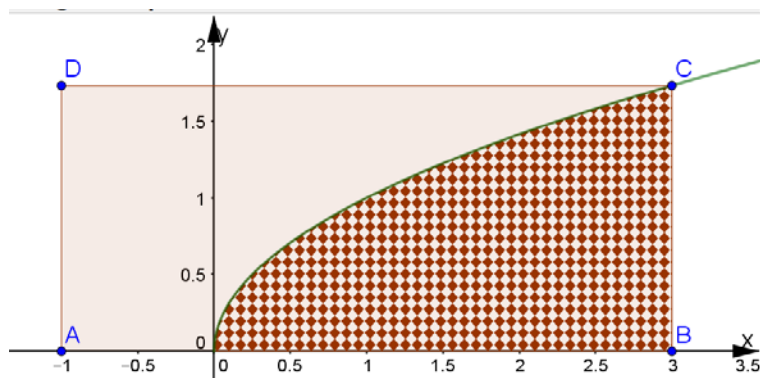
Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi.$

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Câu 43: Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a .

- A.** $a = 9.$ **B.** $a = 4.$ **C.** $a = \frac{1}{2}.$ **D.** $a = 3.$

Hướng dẫn giải:



Chọn D

Gọi $ACBD$ là hình chữ nhật với AC nằm trên trục Ox , $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $B(a; \sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ACBD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1 , S_2 . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và trục Ox , $x = 0, x = a$ và S_1 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2 .

Tính diện tích $S_2 = \int_0^a \sqrt{x} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$; Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \sqrt{a}$.

Do đó $S_2 = \int_0^{\sqrt{a}} 2t^2 dt = \left(\frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ACBD$ có $AC = a+1; AD = \sqrt{a}$ nên
 $S_1 = S_{ACBD} - S_2 = \sqrt{a}(a+1) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$

Do đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên
 $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3$ (Do $a > 0$)

- Câu 44:** Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng $4m$ (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng / $1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/ $1m^2$. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)
- A.** 6.060.000 đồng. **B.** 5.790.000 đồng. **C.** 3.270.000 đồng. **D.** 3.000.000 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Vậy diện tích phần $S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$

Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là

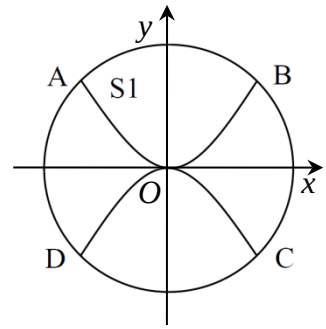
$$S_1 + S_2 = 2 \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \approx 15,233...$$

Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là:

$$15,233 \times 150.000 + \left(\pi (2\sqrt{2})^2 - 15,233 \right) \times 100.000 \approx 3.274.924$$

đồng.

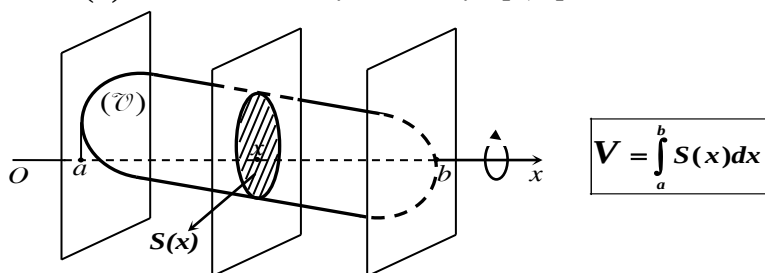
Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.



ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

1) Thể tích vật thể:

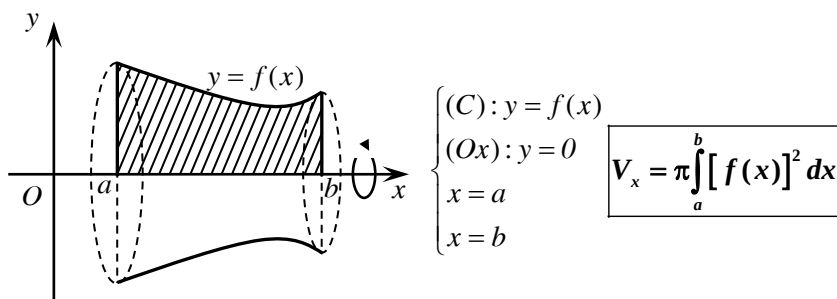
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x) dx$

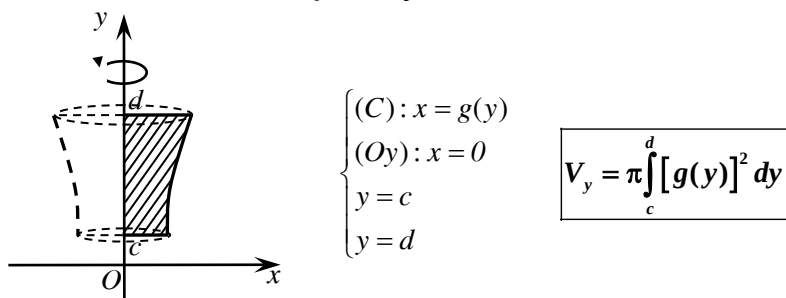
2) Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Chú ý:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

THỂ TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐỒ THỊ (TRÒN XOAY)

PHƯƠNG PHÁP:

. Tính thể tích khối tròn xoay:

Trường hợp 1. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$,

$x = a$ và $x = b$ ($a < b$) quay quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Trường hợp 2. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$ ($a < b$) **quay quanh trục Ox** là $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

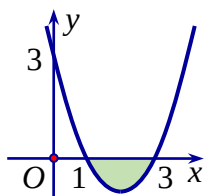
BÀI TẬP

Dạng 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$; $y = 0$ và $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox .

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. B. $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.
C. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. D. $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$. B. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.
C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$. D. $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C) . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx$. B. $V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx$. C. $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx$. D. $V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx$.

Câu 5. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx.$

B. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx.$

C. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx.$

D. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V = \frac{8\pi}{15}$

B. $V = \frac{4\pi}{3}$

C. $V = \frac{15\pi}{8}$

D. $V = \frac{7\pi}{8}$

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

A. $V = 60\pi.$

B. $30\pi.$

C. $\frac{1188}{25}\pi.$

D. $\frac{1416}{25}\pi.$

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$

B. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

C. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

D. $\frac{\pi e^2}{2}.$

Câu 9. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn (C): $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

A. $V = 6\pi.$

B. $V = 6\pi^3.$

C. $V = 3\pi^2.$

D. $V = 6\pi^2.$

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = a$ với $a \in (0; \frac{\pi}{2})$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng này xung quanh trục Ox là

A. $-\pi(a - \tan a)$

B. $\pi(a - \tan a)$

C. $-\pi \ln(\cos a)$

D. $\pi \ln(\cos a)$

Câu 11. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn (C): $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$ quanh trục Ox.

A. $V = 2\pi^2$ (đvtt).

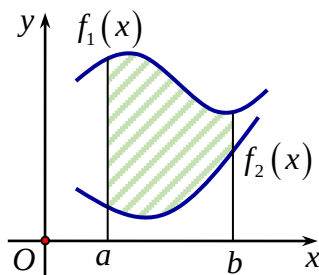
B. $V = 6\pi^2$ (đvtt).

C. $V = \pi^2$ (đvtt).

D. $V = 6\pi$ (đvtt).

Dạng 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = f(x)$ và $y = g(x)$ quay quanh trục Ox.

Câu 12. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

$$\text{C. } V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.$$

Câu 13. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

$$\text{A. } V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$$

$$\text{C. } V = \int_0^1 (2x+1) dx.$$

$$\text{D. } V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$$

Câu 14. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

$$\text{A. } V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$$

$$\text{D. } V = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$$

Câu 15. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xe^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

$$\text{A. } V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^1 x e^x dx.$$

$$\text{C. } V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

$$\text{A. } V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx.$$

$$\text{B. } V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx.$$

$$\text{C. } V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx.$$

Câu 17. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$; $y=0$; $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

$$\text{A. } V = \frac{8}{3}.$$

$$\text{B. } V = \frac{32}{5}.$$

$$\text{C. } V = \frac{8\pi}{3}.$$

$$\text{D. } \frac{32\pi}{5}$$

Câu 18. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=x^2$ và $y=x+2$ quanh trục Ox là

$$\text{A. } \frac{72\pi}{10} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{B. } \frac{72\pi}{5} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{C. } \frac{81\pi}{10} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{D. } \frac{81\pi}{5} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 19. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

$$\text{A. } V = \int_0^1 e^{2x} dx.$$

$$\text{B. } V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

$$\text{C. } V = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

$$\text{D. } V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$$

Câu 20. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox .

A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
 C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Câu 21. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{15}$. D. $\frac{4\pi}{15}$.

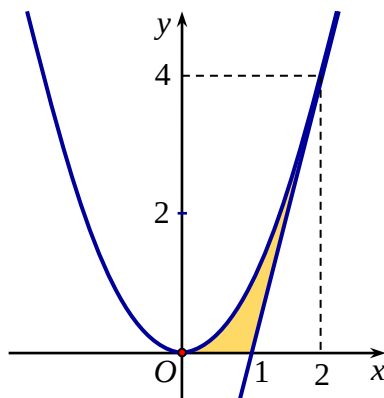
Câu 22. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Khi đó $a+b$ có kết quả là:

A. 11 B. 17 C. 31 D. 25

Câu 23. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $y = g(x) = \frac{x^2}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được tạo thành khi quay D quanh trục Ox ? Thể tích được viết dưới dạng $T = m\pi^2 + n\pi$; $m, n \in \mathbb{R}$ thì tổng giá trị $m+n$ là?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{13}{20}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 24. Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{32\pi}{5}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 25. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy = 4$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V = 8\pi$. B. $V = 16\pi$. C. $V = 10\pi$. D. $V = 12\pi$.

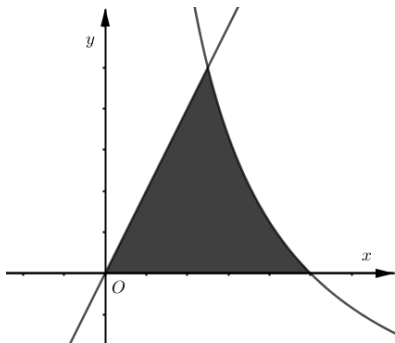
Câu 26. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$. B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$. C. $\frac{e^4\pi}{2}$. D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$.

Câu 27. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 11. B. 17. C. 31. D. 25.

Câu 28. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2x$, $y = \frac{1-x}{x}$, $y = 0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên).



Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.

- A. $V = \pi \left(\frac{5}{3} - 2 \ln 2 \right)$. B. $V = \pi \left(\frac{5}{3} + 2 \ln 2 \right)$. C. $V = \pi \left(2 \ln 2 - \frac{2}{3} \right)$. D.

$V = \pi \left(2 \ln 2 + \frac{2}{3} \right)$.

Câu 29. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox .

- A. $\frac{32\pi}{5}$. B. $\frac{32\pi}{7}$. C. $\frac{32\pi}{15}$. D. $\frac{22\pi}{5}$.

Câu 30. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

- A. $2\pi \ln 2$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{3}{4} - 1$. D. $2 \ln 2$.

Câu 31. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, $(a > 1)$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $V = \left(1 - \frac{1}{a} \right)$. B. $V = \left(1 - \frac{1}{a} \right) \pi$. C. $V = \left(1 + \frac{1}{a} \right) \pi$. D. $V = \left(1 + \frac{1}{a} \right)$.

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{32\pi}{15}$. B. $\frac{64\pi}{15}$. C. $\frac{21\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 33. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .

A. $V = \frac{9\pi}{10}$.

B. $V = \frac{3\pi}{10}$.

C. $V = \frac{\pi}{10}$.

D. $V = \frac{7\pi}{10}$.

Câu 34. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \frac{1}{3} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

B. $V = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}$.

C. $V = \frac{1}{2} + \frac{e-1}{e}\pi$.

D. $V = \frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $x = g(y)$; $x = f(y)$ quay xung quanh trục Oy

Câu 35. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}$.

B. $\frac{32\pi}{15}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{7}{6}$.

B. $V = \frac{7\pi^2}{6}$.

C. $V = \frac{7\pi}{6}$.

D. $V = \frac{7\pi}{3}$.

Câu 37. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x = e - 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox .

A. $e - 2$.

B. 2π .

C. πe .

D. $\pi(e - 2)$.

Câu 38. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y = (2x - 1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

A. $V = \int_1^e (2x - 1)^2 \ln x dx$.

B. $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^e (2x - 1)^2 \ln x dx$.

C. $V = \int_{\frac{1}{2}}^e (2x - 1)^2 \ln x dx$.

D. $V = \pi \int_1^e (2x - 1)^2 \ln x dx$.

Câu 39. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1 - \frac{\pi}{4}$.

B. π^2 .

C. $\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

D. $\frac{\pi^2}{4} + \pi$.

Câu 40. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

B. $\pi(e^2 + 1)$.

C. $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$.

D. $\pi(e^2 - 1)$.

Câu 41. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

- A. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. B. $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$. C. $V = \frac{\pi^2}{4}$. D. $V = \frac{\pi}{4}$.

Câu 42. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\frac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0) = 2$ thì $2a + 5b$ bằng

- A. 8. B. 11. C. 9. D. 10.

Câu 43. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{16}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 44. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $32 + 2\sqrt{15}$. B. $\frac{124\pi}{3}$. C. $\frac{124}{3}$. D. $(32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Câu 45. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ là:

- A. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$. B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. C. $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$. D. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

Câu 46. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

- A. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). B. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). C. $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt). D. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 47. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \pi - 1$. B. $V = \pi + 1$. C. $V = \pi(\pi - 1)$. D. $V = \pi(\pi + 1)$.

Câu 48. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ là:

- A. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$. B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$. C. $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$. D. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

Câu 49. Thể tích của vật tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \tan x$, trục Ox , đường thẳng $x = 0$, đường thẳng $x = \frac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

- A. $V = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. B. $V = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$. C. $V = \pi\sqrt{3} + \frac{\pi^2}{3}$. D. $V = \pi\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{3}$.

Câu 50. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15\pi}{8}$. C. $\frac{21}{16}$. D. $\frac{21\pi}{16}$.

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi}{2}$. B. $V = \frac{\pi}{3}$. C. $V = \frac{\pi}{6}$. D. $V = \pi$.

Câu 52. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

- A. π . B. $\pi - 1$. C. 3π . D. 2π .

Câu 53. Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng

- A. $V = \frac{19\pi}{15}$. B. $V = \frac{13\pi}{15}$. C. $V = \frac{17\pi}{15}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Câu 54. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ và trục Ox , quay (S) xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

- A. $V = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $V = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$. C. $V = \frac{4\pi}{3}$. D. $V = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 55. Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh parabol $y = 2x^2$ (với $x \geq 0$), đường thẳng $y = -x + 3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình (H) khi quay quanh trục Ox bằng

- A. $V = \frac{52\pi}{15}$. B. $V = \frac{17\pi}{5}$. C. $V = \frac{51\pi}{17}$. D. $V = \frac{53\pi}{17}$.

Câu 56. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

- A. $\frac{64\pi}{15}$. B. $\frac{16\pi}{15}$. C. $\frac{20\pi}{3}$. D. $\frac{4\pi}{3}$.

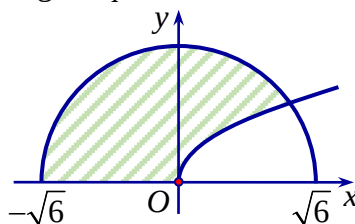
Câu 57. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{6\pi}{5}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 58. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$ và $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

- A. $V = \frac{1}{3}\pi$. B. $V = \frac{3}{2}\pi$. C. $V = \frac{32}{15}\pi$. D. $V = \frac{11}{6}\pi$.

Câu 59. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ ($-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox .

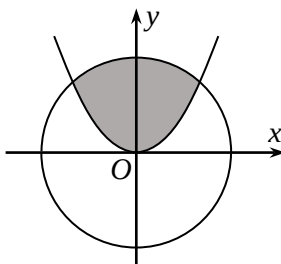


- A. $V = 8\pi\sqrt{6} - 2\pi$. B. $V = 8\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$. C. $V = 8\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}$. D. $V = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$.

Câu 60. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

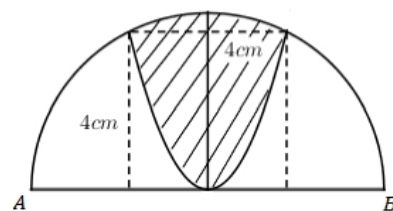
- A. $\frac{8\pi}{3}$. B. $\frac{16\pi}{3}$. C. 10π . D. 8π .

Câu 61. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



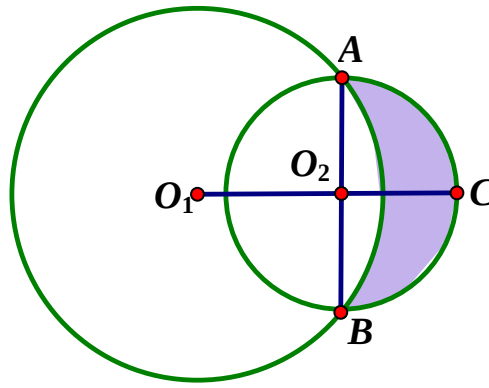
- A. $V = \frac{44\pi}{15}$. B. $V = \frac{22\pi}{15}$. C. $V = \frac{5\pi}{3}$. D. $V = \frac{\pi}{5}$.

Câu 62. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ một parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB . Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần tô màu trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB . Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng:



- A. $V = \frac{\pi}{15}(800\sqrt{5} - 464) \text{ cm}^3$. B. $V = \frac{\pi}{3}(800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$.
C. $V = \frac{\pi}{5}(800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$. D. $V = \frac{\pi}{15}(800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$.

Câu 63. Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



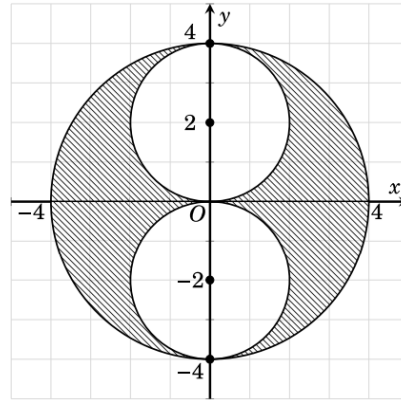
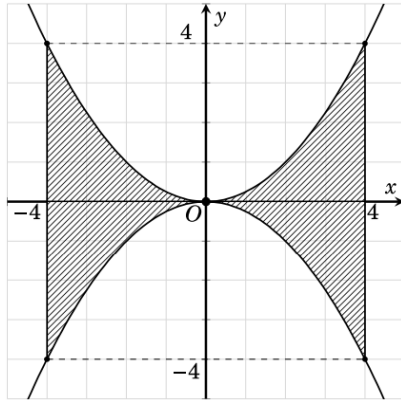
A. $\frac{824\pi}{3}$.

B. $\frac{608}{3}\pi$.

C. $\frac{97}{3}\pi$.

D. $\frac{145}{3}\pi$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}$, $y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x; y)$ thỏa: $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$, $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$.



Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1 , V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?

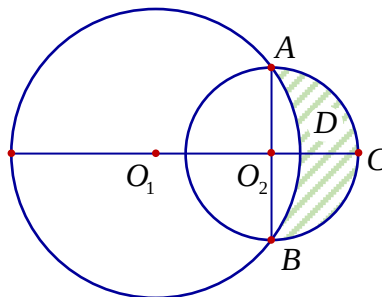
A. $V_1 = V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

C. $V_1 = 2V_2$.

D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Câu 65. Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A , B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2; 3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$.

B. $V = \frac{68\pi}{3}$.

C. $V = \frac{14\pi}{3}$.

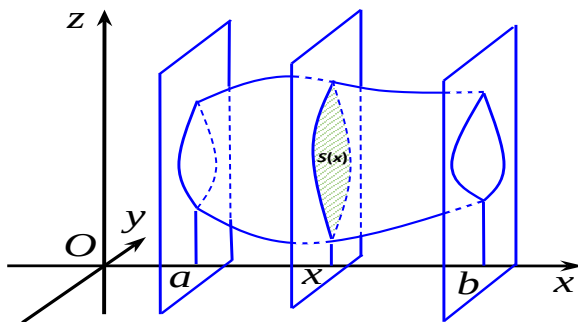
D. $V = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 66. Cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

- A. $V = \pi R^3$. B. $V = \frac{\pi R^3}{2}$. C. $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. D. $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

THỂ TÍCH TÍNH THEO MẶT CẮT $S(x)$

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x , ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y = S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức

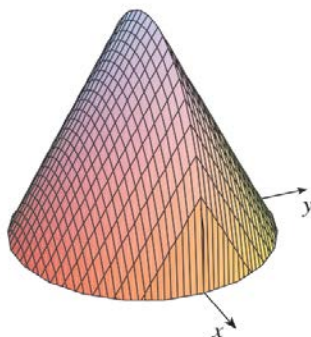


- A. $V = \int_a^b S^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. D. $V = \int_a^b S(x) dx$.

Câu 68. Cho phần vật thể $(\mathfrak{V})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể $(\mathfrak{V})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\mathfrak{V})$.

- A. $V = \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $V = 4\sqrt{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

Câu 69. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.

Câu 70. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi + 3}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi - 3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi - 3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Câu 71. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

- A. $V = 3$. B. $V = 3\pi$. C. $V = 2\pi\sqrt{3}$. D. $V = 2\sqrt{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$; $y = 0$ và $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox .

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

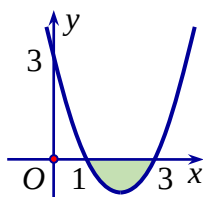
Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức



A. $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **B.** $V = \frac{1}{3} \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.
C. $V = \pi^2 \int_1^3 [f(x)]^2 dx$. **D.** $V = \int_1^3 [f(x)]^2 dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x = 1, x = 3$ nên thể tích

khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức $V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2 dx$

Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$. **B.** $V = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2|^2 dx$.
C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 4. Cho hàm số $y = \pi^x$ có đồ thị (C) . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

A. $V = \pi \int_3^2 \pi^{2x} dx$. **B.** $V = \pi^3 \int_2^3 \pi^x dx$. **C.** $V = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_2^3 \pi^x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_2^3 (\pi^x)^2 dx = \pi \int_2^3 \pi^{2x} dx.$$

Câu 5. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V = \pi \int_1^4 x dx$. **B.** $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_1^4 x dx$. **D.** $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$ và $x = b$ được tính

bởi công thức $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 6. [2D3-2] Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{8\pi}{15}$ **B.** $V = \frac{4\pi}{3}$ **C.** $V = \frac{15\pi}{8}$ **D.** $V = \frac{7\pi}{8}$

- **Phương pháp:** Công thức tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) quay xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- **Cách giải:** Áp dụng công thức ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa elip nằm trên trục hoành và trục hoành. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay, tính thể tích khối tròn xoay đó:

A. $V = 60\pi$. **B.** 30π . **C.** $\frac{1188}{25}\pi$. **D.** $\frac{1416}{25}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y = \sqrt{9 \left(1 - \frac{x^2}{25} \right)}$ với $(-5 \leq x \leq 5)$.

Gọi V là thể tích cần tìm, ta có: $V = \pi \int_{-5}^5 \left(9 - \frac{9x^2}{25} \right) dx = 60\pi$.

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. C. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$. D. $\frac{\pi e^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Câu 9. Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2 + (y - 3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

- A. $V = 6\pi$. B. $V = 6\pi^3$. C. $V = 3\pi^2$. D. $V = 6\pi^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$(C): x^2 + (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

$$(y - 3)^2 = 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Thể tích của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2 + (y - 3)^2 = 1$ xung quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[3 + \sqrt{1 - x^2} \right]^2 dx - \pi \int_{-1}^1 \left[3 - \sqrt{1 - x^2} \right]^2 dx = 6\pi^2.$$

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \tan x$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = 0, x = a$ với $a \in (0; \frac{\pi}{2})$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng này xung quanh trục

Ox là

- A. $-\pi(a - \tan a)$ B. $\pi(a - \tan a)$ C. $-\pi \ln(\cos a)$ D. $\pi \ln(\cos a)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 11. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình tròn $(C): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$ quanh trục Ox.

- A. $V = 2\pi^2$ (đvtt). B. $V = 6\pi^2$ (đvtt). C. $V = \pi^2$ (đvtt). D. $V = 6\pi$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tịnh tiến (C) theo $\vec{v} = (2; 0)$ ta được hình tròn $(C'): x^2 + (y - 3)^2 \leq 1$.

$$\text{Xét } x^2 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (C') quanh trục Ox là:

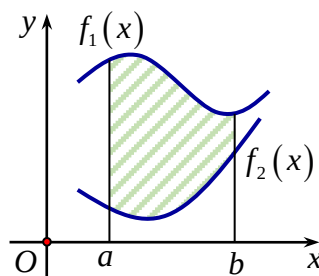
$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(3 + \sqrt{1 - x^2} \right)^2 - \left(3 - \sqrt{1 - x^2} \right)^2 \right] dx = 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} V &= 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= 12\pi \cdot \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi. \end{aligned}$$

Dạng 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = f(x)$ và $y = g(x)$ quay quanh trục Ox .

Câu 12. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Do $f_1(x) > f_2(x) \forall x \in (a; b)$ nên **Chọn B**

Câu 13. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

C. $V = \int_0^1 (2x+1) dx.$

D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

Câu 14. Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$

B. $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

C. $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$

D. $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

Câu 15. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

B. $V = \pi \int_0^1 xe^x dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$

D. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$) xác định bởi:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$\text{Vậy, } V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V = \pi \int_1^2 (x \ln x)^2 dx$. **B.** $V = \int_1^2 (x \ln x) dx$.

C. $V = \int_1^2 (x \ln x)^2 dx$. **D.** $V = \pi \int_1^2 (x \ln x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H): $\begin{cases} y = x \ln x \\ y = 0 \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V

được xác định bởi $V = \pi \int_1^2 (x \ln x)^2 dx$.

Câu 17. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

A. $V = \frac{8}{3}$.

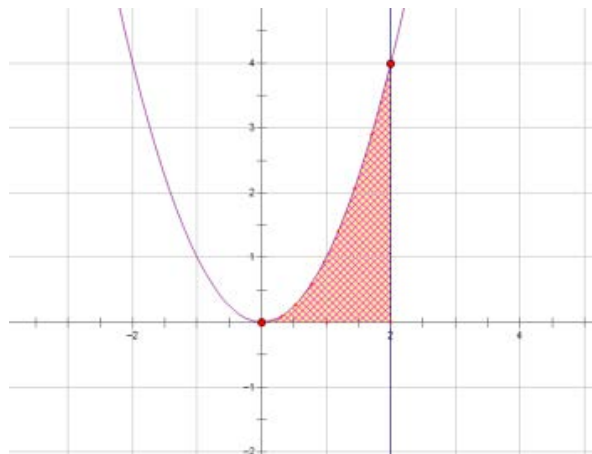
B. $V = \frac{32}{5}$.

C. $V = \frac{8\pi}{3}$.

D. $\frac{32\pi}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Vẽ phác họa hình thấy ngay miền cần tính

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Câu 18. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = x + 2$ quanh trục Ox là

A. $\frac{72\pi}{10}$ (đvtt).

B. $\frac{72\pi}{5}$ (đvtt).

C. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

D. $\frac{81\pi}{5}$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích cần tìm là $V = \pi \left| \int_{-1}^2 [x^4 - (x+2)^2] dx \right| = \frac{72\pi}{5}$.

Câu 19. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $V = \int_0^1 e^{2x} dx$.

B. $V = \pi \int_0^1 e^{x^2} dx$.

C. $V = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

D. $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx$.

Câu 20. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay được tính: $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

Câu 21. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$.

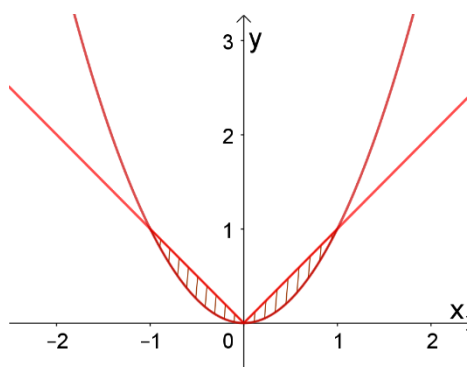
B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{15}$.

D. $\frac{4\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm $|x| = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\pm 1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y=|x|$ và $y=x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x=y$ và $x=\sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy .

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^1 |y - y^2| dy = \pi \int_0^1 (y - y^2) dy = \pi \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 22. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$. Khi đó $a+b$ có kết quả là:

A. 11

B. 17

C. 31

D. 25

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

Nên $a=16$, $b=15$, $a+b=31$

Câu 23. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $y=g(x)=\frac{x^2}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được tạo thành khi quay D quanh trục Ox ? Thể tích được viết dưới dạng $T=m\pi^2+n\pi$; $m, n \in \mathbb{R}$ thì tổng giá trị $m+n$ là?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{13}{20}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét phương trình $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Như vậy, thể tích cần tìm sẽ được tính theo công thức: $V = \pi \int_{-1}^1 |f^2(x) - g^2(x)| dx$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left| \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 - \frac{x^4}{4} \right| dx = \pi \left| \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^4}{4} dx \right| = \pi \left| \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx - \frac{x^5}{20} \Big|_{-1}^1 \right| = \pi \left| \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx - \frac{1}{10} \right|$$

$$V = \pi \left| I - \frac{1}{10} \right| \text{ với } I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Tính I : Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$

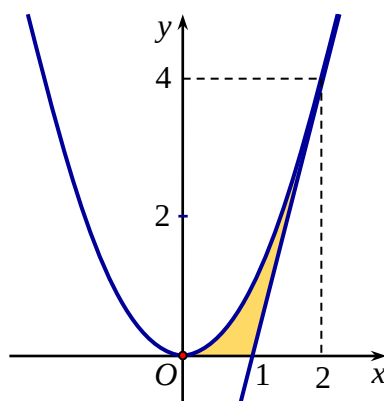
Ta có thể viết I lại dưới dạng

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 t}{(1 + \tan^2 t)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}V = \pi \left| \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right| = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2\pi}{5}$$

Nhận xét: Đây là một bài toán khá khó, đòi hỏi thí sinh phải biết đúng công thức và việc xử lý tích phân khéo léo.

Câu 24. Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{32\pi}{5}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y = x^2$.

Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x-4)^2 dx$.

$$\int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5}; \int_1^2 (4x-4)^2 dx = 16 \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx = 16 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (4x-4)^2 dx = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 25. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $xy = 4$, $x = 0$, $y = 1$ và $y = 4$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung.

A. $V = 8\pi$.

B. $V = 16\pi$.

C. $V = 10\pi$.

D. $V = 12\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục tung là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{y} \right)^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{16}{y^2} dy = \pi \left(-\frac{16}{y} \right) \Big|_1^4 = 12\pi.$$

Câu 26. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Thể tích vật thể tròn xoay được tạo ra khi cho hình (H) quay quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2}$. B. $\frac{(e^2 + e^{-2})\pi}{2}$. C. $\frac{e^4\pi}{2}$. D. $\frac{(e^2 - e^{-2})\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích vật thể cần tính là $V = \pi \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 d(e^{2x}) = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi(e^2 - e^{-2})}{2}$.

Câu 27. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$ quanh trục Ox là $V = \frac{a\pi}{b}$ với a, b là số nguyên. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 11. B. 17. C. 31. D. 25.

Hướng dẫn giải

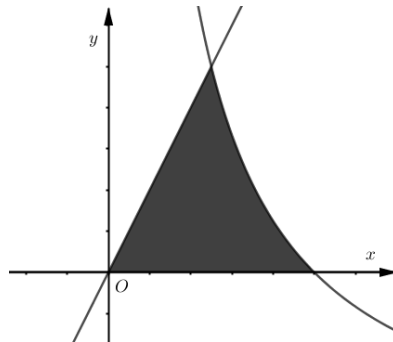
Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có $V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15} \Rightarrow a = 16, b = 15$.

Vậy $a + b = 31$.

Câu 28. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2x$, $y = \frac{1-x}{x}$, $y = 0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên).



Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.

- A. $V = \pi \left(\frac{5}{3} - 2 \ln 2 \right)$. B. $V = \pi \left(\frac{5}{3} + 2 \ln 2 \right)$. C. $V = \pi \left(2 \ln 2 - \frac{2}{3} \right)$. D.

$V = \pi \left(2 \ln 2 + \frac{2}{3} \right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2x$ và $y = \frac{1-x}{x}$ là:

$$2x = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2x$ và $y = 0$ là: $2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 0$ và $y = \frac{1-x}{x}$ là:

$$\frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{4x^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 dx = \frac{1}{6}\pi + \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx$$

Câu 29. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox .

A. $\frac{32\pi}{5}$.

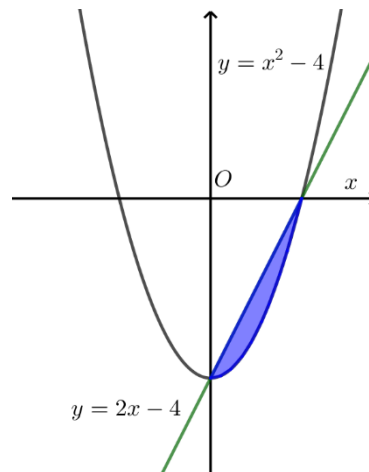
B. $\frac{32\pi}{7}$.

C. $\frac{32\pi}{15}$.

D. $\frac{22\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Ta có $V_1 = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx = \frac{256}{15}\pi$, $V_2 = \pi \int_0^2 (2x - 4)^2 dx = \frac{32}{3}\pi$.

Vậy thể tích cần tìm $V = V_1 - V_2 = \frac{32\pi}{5}$.

Câu 30. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox .

A. $2\pi \ln 2$.

B. $\frac{3\pi}{4}$.

C. $\frac{3}{4} - 1$.

D. $2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Câu 31. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, $(a > 1)$ quay xung quanh trục Ox .

A. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

B. $V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$.

C. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\pi$.

D. $V = \left(1 + \frac{1}{a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích V của vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^a = -\pi \left(\frac{1}{a} - 1\right) \Leftrightarrow V = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi.$$

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{32\pi}{15}$.

B. $\frac{64\pi}{15}$.

C. $\frac{21\pi}{15}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V = \pi \int_0^2 \left| (x^2)^2 - (2x)^2 \right| dx = \frac{64\pi}{15}$.

Câu 33. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$ quanh trục Ox .

A. $V = \frac{9\pi}{10}$.

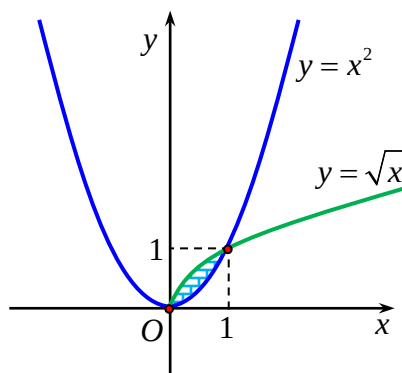
B. $V = \frac{3\pi}{10}$.

C. $V = \frac{\pi}{10}$.

D. $V = \frac{7\pi}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$

Khi đó:

Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) là $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{3\pi}{10}$

Câu 34. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y = 2 - x$ với $x \geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V = \frac{1}{3} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

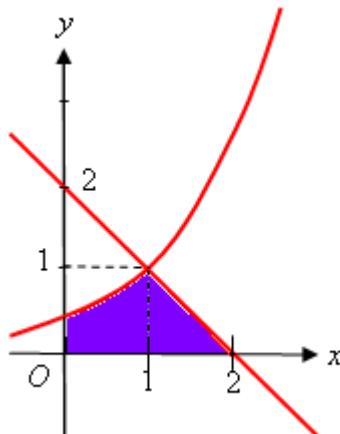
B. $V = \frac{\pi(5e^2 - 3)}{6e^2}$.

C. $V = \frac{1}{2} + \frac{e-1}{e}\pi$.

D. $V = \frac{1}{2} + \frac{e^2 - 1}{2e^2}$.

Lời giải

Chọn B



Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = e^{x-1}$ và đường thẳng $y = 2 - x$: $e^{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$. (Vì $y = e^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y = 2 - x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x = 1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

Đường thẳng $y = 2 - x$ cắt trục hoành tại $x = 2$.

$$V = \pi \int_0^1 (e^{x-1})^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi e^{2x-2} \Big|_0^1 + \pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x + 4 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(5e^2 - 1)}{6e^2}$$

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $x = g(y)$; $x = f(y)$ quay xung quanh trục Oy

Câu 35. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A. $\frac{496\pi}{15}$. B. $\frac{32\pi}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và trục hoành $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{7}{6}$. B. $V = \frac{7\pi^2}{6}$. C. $V = \frac{7\pi}{6}$. D. $V = \frac{7\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khối tròn xoay tạo thành } V &= \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x \right) \Big|_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Câu 37. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x = e - 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox .

- A. $e - 2$. B. 2π . C. πe . D. $\pi(e - 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Thể tích khối tròn xoay } (H) \text{ là: } V = \pi \int_0^{e-1} \ln^2(x+1) dx = \pi \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } V = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right). \text{ Đặt } \begin{cases} u' = \ln x \\ dv' = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du' = \frac{1}{x} dx \\ v' = x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2 \int_1^e dx \right) = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2x \Big|_1^e \right) = \pi(e - 2).$$

Câu 38. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khi hình phẳng D quay quanh trục hoành được vật thể tròn xoay có thể tích V được tính theo công thức

A. $V = \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$. **B.** $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx$.

C. $V = \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx$. **D.** $V = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$ có tập xác định là $D = [1; +\infty)$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $(2x-1)\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ x = 1 \end{cases}$.

Thể tích vật thể tròn xoay là: $V = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$.

Câu 39. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $1 - \frac{\pi}{4}$. **B.** π^2 . **C.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4} + \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích của (H) là: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \frac{\pi^2}{4}$.

Câu 40. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$. **B.** $\pi(e^2 + 1)$. **C.** $\frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$. **D.** $\pi(e^2 - 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$.

Câu 41. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

A. $V = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. **B.** $V = \frac{\pi \ln 2}{2}$. **C.** $V = \frac{\pi^2}{4}$. **D.** $V = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Câu 42. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (với a, b là các hằng số thực dương), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$. Nếu vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox có thể tích bằng $\frac{5\pi^2}{2}$ và $f'(0) = 2$ thì $2a + 5b$ bằng

A. 8.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có thể tích của vật thể là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} (a \sin x + b \cos x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x + 2ab \sin x \cos x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \left(a^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} + ab \sin 2x \right) dx = \pi \left[a^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) + b^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) - \frac{ab}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi (a^2 + b^2) \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 5(1)$.

Ta có $f'(x) = a \cos x - b \sin x \Rightarrow f'(0) = a$. Theo giả thiết ta có $a = 2$ và $b = 1$. Ta được $2a + 5b = 9$.

Câu 43. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{16}{15}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

* Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_1^3 [x^2 - 4x + 3]^2 dx = \pi \int_1^3 [x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 12x + 9] dx = \frac{16\pi}{15} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 44. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $32 + 2\sqrt{15}$.

B. $\frac{124\pi}{3}$.

C. $\frac{124}{3}$.

D. $(32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích vật thể cần tìm là $V = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx = \int_1^5 t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^5 = \frac{124}{3}$.

Câu 45. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ là:

A. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

C. $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$.

D. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$ và trục hoành: $\sqrt{x}e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó $V = \pi \int_0^1 xe^{2x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Khi đó: $V = \pi \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right] = \pi \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x} \Big|_0^1 \right] = \pi \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

$= \frac{1}{6}\pi + \pi \left(-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6}\pi + \pi \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2 \right) = \pi \left(\frac{5}{3} - 2\ln 2 \right)$.

Câu 46. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).

B. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt).

C. $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).

D. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left(3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 47. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$.

B. $V = \pi + 1$.

C. $V = \pi(\pi - 1)$.

D. $V = \pi(\pi + 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành có thể tích là:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Câu 48. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ là:

A. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

C. $\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$.

D. $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x}e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 xe^{2x} dx = \pi \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2 + 1).$$

Câu 49. Thể tích của vật tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \tan x$, trục Ox , đường thẳng $x = 0$, đường thẳng $x = \frac{\pi}{3}$ quanh trục Ox là

- A. $V = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. B. $V = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$. C. $V = \pi\sqrt{3} + \frac{\pi^2}{3}$. **D. $V = \pi\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{3}$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Thể tích của vật tròn xoay là

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi \left(\tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \left(\tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{3}.$$

Câu 50. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15\pi}{8}$. C. $\frac{21}{16}$. **D. $\frac{21\pi}{16}$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$V = \pi \int_1^4 \frac{x^2}{16} dx = \pi \frac{x^3}{48} \Big|_1^4 = \frac{21}{16} \pi.$$

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x = e$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi}{2}$. **B. $V = \frac{\pi}{3}$.** C. $V = \frac{\pi}{6}$. D. $V = \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ và trục hoành là $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích

$$V = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{\ln^3 x}{3} \right) \Big|_1^e = \frac{\pi}{3}.$$

Câu 52. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 4x + 6$ và $y = -x^2 - 2x + 6$.

- A. π . B. $\pi - 1$. **C. 3π .** D. 2π .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 4x + 6 = -x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$V = \pi \int_0^1 \left| (x^2 - 4x + 6)^2 - (-x^2 - 2x + 6)^2 \right| dx = \pi \int_0^1 \left| -12x^3 + 36x^2 - 24x \right| dx$$

$$= \pi \left| \int_0^1 (-12x^3 + 36x^2 - 24x) dx \right| = \pi \left| (-3x^3 + 12x^2 - 12x) \right|_0^1 = 3\pi.$$

Câu 53. Tính thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng

A. $V = \frac{19\pi}{15}.$

B. $V = \frac{13\pi}{15}.$

C. $V = \frac{17\pi}{15}.$

D. $V = \frac{16\pi}{15}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Xét phương trình } 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vì $2x - x^2 \geq 0 \forall x \in [0; 2]$ nên thể tích của phần vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng

$$D \text{ giới hạn bởi đồ thị } (P): y = 2x - x^2 \text{ và trục } Ox \text{ là } V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Vậy $a - b = 1.$

Câu 54. Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{2 - x^2}$ và trục Ox , quay (S) xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng

A. $V = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}.$

B. $V = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}.$

C. $V = \frac{4\pi}{3}.$

D. $V = \frac{8\pi}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục Ox :

$$\sqrt{2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\sqrt{2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx = \pi \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi.$$

Câu 55. Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh parabol $y = 2x^2$ (với $x \geq 0$), đường thẳng $y = -x + 3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $V = \frac{52\pi}{15}.$

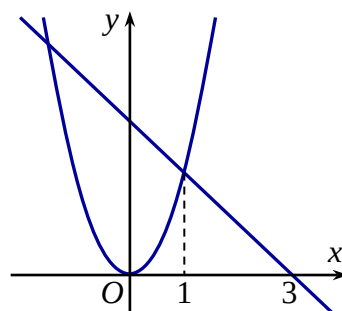
B. $V = \frac{17\pi}{5}.$

C. $V = \frac{51\pi}{17}.$

D. $V = \frac{53\pi}{17}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay tạo bởi (H): $V = \pi \int_1^3 (-x+3)^2 dx + \pi \int_0^1 4x^4 dx = \frac{52}{15} \pi$.

Câu 56. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình(H) xung quanh trục hoành.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{20\pi}{3}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ ta có $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do $x^2 - 2x < 0$ với $0 < x < 2$ nên $2x - x^2 > 0$ với $0 < x < 2$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình(H) xung quanh trục hoành thì

$$V = \pi \int_0^2 \left((2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 57. Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y - 2 = 0$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{6\pi}{5}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \cdot \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 + V_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 58. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{y}$, $y = -x + 2$ và $x = 0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

A. $V = \frac{1}{3} \pi$. **B.** $V = \frac{3}{2} \pi$. **C.** $V = \frac{32}{15} \pi$. **D.** $V = \frac{11}{6} \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

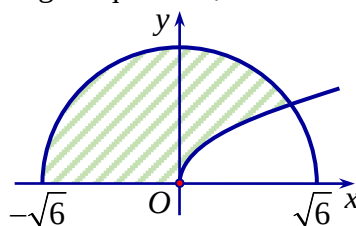
Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường:
$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \ (x \geq 0) \\ y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình (H) quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 ((-x+2)^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 4x + 4 - x^4) dx = \frac{32}{15} \pi \text{ (đvtt)}$$

Câu 59. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ ($-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox .



- A. $V = 8\pi\sqrt{6} - 2\pi$. B. $V = 8\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$. C. $V = 8\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}$. **D.** $V = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{6})^3 = 8\pi\sqrt{6}.$$

Thể tích nửa khối cầu là $V_1 = 4\pi\sqrt{6}$.

$$\text{Xét phương trình: } \sqrt{x} = \sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$, và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ quanh Ox là

$$V_2 = \pi \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = \frac{22\pi}{3}.$$

Vậy thể tích vật tròn xoay cần tìm là $V = V_1 + V_2 = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$.

Cách 2. Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{6})^3 = 8\pi\sqrt{6}.$$

$$\text{Xét phương trình: } \sqrt{x} = \sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{6-x^2}$ và đường thẳng $y = 0$ quanh Ox là $V_2 = \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_2^{\sqrt{6}} (6-x^2) dx$
 $= 2\pi + \frac{12\sqrt{6}-28}{3}\pi = 4\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}$.

Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = 8\pi\sqrt{6} - \left(4\pi\sqrt{6} - \frac{22\pi}{3}\right) = 4\pi\sqrt{6} + \frac{22\pi}{3}$.

Câu 60. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

- A. $\frac{8\pi}{3}$. B. $\frac{16\pi}{3}$. C. 10π . D. 8π .

Hướng dẫn giải

Chọn B

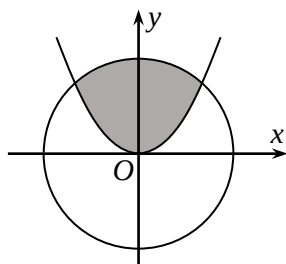
Ta có:
$$\begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2$; $x = 4$.

Thể tích vật thể bằng:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_2^4 \left| (x-2)^2 - \sqrt{x} \right| dx = \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_2^4 (x - (x-2)^2) dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Câu 61. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



- A. $V = \frac{44\pi}{15}$. B. $V = \frac{22\pi}{15}$. C. $V = \frac{5\pi}{3}$. D. $V = \frac{\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Với $y = x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2 + x^4 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

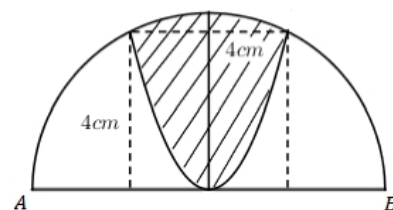
Hơn nữa $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2-x^2} \\ y = \sqrt{2-x^2} \end{cases}$.

Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay (H_1) :
$$\begin{cases} y = \sqrt{2-x^2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$$
 quay quanh Ox bỏ đi phần

thể tích (H_2) :
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$$
 quay quanh Ox .

$$\text{Do đó } V = \pi \left[\int_{-1}^1 \left(\sqrt{2-x^2} \right)^2 dx - \int_{-1}^1 \left(x^2 \right)^2 dx \right] = \frac{44\pi}{15}.$$

Câu 62. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ một parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB . Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần tô màu trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB . Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng:



A. $V = \frac{\pi}{15} (800\sqrt{5} - 464) \text{ cm}^3$.

B. $V = \frac{\pi}{3} (800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$.

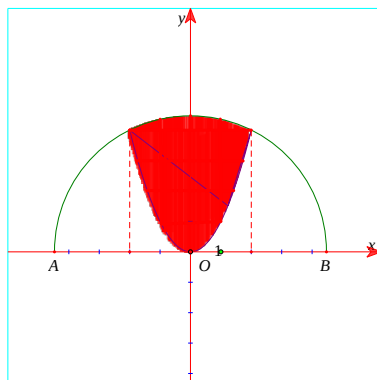
C. $V = \frac{\pi}{5} (800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$.

D. $V = \frac{\pi}{15} (800\sqrt{5} - 928) \text{ cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



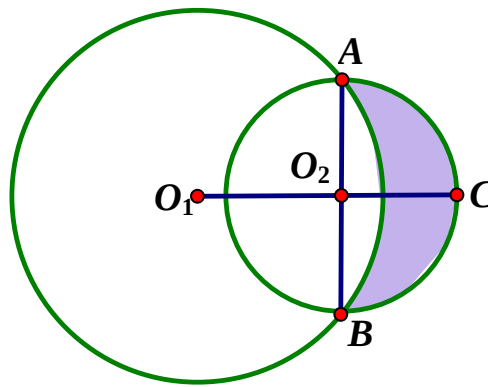
Theo đề bài ta có phương trình đường tròn là $y = \sqrt{20-x^2}$ và phương trình của parabol là $y = x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{20-x^2} = x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên ta có thể tích vật thể tròn xoay được tính theo công thức

$$V = 2 \left[\pi \int_0^{2\sqrt{5}} (20-x^2)^2 dx - \pi \int_0^2 (20-x^2-x^4) dx \right] = \frac{1}{15} \pi (800\sqrt{5} - 928).$$

Câu 63. Cho hai đường tròn $(O_1; 10)$ và $(O_2; 8)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (phần được tô màu như hình vẽ). Quay (H) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.



A. $\frac{824\pi}{3}$.

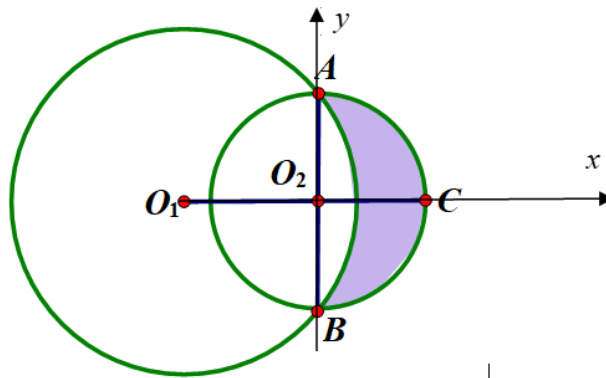
B. $\frac{608}{3}\pi$.

C. $\frac{97}{3}\pi$.

D. $\frac{145}{3}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 6$.

Ta có $O_2(0;0), O_1(-6;0)$.

Đường tròn $(O_2;8)$ có phương trình là: $x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$.

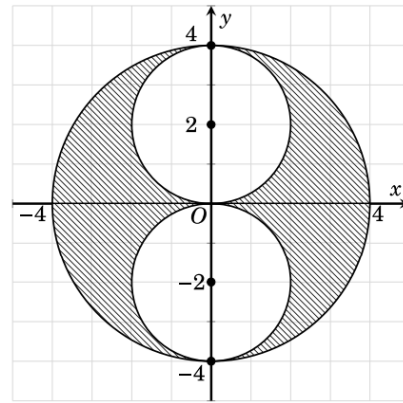
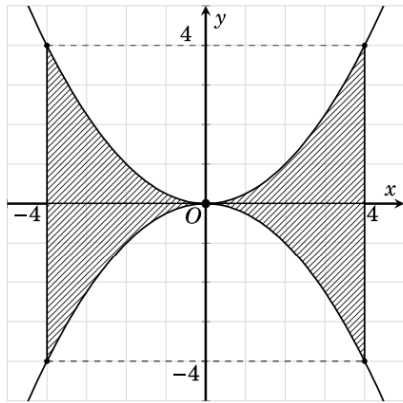
Đường tròn $(O_1;10)$ có phương trình là: $(x+6)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \sqrt{100 - (x+6)^2}$.

Thể tích cần tìm $V = \pi \int_0^8 (64 - x^2) dx - \pi \int_0^4 [100 - (x+6)^2] dx = \frac{608\pi}{3}$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{4}$,

$y = -\frac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và hình (H_2) là hình gồm các điểm $(x; y)$ thỏa: $x^2 + y^2 \leq 16$,

$x^2 + (y-2)^2 \geq 4$, $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$.



Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = V_2$.

B. $V_1 = \frac{1}{2}V_2$.

C. $V_1 = 2V_2$.

D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

• Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$.

• Thể tích giới hạn bởi Parabol $y = \frac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y = 4$ quay quanh Oy là:

$$\Rightarrow V_{(P)} = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 32\pi.$$

Suy ra thể tích (H_1) là: $V_1 = V - 2 \cdot V_{(P)} = 128\pi - 2 \cdot 32\pi = 64\pi$.

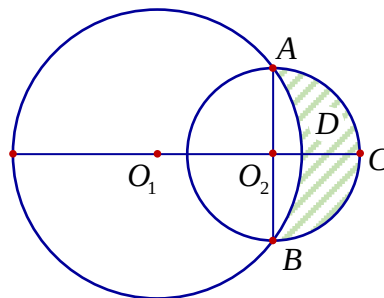
• Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$: $V_L = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi$.

• Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$: $V_N = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$

Suy ra thể tích (H_2) là: $V_2 = V_L - 2 \cdot V_N = \frac{256\pi}{3} - \frac{2 \cdot 32\pi}{3} = 64\pi$.

Vậy $r = 2$: $V_1 = V_2$.

Câu 65. Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2; 3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.



A. $V = 36\pi$.

B. $V = \frac{68\pi}{3}$.

C. $V = \frac{14\pi}{3}$.

D. $V = \frac{40\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Cạnh $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Phương trình đường tròn $(O_2): x^2 + y^2 = 9$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - (x+4)^2}$, trục Ox , $x=0$, $x=1$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục Ox , $x=0$, $x=3$.

Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 [25 - (x+4)^2] dx = \pi \left[25x - \frac{(x+4)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.

Câu 66. Cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

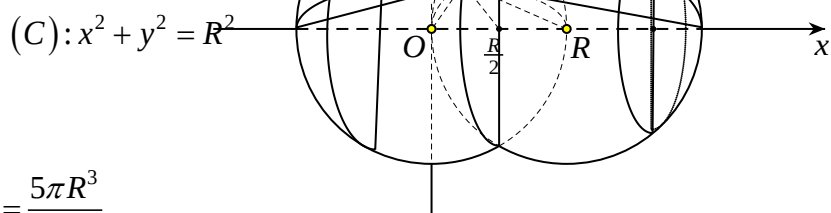
A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O, R)$ chứa một đường tròn lớn là

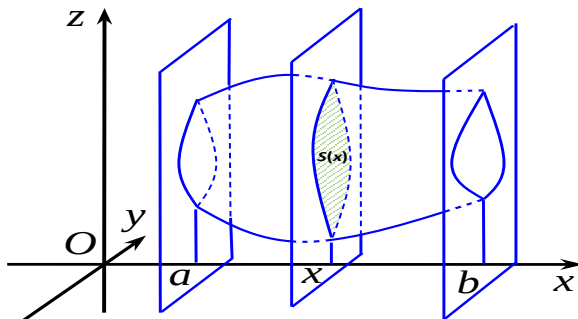


Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

THỂ TÍCH TÍNH THEO MẶT CẮT S(x)

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x , ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ với $y = S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



- A.** $V = \int_a^b S^2(x) dx$. **B.** $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$. **C.** $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. **D.** $V = \int_a^b S(x) dx$.

Câu 68. Cho phần vật thể ($\mathfrak{V}$) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể ($\mathfrak{V}$) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể ($\mathfrak{V}$).

- A.** $V = \frac{4}{3}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = 4\sqrt{3}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

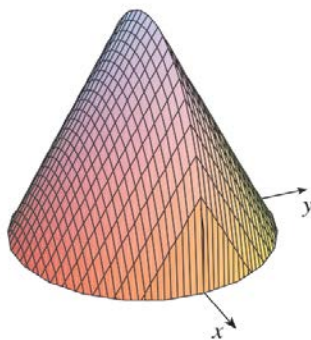
Hướng dẫn giải

Chọn B

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta} = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\mathfrak{V}} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 69. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



- A.** $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = 3\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Tại vị trí có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$.

Vậy thể tích V của vật thể là $\int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$) ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi+3}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thể tích vật thể B là $V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$.

Câu 71. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

- A. $V=3$. B. $V=3\pi$. C. $V=2\pi\sqrt{3}$. D. $V=2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

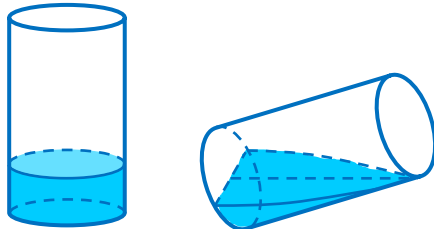
Diện tích tam giác đều $S(x) = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{\sin x})^2}{4} = \sqrt{3} \sin x$.

Vậy thể tích $V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = 2\sqrt{3}$.

BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

BÀI TẬP

Câu 1. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.

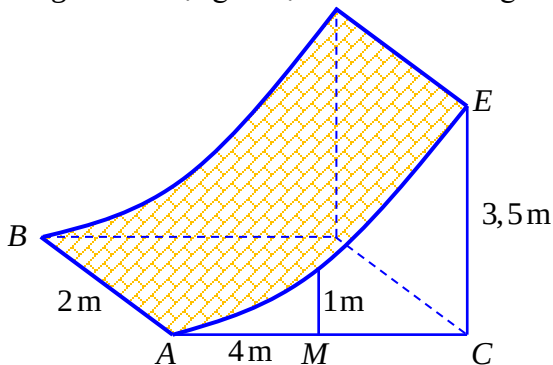


- A. 240 cm^3 . B. $240\pi\text{ cm}^3$. C. 120 cm^3 . D. $120\pi\text{ cm}^3$.

Câu 2. Bỏ đục một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- A. 183000 đồng. B. 180000 đồng. C. 185000 đồng. D. 190000 đồng.

Câu 3. Chương ngại vật “tường cong” trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là 3,5 m. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2\text{ m}$. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4\text{ m}$, $CE = 3,5\text{ m}$ và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao 1 m (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



- A. $9,75\text{ m}^3$. B. $10,5\text{ m}^3$. C. 10 m^3 . D. $10,25\text{ m}^3$.

Câu 4. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1 m, trục bé bằng 0,8 m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3 m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6 m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



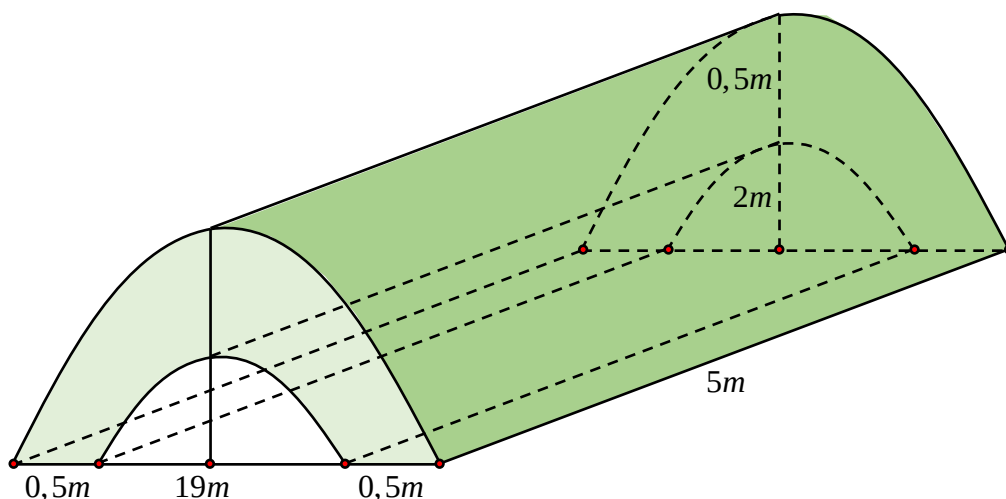
- A. $V = 1,52\text{ m}^3$. B. $V = 1,31\text{ m}^3$. C. $V = 1,27\text{ m}^3$. D. $V = 1,19\text{ m}^3$.

Câu 5. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm , thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm , chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?



- A. $425,2 \text{ lit.}$ B. 425162 lit. C. 212581 lit. D. $212,6 \text{ lit.}$

Câu 6. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



- A. 19m^3 . B. 21m^3 . C. 18m^3 . D. 40m^3 .

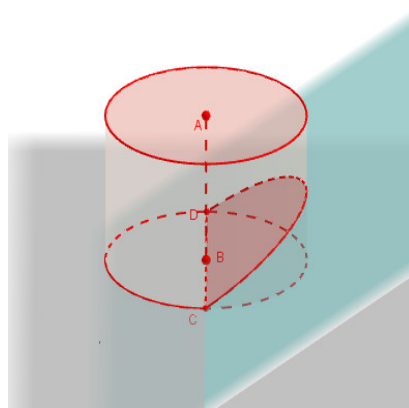
Câu 7. Một Bấc thợ gổm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2dm và 4dm , khi đó thể tích của lọ là:

- A. $8\pi \text{ dm}^2$. B. $\frac{15}{2}\pi \text{ dm}^3$. C. $\frac{14}{3}\pi \text{ dm}^2$. D. $\frac{15}{2} \text{ dm}^2$.

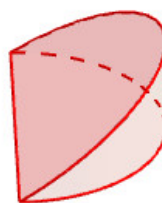
Câu 8. Một khối cầu có bán kính 5dm , người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm 3dm để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

- A. $132\pi (\text{dm}^3)$. B. $41\pi (\text{dm}^3)$. C. $\frac{100}{3}\pi (\text{dm}^3)$. D. $43\pi (\text{dm}^3)$

Câu 9. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30cm , người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Hình 1

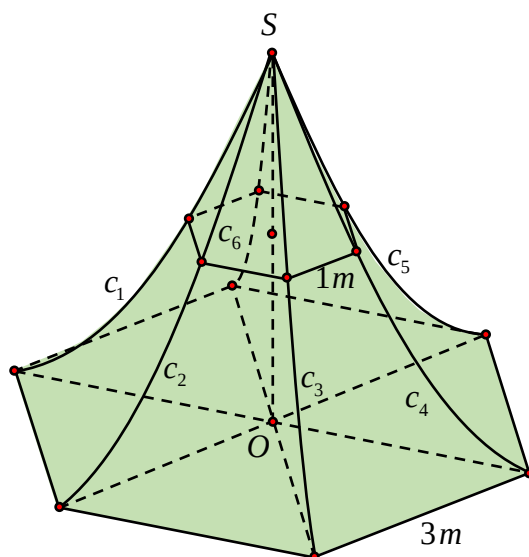


Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V .

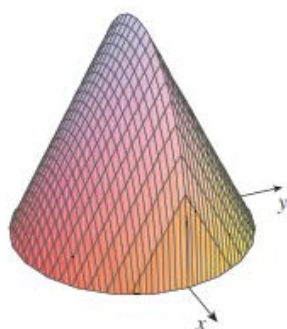
- A. $V = 2250 (cm^3)$. B. $V = \frac{225\pi}{4} (cm^3)$. C. $V = 1250 (cm^3)$. D. $V = 1350 (cm^3)$

Câu 10. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



- A. $\frac{135\sqrt{3}}{5} (m^3)$. B. $\frac{96\sqrt{3}}{5} (m^3)$. C. $\frac{135\sqrt{3}}{4} (m^3)$. D. $\frac{135\sqrt{3}}{8} (m^3)$.

Câu 11. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V = \frac{256}{3}$.

B. $V = \frac{64}{3}$.

C. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

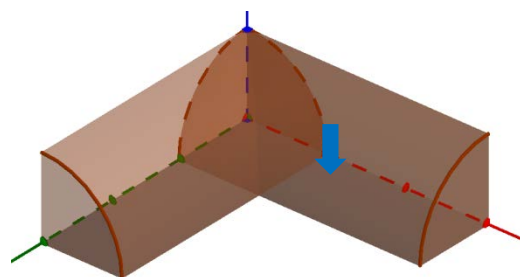
Câu 12. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) .

A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.

B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.



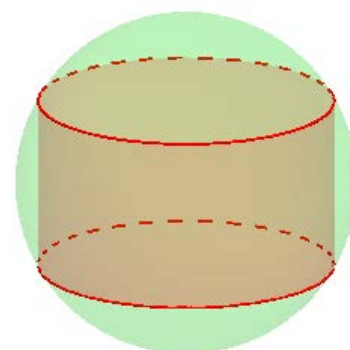
Câu 13. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$

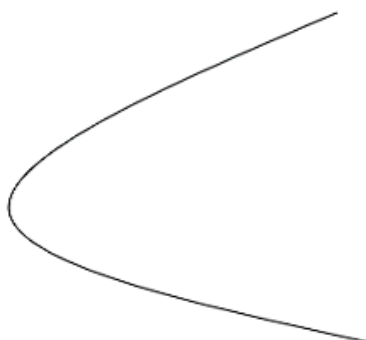
B. $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$

C. $41\pi(dm^3)$

D. $132\pi(dm^3)$



Câu 14. Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol (hình vẽ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$. Tính thể tích chuông?



A. 6π

B. 12π

C. $2\pi^3$

D. 16π

Câu 15. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây

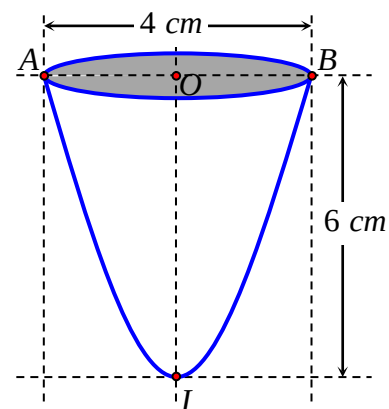
Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$.

B. $V = 12$.

C. $V = \frac{72}{5}\pi$.

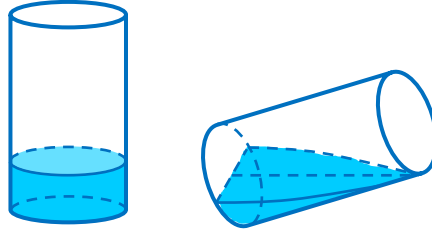
D. $V = \frac{72}{5}$.



HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TOÁN THỰC TẾ VÀ ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

Câu 1. Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao trong lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3 .

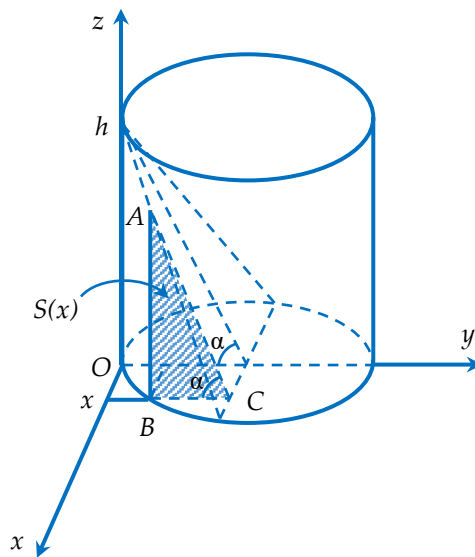
B. $240\pi \text{ cm}^3$.

C. 120 cm^3 .

D. $120\pi \text{ cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Đặt $R = 6$ (cm), $h = 10$ (cm). Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x ($-6 \leq x \leq 6$) cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác vuông, giả sử là tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

$$\text{Ta có } S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} BC^2 \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \frac{h}{R} = \frac{5(36 - x^2)}{6}.$$

$$\text{Vậy thể tích lượng nước trong cốc là } V = \int_{-6}^6 S(x) dx = \int_{-6}^6 \frac{5(36 - x^2)}{6} dx = 240 (\text{cm}^3).$$

Câu 2. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm.

Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng.

B. 180000 đồng.

C. 185000 đồng.

D. 190000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

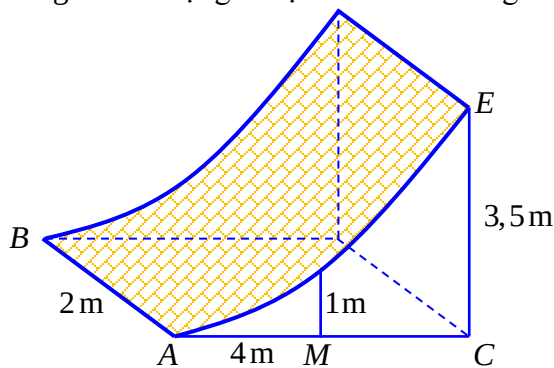
Đường elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm có phương trình

$$\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó thể tích quả dưa là } V &= \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

Câu 3. Chương ngại vật “tường cong” trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là 3,5m. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2$ m. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4$ m, $CE = 3,5$ m và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao 1m (xem hình minh họa bên). Tính thể tích bê tông cần sử dụng để tạo nên khối tường cong đó.



A. $9,75\text{m}^3$.

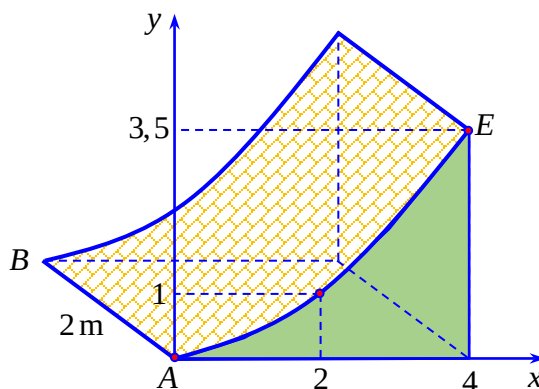
B. $10,5\text{m}^3$.

C. 10m^3 .

D. $10,25\text{m}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ sao cho $A \equiv O$

$\Rightarrow$ cạnh cong AE nằm trên parabol $(P): y = ax^2 + bx$ đi qua các điểm $(2; 1)$ và $\left(4; \frac{7}{2}\right)$ nên

$$(P): y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x$$

Khi đó diện tích tam giác cong ACE có diện tích $S = \int_0^4 \left(\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right) dx = 5\text{m}^2$.

Vậy thể tích khối bê tông cần sử dụng là $V = 5.2 = 10 \text{ m}^3$.

Câu 4. Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng 0,8m, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Được đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V = 1,52 \text{ m}^3$.

B. $V = 1,31 \text{ m}^3$.

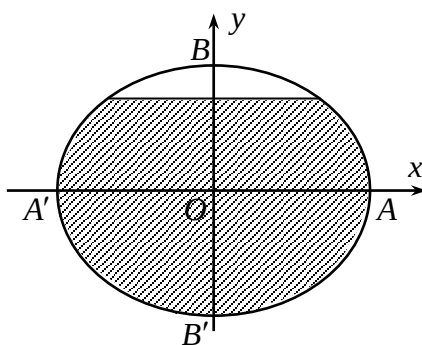
C. $V = 1,27 \text{ m}^3$.

D. $V = 1,19 \text{ m}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1 = \pi ab = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\pi}{5}$.

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN .

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y = \frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$ ta có $y = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$.

Do đường thẳng $y = \frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2 = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \left(\frac{4}{5} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} - \frac{1}{5} \right) dx = \frac{4}{5} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} dx$. Đặt $x = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt$.

Đổi cận: Khi $x = \frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t = -\frac{\pi}{3}$; Khi $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Khi đó } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{4}{5} \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{\pi}{15} - \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

$$\text{Thể tích của dầu trong thùng là } V = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{15} + \frac{\sqrt{3}}{20} \right) \cdot 3 = 1,52.$$

Câu 5. Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm , thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm , chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu?



A. 425,2 lit.

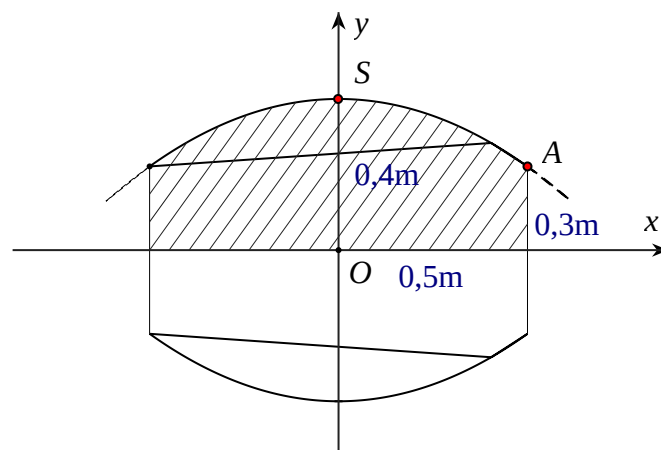
B. 425162 lit.

C. 212581 lit.

D. 212,6 lit.

Hướng dẫn giải

Chọn A



• Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$ (hình vẽ).

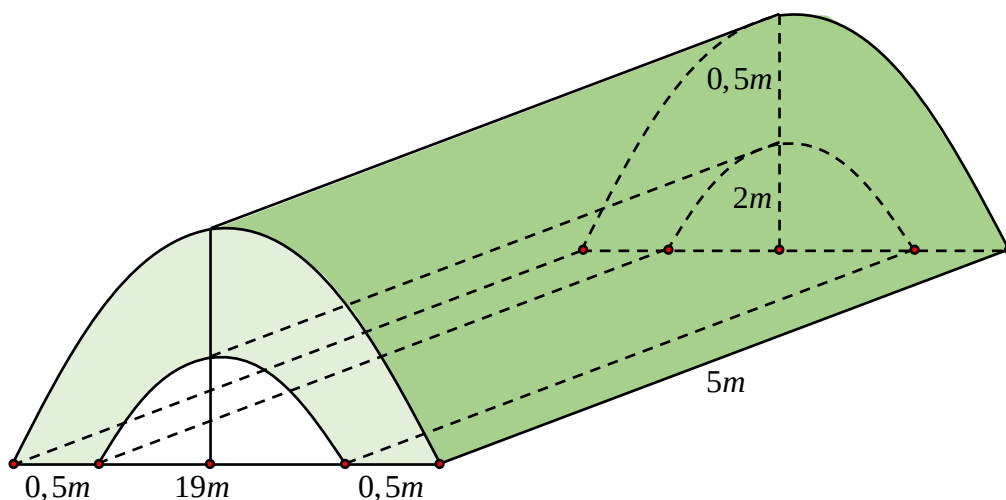
Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox .

• Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$

• Thể tích thùng rượu là:

$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = 2\pi \int_0^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (l)}$$

Câu 6. Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19m^3$.

B. $21m^3$.

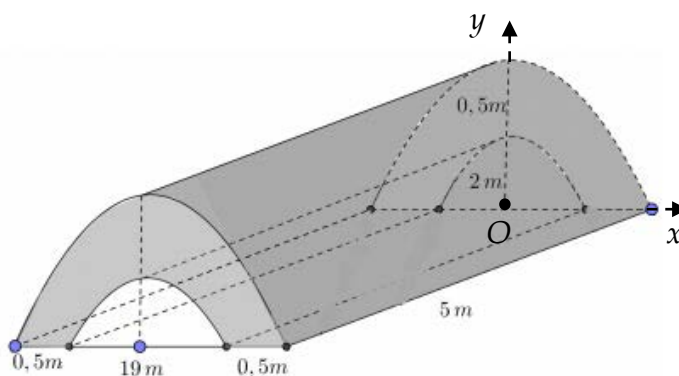
C. $18m^3$.

D. $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

Ta có thể tích của bê tông là:
$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$$

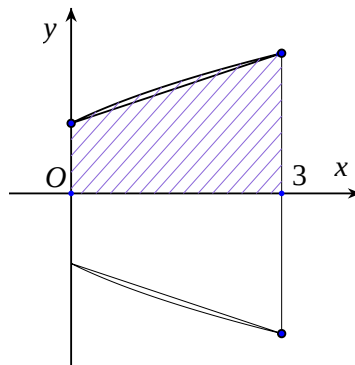
Câu 7. Một Bể thợ gồm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

- A. $8\pi \text{ dm}^2$. B. $\frac{15}{2}\pi \text{ dm}^3$. C. $\frac{14}{3}\pi \text{ dm}^2$. D. $\frac{15}{2} \text{ dm}^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

• $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$



• $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra: $V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 (x+1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$

Câu 8. Một khối cầu có bán kính $5dm$, người ta cắt bỏ 2 phần bằng 2 mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm $3dm$ để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

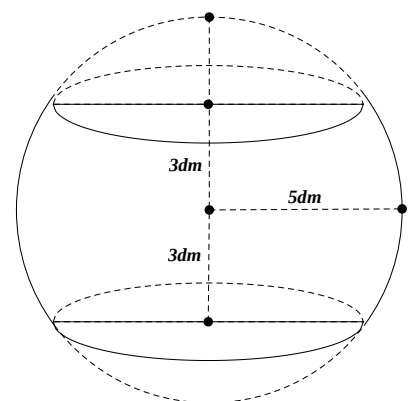
- A. $132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. B. $41\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. C. $\frac{100}{3}\pi \text{ (dm}^3\text{)}$. D. $43\pi \text{ (dm}^3\text{)}$

Hướng dẫn giải:

Đặt hệ trục với tâm O , là tâm của mặt cầu; đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy ; đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$.

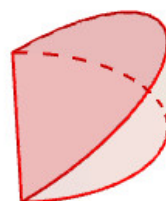
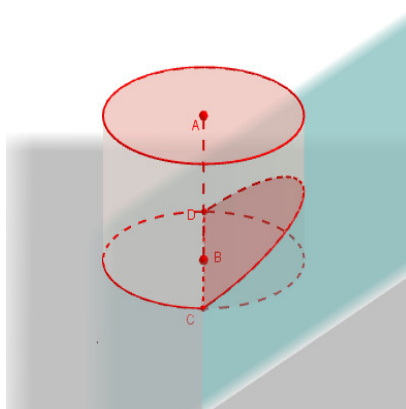
Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox , đường cong $y = \sqrt{25-x^2}$, $x = 3, x = -3$ quay quanh Ox .

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = 132\pi \text{ (bấm máy)}.$$



Chọn A

Câu 9. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Hình 1 Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V .

- A.** $V = 2250 (cm^3)$. **B.** $V = \frac{225\pi}{4} (cm^3)$. **C.** $V = 1250 (cm^3)$. **D.** $V = 1350 (cm^3)$

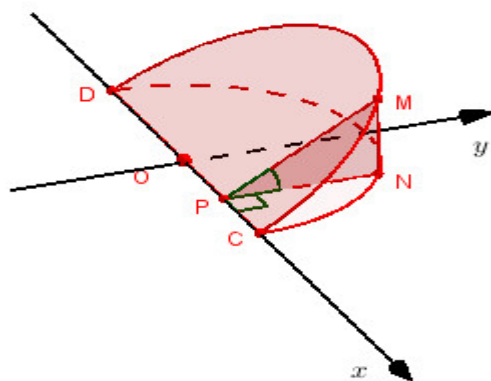
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó hình nêm có đáy

là nửa hình tròn có phương trình:
 $y = \sqrt{225 - x^2}, x \in [-15; 15]$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x, (x \in [-15; 15])$

cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

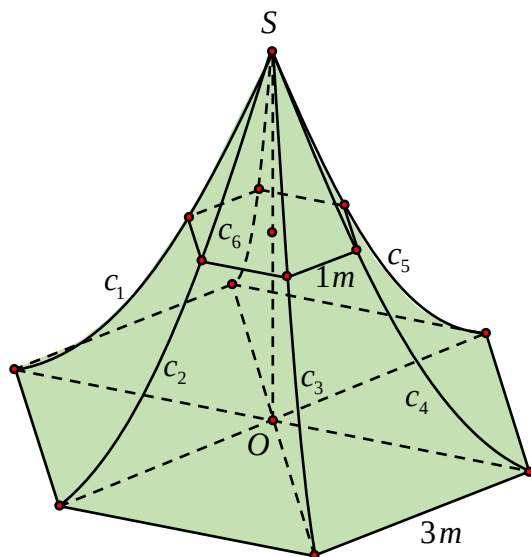


Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{225 - x^2}$ khi đó $S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} (225 - x^2)$

suy ra thể tích hình nêm là: $V = \int_{-15}^{15} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 (cm^3)$.

Chọn A

Câu 10. Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh 3 m . Chiều cao $SO = 6\text{ m}$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh 1 m . Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5} (\text{m}^3)$.

B. $\frac{96\sqrt{3}}{5} (\text{m}^3)$.

C. $\frac{135\sqrt{3}}{4} (\text{m}^3)$.

D. $\frac{135\sqrt{3}}{8} (\text{m}^3)$.

Hướng dẫn giải

Đặt **hệ** trục tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6)$, $B(1;3)$, $C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo **hình** vẽ ta có cạnh của “**thiết diện lục giác**” là BM .

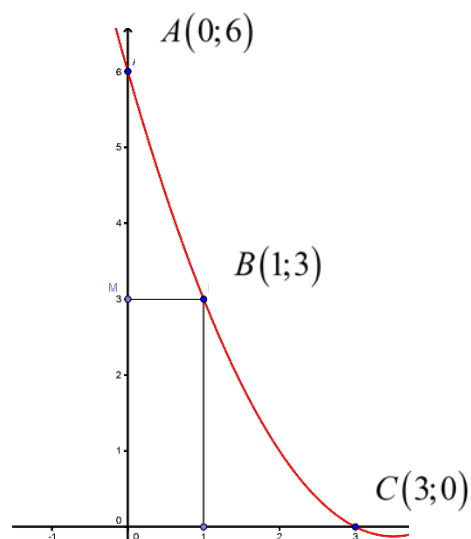
Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$ (chú ý là ta phải lấy giá trị có dấu “ $-$ ” trước dấu căn và cho B chạy từ C đến A).

Khi đó, diện **tích** của “**thiết diện lục giác**” bằng

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 \text{ với } t \in [0;6].$$

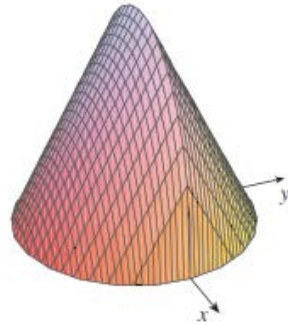
Vậy thể tích của “túp lều” theo đề bài là:

$$V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 dt = \dots = \frac{135\sqrt{3}}{8}$$



Chọn D

Câu 11. Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn bán kính 4 cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



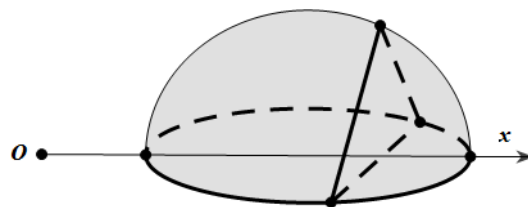
A. $V = \frac{256}{3}$.

B. $V = \frac{64}{3}$.

C. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Chọn tâm đường tròn làm gốc.

Diện tích thiết diện là $S = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \sqrt{3}(4 - x^2)$

$$V = \int_{-2}^2 S(x) dx = \sqrt{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn D

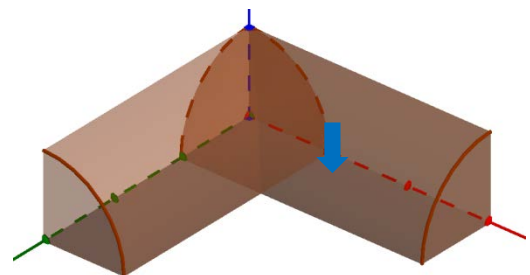
Câu 12. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) .

A. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.

B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

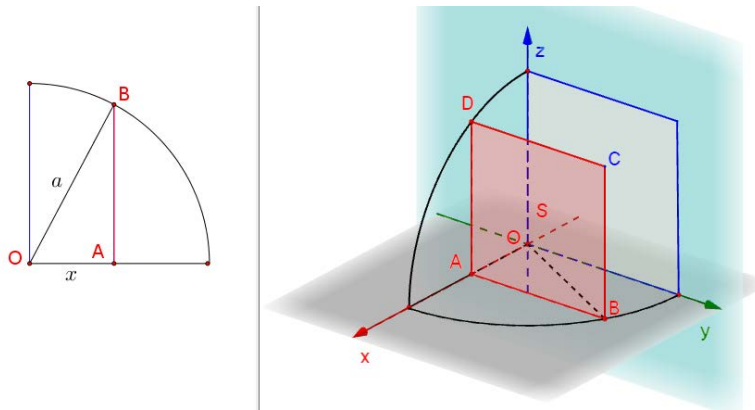
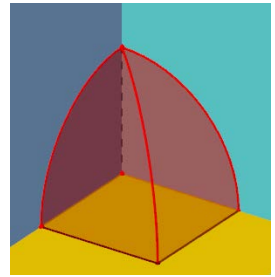


Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a , thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x) = a^2 - x^2$

$$\text{Thể tích khối } (H) \text{ là } \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2a^3}{3}.$$



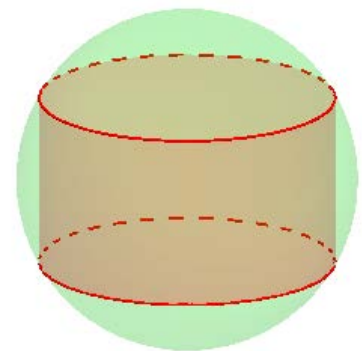
Câu 13. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$

B. $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$

C. $41\pi(dm^3)$

D. $132\pi(dm^3)$



Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy , xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C) , trục Ox , hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

$$\text{Ta có } (x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Nửa trên trục } Ox \text{ của } (C) \text{ có phương trình } y = \sqrt{25-(x-5)^2} = \sqrt{10x-x^2}$$

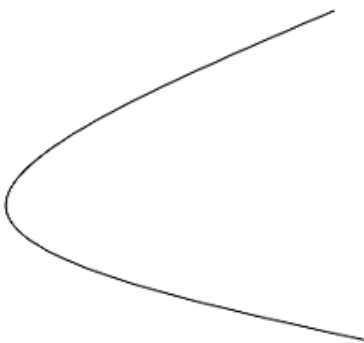
$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích khối cầu là: } V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}$$

$$\text{Thể tích cần tìm: } V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi \text{ (dm}^3\text{)}$$

Câu 14. Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol (hình vẽ). Biết chuông cao 4m, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$. Tính thể tích chuông?



A. 6π

B. 12π

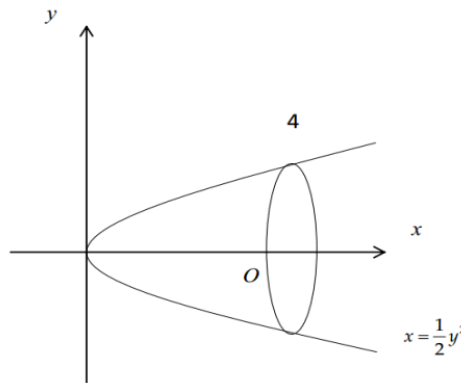
C. $2\pi^3$

D. 16π

Hướng dẫn giải

Xét hệ trục như hình vẽ, dễ thấy parabol đi qua ba điểm $(0;0), (4;2\sqrt{2}), (4;-2\sqrt{2})$ nên có phương trình $x = \frac{y^2}{2}$. Thể tích của chuông là thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng $y = \sqrt{2}x, x = 0, x = 4$ quay quanh trục Ox. Do đó

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^4 2x dx = \left(\pi x^2 \right) \Big|_0^4 = 16\pi$$



Câu 15. Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây

Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4cm và chiều cao là 6cm . Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V(\text{cm}^3)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$.

B. $V = 12$.

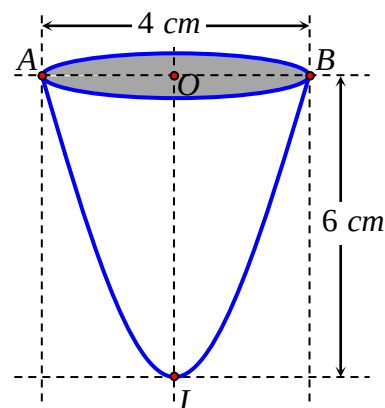
C. $V = \frac{72}{5}\pi$.

D. $V = \frac{72}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P) . Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6)$, $B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.



Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$. Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi \int_0^6 \left(\frac{2}{3}y \right) dy = 12\pi (\text{cm}^3)$.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ VÀ LIÊN MÔN

BÀI TẬP

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A. 1028 m. B. 1280 m. C. 1308 m. D. 1380 m.

Câu 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{2t+1}$, (m/s²). Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 4,6 m/s. B. 7,2 m/s. C. 1,5 m/s. D. 2,2 m/s.

Câu 3: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm/s²) là

$$a(t) = \frac{-20}{(1+2t)^2} \text{ (với } t \text{ tính bằng giây)}. \text{ Tìm hàm vận tốc } v \text{ theo } t, \text{ biết rằng khi } t=0 \text{ thì } v=30 \text{ (cm/s)}.$$

- A. $\frac{10}{1+2t}$ B. $\frac{10}{1+2t} + 20$ C. $(1+2t)^{-3} + 30$ D. $\frac{-20}{(1+2t)^2} + 30$

Câu 4: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

- A. $\frac{3\pi}{4} - 1$. B. $\frac{3\pi - 1}{4}$. C. $\frac{3\pi + 1}{4}$. D. $\frac{3\pi}{4} + 1$.

Câu 5: Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

- A. 5 m. B. 4 m. C. 6 m. D. 3 m.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

- A. $\frac{4300}{3}$ m. B. 4300 m. C. 430 m. D. $\frac{430}{3}$ m.

Câu 7: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 95,70$ (m). B. $S = 87,50$ (m). C. $S = 94,00$ (m). D. $S = 96,25$ (m).

Câu 8: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a$ m/s². Biết ô tô chuyển động thêm được 20m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

- A. (3;4). B. (4;5). C. (5;6). D. (6;7).

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18 \text{ (m/s)}$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

- A. 5,5 m. B. 3,5 m. C. 6,5 m. D. 4,5 m.

Câu 10: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

- A. $S = 106 \text{ m}$. B. $S = 107 \text{ m}$. C. $S = 108 \text{ m}$. D. $S = 109 \text{ m}$.

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,5 + \frac{t^2 + 2}{t + 2} \text{ (m/s)}$. Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- A. 12,60 m. B. 12,59 m. C. 0,83 m. D. 6,59 m.

Câu 12: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s . Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là $9,8 \text{ m/s}^2$?

- A. 30,625 m. B. 37,5 m. C. 68,125 m. D. 6,875 m.

Câu 13: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $24,5 \text{ (m/s)}$ và gia tốc trọng trường là $9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là (coi như viên đạn được bắn lên từ mặt đất)

- A. 61,25 (m). B. 30,625 (m). C. 29,4 (m). D. 59,5 (m)

Câu 14: Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

- A. 1,95J. B. 1,59 J. C. 1000 J. D. 10000 J

Câu 15: Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A. $v = 5 \text{ (m/p)}$. B. $v = 7 \text{ (m/p)}$. C. $v = 9 \text{ (m/p)}$. D. $v = 3 \text{ (m/p)}$.

Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

Câu 17: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

- A. $\frac{3\pi}{4}$ (m). B. $\frac{3\pi}{4} - 1$ (m). C. $\frac{\pi}{4} - 2$ (m). D. $\frac{3\pi}{4} + 1$ (m).

Câu 18: Bạn Minh ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

- A. 246 m. B. 252 m. C. 1134 m. D. 966 m.

Câu 19: Một ô tô đang chạy với tốc độ 10 (m/s) thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét.

- A. 8 m. B. 10 m. C. 5 m. D. 20 m.

Câu 20: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²).

Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

- A. $v = 3 \ln 3$. B. $v = 14$. C. $v = 3 \ln 3 + 6$. D. $v = 26$.

Câu 21: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. $\frac{2500}{3}$ (m). B. 2000 (m). C. 500 (m). D. $\frac{4000}{3}$ (m).

Câu 22: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1$ (m/s²). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

- A. 200. B. 243. C. 288. D. 300.

Câu 23: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

- A. 4 m. B. 5 m. C. 3 m. D. 6 m.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 24 (m/s) là

- A. 21 (m/s²). B. 12 (m/s²). C. 39 (m/s²). D. 20 (m/s²).

Câu 25: Một vật chuyển động có phương trình $v(t) = t^3 - 3t + 1$ (m/s). Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là

- A. $\frac{15}{4} \text{ m}$. B. 20 m . C. 19 m . D. $\frac{39}{4} \text{ m}$.

Câu 26: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t) = 6t + 12t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

- A. $\frac{4300}{3} \text{ m}$. B. 11100 m . C. 4300 m . D. $\frac{98}{3} \text{ m}$.

Câu 27: Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 20$ (m/s) thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t$ (m/s²). Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

- A. $\frac{104}{3} \text{ m}$. B. 104 m . C. 208 m . D. $\frac{104}{6} \text{ m}$.

Câu 28: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc

$a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

- A. $68,25 \text{ m}$. B. $67,25 \text{ m}$. C. $69,75 \text{ m}$. D. $70,25 \text{ m}$.

Câu 29: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m . Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- A. 33 . B. 12 . C. 31 . D. 32 .

Câu 30: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

- A. 25 mét. B. 22 mét. C. 20 mét. D. 24 mét.

Câu 31: Một ô tô đang chạy với tốc độ 36 (km/h) thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. 10 (m). B. 20 (m). C. 2 (m). D. $0,2$ (m).

Câu 32: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời

gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- A. 150 mét. B. 5 mét. C. 50 mét. D. 100 mét.

Câu 33: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- A. 136m. B. 126m. C. 276m. D. 216m.

Câu 34: Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 (m/s) rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20\text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

- A. 100 (m). B. 75 (m). C. 200 (m). D. 125 (m).

Câu 35: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t\text{ (m/s)}$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. 500 (m) . B. 2000 (m) . C. $\frac{4000}{3}\text{ (m)}$. D. $\frac{2500}{3}\text{ (m)}$.

Câu 36: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t\text{ (m/s)}$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70\text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 96,25\text{ (m)}$. B. $S = 87,5\text{ (m)}$. C. $S = 94\text{ (m)}$. D. $S = 95,7\text{ (m)}$.

Câu 37: Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc 80 m/s thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian 56s, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là 74s. Tính quãng đường đi được của xe.

- A. 5200m. B. 5500m. C. 5050m. D. 5350m.

Câu 38: Một ô tô chạy với vận tốc $v_0\text{ (m/s)}$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần với gia tốc $a = -8t\text{ (m/s}^2\text{)}$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12m. Tính v_0 ?

- A. $\sqrt[3]{1296}$. B. $\sqrt[3]{36}$. C. $\sqrt[3]{1269}$. D. 16.

Câu 39: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3 . Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 . Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- A. 8400 m^3 . B. 2200 m^3 . C. 6000 m^3 . D. 4200 m^3 .

Câu 40: Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng

$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01 cm)

- A. 2,67 cm. B. 2,66 cm. C. 2,65 cm. D. 2,68 cm.

Câu 41: Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10129.

Câu 42: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

- A. 251000 con. B. 264334 con. C. 261000 con. D. 274334 con.

Câu 43: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

- A. 302542 con. B. 322542 con. C. 312542 con. D. 332542 con.

Câu 44: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$$B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0, \text{ trong đó } B(t) \text{ là số lượng vi khuẩn trên mỗi } ml \text{ nước tại ngày thứ } t.$$

Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

- A. 9 B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 45: Hạt electron có điện tích âm là $1,6 \cdot 10^{-19} C$. Nếu tách hai hạt electron từ 1 pm đến 4 pm thì công W sinh ra là

- A. $W = 3,194 \cdot 10^{-28} J$. B. $W = 1,728 \cdot 10^{-16} J$.
C. $W = 1,728 \cdot 10^{-28} J$. D. $W = 3,194 \cdot 10^{-16} J$.

Câu 46: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t , với $I(t) = 0,3 - 0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05 giây là bao nhiêu?

- A. 0,29975 mC. B. 0,29 mC. C. 0,01525 mC. D. 0,01475 mC.

Câu 47: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là

$$i(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \text{ Biết } i = q' \text{ với } q \text{ là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc } t = 0, \text{ điện}$$

lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là

- A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. B. 0. C. $\frac{2I_0}{\omega}$. D. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Câu 48: Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0,15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trở lại (chống lại) với một lực $f(x) = 800x$. Hãy tìm công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0,15(m)$ đến $0,18(m)$.

- A. $W = 36.10^{-2} J$. B. $W = 72.10^{-2} J$. C. $W = 36 J$. D. $W = 72 J$.

Câu 49: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R . Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kỳ T .

- A. $\frac{RI_0^2}{2}T$. B. $\frac{RI_0^2}{3}T$. C. $\frac{RI_0^2}{4}T$. D. $\frac{RI_0^2}{5}T$.

Câu 50: Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng điện và hiệu điện thế. Hãy Tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kỳ.

- A. $\frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi$. B. $\frac{U_0 I_0}{2} T \sin\varphi$. C. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos(\varphi + \pi)$. D. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos\varphi$.

Câu 51: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

- A. $A = 1,56 (J)$. B. $A = 1 (J)$. C. $A = 2,5 (J)$. D. $A = 2 (J)$.

Câu 52: Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc α theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

- A. $t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}}$. B. $t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_0 + \sin\alpha)}}$.
- C. $t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}}$. D. $t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)}}$.

Câu 53: Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I = \int_0^a [p(x) - P] \cdot dx.$$

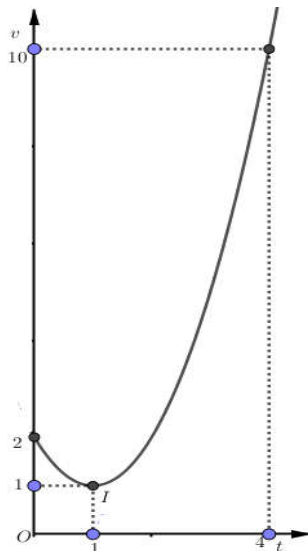
Với $p(x)$ là hàm biểu thị biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa.

Câu 54: a là số lượng sản phẩm đã bán ra, $P = p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm là a .

Cho $p = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD). Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500.

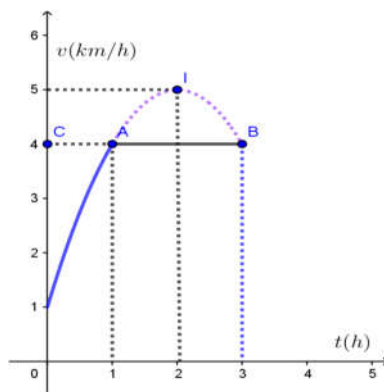
A. 1108333,3 USD. **B.** 570833,3 USD. **C.** 33333,3 USD. **D.** Đáp án khác.

Câu 55: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



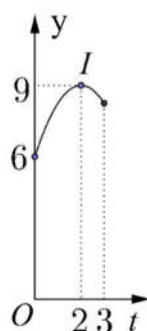
A. $s = 6$ (km). **B.** $s = 8$ (km). **C.** $s = \frac{40}{3}$ (km). **D.** $s = \frac{46}{3}$ (km).

Câu 56: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



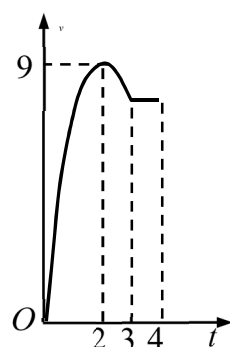
A. 15 (km). **B.** $\frac{32}{3}$ (km). **C.** 12 (km). **D.** $\frac{35}{3}$ (km).

Câu 57: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



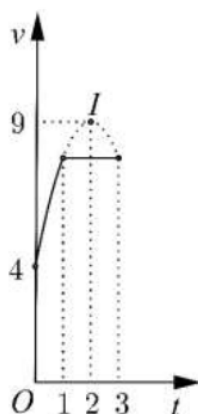
- A. $s = 24,25$ (km) B. $s = 26,75$ (km) C. $s = 24,75$ (km) D. $s = 25,25$ (km)

Câu 58: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật đi chuyển được trong 4 giờ đó?



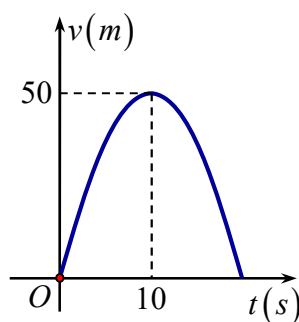
- A. 26,5 (km) B. 28,5 (km) C. 27 (km) D. 24 (km)

Câu 59: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật đi chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A. $s = 23,25$ (km) B. $s = 21,58$ (km) C. $s = 15,50$ (km) D. $s = 13,83$ (km)

Câu 60: Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

- A. 300m. B. $\frac{1400}{3}$ m. C. $\frac{1100}{3}$ m. D. $\frac{1000}{3}$ m.

Câu 61: đám vi khuẩn ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10132.

Câu 62: . Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \frac{10000}{1+2t}$ với $\forall t > 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là

- A. 17094. B. 9047. C. 8047. D. 32118.

Câu 63: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch dao động LC lí tưởng có phương trình $i = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Ngoài ra $i = q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t = 0$,

điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

- A. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$. B. 0. C. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. D. $\frac{I_0}{\omega}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A. 1028 m. B. 1280 m. C. 1308 m. D. 1380 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Khi vật dừng lại thì $v(t) = 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$

$$\text{Suy ra: } s = \int_0^{16} v(t) dt = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = (160t - 5t^2) \Big|_0^{16} = 1280 \text{ m.}$$

Câu 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{2t+1}$, (m/s²). Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 4,6 m/s. B. 7,2 m/s. C. 1,5 m/s. D. 2,2 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Vận tốc của ô tô sau 10 giây là: } v = \int_0^{10} \frac{3}{2t+1} dt = \frac{3}{2} \ln|2t+1| \Big|_0^{10} = \frac{3}{2} \ln 21 \approx 4,6 \text{ (m/s).}$$

Câu 3: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm/s²) là

$$a(t) = \frac{-20}{(1+2t)^2} \text{ (với } t \text{ tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc } v \text{ theo } t, \text{ biết rằng khi } t=0 \text{ thì}$$

$$v = 30 \text{ (cm/s).}$$

- A. $\frac{10}{1+2t}$ B. $\frac{10}{1+2t} + 20$ C. $(1+2t)^{-3} + 30$ D. $\frac{-20}{(1+2t)^2} + 30$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\bullet v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{-20}{(1+2t)^2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$$

$$\bullet \text{ Do } v(0) = 30, \text{ suy ra } \frac{10}{1+2 \cdot 0} + C = 30 \Leftrightarrow C = 20$$

$$\bullet \text{ Vậy, hàm } v(t) = \frac{10}{1+2t} + 20.$$

Câu 4: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động trong khoảng thời gian $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

- A. $\frac{3\pi}{4} - 1$. B. $\frac{3\pi - 1}{4}$. C. $\frac{3\pi + 1}{4}$. D. $\frac{3\pi}{4} + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Quãng đường cần tìm } s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt = (t + \cos 2t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

Câu 5: Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách 45 m (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

- A. 5 m . B. 4 m . C. 6 m . D. 3 m .

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xe đang chạy với vận tốc $v = 20 \text{ m/s}$ tương ứng với thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$

Xe dừng lại tương ứng với thời điểm $t = 4 \text{ (s)}$.

$$\text{Quãng đường xe đã đi là } S = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ (m)}.$$

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45 - 40 = 5 \text{ (m)}$.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

- A. $\frac{4300}{3} \text{ m}$. B. 4300 m . C. 430 m . D. $\frac{430}{3} \text{ m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

- Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

- Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

Ta được: $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10$

- Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là:

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} \text{ m}.$$

Câu 7: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) , người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường $S \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 95,70 \text{ (m)}$. B. $S = 87,50 \text{ (m)}$. C. $S = 94,00 \text{ (m)}$. D. $S = 96,25 \text{ (m)}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t) dt = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (m)}.$$

Vận tốc $v_2(t)$ (m/s) của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t) = \int (-70) dt = -70t + C, \quad v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385. \text{ Vậy } v_2(t) = -70t + 385.$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5$ (s).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t) dt = \int_5^{5,5} (-70t + 385) dt = 8,75 \text{ (m)}.$$

Quãng đường cần tính $S = S_1 + S_2 = 96,25$ (m).

Câu 8: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a$ m/s². Biết ô tô chuyển động thêm được 20m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây.

A. (3;4).

B. (4;5).

C. (5;6).

D. (6;7).

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $x(t)$ là hàm biểu diễn quãng đường, $v(t)$ là hàm vận tốc.

$$\text{Ta có: } v(t) - v(0) = \int_0^t (-a) dt = -at \Rightarrow v(t) = -at + 15.$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (-at + 15) dt = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + 15t$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} v(t) = 0 \\ x(t) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -at + 15 = 0 \\ -\frac{1}{2}at^2 + 15t = 20 \end{cases} \Rightarrow -\frac{15}{2}t + 15t = 20 \Rightarrow t = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{45}{8}.$$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18$ (m/s) trong đó t là khoảng thời

gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

- A. 5,5 m. B. 3,5 m. C. 6,5 m. **D. 4,5 m.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T) = 0$.

Suy ra $-36T + 18 = 0 \Rightarrow T = 0,5$ (s)

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn ô tô là 0,5 s. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $s = \int_0^{0,5} (-36t + 18) dt = (-18t^2 + 18t) \Big|_0^{0,5} = 4,5(m)$.

Câu 10: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} (m/s^2)$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là $30m/s$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

- A. $S = 106m$. B. $S = 107m$. C. $S = 108m$. **D. $S = 109m$.**

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int -20(1+2t)^{-2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$. Theo đề ta có

$v(0) = 30 \Leftrightarrow C + 10 = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = (5 \ln(1+2t) + 20t) \Big|_0^2 = 5 \ln 5 + 100 \approx 108m.$$

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,5 + \frac{t^2 + 2}{t + 2}$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- A. 12,60 m. B. 12,59 m. C. 0,83 m. **D. 6,59 m.**

Hướng dẫn giải

Chọn B

• Quãng đường trong 4 giây đầu tiên (từ $t = 0$ đến $t = 4$) là

$$s = \int_0^4 \left(1,5 + \frac{t^2 + 2}{t + 2} \right) dt = \int_0^4 \left(1,5 + t - 2 + \frac{6}{t + 2} \right) dt = \left(1,5t + \frac{t^2}{2} - 2t + 6 \ln|t + 2| \right) \Big|_0^4 \approx 12,59 m.$$

Câu 12: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc $15 m/s$. Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là $9,8 m/s^2$?

- A. 30,625 m. B. 37,5 m. C. 68,125 m. **D. 6,875 m.**

Hướng dẫn giải

Chọn C

• Hàm vận tốc $v(t) = v_0 + at = 15 + 9,8t$

- Quãng đường tia lửa đi được sau 2,5 giây là: $s = \int_0^{2,5} (15 + 9,8t) dt = (15t + 4,9t^2) \Big|_0^{2,5} = 68,125 \text{ m}$.

Câu 13: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $24,5 (m/s)$ và gia tốc trọng trường là $9,8 (m/s^2)$. Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là (coi như viên đạn được bắn lên từ mặt đất)

- A. $61,25 (m)$. B. $30,625 (m)$. C. $29,4 (m)$. D. $59,5 (m)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Chọn C Chiều dương từ mặt đất hướng lên trên, mốc thời gian $t = 0$ bắt đầu từ khi vật chuyển động.

Ta có vận tốc viên đạn theo thời gian t là $v(t) = v_0 - gt = 24,5 - 9,8t \text{ (m/s)}$

Khi vật ở vị trí cao nhất thì có vận tốc bằng 0 tương ứng tại thời điểm $t = \frac{5}{2}$

Quãng đường viên đạn đi được từ mặt đất đến vị trí cao nhất là

$$S(t) = \int_0^{\frac{5}{2}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{5}{2}} |24,5 - 9,8t| dt = \frac{245}{8}$$

Vậy quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là $2 \cdot \frac{245}{8} = 61,25 (m)$.

Câu 14: Một lực 50 N cần thiết để kéo căng một chiếc lò xo có độ dài tự nhiên 5 cm đến 10 cm. Hãy tìm công sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ 10 cm đến 13 cm?

- A. 1,95J. B. 1,59 J. C. 1000 J. D. 10000 J

Hướng dẫn giải

Theo định luật Hooke, khi chiếc lò xo bị kéo căng thêm x m so với độ dài tự nhiên thì chiếc lò xo trở lại với một lực $f(x) = kx$. Khi kéo căng lò xo từ 5 cm đến 10 cm, thì nó bị kéo căng thêm 5 cm = 0,05 m. Bằng cách này, ta được $f(0,05) = 50$ bởi vậy:

$$0,05k = 50 \Rightarrow k = \frac{50}{0,05} = 1000$$

Do đó: $f(x) = 1000x$ và công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ 10 cm đến 13 cm là:

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 1000x dx = 1000 \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,95J$$

Chọn A

Câu 15: Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã

chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A. $v = 5(m/p)$. B. $v = 7(m/p)$. C. $v = 9(m/p)$. D. $v = 3(m/p)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi thời điểm khí cầu bắt đầu chuyển động là $t = 0$, thời điểm khi khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 .

Quãng đường khí cầu đi được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm khi khí cầu bắt đầu tiếp đất là t_1 là

$$\int_0^{t_1} (10t - t^2) dt = 5t_1^2 - \frac{t_1^3}{3} = 162$$

$$\Leftrightarrow t \approx -4,93 \vee t \approx 10,93 \vee t = 9$$

Do $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$ nên chọn $t = 9$.

Vậy khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là $v(9) = 10 \cdot 9 - 9^2 = 9(m/p)$

Câu 16: Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

- A. $0,2m$. B. $2m$. C. $10m$. D. $20m$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có ô tô đi được thêm 2 giây nữa với vận tốc chậm dần đều $v(t) = -5t + 10(m/s)$

ứng dụng tích phân, ta có quãng đường cần tìm là:

$$S = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10(m)$$

* Lúc dừng thì ta có: $v(t) = 0 \Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2$

Từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô đi được quãng đường: $S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$\text{Với } \begin{cases} a = -5 \\ t = 2 \\ v_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 10.2 + \frac{1}{2}(-5).2^2 = 10(m)$$

* Áp dụng công thức lý 10 ta có: $v_2^2 - v_1^2 = 2.a.s$

Ta còn có công thức liên hệ giữa vận tốc và gia tốc: $v = v_0 + a.t$

Dựa vào phương trình chuyển động thì $a = -5(m/s^2)$

Khi dừng hẳn thì ta có $v_2 = 0(m/s)$

Theo công thức ban đầu, ta được $s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{0 - 10^2}{2.(-5)} = 10(m)$.

Câu 17: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là

- A. $\frac{3\pi}{4}$ (m). **B.** $\frac{3\pi}{4} - 1$ (m). C. $\frac{\pi}{4} - 2$ (m). **D.** $\frac{3\pi}{4} + 1$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} v(t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt = (t + \cos 2t) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

Câu 18: Bạn Minh ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới và vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Tính quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10.

- A. 246 m. B. 252 m. C. 1134 m. **D.** 966 m.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$S = \int_4^{10} (3t^2 + 5) dt = (t^3 + 5t) \Big|_4^{10} = 1050 - 84 = 966.$$

Câu 19: Một ô tô đang chạy với tốc độ $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét.

- A. 8m. **B.** 10m. C. 5m. **D.** 20m.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Khi ô tô có vận tốc $10(m/s)$ tương ứng với $t = 0$ (s).

Lúc ô tô dừng lại thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2(s)$.

Quãng đường ô tô di chuyển được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10(m).$$

Câu 20: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²).

Biết vận tốc của ô tô tại giây thứ 6 bằng 6 (m/s). Tính vận tốc của ô tô tại giây thứ 20.

- A. $v = 3 \ln 3$. B. $v = 14$. C. $v = 3 \ln 3 + 6$. D. $v = 26$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{3}{t+1} = 3 \ln|t+1| + C$.

Lại có: $v(6) = 6 \Leftrightarrow 3 \ln 7 + c = 6 \Leftrightarrow c = 6 - 3 \ln 7$.

Suy ra $v(20) = 3 \ln 21 + 6 - 3 \ln 7 = 3 \ln 3 + 6$.

Vậy vận tốc của ô tô tại giây thứ 20 bằng $3 \ln 3 + 6$.

Câu 21: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. $\frac{2500}{3}$ (m). B. 2000 (m). C. 500 (m). D. $\frac{4000}{3}$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi t là thời gian máy bay chuyển động trên đường băng ($t > 0$).

Khi máy bay rời đường băng thì $v(t) = 200 \Rightarrow t^2 + 10t - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20(L) \end{cases}$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{10^3}{3} + 5 \cdot 10^2 = \frac{2500}{3} (m).$$

Câu 22: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1$ (m/s²). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

- A. 200. B. 243. C. 288. D. 300.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t+1) dt = t^2 + t + C$.

Mặt khác vận tốc ban đầu là 180 km/h hay 50 m/s nên ta có $v(0) = 50 \Leftrightarrow C = 50$.

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là $v(5) = 5^2 + 5 + 50 = 80$ m/s hay 288 km/h.

Câu 23: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

- A. 4 m. **B. 5 m.** C. 3 m. D. 6 m.

Hướng dẫn giải

Chọn B

* Xe dừng lại khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (s).

* Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là:

$$\int_0^4 v(t) dt = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(20t - \frac{5t^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ m}$$

* Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là: $45 - 40 = 5$ m.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 24 (m/s) là

- A. 21** (m/s²). B. 12 (m/s²). C. 39 (m/s²). D. 20 (m/s²).

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 9t - 6 = 24 \Rightarrow t = 2$ (s).

Lại có $a(t) = s''(t) = 6t + 9 \Rightarrow a(2) = 21$ (m/s²).

Câu 25: Một vật chuyển động có phương trình $v(t) = t^3 - 3t + 1$ (m/s). Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s² là

- A. $\frac{15}{4}$ m. B. 20 m. C. 19 m. **D. $\frac{39}{4}$ m.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gia tốc $a(t) = v'(t) = 3t^2 - 3$. Tại thời điểm vật có gia tốc 24 m/s² thì $24 = 3t^2 - 3 \Leftrightarrow t = 3$.

Quãng đường vật đi được kể từ khi bắt đầu chuyển động đến khi gia tốc bằng 24 m/s^2 là quãng đường vật đi từ vị trí $t = 0$ đến vị trí $t = 3$.

$$S(3) = \int_0^3 (t^3 - 3t + 1) dt = \frac{39}{4}.$$

Câu 26: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 m/s thì bắt đầu tăng tốc với gia tốc

$$a(t) = 6t + 12t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\frac{4300}{3} \text{ m.}$ **B.** 11100 m. **C.** 4300 m. **D.** $\frac{98}{3} \text{ m.}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Vật tốc } v(t) = \int a(t) dt = \int (6t + 12t^2) dt = 3t^2 + 4t^3 + C$$

Tại thời điểm $t = 0$ (lúc bắt đầu tăng tốc) thì $v(t) = 10 \text{ m/s} \Leftrightarrow v(0) = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^3 + C = 10 \Leftrightarrow C = 10$. Vậy $v(t) = 3t^2 + 4t^3 + 10$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$$S = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (3t^2 + 4t^3 + 10) dt = 11100 \text{ m.}$$

Câu 27: Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 20 \text{ (m/s)}$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

A. $\frac{104}{3} \text{ m.}$ **B.** 104 m. **C.** 208 m. **D.** $\frac{104}{6} \text{ m.}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Vận tốc của vật khi thay đổi là } v(t) = \int (-4 + 2t) dt = t^2 - 4t + C.$$

Tại thời điểm $t = 0$ (khi vật bắt đầu thay đổi vận tốc) có $v_0 = 20 \Rightarrow C = 20$

$$\text{Suy ra } v(t) = t^2 - 4t + 20.$$

Có $v(t) = (t - 2)^2 + 16 \geq 16$, suy ra vận tốc của vật đạt bé nhất khi $t = 2$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là

$$S = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (t^2 - 4t + 20) dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 20t \right) \Big|_0^2 = \frac{104}{3} \text{ (m).}$$

Câu 28: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc

$a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

A. $68,25 \text{ m.}$ **B.** $67,25 \text{ m.}$ **C.** $69,75 \text{ m.}$ **D.** $70,25 \text{ m.}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } v(t) = \int (t^2 + 4t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } v_0 = 15 \text{ m/s} \Rightarrow C = 15.$$

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là

$$S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{2}{3}t^3 + 15t \right) \Big|_0^3 = 69,75.$$

Câu 29: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33.

B. 12.

C. 31.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } v_A(0) = 16 \text{ m/s}.$$

$$\text{Khi xe A dừng hẳn: } v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}.$$

$$\text{Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là } s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}.$$

Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1 m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33 m.

Câu 30: Hai người A, B đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc $v_1(t) = 6 - 3t$ mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc $v_2(t) = 12 - 4t$ mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

A. 25 mét.

B. 22 mét.

C. 20 mét.

D. 24 mét.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Thời gian người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là: } 6 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ giây}.$$

Quãng đường người thứ nhất di chuyển sau khi va chạm là:

$$S_1 = \int_0^2 (6 - 3t) dt = \left(6t - \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 \text{ mét}.$$

$$\text{Thời gian người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là: } 12 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ giây}.$$

Quãng đường người thứ hai di chuyển sau khi va chạm là:

$$S_2 = \int_0^3 (12 - 4t) dt = (12t - 2t^2) \Big|_0^3 = 18 \text{ mét.}$$

Khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn là: $S = S_1 + S_2 = 6 + 18 = 24$ mét.

Câu 31: Một ô tô đang chạy với tốc độ 36(km/h) thì người lái xe đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A.** 10(m). **B.** 20(m). **C.** 2(m). **D.** 0,2(m).

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}.$$

Khi xe dừng thì vận tốc bằng 0 $\Rightarrow -5t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2$ (s).

Quãng đường xe đi được từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^2 = 10 \text{ (m)}.$$

Câu 32: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- A.** 150 mét. **B.** 5 mét. **C.** 50 mét. **D.** 100 mét.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t_0 = 0$ là thời điểm người lái xe ô tô bắt đầu đạp phanh, khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc triệt tiêu nên $-4t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường:

$$\int_0^5 (-4t + 20) dt = 50 \text{ mét.}$$

Câu 33: Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- A.** 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } v(0) = 10 \text{ m/s và } v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

$$\text{Quãng đường vật đi được là } S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}.$$

Câu 34: Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 (m/s) rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Tính quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng đến khi dừng hẳn.

- A. 100 (m). B. 75 (m). **C. 200 (m).** D. 125 (m).

Hướng dẫn giải

Chọn C

Thời gian từ lúc hãm phanh đến dừng hẳn là: $-2t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10$ (s).

Quãng đường ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng là:

$$s = 20 \cdot 5 + \int_0^{10} (-2t + 20) dt = 100 + \left(-t^2 + 20t \right) \Big|_0^{10} = 100 + (-100 + 200) = 200 \text{ (m)}.$$

Câu 35: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. 500 (m). B. 2000 (m). C. $\frac{4000}{3}$ (m). **D. $\frac{2500}{3}$ (m).**

Hướng dẫn giải

Chọn D

- Thời điểm máy bay đạt vận tốc 200 (m/s) là nghiệm của phương trình:

$$t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 200 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -20 \end{cases} \Rightarrow t = 10 \text{ (s)}.$$

- Quãng đường máy bay di chuyển trên đường băng là:

$$s = \int_0^{10} (t^2 + 10t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 \right) \Big|_0^{10} = \frac{2500}{3} \text{ (m)}.$$

Câu 36: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 96,25$ (m).** B. $S = 87,5$ (m). C. $S = 94$ (m). D. $S = 95,7$ (m).

Hướng dẫn giải

Chọn A

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35 \text{ (m/s)}$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5 \text{ s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5.5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25 \text{ (m)}$.

Câu 37: Một chiếc xe đua thể thức I bắt đầu chuyển động tăng tốc với gia tốc không đổi, khi vận tốc 80 m/s thì xe chuyển động với vận tốc không đổi trong thời gian 56s, sau đó nó giảm với gia tốc không đổi đến khi dừng lại. Biết rằng thời gian chuyển động của xe là 74s. Tính quãng đường đi được của xe.

A. 5200 m.

B. 5500 m.

C. 5050 m.

D. 5350 m.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Lần tăng tốc đầu tiên xe chuyển động với vận tốc $v(t) = at$, ($a > 0$).

Đến khi xe đạt vận tốc 80m/s thì xe chuyển động hết $t_1 = \frac{80}{a} \text{ (s)}$.

Lần giảm tốc, xe chuyển động với vận tốc $v_3 = 80 - bt$, ($b > 0$).

Khi xe dừng lại thì xe chuyển động thêm được $t_3 = \frac{80}{b} \text{ (s)}$.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\frac{80}{a} + 56 + \frac{80}{b} = 74 \Leftrightarrow \frac{80}{a} + \frac{80}{b} = 18$.

Ta có $S_1 = \int_0^{t_1} at dt = \int_0^{\frac{80}{a}} at dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{80^2}{a} \text{ (m)}$.

$S_2 = 80.56 \text{ (m)}$.

$S_3 = b \int_0^{t_3} (80 - bt) dt = \int_0^{\frac{80}{b}} (80 - bt) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{80^2}{b} \text{ (m)}$.

Vậy quãng đường xe chạy được là $S_3 = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot \left(\frac{80}{a} + \frac{80}{b} \right) + 80.56 = 40.18 + 80.56 = 5200 \text{ (m)}$.

Câu 38: Một ô tô chạy với vận tốc $v_0 \text{ (m/s)}$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần với gia tốc $a = -8t \text{ (m/s}^2\text{)}$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12m. Tính v_0 ?

A. $\sqrt[3]{1296}$.

B. $\sqrt[3]{36}$.

C. $\sqrt[3]{1269}$.

D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$a = -8t \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow v = \int -8t dt = -4t^2 + C$.

Tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc của vật là $v_0 \text{ (m/s)}$ nên ta có $v_0 = C$, vậy $v = -4t^2 + v_0$.

Tại thời điểm t_0 vận tốc của vật là 0 nên ta có $0 = -4t_0^2 + v_0 \Leftrightarrow 4t_0^2 = v_0$.

Ta có

$\int_0^{t_0} (-4t^2 + v_0) dt = 12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0^3}{3} + v_0 t_0 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0^3}{3} + 4t_0^3 = 12 \Leftrightarrow t_0 = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$.

$$\Rightarrow v_0 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{36}}{2} \right)^2 = \sqrt[3]{1296}.$$

Câu 39: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- A. $8400m^3$. B. $2200m^3$. C. $6000m^3$. D. $4200m^3$

Hướng dẫn giải

Ta có $h(t) = \int (3at^2 + bt)dt = at^3 + \frac{bt^2}{2}$.

Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} 5^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 5^2 = 150 \\ 10^3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 10^2 = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Khi đó $h(t) = t^3 + t^2$.

Vậy thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 8400m^3$.

Chọn A

Câu 40: Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng

$h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01 cm)

- A. 2,67 cm. B. 2,66 cm. C. 2,65 cm. D. 2,68 cm.

Chọn B

• Hàm $h(t) = \int \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8} dt = \frac{3}{20} (t+8) \sqrt[3]{t+8} + C$

• Lúc $t=0$, bồn không chứa nước. Suy ra $h(0) = 0 \Rightarrow \frac{12}{5} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{12}{5}$

Vậy, hàm $h(t) = \frac{3}{20} (t+8) \sqrt[3]{t+8} - \frac{12}{5}$

• Mức nước trong bồn sau 6 giây là $h(6) \approx 2,66$ cm.

Câu 41: Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10129.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Thực chất đây là một bài toán tìm nguyên hàm. Cho $N'(x)$ và đi tìm $N(x)$.

Ta có $\int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \cdot \ln|1+x| + 5000$ (Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000). Với $x=12$ thì số lượng vi khuẩn là ≈ 10130 con.

Câu 42: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất?

A. 251000 con.

B. 264334 con.

C. 261000 con.

D. 274334 con.

Chọn B

- $N(t) = \int \frac{4000}{1+0,5t} dt = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + C$

- Lúc đầu có 250000 con, suy ra $N(0) = 250000 \Rightarrow C = 250000$

- Vậy $N(t) = 8000 \cdot \ln|1+0,5t| + 250000 \Rightarrow N(10) \approx 264334,0758$.

Câu 43: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Sau 10 ngày, đám vi trùng có khoảng bao nhiêu con?

A. 302542 con.

B. 322542 con.

C. 312542 con.

D. 332542 con.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

Ta có $N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{7000}{t+2} dt = 7000 \ln|t+2| + C$

Do $N(0) = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000 \ln 2$

Khi đó $N(10) = 7000 \ln 12 + 300000 - 7000 \ln 2 = 312542$.

Chọn C

Câu 44: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số

$$B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0, \text{ trong đó } B(t) \text{ là số lượng vi khuẩn trên mỗi } ml \text{ nước tại ngày thứ}$$

t . Số lượng vi khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

A. 9

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int B'(t) dt = \int \frac{1000}{(1+0,3t)^2} dt = -\frac{1000}{0,3(1+0,3t)} + C$$

$$\text{Mà } B(0) = 500 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,3.0)} + C = 500 \Leftrightarrow C = \frac{11500}{3}$$

$$\text{Do đó: } B(t) = -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3}$$

$$\text{Nước trong hồ vẫn an toàn khi chỉ khi } B(t) < 3000 \Leftrightarrow -\frac{10000}{3(1+0,3t)} + \frac{11500}{3} < 3000 \Leftrightarrow t < 10$$

Vậy kể từ ngày thứ 10, nước hồ không còn an toàn.

Câu 45: Hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19} C$. Nếu tách hai hạt electron từ $1 pm$ đến $4 pm$ thì công W sinh ra là

A. $W = 3,194.10^{-28} J$. **B.** $W = 1,728.10^{-16} J$.

C. $W = 1,728.10^{-28} J$. **D.** $W = 3,194.10^{-16} J$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

• Áp dụng công thức $A = \int_a^b \frac{kq_1q_2}{x^2} dx$.

Trong đó: $k = 9.10^9$; $a = 1 pm = 10^{-12} m$; $b = 4 pm = 4.10^{-12} m$; $q_1 = q_2 = 1,6.10^{-19} C$

• Suy ra: $A = \int_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} \frac{9.10^9 \cdot (1,6.10^{-19})^2}{x^2} dx = 2,304.10^{-28} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} = 1,728.10^{-16} J$.

Câu 46: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t , với $I(t) = 0,3 - 0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong $0,05$ giây là bao nhiêu?

A. $0,29975 mC$.

B. $0,29 mC$.

C. $0,01525 mC$.

D. $0,01475 mC$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$q = \int_0^{0,05} I(t) dt = \int_0^{0,05} (0,3 - 0,2t) dt = \left(0,3t - \frac{t^2}{10} \right) \Big|_0^{0,05} = 0,01475 mC.$$

Câu 47: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là

$$i(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \text{ Biết } i = q' \text{ với } q \text{ là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc } t = 0, \text{ điện}$$

lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\frac{\pi}{\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$.

B. 0 .

C. $\frac{2I_0}{\omega}$.

D. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} i(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2I_0}{\omega}$$

Câu 48: Khi một chiếc lò xo bị kéo căng thêm $x(m)$ so với độ dài tự nhiên là $0,15(m)$ của lò xo thì chiếc lò xo trở lại (chống lại) với một lực $f(x) = 800x$. Hãy tìm công W sinh ra khi kéo lò xo từ độ dài từ $0,15(m)$ đến $0,18(m)$.

A. $W = 36.10^{-2} J$.

B. $W = 72.10^{-2} J$.

C. $W = 36 J$.

D. $W = 72 J$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Công được sinh ra khi kéo căng lò xo từ $0,15m$ đến $0,18m$ là:

$$W = \int_0^{0,03} 800x \cdot dx = 400x^2 \Big|_0^{0,03} = 36.10^{-2} J.$$

Chú ý: Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo) và được xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục Ox từ a tới b là $A = \int_a^b F(x) dx$.

Câu 49: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một mạch điện có điện trở thuần R . Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kỳ T .

A. $\frac{RI_0^2}{2} T$.

B. $\frac{RI_0^2}{3} T$.

C. $\frac{RI_0^2}{4} T$.

D. $\frac{RI_0^2}{5} T$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \int_0^T Ri^2 dt = \int_0^T RI_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) dt = RI_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)}{2} dt \\ &= \frac{RI_0^2}{2} \left(t - \frac{T}{4\pi} \sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right) \Big|_0^T = \frac{RI_0^2}{2} T. \end{aligned}$$

Câu 50: Đặt vào một đoạn mạch hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0 \sin \frac{2\pi}{T}t$. Khi đó trong mạch có dòng điện xoay chiều $i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng điện và hiệu

điện thế. Hãy Tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kì.

- A. $\frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi$. B. $\frac{U_0 I_0}{2} T \sin \varphi$. C. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos(\varphi + \pi)$. **D. $\frac{U_0 I_0}{2} T \cos \varphi$**

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T u i dt = \int_0^T U_0 I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \sin \frac{2\pi}{T}t dt = U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos \varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) dt \\ &= \frac{U_0 I_0}{2} \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos \varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \left(t \cos \varphi - \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right) \right) \Bigg|_0^T = \frac{U_0 I_0}{2} T \cos \varphi. \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

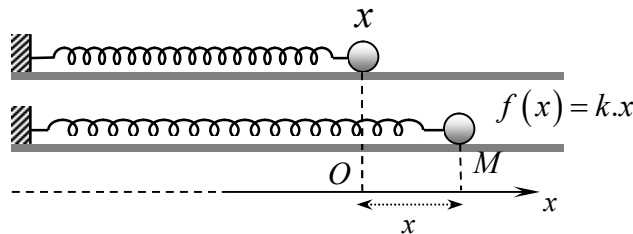
Chọn D

Câu 51: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ 10cm đến 15cm cần lực 40N . Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ 15cm đến 18cm .

- A. $A = 1,56 \text{ (J)}$. B. $A = 1 \text{ (J)}$. C. $A = 2,5 \text{ (J)}$. **D. $A = 2 \text{ (J)}$**

Hướng dẫn giải

Chọn A



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với $k \text{ (N/m)}$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài 10cm đến 15cm , lượng kéo giãn là $5\text{ cm} = 0,05\text{ m}$. Điều này có nghĩa $f(0,05) = 40$, do đó:

$$0,05k = 40 \Leftrightarrow k = \frac{40}{0,05} = 800 \text{ (N/m)}$$

Vậy $f(x) = 800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ 15cm đến 18cm là:

$$A = \int_{0,05}^{0,08} 800 dx = 400x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 400 \left[(0,08)^2 - (0,05)^2 \right] = 1,56 \text{ (J)}$$

Câu 52: Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ thanh ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, một đầu thanh tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy biểu diễn góc α theo thời gian t (Tính bằng công thức tính phân)

$$\text{A. } t = - \int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3}{2a}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}}.$$

$$\text{B. } t = - \int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin \alpha_o + \sin \alpha)}}.$$

$$\text{C. } t = - \int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}}.$$

$$\text{D. } t = - \int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}}.$$

Hướng dẫn giải

Do trượt không ma sát nên cơ năng của thanh được bảo toàn

$$mga \sin \alpha_o = mga \sin \alpha + K_q + K_u \quad (1)$$

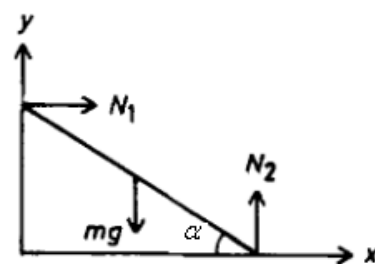
Do khối tâm chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính a nên: $K_u = \frac{ma^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} ma^2 \alpha'^2$

Động năng quay quanh khối tâm: $K_q = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} m(2a)^2 \alpha'^2 = \frac{1}{6} ma^2 \alpha'^2$

Thay vào (1) ta được: $\frac{2}{3} a \alpha'^2 = g(\sin \alpha_o - \sin \alpha)$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}$$

$$t = - \int_{\alpha_o}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin \alpha_o - \sin \alpha)}}.$$



Chọn D

Câu 53: Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I = \int_0^a [p(x) - P].dx.$$

Với $p(x)$ là hàm biểu thị biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa.

Câu 54: a là số lượng sản phẩm đã bán ra, $P = p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm là a .

Cho $p = 1200 - 0,2x - 0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD). Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500.

A. 1108333,3 USD.

B. 570833,3 USD.

C. 33333,3 USD.

D. Đáp án khác.

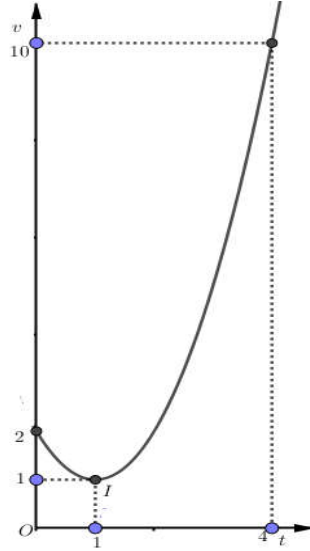
Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức trên với $a = 500$; $P = p(a) = p(500) = 1075$.

Suy ra $I = \int_0^{500} (1200 - 0,2x - 0,0001x^2 - 1075) dx = \left(125x - \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{30000} \right) \Big|_0^{500} \approx 33333,3 \text{ USD}$

Câu 55: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = 6$ (km). B. $s = 8$ (km). **C. $s = \frac{40}{3}$ (km).** D. $s = \frac{46}{3}$ (km).

Hướng dẫn giải

Chọn C

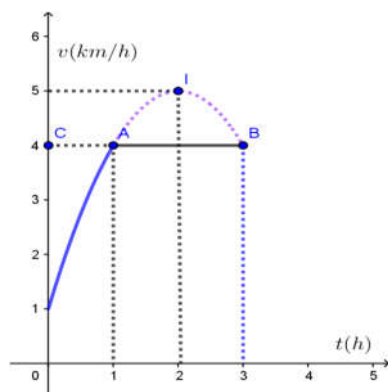
Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2) dt = \frac{40}{3} \text{ (km)}.$

Câu 56: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. 15 (km). **B. $\frac{32}{3}$ (km).** C. 12 (km). D. $\frac{35}{3}$ (km).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Parabol có đỉnh $I(2;5)$ và đi qua điểm $(0;1)$ có phương trình $y = -x^2 + 4x + 1$.

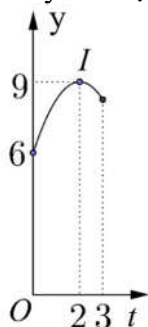
Quãng đường vật đi được trong 1 giờ đầu là:

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2 + 4x + 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{3}$$

Quãng đường vật đi được trong 2 giờ sau là $S_2 = 2.4 = 8$

Vậy trong ba giờ vật đi được quãng đường là $S = S_1 + S_2 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$ (km).

Câu 57: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 24,25$ (km) B. $s = 26,75$ (km) C. $s = 24,75$ (km) D. $s = 25,25$ (km)

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ (km/h).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c = 6 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = 3 \\ a = \frac{-3}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = \frac{-3}{4}t^2 + 3t + 6.$$

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

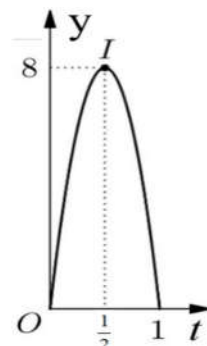
$$s = \int_0^3 \left(\frac{-3}{4}t^2 + 3t + 6 \right) dt = \frac{99}{4} \approx 24,75.$$

Chọn C

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ (km/h).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 32 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -32t^2 + 32t.$$

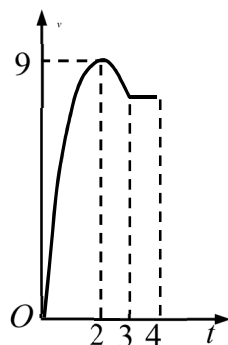


Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 45 phút là:

$$s = \int_0^{3/4} (-32t^2 + 32t) dt = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Chọn C

Câu 58: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó?



A. 26,5 (km)

B. 28,5 (km)

C. 27 (km)

D. 24 (km)

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ (km/h).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 9 \\ a = \frac{-9}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = \frac{-9}{4}t^2 + 9t.$$

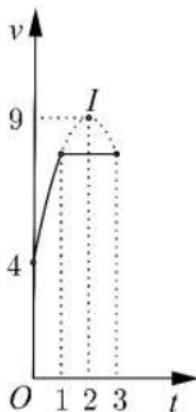
Ta có $v(3) = \frac{27}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y = \frac{27}{4}$

. Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}t^2 + 9t \right) dt + \int_3^4 \frac{27}{4} dt = 27.$$

Chọn C

Câu 59: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A.** $s = 23,25$ (km) **B.** $s = 21,58$ (km) **C.** $s = 15,50$ (km) **D.** $s = 13,83$ (km)

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình chuyển động của vật theo đường parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ (km/h).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = 5 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4.$$

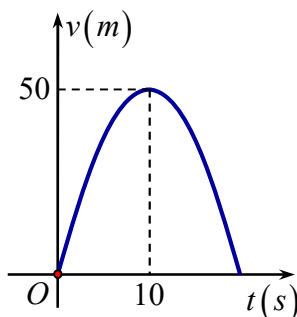
Ta có $v(1) = \frac{31}{4}$ suy ra phương trình chuyển động của vật tốc theo đường thẳng là $y = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ là:

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,58.$$

Chọn B

Câu 60: Một vật chuyển động vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên dưới.



Biết rằng sau 10 s thì vật đó đạt đến vận tốc cao nhất và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì vật đó đi được quãng đường bao nhiêu mét?

- A.** 300m. **B.** $\frac{1400}{3}$ m. **C.** $\frac{1100}{3}$ m. **D.** $\frac{1000}{3}$ m.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử vận tốc của vật biểu diễn bởi hàm số $(P): v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta có (P) đi qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(10;50)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 50 \\ -\frac{b}{2a} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow (P): v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t.$$

Lúc bắt đầu: $t = 0$ s; lúc đạt vận tốc cao nhất: $t = 10$ s.

Vậy quãng đường vận đó đi được kể từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t \right) dt = \frac{1000}{3}.$$

Câu 61: đám vi khuẩn ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

A. 10130.

B. 5130.

C. 5154.

D. 10132.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int N'(x) dx = \int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \ln|1+x| + C \Rightarrow N(x) = 2000 \ln|1+x| + C.$

Khi $x = 0 \Rightarrow N(0) = 2000 \ln|1+0| + C = 5000 \Rightarrow C = 5000.$

Khi $x = 12 \Rightarrow N(12) = 2000 \ln|1+12| + 5000 = 1030.$

Câu 62: . Gọi $F(t)$ là số lượng vi khuẩn phát triển sau t giờ. Biết $F(t)$ thỏa mãn $F'(t) = \frac{10000}{1+2t}$

với $\forall t > 0$ và ban đầu có 1000 con vi khuẩn. Hỏi sau 2 giờ số lượng vi khuẩn là

A. 17094.

B. 9047.

C. 8047.

D. 32118.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $F(t) = \int F'(t) dt = \int \frac{10000}{1+2t} dt = 5000 \ln(1+2t) + C.$

Ban đầu có 1000 con vi khuẩn $\Rightarrow F(0) = C = 1000 \Rightarrow F(t) = 5000 \ln(1+2t) + 1000.$

Suy ra số vi khuẩn sau 2 giờ là $F(2) = 5000 \ln 5 + 1000 \approx 9047.$

Câu 63: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua mạch dao động LC lí tưởng có phương trình

$i = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Ngoài ra $i = q'(t)$ với q là điện tích tức thời trong tụ. Tính từ lúc $t = 0$,

điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

A. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

B. 0.

C. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$.

D. $\frac{I_0}{\omega}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của mạch trong thời gian $\frac{\pi}{2\omega}$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt = -\frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \\ &= -\frac{I_0}{\omega} \left[\cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{I_0}{\omega} \left[\cos(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{I_0}{\omega}. \end{aligned}$$